Continuación Única y Buen Planteamiento de la Ecuación r-BO

Wilson Sandoval Rodriguez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2012

Continuación Única y Buen Planteamiento de la Ecuación r-BO

Wilson Sandoval Rodriguez

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2012

Resumen

En este trabajo tratamos el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y en los espacios de Sobolev con pesos $\Im_{s,r}$ del problema de Cauchy asociado a la ecuación r-BO

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

donde $u(x,t)$ es real si x, $t \in \mathbb{R}$. También, estableceremos resultados sobre la continuación única, para esta ecuación.

Palabras clave: **Problema de Cauchy, Transformada de Hilbert, Ecuación r-BO, Buen planteamiento local y global.**

Abstract

In this work we treat the well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ and in the Sobolev spaces with weights $\Im_{s,r}$ of the Cauchy problem associated to the r-BO equation

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

where $u(x,t)$ is real if x, $t \in \mathbb{R}$. Also, we establish results over unique continuation, for this equation.

Keywords: **Cauchy problem, Hilbert Transformation, r-BO equation, Local and global well-posedness.**

Contenido

Resumen **III**

Abstract **IV**

Introducción **VI**

1. Preliminares **1**

2. El Problema Local **6**

2.1. Existencia 11

2.2. Dependencia continua 13

2.3. Unicidad 15

3. El Problema Global **16**

4. Teoría en espacios de Sobolev con pesos **20**

Bibliografía **31**

Introducción

En este trabajo trataremos con el buen planteamiento tanto local como global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ de la ecuación r-BO

$$u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0,$$

Específicamente, estudiaremos el buen planteamiento del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R})) \\ u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $u(x,t)$ es una función a valor real con x, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ en (0.1) denota la transformada de Hilbert definida a través de la transformada de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{H}f}(k) := -isgn(k)\widehat{f}(k), k \in \mathbb{R}$$

donde

$$sgn(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0, \\ 1, & k > 0. \end{cases}$$

Con el fin de tratar el buen planteamiento de (0.1) usaremos una ecuación integral equivalente y el teorema del punto fijo de Banach en un espacio adecuado, lo que nos permitirá obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$, para $s > 1/2$, posteriormente probaremos que dicho problema es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$ utilizando estimativas a priori. Recientemente Iorio ([9]), Ponce-Fonseca ([5]) han obtenido resultados interesantes de continuación única para la BO, por tal razón esperamos obtener resultados similares para esta ecuación. Antes de emprender esta tarea haremos algunos comentarios sobre (0.1).

La ecuación diferencial parcial (E.D.P.) en (0.1) conocida como r-BO (ecuación regularizada de Benjamin-Ono), es un modelo para la evolución en el

tiempo de la longitud de crestas de ondas en la superficie de contacto entre dos fluidos inmiscibles. Algunas situaciones en las que la ecuación es útil son: en las picnoclinas en la profundidad del océano, y el sistema de dos capas creado por la afluencia de agua de un río en el mar. Esta ecuación es formalmente equivalente a la ecuación de Benjamin-Ono

$$v_t + v_x + vv_x - \mathcal{H}v_{xx} = 0$$

En este caso, el estudio de la buena colocación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ fue hecho por Iório [9], Ponce [12] y el estudio de la buena colocación en los espacios en los espacios de sobolev con peso $\Im_{s,r}$ fue realizado por Iório [6] , [9], donde se obtienen resultados sorprendentes, tales como: Si la solución v de la B-O es muy regular y tiene buena decaída en cierto instante t, entonces $v \equiv 0$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Notación

En este capítulo se introducirán algunas notaciones básicas, además de algunas definiciones y resultados útiles para el desarrollo del trabajo. Las demostraciones serán omitidas, sin embargo se dará una referencia donde se puedan encontrar.

- $\mathscr{B}(X,Y)$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y.
- $\mathscr{B}(X)$=$\mathscr{B}(X,X)$.
- $C([0,T],X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de $[0,T]$ en el espacio de Banach X, dotado de la norma $\|u\|_{X,\infty} = \sup_{[0,T]}\|u(t)\|_X$
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice.
- Si α es un multi-índice y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

  a) $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

  b) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

  c) $\partial^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$

- $\Lambda^s = (1-\triangle)^{\frac{s}{2}}$
- $L^p_s = L^p_s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s}L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\| \quad \|_{L^p_s} = | \quad |_{s,p}$

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función $\mathscr{F}f = \widehat{f}$ definida por*

$$(\mathscr{F}f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$$

es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2. *El espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las $f \in \mathscr{P}$ tales que*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| < \infty \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n.$$

El espacio de Schwartz es también conocido como el espacio de decrecimiento rápido de las funciones en $\mathscr{P}$.

Proposición 1.1. *Con la métrica,*

$$d(\phi,\psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1+\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}$$

el espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo.

Teorema 1.1. *La transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.*

Demostración. Véase [9] Teorema 7.42. ■

Definición 1.3. *Se define $\mathscr{S}'$, el espacio de las distribuciones temperadas, como el dual topológico de $\mathscr{S}$.*

Teorema 1.2. *Un funcional lineal f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pertenece a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existen constantes $C \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}$, tal queda*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq l} \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [9] Teorema 7.7. ■

Observación 1.1. *En el caso de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, las funciones en L^p definen distribuciones en el sentido usual, es decir, dada una función en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fórmula*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

define un elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por supuesto, no todas las distribuciones se definen de esta forma y la δ_x, es un ejemplo de ello. Por simplicidad se escribe $T_f = f$.

Definición 1.4. *La transformada de Fourier $\widehat{f}$ de una distribución temperada $f \in \mathscr{S}'$ es definida por*

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.3. *La transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.*

Demostración. Véase [9] Teorema 7.48. ■

Definición 1.5. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev (del tipo L^2) en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,/\, (1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Teorema 1.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno*

$$(f \,|\, g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Además se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq r$, donde $\hookrightarrow$ denota contenencia continua y densa.*

2. *$\big(H^s(\mathbb{R}^n)\big)'$, el dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.*

3. *$f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, si y solo si $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todos los multiíndices α tales que $|\alpha| \leq m$. En este caso, las normas*

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \quad y \quad |||f|||_s = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\partial^\alpha f\|_0^2\right)^{1/2}$$

   son equivalentes.

