UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LIMITES DE FUNCIONES EN ELGRADO UNDECIMO DE LA I.E EL ROSARIO INTEGRANDO GEOGEBRA.

PROPOSAL FOR TEACHING DIDACTICS OF LIMITS OF FUNCTIONS IN THE ELEVENTH GRADE OF THE I.E ROSARY INTEGRATING GEOGEBRA.

ARY FABIAN VOLVERAS ESPINOSA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADISTICA
MANIZALES
2015

PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LIMITES DE FUNCIONES EN ELGRADO UNDECIMO DE LA I.E EL ROSARIO INTEGRANDO GEOGEBRA.

PROPOSAL FOR TEACHING DIDACTICS OF LIMITS OF FUNCTIONS IN THE ELEVENTH GRADE OF THE I.E ROSARY INTEGRATING GEOGEBRA.

ARY FABIAN VOLVERAS ESPINOSA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister En Enseñanza De Las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Magister Leonel Libardo Paloma Parra

MODALIDAD: Maestría de Profundización

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADISTICA
MANIZALES
2015

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis hijos Ariana Lucia y Adrián Esteban que son el motor que me motiva a seguir cualificándome para mejorar mi calidad de vida y poder ofrecerles un ejemplo de esfuerzo y superación.

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a Dios por tantas bendiciones y por permitirme alcanzar cada día mis metas.

Gracias a mis padres y abuela que son fuente de inspiración y que con su ejemplo me impulsan a superarme cada vez más.

Gracias a mi esposa Yrina por apoyarme y estar conmigo en todo momento Ofreciéndome su ayuda incondicional.

RESUMEN

En el siguiente trabajo se expone los resultados obtenidos mediante la ejecución de la propuesta metodológica didáctica para la enseñanza del tema límites de funciones en los grados 11-1 y 11-2 de la Institución Educativa el Rosario de Miranda Cauca. La propuesta se aplicó en el transcurso del tercer periodo del año escolar 2015, en esta se implementó el software educativo geogebra como medio de enseñanza y aprendizaje.

Se clasificaron los dos grupos, uno llamado grupo experimental al cual se le aplicó el tratamiento y el otro como patrón de comparación llamado grupo control quien recibió las clases de manera tradicional.

Los datos obtenidos en los grupos se analizaron con base en el diseño experimental de comparación de pre prueba- tratamiento- pos prueba propuesto por Campbell. El estudio de los datos muestran un desempeño significativo por parte del grupo experimental dado que la influencia del software educativo proporciona un mejor aprendizaje del tema, esta herramienta permitió dinamizar e incrementar el desarrollo de las habilidades de los estudiantes apoyando la construcción de conocimiento, la interacción y la exploración.

PALABRAS CLAVES:

Límites de funciones, propuesta didáctica, software educativo, aprendizaje significativo.

ABSTRACT

In this paper the results obtained through the implementation of the teaching methodology for teaching the limits of functions subject in grades 11-1 and 11-2 of the Educational Institution Rosario de Miranda Cauca exposed. The proposal was implemented during the third quarter of 2015 school year, with the geogebra educational software was implemented as a teaching and learning.

The two groups were classified, one called experimental group to which treatment was applied and the other as a comparison pattern called control group who received classes in a traditional way.

The data obtained in the groups were analyzed based on the experimental design comparing pre prueba- treatment- pos proposed by Campbell test. The study data show a significant performance by the experimental group since the influence of educational software provides a better learning of the subject, this tool allowed streamline and enhance the development of student skills supporting the construction of knowledge, interaction and exploration.

KEYWORDS:

Limits of functions, didactic approach, educational software, meaningful learning.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 5
ABSTRACT 6
LISTA DE TABLAS 9
LISTA DE GRAFICAS 10
LISTA DE ANEXOS 11
INTRODUCCIÓN 12
1. JUSTIFICACIÓN 13
2. OBJETIVOS 14
2.1 Objetivo general 14
2.2 Objetivos específicos 14
3. MARCO DE REFERENCIA 15
3.1 Marco histórico sobre la noción de límite 15
3.2 Marco teórico 20
3.3 El infinito en matemáticas 24
3.4 Las TIC en la educación 26
3.5 Las TIC en la enseñanza de las matemáticas 28
4 PROPUESTA DIDÁCTICA: LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN EL GRADO UNDECIMO, INTEGRANDO GEOGEBRA 29
4.1 Noción intuitiva de límite de funciones en un punto mediante la definición formal 29
4.2 Visualización del concepto de límite de funciones en un punto 33
4.3 Existencia del límite: visualización de límites laterales e indeterminaciones de la forma 0/0 34
4.4 Visualización de límites de funciones que involucran el infinito 36
4.4.1 Límite infinito 38
4.4.2 Limites al infinito 39
4.5 Propiedades de los límites 41
4.6 Limites especiales 41
5. METODOLOGÍA 43
5.1 Participantes 43
5.2 Tipo de investigación 43

5.3 Análisis de resultados 43
5.3.1 Comparación de preguntas acertadas en el pre-test 43
5.3.2 Comparación de preguntas acertadas en el pos-test 45
5.3.3 Comparación por ítem 47
6. CONCLUSIONES 51
7. RECOMENDACIONES 52
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 53
9. ANEXOS 55

LISTA DE TABLAS

TABLA 1. COMPARACIÓN DE PREGUNTAS ACERTADAS EN EL PRE-TEST 43
TABLA 2. NÚMERO DE ESTUDIANTES APROBADOS EN EL PRE-TEST..... 44
TABLA 3. ÍTEMS EVALUADOS EN EL POS-TEST..... 46
TABLA 4. COMPARACIÓN DE PREGUNTAS ACERTADAS EN EL POS-TEST..... 46
TABLA 5. COMPARACIÓN DE PREGUNTAS ACERTADAS POR ÍTEM..... 47
TABLA 6. NÚMERO DE ESTUDIANTES APROBADOS EN EL POS-TEST 49

LISTA DE GRAFICAS

GRÁFICA 1. SITUACIÓN COTIDIANA 1 29
GRÁFICA 2. SITUACIÓN COTIDIANA 2 30
GRÁFICA 3. IDEA INTUITIVA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN 30
GRÁFICA 4. DEFINICIÓN FORMAL DEL CONCEPTO DE LÍMITE 32
GRÁFICA 5. CONCEPTO DE LÍMITE EN UN PUNTO 33
GRÁFICA 6. LIMITES LATERALES 1 34
GRÁFICA 7. LÍMITES LATERALES 2 35
GRÁFICA 8. LÍMITES EN EL INFINITO 1 37
GRÁFICA 9. LÍMITES EN EL INFINITO 2 38
GRÁFICA 10. LÍMITES AL INFINITO 1 39
GRÁFICA 11. LÍMITES AL INFINITO 2 40
GRÁFICA 12. COMPARACIÓN POR PREGUNTAS PRE-TEST 44
GRÁFICA 13. PORCENTAJES DE APROBACIÓN PRE-TEST 44
GRÁFICA 14. COMPARACIÓN POR PREGUNTAS POS-TEST 46
GRÁFICA 15. COMPARACIÓN POS-TEST POR CADA ÍTEM GRUPO CONTROL 47
GRÁFICA 16. COMPARACIÓN POST-TEST POR CADA ÍTEM GRUPO EXPERIMENTAL 48
GRÁFICA 17. PORCENTAJES DE APROBACIÓN POS-TEST 49

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1. ACTIVIDAD 1..... 55

ANEXO 2. ACTIVIDAD 2..... 57

ANEXO 3. ACTIVIDAD 3..... 59

ANEXO 4. ACTIVIDAD 4..... 61

ANEXO 5. ACTIVIDAD 5..... 63

ANEXO 6. PRE-TEST 64

ANEXO 7. POS-TEST 70

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta didáctica desarrolla una experiencia con estudiantes de grado once de la Institución Educativa El Rosario de Miranda Cauca, en ella se propone la implementación del software educativo geogebra para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del tema límites de funciones en la asignatura de cálculo.

La experiencia que se tiene con otros grupos en el mismo grado muestra que a los estudiantes se les dificulta el estudio del cálculo y la consideran como un área diferente de las matemáticas de las que hasta el momento han visto. Esto hace que se realicen innovaciones metodológicas para superar errores, atenuar dificultades, despejar dudas en el tema tratado y así obtener mejores resultados.

El software educativo geogebra admite visualizar y comprender gráficamente conceptos teóricos y permite analizar el comportamiento de una función en un punto, limites laterales, límites al infinito y en el infinito, asíntotas y a comprobar el cálculo analítico de estos, usando las propiedades que tienen.

La intención es exponer las actividades realizadas en el tema límites de funciones, mostrando ejemplos precisos utilizados en las clases y que se sugieren en esta propuesta.

1. JUSTIFICACIÓN

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la experiencia dice que a diario se deben confrontar retos, pues los resultados que se evidencian en el aula dan una clara muestra de bajos logros en el aspecto cognitivo.

Esta propuesta surge a partir de aquellos efectos y es aplicada con la intensión de medir su efectividad en el tema límites de funciones; esto con el fin de vencer obstáculos que el estudiante o el mismo docente presenta cuando se enfrenta al tema.

La estrategia de la propuesta busca que el estudiante aprehensione el concepto de límites de funciones, sus aplicaciones en la vida real y la importancia que tienen en el cálculo. Así mismo, desarrollar el interés de las clases usando una herramienta tecnológica y medir las diferencias que hay entre realizar una clase en forma tradicional con la metodología de la propuesta.

La idea también es motivar a otros maestros sobre la utilización de la propuesta didáctica y observar que esta convierte las clases en un proceso dinámico.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo general

Diseñar e implementar una propuesta didáctica en los estudiantes del grado once, aplicada en la enseñanza de los fundamentos del cálculo en el tema límites de funciones, integrando el software educativo geogebra.

2.2 Objetivos específicos

- Diseñar e implementar actividades con el software educativo geogebra para la enseñanza y el aprendizaje de límites de funciones.
- Aplicar la propuesta didáctica en el grado once uno y once dos año lectivo 2015 de la Institución Educativa El Rosario de Miranda Cauca.
- Evaluar la estrategia utilizada en la propuesta didáctica a través del aprendizaje significativo del tema límites de funciones alcanzado por los estudiantes de la institución.

3. MARCO DE REFERENCIA

Este trabajo se fundamenta en principios teóricos, en los cuales se expone en primer lugar el progreso histórico del concepto de límite de una función, en segundo lugar se muestran algunos errores cometidos en la enseñanza y el aprendizaje del concepto que son concebidas por obstáculos epistemológicos, en tercer lugar se describe el concepto de infíto en matemáticas y en cuarto lugar se exhiben cómo influyen las TIC en la educación especialmente en las matemáticas.

3.1 Marco histórico sobre la noción de límite

La evolución histórica de la noción de limite se desarrolló en gran parte del planeta, antiguas civilizaciones como la egipcia y la griega entre otras, aportaron conocimientos que son el origen de lo que hoy se conoce como análisis matemático, necesario para las labores investigativas que contribuyen a la ciencia y tecnología. Es por eso importante conocer los antecedentes, cómo ha evolucionado y como se ha transformado este concepto.

En la antigua Grecia no se definió la noción de límite de forma clara, pero se utilizó de manera implícita, se calculaban áreas de círculos, volúmenes de esferas y cilindros entre otras figuras geométricas. Este método es más conocido como el método de exhaución. En los siglos XVII y XVIII los trabajos del inglés Isaac Newton (1642–1727) y el alemán GotfriedWhilhelm Leibniz (1646–1716) quienes expusieron sus resultados, Newton con la teoría de fluxiones y Leibniz con su teoría sobre las diferenciales. A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX con la necesidad desarrollar problemas en física y matemáticas se construye la teoría de límites como base al análisis matemático, labor que fue realizado por un gran número de matemáticos entre quienes se destacan el francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857), el checo Bernhard Bolzano (1781-1848) y los alemanes Karl Weierstrass (1815-1897) y Bernhard F. Riemann (1826-1866) entre otros (Ferrante, 2009).

En el siglo XX se destacan dos nuevos avances en el desarrollo del análisis matemático, uno es el del francés Henri Lebesgue (1875-1941), en su trabajo definió una nueva clase de funciones para generalizar la integral de Riemann lo que garantiza su aplicabilidad en otras ramas de las matemáticas. El otro es el concebido por el polaco Abraham Robinson (1918-1974) un análisis

diferente al que generalmente los matemáticos venían trabajando y al cual Robinson denominó análisis no estándar (Flores, *et al*, 2008).

