

**MANUAL DE USUARIO
AYUDAS PEDAGÓGICAS UNIVERSITARIAS
MÓDULO 1: ECUACIÓN DE DIFUSIÓN**

**PROYECTO:
“DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES QUE SIRVA
COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA EN LOS CURSOS DE
INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS”
Código Colciencias 1118-11-16705**



**UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA**
SEDE MEDELLÍN



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE MINAS
2006**

**MANUAL DE USUARIO
AYUDAS PEDAGÓGICAS UNIVERSITARIAS
MÓDULO 1: ECUACIÓN DE DIFUSIÓN**

PROYECTO:

**“DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES QUE SIRVA COMO
HERRAMIENTA PEDAGÓGICA EN LOS CURSOS DE INGENIERÍA Y
CIENCIAS BÁSICAS”**

Código Colciencias 1118-11-16705

Investigador Principal:

Francisco Mauricio Toro Botero, Ph. D.
Profesor Asociado, Ingeniería.

Coinvestigador:

Carlos Enrique Mejía Salazar, Ph. D.
Profesor Asociado, Matemáticas.

Auxiliares de Investigación:

Hugo Escorcía Pacheco, I.C.
Estudiante Maestría en Recursos Hidráulicos.

Luis Miguel Villada Osorio, Matemático.
Estudiante Maestría en Matemáticas.

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE MINAS
2006**

Tabla de contenido

1. GENERALIDADES	1
2. VENTANA PRINCIPAL	3
3. VENTANA 1 D	4
3.1. Estado de la Ecuación	4
3.2. Tipo de Ecuación	5
3.3. Nombre de la Variable	5
3.4. Condiciones Iniciales	5
3.5. Función de Forzamiento	5
3.6. Parámetros Geométricos	6
3.7. Parámetros Físicos	6
3.8. Condiciones de Frontera	6
3.9. Botón <i>Procesar</i>	6
4. SOLUCIONES ANALÍTICAS 1D	7
4.1. Solución Analítica con Condiciones Dirichlet	7
4.2. Solución Analítica con Condiciones de Neumann	10
4.3. Solución Analítica con una condición de Dirichlet y Otra Mixta	10
4.4. Solución Analítica con una Condición de Neumann y Otra Dirichlet	11
4.5. Solución Analítica con una Condición de Neumann y Otra Mixta	11
5. SELECCIÓN DEL TIPO DE SOLUCIÓN 1D	13
5.1. Solución <i>Analítica</i>	13
5.2. Solución <i>Numérica</i>	14
5.3. Malla Espacio - Temporal	15
5.3.1. <i>Paso de longitud</i> (Δx)	15
5.3.2. <i>Paso de tiempo</i> (Δt)	15

5.3.3. <i>Tiempo de simulación</i>	15
5.4. Realización de los Cálculos	16
6. SOLUCIONES NUMÉRICAS 1D	17
6.1. Método Explícito	17
6.1.1. Derivación del método	17
6.1.2. Discretización en los nodos extremos	18
Condiciones de Dirichlet	18
Condiciones de Neumann	18
Condiciones Mixtas	18
6.2. Método Implícito	19
6.2.1. Derivación del método	19
6.2.2. Discretización en los nodos extremos	21
Condiciones de Dirichlet	21
Condiciones de Neumann	22
Condiciones Mixtas	22
6.3. Método de Crank-Nicolson	23
6.3.1. Derivación del método	23
6.3.2. Discretización en los nodos extremos	25
Condiciones de Dirichlet	25
Condiciones de Neumann	25
Condiciones Mixtas	25
7. VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS 1D	29
7.1. <i>Abrir</i> un archivo	29
7.2. Visualización gráfica	30
7.3. Visualización tabulada	31
8. CÁLCULO DE ERRORES 1D	32
8.1. Selección de Archivos	32
8.2. Puntos Donde se Desea Calcular el Error	33
8.3. Visualización Gráfica y Ecuaciones de Error	33
9. EJEMPLO DE APLICACIÓN 1D	36
9.1. Planteamiento del Problema	36
9.2. Formulación Matemática	37
9.3. Solución	37

9.4. Resultados	42
9.4.1. Visualización gráfica	43
9.4.2. Visualización tabulada	49
9.5. Cálculo de Error	49
10.EJERCICIOS 1D	56
11.VENTANA 2D	59
11.1. Estado de la Ecuación	59
11.2. Tipo de Ecuación	60
11.3. Nombre de la Variable	60
11.4. Condiciones Iniciales	60
11.5. Función de Forzamiento	60
11.6. Parámetros Geométricos	61
11.7. Parámetros Físicos	61
11.8. Condiciones de Frontera	61
11.9. Botón <i>Procesar</i>	61
12.SELECCIÓN DEL TIPO DE SOLUCIÓN 2D	62
12.1. Solución <i>Analítica</i>	62
12.2. Solución <i>Numérica</i>	63
12.3. Malla Espacio - Temporal	63
12.3.1. <i>Paso de longitud</i> (Δx y Δy)	63
12.3.2. <i>Paso de tiempo</i> (Δt)	64
12.3.3. <i>Tiempo de simulación</i>	64
12.4. Realización de los Cálculos	64
13.SOLUCIONES NUMÉRICAS 2D	66
13.1. Método Explícito para Problemas en 2D	66
13.1.1. Derivación del método	66
13.1.2. Condiciones de frontera tipo Neumann	68
13.2. Método ADI (Alternative Direct Implicit Method)	69
14.VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS	71
14.1. <i>Abrir</i> un archivo	71
14.2. Visualización gráfica	72

Lista de tablas

5.1. Soluciones analíticas que se pueden realizar en el software para problemas unidimensionales.	13
5.2. Soluciones numéricas que se pueden realizar en el software para problemas unidimensionales.	14
6.1. Aproximación en diferencias finitas en condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método explícito.	19
6.2. Aproximación en diferencias finitas en condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método explícito.	20
6.3. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método explícito.	21
6.4. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método explícito.	21
6.5. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método implícito.	22
6.6. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método implícito.	23
6.7. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método implícito.	24
6.8. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método implícito.	24
6.9. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.	26
6.10. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.	27
6.11. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.	27

6.12. Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.	28
12.1. Soluciones analíticas que se pueden realizar en el software para problemas bidimensionales.	62
12.2. Soluciones numéricas que se pueden realizar en el software para problemas bidimensionales.	63



Capítulo 1

GENERALIDADES

Los modelos matemáticos utilizados en la representación de fenómenos físicos, requieren de análisis especiales tanto en los diferentes métodos aplicados para solucionarlos como en los resultados que se obtienen. Las ecuaciones diferenciales parciales son expresiones matemáticas utilizadas para describir los fenómenos de los medios continuos como: fluidos, sólidos en estado de deformación o vibración, conducción del calor, entre otros.

En casos de fenómenos naturales específicos como el transporte por difusión de un contaminante (Chapra, 1997), difusión de calor (Lapidus and Pinder, 1982; Welty et.al., 1984), redes de flujo en términos de la función de potencial de velocidades y de la función de corriente (Chung, 1978), el de flujo en medios porosos, y el potencial eléctrico (Gonzalez, 1996), entre otros, son fenómenos que se describen mediante ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. La más sencilla de estas ecuaciones, conocida como la ecuación lineal del calor, se escribe así (Boas, 1997; Kreyszig, 1988; Weinberger, 1965):

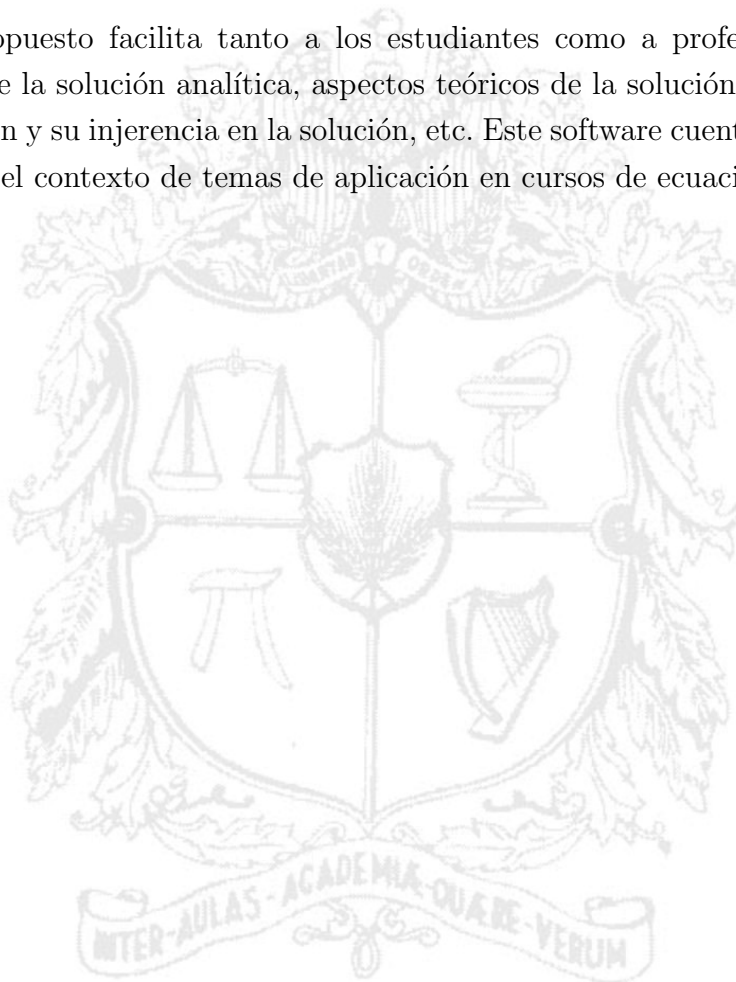
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 \theta \quad (1.1)$$

Donde θ representa la concentración del contaminante, o la temperatura, o las funciones de corriente y potencial o el potencial eléctrico o el potencial hidráulico en el flujo en medios porosos; t es la coordenada temporal y ∇^2 es el operador Laplaciano.

Se propone un software amigable para resolver ecuaciones de tipo Ecuación (1.1) y las demás que se plantean para la representación de fenómenos de flujo y difusión. La base en que se realizó fue MATLAB (MATLAB). El software se construye en tres módulos: un primer módulo de pre-procesamiento de información (se define la geometría, condiciones de frontera

y parámetros numéricos del caso en estudio); un segundo módulo de procesamiento, que se encarga de la solución de ecuaciones, de forma analítica en los casos más sencillos y en todos los casos, de forma numérica. El tercer módulo es de pos-procesamiento que permite la visualización de las soluciones obtenidas en el segundo módulo. El software desarrollado se propone sea utilizado en cursos de pregrado y posgrado en ingeniería, física, química y matemáticas.

El software propuesto facilita tanto a los estudiantes como a profesores el estudio de aspectos teóricos de la solución analítica, aspectos teóricos de la solución numérica, aspectos físicos de la ecuación y su injerencia en la solución, etc. Este software cuenta con la posibilidad de ser utilizado en el contexto de temas de aplicación en cursos de ecuaciones diferenciales.



Capítulo 2

VENTANA PRINCIPAL

Para iniciar en la aplicación del software se requiere que MATLAB 7.0 esté instalado en el computador en el que se use. En versiones anteriores a MATLAB 7.0 no es posible que sea utilizado ya que es incompatible con el entorno de gráficos y ventanas con que cuenta el software actualmente.

El archivo comprimido se puede obtener del sitio web <http://www.unalmed.edu.co/~cemejia/proyecto.htm>. Después de descomprimido el archivo *cemejia.zip*, se abre MATLAB, se indica el directorio en el que se desea trabajar y se llama la aplicación desde la ventana de comandos por medio de la orden:

```
>> Principal
```

Al iniciar el programa en la ventana Principal se observan algunos detalles acerca del programa e información pertinente. Aquí en esta ventana, en la barra de menú, se tiene la opción de seleccionar la dimensión en la cual se desea plantear el problema. Desde el menú *Archivo* el usuario puede seleccionar entre problemas 1 D (unidimensionales) y 2 D (bidimensionales).

Desde el menú *Ver* el usuario tiene la posibilidad de pasar inmediatamente a la visualización de resultados unidimensionales o bidimensionales, según lo desee, de archivos que hayan sido resueltos con anterioridad. El tipo de archivos en que se guarda cualquier solución son archivos que han sido creados por el usuario en el módulo de *Procesamiento* del software con un nombre seleccionado por él y la extensión que tienen es *.mat*, que son el tipo de archivos que utiliza MATLAB para almacenar variables.

Capítulo 3

VENTANA 1 D

El software está diseñado para ser una *herramienta pedagógica* en la enseñanza de los métodos numéricos y en particular para la experimentación de las soluciones numéricas por *diferencias finitas* de una ecuación diferencial en derivadas parciales.

En la Ventana 1D se ofrecen las herramientas para definir un problema en una dimensión que se expresa mediante la ecuación (Gonzalez, 1996; Kreyszig, 1988)

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= G(x, t), \text{ para } t > 0, 0 < x < L \\ u(x, 0) &= f(x), \text{ para } 0 < x < L \\ \alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u_x(0, t) &= 0, \text{ para } t > 0 \\ \alpha_2 u(L, t) - \beta_2 u_x(L, t) &= 0, \text{ para } t > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

La Ecuación (3.1) se utiliza para modelar diversos fenómenos físicos, tales como distribución de temperatura y transporte de contaminantes, entre otros. Las constantes ρ , c , y k toman significados diferentes, de acuerdo al fenómeno que se esté trabajando.

3.1. Estado de la Ecuación

Del menú, el usuario debe seleccionar el estado en el cual desea calcular la ecuación. Aquí cuenta con dos opciones, una solución para un estado dependiente y otra para un estado independiente del tiempo (Chapra, 1997; Boas, 1997; Gockenbach, 2002). Se definen así:

Permanente: Independiente del Tiempo

Transitorio: Dependiente del Tiempo

3.2. Tipo de Ecuación

Esta opción permite determinar el tipo de problema, de acuerdo con la función del lado derecho de la Ecuación (3.1) (Boas, 1997; Gockenbach, 2002; Kreyszig, 1988).

Homogénea:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad (3.2)$$

No Homogénea:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = G(x, t). \quad (3.3)$$

3.3. Nombre de la Variable

Se refiere al nombre de la variable u en la Ecuación (3.1) que es a la que se le dará solución. Se puede seleccionar uno de los nombres propuestos al hacer click en el botón *Insertar* o, también, se puede escribir variables, como por ejemplo temperatura, concentración de contaminante, potencial eléctrico, etc.

3.4. Condiciones Iniciales

Se introduce la función que representa la condición inicial del problema. Por ser unidimensional esta se presenta en función de la variable longitudinal x (puede ser constante), dando como resultado el valor de u (Ecuación (3.1)) en el tiempo $t = 0$ a lo largo de toda la longitud. Esta función debe ser escrita en la nomenclatura que utiliza MATLAB para la interpretación de funciones.

3.5. Función de Forzamiento

Cuando el tipo de ecuación seleccionado sea no homogéneo, se debe ingresar la función $G(x, t)$, mostrada en la Ecuación (3.3) (Boas, 1997; Chapra, 1997; Kincaid y Cheney, 1994). Si el tipo de ecuación que se está trabajando es homogéneo (Ecuación (3.2)) esta casilla estará inactiva y no se podrá ingresar ninguna función.

3.6. Parámetros Geométricos

Permite determinar las dimensiones espaciales del problema. Por tratarse de un problema unidimensional el único valor que se ingresa es la longitud del dominio.

3.7. Parámetros Físicos

Se introduce el valor del coeficiente de Difusión, el cual posee distintos significados de acuerdo con la variable de la que se está tratando en el problema. Por ejemplo para el caso de distribución de temperatura en una barra, el coeficiente de difusión está dado por $\frac{k}{\rho c}$, donde c es el calor específico; densidad, ρ y; conductividad térmica, k (Chapra, 1997; Gockenbach, 2002).

3.8. Condiciones de Frontera

Cada una de las condiciones de frontera determinará la representación física del problema que se está estudiando. Se distinguen tres tipos de condiciones diferentes (Gonzalez, 1996; Zauderer, 1998):

$$\begin{array}{l} \textit{Dirichlet} \end{array} \quad \begin{array}{l} u(0, t) = A(t) \\ u(L, t) = B(t) \end{array} \quad (3.4)$$

$$\begin{array}{l} \textit{Neumann} \end{array} \quad \begin{array}{l} u_x(0, t) = A(t) \\ u_x(L, t) = B(t) \end{array} \quad (3.5)$$

$$\begin{array}{l} \textit{Mixta} \end{array} \quad \begin{array}{l} u_x(0, t) = A(t)u(0, t) \\ u_x(L, t) = -B(t)u(L, t) \end{array} \quad (3.6)$$

Donde A y B pueden ser funciones dependientes del tiempo o, también, constantes.

3.9. Botón *Procesar*

Una vez ingresados los datos que definen el planteamiento del problema, se procede a hacer click en el botón *Procesar* para pasar a la siguiente ventana donde se seleccionaran los parámetros según el tipo de solución que se desee realizar, ya sea analítica o numérica, de acuerdo a el problema.