4. *El Lema de Sobolev se cumple, es decir, $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > \frac{n}{2}$, donde $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.*

Demostración. Véase [9] Teorema 7.75. ■

Teorema 1.5. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach para todo $s > \frac{n}{2}$. En particular, existe una constante $c_s \geq 0$ tal que*

$$\|f\,g\|_s \leq c_s \|f\|_s \|g\|_s \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [9] Teorema 7.77. ■

Definición 1.6. *Sea H un espacio de Hilbert. Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en H es una aplicación $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t) \in \mathscr{B}(H)$ tal que:*

1. *U es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,*

2. *$U(t+t') = U(t)U(t')$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$,*

3. *$\lim\limits_{t \to t'} \|U(t)\phi - U(t')\phi\|_H = 0$, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$, y $\phi \in H$.*

Definición 1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una Contracción es una aplicación $T : X \longrightarrow X$ tal que: $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si $\lambda < 1$ se dice que T es una contracción estricta.*

Teorema 1.6 (**Teorema del punto fijo de Banach**). *Sea X un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ es una contracción estricta, entonces T tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$.*

Teorema 1.7 (**Desigualdad de Gronwall**). *Sea $k \in L^1([a,b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([0,T], \mathbb{R})$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)e^{\left[\int_a^s k(r)dr\right]}g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

En particular si g es constante, se tiene:

$$f(t) \leq g(t)e^{\left[\int_a^t k(s)ds\right]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Teorema 1.8 (**Desigualdad de Young**). *Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces se cumple*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.9 (**Kato-Ponce**). *Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces $L^p_s \cap L^\infty$ es un álgebra de Banach. Además*

$$|fg|_{s,p} \leq c\big(\|f\|_{L^\infty}|g|_{s,p} + |f|_{s,p}\|g\|_{L^\infty}\big).$$

Observación 1.2. *Dado que $\|\Lambda^s u^n\|_0 = \|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 = |u^{n-1}u|_{0,2}$, si hacemos $f = u^{n-1}$ y $g = u$ en el teorema anterior, y lo aplicamos sucesivas veces se obtiene*

$$\|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 \leq c\|u\|^{n-1}_{L^\infty}\|\Lambda^s u\|_0. \tag{1.1}$$

CAPÍTULO 2

El Problema Local

En este capítulo consideraremos el buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado a la ecuación (0.1), en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$

Los resultados que se obtienen a continuación serán necesarios para crear las condiciones adecuadas para el buen planteamiento local de la ecuación. Para comenzar nótese que la ecuación (0.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xt} &= 0 \\ (1+\mathcal{H}\partial_x)u_t &= -\partial_x u - \frac{1}{2}\partial_x u^2 \\ u_t &= -\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u - \frac{1}{2}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En la ecuación (2.1) sean $A = -\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}$ y $B = -\frac{1}{2}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}$.

Proposición 2.1. *El operador* $B = -\frac{1}{2}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1} \in \mathscr{B}(H^s)$, *además* $B(u^2) \in H^s$ *para todo* $u \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$.

Demostración. Sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}\|B\varphi\|_s^2 =& \|-\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\varphi\|_s^2\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1+|\xi|)^2}(1+\xi^2)^s|\widehat{\varphi}|^2 d\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s|\widehat{\varphi}|^2 d\xi\\ &\leq \|\varphi\|_s^2.\end{aligned}$$

Como $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach si $s > \frac{1}{2}$, $u^2 \in H^s$ y $\|Bu^2\|_s^2 < \infty$.

Si se define la función $f : H^s \to H^s$ como $f(u) = Bu^2$, se observa que para $u \in H^s$,

$$f(u) \in H^s. \tag{2.2}$$

■

Proposición 2.2. *La función definida en (2.2) satisface la condición de Lipschitz local*

Demostración. Para efectos de la demostración se tienen en cuenta dos hechos importantes

(*i*) si $s > \frac{1}{2}$, entonces el Teorema 1.4−(4) implica que

$$f \leq \|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq c\|f\|_s, \quad f \in H^s.$$

(*ii*) Si $s > \frac{1}{2}$, entonces el Teorema 1.5 implica que existe $c_s \geq 0$ constante tal que

$$\|fg\|_s \leq c_s\|f\|_s\|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s.$$

Entonces si $u, v \in H^s$ y $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\|u^2 - v^2\|_s &= \|(u-v)(u+v)\|_s\\ &\leq c_s\|u-v\|_s\|u+v\|_s\\ &\leq c_s\|u-v\|_s\big(\|u\|_s + \|v\|_s\big)\end{aligned}$$

Sea $K = c_s$, entonces

$$\|u^2 - v^2\|_s \leq c_s\|u-v\|_s\big(\|u\|_s + \|v\|_s\big).$$

Sea

$$\big(L(\|u\|_s\,,\|v\|_s)\big)^{1/2} = K \sup_{t\in[0,T]} (\,\|u\|_s+\|v\|_s),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(v)\|_s =&\|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}(u^2-v^2)\|_s\\ &\leq \|u^2-v^2\|_s\\ &\leq L(\|u\|_s\,,\|v\|_s)\|u-v\|_s. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nótese que $L(\cdot,\cdot)$ es no decreciente respecto a cada uno de sus argumentos, teniéndose de (2.3) la condición de Lipschitz local. ■

Proposición 2.3. *Sea $A=-(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}$, entonces la aplicación $t\in\mathbb{R}\longmapsto E(t)=e^{tA}$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en $H^s(\mathbb{R})$.*

Demostración. La aplicación $E(t)$ también puede expresarse de la siguiente manera

$$E(t)\varphi = e^{tA}\varphi = \big(e^{-\frac{i\xi t}{1+|\xi|}}\widehat{\varphi}\big)^{\vee}, \quad \varphi\in H^s, t\in\mathbb{R}$$

sea $b(\xi)=\dfrac{-i\xi}{1+|\xi|}$ entonces

$$E(t)=e^{tA}\varphi=\big(e^{b(\xi)t}\widehat{\varphi}\big)^{\vee},$$

$E(t)$ cumple con las siguientes condiciones:

1. $E(t)$ es unitario para todo $t\in\mathbb{R}$

$$\|e^{tA}\varphi\|_s = \big\|\big(e^{b(\xi)t}\widehat{\varphi}\big)^{\vee}\big\|_s = \|\varphi\|_s \tag{2.4}$$

2.

$$\begin{aligned}E(t+t')\varphi &= e^{(t+t)A'}\varphi\\ &= e^{tA+t'A}\varphi\\ &= e^{tA}e^{t'A}\varphi\\ &= E(t)E(t')\varphi\end{aligned}$$

entonces $E(t+t')=E(t)E(t')$.