El método de exhaución se debe a Eudoxo (408-355 a.C.) quien utiliza la noción de límite de una manera tácita, este método se basaba en calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc.; aproximándose por medio de otras figuras en las cuales era más cómodo calcular la correspondiente magnitud que se requería. Por ejemplo, para calcular el área de la circunferencia, se inscriben n polígonos regulares, se calcula el área de estos y se compara hasta que la diferencia sea tan pequeña como uno quiera. Fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) quien lo hizo destacar en su afán de calcular volúmenes de esferas, cilindros, y cuadraturas de la parábola.

Desde el comienzo hasta mediados del siglo XVII, varios matemáticos volvieron a interesarse por esos problemas de áreas y volúmenes de figuras geométricas, longitudes de curvas, tangentes a las curvas etc.; entre los cuales se destacan los siguientes:

- Johannes Kepler (1571-1630) describe su método que consiste en descomponer los cuerpos en partes infinitamente pequeñas de áreas o volúmenes que fácilmente se pueden calcular. Este es llamado el método de los infinitésimos.
- Método de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Fue utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Cavalieri representaba estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor que aquella a evaluar.
- Pierre de Fermat (1601-1665) desarrolló un método para buscar extremos de curvas (en funciones polinómicas o en las denominadas "parábolas e hipérbolas de Fermat"), esta técnica consistía en tomar un E muy pequeño, realizar el cálculo $f(x+E)-f(x)$ y observar que este es un valor cercano a cero, este valor se divide por E y el último paso es considerar $E=0$. El desarrollo de Fermat aunque no da paso al límite se acerca bastante al concepto.
- Método de Isaac Barrow (1630-1677). Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos e y a, que equivalen a los Δx y Δy actuales (Ferrante, 2009).

Entre estos también se destacan los aportes de los matemáticos John Wallis (1616-1703) y Gilles de Roberval (1602). Todos estos métodos utilizados por estos personajes dieron progreso

al desarrollo del concepto de límite y con los cuales se alcanzaron grandes avances que prepararon el camino para el proceso de la presentación de los trabajos de Isaac Newton y Gotfried Leibniz quienes con la invención de métodos y algoritmos forjaron las herramientas del cálculo para que este sea una instrumento ajustable a problemas más generales.

Isaac Newton retomó los resultados de los trabajos de John Wallis y los reformuló en sus investigaciones para el desarrollo de las series infinitas de potencias de una variable x, utilizando infinitesimales y bajo la asesoría de Isaac Barrow mostró la relación inversa entre el cálculo de áreas y el cálculo de tangentes. Otro de los resultados es la reciprocidad que existe entre las operaciones de derivación e integración de funciones como herramienta que permite analizar y que se puede generalizar al estudio de funciones suaves.

Para tratar problemas del análisis infinitesimal Newton acude a argumentos basados en el movimiento y la dinámica (un método geométrico-mecánico) de los cuerpos. Llamó fluentes a las variables que cambian con el tiempo y a la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas (razón de cambio) a lo cual denomino fluxión (Flores, *et al*, 2008).

El aporte de Leibniz fue el de proveer a las matemáticas de conceptos más claros y de notación y terminología formal que permitiera una lectura factible para el tratamiento de problemas, para ser más exacto en el estudio de las derivación e integración permitiendo así el nacimiento del análisis infinitesimal.

En el siglo XVIII con los aportes de grandes matemáticos se logró la consolidación del cálculo presentándose el nacimiento de nuevas ramas de las matemáticas, entre las cuales se resaltan la teoría de series, la geometría diferencial, ecuaciones diferenciales. Este período es considerado como el siglo del análisis matemático destacándose también matemáticos como:

- Leonhard Euler (1707–1783), este suizo publica su obra "introducción al análisis infinitesimal" en 1748, esto da lugar al nacimiento del análisis matemático que se fundamenta en procesos infinitos para el estudio y representación de funciones en especial las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

- D'Alembert (1717-1783) creador de la teoría de los límites al utilizar y transformar los trabajos de Newton.

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813) trabajó con funciones y su desarrollo en series de potencias sin utilizar la noción de límite, este hecho no le permitió tener grandes avances ya que para la convergencia de esas series se necesita el concepto.

- Bernhard Bolzano su aporte fue la teoría sobre la continuidad de funciones utilizando el concepto de limite al mismo tiempo que Louis Cauchy, pero es este último quien se destaca más por el desarrollo de métodos y concepciones fundamentales del cálculo. Cauchy también es conocido por ser el autor del famoso teorema del valor medio y el teorema fundamental del cálculo, además de los criterios para la existencia de máximos y mínimos.

- Bernhard F. Riemann introdujo las funciones esencialmente continuas para extender el proceso de integración.

- Karl Weierstrass dio una definición cercana de limite a la se utiliza hoy en día. Junto con Bolzano encuentra funciones continuas en todo punto, pero que no tiene derivada en ninguno de ellos.

Para el siglo XX sobresalen los aportes de dos personalidades, quienes con sus resultados contribuyeron con importantes hechos al análisis matemático, uno de ellos es Henri Lebesgue quien definió un conjunto medible para extender las nociones de intervalos de medida de un conjunto de R^n, todo esto para mostrar una nueva clase de funciones a las cuales denominó funciones medibles, y así generalizar la conocida integral de Riemann. Otro resultado es que el límite de funciones y series de funciones medibles también es una función medible.

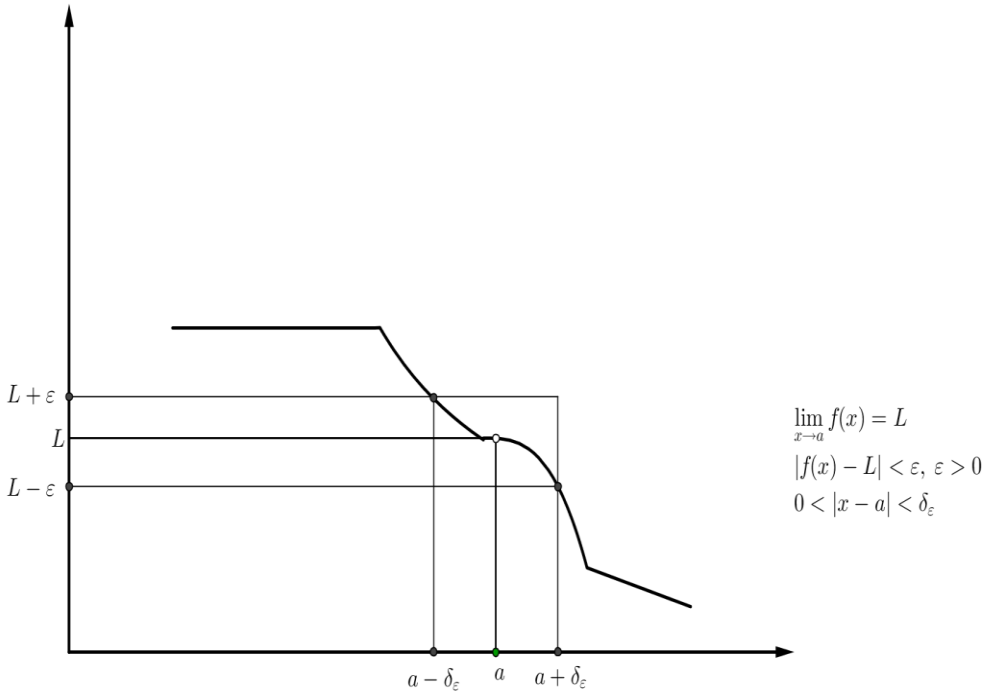
El otro es Abraham Robinson, en su obra "análisis no estándar" introduce el concepto de número hiperreal con lo que logra dar sentido al pensamiento de Euler sobre "infinitamente pequeño". Robinson con base a este trabajo consigue que los cálculos de límites y convergencia

sean solo de manera algebraica. Este pensamiento si bien ha sido utilizado por varios matemáticos no ha logrado tener suficiente éxito. (Flores, *et al*, 2008)

Todo el esfuerzo realizado en más de dos milenios permite presentar la siguiente definición: Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f\ x\ = L$$

(se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L), si cuando x tiende a a, siendo distinto de a, sus imágenes $f(x)$, tienden a L.



Esta es la famosa definición ε (épsilon), δ (delta) que desconcierta a la mayoría de los que tratan de estudiarla y sobre todo si es la primera vez que lo intentan. Varios factores son contribuyentes al desconcierto (Ferrante, 2009).

3.2 Marco teórico

Son varias las dificultades que presentan los estudiantes en la enseñanza del concepto de límite, Cornu (1983) citado por Lozano (2011, p32) hace referencia a los siguientes obstáculos epistemológicos:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Indagando previamente a los estudiantes se pueden observar y analizar los desaciertos y diagnosticar los errores que preliminarmente suceden. Con base a ellos se trabaja y se convierten en una herramienta significativa en el proceso de aprendizaje. Por consiguiente "Los errores no aparecen por azar, sino en un marco conceptual basado en conocimientos adquiridos previamente. Los errores no desaparecen de golpe, resisten, persisten, resurgen pero tenidos en cuenta pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje" (Vrancken, *et al* ,p 11, sf).

El estudiante tiene en su mente unos conceptos previos, pero al enfrentarse a nuevos conocimientos por lo general se confunde dado que se le dificulta integrar el nuevo conocimiento con los que antes ha adquirido, esto obstaculiza la aprehensión de las concepciones recientes.

En matemáticas usualmente se muestran procesos de enseñanza de manera sistemática, pero se incurre a un desacierto cuando el procedimiento se vuelve mecánico, entonces se hace necesario propiciar ambientes de estudio de manera didáctica y dinámica en donde los educandos reconozcan sus errores, aminoren sus dudas y así generen de verdad un aprendizaje significativo. Frente a esto Vrancken, *et al* (p11, sf) afirman que:

> “En la actualidad existe una tendencia a la enseñanza del cálculo basada en un enfoque algorítmico y algebraico. Es necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente. Generalmente se trabajan las representaciones algebraicas, pero si aparecen errores, los alumnos no pueden reconocer donde está el error. Tienden a utilizar las representaciones gráficas de manera muy limitada. No se las considera como apoyo para los procesos algebraicos”.

El manejo del lenguaje matemático es indispensable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero se hace necesario manejar una escritura general o dar a conocer las distintas formas de expresar la simbología y el vocabulario que se usa. Aquere *et al* (2007) refiriéndose a Duval (1998) señala:

> “la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representaciones, esta se logra articulando entre diferentes registros. Entendemos por representaciones, diferentes notaciones, ya sean gráficas, simbólicas, así como expresiones verbales. Estas representaciones se agrupan en registros. Por ejemplo, el registro gráfico o el registro numérico. Entonces un reto importante en el aprendizaje de la matemática no puede ser, solamente, la automatización de ciertas técnicas operatorias sino que debe ser también, la coordinación de los diferentes sistemas de representación”.

Es evidente que en matemáticas para la buena interpretación de los conceptos empleados se deben distinguir claramente los objetos matemáticos y también tener en cuenta que en muchas ocasiones las definiciones se reducen a símbolos y estos a su vez se pueden representar en formas distintas.

En cuanto al concepto de límite es importante que el estudiante manipule las diferentes formas de determinarlo; es decir, realizar el cálculo mediante la forma numérica con respecto a las tablas de valores, analizando su forma gráfica y algebraica, además de reconocer y expresarlo de forma verbal. En este proceso de manejo del concepto es inevitable la presencia de errores ya que cada individuo construye su propio conocimiento y este a su vez tiene parte de subjetivo;

pero estos errores se deben ver como una oportunidad de mejorar, lograr y construir nuevos conocimientos. Por lo cual:

Los errores siempre han ayudado al avance de las distintas ciencias. Muchas veces una teoría se considera cierta hasta que alguien demuestra que no es válida. El desarrollo científico a lo largo de los años ha estado plagado de errores. Por lo que no debemos desechar los errores que cometen nuestros alumnos, porque en ellos puede haber "algo de cierto", que ayude a que busquen nuevas herramientas para resolver una situación, o indagar otros conceptos o teorías que expliquen en qué están equivocados o cómo pueden solucionarlo. Esto nos dice que debemos tomarlos como fuentes de información, como parte componente de la adquisición de conocimiento, ya que pueden ser el motor que provoque un cambio en el aprendizaje del alumno, transformándose así, en un elemento constructivo e innovador dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje (Vrancken, *et al*, sf, p 13).