Capítulo 4

SOLUCIONES ANALÍTICAS DE LA ECUACIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL

A continuación tenemos la Ecuación (4.1), ecuación de calor unidimensional, la cual resolvemos para algunos tipos de condiciones frontera y condiciones iniciales importantes. Aunque el comportamiento de esta ecuación es completamente diferente al de la ecuación de la onda, ya que la Ecuación (4.1) solo tiene en cuenta u_t y la ecuación de onda involucra u_{tt} , el procedimiento utilizado para sus soluciones es similar (Boas, 1997; Gonzalez, 1996; Kreyszig, 1988).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

4.1. Solución Analítica con Condiciones Dirichlet

Tomemos en el caso donde los extremos de la barra $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a una temperatura igual a cero. Entonces las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \quad \text{para todo } t. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sea $f(x)$ la temperatura inicial de la barra. Entonces la condición inicial es

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{para un } f(x) \text{ dado.} \quad (4.3)$$

Determinemos la solución $u(x, t)$ de (4.1) que satisface (4.2) y (4.3). Se aplica el método de las variables separables buscando una solución tal que

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.4)$$

Reemplazando (4.4) en (4.1) se obtiene,

$$\frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Cómo x y t son independientes, ambos lados de la ecuación deben ser iguales a una misma constante,

$$\begin{aligned} \frac{T'}{c^2 T} &= -\lambda, \\ \frac{X''}{X} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Se coloca la constante como $-\lambda$, simplemente para darle a la ecuación diferencial para X la forma de *Sturm – Liouville* (Gonzalez, 1996; Zauderer, 1998), adicionando las condiciones de frontera, se obtiene

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.5)$$

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (4.6)$$

y

$$T' + \lambda c^2 T = 0, \quad (4.7)$$

Consideraremos casos sobre λ , suponiendo que es real.

Si $\lambda < 0$, entonces $\lambda = -k^2$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Entonces (4.5) toma la forma

$$X'' - k^2 X = 0$$

Cuya solución general es $X(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$. Ahora como $X(0) = 0 = C + D$ entonces $C = -D$, luego $X(x) = C(e^{kx} - e^{-kx}) = 2C \sinh(kx)$ y como $X(L) = 0 = 2C \sinh(kL)$ implicando que $C = 0$ y así, $X(x) = 0$ para $0 < x < L$, lo cual no es la solución que buscamos.

Si $\lambda = 0$, entonces $X'' = 0$ y así $X(x) = Cx + D$ y por las condiciones de frontera se obtiene $X(x) = 0$, lo que nuevamente nos conduce a una solución no deseada.

Si $\lambda > 0$, entonces $\lambda = k^2$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Entonces (4.5) toma la forma

$$X'' + k^2 X = 0$$

con solución general dada por $X(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx)$, cómo $X(0) = 0$, entonces $X(x) = D \sin(kx)$ y para $X(L) = 0$ entonces $D \sin(kL) = 0$, y para no tener soluciones triviales debemos tener que $\sin(kL) = 0$ lo cual es válido si kL es múltiplo entero positivo de π , es decir,

$$kL = n\pi, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

entonces para cada entero n positivo tenemos una solución para X

$$X_n(x) = D_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

donde

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

los D_n son constantes por determinar, los λ_n son llamados valores propios de la Ecuación (4.1) y las $X_n(x)$, las funciones propias. Con los valores de λ se resuelve la ecuación diferencial para T ,

$$T' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T = 0,$$

con solución general

$$T_n(t) = D_n \exp\left(-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.8) y (4.10) en (4.4), tenemos

$$u_n(x, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Cada una de las $u_n(x, t)$ satisface la ecuación de calor (4.1) junto con las condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$, ahora para que pueda satisfacer la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, se hace la superposición infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t\right), \quad (4.11)$$

la cual satisface también la Ecuación (4.1) y para la condición inicial se requiere que

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

lo cual es el desarrollo en series de Fourier en senos en $[0, L]$ de la función $f(x)$, así los D_n son determinados por la fórmula

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\zeta\right) d\zeta. \quad (4.12)$$

Por lo tanto una solución analítica de (4.1) está dada por (4.11) y (4.12). Se recomienda consultar en (Boas, 1997; Gockenbach, 2002; Gonzalez, 1996; Kreyszig, 1988; Zauderer, 1998).

4.2. Solución Analítica con Condiciones de Neumann

Para la Ecuación (4.1), con condiciones tipo Neumann dadas así,

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, \\ u_x(L, t) &= 0, \quad \text{para todo } t, \end{aligned} \quad (4.13)$$

la solución analítica está dada por la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad (4.14)$$

donde los C_n están determinados por

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\zeta) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\zeta\right) d\zeta \quad \text{para } n = 0, 1, \dots$$

Los valores propios del problema están dados por

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

y las funciones propias por

$$X_n(x) = C_n \cos(\sqrt{\lambda_n}x), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Para más información consultar (Gockenbach, 2002; Gonzalez, 1996; Zauderer, 1998) (O'niel, pág 357).

4.3. Solución Analítica con una condición de Dirichlet y Otra Mixta

Para la Ecuación (4.1), con las condiciones de frontera dadas por,

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u_x(L, t) &= -Au(L, t), \quad \text{para todo } t. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La solución analítica es determinada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{z_n}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{cz_n}{L}\right)^2 t\right). \quad (4.16)$$

Los C_n se calculan por

$$C_n = \frac{\int_0^L f(\zeta) \sin\left(\frac{z_n}{L}\zeta\right) d\zeta}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{z_n}{L}\zeta\right) d\zeta}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

donde los z_n son los valores propios de la Ecuación (4.1), los cuales son las raíces positivas de la ecuación

$$\tan(z) = -\frac{z}{AL}.$$

Para más información ver (Gonzalez, 1996; Kreyszig, 1988; Zauderer, 1998) (O' Neil, 1999).

4.4. Solución Analítica con una Condición de Neumann y Otra Dirichlet

Para la Ecuación (4.1), tengamos las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \text{ para todo } t. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Tiene por solución analítica

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{c(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 t\right), \quad (4.18)$$

donde los C_n se calculan por

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(\zeta) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\zeta\right) d\zeta, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Los valores propios son $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$.

Se recomienda consultar en (Gockenbach, 2002; Gonzalez, 1996; Zauderer, 1998)

4.5. Solución Analítica con una Condición de Neumann y Otra Mixta

Para la Ecuación (4.1), con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0, \\ u_x(L, t) &= -Au(L, t), \text{ para todo } t. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tiene solución analítica dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{z_n}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{cz_n}{L}\right)^2 t\right), \quad (4.20)$$

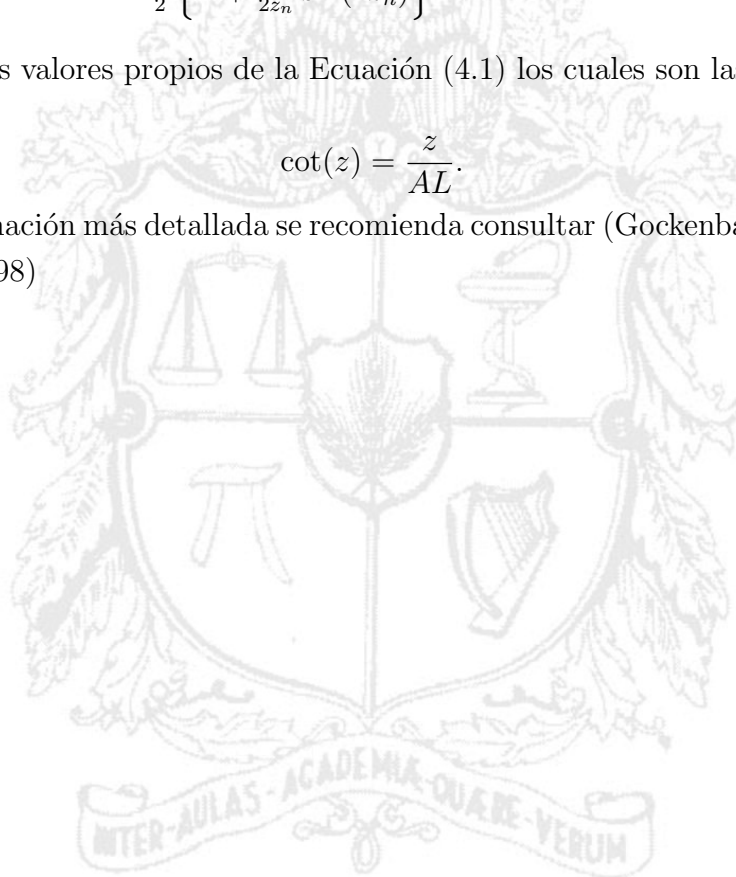
los α_n se calculan por

$$C_n = \frac{\int_0^L f(\zeta) \cos\left(\frac{z_n}{L}\zeta\right) d\zeta}{\frac{1}{2} \left\{ L + \frac{L}{2z_n} \sin(2z_n) \right\}}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

donde los z_n son los valores propios de la Ecuación (4.1) los cuales son las raíces positivas de la ecuación

$$\cot(z) = \frac{z}{AL}.$$

Para una información más detallada se recomienda consultar (Gockenbach, 2002; Gonzalez, 1996; Zauderer, 1998)



Capítulo 5

VENTANA PARA SELECCIONAR EL TIPO DE SOLUCIÓN

En esta ventana el usuario deberá seleccionar y preparar el tipo de solución que desea obtener. Entre las posibilidades que se tienen en el software están las soluciones numéricas y analíticas, teniendo para cada una de ellas una serie de parámetros como se explican a continuación.

5.1. Solución *Analítica*

Todas las posibles soluciones analíticas que se pueden obtener en el software están detalladas en la Tabla 5.1. Para obtener información acerca de los métodos para la obtención de la solución analítica ver en *Ayuda, Métodos Analíticos*.

Tabla 5.1: Soluciones analíticas que se pueden realizar en el software para problemas unidimensionales.

Estado	Tipo de Ecuación	Condición de Frontera
Permanente	Homogénea	Dirichlet
	No Homogénea	
Transitorio	Homogénea	Dirichlet
		Neumann
		Mixta
	No Homogénea	Dirichlet

5.2. Solución *N*umérica

En la Tabla 5.2 se muestra un resumen de todas las combinaciones y tipo de soluciones numéricas que se pueden obtener con la utilización del software. Para obtener información referente al *Método a Utilizar y Aproximación de Derivadas en la Frontera* ver en *Ayuda, Métodos Numéricos*.

Tabla 5.2: Soluciones numéricas que se pueden realizar en el software para problemas unidimensionales.

Estado	Tipo de Ecuación	Condición de Frontera	Método	Tipo de Aproximación*			
				P	R	C	
Permanente	Homogénea	Dirichlet					
	No Homogénea						
Transitorio	Homogénea	Dirichlet	Explícito				
			Implícito				
			Crank-Nicolson				
		Neumann	Explícito	X	X	X	
			Implícito	X	X	X	
			Crank-Nicolson	X	X	X	
			Mixta	Explícito	X	X	X
				Implícito	X	X	X
				Crank-Nicolson	X	X	X
	No Homogénea	Dirichlet	Explícito				
			Implícito				
			Crank-Nicolson				
		Neumann	Explícito	X	X	X	
			Implícito	X	X	X	
			Crank-Nicolson	X	X	X	
Mixta		Explícito	X	X	X		
		Implícito	X	X	X		
		Crank-Nicolson	X	X	X		

* P: progresiva, R: regresiva y C: centrada

5.3. Malla Espacio - Temporal

5.3.1. Paso de longitud (Δx)

El usuario debe seleccionar, para la solución *numérica*, el paso de longitud que será utilizado para la realización de los cálculos y el almacenamiento de los resultados. En el caso de la solución *analítica*, el usuario solamente ingresa las posiciones a lo largo del dominio en las cuales desea guardar la información de los cálculos, ya que la precisión de los resultados no depende del paso de longitud seleccionado.

Ejemplo. Si el usuario ha seleccionado para su problema un *paso de longitud* de 5 cm, deberá ingresar en esta casilla un valor de 0.05, que corresponde a $\Delta x = 0.05$ m. De este modo, para una solución *numérica*, tendremos que la precisión y estabilidad en la solución dependerán en gran parte de este valor. Para la solución *analítica* tendremos que los cálculos serán almacenados cada 5 cm (Ver *Ayuda, Métodos numéricos* y *Métodos analíticos*).

5.3.2. Paso de tiempo (Δt)

Para las soluciones *numéricas*, el *paso de tiempo* es utilizado para la realización de los cálculos y para el almacenamiento de los resultados de la solución del problema. Si se desea realizar la solución *analítica*, el usuario deberá ingresar solamente los instantes de tiempo en los cuales desea guardar los resultados. Cuando se tienen soluciones para el estado *Permanente* este parámetro no se tiene en cuenta.

Ejemplo. Si se tiene que el *paso de tiempo*, seleccionado para los cálculos es de 30 s, el usuario deberá ingresar en esta casilla un valor de 30, que corresponde a $\Delta t = 30$ s. De este modo, para una solución *numérica*, tendremos que la precisión y estabilidad en la solución dependerán en gran parte de este valor. Para la solución *analítica* tendremos que los cálculos serán almacenados cada 30 s, para cada una de las posiciones escogidas en el *paso de tiempo* (Ver *Ayuda, Métodos numéricos* y *Métodos analíticos*).

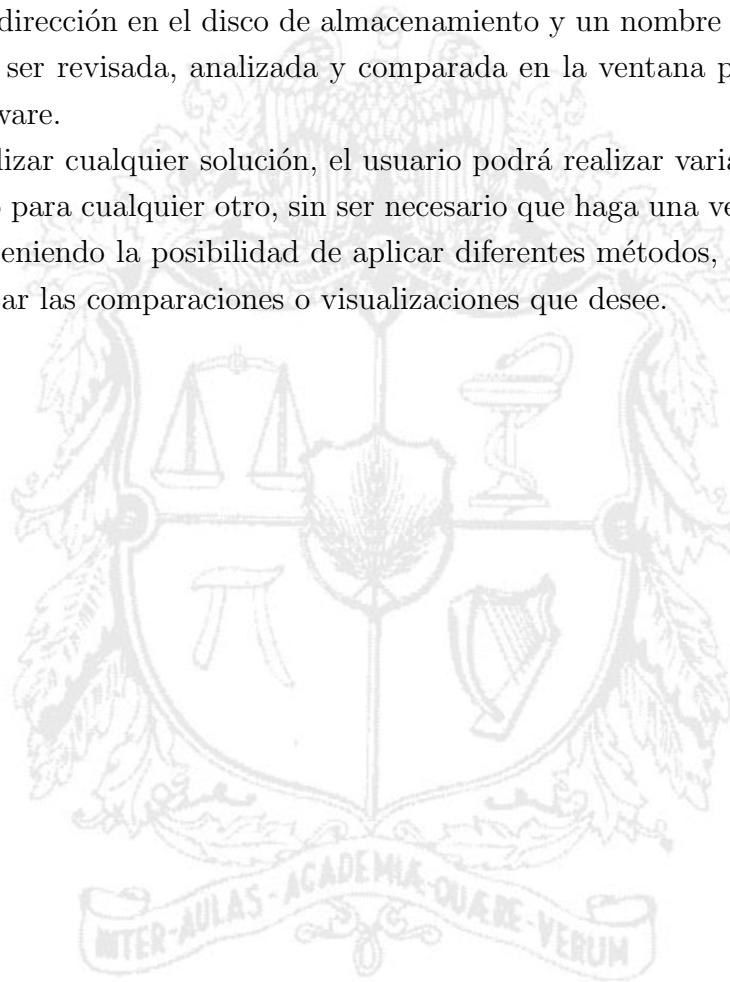
5.3.3. Tiempo de simulación

Corresponde al tiempo final en el cual se desean tener las soluciones. El *Tiempo de simulación* sólo se considerará para las soluciones en el estado *Transitorio*.

5.4. Realización de los Cálculos

Una vez ingresados los parámetros, ya sean numéricos o analíticos, necesarios para el procesamiento de la solución del problema se procede a hacer click en el botón “*CALCULAR*”. Después de esto es necesario que el usuario cree un archivo en donde guardará toda la información que ha ingresado hasta el momento más, todos los resultados del problema seleccionando una dirección en el disco de almacenamiento y un nombre para éste. Toda esta información podrá ser revisada, analizada y comparada en la ventana para visualización de resultados del software.

Después de realizar cualquier solución, el usuario podrá realizar varias soluciones para el mismo problema, o para cualquier otro, sin ser necesario que haga una verificación inmediata de los resultados, teniendo la posibilidad de aplicar diferentes métodos, aproximaciones, etc; para después realizar las comparaciones o visualizaciones que desee.



Capítulo 6

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LA ECUACIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL

6.1. Método Explícito

6.1.1. Derivación del método

Se obtiene al hacer la aproximación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \quad (6.1)$$

así la ecuación en diferencias finitas toma la forma

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \alpha^2 \left\{ \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{\Delta x^2} \right\}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N-1, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6.2)$$

formando un sistema de ecuaciones dado por la fórmula general

$$U_i^{j+1} = rU_{i-1}^j + (1 - 2r)U_i^j + rU_{i+1}^j \quad (6.3)$$

donde

$$r = \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \Delta t. \quad (6.4)$$

es el número que se utiliza para el análisis de estabilidad del método explícito (Ames, 1992; Kincaid y Cheney, 1994).