3. Dado $\epsilon > 0$ la aplicación $t \in [\epsilon, \infty) \longmapsto E(t)\varphi$ es uniformemente continua con respecto a la norma H^s.

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |e^{tb(\xi)} - e^{t'b(\xi)}|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |e^{(t-t')b(\xi)} - 1|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por el teorema del valor medio se tiene

$$|e^{(t-t')b(\xi)} - 1| = |b(\xi)e^{\tau b(\xi)}||t-t'| = \frac{|\xi|}{1+|\xi|}|t-t'| \leq |t-t'|.$$

Entonces

$$|e^{(t-t')b(\xi)} - 1|^2 \leq |t-t'|^2.$$

La ecuación (2.5) queda

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s &\leq \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |t-t'|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\ &\leq |t-t'|^2 \|\varphi\|_s^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

haciendo $t \to t'$ en (2.6) se tiene que $\|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s \to 0$. En particular

$$\lim_{t \to t'} \quad \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s = 0.$$

■

Por comodidad, el problema de Cauchy dado por la ecuación (0.1), lo escribiremos de la siguiente forma

$$\begin{cases} u_t = Au + f(u) \\ u(0) = \varphi \in H^s. \end{cases} \tag{2.7}$$

Por el método de variación de parámetros se puede identificar una posible solución para $s > \frac{1}{2}$, dada por

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau, \tag{2.8}$$

en la cual por (2.2) y (2.4) se tiene que $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R})\big)$.

Proposición 2.4. *Sea $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R})\big)$ con $s > \frac{1}{2}$, una solución de (2.7), entonces u satisface (2.8). Recíprocamente, si $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R})\big)$ es una solución de (2.8), entonces $u \in C^1\big([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R})\big)$ y satisface (2.7) con derivada*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Au - f(u) \right\|_{s-1} = 0 \tag{2.9}$$

Demostración. Si u satisface (2.7), por el método de variación de parámetros se tiene que u satiface (2.8).

Recíprocamente, sea u tal que satisface (2.8). Derivando a ambos lados con respecto al tiempo se tiene

$$\partial_t u(t) = Ae^{tA}\varphi + \partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \tag{2.10}$$

Consideremos la integral de el lado derecho de (2.10)

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg\{ \int_0^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \quad - \\
&\qquad \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \Bigg\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg\{ \int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A} \Big] f(u(\tau))d\tau \quad + \\
&\qquad \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Por un lado se tiene el valor principal de una función continua, es decir

$$\lim_{h\to 0} \left\| \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau - f(u(t)) \right\|_{s-1} = 0. \tag{2.12}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \quad \frac{1}{h}\int_0^t \left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\right] f(u(\tau))d\tau \\
&= \int_0^t \lim_{h\to 0} \quad \frac{1}{h}\left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\right] f(u(\tau))d\tau \\
&= \int_0^t \partial_t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\
&= \int_0^t A e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\
&= A\int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Si de la ecuación (2.8) despejamos la integral, se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \quad \frac{1}{h}\int_0^t \left[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\right] f(u(\tau))d\tau = A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big). \qquad (2.14)$$

De las ecuaciones (2.11),(2.12) y (2.14), la ecuación (2.10) queda

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t) &= Ae^{tA}\varphi + A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big) + f(u(\tau)) \\
\partial_t u(t) &= Au(t) + f(u(t)). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ en (2.8), se tiene que $u(0) = \varphi$. Se concluye entonces que u satisface (2.7).

■

2.1. Existencia

Proposición 2.5. *Se define el conjunto*

$$\mathfrak{X}_s(T, M) = \{u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R})\big) \mid \|u(t) - e^{tA}\varphi\|_s \leq M\}, \quad M \geq 0.$$

con la métrica

$$d_{s,T}(u, v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\| = \|u(t) - v(t)\|_{s,\infty}.$$

Entonces, $(\mathfrak{X}_s, d_{s,T})$*, es un espacio métrico completo.*

Demostración. El conjunto $\mathfrak{X}_s(T,M)$ es un subconjunto cerrado de $C([0,T],H^s(\mathbb{R}))$ el cual es completo con la métrica $d_{s,T}$, que es precisamente la inducida por la norma $\|u\|_{s,\infty}$. Por lo tanto $(\mathfrak{X}_s, d_{s,T})$ es un espacio métrico completo. ■

Teorema 2.1. *La función definida por*

$$F(u)(t) := u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau, \tag{2.16}$$

es una contracción y además existe al menos una solución al problema (2.7).

Demostración. La idea es aplicar el principio de contracción de Banach a la función definida en (2.16) en el espacio de la proposición 2.5. Con esto en mente, sean $M \geq 0$, y $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A} f(u)\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t \|f(u)\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t L(\|u\|_s, 0)\, \|u(\tau)\|_s d\tau \quad \text{, por (2.3)}
\end{aligned}$$

si $u \in \mathfrak{X}_s(T,M)$, por (2.4)

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau) - e^{\tau A}\varphi\|_s + \|e^{\tau A}\varphi\|_s \leq M + \|\varphi\|_s$$

Luego, si $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s &\leq L(\|u\|_s, 0)\,(M + \|\varphi\|_s)t \\
&\leq L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)T
\end{aligned}$$

Sea $\alpha(M,\, \|\varphi\|_s) = [\, L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)\,]^{-1} M$. Si $0 < T < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s)$, entonces se tiene

$$\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s \leq M \tag{2.17}$$

es decir, $F(u)(t) \in \mathfrak{X}_s(T,M)$.