A continuación se presenta el concepto de error para algunos autores: Godino, Batanero y Font (2003, p 69) aseveran "hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar". Además señalan que "A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente.".

Para Rico (1995, p 6) "cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión planteada". Igualmente sostienen que "los errores forman parte de las producciones de los estudiantes durante su aprendizaje de las matemáticas y que estos son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, constituyendo un elemento estable de dichos procesos"

Matz (1980) citado en Ruano, Socas, Palarea (sf, p 312) lo resume afirmando que "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"

Se puede afirmar que los errores de los estudiantes no son casuales, ya que, en algunos casos están basados en experiencias, conocimientos previos y también en preconceptos. En otros casos presentan patrones, o regularidades en sus equivocaciones, atribuibles a concepciones erróneas o simplemente distracciones. Muchas veces los alumnos no son siquiera capaces de ofrecer una respuesta. Las procedencias y orígenes de los errores son diversos, algunos de ellos son los que están basados en dificultades de tipo: epistemológicas, didácticas, cognitivas y actitudinales.

Las dificultades epistemológicas son las que están relacionadas esencialmente con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Los alumnos mantienen concepciones e ideas propias sobre la naturaleza de la ciencia y del conocimiento científico y, además, sobre sus propios procesos y productos del aprendizaje, lo que ocasiona limitaciones o impedimentos que afectan sus capacidades para construir el conocimiento real o empírico.

En cuanto a las dificultades didácticas, es decir las originadas por el sistema de enseñanza, Brousseau (1983, p 73) refiere que "Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no dependen más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo."

Actualmente existe una tendencia a la enseñanza de las matemáticas apoyada en un enfoque algorítmico y algebraico, esta orientación conlleva a una mecanización de los procesos por parte del alumno que conducen muchas veces al error; por lo tanto, es necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente.

Respecto a las dificultades cognitivas, se tiene la costumbre de asociar el error a una falta de conocimiento, pero como expresa Brousseau (1983, p 86) "Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento." El alumno emplea lo que conoce para dar respuestas a situaciones dadas en un cierto contexto, pero cuando lo utiliza fuera de ese contexto puede producir respuestas incorrectas que conllevan a errores.

Si se examina cómo se manifiestan los errores en los alumnos, se puede ver que al trabajar un concepto y explicarlo, elaboran construcciones personales con base a lo que adquirieron anteriormente, en su interacción con sus compañeros suelen forman construcciones que no son

correctas desde el punto de vista científico, pero que se deben revisar y reacomodar para volver a usar en una nueva construcción. Actualmente el error es considerado parte inseparable de los procesos de aprendizaje, por lo cual los estudiosos en educación matemática aconsejan diagnosticarlos y tratarlos seriamente, discutiendo las concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les dejen reorganizar sus ideas.

A pesar de ser el docente quien imparte la información que el estudiante requiere en su formación, Aquere et al.(2007, p 12) sugieren que "la actitud del alumno, predisposición o forma en la que enfrenta la tarea, es otro factor importante a la hora de analizar las dificultades en el aprendizaje. Al encontrarse con temas totalmente desconocidos para él, puede generar que sólo tengan actitud de escuchas, y no se predispongan como protagonistas de la clase".

Según Sierpinska (1990) citado por Vrancken, *et al*, (sf, p 12) afirman que:

> "El aprendizaje significativo debe ser modelizado como una secuencia de actos de comprensión, de actos de superación de errores. Dice que para que el sujeto comprenda ha de ser enfrentado, mediante situaciones de enseñanza, a los obstáculos epistemológicos inherentes a un determinado saber de forma tal que se faciliten los actos de comprensión para la superación de obstáculos".

3.3 El infinito en matemáticas

El interés por el concepto de infinito en matemáticas y otras disciplinas a lo largo de la historia ha sido relevante, aunque este ha ocasionado dificultades porque se da paso de lo discreto a lo continuo, además de generar contradicciones. En la antigua Grecia fue desterrado este concepto, aunque ocasionó el desarrollo de lo que se conoce como método de demostración por reducción al absurdo. El mismo Euclides trató problemas implícitamente con el infinito, pero no hacía mención de el para poder cumplir con los requerimientos de la época. En la edad media se empezó a desmitificar este concepto con los trabajos de Oresme y en la reaparición de las reflexiones de Galileo sobre el infinito actual. Wallis es otro de los matemáticos que utiliza en sus estudios el infinito libremente. Surgieron los conceptos de infinitésimo en los trabajos de

Newton y Leibniz, sin embargo seguían presentándose confusiones. A pesar del rechazo y prohibición de los conceptos infinitesimales el avance del cálculo infinitesimal no se detuvo.

Fue Cauchy quien proporcionó la primera salida conceptual a la dificultad de los infinitesimales, pero incluso él se vio afectado por este obstáculo. En el siglo XIX Bolzano con su teoría de conjuntos reivindica la existencia del infinito actual y reconoce la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos.

Los anteriores argumentos revelan que el concepto de infinito demanda un alto grado de complejidad y abstracción. En las últimas décadas, la problemática del concepto de infinito matemático hace parte de los trabajos desarrollados en didáctica de las matemáticas.

En la actualidad el infinito es una palabra que se escucha y utiliza desde el primer año de enseñanza media. A medida que este concepto se relaciona con otros conocimientos matemáticos, es cuando el estudiante percibe su total dimensión.

El límite de una función es uno de los conceptos que se escucha en el área de cálculo en donde la noción de infinito aparece y los conflictos de aprendizaje se hacen presentes de inmediato. Respecto a esta propuesta didáctica se hace referencia a Urbina (2012, p 23) manifestando que: "Íntimamente ligado al concepto de infinito está el concepto de límite y lo asociado a lo infinitesimal, a la densidad y a la continuidad. Generalmente cuando en bachillerato se formaliza la definición de función continua, los ejemplos de discontinuidad ayudan a la formación del concepto".

A medida que se enseñan más conceptos, el estudiante presenta más inconvenientes con el concepto de infinito, dado que este es utilizado para comprender sus distintas formas, por ejemplo, se puede hablar de la cantidad de números reales que hay en un intervalo de la recta real, decir que el límite de una función en cierto punto es infinito o que el límite de una serie de funciones o términos diverge. (Valerio, Sosa, Spíndol, 2013, p 35) expresan: en cuanto a la dificultad de la comprensión de las ideas del infinito podemos mencionar los trabajos de Tall y Vinner (1981) y Tall (2001), los cuales están enmarcados en el llamado "pensamiento

matemático avanzado", en el que se desarrolla la teoría del esquema conceptual (*concept image*) y el de imagen informal o formal (*informal image y formal image*). El esquema conceptual se entiende como: el conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que le caracterizan. La imagen informal se entiende como el tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento con teorías axiomáticas, y la segunda, imagen formal, consiste en la parte del esquema conceptual que es formalmente deducido de los axiomas. La imagen informal y la imagen formal, son los que se podría llamar "infinito perceptual" e "infinito formalizado".

El lenguaje matemático, el contexto y las diferentes representaciones tienen un impacto sobre las percepciones del infinito y sobre el razonamiento sobre él. Hitt (2004) señala que los conflictos de aprendizaje se hacen presentes cuando se tiene que ver con los procesos infinitos, y que por ende estos obstaculizan la adquisición del concepto de límite.

3.4 Las TIC en la educación

En el mundo actual existen elementos y herramientas que benefician las tareas diarias, la tecnología que es un hecho cambiante frecuentemente ha favorecido el conocimiento y también ha hecho que las distancias, en todo sentido, sean relativamente cortas, aquí esta inmersamente asociado los medios de comunicación que permiten garantizar que la información que surge a diario sea de mucha confianza.

En el campo laboral las empresas se han beneficiado y han garantizado por estos medios tramitologías de forma rápida y eficiente, además de fortalecerse en el crecimiento de sus productos y su aspecto económico.

Las instituciones educativas de a poco se están supliendo de herramientas tecnológicas que permiten modernizar y modificar los modelos de enseñanza- aprendizaje, dado a que algunos métodos no aportan al desempeño académico de los estudiantes y por el contrario contribuyen a malos resultados con los cuales el docente debe lidiar en su quehacer diario.

Las TIC en la educación juegan un papel importante al favorecer y fortalecer la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en la escuela, han beneficiado positivamente al desempeño laboral

del docente y en el aprendizaje de los estudiantes. Al docente le permite ser más organizado en sus propuestas de trabajo, agilizar sus actividades y hasta le permite ahorrar tiempo. Es decir, las TIC permite potenciar las estrategias de trabajo.

Al estudiante, las TIC como herramientas didácticas proporcionan ajustes a las capacidades cognitivas, así como su interacción social. Entonces es un hecho que las nuevas tecnologías facilitan el pensar y razonar de manera ágil. Según Tedesco, *et al*, (2008,p 26) "(…) Si bien es cierto que la inclusión de las TIC puede modificar el proceso de enseñanza y aprendizaje, debemos partir de la base de que hoy un ciudadano que no maneje las nuevas tecnologías de la información, tiene muchísimas posibilidades de quedar excluido(…)".

Es así como las TIC en las instituciones educativas facilitan la interacción de aquellos individuos que tienen dificultad a su acceso para sus fines educativos y que permiten la solución de problemas en el aprendizaje creando distintas posibilidades de capacitación, permitiendo así que los sujetos incrementen sus conocimientos hábilmente, mantener una información amplia y concreta. Por lo cual Tedesco, *et al*, (2008, p 26) afirma que:

> "Por ello, la incorporación de las TIC en la sociedad en general, y en la educación en particular, se encuentra ligada a políticas de igualdad, y debe ser cuidadosa y estratégicamente planificada. En definitiva, es fundamental el papel de un Estado que aspire a poner al alcance de todos los ciudadanos un uso productivo y crítico de estos nuevos productos culturales".

En la agenda de las políticas educativas de los países de América Latina está presente, cada vez con mayor fuerza, la necesidad de incluir las TIC para potenciar las estrategias de trabajo docente y enriquecer los aprendizajes de los alumnos. En los estados del arte como en las investigaciones sobre esta temática, se resalta la tendencia a la integración de las TIC en la escuela como parte de un proceso de innovación pedagógica.

El uso de las TIC ofrece cuantiosas posibilidades de capacitación, razón por la cual la educación debe ser transformada, llevándola de un sistema clásico y conservador a un ámbito dinámico y creativo. La presencia de herramientas tecnológicas como *tablets*, celulares, el computador, etc.; permiten que el educador y educando aumenten sus habilidades para convertir la información en conocimientos y extraerlos de manera fácil y ágil.

Las TIC deben ser en realidad una herramienta que apoye los procesos educativos referido a los estudiantes y docentes, constituirse de verdad en una oportunidad para producir trasformaciones profundas.

3.5 Las TIC en la enseñanza de las matemáticas

Las TIC en la educación han propiciado un rotundo cambio al permitir desarrollar actividades en donde se puede tener acceso a diferentes fuentes de información. En particular en matemáticas las posibilidades de enseñanza- y aprendizaje son superiores ya que se puede acceder a distintos programas de aplicación y en diferentes aspectos. Por ejemplo, al utilizar la Internet se puede profundizar en actividades interactivas que el docente ha dejado o que este mismo medio aporta para el conocimiento.

Está claro que las herramientas están dispuestas para que el docente exponga, aclare y formule tareas y actividades en donde el estudiante encuentre un ambiente diferente al que normalmente se ofrece en las aulas de clase cuando se utiliza el pizarrón.

El uso de computadoras, tablets, celulares, calculadoras entre otras herramientas, proporcionan una mejor comprensión de conceptos y elementos matemáticos que permite la solución de problemas; es decir, la comprensión de definiciones, términos y símbolos se hace más práctica al utilizar estas herramientas didácticas que mejoran los contenidos matemáticos con hechos visuales y animados. No obstante es necesario planificar de manera responsable y eficiente los contenidos, frente a esto Lupiáñez y Codina (sf) expresan que:

> "Ordenadores, Internet, calculadoras y otro tipo de recursos tecnológicos poseen un gran potencial para la educación en general, y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse este potencial como excusa para llevar al aula de matemáticas todo aquello que sorprende por su versatilidad; es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle: qué competencias queremos y podemos desarrollar en nuestros escolares, qué tareas debemos diseñar para conseguirlo, y qué sistema de evaluación pondremos en práctica para medir ese desarrollo".