Para los nodos $x = 0$ y $x = L$, U_0 y U_N se aproximan de acuerdo a las condiciones de frontera existentes en el problema como se explica en la sección 6.1.2.

Se recomienda consultar (Ames, 1992; Chapra, 1997; Kincaid y Cheney, 1994; Smith, 1993; Gockenbach, 2002; Lapidus and Pinder, 1982).

6.1.2. Discretización en los nodos extremos

Condiciones de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, t) = A \\ u(L, t) = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_0^j = A \\ u_N^j = B \end{cases} \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Así la forma matricial del sistema está dada por la Ecuación (6.6)

$$\begin{bmatrix} U_1^{j+1} \\ U_2^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{j+1} \\ U_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ \vdots \\ U_{N-2}^j \\ U_{N-1}^j \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} U_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_N^j \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_x(0, t) = A \\ u_x(L, t) = B \end{cases} \quad (6.7)$$

Las aproximaciones obtenidas en diferencias finitas para $x = 0$ y para $x = L$ se muestran en las tablas 6.1 y 6.2 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.3).

Tabla 6.1: Aproximación en diferencias finitas en condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método explícito.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = A$	$U_0^j = U_1^j - A\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(0, t) - u(-\Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = A$	$U_0^{j+1} = (1-r)U_1^j + rU_2^j - Ar\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(-\Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = A$	$U_0^{j+1} = (1-2r)U_1^j + 2rU_2^j - 2Ar\Delta x$

Condiciones Mixtas

$$\begin{cases} u_x(0, t) = Au(0, t) \\ u_x(L, t) = -Bu(L, t) \end{cases} \quad (6.8)$$

Las aproximaciones obtenidas en diferencias finitas para $x = 0$ y para $x = L$ se muestran en las tablas 6.3 y 6.4 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.3).

6.2. Método Implícito

6.2.1. Derivación del método

Se obtiene al hacer la aproximación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (6.9)$$

Tabla 6.2: Aproximación en diferencias finitas en condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método explícito.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_L^j
Diferencia Progresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_N^j}{\Delta x}$	$U_N^{j+1} = (1 - r)U_N^j + rU_{N-1}^j - rB\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L, t) - u(L - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x}$	$U_N^j = U_{N-1}^j + B\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x}$	$U_N^{j+1} = (1 - 2r)U_N^j + 2rU_{N-1}^j - 2rB\Delta x$

así, la ecuación en diferencias finitas toma la forma

$$\frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\Delta t} = \alpha^2 \left\{ \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{\Delta x^2} \right\}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N - 1, j = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

formando un sistema de ecuaciones dado por la Ecuación (6.11), donde r está dado por la Ecuación (6.4).

$$-rU_{i-1}^j + (1 + 2r)U_i^j - rU_{i+1}^j = U_i^{j-1} \quad (6.11)$$

Para los nodos extremos, $x = 0$ y $x = L$, U_0 y U_N se aproximan de acuerdo a las condiciones existentes en el problema.

Se recomienda consultar (Ames, 1992; Chapra, 1997; Kincaid y Cheney, 1994; Smith, 1993; Gockenbach, 2002; Lapidus and Pinder, 1982).

Tabla 6.3: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método explícito.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$U_0^j = \frac{U_1^j}{1 + A\Delta x}$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$U_0^{j+1} = (1 - r - Ar\Delta x)U_1^j + rU_2^j$
Diferencia Centrada	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = AU_0^j$	$U_0^{j+1} = (1 - 2r - 2rA\Delta x)U_1^j + 2rU_2^j$

Tabla 6.4: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método explícito.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_N^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_{N+1}^j - U_N^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$U_N^{j+1} = (1 - r - rB\Delta x)U_N^j + rU_{N-1}^j$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$U_N^j = \frac{U_N^{j+1}}{1 + B\Delta x}$
Diferencia Centrada	$\frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x} = -BU_N^j$	$U_N^{j+1} = (1 - 2r - 2rB\Delta x)U_N^j + 2rU_{N-1}^j$

6.2.2. Discretización en los nodos extremos

Condiciones de Dirichlet

Teniendo en cuenta las consideraciones en la Ecuación (6.5), la forma matricial del sistema de ecuaciones se presenta en la Ecuación (6.12).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^j \\ U_1^j \\ \vdots \\ U_{N-1}^j \\ U_N^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ U_1^{j-1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j-1} \\ B \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Condiciones de Neumann

Teniendo en cuenta las consideraciones presentadas en la Ecuación (6.7), tenemos que para $x = 0$ y para $x = L$ se obtienen las aproximaciones en diferencias finitas mostradas en las tablas 6.5 y 6.6 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.11).

Tabla 6.5: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método implícito.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = A$	$U_0^j = U_1^j + A\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(0, t) - u(-\Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = A$	$(1+r)U_0^j - rU_1^j = U_0^{j-1} - rA\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(-\Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = A$	$(1+2r)U_0^j - 2rU_1^j = U_0^{j-1} - 2rU_0^{j-1} - 2rA\Delta x$

Tabla 6.6: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método implícito.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_N^j
Diferencia Progresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_N^j}{\Delta x}$	$-rU_{N-1}^j + (1+r)U_N^j = U_N^{j-1} + rB\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L, t) - u(L - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x}$	$U_N^j = U_{N-1}^j + B\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x}$	$-2rU_{N-1}^j + (1+2r)U_N^j = U_N^{j-1} + 2rB\Delta x$

Condiciones Mixtas

Teniendo en cuenta las consideraciones dadas en la Ecuación (6.8), las aproximaciones obtenidas en diferencias finitas para $x = 0$ y para $x = L$ se muestran en las Tablas 6.7 y 6.8 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.11).

6.3. Método de Crank-Nicolson

6.3.1. Derivación del método

La ecuación en diferencias finitas está dada en (6.13), que conduce a la fórmula general (6.14), donde r está dado por la Ecuación (6.4).

Tabla 6.7: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método implícito.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$U_0^j - \frac{U_1^j}{1 + A\Delta x} = 0$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$(1 + r + Ar\Delta x)U_0^j - rU_{-1}^j = U_0^{j-1}$
Diferencia Centrada	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = AU_0^j$	$(1 + 2r + 2rA\Delta x)U_0^j - 2rU_{-1}^j = U_0^{j-1}$

Tabla 6.8: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método implícito.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_N^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_{N-1}^j - U_N^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$(1 + r + rB\Delta x)U_N^j - rU_{N-1}^j = U_N^{j-1}$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$-\frac{U_{N-1}^j}{1 + B\Delta x} + U_N^j = 0$
Diferencia Centrada	$\frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x} = -BU_N^j$	$(1 + 2r + 2rB\Delta x)U_N^j - 2rU_{N-1}^j = U_N^{j-1}$

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} = \frac{\alpha^2}{2} \left\{ \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{\Delta x^2} \right\},$$

$$\text{para } 1 \leq i \leq N - 1, j = 0, 1, \dots \quad (6.13)$$

$$-rU_{i-1}^{j+1} + (2 + 2r)U_i^{j+1} - rU_{i+1}^{j+1} = rU_{i-1}^j + (2 - 2r)U_i^j + rU_{i+1}^j \quad (6.14)$$

Para los nodos $x = 0$ y $x = L$, U_0 y U_N se aproximan de acuerdo a las condiciones existentes en el problema.

Se recomienda consultar (Ames, 1992; Chapra, 1997; Kincaid y Cheney, 1994; Smith, 1993; Gockenbach, 2002; Lapidus and Pinder, 1982).

6.3.2. Discretización en los nodos extremos

Condiciones de Dirichlet

Teniendo en cuenta las consideraciones dadas en la ecuación (6.5), la forma matricial del sistema de ecuaciones está dado por la Ecuación (6.15).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ -r & 2+2r & -r & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -r & 2+2r & -r & \\ & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^{j+1} \\ U_1^{j+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{j+1} \\ U_N^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^j \\ U_1^j \\ \vdots \\ U_{N-1}^j \\ U_N^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Condiciones de Neumann

Teniendo en cuenta las consideraciones dadas en la Ecuación (6.7), tenemos que para $x = 0$ y para $x = L$ se obtienen las aproximaciones en diferencias finitas mostradas en las tablas 6.9 y 6.10 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.14).

Condiciones Mixtas

Teniendo en cuenta las consideraciones mostradas en la Ecuación (6.8), tenemos que para $x = 0$ y para $x = L$ se obtienen las aproximaciones en diferencias finitas mostradas en las tablas 6.11 y 6.12 respectivamente. Como U_{-1}^j y U_{N+1}^j son nodos externos a la malla, es necesario que sean aproximados por medio de la Ecuación (6.14).

Tabla 6.9: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = 0$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(0, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = A$	$U_0^j = U_1^j + A\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(0, t) = \frac{u(0, t) - u(-\Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = A$	$(2+r)U_0^{j+1} - rU_1^{j+1} = (2-r)U_0^j + rU_1^j - rA\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(0, t) = \frac{u(\Delta x, t) - u(-\Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = A$	$(2+2r)U_0^{j+1} - 2rU_1^{j+1} = (2-2r)U_0^j + 2rU_1^j - 2rA\Delta x$

Tabla 6.10: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Neumann para $x = L$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.

Tipo de Discretización	Dimensión infinita	Diferencia Finita	Aproximación para U_N^j
Diferencia Progresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_N^j}{\Delta x}$	$-rU_{N-1}^{j+1} + (2 + r)U_N^{j+1} = rU_{N-1}^j + (2 - r)U_N^j + rB\Delta x$
Diferencia Regresiva	$u_x(L, t) = \frac{u(L, t) - u(L - \Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$B = \frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x}$	$U_N^j = U_{N-1}^j - B\Delta x$
Diferencia Centrada	$u_x(L, t) = \frac{u(L + \Delta x, t) - u(L - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$B = \frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x}$	$-2rU_{N-1}^{j+1} + (2 + 2r)U_N^{j+1} = 2rU_{N-1}^j + (2 - 2r)U_N^j + rB\Delta x$

Tabla 6.11: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = 0$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_0^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$U_0^j - \frac{U_1^j}{1 + A\Delta x} = 0$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_0^j - U_{-1}^j}{\Delta x} = AU_0^j$	$(2 + r + rA\Delta x)U_0^{j+1} - rU_1^{j+1} = (2 - r - rA\Delta x)U_0^j + rU_1^j$
Diferencia Centrada	$\frac{U_1^j - U_{-1}^j}{2\Delta x} = AU_0^j$	$(1 + r + rA\Delta x)U_0^{j+1} - rU_1^{j+1} = (1 - r - rA\Delta x)U_0^j + rU_1^j$

Tabla 6.12: Aproximación en diferencias finitas con condiciones de frontera tipo Mixtas para $x = L$, para la aplicación del método de Crank-Nicolson.

Tipo de Discretización	Diferencia Finita	Aproximación para U_N^j
Diferencia Progresiva	$\frac{U_{N-1}^j - U_N^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$(2 + r + rB\Delta x)U_N^{j+1} - rU_N^{j+1} =$ $(2 - r - rB\Delta x)U_N^j + rU_{N-1}^j$
Diferencia Regresiva	$\frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x} = -BU_N^j$	$-\frac{U_{N-1}^j}{1 + B\Delta x} + U_N^j = 0$
Diferencia Centrada	$\frac{U_{N+1}^j - U_{N-1}^j}{2\Delta x} = -BU_N^j$	$(1 + r + rB\Delta x)U_N^{j+1} - rU_{N-1}^{j+1} =$ $(1 - r - rB\Delta x)U_N^j + rU_{N-1}^j$

Capítulo 7

VENTANA PARA LA VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS UNIDIMENSIONALES

Después de realizar la solución de cualquier problema, todos los datos ingresados por el usuario y los resultados correspondientes a éste quedan almacenados en el archivo que creó al momento de realizar los cálculos. Seguida la realización de una o más soluciones se hace necesario ver, principalmente, en forma gráfica cómo es la variación de nuestra variable a lo largo de una longitud durante un tiempo determinado. De la barra de menú de la ventana de pre-procesamiento, donde se ingresan los datos necesarios para plantear un problema, se puede seleccionar el menú “*Ver*” donde se despliegan las opciones, “*Resultados*” y “*Error*”.

En la ventana que se despliega al hacer click en el menú “*Resultados*” el usuario no podrá realizar el ingreso de ninguna información que modifique los datos y los resultados de un problema que haya sido resuelto, las únicas opciones que se tienen se encuentran en la barra de menú de la ventana y son: del menú de “*Archivo*”, las opciones “*Abrir*” y “*Cerrar*”, y del menú “*Ver*”, la opción “*Error*”. A esta ventana es la que llamamos *Ventana de Pre-procesamiento*.

7.1. *Abrir un archivo*

El menú “*Abrir*” permite seleccionar cualquier archivo donde el usuario haya decidido guardar todos los datos y los resultados calculados de un problema.

Después de seleccionado y abierto el archivo, al usuario le aparecerá toda la información que introdujo como datos pertinentes al planteamiento del problema en el pre-procesador, y los parámetros utilizados en la solución del mismo. Hasta este punto el usuario no ha visto los resultados de la solución del problema, en esta ventana podrá seleccionar la forma en la cual desea ver los resultados, teniendo como posibilidades la visualización gráfica o tabulada.

7.2. Visualización gráfica

Permite al usuario ver en forma gráfica los resultados. El procedimiento a seguir es el siguiente: primero el usuario debe decidir si desea ver la solución a lo largo de la longitud para uno o varios tiempos determinados, o cómo es la variación en uno o varios puntos a lo largo del tiempo, chequeando las casillas “*Puntos de t a mostrar*” y “*Puntos de x a mostrar*” respectivamente, o seleccionando ambas si lo desea.

Los datos ingresados en estas casillas deben ser escritos en la nomenclatura que utiliza MATLAB para definir tanto valores reales como vectores. **Ejemplo**, si deseamos ver cómo es la variación de la temperatura a lo largo de la longitud en los tiempos 0, 20, 60 y 300 segundos, se ingresan los valores separados por espacios. Para la visualización de la variación de la temperatura a lo largo del tiempo en los puntos comprendidos entre 0 y 0.25 m cada 0.05 m , ingresamos en la casilla correspondiente de la siguiente forma 0 : 0.05 : 0.25.

El usuario debe seleccionar tanto los tiempos como las posiciones en nodos en donde haya realizado los cálculos. Para esto puede utilizar toda la información que muestra la ventana de pos-procesamiento en las casillas de “*Paso de longitud*” y “*Paso de Tiempo*”.

Una vez seleccionados los tiempos, o las posiciones, o tiempos y posiciones el usuario puede hacer click en el botón *Graficar* de la ventana de pos-procesamiento.

Si el usuario desea comparar dos o más resultados obtenidos de la solución de un mismo problema pero por diferentes métodos, o diferentes aproximaciones numéricas o ambas, simplemente deja la solución que ha graficado inicialmente y posteriormente repite el procedimiento abriendo un segundo archivo, pero antes de hacer click en el botón “*Graficar*” el usuario chequea las opciones de “*Comparar*” al lado de las casillas “*Rangos de t a mostrar*” y “*Rangos de x a mostrar*” (una de las opciones o ambas), según los gráficos que selecciones para su comparación, también deberá seleccionar el tipo de línea para diferenciar de los gráfi-

cos anteriores.

7.3. Visualización tabulada

Además de la forma gráfica que se tiene para ver los resultados, el usuario ingresando los datos de igual forma a la descrita en Sección 14.2, podrá ver los resultados en forma tabulada. Para esto es suficiente con hacer click en el botón “*Tabular*” de la ventana de *Pos-procesamiento*. El usuario cuenta con las mismas opciones con que cuenta para graficar, pudiendo hacer las comparaciones de los resultados numéricos mientras los grafica.



Capítulo 8

VENTANA PARA LA VISUALIZACIÓN Y CÁLCULO DE ERROR ENTRE DOS SOLUCIONES

El software también cuenta en el módulo de pos-procesamiento con una forma de calculo de errores entre dos soluciones diferentes para un mismo problema. A esta parte del pos-procesador se puede tener acceso haciendo click en el menú “*Ver*” de la ventana de pre-procesamiento seleccionando “*Error*”, también haciendo click en el menú “*Ir*” de la ventana de pos-procesamiento y seleccionando la opción “*Error*”.

8.1. Selección de Archivos

El primer paso a realizar es seleccionar los dos archivos que se van a utilizar para el cálculo del error. Aquí el usuario siempre calculará el error de un resultado con respecto a otro u otros, por ejemplo podrá comparar dos soluciones calculadas para un mismo problema en donde, una de las soluciones es la analítica y la otra solución que se tiene es una solución numérica, calculadas con anterioridad.

Los archivos en que se decidió guardar estos resultados serán los archivos que utilizaremos para el cálculo del error. Para cargar los archivos debemos realizar click en el botón “*Cargar Archivo 1*” de la ventana. Aquí nos aparecerá un cuadro de dialogo en donde seleccionamos el archivo donde guardamos la solución analítica ya que es la solución con respecto a la cual vamos a calcular el error. En este paso siempre se selecciona el archivo con respecto al cual se va a calcular el error.