Veamos ahora que F es una contracción. Dados $u, v \in \mathfrak{X}_s$

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - F(v)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A}(f(u) - f(v))\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t \|f(u) - f(v)\|_s d\tau \\
&\leq L(\|u\|_s\,,\, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, d_{S,T}(u, v)\, T
\end{aligned}$$

Sea $\beta(M,\, \|\varphi\|_s) = [\, L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\,]^{-1}$. Si se tienen las opciones

$$0 < T < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s) < \beta(M,\, \|\varphi\|_s) \quad \text{ó}$$

$$0 < T < \beta(M,\, \|\varphi\|_s) < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s)$$

en cualquier caso se cumple que

$$0 < L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T < 1.$$

Si hacemos $\lambda = L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T$ y $\widetilde{T} = \widetilde{T}(M,\, \|\varphi\|_s) = \text{mín}\,(\alpha, \beta)$, se cumple que

$$d_{s,\widetilde{T}}\,(F(u)(t), F(v)(t)) \leq \lambda\, d_{s,\widetilde{T}}\,(u, v), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Por lo tanto F es una contracción. Aplicando el Teorema del punto fijo de Banach, existe $u \in \mathfrak{X}_s$ tal como lo indica en la ecuación (2.8), es decir

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau)) d\tau.$$

Esto garantiza la existencia de soluciones para el problema de Cauchy (2.7). ■

2.2. Dependencia continua

Teorema 2.2. *La función $\varphi \longmapsto u$ es continua.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que cada φ_n es una condición inicial del problema de Cauchy (2.7) y además $\varphi_n \xrightarrow{H^s} \varphi$. Sea también $u_n \in C([0,\widetilde{T}_n), H^s(\mathbb{R}))$ la solución correspondiente a φ_n, donde $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}(M, \|\varphi_n\|_s)$.
Sea $\widetilde{T}_\infty = \widetilde{T}(M, \|\varphi\|_s)$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_\infty$. Sabemos que $\widetilde{T}$ depende tanto de α como de β y estas a su vez de $L(\cdot|\cdot)$, la cual es continua, por tanto $\widetilde{T}$ lo es también, luego, si $n \to \infty$, $\widetilde{T}_n \to \widetilde{T}_\infty$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_n$, para todo $n \geq N$.
Esto indica que $u_n \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}))$, para todo $n \geq N$ y además por (2.17) $u_n \in \mathfrak{X}_s(T,M)$, cumpliéndose también que

$$\|u_n(\tau)\|_s \leq M + \|\varphi_n\|_s \leq M + K, \quad \text{donde} \quad K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_s, \quad 0 < \tau < T.$$

ahora, sea u_∞ la solución correspondiente a φ. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + \int_0^t \|f(u_n(\tau)) - f(u_\infty(\tau))\|_s d\tau \\
\leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(\|u_n\|_s\,,\, \|u_\infty\|_s) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau \\
\leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(M_s(u_n\,,u_\infty), M_s(u_n\,,u_\infty)) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau
\end{aligned}$$

donde

$$M_s(u_n\,,u_\infty) = \text{máx}\left\{\sup_{[0,T]}\|u_n(t)\|_s\,, \sup_{[0,T]}\|u_\infty(t)\|_s\right\} \leq M + K$$

por tanto

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + L(M+K, M+K) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau$$

si aplicamos ahora la desigualdad de Gronwall

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)t} \\
\leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)T}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sup_{n\in N}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n-\varphi\|_s\, e^{L(M+K,M+K)T}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{n\in N}\|u_n(t)-u_\infty(t)\|_s = 0 \tag{2.18}$$

se concluye entonces la dependencia continua. ■

2.3. Unicidad

Teorema 2.3. *La función definida en (2.8) es la única solución al problema (2.7).*

Demostración. Supóngase que u y v son soluciones del problema de Cauchy (2.7) con condiciones iniciales φ y ψ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|_s &\leq \|\varphi-\psi\|_s + \int_0^t \|f(u(\tau))-f(v(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi-\psi\|_s + L(\|u\|_s,\|v\|_s)\int_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|_s d\tau\end{aligned}$$

luego por la desigualdad de Gronwall

$$\|u(t)-v(t)\|_s \leq \|\varphi-\psi\|_s\, e^{L(\|u\|_s,\|v\|_s)t}. \tag{2.19}$$

Entonces si $\varphi=\psi$ se tiene que $u=v$ y por tanto la unicidad.

■

Corolario 2.1. *Para $s>\frac{1}{2}$, el problema de Cauchy (2.7) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$.*

Demostración: Es consecuencia de los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3. ■

CAPÍTULO 3

El Problema Global

El objetivo ahora es conocer el buen planteamiento global del problema de Cauchy (0.1), para ello usaremos una estimativa de tipo Brezis-Gallouet [4]. Pero antes consideremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Suponga $f \in H^s$ con $s > \frac{1}{2}$ y sea $u \in C([-T,T], H^s)$ la correspondiente solución del problema de Cauchy (0.1) entonces*

$$\|u(t)\|_{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\frac{1}{2}}$$

Demostración. De la ecuación (0.1) se tiene que

$$(1 + \mathcal{H}\partial_x)u_t = -\partial_x u - \frac{1}{2}\partial_x u^2 \tag{3.1}$$

Ahora

$$\|u\|_{\frac{1}{2}}^2 = \left\langle J^{\frac{1}{2}}u \ , \ J^{\frac{1}{2}}u \right\rangle$$

donde, $J^s = (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\frac{1}{2}}^2 &= \frac{d}{dt}\left\langle J^{\frac{1}{2}}u\ ,\ J^{\frac{1}{2}}u\right\rangle \\
&= 2\left\langle (1+\mathcal{H}\partial_x)^{\frac{1}{2}}u\ ,\ (1+\mathcal{H}\partial_x)^{\frac{1}{2}}\big(-\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u-\frac{1}{2}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\big)\right\rangle \\
&= 2\left\langle (1+\mathcal{H}\partial_x)u\ ,\ -\frac{\partial_x u}{(1+\mathcal{H}\partial_x)}-\frac{\partial_x u^2}{2(1+\mathcal{H}\partial_x)}\right\rangle \\
&= 2\left\langle u\ ,\ -\partial_x u-\frac{1}{2}\partial_x u^2\right\rangle \\
&= -2\left\langle u\ ,\ \partial_x u\right\rangle-\left\langle u\ ,\ \partial_x u^2\right\rangle \qquad (3.2)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ya que cada uno de los miembros del lado derecho de (3.2) son iguales a cero y esto finaliza la demostración. ■