4 PROPUESTA DIDÁCTICA: LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN EL GRADO UNDECIMO, INTEGRANDO GEOGEBRA

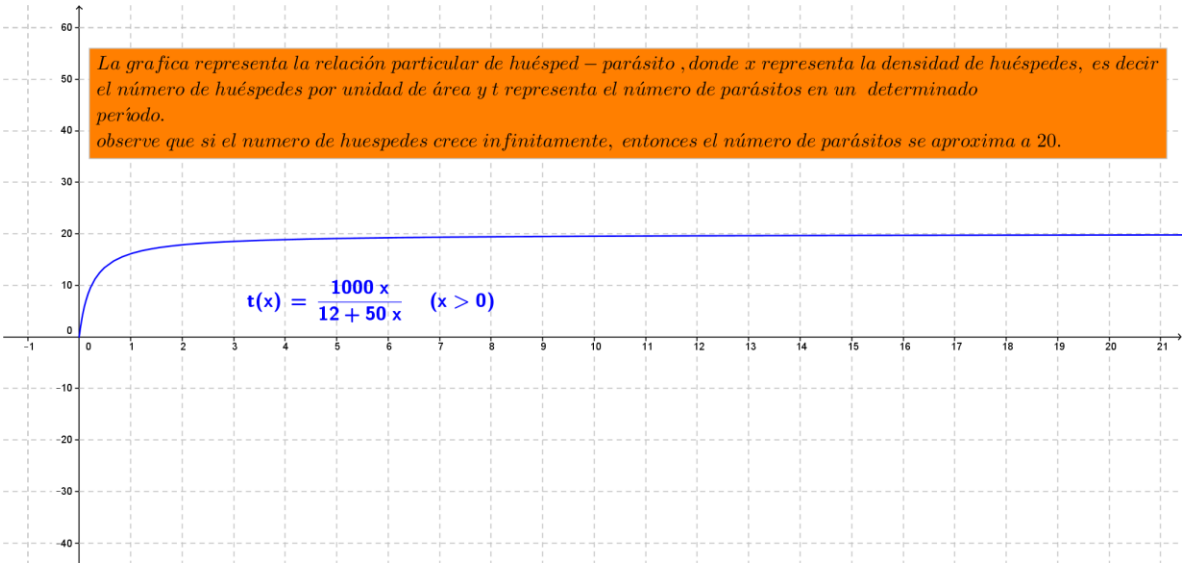
Para que los estudiantes adquirieran un mejor nivel en la comprensión del tema límites de funciones, se diseñaron cuatro bloques o subtemas diseñados en clases teóricas y prácticas que a continuación se exponen.

- Noción intuitiva de límite de funciones en un punto mediante la definición formal.
- Visualización del concepto de límite de funciones en un punto.
- Existencia del límite: visualización de límites laterales e indeterminaciones de la forma 0/0.
- Visualización de límites de funciones que involucran el infinito.

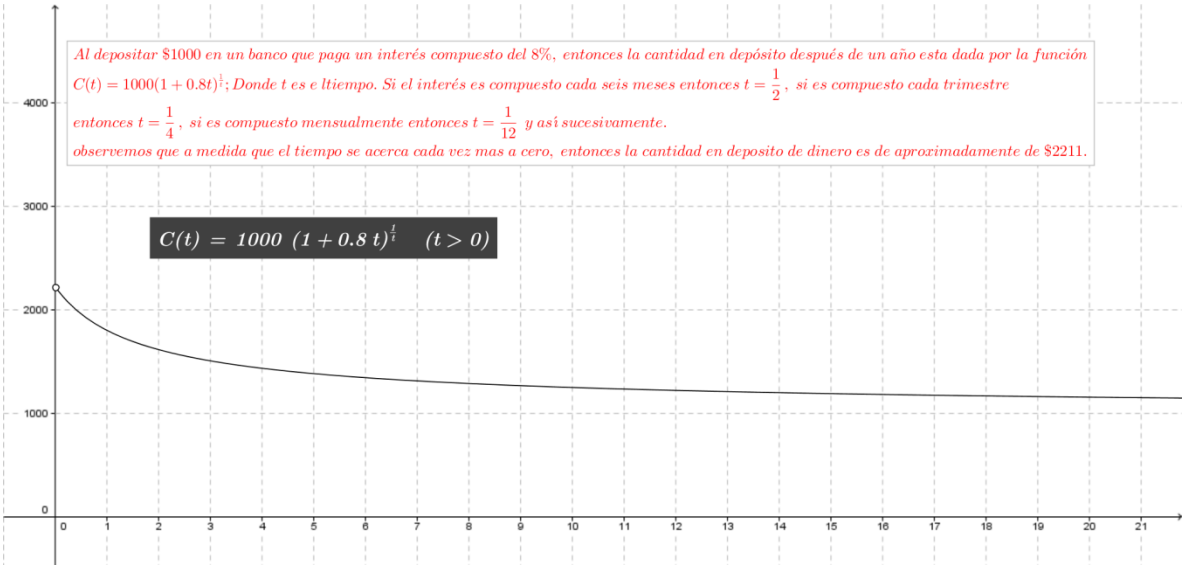
4.1 Noción intuitiva de límite de funciones en un punto mediante la definición formal

La idea intuitiva de límite se interpreta como la aproximación a un valor al cual incurre la variable dependiente de una función cuando la variable independiente se acerca a determinado valor. Para esto se realizó una presentación introductoria al tema en que se evidencian situaciones cotidianas, como se muestran en las gráficas 1 y 2, donde el alumno analizó y comprendió para qué sirve el estudio de los límites de funciones en la vida real.

Gráfica 1. Situación cotidiana 1



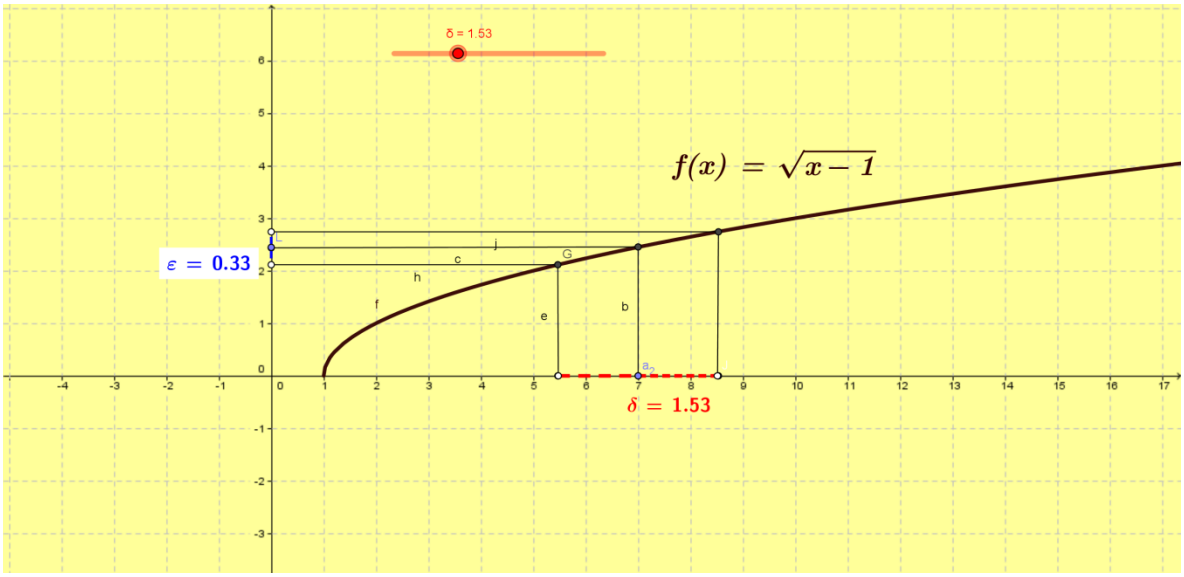
Gráfica 2. Situación cotidiana 2



Posteriormente el docente muestra gráficas de funciones, utilizando como ayuda una Pc, el video beam y el tablero del salón de clases, para abordar la idea intuitiva de límite y se hace la exposición del tema de manera tradicional tomando como referencia el libro introducción al cálculo de Santillana grado undécimo.

Una de las gráficas en la que se expuso la idea intuitiva de límite es la que se ve en la gráfica 3.

Gráfica 3. Idea intuitiva de límite de una función



Después de haber analizado las gráficas y verificar la idea intuitiva de límite, se presenta la definición formal del tema tratado

Sea $f\ x$ una función con dominio D. "el límite de $f(x)$ es igual a L cuando *x* tiende a a" si podemos acercar arbitrariamente los valores de *f(x)* a *L* (tanto como se quiera) aproximando x a a pero sin igualar a a.

Simbólicamente escribimos:

$$\lim_{x \to a} f\ x\ = L$$

Se deja a los estudiantes realizar la actividad 1, entre esos ejercicios se deja completar tablas de valores para comprobar el límite finito en los siguientes casos:

- Limite finito en un punto donde la función este definida.
- determinar el limite finito en un punto donde la función no este definida.

Esta actividad se desarrolló después de terminar esta sesión y se realizó en clase con gran motivación. (Ver anexo 1)

Definición de límite con más rigor matemático: para dar la definición de límite con mayor precisión se partió del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1:

Sea $f\ x\ = 5x - 2$. Se supuso que la distancia de $f\ x$ al valor 8 es menor que un ε (ε>0). Es decir,

$$f\ x\ - 8\ < \varepsilon$$

Esto es,

$$5x - 2 - 8\ < \varepsilon$$

$$5x - 10\ < \varepsilon$$

$$5(x - 2)\ < \varepsilon$$

$$5\ x - 2\ < \varepsilon$$

$$x - 2\ < \frac{\varepsilon}{5}$$

Se puede observar que, $f\ x\ -8\ <\varepsilon$ cuando $x-2\ <\frac{\varepsilon}{5}$. En palabras, la distancia de $f\ x$ al valor 8 es menor que ε cuando la distancia de x a 2 es menor que $\frac{\varepsilon}{5}$.

Para evidenciar un poco más el resultado obtenido se eligen valores para ε. Así

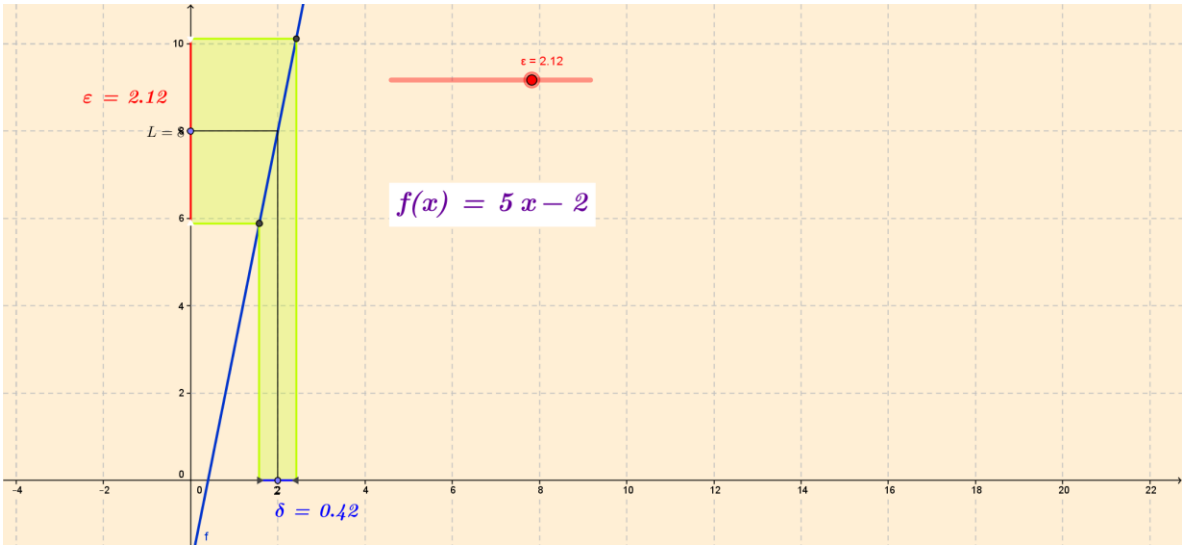
Para $\varepsilon = 0{,}1$, se cumple que $f\ x\ -8\ <0{,}1$ cuando $x-2\ <\frac{0{,}1}{5}=0{,}02$
Para $\varepsilon = 0{,}01$, se cumple que $f\ x\ -8\ <0{,}01$ cuando $x-2\ <\frac{0{,}01}{5}=0{,}002$
Para $\varepsilon = 0{,}001$, se cumple que $f\ x\ -8\ <0{,}001$ cuando $x-2\ <\frac{0{,}001}{5}=0{,}0002$
Para $\varepsilon = 0{,}0001$, se cumple que $f\ x\ -8\ <0{,}0001$ cuando $x-2\ <\frac{0{,}0001}{5}=0{,}00002$
Para $\varepsilon = 0{,}00001$, se cumple que $f\ x\ -8\ <0{,}00001$ cuando $x-2\ <\frac{0{,}00001}{5}=0{,}000002$
.
.
.