Una vez cargado el “*Archivo 1*” podemos proceder a cargar el “*Archivo 2*” haciendo click en el botón “*Cargar Archivo 2*”. Por ejemplo se selecciona el archivo en el cual guardamos los resultados de la solución numérica. Después de cargar cada uno de los archivos el software nos mostrará en el recuadro correspondiente los datos que corresponden al planteamiento del problema y los parámetros que se utilizaron para el cálculo de las respectivas soluciones.

8.2. Puntos Donde se Desea Calcular el Error

El paso siguiente es seleccionar los puntos en los cuales se desea calcular el error teniendo en cuenta la distribución espacial y temporal. El usuario aquí deberá seleccionar puntos del dominio espacial en donde se hayan realizado cálculos para ambos archivos, ya que en ningún caso se utiliza interpolación de datos para el cálculo del error. Para ésto puede utilizar toda la información que muestra la ventana en las casillas de “*Paso de longitud*” y “*Paso de Tiempo*” de los archivos.

Una vez esté seguro de haber seleccionado los puntos en el tiempo y en el espacio donde desea calcular el error del “*Archivo 2*” con respecto al “*Archivo 1*”, se procede a hacer click en el botón “*Calcular Error*” de la ventana. Los cálculos del error estarán terminados cuando las casillas “*Error Cuadrático Medio Global (%)*” y “*Error Cuadrático Medio Global*” muestren los valores que corresponden. Después de esto tendremos 5 formas diferentes de visualizar estos resultados.

8.3. Visualización Gráfica y Ecuaciones de Error

Al hacer click en el botón “*Graficar Diferencias*” el programa graficará para los tiempos y posiciones escogidas las diferencias de los valores que tenga la variable. La ecuación utilizada es la siguiente (Gockenbach, 2002; Smith, 1993)

$$E(x, t) = U^C(x, t) - U^T(x, t) \quad (8.1)$$

donde $U^T(x, t)$ representa los resultados de referencia para el cálculo del error, por ejemplo la solución analítica, y $U^C(x, t)$ los resultados a los cuales se les calcula el error, la solución numérica, para la posición x en el tiempo t . Nótese que los valores estarán dados en unidades de la variable U que se definió en el problema.

El software realiza cálculos del porcentaje de error, estos se pueden visualizar haciendo click en el botón “*Graficar Porcentaje de Error*”. El valor del porcentaje de error es calculado para los tiempos y las posiciones seleccionadas por medio de la siguiente fórmula

$$\%E(x, t) = \frac{U^C(x, t) - U^T(x, t)}{U^T(x, t)} 100 \quad (8.2)$$

El resultado mostrado en la casilla “*Error Cuadrático Medio Global*” corresponde al valor calculado por la expresión

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^C(x, t) - U^T(x, t)|^2} \quad (8.3)$$

donde N es el número de nodos de la malla.

El error cuadrático medio global en porcentaje corresponde al valor dado en la casilla “*Error Cuadrático Medio Global (%)*”. Este se calcula con la formula

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^C(x, t) - U^T(x, t)|^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^T(x, t)|^2}} 100 \quad (8.4)$$

La otra opción que tiene esta parte del pos-procesador es la de ver los resultados de los errores en forma tabulada. En esta opción se muestran los resultados de error en dos tablas, en la primera se tabula la diferencia entre los dos resultados y en la segunda se tabula el porcentaje de error de la solución calculada con respecto a la de referencia, que puede ser la solución analítica. Después de hacer click en el botón “*Tabular Errores*” inmediatamente se despliega la ventana mostrada en la Figura 9.13.

Se recomienda consultar (Gockenbach, 2002; Smith, 1993).

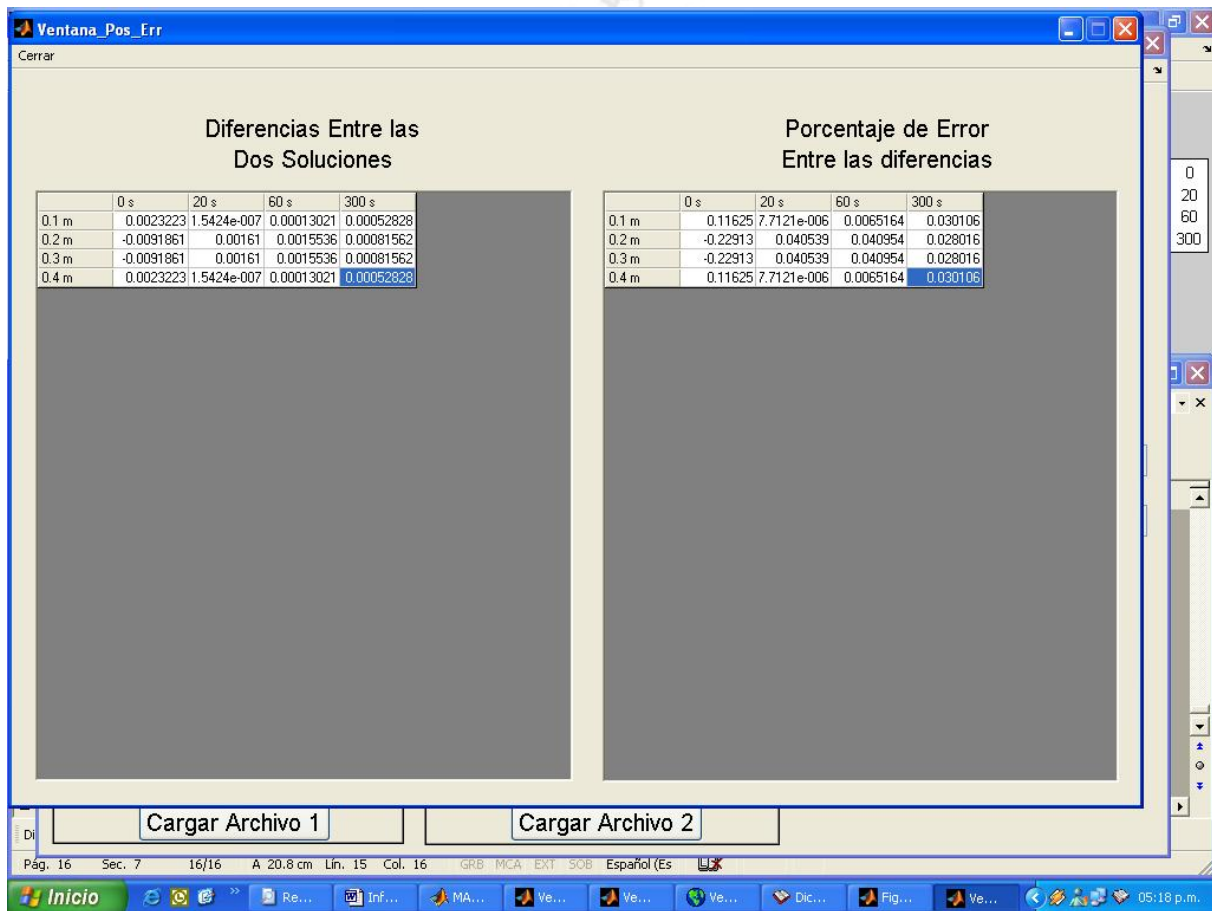


Figura 8.1: Resultados del error calculado, mostrando las diferencias y los porcentajes para las posiciones y los tiempos seleccionados.

Capítulo 9

EJEMPLO DE APLICACIÓN Y UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE

A continuación se describe un ejemplo en donde se realiza una aplicación del software y se describe en forma detallada la forma como puede ser aprovechado. El problema que se plantea es tomado de (Gockenbach, 2002, pag 214).

9.1. Planteamiento del Problema

Considere una barra de hierro, de longitud 50 cm con calor específico $C = 0.437 J/(gK)$, densidad $\rho = 7.88 g/cm^3$ y conductividad térmica $k = 0.832 W/(cmK)$. Suponga que la barra está aislada térmicamente excepto en los extremos y que la temperatura es

$$f(x) = 5 - \frac{|x - 25|}{5} \quad (9.1)$$

donde $f(x)$ está dada en grados Celsius. Finalmente, suponga que los extremos de la barra se colocan en un medio de hielo ($0^\circ C$). se pide, Expresarlo como un problema de valores iniciales con condiciones de borde. La solución analítica está dada por (Gockenbach, 2002, pag 215)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{50^2\rho C}t}, \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right). \quad (9.2)$$

Calcular la distribución de temperatura después de 20, 60, 300 segundos, utilizando los métodos numéricos aproximados, como son los métodos explícito e implícito con $\Delta x = 1$, $\Delta t = 1$. Comparar con la solución analítica.

9.2. Formulación Matemática del Problema

El problema puede ser planteado por medio de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(0.5, t) = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Donde $u(x, t)$ es la distribución de la temperatura sobre la barra en la posición x en el tiempo t ; D es el coeficiente que resulta de convertir, $\frac{h}{\rho C}$ en m^2/s , que representa el coeficiente de difusión térmica del material.

9.3. Solución con la Utilización del Software

Al programa se tiene acceso desde la ventana de comandos de MATLAB al dar la instrucción:

» Principal

Al iniciar el programa en la ventana principal (ver Figura 9.1) se pueden observar algunos detalles acerca del programa. Aquí en esta ventana, en la barra de menú, se tiene la opción de seleccionar la dimensión en la cual se desea plantear el problema.

Para nuestro caso se elige la opción 1 D, la cual nos lleva a la ventana mostrada en la Figura 9.2. En esta ventana se ingresan los datos que definen el planteamiento del problema.

Al iniciar todas las casillas estarán vacías e inactivas. Estas se activarán en el momento en el que el usuario seleccione de la barra de menú el “Estado de la Ecuación”, con las opciones de permanente y transitorio; y el “Tipo de Ecuación”, con las opciones de homogénea y no homogénea. Para la solución de este ejemplo se selecciona el estado *Transitorio* y una ecuación de tipo *Homogénea*.

Luego es necesario definir el tipo de variable con la que se trabaja en el problema. En el recuadro se muestran las variables más utilizadas para la representación de diversos fenómenos físicos donde se aplica la ecuación de calor. Para nuestro caso se selecciona la opción *Tempe-*



Figura 9.1: Ventana principal al iniciar el programa.

ratura.

En la ventana deberá estar inhabilitada la casilla de “Función de Forzamiento” ya que esta se habilita cuando el tipo de ecuación que plantea en el problema es “No Homogénea”. Cuando el tipo de ecuación sea no homogénea deberá ingresar el usuario en esta casilla la función de forzamiento que dependerá de x y de t .

Por medio de la Ecuación 9.3 se entran los datos correspondientes a “Función Inicial”, que representa la condición de temperatura inicial a lo largo de la longitud de la barra en nuestro problema, “Parámetros Geométricos”, en donde se introduce la longitud de la barra en metros y, “Parámetros Físicos”, en donde se introduce el valor de la constante de difusión D del problema.

En “Condiciones de Frontera” se encuentran dos casillas deshabilitadas, las cuales corresponden a la condición de frontera que posee el problema a tratar. Estas se habilitarán al momento de seleccionar el tipo de condiciones en $x = 0$ y $x = L$. Los tipos de condiciones de frontera posibles que se tienen son *Dirichlet*, *Neumann* y *Mixta*. Para nuestro problema se seleccionó condición de frontera tipo Dirichlet para ambos extremos, ya que se mantiene una temperatura constante en ellos.

Hasta esta parte del procedimiento, se ha terminado el ingreso de los datos en la parte de pre-procesamiento y se puede continuar para la preparación de la solución que se desea obtener. Se continúa haciendo click en el botón Procesar e inmediatamente el programa nos envía a la ventana que se muestra en la Figura 9.3.

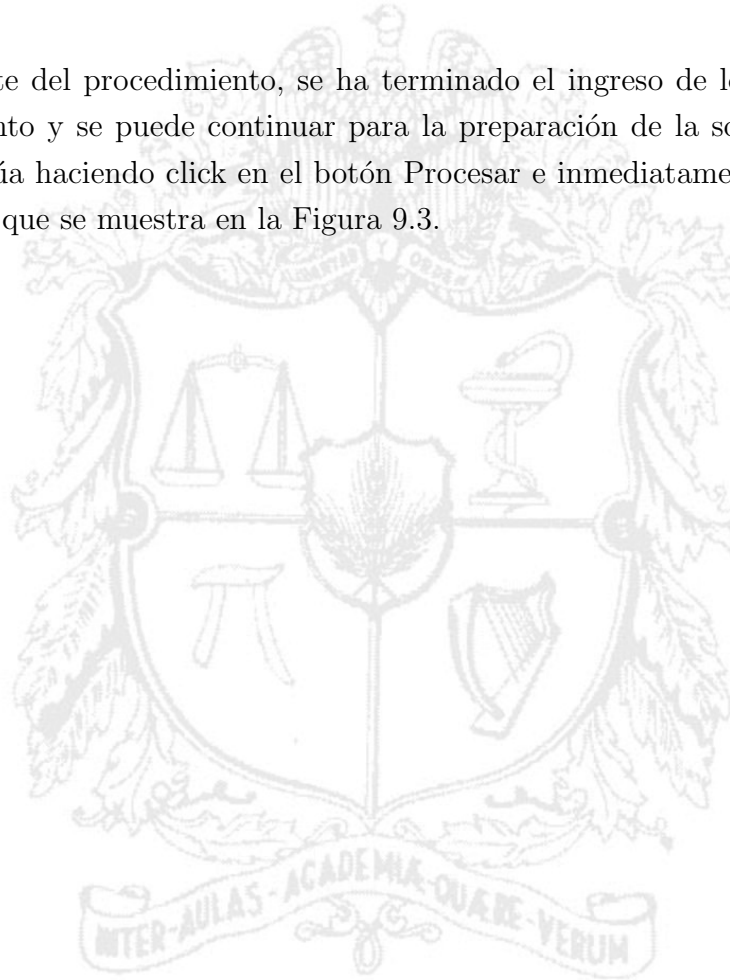


Figura 9.2: Ventana de preprocesamiento para el ingreso de datos y planteamiento del problema de la ecuación de calor en una dimensión.

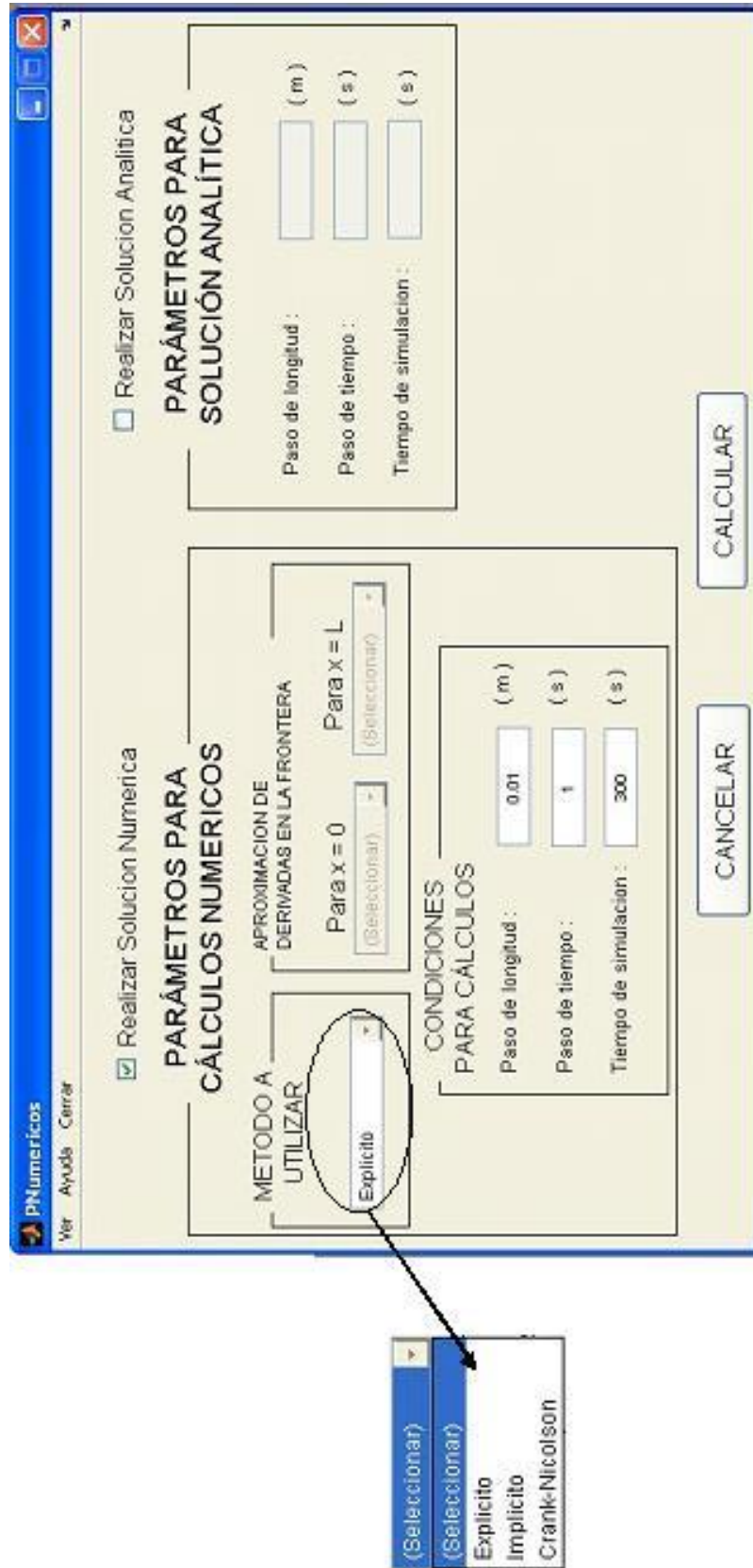


Figura 9.3: Ventana para la selección del tipo de solución que se desea calcular y el ingreso de los parámetros requeridos para cada una.