Lema 3.1. *Sea $f \in H^s(\mathbb{R})$, con $s > \frac{1}{2}$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_\infty \leq C\big(1+\sqrt{\log(1+\|f\|_s)}\|f\|_{\frac{1}{2}}\big).$$

Demostración. Sea $R > 0$, donde R será seleccionado más adelante de manera adecuada, tenemos entonces que

$$|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|d\xi = \int_{|\xi|<R} \frac{(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}}{(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}}|\widehat{f}(\xi)|d\xi + \int_{|\xi|\geq R} \frac{(1+|\xi|)^s}{(1+|\xi|)^s}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \tag{3.3}$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwartz

$$
\begin{aligned}
|f(x)| \leq &\left(\int_{|\xi|<R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|\xi|<R}(1+|\xi|)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+\left(\int_{|\xi|\geq R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{2s}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|\xi|\geq R}(1+|\xi|)^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Como $s > \frac{1}{2}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $2(s-\epsilon) > 1$ de donde;

$$\begin{aligned}|f(x)| \leq & \sqrt{2}\sqrt{\log(1+R)}\|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(R+1)^{\epsilon}}\left(\int_{|\xi|\geq R}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{2(s-\epsilon)}}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_s \\ = & \sqrt{2}\sqrt{\log(1+R)}\|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{C_0}{(R+1)^{\epsilon}}\|f\|_s\end{aligned}$$

Seleccionando $R = (1+\|f\|_s)^{\frac{1}{\epsilon}} - 1$, se obtiene

$$\|f\|_\infty \leq C_1\epsilon^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\log(1+\|f\|_s)}\|f\|_{\frac{1}{2}} + \frac{C_0\|f\|_s}{1+\|f\|_s},$$

lo cual finaliza la demostración. ■

Teorema 3.1. *El problema de Cauchy asociado a (0.1) es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{2}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A}f(u(\tau))d\tau, \tag{3.4}$$

de esta manera usando el lema anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_s \leq & \|\varphi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \|u(\tau)\|_\infty\|u(\tau)\|_s d\tau \\ & \leq \|\varphi\|_s + C_0\int_0^t\left(1+\sqrt{\log(1+\|u(\tau)\|_s)}\right)\|u(\tau)\|_s d\tau =: \Psi(t)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Con C_0 dependiendo únicamente de $\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}$.

A partir de (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= C_0\left(1+\sqrt{\log(1+\|u(t)\|_s)}\right)\|u(t)\|_s \\ &\leq \ C_0\left(1+\sqrt{\log(1+\Psi(t))}\right)\Psi(t) \\ &\leq C_0\left(1+\log(1+\Psi(t))\right)\Psi(t);\end{aligned}$$

Dicho de otro modo existe $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\log(1+\log(1+\Psi(t))) \leq C_1$$

de donde se deduce que existen constantes $C_2 > 0$ y $C_3 > 0$ tales que para todo $t \in [-T, T]$, $\|u(t)\|_s \leq e^{C_2 e^{C_3 t}}$. En particular, $\|u(t)\|_s$ sigue siendo acotada en cada intervalo de tiempo finito y la solución puede extenderse a todo $\mathbb{R}$ ■

CAPÍTULO 4

Teoría en espacios de Sobolev con pesos

En este capítulo estudiaremos el problema (0.1) en los espacios de Sobolev con pesos $\Im_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, pues las normas de estos espacios forman un sistema fundamental de seminormas para $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

Lema 4.1. *Sea* $F(t,\xi) = e^{b(\xi)t}$ *donde* $b(\xi) = \dfrac{-i\xi}{1+|\xi|}$. *Entonces,*

$$\partial_\xi F(t,\xi) = (-it)(1+|\xi|)^{-2}F(t,\xi) \tag{4.1}$$

$$\partial_\xi^2 F(t,\xi) = 2it\ sgn(\xi)(1+|\xi|)^{-3}F(t,\xi) + (-it)^2(1+|\xi|)^{-4}F(t,\xi) \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 F(t,\xi) =& 4it\delta - 6it(1+|\xi|)^{-4}F(t,\xi) - 2(-it)^2[sgn(\xi)+2](1+|\xi|)^{-5}F(t,\xi)\\ &+ (-it)^3(1+|\xi|)^{-6}F(t,\xi)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^4 F(t,\xi) =& 4it\delta' + 4t^2\delta + 24it\ sgn(\xi)(1+|\xi|)^{-5}F(t,\xi)\\ &+ 4(-it)^2[4+5\ sgn(\xi)](1+|\xi|)^{-6}F(t,\xi)\\ &- 2(-it)^3[sgn(\xi)+5](1+|\xi|)^{-7}F(t,\xi) + (-it)^4(1+|\xi|)^{-8}F(t,\xi)\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^5 F(t,\xi) =& 4it\delta'' + 4t^2\delta' + (48it - 40t^2 - 4it^3)\delta - 120it(1+|\xi|)^{-6}F(t,\xi)\\ &+ (it)^2[-120\ sgn(\xi) - 120](1+|\xi|)^{-7}F(t,\xi)\\ &+ (it)^3[-90sgn(\xi) - 30](1+|\xi|)^{-8}F(t,\xi)\\ &+ (it)^4[-10sgn(\xi) - 10](1+|\xi|)^{-9}F(t,\xi) + (-it)^5(1+|\xi|)^{-10}F(t,\xi)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Además, para $j \geq 5$ *la j-ésima derivada de* $F(t,\xi)$ *tiene la forma:*

$$\begin{aligned}\partial_\xi^j F(t,\xi) =& 4it\delta^{(j-3)} + 4t^2\delta^{(j-4)} + \sum_{k=0}^{j-5} p_k(t)\delta^k + (-it)j!(1+|\xi|)^{-j-1}F(t,\xi)\\ &+ \sum_{k=2}^{j-1}(it)^k(1+|\xi)^{-j-k}[a_k sgn(\xi) - b_k] + (-it)^j(1+|\xi|)^{-2j}F(t,\xi)\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde δ es la función delta de Dirac, $p_k(t)$, es un polinomio, a_k y b_k son constantes que dependen de k

Demostración. Un cálculo directo prueba (4.2)-(4.5). El principio de inducción nos permite obtener (4.6). ■

Teorema 4.1. *Sea $E : [0,\infty) \longrightarrow B(\Im_{s,r})$ es un C^0 semigrupo para $s, r \in \mathbb{N}$ $s \geq r$ y para toda $\phi \in \Im_{s,r}$ satisface:*

1. *Si $r = 0, 1, 2$*
$$\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,r}} \leq P_r(t)\|\phi\|_{\Im_{s,r}} \tag{4.7}$$
donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r con coeficientes positivos.