Los valores de ε indican que $f\ x$ está muy próxima a 8 y que los valores de la variable x están muy cercanos a 2 como se puede apreciar en la gráfica 4.

Para darle un mejor orden a la idea se designa el valor de $\frac{\varepsilon}{5}$ como δ. Es decir, $\frac{\varepsilon}{5}=\delta$, con lo cual se puede decir que el valor de δ depende de ε. Dado que los valores de ε y δ fueron tomados arbitrariamente, se formalizo el planteamiento mencionando que:

$lim_{x\to 2}\ f\ x\ =8$, si para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $f\ x\ -8\ <\varepsilon$ siempre que $x-2\ <\delta$

Gráfica 4. Definición formal del concepto de límite



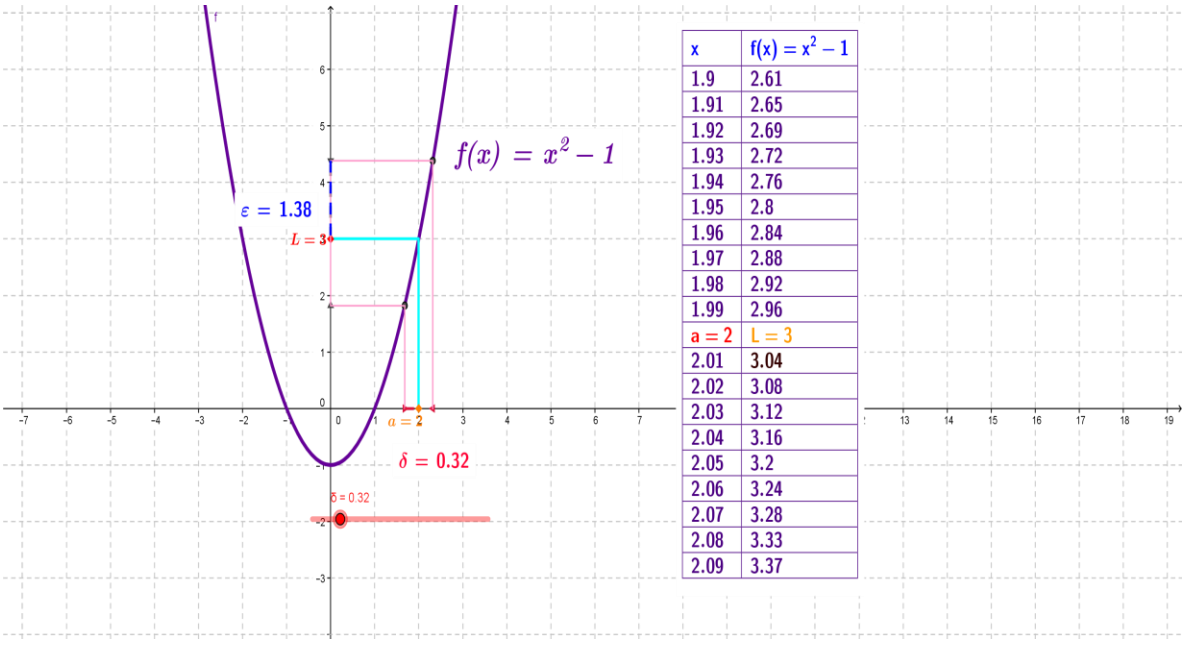
En general si f es una función definida en un intervalo abierto I, excepto posiblemente en un punto $a \in I$. Se escribe:

$lim_{x \to a} f\ x\ = L$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $f\ x\ - L\ < \varepsilon$ siempre que $x - a\ < \delta$

4.2 Visualización del concepto de límite de funciones en un punto

En cursos inferiores, los estudiantes de grado undécimo, en clase de geometría ya han trabajado con Geogebra. Por lo tanto cuando se introduce el tema de límites de funciones, los alumnos ya tienen nociones básicas de como manipular el software. Se enseña la elaboración de una tabla de valores como se ilustra en la gráfica 5, se pide a los educandos que realicen lo propio y que escriban números aproximados a cierto valor de las abscisas que determinen el límite de una función cuya gráfica se les ha dado.

Gráfica 5. Concepto de límite en un punto



x	f(x) = x² − 1
1.9	2.61
1.91	2.65
1.92	2.69
1.93	2.72
1.94	2.76
1.95	2.8
1.96	2.84
1.97	2.88
1.98	2.92
1.99	2.96
a = 2	L = 3
2.01	3.04
2.02	3.08
2.03	3.12
2.04	3.16
2.05	3.2
2.06	3.24
2.07	3.28
2.08	3.33
2.09	3.37

Posterior a la instrucción en clase se deja la actividad 2 donde se piden realizar los puntos numerados abajo entre otros para debatirlos en la siguiente sesión.

- Comprobar el valor de límite con ε y δ.
- Determinar el valor de δ dado ε.
- Deducir el valor de los límites de las funciones en cada caso respecto a las gráficas.
- Determinar el límite de las funciones dadas (Ver anexo 2).

4.3 Existencia del límite: visualización de límites laterales e indeterminaciones de la forma 0/0

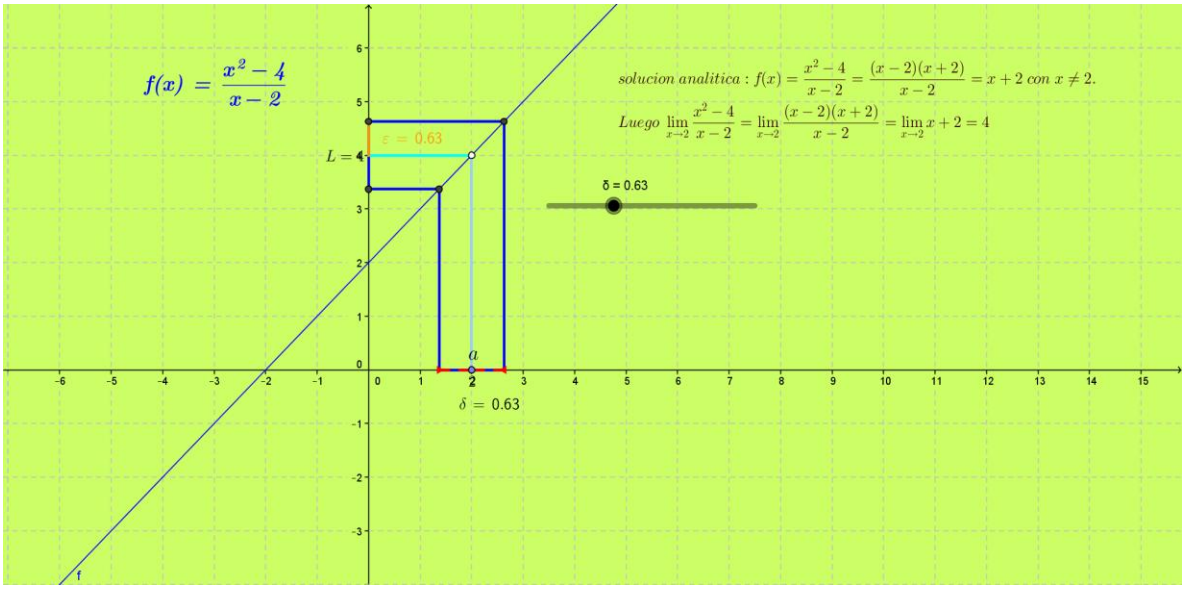
En la visualización de los límites vistos hasta el momento, se nota que las gráficas de las funciones son de trazo continuo o presentan algún hueco, pero no registran saltos bruscos. Es así que, mediante una gráfica que tenga esas características de saltos se expresa y se aclara formalmente ese comportamiento, entonces se explica y se define límites de funciones en un punto y en una dirección. Es decir analizamos la conducta de una función cuando x tiende a un valor a tanto por la derecha como por la izquierda.

Se visualiza en el eje x que los números que se acercan a a se distribuyen en dos clases: los que están a la izquierda y los que están a la derecha respectivamente.

En la gráfica 6 se observó que la función no está definida en el punto $x = 2$. Se percibió que cuando la variable x se acerca a 2, la función f se acerca a 4. Análogamente cuando la variable x se acerca a 2 por la derecha la función f se acerca a 4, entonces es fácil ver que

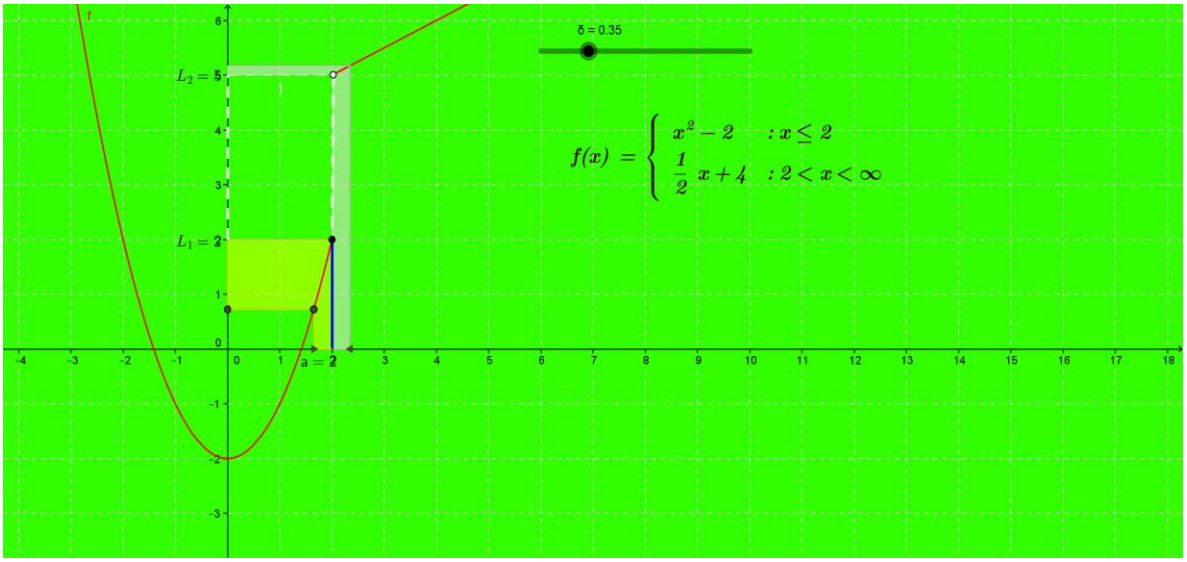
$$\lim_{x \to 2} f\ x\ = 4$$

Gráfica 6. Limites laterales 1



En la gráfica 7 la función g presenta un salto en x=2, pero se analizó que cuando la variable x se acerca a 2 por la izquierda, la función g se aproxima al valor 2 y que cuando la variable x se acerca a 2 por la derecha la función g se aproxima a 5. En este caso el estudiante entrevió que el $\lim_{x \to 2} g\ x$ es incierto.

Gráfica 7. Límites laterales 2



Tanto en la gráfica 6 como en la 7 se utilizó el argumento de aproximación por la derecha como el de aproximación por la izquierda en la variable x, esto dio pie para dar las siguientes definiciones:

- El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es L_1, si los valores de $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L_1 cuando x toma valores situados a la derecha de a, suficientemente cercanos a éste y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

- El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es L_2, si los valores de $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L_2 cuando x toma valores situados a la izquierda de a , suficientemente cercanos a éste y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Se le indica a los estudiantes que estos son llamados límites laterales y comúnmente se denominan límite lateral derecho y limite lateral izquierdo respectivamente

En la gráfica 6 se notó que los límites laterales de la función $f\ x\ = \frac{x^2-4}{x-2}$ son iguales y por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Sin embargo en el grafico 7, aunque los límites laterales de la función $g\ x$ existen, estos son diferentes y que por lo tanto $\mathrm{Lim}_{x\to 2}\ g\ x$ no existe

Generalizando esto, se le indica al estudiante que si f es una función tal que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Y que el reciproco también es válido. Por el contrario si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ no existe}$$

En este aparte del trabajo, en clase también se explica en qué consiste el método de sustitución directa y la recurrencia a la factorización y racionalización de las expresiones que representan las funciones en casos donde el método directo conlleva a indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$.