Aquí se debe seleccionar uno de los tipos de soluciones que se pueden obtener, ya sea analítica o numérica. Esta selección se realiza chequeando en la parte superior de la ventana (ver Figura 9.3). En la figura se muestra seleccionada la solución numérica para nuestro ejemplo. En las soluciones que calculamos para nuestro ejemplo se obtuvieron dos soluciones numéricas diferentes, una solución utilizando método *explícito* y otra utilizando método *implícito*. En el software también se pueden realizar soluciones numéricas por el método de *Crank-Nicolson*. También se realizó una solución analítica del problema con el fin de comparar los tres resultados y estos con los mostrados en Gockenbach, 2002, pag 214.

En los métodos numéricos que se emplearon en el problema aparecen inactivas las casillas de selección para la “Discretización de las Derivadas en la Frontera”, tanto para $x = 0$ como para $x = L$, ya que las condiciones del problema que se seleccionaron en la ventana anterior son de tipo Dirichlet.

Cuando se tiene condición de frontera diferente a Dirichlet, en cualquiera de los dos extremos, las casillas para la selección de *Discretización de Derivadas* se activan y se podrá escoger entre las aproximaciones *Regresiva*, *Progresiva* y *Centrada* para la realización de los cálculos.

Las condiciones seleccionadas para los cálculos son: $\Delta x = 1 \text{ cm}$ y $\Delta t = 1 \text{ seg}$. Para la solución analítica que se obtuvo también se utilizaron estas mismas condiciones como se puede ver en la Figura 9.4.

Una vez ingresados los parámetros, ya sean numéricos o analíticos, necesarios para el procesamiento de la solución del problema se procede a hacer clic en el botón “*CALCULAR*” (ver Figura 9.4). Después de esto será necesario que el usuario cree un archivo en donde guardará toda la información que ha ingresado hasta el momento más todos los resultados del problema seleccionando una dirección en el disco de almacenamiento y un nombre para éste. Toda esta información podrá ser revisada, analizada y comparada como se describe a continuación.

9.4. Visualización y Comparación de Resultados con la Utilización del Software

Después de realizar la solución de cualquier ejemplo, todos los datos ingresados por el usuario y los resultados correspondientes a éste quedan almacenados en el archivo que creó,

y el software nos envía a la ventana de pre-procesamiento mostrada en la Figura 9.2. Aquí el usuario podrá resolver el mismo problema, pero con unos parámetros diferentes para la solución ya sea numérica o analítica, o un problema totalmente nuevo y realizar más adelante el análisis de las soluciones.

Con la realización de una o más soluciones se hace necesario ver, principalmente, en forma gráfica cómo es la variación de nuestra variable a lo largo de una longitud durante un tiempo determinado. De la barra de menú mostrada en la Figura 9.2 se puede seleccionar el menú “Ver” en donde se despliegan las opciones, tal como se muestran en la Figura 9.5, “Resultados” y “Error”.

Al seleccionar la opción “Resultado” del menú “Ver” (ver Figura 9.2 y Figura 9.5), inmediatamente el software despliega la ventana mostrada en la Figura 9.6. En esta ventana el usuario no podrá realizar el ingreso de ninguna información que modifique los datos y los resultados de un problema que haya sido resuelto, las únicas opciones que se tienen se encuentran en la barra de menú de la ventana y son: del menú de “Archivo”, las opciones “Abrir” y “Cerrar”, y del menú “Ir”, la opción “Error”.

El menú “Abrir” permite seleccionar cualquier archivo en donde el usuario haya decidido guardar todos los datos y los resultados calculados en la ventana de la Figura 9.4.

Después de seleccionado y abierto el archivo, al usuario le aparecerá toda la información que introdujo como datos pertinentes al planteamiento del problema en el pre-procesador, y los parámetros utilizados en la solución del mismo. Hasta este punto el usuario no ha visto los resultados de la solución del problema, en esta ventana podrá seleccionar la forma en la cual desea ver los resultados, teniendo como posibilidades la visualización gráfica o tabulada de los resultados, explicados en los siguientes dos capítulos.

9.4.1. Visualización gráfica

Permite al usuario ver en forma gráfica los resultados. El procedimiento a seguir es el siguiente: primero el usuario debe decidir si desea ver la solución a lo largo de la longitud para uno o varios tiempos determinados, o cómo es la variación en uno o varios puntos a lo largo del tiempo, chequeando las casillas “Rangos de t a mostrar” y “Rangos de x a mostrar” respectivamente, o seleccionando ambas si lo desea.

Los datos ingresados en estas casillas deben ser escritos en la nomenclatura que utiliza MATLAB para definir tanto valores reales como vectores. En nuestro ejemplo deseamos ver como es la variación de la temperatura a lo largo de la longitud en los tiempos 0, 20, 60 y 300 segundos, como se puede ver en la Figura 9.6 estos se encuentran separados por espacios. Para la visualización de la variación de la temperatura a lo largo del tiempo en los puntos comprendidos entre 0 y 0.25 m cada 0.05 m , ingresamos en la casilla correspondiente de la siguiente forma 0 : 0.05 : 0.25 como también se puede ver en la Figura 9.6.

El usuario debe seleccionar tanto los tiempos como las posiciones en nodos en donde haya realizado los cálculos. Para esto puede utilizar toda la información que muestra la ventana de pos-procesamiento en las casillas de “*Paso de longitud*” y “*Paso de Tiempo*”.

Una vez seleccionados los tiempos, o las posiciones, o tiempos y posiciones el usuario puede hacer clic en el botón graficar de la ventana de pos-procesamiento.

Si el usuario desea comparar dos o más resultados obtenidos de la solución de un mismo problema pero por diferentes métodos, o diferentes aproximaciones numéricas o ambas, simplemente deja la solución que ha graficado inicialmente y posteriormente repite el procedimiento abriendo un segundo archivo, pero antes de hacer clic en el botón “*Graficar*” el usuario chequea las opciones de comparar al lado de las casillas “*Rangos de t a mostrar*” y “*Rangos de x a mostrar*” (una de las opciones o ambas), según los gráficos que selecciones para su comparación, también deberá seleccionar el tipo de línea para diferenciar de los gráficos anteriores.

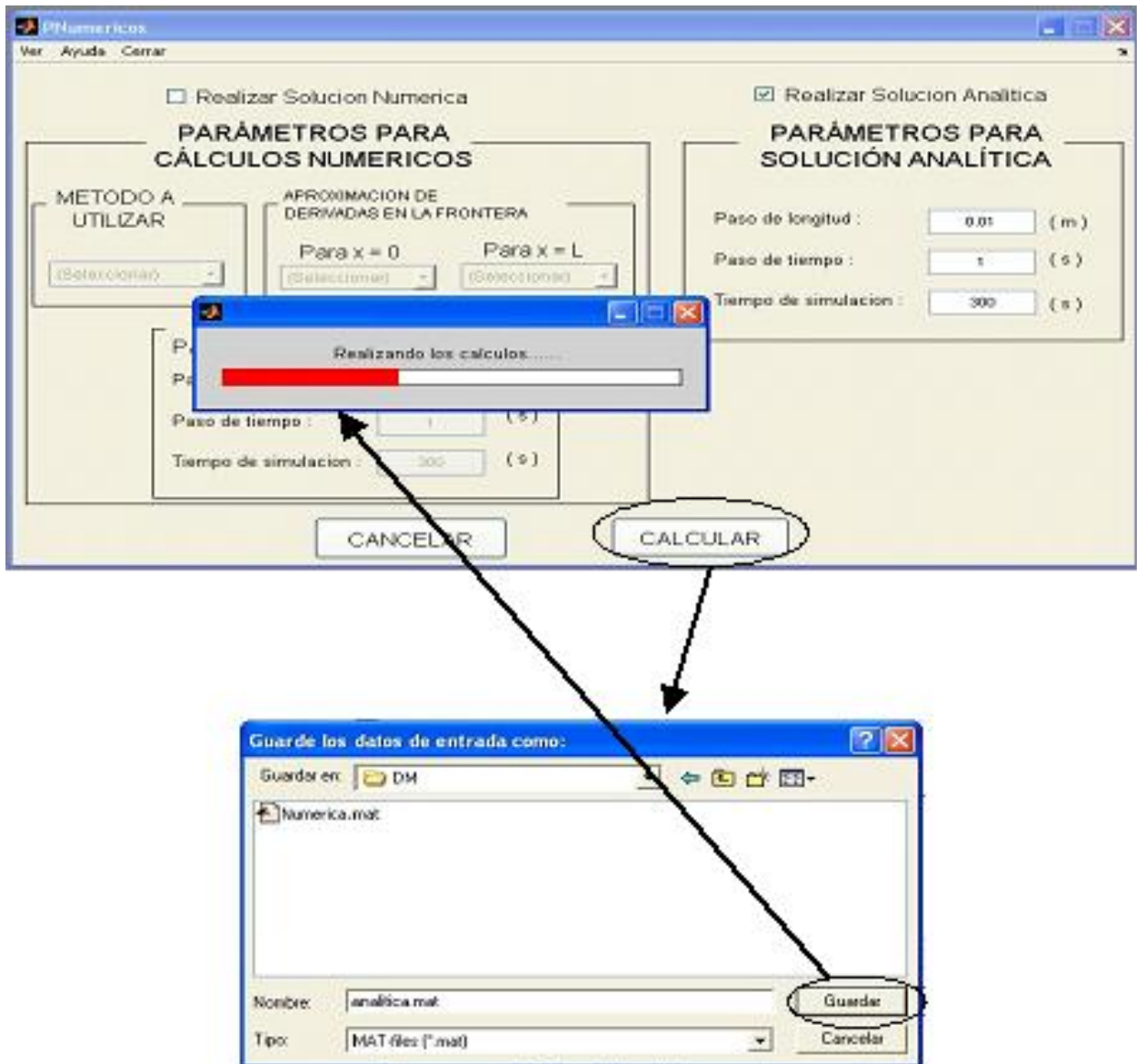


Figura 9.4: Ventana en donde se están guardando los datos y realizando los cálculos de la solución numérica del ejercicio.

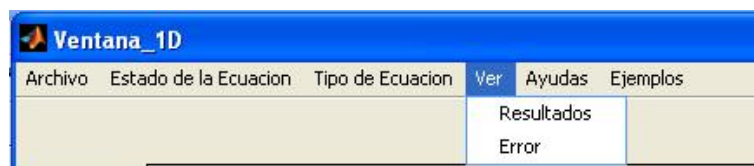


Figura 9.5: Menú "Ver" de la ventana de pre-procesamiento.

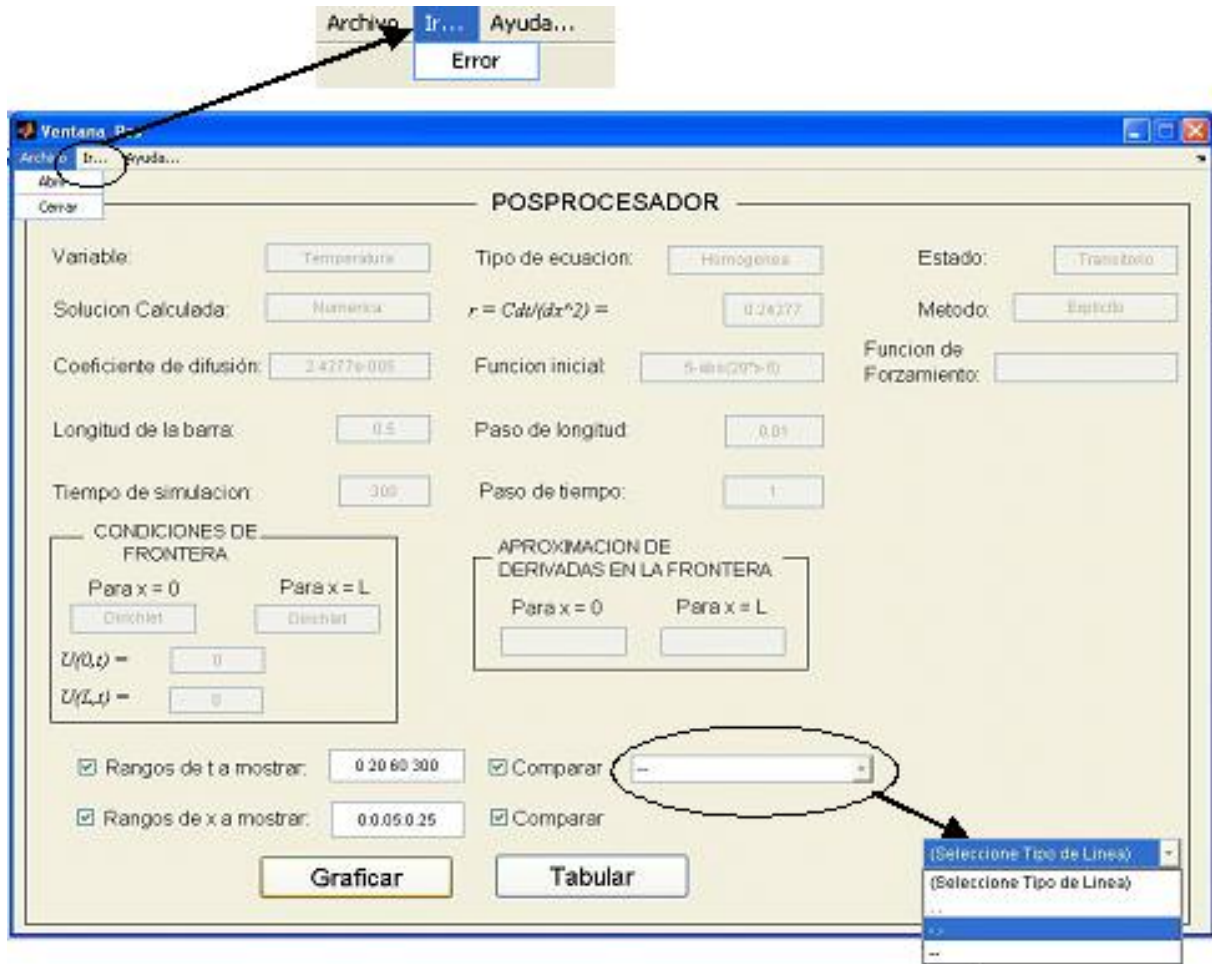


Figura 9.6: Ventana de pos-procesamiento de resultados para la visualización en forma gráfica y tabulada.

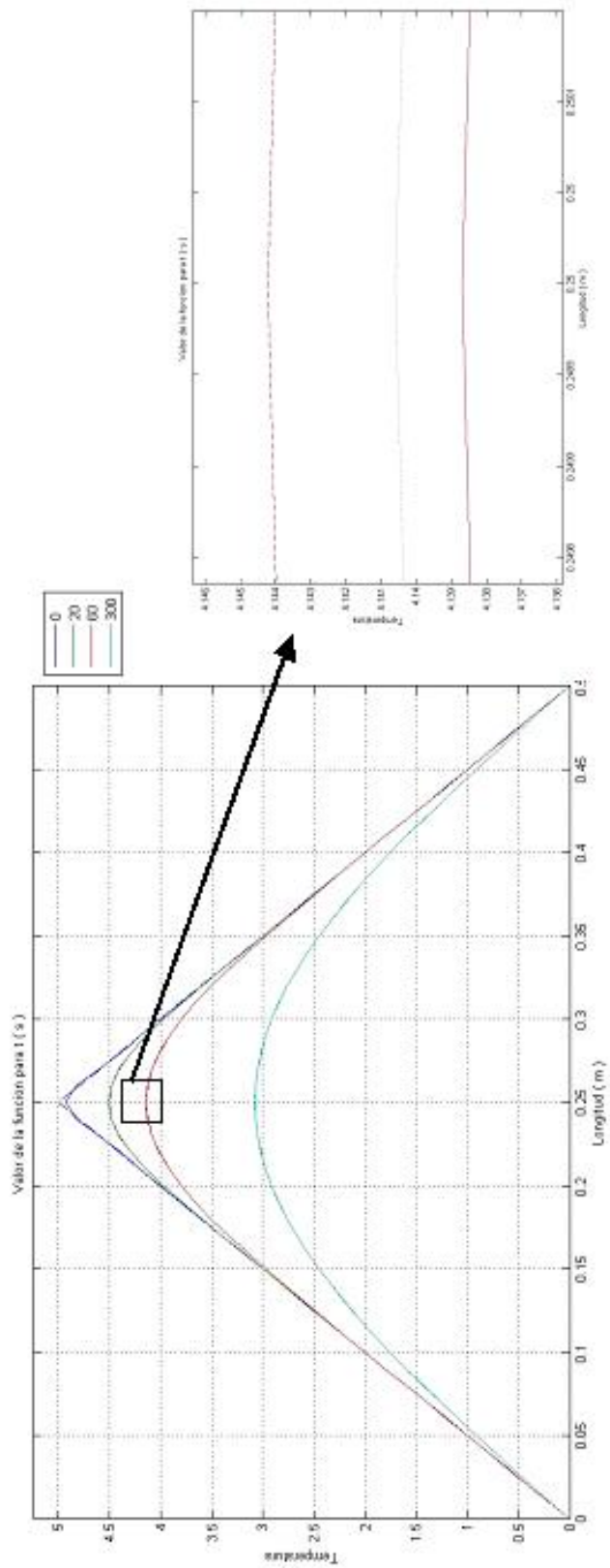


Figura 9.7: Variación de la temperatura para los tiempos seleccionados a lo largo de la longitud.