2. *Si $r \geq 3$ y $\phi \in \Im_{s,r}$, $\quad E \in C([0,\infty); \Im_{s,r})$, si y sólo si,*
$$(\partial_\xi^j \widehat{\phi})(0) = 0, \qquad j = 0, 1, 2....r-3. \tag{4.8}$$
En este caso, también se tiene una estimación como la de (4.7)

Para $s \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, ...$, el espacio $\Im_{s,r}(\mathbb{R}) := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, donde $L^2_r(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | x^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|^2_{s,r} = \|f\|^2_s + \|f\|^2_{L^2_r}$

Demostración. Para efectos de la demostración se usa la regla de Leibniz y el Lema 4.1

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|^2_{s,0} =& \|E(t)\varphi\|^2_s + \|E(t)\varphi\|^2_{L^2_0}\\ =& \|\varphi\|^2_s + \|E(t)\varphi\|^2_{L^2_0}\\ =& \|\varphi\|^2_s + \int_{-\infty}^{\infty} |E(t)\varphi|^2 dx\\ =& \|\varphi\|^2_s + \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}|^2 d\xi\\ =& \|\varphi\|^2_s + \|\varphi\|^2_0\end{aligned}$$

Si $r = 1$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{s,1}^2 =& \|E(t)\varphi\|_s^2 + \|E(t)\varphi\|_{L_1^2}^2 \\
=& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |E(t)\varphi|^2 dx \\
=& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |xE(t)\varphi|^2 dx \\
=& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi (F(t,\xi)\widehat{\varphi})|^2 d\xi \\
=& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{-it}{(1+|\xi|)^2} F(t,\xi)\widehat{\varphi} + F(t,\xi)\partial_\xi \widehat{\varphi} \Big|^2 d\xi \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + t^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi \widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + t^2 \|\varphi\|_0^2 + \|x\varphi\|_0^2 \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + (1+t^2)\|\varphi\|_{L_1^2}^2
\end{aligned}
$$

Si $r = 2$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{s,2}^2 =& \|E(t)\varphi\|_s^2 + \|E(t)\varphi\|_{L_2^2}^2 \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2 (F(t,\xi)\widehat{\varphi})|^2 d\xi \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \Big(\frac{2itsgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3} F(t,\xi) - \frac{t^2}{(1+|\xi|)^4} F(t,\xi) \Big) \widehat{\varphi} \Big|^2 d\xi \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{it}{(1+|\xi|)^2} F(t,\xi)\partial_\xi \widehat{\varphi} \Big|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |F(t,\xi)\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + (4t^2 + t^4) \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}|^2 d\xi + t^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi \widehat{\varphi}|^2 d\xi + t^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq& \|\varphi\|_s^2 + (4t^2 + t^4)\|\varphi\|_0^2 + t^2 \|x\varphi\|_0^2 + \|x^2\varphi\|_0^2
\end{aligned}
$$

Si $r = 3$ y como $t\delta\widehat{\varphi} = t\widehat{\varphi}(0) = 0$ entonces,

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{s,3}^2 \leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^3(F(t,\xi)\widehat{\varphi})|^2 d\xi \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |(\partial_\xi^3 F(t,\xi))\widehat{\varphi} + 3\partial_\xi^2 F(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\varphi} + 3\partial_\xi F(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\varphi} + F(t,\xi)\partial_\xi^3\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Big| 4it\delta\widehat{\varphi} + \Big(-\frac{6it}{(1+|\xi|)^4} - \frac{2t^2[sgn(\xi)+2]}{(1+|\xi|)^5} + \frac{(-it)^3}{(1+|\xi|)^6}\Big) F(t,\xi)\widehat{\varphi}\Big|^2 d\xi \\
& + 9\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{2itsgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3} F(t,\xi) - \frac{t^2}{(1+|\xi|)^4} F(t,\xi)\Big| |\partial_\xi\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
& + 9\int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{-it}{(1+|\xi|)^2} F(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\Big|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |F(t,\xi)\partial_\xi^3\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + (36t^2 + 36t^4 + t^6)\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}|^2 d\xi + (36t^2 + 9t^4)\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
& + 9t^2\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2\widehat{\varphi}|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^3\widehat{\varphi}|^2 d\xi \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + (36t^2 + 36t^4 + t^6)\|\varphi\|_0^2 + (36t^2 + 9t^4)\|x\varphi\|_0^2 + 9t^2\|x^2\varphi\|_0^2 + \|x^3\varphi\|_0^2
\end{aligned}$$

Procediendo de esta manera y aplicando el principio de inducción se tiene el resultado requerido. ■

Proposición 4.1. *El operador* $A = \partial_x(1 + \mathcal{H}\partial_x)^{-1} \in \mathscr{B}(\Im_{s,2})$ *y además* $A(u^2) \in \Im_{s,2}$ *para todo* $u \in \Im_{s,2}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\varphi\|_{s,2}^2 = & \|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\varphi\|_s^2 + \|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\varphi\|_{L_2^2}^2 \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |x^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\varphi|^2 dx \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\partial_\xi^2\Big(\frac{-i\xi}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi)\Big)\Big|^2 d\xi \\
\leq & \|\varphi\|_s^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{2isgn(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}(\xi)\Big|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{-2i}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{\varphi}(\xi)\Big|^2 d\xi \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\frac{-i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{\varphi}(\xi)\Big|^2 d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\varphi\|_s^2 + 4\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + 4\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi \widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \|\varphi\|_s^2 + 4\|\varphi\|_0^2 + 4\|x\varphi\|_0^2 + \|x^2\varphi\|_0^2 \\
&\leq 4\|\varphi\|_{s,2}^2
\end{aligned}
$$

Como $s > \frac{1}{2}$ se tiene que $\Im_{s,2}$ es un álgebra de Banach (vea Iório [9] pag 360) y por lo tanto si $u \in \Im_{s,2}$, se tiene que $u^2 \in \Im_{s,2}$ y $\|Au^2\|_{s,2}^2 < \infty$.