Para poner en práctica lo aprendido en esta sesión se propuso la actividad 3. Parte de esta actividad se realizó en clase y se pidió a los estudiantes culminarla en casa para sustentarla antes de la sesión siguiente (Ver anexo 3).

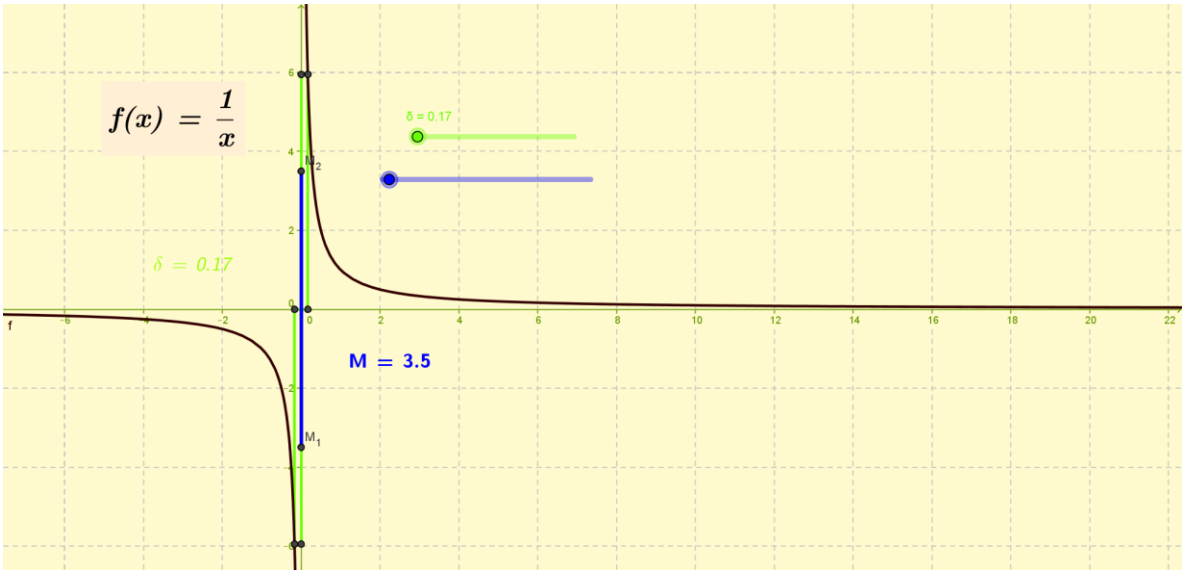
4.4 Visualización de límites de funciones que involucran el infinito

Aunque el símbolo ∞ (infinito) no representa un número real, tiene gran importancia en el tratamiento de los límites ya que existen funciones que tienen este comportamiento numérico. Por ejemplo se analizó detalladamente con los estudiantes las gráficas 8 y 9 de las funciones $f\ x\ = \frac{1}{x}$ y $g\ x\ = \frac{1}{x^2}$, aquí fácilmente se pudo determinar que x=0 no pertenece al dominio de las funciones f y g, pues estas se indeterminan en ese punto, pero en la función f cuando x se acerca a el valor 0, se puede ver que por izquierda la función decrece infinitamente y que por la derecha crece infinitamente. Es decir:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{(Ver gráfica 8)}$$

Se le explicó al estudiante que en realidad la función f por la izquierda de cero decrece sin cota, análogamente por la derecha del cero esta crece sin cota.

Gráfica 8. Límites en el infinito 1



Se les afirma a los estudiantes que sin embargo los limites laterales existen y son $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente, pero que son diferentes y que por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \ \ no\ existe$$

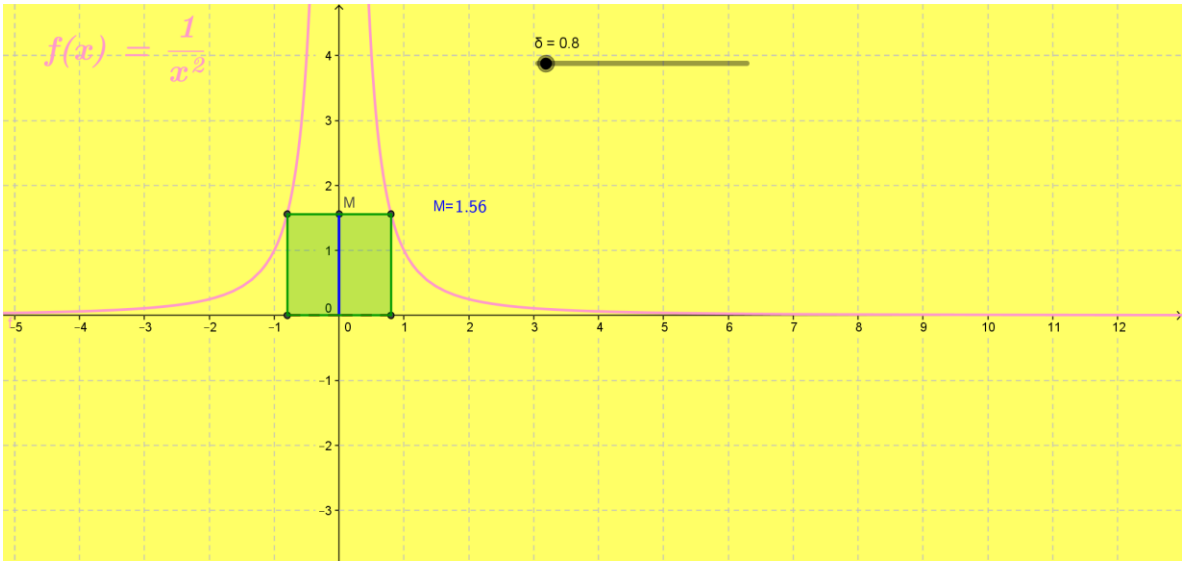
En la gráfica 9 se esbozó la función $g\ x\ = \frac{1}{x^2}$ y se determinó que los limites laterales existen y que son iguales a $+\infty$. Es decir,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

Gráfica 9. Límites en el infinito 2



En este caso la función crece sin cota cuando nos acercamos a $x = 0$.

En las gráfica 8, los estudiantes observaron que si se fija un número $M > 0$, es posible encontrar valores $x \neq 0$ para los cuales $f(x) > M$. Por ejemplo si $M = 10$ y $f(x) > 10$, entonces

$$\frac{1}{x} > 10$$

$$x < \frac{1}{10}$$

$$x - 0 < \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Más exactamente , si $M = 10^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) > 10^n$, entonces $x - 0 < \frac{1}{10^n}$.

4.4.1 Límite infinito

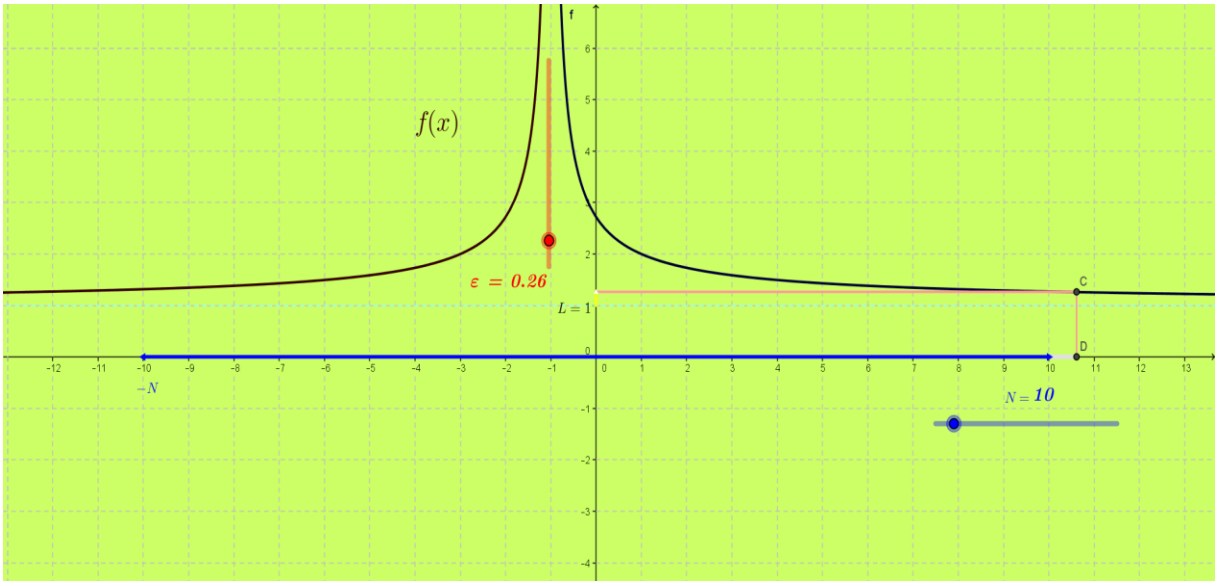
Definición: Sean $r > 0$ y $f(x)$ una función definida en un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$ excepto en $x = a$. f tiene límite infinito en el punto $x = a$ si para todo $M > 0$,existe un $\delta > 0$, tal que $f\ x > M$ siempre que $x - a < \delta$

A la recta $x = a$ se le llama asíntota vertical de la función f.

4.4.2 Limites al infinito

Hasta el momento se han analizado límites de funciones cuando la variable x tiende a un valor finito, pero se les explica a los estudiantes la importancia que tienen los límites cuando la variable x tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Es decir cuando x crece o decrece infinitamente como se puede ver en la gráfica 10.

Gráfica 10. Límites al infinito 1



El estudiante observó que cuando x se hace infinitamente grande, la función f se puede aproximar arbitrariamente al valor 1. Es decir si $x > N$ $(N > 0)$, entonces $f\ x\ - 1\ < \varepsilon$.

Análogamente al lado izquierdo si $x < -N$ $(N > 0)$, entonces $f\ x\ - 1\ < \varepsilon$.

En general se afirma:

$\lim_{x\to+\infty} f\ x\ = L$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ talque $f\ x\ - L\ < \varepsilon$ siempre que $x > N$, y

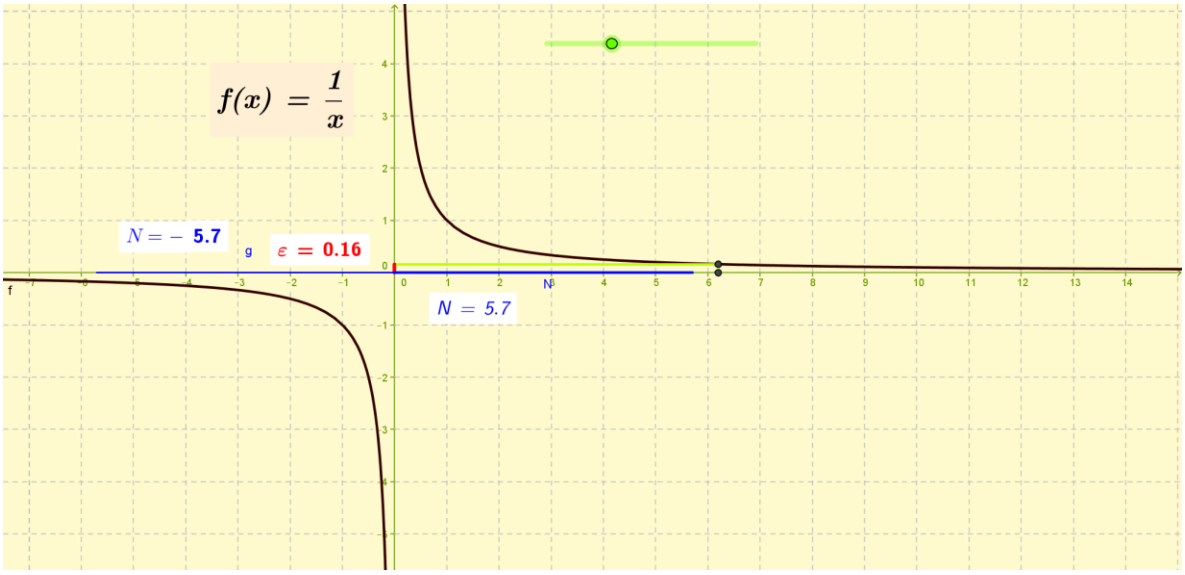
$\lim_{x\to-\infty} f\ x\ = L$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $N < 0$ talque $f\ x\ - L\ < \varepsilon$ siempre que $x < N$

La recta $y = L$ se denomina asíntota horizontal de la función $f(x)$.