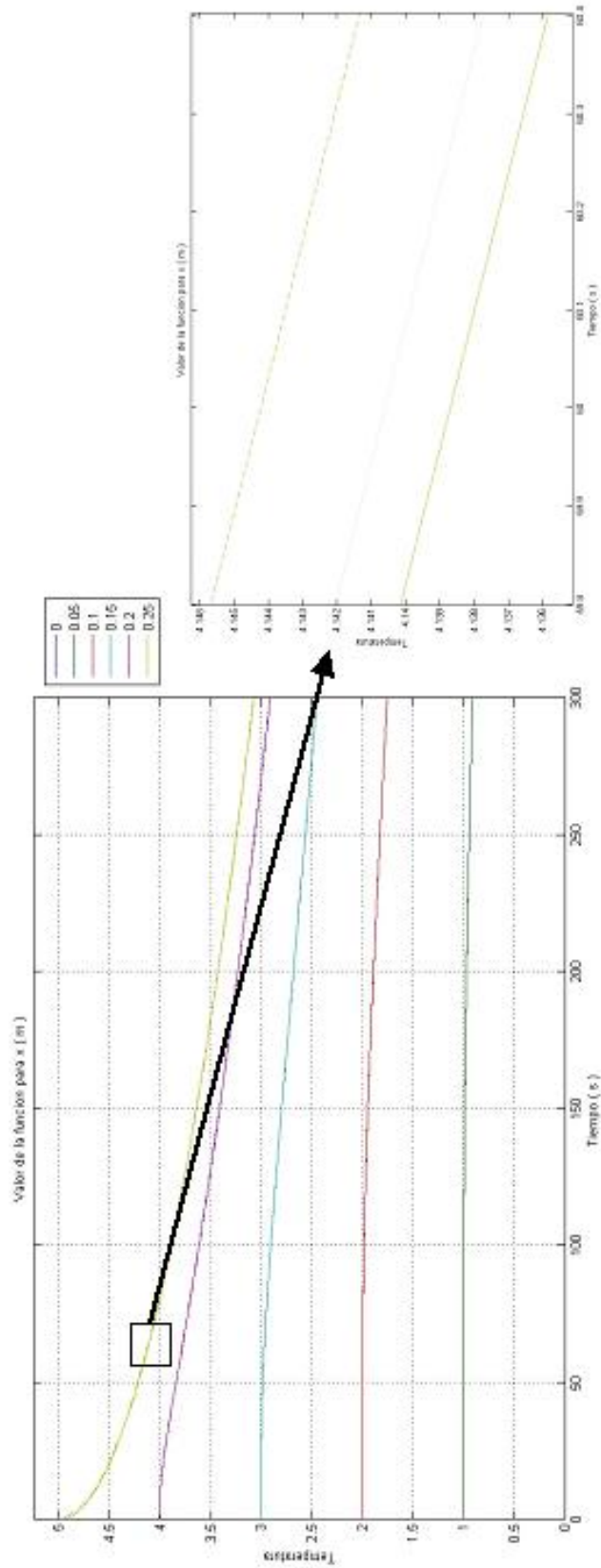


Figura 9.8: Variación de la temperatura para las posiciones seleccionadas a lo largo del tiempo.

En las Figura 9.7 y Figura 9.8 se muestra la superposición de las tres soluciones calculadas para nuestro ejercicio, donde la solución analítica se encuentra en líneas continuas; el método explícito en líneas punteadas; y el método implícito en líneas discontinuas. La Figura 9.7 muestra la variación de la temperatura en los tiempos seleccionados a lo largo de la longitud de la barra y la Figura 9.8 muestra la variación en las posiciones seleccionadas a lo largo de todo el tiempo.

9.4.2. Visualización tabulada

Además de la forma gráfica que se tiene para ver los resultados, el usuario ingresando los datos de igual forma a la descrita en el ítem anterior, podrá ver los resultados en forma tabulada. Para esto es suficiente con hacer clic en el botón “*Tabular*” de la Figura 9.6. El usuario cuenta con las mismas opciones con que cuenta para graficar, pudiendo hacer las comparaciones de los resultados numéricos mientras los grafica.

La Figura 9.9 muestra la ventana en donde el software presenta los resultados en forma tabulada. Aquí se presenta la variación de la temperatura para las soluciones Analítica y numérica por medio del método explícito, calculadas para el ejemplo, tanto para los tiempos seleccionados a lo largo de la longitud de la barra como para las posiciones seleccionadas a lo largo de todo el tiempo.

9.5. Cálculo del Error Entre Dos Soluciones

El software también cuenta en el módulo de pos-procesamiento con una forma de calculo de errores entre dos soluciones diferentes para un mismo problema. A esta parte del pos-procesador se puede tener acceso haciendo clic en el menú “*Ver*” de la ventana de pre-procesamiento seleccionando “*Error*” como se puede ver en la Figura 9.2 y la Figura 9.5, también haciendo clic en el menú “*Ir*” de la ventana de pos-procesamiento y seleccionando la opción “*Error*” (ver Figura 9.6). El programa nos abrirá la ventana mostrada en la Figura 9.10.

El primer paso a realizar es seleccionar los dos archivos que se van a utilizar para el cálculo del error. Aquí el usuario siempre calculará el error de un resultado con respecto a otro u otros, por ejemplo podrá comparar dos resultados de dos soluciones numéricas distintas para un mismo problema en donde la diferencia estará en el tamaño de la distribución espacial que el usuario seleccione.

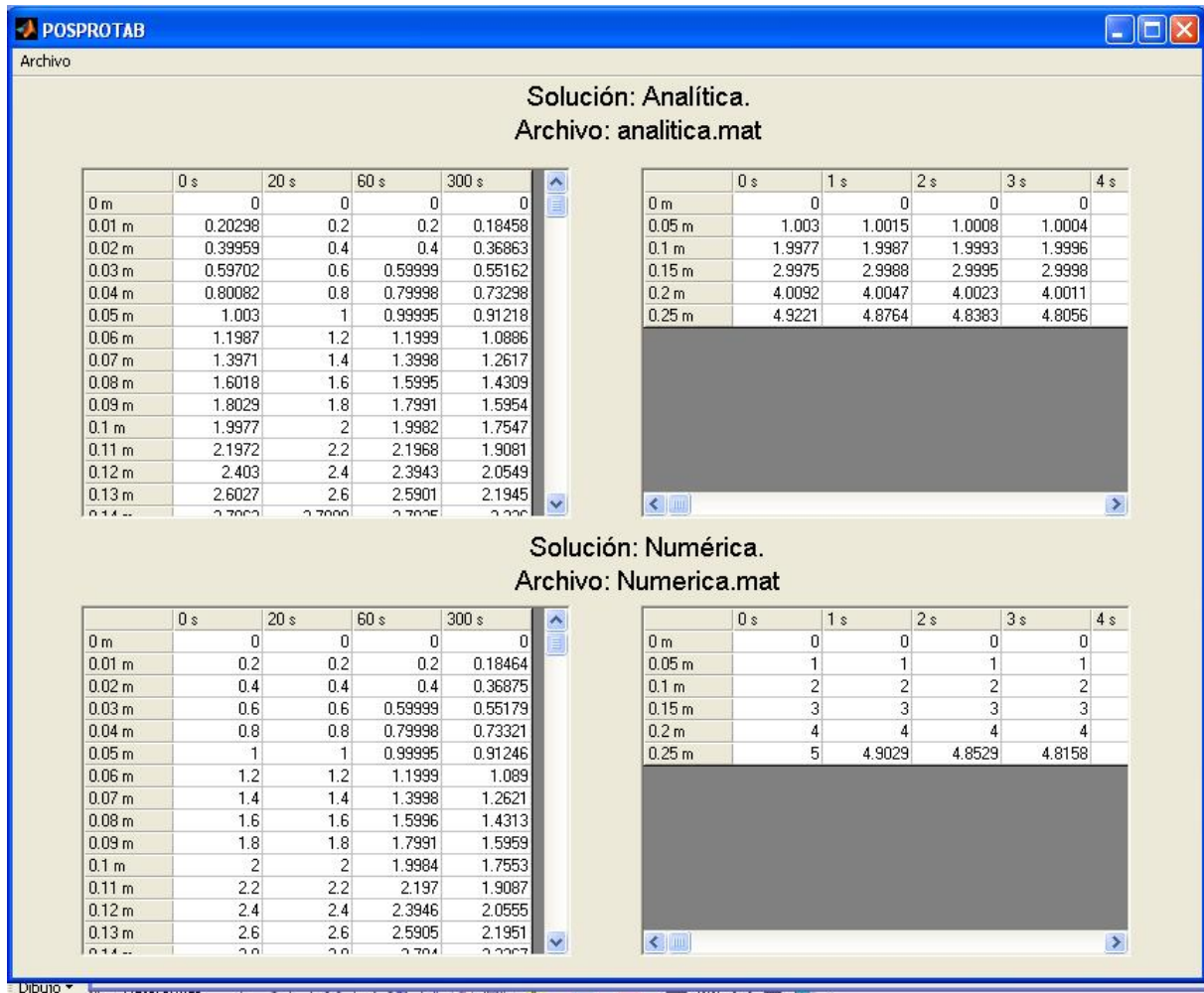


Figura 9.9: Variación de la temperatura para las posiciones seleccionadas a lo largo del tiempo.

En nuestro ejemplo hemos seleccionado calcular el error que existe entre la solución numérica utilizando el método explícito con respecto a la solución analítica. Los archivos en que decidimos guardar estos resultados serán los archivos que utilizaremos para el cálculo del error. Para cargar los archivos debemos realizar clic en el botón “Cargar Archivo 1” de la ventana mostrada en la Figura 9.10. Aquí nos aparecerá un cuadro de dialogo en donde seleccionamos el archivo donde guardamos la solución analítica ya que es la solución con respecto a la cual vamos a calcular el error. En este paso siempre se selecciona el archivo con respecto al cual se va a calcular el error.

Una vez cargado el “Archivo 1” podemos proceder a cargar el “Archivo 2” haciendo clic

CÁLCULO DEL ERROR

Archivo: Archivo:

Variable: Variable:

Solución Calculada: Solución Calculada:

Método: Método:

$r = Cdu/(dx^2) =$ $r = Cdu/(dx^2) =$

Longitud de la barra: Longitud de la barra:

Paso de longitud: Paso de longitud:

Tiempo de simulación: Tiempo de simulación:

Paso de tiempo: Paso de tiempo:

APROXIMACIÓN DE DERIVADAS
Para x = 0 Para x = L

CONDICIONES DE FRONTERA
Para x = 0 Para x = L

$U(0,t) =$ $U(0,t) =$

$U(L,t) =$ $U(L,t) =$

Rangos de t =

Rangos de x =

Error Cuadrático Medio Global (%):

Error Cuadrático Medio Global:

Figura 9.10: Ventana para cálculo de errores.

en el botón “*Cargar Archivo 2*”. En el caso de nuestro ejemplo hemos seleccionado el archivo en el cual guardamos los resultados de la solución numérica donde se utilizó el método explícito. Después de cargar cada uno de los archivos el software nos mostrará en el recuadro correspondiente los datos que corresponden al planteamiento del problema y los parámetros que se utilizaron para el cálculo de las respectivas soluciones (ver Figura 9.10).

El paso siguiente es seleccionar los puntos en los cuales se desea calcular el error teniendo en cuenta la distribución espacial y temporal. El usuario aquí deberá seleccionar puntos del dominio espacial en donde se hayan realizado cálculos para ambos archivos, ya que en ningún caso se utiliza interpolación de datos para el cálculo del error. Para ésto puede utilizar toda la información que muestra la ventana de de la Figura 9.10 en las casillas de “*Paso de longitud*” y “*Paso de Tiempo*” de los archivos. Para el caso de nuestro ejemplo hemos seleccionado el

cálculo del error en los instantes de tiempo 0, 20, 60 y 300 segundos, y para las posiciones 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 m excluyendo los extremos de la barra.

Una vez esté seguro de haber seleccionado los puntos en el tiempo y en el espacio donde desea calcular el error del “*Archivo 2*” con respecto al “*Archivo 1*”, se procede a hacer clic en el botón “*Calcular Error*” de la Figura 9.10. Los cálculos del error estarán terminados cuando las casillas “*Error Cuadrático Medio Global (%)*” y “*Error Cuadrático Medio Global*” muestren los valores que corresponden. Después de esto tendremos 5 formas diferentes de visualizar estos resultados.

Al hacer clic en el botón “*Graficar Diferencias*” el programa graficará para los tiempos y posiciones escogidas las diferencias de los valores que tenga la variable. Para el caso de nuestro ejemplo solo serán diferencias de temperaturas calculadas utilizando la siguiente expresión

$$E(x, t) = U^C(x, t) - U^T(x, t) \quad (9.4)$$

donde $U^T(x, t)$ representa los resultados de referencia para el cálculo del error, en nuestro caso es la solución analítica, y $U^C(x, t)$ los resultados a los cuales se les calcula el error, la solución numérica con el uso del método explícito en nuestro ejemplo, para la posición x en el tiempo t . El resultado se puede mirar en la Figura 9.11. Nótese que los valores estarán dados en unidades de temperatura y están en orden de 10^{-3} .

El software realiza cálculos del porcentaje de error, estos se pueden visualizar haciendo clic en el botón “*Graficar Porcentaje de Error*” mostrado en la Figura 9.10. El valor del porcentaje de error es calculado para los tiempos y las posiciones seleccionadas por medio de la siguiente fórmula

$$\%E(x, t) = \frac{U^C(x, t) - U^T(x, t)}{U^T(x, t)} * 100 \quad (9.5)$$

Para nuestro ejemplo los resultados del gráfico que muestra el software se presentan en la Figura 9.12. Como se puede observar el resultado del comportamiento de las líneas son iguales a las obtenidas en la Figura 9.11 con la diferencia en que los valores están dados en porcentaje.

El resultado mostrado en la casilla “*Error Cuadrático Medio Global*” corresponde al valor calculado por la expresión

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^C(x, t) - U^T(x, t)|^2} \quad (9.6)$$

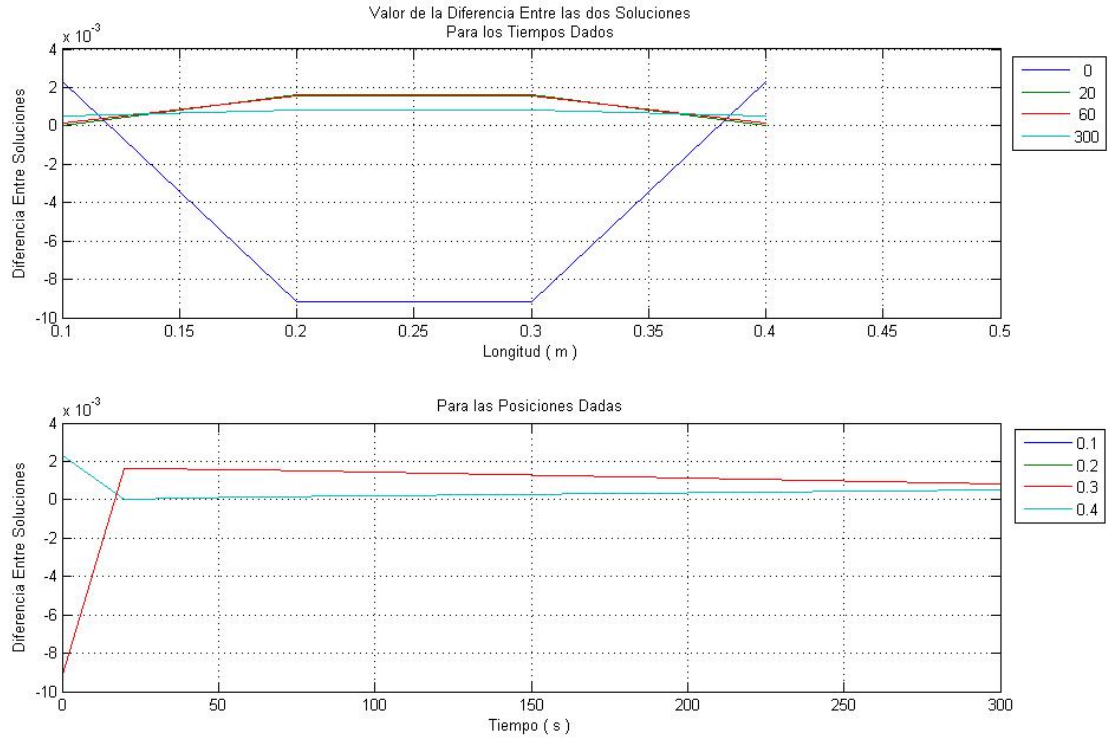


Figura 9.11: Resultado de la diferencia de error en las posiciones y tiempos seleccionados.

donde N es el número de nodos de la malla.