■

Teorema 4.2. *Dada $\varphi \in \Im_{s,2}(\mathbb{R})$ entonces existe una única $u \in C([0,\infty); \Im_{s,2})$ solución del problema (0.1) tal que $\partial_t u \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$, siempre que $s > \frac{1}{2}$*

Demostración. Para efectos de la demostración utilizaremos el **teorema A.2** de [6] (si $\varphi \in \Im_r$, entonces $x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \in L^2(\mathbb{R})$, para todo entero α y β tales que $0 \leq \alpha + \beta \leq r$ y además, $\|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi\|_0 \leq C_{\alpha,\beta}\|\varphi\|_r$). Junto con el teorema 4.1 y la proposición 4.1.

La unicidad del problema en $\Im_{s,2}$ es una consecuencia de la teoría en $H^s(\mathbb{R})$.

Para mostrar la existencia consideremos:

$$
F(u)(t) := u(t) = e^{-t\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}} \partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1} u^2(\tau) d\tau \tag{4.9}
$$

Veamos que $u \in C([0,T); \Im_{s,2})$ definida en(4.9) esta en el espacio métrico completo $\mathfrak{X}_{s,2} = \{u \in C([0,T); \Im_{s,2}) \mid \|E(t)\varphi - u(t)\|_{\Im_{s,2}} \leq M\}$ con la métrica

$$
d_{s,T}(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{s,2}.
$$

En efecto, a partir de (4.9) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{-t\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\varphi\|_{s,2} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2(\tau)\|_{s,2}d\tau \\
&\leq 2C_{s,2}\int_0^t ((t-\tau)^2+3)\|u(\tau)\|_{s,2}^2 d\tau \\
&\leq 2C_{s,2}(t^2+3)\int_0^t \|u(\tau)\|_{s,2}^2 d\tau \\
&\leq 2C_{s,2}(T^2+3)L(\|u\|_{s,2},0)\int_0^t \|u(\tau)\|_{s,2} d\tau
\end{aligned}$$

si $u \in \mathfrak{X}_{s,2}(T,M)$

$$\|u(\tau)\|_{s,2} \leq \|u(\tau) - e^{\tau A}\varphi\|_{s,2} + \|e^{\tau A}\varphi\|_{s,2} \leq M + \|\varphi\|_{s,2}$$

Luego, si $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_{s,2} &\leq 2C_{s,2}(T^2+3)L(\|u\|_{s,2},0)(M+(T^2+3)\|\varphi\|_{s,2})T \\
&\leq 2C_{s,2}(T^2+3)^2L(\|u\|_{s,2},0)(M+\|\varphi\|_{s,2})T \\
&\leq 2C_{s,2}q(T)L(\|u\|_{s,2},0)(M+\|\varphi\|_{s,2})T.
\end{aligned}$$

Tomando $T \leq \dfrac{M}{2C_{s,2}q(T)L(\|u\|_{s,2},0)(M+\|\varphi\|_{s,2})}$

se obtiene que

$$\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_{s,2} \leq M$$

es decir que $F(u)(t) \in \mathfrak{X}_{s,2}$.

El siguiente paso es ver que $F(u)(t)$ es una contracción en $\mathfrak{X}_{s,2}$.

$$
\begin{aligned}
\|F(u)(t)-F(v)(t)\|_{s,2} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}(u^2-v^2)\|_{s,2}d\tau \\
&\leq 2C(t^2+3)\int_0^t \|u^2(\tau)-v^2(\tau)\|_{s,2}d\tau \\
&\leq 2C_{s,2}(T^2+3)\int_0^t \big(\|u(\tau)\|_{s,2}+\|v(\tau)\|_{s,2}\big)\|u(\tau)-v(\tau)\|_{s,2}d\tau \\
&\leq 4C_{s,2}(T^2+3)\int_0^t \big(M+(t^2+3)\|\varphi\|_{s,2}\big)\|u(\tau)-v(\tau)\|_{s,2}d\tau \\
&\leq 4C_{s,2}(T^2+3)\big(M+(t^2+3)\|\varphi\|_{s,2}\big)T\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_{s,2}
\end{aligned}
$$

Si tomamos $T \leq \dfrac{1}{4C_{s,2}(T^2+3)\big(M+(T^2+3)\|\varphi\|_{s,2}\big)}$, se obtiene el resultado deseado.

De lo desarrollado anteriormente se tiene la existencia y unicidad de la solución en $\Im_{s,2}$. ■

El próximo paso es obtener una estimativa apriori para la norma de u en $\Im_{s,2}$.

$$
\|u\|_{L_2^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4(u(x,t))^2dx.
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\partial_t\|u\|_{L_2^2}^2 &= \partial_t\int_{-\infty}^{\infty} x^4(u(x,t))^2dx \qquad (4.10)\\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^4u(x,t)u_t(x,t)dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^4u(x,t)\left[-\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u-\frac{1}{2}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\right]dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} x^4u(x,t)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}udx-\int_{-\infty}^{\infty} x^4u(x,t)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2dx
\end{aligned}
$$

Ahora obtendremos estimativas para cada uno de las integrales del lado derecho de (4.10)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 u\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}udx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 ux^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}udx \\ &= \langle x^2u\ ,\ x^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u\rangle_0 \\ &\leq \left\|x^2u\right\|_0 \left\|x^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u\right\|_0 \\ &\leq 4c\|u\|_{s,2}^2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 u(x,t)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 ux^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2dx \\ &\leq \|x^2u\|_0\|x^2\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_0 \\ &\leq C\|u\|_{s,2}\|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_{s,2} \\ &\leq 4C\|u\|_{s,2}\|u^2\|_{s,2} \\ &\leq 4C\|u\|_{L_2^2}\alpha(T)\|u\|_{s,2} \\ &\leq 4C\alpha(T)\|u\|_{s,2}^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

por lo tanto de (4.11) y (4.12) se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t \|u\|_{L_2^2}^2 &\leq 4c\|u\|_{s,2}^2 + 4C\alpha(T)\|u\|_{s,2}^2 \\ &\leq \beta(T)\|u\|_{s,2}^2 \\ &\leq \beta(T)\left(\|u\|_s^2 + \|u\|_{L_2^2}^2\right) \\ &\leq \gamma(T) + \beta(T)\|u\|_{L_2^2}^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $\alpha(T)$, $\beta(T)$ son constantes que se obtienen de las cotas para las normas $\|u\|_\infty$ y de $\|u\|_s$. La desigualdad de Gronwall y (4.13) implican el resultado.