Para el caso de la función $f\ x\ = \frac{1}{x}$, bosquejada en la gráfica 11, se puede observar que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Gráfica 11. Límites al infinito 2



En general

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \; y \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Se resolvió el siguiente ejemplo donde se utiliza el resultado anterior.

Ejemplo: calcular el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^5+4}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^5+4}=\frac{+\infty}{+\infty} \qquad indeterminado$$

Luego dividimos el numerador y denominador por la mayor potencia de x, en este caso es x^5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{1}{x^5}}{\frac{2x^5}{x^5}+\frac{4}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{2+\frac{4}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0+0-0}{2+0}=\frac{0}{2}=0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^5+4}=0.$$

También se tuvo en cuenta algunas propiedades de los límites de funciones, así como algunos resultados sobre el tema.

4.5 Propiedades de los límites

1. $\lim_{x\to a} c = c$, el límite de una función constante es la misma función constante.
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
5. Si $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_{n-2}x^2 + c_{n-1}x + c_n$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
6. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
7. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Además se le explico a los estudiantes que una función *f* no está definida en un punto, siempre que al evaluarla en dicho punto, se obtenga alguna de las siguientes formas:

0/0, ∞/∞, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $+\infty$, $-\infty$

Y que en cualquiera de estos casos, se dice que el límite de la función *f* está indeterminado. Por lo tanto este dependerá de los valores que la función tome, en las proximidades del punto. Se propone realizar la actividad 4. (Ver anexo 4)

4.6 Limites especiales

Se dio a conocer algunos límites básicos especiales para que los estudiantes verificaran el resultado con geogebra después de la solución algebraica. Algunos de ellos fueron:

- $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\ 1 + x\ ^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x\to \infty}\ 1 + x\ ^{\frac{1}{x}} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\ \ 1 + \frac{1}{x}\ ^{x} = 1$
- $\lim_{x\to \infty}\ \ 1 + \frac{1}{x}\ ^{x} = e$

Para poner en práctica el conocimiento de estos resultados se dejó la actividad 5, en la cual los estudiantes y docente se sintieron satisfechos con el trabajo realizado. (Ver anexo 5).

5. METODOLOGÍA

5.1Participantes

En la investigación participaron 57 estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa El Rosario de Miranda Cauca, el grado 11-1 con 29 estudiantes y el grado 11-2 con 28 alumnos, estudiantes que tienen edades entre 16 y 20 años. El docente autor de la propuesta orientó el tema a los dos grupos. El tratamiento se aplicó en el transcurso del tercer periodo del año escolar 2015.

5.2 Tipo de investigación

La propuesta se diseñó para darle un tratamiento cuantitativo, Dado que los grupos ya estaban conformados antes del experimento y no se hizo ninguna modificación a estos, es decir, los grupos no son representantes de una población más amplia y diversos factores operaron en la formación de estos, por lo cual no hay aleatoriedad, se decidió determinar la efectividad de la propuesta usando el modelo de investigación cuasi- experimental de grupo control pre- prueba, tratamiento, post-prueba propuesto por Campbell.

Con el fin de comprobar el resultado sobre el aprendizaje de límites de funciones, valorado por el rendimiento académico de los alumnos, se seleccionó el diseño denominado diagrama del diseño Pre-test y Post-test. El grupo seleccionado para hacer el tratamiento es el grado 11-1, que lo llamamos grupo experimental (G.E) a quienes se les impartió el tema de la propuesta, el grupo control (G.C) es el grupo 11-2 quienes recibieron el tema en con el método tradicional.

5.3 Análisis de resultados

5.3.1 Comparación de preguntas acertadas en el pre-test

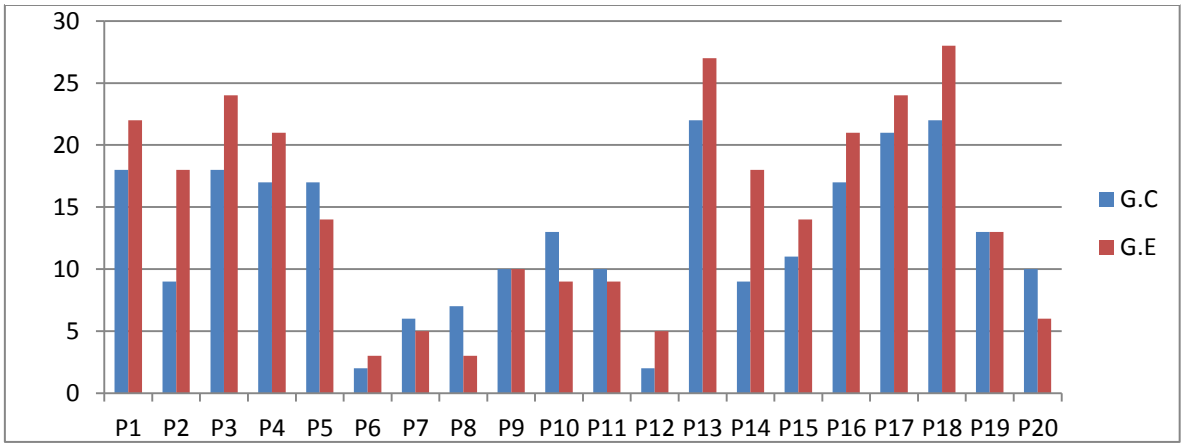
El Pre-test diseñado por el docente, comprende de 20 preguntas de selección múltiple con única respuesta y se aplicó con el propósito de detectar las ideas previas sobre límites de funciones (Ver anexo 6). La tabla 1 muestra la comparación de los dos grupos.

Tabla 1. Comparación de preguntas acertadas en el pre-test

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G.C	18	9	18	17	17	2	6	7	10	13	10	2	22	9	11	17	21	22	13	10
G.E	22	18	24	21	14	3	5	3	10	9	9	5	27	18	14	21	24	28	13	6

La gráfica 12 ilustra la frecuencia relativa del acierto de cada una de las preguntas del pre-test de los dos grupos.

Gráfica 12. Comparación por preguntas pre-test



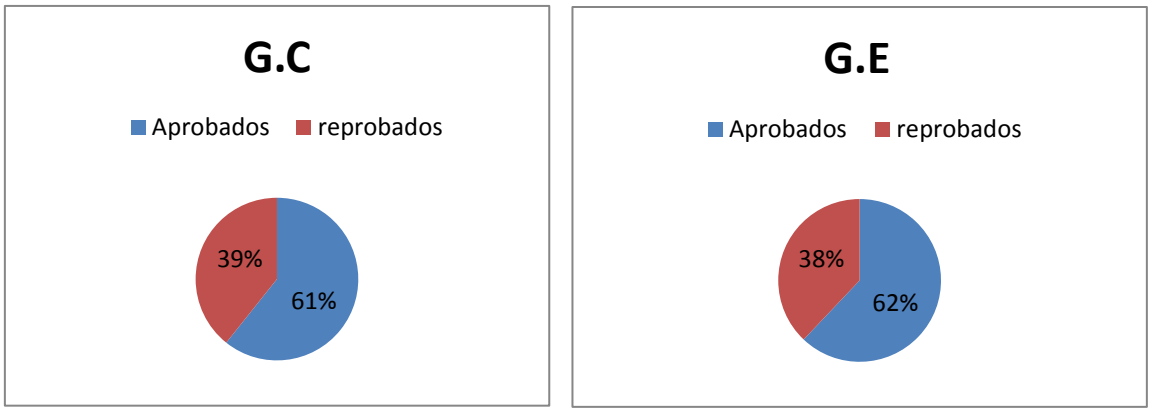
Cabe mencionar que la nota mínima que se utiliza en la institución es de 2.0 y la nota máxima 5.0. Además, un estudiante supera una prueba con una nota de por lo menos 3.5. Teniendo en cuenta estos argumentos y que la valoración que se le dio a cada pregunta del pre-test es de 0,15, se establece que un estudiante supera la prueba con más de nueve preguntas acertadas.

La tabla 2 muestra el número de estudiantes que aprobaron la prueba pre-test tanto en el grupo control como en el grupo experimental, cuyos porcentajes se visualizan en la gráfica 13.

Tabla 2. Número de estudiantes aprobados en el pre-test

	NUMERO DE ESTUDIANTES APROBADOS	NUMERO DE ESTUDIANTES REPROBADOS	MEDIA	VARIANZA MUESTRAL ,
G.C	17	11	$\overline{x}_1$=3,55	S_1=0,15
G.E	18	11	$\overline{x}_2$ =3,5	S_2=0,17

Gráfica 13. Porcentajes de aprobación



Con la distribución F de Snedecor se comprobó previamente que no existen diferencias significativas entre las varianzas de las calificaciones del pre-test del G.C y G.E.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ no existe diferencia entre las varianzas de los dos grupos
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ existe diferencia significativa entre las varianzas

El estadígrafo es

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{0{,}17}{0{,}15} = 1{,}333$$

Como es un ensayo de dos colas, para un nivel del 95% de confianza se tiene que α=0,025 para el límite inferior y α = 0,975 para el límite superior. Los grados de libertad son 28 y 27 del numerador y denominador respectivamente. Luego

$$F_{0{,}025;(28,27)} = 0{,}465 \text{y} F_{0{,}975;(28,27)} = 2{,}151.$$

De lo cual, $0{,}465 < 1{,}333 < 2{,}151.$ Por lo tanto se acepta H_0.

Con la decisión anterior se procede a comparar las medias:

Ensayo de Hipótesis

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Donde H_0 indica que no existe diferencia entre el rendimiento promedio alcanzado por los dos grupos en el pre-test; mientras H_a dice que los rendimientos promedios son diferentes.

El estadígrafo es $t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3{,}55 - 3{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}15}{28} + \frac{0{,}17}{29}}} = 0{,}47$

Para un 95% de confianza, α=0,05 y para $n_1 + n_2 - 2 = 55$ grados de libertad. Como es un ensayo de dos colas se encontró que $t_{0{,}0975;55} = -2{,}004$ y $t_{0{,}0975;55} = 2{,}004.$ Como $-t_{0{,}0975;55} < t < t_{0{,}0975;55}$, no se rechaza H_0 y se concluye con un $\alpha = 0.05$, que no existe diferencia significativa en el rendimiento promedio entre los dos grupos.

5.3.2 Comparación de preguntas acertadas en el pos-test

El Post-test fue aplicado una vez terminado el tratamiento al grupo experimental. Este se diseñó para la evaluación de la propuesta con 25 preguntas (Ver anexo 7) y se tuvo en cuenta las siguientes orientaciones o ítems ordenados en la tabla 3.

Tabla 3. Ítems evaluados en el pos-test

ITEMS	NUMERO DE PREGUNTAS
CONCEPTOS BASICOS (C.B)	5
LIMITE FINITO EN UN PUNTO (L.F.P)	5
LIMITES LATERALES (L.L)	5
LIMITES INFINITOS (L.I)	5
LIMITES FINITOS HACIA EL INFINITO (L.H.I)	5

La tabla 4 muestra el número de estudiantes que acertaron cada pregunta en cada uno de los grupos.

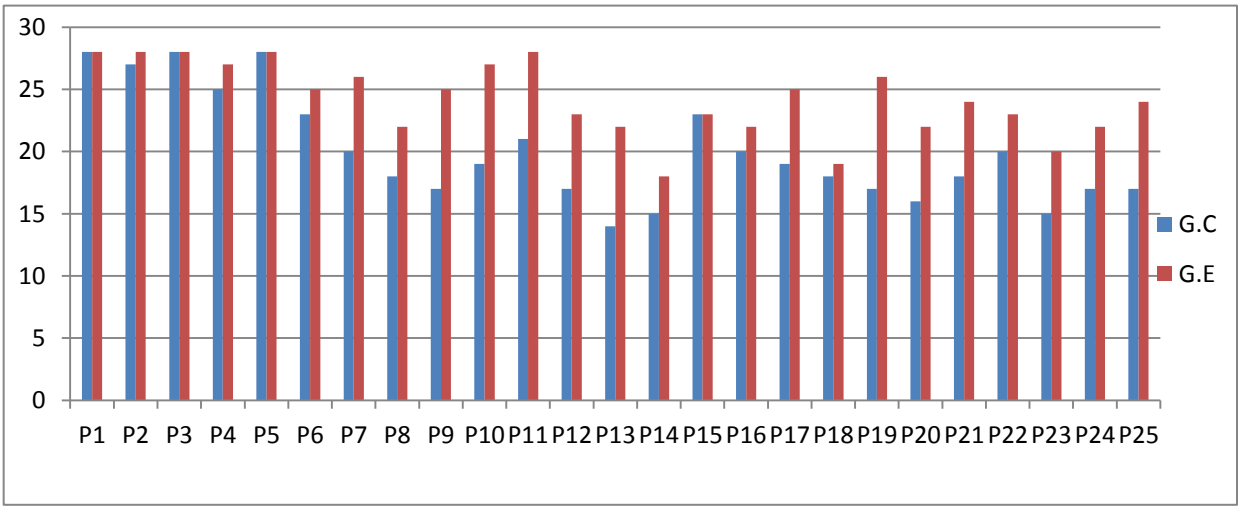
Tabla 4. Comparación de preguntas acertadas en el pos-test

Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G.C	28	27	28	25	28	23	20	18	17	19	21	17	14	15	23
G.E	28	28	28	27	28	25	26	22	25	27	28	23	22	18	23

Preguntas	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
G.C	20	19	18	17	16	18	20	15	17	17
G.E	22	25	19	26	22	24	23	20	22	24

La gráfica 14 de barras muestra los resultados obtenidos en la tabla 4. Frecuencia relativa con respecto a cada pregunta.