El error cuadrático medio global en porcentaje corresponde al valor dado en la casilla “*Error Cuadrático Medio Global (%)*”. Este se calcula con la formula

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^C(x, t) - U^T(x, t)|^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum |U^T(x, t)|^2}} \quad (9.7)$$

La otra opción que tiene esta parte del pos-procesador es la de ver los resultados de los errores en forma tabulada. En esta opción se muestran los resultados de error en dos tablas, en la primera se tabulan la diferencia entre los dos resultados y en la segunda se tabulan el porcentaje de error de la solución calculada con respecto a la de referencia, que es la solución

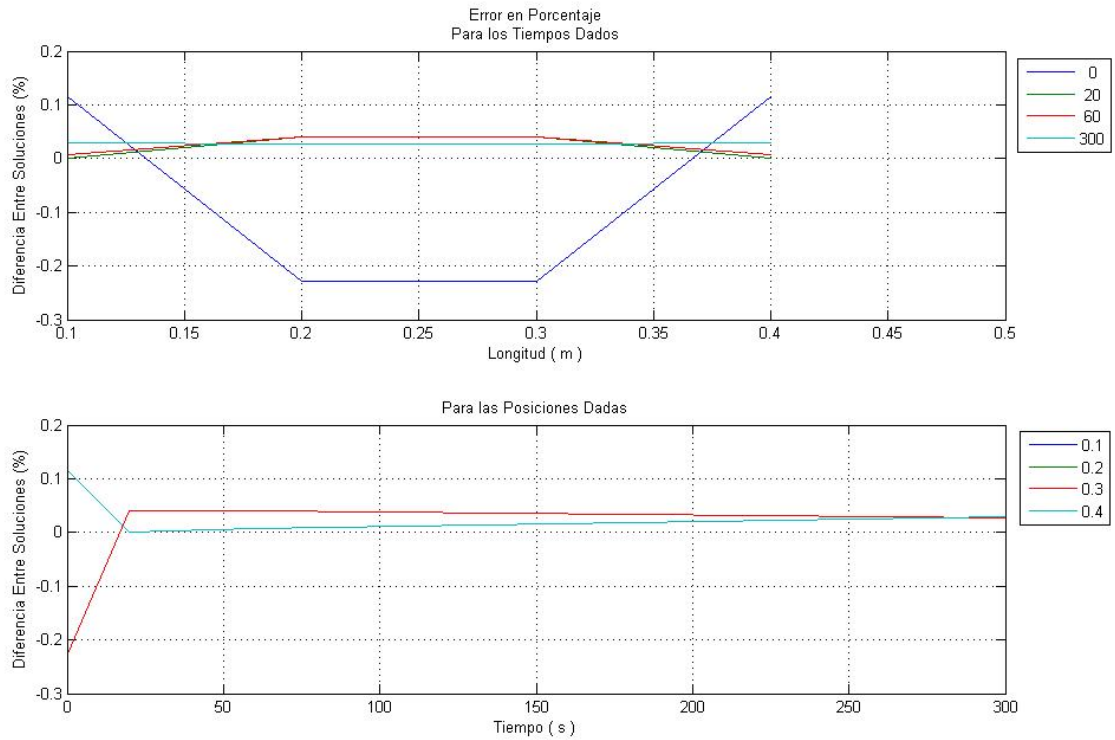


Figura 9.12: Resultado del porcentaje de error en las posiciones y tiempos seleccionados.

analítica en nuestro caso de ejemplo. Después de hacer clic en el botón “*Tabular Errores*” inmediatamente se despliega la ventana mostrada en la Figura 9.13.

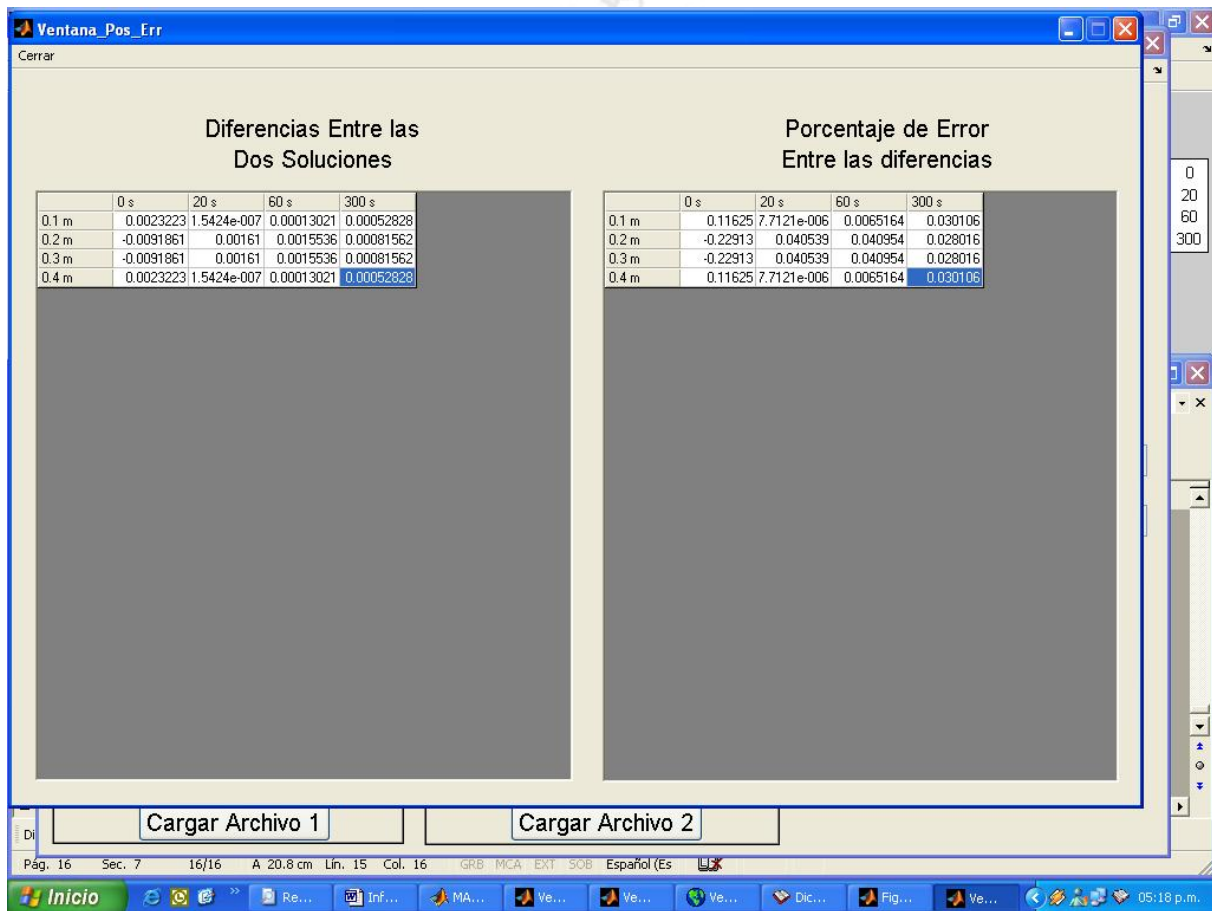


Figura 9.13: Resultados del error calculado, mostrando las diferencias y los porcentajes para las posiciones y los tiempos seleccionados.

Capítulo 10

EJERCICIOS 1D

A continuación se presentan algunos ejercicios propuestos en (Gockenbach, 2002) y (Zauderer, 1998), con algunas modificaciones con el objetivo de que el software sea utilizado como una herramienta para el análisis de los problemas y no solamente para que estos sean resueltos.

1. Considere una barra de hierro, de longitud 50 cm, con calor específico $c = 0.437 \text{ J}/(gK)$, densidad $\rho = 7.88 \text{ g}/\text{cm}^3$ y conductividad térmica $k = 0.832 \text{ W}/(\text{cmK})$. Suponga que la barra está aislada térmicamente excepto en los extremos y que la temperatura inicial es

$$f(x) = 5 - \frac{|x - 25|}{5},$$

donde $f(x)$ está dada en grados Celsius. Finalmente suponga que los extremos de la barra se colocan en un medio de hielo (0°C). Se pide,

- a) Expresarlo como un problema de valores iniciales con condiciones de borde.
- b) La solución analítica está dada por

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{50^2\rho c}},$$
$$b_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx.$$

Calcular la distribución de temperatura después de 20, 60 y 300 segundos, utilizando los métodos explícito e implícito con $\Delta x = 1$ y $\Delta t = 1, \Delta t = 2.5$. Comparar con la solución analítica.

2. Resolver numéricamente la ecuación

$$\begin{aligned}
 u_t &= 0.1u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t, \\
 u(x, 0) &= x(1 - x), & 0 < x < 1, \\
 u_x(0, t) &= 0, & 0 < t, \\
 u_x(1, t) &= 0, & 0 < t.
 \end{aligned}$$

utilizando los métodos implícito y Crank-Nicolson, empleando

- Diferencias centradas para aproximar las derivadas en los bordes.
- Diferencias progresivas en $x = 0$ y diferencias regresivas en $x = 1$.
- Comparar en $t = 0.6$, $t = 1$ los resultados con la solución analítica dada por

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_n \cos(n\pi x) e^{-0.1n^2\pi^2 t}, \\
 b_n &= 2 \int_0^1 x(1 - x) \cos(n\pi x) dx.
 \end{aligned}$$

3. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t, \\
 u(x, 0) &= 1, & 0 < x < 1, \\
 u_x(0, t) &= u(x, 0), & 0 < t, \\
 u_x(1, t) &= -u(1, t), & 0 < t.
 \end{aligned}$$

usando los métodos Explícito y Crank-Nicolson para $0 < t \leq 1$ y empleando,

- Diferencias centradas para las condiciones de frontera.
- Diferencias progresivas en $x = 0$ y diferencias regresivas en $x = 1$.
- Comparar la solución obtenida en $x = 0.2$ y $x = 0.6$ en todos los tiempos, con la solución analítica

$$u(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{3 + 4\alpha_n^2} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos 2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad 0 < x < 1$$

donde α_n es una raíz positiva de la ecuación

$$\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}.$$

4. Suponga ahora que la barra de hierro del ejercicio 1 se calienta a una temperatura constante de $4^\circ C$ y que un extremo ($x = 0$) se coloca en un medio de hielo ($0^\circ C$) mientras que el otro se mantiene a $4^\circ C$ ¿Cuál es la distribución de temperatura 5 minutos después?



Capítulo 11

VENTANA 2D

En la Ventana 2D se ofrecen las herramientas para definir un problema en dos dimensiones que se expresa mediante la ecuación

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) &= G(x, y, t), \text{ para } t > 0, 0 < x < L \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \text{ para } 0 < x < L_x \text{ y } 0 < y < L_y. \\ \alpha_1 u(0, y, t) - \beta_1 u_y(0, y, t) &= 0, \\ \alpha_2 u(L_x, y, t) - \beta_2 u_y(L_x, y, t) &= 0, \\ \alpha_3 u(x, 0, t) - \beta_3 u_x(x, 0, t) &= 0, \\ \alpha_4 u(x, L_y, t) - \beta_4 u_x(x, L_y, t) &= 0, \text{ para } t > 0 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Esta ecuación se utiliza para modelar diversos fenómenos físicos, tales como distribución de temperatura y transporte de contaminantes, entre otros. Las constantes ρ, c , y k toman significados diferentes, de acuerdo al fenómeno que se esté trabajando, α y β definen las condiciones de frontera.

El software se aplica sobre un dominio rectangular en donde las condiciones de frontera serán definidas para cada uno de los cuatro lados del mismo.

11.1. Estado de la Ecuación

Permite determinar si la ecuación se desea calcular en un estado en el cual es dependiente o independiente del tiempo (Chapra, 1997; Gockenbach, 2002).

Permanente: Independiente del Tiempo

Transitorio: Dependiente del Tiempo

11.2. Tipo de Ecuación

Esta opción permite determinar el tipo de problema, de acuerdo con la función del lado derecho de la Ecuación (11.1).

Homogénea:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) = 0, \quad (11.2)$$

No Homogénea:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) = G(x, y, t). \quad (11.3)$$

11.3. Nombre de la Variable

Se refiere al nombre de la variable u en la Ecuación (11.1) que es a la que se le dará solución. Aquí se puede seleccionar uno de los nombres propuestos al hacer click en el botón insertar o, también, se puede escribir variables, como por ejemplo temperatura, concentración de contaminante, potencial eléctrico, etc.

11.4. Condiciones Iniciales

Se introduce la función que representa la condición inicial del problema. Por ser bidimensional esta se presenta en función de las variables longitudinales x y y , las cuales pueden ser constantes, dándonos como resultado el valor de u (Ecuación (11.1)) en el tiempo $t = 0$ en todo el dominio. Esta función debe ser escrita en la nomenclatura que utiliza MATLAB para la interpretación de funciones.

11.5. Función de Forzamiento

Aquí se debe ingresar la función $G(x, y, t)$, mostrada en la Ecuación (11.3), cuando el tipo de ecuación seleccionado es no homogéneo. Si el tipo de ecuación que se está trabajando es homogéneo esta casilla estará inactiva y no se podrá ingresar ninguna función.

11.6. Parámetros Geométricos

Permite determinar las dimensiones espaciales del problema a tratar. Por tratarse de un problema bidimensional los valores que se ingresan son las longitudes en las direcciones x y y del dominio del problema.

11.7. Parámetros Físicos

Se escribe el Coeficiente de Difusión, el cual posee distintos significados de acuerdo con la variable de la que se está tratando en el problema. Por ejemplo para el caso de distribución de temperatura en una barra, el coeficiente de difusión está dado por $\frac{k}{\rho c}$, donde c es el calor específico; densidad, ρ y; conductividad térmica, k .

11.8. Condiciones de Frontera

Cada una de las condiciones de frontera determinará la representación física del problema que se está estudiando. Se distinguen tres tipos de condiciones diferentes:

$$\textit{Dirichlet} \quad u(0, y, t) = A(y, t) \quad u(L_x, y, t) = B(y, t) \quad (11.4)$$

$$u(x, 0, t) = A(x, t) \quad u(x, L_y, t) = B(x, t) \quad (11.5)$$

$$\textit{Neumann} \quad u_y(0, y, t) = A(y, t) \quad u_y(L_x, y, t) = B(y, t) \quad (11.6)$$

$$u_x(x, 0, t) = A(x, t) \quad u_x(x, L_y, t) = B(x, t) \quad (11.7)$$

$$\textit{Mixta} \quad u_y(0, y, t) = A(y, t)u(0, y, t) \quad u_y(L_x, y, t) = -B(y, t)u(L_x, y, t) \quad (11.8)$$

$$u_x(x, 0, t) = A(x, t)u(x, 0, t) \quad u_x(x, L_y, t) = -B(x, t)u(x, L_y, t) \quad (11.9)$$

Donde A y B pueden ser funciones dependientes del tiempo o, también, constantes. Las condiciones de frontera se deben definir en cada uno de los cuatro lados del dominio.

11.9. Botón *Procesar*

Una vez ingresados los datos que definen el planteamiento del problema, se procede a hacer click en el botón *Procesar* para pasar a la siguiente ventana donde se seleccionaran los parámetros según el tipo de solución que se desee realizar, ya sea analítica o numérica, según el problema.

Capítulo 12

VENTANA PARA SELECCIONAR EL TIPO DE SOLUCIÓN

En esta ventana el usuario deberá seleccionar y preparar el tipo de solución que desea obtener. Entre las posibilidades que se tienen en el software están las soluciones numéricas y analíticas, teniendo para cada una de ellas una serie de parámetros los cuales se explican a continuación.

12.1. Solución *Analítica*

Todas las posibles soluciones analíticas que se pueden obtener en el software están detalladas en la Tabla 12.1. Para obtener información de los métodos para la obtención de la solución analítica ver en *Ayuda, Métodos Analíticos*.

Tabla 12.1: Soluciones analíticas que se pueden realizar en el software para problemas bidimensionales.

Estado	Tipo de Ecuación	Condición de Frontera
Permanente	Homogénea	Dirichlet

12.2. Solución *Numérica*

En la Tabla 12.2 se muestra un resumen de todas las combinaciones y tipo de soluciones numéricas que se pueden obtener con la utilización del software. Para obtener información referente a *Método a Utilizar y Aproximación de Derivadas en la Frontera* ver en *Ayuda, Métodos Numéricos*.

Tabla 12.2: Soluciones numéricas que se pueden realizar en el software para problemas bidimensionales.