Teorema 4.3. *Sea $T>0$ y supóngase que $u \in ([0,T]\ ,\ \Im_{s,3})$ es solución de (0.1) entonces $\|u(t)\|_0 = \|\varphi\|_0$ y si para algún $t^* \in (0,T]$, $u(t^*)=0$ entonces $u \equiv 0$ para todo $t \in [0,T]$*

Demostración. Dado que u es la solución de (0.1) se sigue que

$$u(t) = e^{-t\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}}\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2(\tau)d\tau \tag{4.14}$$

para $t \in [0,T]$. Sea $v = u^2$. Entonces tomando la transformada de Fourier a (4.14) obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\xi) &= e^{\frac{-i\xi t}{1+|\xi|}}\hat{\varphi} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)i\xi}{1+|\xi|}}\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\Big)\widehat{v}(\tau,\xi)d\tau \\ &= F(t,\xi)\hat{\varphi} - \frac{1}{2}\int_0^t F(t-\tau,\xi)\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\Big)\widehat{v}(\tau,\xi)d\tau. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Derivando tres veces con respecto a ξ en el sentido distribucional y usando el teorema (A2) y la ecuación (4.17) se sigue que $\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) &= \big(\partial_\xi^3 F(t,\xi)\big)\widehat{\varphi} + 3\partial_\xi^2 F(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\varphi} + 3\partial_\xi F(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\varphi} + F(t,\xi)\partial_\xi^3\widehat{\varphi} \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \Bigg[\big(\partial_\xi^3 F(t-\tau,\xi)\big)\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi) + 3\partial_\xi^2 F(t-\tau,\xi)\partial_\xi\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi)\Big) \\ &+3\partial_\xi F(t-\tau,\xi)\partial_\xi^2\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi)\Big) + F(t-\tau,\xi)\partial_\xi^3\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi)\Big)\Bigg]d\tau \end{aligned} \tag{4.16}$$

De donde se obtiene que $\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) &= 4it\delta\widehat{\varphi}(\xi) - \int_0^t 2i(t-\tau)\delta\Big(\frac{i\xi}{1+|\xi|}\Big)\widehat{v}(\tau,\xi)d\tau \\ &+ \int_0^t 2i\delta\frac{F(t-\tau,\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}(\tau,\xi)d\tau + f(t,\xi) \\ &= 4it\widehat{\varphi}(0) + 2i\int_0^t \widehat{v}(\tau,0)d\tau + f(t,\xi). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pero

$$\int_0^t \widehat{v}(\tau,0)d\tau = \int_0^t \widehat{u^2}(\tau,0)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau \tag{4.18}$$

entonces, la ecuación (4.17) se transforma en

$$\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) = 4it\widehat{\varphi}(0) + \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau + f(t,\xi). \tag{4.19}$$

Así que (4.19) implica que

$$4it\widehat{\varphi}(0) + \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

ya que $\partial_\xi^3 \widehat{u}(t,\xi)$ y $f(t,\xi)$ son funciones integrables para todo $t \geq 0$.
Es decir que

$$2t\widehat{\varphi}(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.20}$$

Derivando (4.20) con respecto a t se obtiene

$$2\widehat{\varphi}(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u(t)\|_0^2 = 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.21}$$

en consecuencia

$$\|u(t)\|_0^2 = -2\sqrt{2\pi}\widehat{\varphi}(0);$$

así que $\|u(t)\|_0^2$ es constante para todo $t \in [0,T]$, es decir,

$$\|u\|_0^2 = \|\varphi\|_0^2, \quad \forall t \in [0,T].$$

Por lo tanto si existe $t^* \in [0,T]$ tal que $u(t^*) = 0$ entonces se debe tener que $u \equiv 0$.

■

NOTA: Observe que si $u(t) \in \Im_{s,3}$ entonces $\widehat{\varphi}(0) \leq 0$, pues si $\widehat{\varphi}(0) > 0$, (4.20) no se tendrá.

Bibliografía

[1] A. A. Alazmani, J. P. Albert, J. L. Bona, M. Chen and J. Wu, *Comparisons between the BBM equation and a boussinesq system*. Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 2, 121-166.

[2] J. Angulo, M. Scialom, C. Banquet *The regularized Benjamin Ono and BBM equations: Well-posedness and nonlinear stability*, Journal of Differential Equations, Volume 250, issue 11, 1 June, Pages 4011-4036.

[3] J. L. Bona, Hongqiu Chen, *Local and global well-posedness results for generalized BBM-type equations*. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, Dekker, New York, 2003.

[4] H. Brézis, T. Gallouet, *Nonlinear Schrdinger evolution equations*, Nonlinear Anal. 4 (4) (1980) 677–681.

[5] G. Fonseca, G. Ponce, *The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*. J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 2, 436-459

[6] R. J. Iório, *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, communications in P.D.E. 11(10), (1986), Pages 1031-1081

[7] R. J. Iório, Jr., V. de Magalhães Iório, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, (1988)

[8] R. J. Iório, W. V. L. Nunes *Introdução às equações de Evolução não Lineares*. 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[9] R. J. Iório, Jr., Valéria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[10] F. Linares. G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer-Verlag, 2009.

[11] Y. Mammeri, *Long time bounds for the periodic Benjamin-Ono-BBM equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 71, issue 10, 15 November 2009, Pages 5010-5021

[12] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Eqs. 4, (1991), 527-542

[13] I. D. Vega, *El problema de Cauchy asociado a una Ecuación del tipo ZK-BBM*, Universidad Nacional de Colombia, 2011.