Estado	Tipo de Ecuación	Condición de Frontera	Método
Permanente	Homogénea	Dirichlet	
		Neumann	
Transitorio	Homogénea	Dirichlet	Explícito
			ADI
		Neumann	Explícito
		ADI	
	No Homogénea	Dirichlet	Explícito
			ADI
Neumann		Explícito	
		ADI	

12.3. Malla Espacio - Temporal

12.3.1. *Paso de longitud* (Δx y Δy)

El usuario debe seleccionar, para la solución *numérica*, el paso de longitud que será utilizado para la realización de los cálculos y el almacenamiento de los resultados en las direcciones x y y . En el caso de la solución *analítica*, el usuario solamente ingresa las posiciones a lo largo del dominio en los cuales desea guardar la información de los cálculos, ya que la precisión de los resultados no depende del paso de longitud seleccionado.

Ejemplo. Si el usuario ha seleccionado para su problema un *paso de longitud* de 5 cm en la dirección x y de 8 cm en la dirección y , deberá ingresar en las casillas respectivas los

valores de 0.05, que corresponde a $\Delta x = 0.05 \text{ m}$ y 0.08 correspondiente a $\Delta y = 0.08 \text{ m}$. De este modo, para una solución *numérica*, tendremos que la precisión y estabilidad en la solución dependerán en gran parte de este valor. Para la solución *analítica* tendremos que los cálculos serán almacenados cada 5 *cm*, en la dirección *x* y cada 8 *cm* en la dirección *y* (Ver *Ayuda, Métodos numéricos y Métodos analíticos*).

12.3.2. Paso de tiempo (Δt)

Para las soluciones *numéricas*, el *paso de tiempo* es utilizado para la realización de los cálculos y para el almacenamiento de los resultados de la solución del problema. Si se desea realizar la solución *analítica*, el usuario deberá ingresar solamente los instantes de tiempo en los cuales desea guardar los resultados. Cuando se tienen soluciones para el estado *Permanente* este parámetro no se tiene en cuenta.

Ejemplo. Si se tiene que el *paso de tiempo*, seleccionado para los cálculos es de 30 *s*, el usuario deberá ingresar en esta casilla un valor de 30, que corresponde a $\Delta t = 30 \text{ s}$. De este modo, para una solución *numérica*, tendremos que la precisión y estabilidad en la solución dependerán en gran parte de este valor. Para la solución *analítica* tendremos que los cálculos serán almacenados cada 30 *s*, para cada una de las posiciones escogidas en el *paso de tiempo* (Ver *Ayuda, Métodos numéricos y Métodos analíticos*).

12.3.3. Tiempo de simulación

Corresponde al tiempo final en el cual se desean tener las soluciones (numéricas o analíticas). El *Tiempo de simulación* sólo se considerará para las soluciones en el estado *Transitorio*.

12.4. Realización de los Cálculos

Una vez ingresados los parámetros, ya sean numéricos o analíticos, necesarios para el procesamiento de la solución del problema se procede a hacer click en el botón “*CALCULAR*”. Después de esto será necesario que el usuario cree un archivo en donde guardará toda la información que ha ingresado hasta el momento más, todos los resultados del problema seleccionando una dirección en el disco de almacenamiento y un nombre para éste. Toda esta información podrá ser revisada, analizada y comparada en la ventana para visualización de resultados del software.

Después de realizar cualquier solución, el usuario podrá realizar varias soluciones para el mismo problema, o para cualquier otro, sin ser necesario que haga una verificación inmediata de los resultados, teniendo la posibilidad de aplicar diferentes métodos, aproximaciones, etc; para después realizar las comparaciones o visualizaciones que desee.



Capítulo 13

SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LA ECUACIÓN DE CALOR BIDIMENSIONAL

En este capítulo se desarrollará los métodos numéricos para resolver la ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right] + F(x, y, t) \quad (x, y) \in R, \quad t > 0 \quad (13.1)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in R \cup \partial R \quad (13.2)$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t) \quad (x, y) \in \partial R, \quad t > 0, \quad (13.3)$$

donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < Lx, 0 < y < Ly\}$. La Ecuación (13.2) indica la condición inicial del problema definido en el rectángulo y en la frontera del mismo, (13.3) determina las condiciones de frontera del problema, inicialmente utilizaremos condiciones de Dirichlet en los cuatro bordes pero se incluirán condiciones de frontera tipo Neumann.

13.1. Método Explícito para Problemas en 2D

13.1.1. Derivación del método

Para discretizar el dominio del problema se eligen valores Δx , Δy , Δt que son los tamaños de paso elegidos en x , y y t respectivamente, con lo cual se forma la partición,

$$0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_M = Lx, \quad 0 < y_0 < y_1 < \cdots < y_N = Ly, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots,$$

donde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, para $i = 0, 1, \dots, M - 1$, $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ para $j = 0, 1, \dots, N - 1$, y $t_n = n\Delta t$, para $n = 1, 2, \dots$

Sea $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n)$, para $i = 0, 1, \dots, M$, $j = 0, 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots$

Para la discretización de la Ecuación (13.1) en el punto (x_i, y_j) y el tiempo t_n , se hace,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + O((\Delta x)^2),\end{aligned}$$

así reemplazando en la Ecuación (13.1) se obtiene

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha^2 \left[\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right] + F_{i,j}^n, \quad (13.4)$$

donde $F_{i,j}^n = F(x_i, y_j, t_n)$, la Ecuación (13.4) es válida para $i = 1, \dots, M - 1$, $j = 1, \dots, N - 1$.

Con el fin de calcular $u_{i,j}^{n+1}$ lo despejamos de la Ecuación (13.4) colocando

$$r_x = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}, \quad y \quad (13.5)$$

$$r_y = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta y^2}, \quad (13.6)$$

así

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + r_x (u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) + r_y (u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n) + \Delta t F_{i,j}^n \quad (13.7)$$

para $i = 1, \dots, M - 1$, $j = 1, \dots, N - 1$.

Para iniciar el método explícito, se utiliza la Ecuación (13.2), de la forma,

$$u_{i,j}^0 = f(x_i, y_j), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

Calculados estos valores se utiliza la Ecuación (13.7) para determinar $\{u_{i,j}^1\}$ con $i = 1, \dots, M - 1$, $j = 1, \dots, N - 1$, y para los nodos restantes se utiliza la condición de frontera

(13.3), de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 u_{0,j}^1 &= g(0, y_j, \Delta t), & \text{para } j = 0, 1, \dots, N \\
 u_{M,j}^1 &= g(Lx, y_j, \Delta t), & \text{para } j = 0, 1, \dots, N \\
 u_{i,0}^1 &= g(x_i, 0, \Delta t), & \text{para } i = 0, 1, \dots, M \\
 u_{i,N}^1 &= g(x_i, Ly, \Delta t), & \text{para } i = 0, 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente para los tiempos posteriores.

13.1.2. Condiciones de frontera tipo Neumann

Supongamos que se tiene una condición de Neumann en uno de los bordes, sin pérdida de generalidad, de tal modo que

$$u_x(x, 0, t) = g(x, 0, t) \quad \text{para } 0 < x < Lx, \quad (13.8)$$

aquí los valores de $u_{i,0}^n$ son desconocidos para $i = 0, 1, \dots, M$. Para aproximarlos se utilizarán dos discretizaciones para la derivada en el punto $(x_i, 0)$ y el tiempo t_n

$$u_x(x_i, 0, t_n) = \frac{u_{i,1}^n - u_{i,0}^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (13.9)$$

la forma de aproximar los valores deseados es despejándolos de las ecuaciones (13.8) y (13.9), obteniendo

$$u_{i,0}^n = u_{i,1}^n - \Delta t g(x_i, 0, t_n)$$

una vez se hallan obtenido los valores en el interior de R .

Si se utiliza la discretización en la derivada

$$u_x(x_i, 0, t_1) = \frac{u_{i,1}^0 - u_{i,-1}^0}{2\Delta t} + O((\Delta x)^2), \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (13.10)$$

notemos que se incluye un nuevo nodo (x_i, y_{-1}) del cual no poseemos información, para ellos utilizamos la Ecuación (13.7) con $n = 0$ y $j = 0$, obteniendo

$$u_{i,0}^1 = u_{i,0}^0 + r_x (u_{i-1,0}^0 - 2u_{i,0}^0 + u_{i+1,0}^0) + r_y (u_{i,-1}^0 - 2u_{i,0}^0 + u_{i,1}^0) + \Delta t F_{i,0}^0 \quad (13.11)$$

con r_x y r_y tomados de las Ecuaciones (13.5) y (13.6), el valor de $u_{i,-1}^0$ obtenido de las Ecuaciones (13.8) y (13.10) y reemplazando en (13.11) se obtiene

$$u_{i,0}^1 = u_{i,0}^0 + r_x (u_{i-1,0}^0 - 2u_{i,0}^0 + u_{i+1,0}^0) + r_y (2u_{i,0}^0 - 2u_{i,0}^0 - \Delta t g(x_i, 0, t_0)) + \Delta t F_{i,0}^0$$

la cual se utilizará para $i = 0, 1, \dots, M$. Para más información sobre el método explícito puede ser obtenida en [Smith, 1993, pag 147].

13.2. Método ADI (Alternative Direct Implicit Method)

Se considera ahora un método implícito para aproximar la solución numérica del problema (13.1) sujeto a las condiciones iniciales (13.2) y las condiciones de frontera (13.3) ó (13.8). Se tomará para simplificar $\Delta x = \Delta y$, sea $v_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n)$ una vez conocidos los valores de $v_{i,j}^n$, para aproximar la solución en punto $v_{i,j}^{n+1}$ el método ADI se obtiene al tomar un tamaño de paso temporal $\Delta t/2$ y utilizando aproximación en diferencias regresivas que sea implícito solo en la dirección del eje x y utiliza valores anteriores en la dirección de y a lo largo de la línea $x = x_i$, obteniendo

$$\frac{v_{i,j}^{n+0.5} - v_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} [v_{i-1,j}^{n+0.5} - 2v_{i,j}^{n+0.5} + v_{i+1,j}^{n+0.5} + v_{i,j-1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n]$$

El método es implícito solo en la dirección de x . Una vez conocidos los valores de $\{v_{i,j}^{n+0.5}\}_{i=1}^{M-1}$ en el siguiente paso de ADI se utiliza nuevamente la aproximación realizada en el paso anterior, pero ahora esta aproximación usa valores pasados en la dirección del eje x a lo largo de la línea $y = y_j$ y es implícito solo en la dirección de y , obteniendo la aproximación

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+0.5}}{\Delta t/2} = \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2} [v_{i-1,j}^{n+0.5} - 2v_{i,j}^{n+0.5} + v_{i+1,j}^{n+0.5} + v_{i,j-1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}]$$

Con un asterisco (*) se denotaran los valores intermedios calculados en el tiempo $t = t_n + \Delta t/2$, los pasos del método de ADI se dan en la forma

$$-v_{i-1,j}^* + \left(2 + \frac{2}{r}\right) v_{i,j}^* - v_{i+1,j}^* = v_{i,j-1}^n + \left(\frac{2}{r} - 2\right) v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n \quad (13.12)$$

$$-v_{i,j-1}^{n+1} + \left(2 + \frac{2}{r}\right) v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n+1} = v_{i-1,j}^* + \left(\frac{2}{r} - 2\right) v_{i,j}^* + v_{i+1,j}^* \quad (13.13)$$

Para ejecutar un paso completo del método del ADI, una vez conocido los valores de $\{v_{i,j}^n\}$, para $1 < i < M - 1$ y $1 < j < N - 1$, se utiliza la fórmula (13.12) con j fijo $1 \leq j \leq N - 1$ haciendo un barrido horizontal para calcular todos los valores intermedios por medio de un sistema tridiagonal, obteniendo los valores de $\{v_{i,j}^*\}_{i=1}^{M-1}$, se repite este barrido horizontal resolviendo $N - 1$ sistemas tridiagonales cada uno de tamaño $N - 1$, cada uno de tamaño $M - 1$. Una vez obtenido los $(N - 1)(M - 1)$ valores intermedios de $v_{i,j}^*$ se realiza un barrido vertical, en el cual se resuelven $M - 1$ sistema tridiagonales en la Ecuación (13.13), un sistema para cada i , obteniendo los los valores para $v_{i,j}^{n+1}$.

Un barrido horizontal seguido de un barrido vertical constituyen un paso para el método de ADI. La exactitud de este método es comparable con el método de Crank Nicolson en el

caso de la Ecuación de calor en una dimension. Para más información sobre el método ADI puede ser obtenida en (Johnson y Riess, 1982; Thomas, 1995).



Capítulo 14

VENTANA PARA LA VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS BIDIMENSIONALES

Después de realizar la solución de cualquier problema, todos los datos ingresados por el usuario y los resultados correspondientes a éste quedan almacenados en el archivo que creó al momento de realizar los cálculos. Después de la realización de una o más soluciones se hace necesario ver, principalmente, en forma gráfica cómo es la variación de nuestra variable en todo el dominio durante un tiempo determinado. De la barra de menú de la ventana de pre-procesamiento se puede seleccionar el menú “Ver” donde se despliega las opción, “Resultados”.

En la ventana que se despliega al hacer click en el menú “Resultados” el usuario no podrá realizar el ingreso de ninguna información que modifique los datos y los resultados de un problema que haya sido resuelto, las únicas opciones que se tienen se encuentran en la barra de menú de la ventana y son: del menú de “Archivo”, las opciones “Abrir” y “Cerrar”, y del menú “Ver”, la opción “Error”.

14.1. *Abrir* un archivo

El menú “Abrir” permite seleccionar cualquier archivo en donde el usuario haya decidido guardar todos los datos y los resultados calculados de un problema.

Después de seleccionado y abierto el archivo, al usuario le aparecerá toda la información que introdujo como datos pertinentes al planteamiento del problema en el pre-procesador, y

los parámetros utilizados en la solución del mismo. Hasta este punto el usuario no ha visto los resultados de la solución del problema, en esta ventana podrá seleccionar la forma en la cual desea ver los resultados, teniendo como posibilidades la visualización gráfica en formas de contornos o de superficies.

14.2. Visualización gráfica

Permite al usuario ver en forma gráfica los resultados. El usuario debe decidir si desea ver la solución en todo el dominio para uno o varios instantes de tiempo, chequeando en la casilla “*Puntos de t a mostrar*”. En esta opción el usuario tendrá la posibilidad de seleccionar entre dos tipos de gráficos, un gráfico de contorno y otro de superficie, para ambos gráficos el usuario podrá decidir si quiere ver un video de en donde se muestra el valor de la variable para los tiempos seleccionados.

Los datos ingresados en estas casillas deben ser escritos en la nomenclatura que utiliza MATLAB para definir tanto valores reales como vectores. **Ejemplo**, si deseamos ver como es la variación de la temperatura en el dominio para los tiempos 0, 20, 60 y 300 segundos, estos se ingresan separados por espacios. Para la visualización de la variación de la temperatura a lo largo del tiempo en los puntos comprendidos entre 0 y 0.25 m cada 0.05 m , ingresamos en la casilla correspondiente de la siguiente forma 0 : 0.05 : 0.25.

Para la selección de los tiempos a graficar el usuario debe tener en cuenta la información mostrada en la ventana de pos-procesamiento con el fin de no ingresar valores de tiempos que no hayan sido calculados.

Bibliografía

- Ames, W. F., 1992. *“Numerical Methods for Partial Differential Equations”*. 3th. ed., Academic Press.
- Boas, M. L., 1983. *“Mathematical Methods in the Physical Sciences”*. 2nd. ed., John Wiley and Sons.
- Chapra, S.C., 1997. *“Surface Water Quality Modelling”*. McGraw Hill Book Company.
- Chung, T.J., 1978. *“Finite Elements Analysis in Fluid Dynamics”*. McGraw Hill Book Company.
- Gockenbach, M. S., 2002. *“Partial Differential Equations, Analytical and Numerical Methods”*. SIAM.
- Gonzalez, M., 1996. *“Problemas con Valores en la Frontera con Aplicaciones a la Ingenieria”*. Univerisidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Johnson, L. W. y Riess R. D, 1982. *“Numerical Analysis”*. 2nd ed, Addison-Wesley.
- Kincaid, D. y Cheney, W., 1994. *“Análisis Numérico las Matemáticas del Calculo Científico”*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- Kreyszig, E., 1988. *“Advanced Engineering Mathematics”*. 6th. ed., John Wiley and Sons.
- Lapidus, L., and Pinder, G. F., 1982. *“Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering”*. John Wiley and Sons.
- MATLAB, <http://www.mathworks.com/>.
- O’ Neil, P., 1999. *“Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería”*. Volumen 2, 3a. ed. Editorial CECSA, Mexico.
- Smith, G. D., 1993. *“Numerical Solution of of Partial Differential Equations: Finite Diffrence Methods”*. 3th ed., Oxford University Press.
- Thomas, J. W., 1995. *“Differential Equations: Finite Difference Methods”*. Springer - Verlag, New York, Inc.

- Weinberger, H. F., 1965. *“A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods”*. Jhon Wiley and sons, Inc.
- Welty, J.R., Wicks, C.E., and Wilson, R.E., 1984. *“Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer”*. Jhon Wiley and sons, Inc.
- Zauderer, E., 1998. *“Partial Differential Equations of Applied Mathematics”*. 2nd. ed., Jhon Wiley and sons, Inc.