Gráfica 14. Comparación por preguntas pos-test



5.3.3 Comparación por ítem

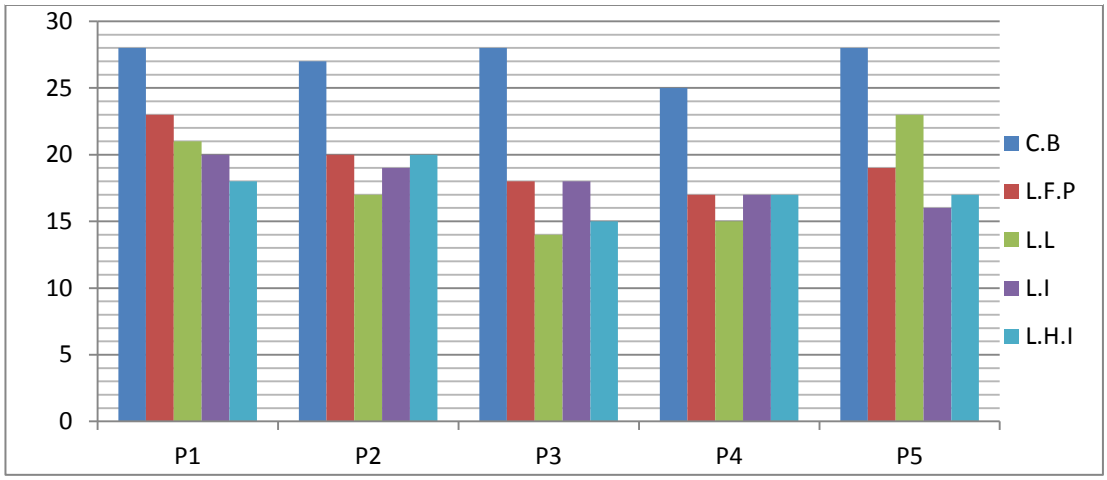
La tabla 5 muestra el número de pregunta y la cantidad de estudiantes del grupo control y del grupo experimental que la respondieron correctamente teniendo en cuenta cada ítem.

Tabla 5. Comparación de preguntas acertadas por ítem

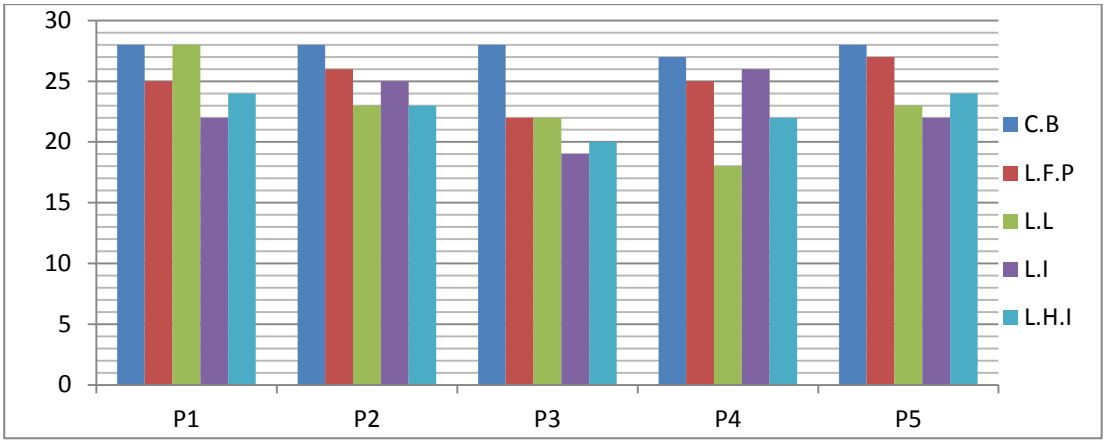
	PREGUNTA 1		PREGUNTA 2		PREGUNTA 3		PREGUNTA 4		PREGUNTA 5	
ITEMS	G.C	G.E	G.C	G.E	G.C	G.E	GC	G.E	G.C	G.E
Conceptos básicos (C.B)	28	28	27	28	28	28	25	22	28	28
Limite finito en un punto (L.F.P)	23	28	20	26	18	23	17	25	19	23
Limites laterales (L.L)	21	28	17	22	14	22	15	19	23	23
Limites infinitos (L.I)	20	27	19	25	18	18	17	26	16	22
Limite hacia el infinito (L.H.I)	18	26	20	27	15	23	17	22	17	24

La información obtenida en la tabla 5 también se puede ver en las gráficas 15 y 16 donde se muestra el número de estudiantes que respondieron correctamente las preguntas en cada grupo respectivamente.

Gráfica 15. Comparación pos-test por cada ítem grupo control



Gráfica 16. Comparación post-test por cada ítem grupo experimental



En la gráfica 14 y/o tabla 5 se puede observar que en las preguntas 1, 3 y 5 el número de estudiantes que las contestan correctamente es igual a 28 en ambos grupos, pero los porcentajes son diferentes, es decir, las preguntas 1,3 y 5 son contestadas correctamente para el grupo control en un 100% de los estudiantes del grupo control contra un 96,5% aproximadamente de los estudiantes del grupo experimental.

En la pregunta 15 se observa que el número de estudiantes que la contestan correctamente es 23 en ambos grupos, pero porcentualmente tenemos aproximadamente un 82% para el grupo control y un 79% para el grupo experimental.

Para la pregunta 2 el número de estudiantes que la respondieron acertadamente son 27 contra 28 a favor del grupo experimental, esto equivale a 96.4% del grupo control y a un 96,5% del grupo experimental.

La pregunta 18 en el grupo control la respondieron correctamente 18 estudiantes que corresponde al 64,3% aproximadamente de estos alumnos frente a 19 estudiantes del grupo experimental que corresponde aproximadamente al 65,5%.

Observemos que la pregunta 19 la respondieron 17 estudiantes del grupo control, esto corresponde al 60,7% aproximadamente de este grupo, frente a 26 alumnos del grupo experimental que es el 89,7% aproximadamente de estos estudiantes.

En las demás preguntas se evidencia el nivel de superación del grupo experimental, con una diferencia mínima de por lo menos un 1% y una diferencia máxima cerca del 29% por pregunta.

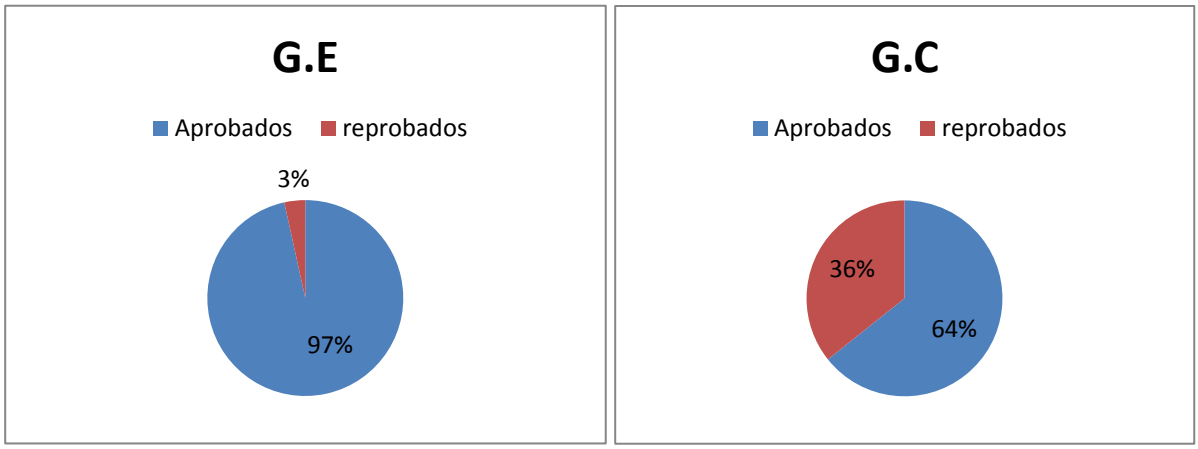
La tabla 6 muestra el número de estudiantes que aprobaron la prueba pos-test tanto en el grupo control como en el grupo experimental. Dado que el número de preguntas son 25, la prueba se gana con mínimo 13 preguntas contestadas correctamente.

Tabla 6. Número de estudiantes aprobados en el pos-test

	NUMERO DE ESTUDIANTES APROBADOS	NUMERO DE ESTUDIANTES REPROBADOS	MEDIA	VARIANZA MUESTRAL
G.C	18	10	$\overline{x}_1$ =3,96	S_1=0,29
G.E	28	1	$\overline{x}_2$ =4,49	S_2=0,22

El porcentaje de estudiantes aprobados en el pos-test se puede ver en las gráfica 17, grupo control y grupo experimental respectivamente.

Gráfica 17. Porcentajes de aprobación pos-test



Análogamente al pre-test la distribución F de Snedecor nos sirvió para comprobar que no existen diferencias significativas entre las varianzas de las calificaciones del pos-test del G.C y G.E.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ no existe diferencia entre las varianzas de los dos grupos
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ existe diferencia significativa entre las varianzas

El estadígrafo es

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,29}{0,22} = 1,319$$

Como es un ensayo de dos colas, para un nivel del 95% de confianza se tiene que α=0,025 para el límite inferior y α = 0,975 para el límite superior. Los grados de libertad son 28 y 27 del numerador y denominador respectivamente. Luego

$$F_{0,025;(27,28)} = 0,467 \text{y} F_{0,975;(27,28)} = 2,1$$

Como $0,467 < 1,333 < 2,140$. Es decir, existe suficiente evidencia para decir que las varianzas de los dos grupos son iguales.

Con la decisión anterior se procede a comparar las medias de las calificaciones del pos-test: Ensayo de Hipótesis

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ no existe diferencia entre el rendimiento promedio entre el G.C y G.E utilizando los dos métodos de enseñanza.

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ Dice que los rendimientos promedios son diferentes

El estadígrafo es $t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{3,96 - 4,49}{\sqrt{\frac{0,29}{28} + \frac{0,22}{29}}} = -3,957$

Como $t_{0,0975;55} = -2,004$, se tiene que $t < t_{0,0975;55}$. Por lo tanto se obtuvieron resultados altamente significativos como para rechazar H_0, de lo cual se dice que el promedio de calificaciones obtenidas por los dos métodos en el G.C y G.E respectivamente son diferentes.

6. CONCLUSIONES

- En esta propuesta se ha mostrado cómo el uso de herramientas tecnologicas facilitan la comprension de conceptos matematicos, en particular el límite de una funcion.

- Trabajar con las computadoras y el software educativo geogebra produjo en los estudiantes un especial interes ya que observan y manipulan el ordenador para fines formativos tanto en lo academico como en lo humano y no como como una forma de simple ocio.

- Al trabajar con software educativo se observa que un alto porcentaje de los estudiantes interpreta la definicion de limite gracias a la forma gráfica que se puede crear en el, facilitando sus tareas.

- Con respecto al objetivo de la propuesta se puede decir que se logró en gran medida, dado que lo elaborado por los estudiantes en cuanto al uso de tablas de valores, de graficos y el cálculo de limites mediante el software y los métodos algebraicos muestra un rendimiento significativo.

- Los resultados obtenidos despues del tratamiento demuestran que existió una diferencia representativa entre el aprendizaje del grupo control y el grupo experimental; esto corrobora que la metodologia utilizada mejoró el rendimiento del tema límites de funciones en el G.E, aunque vale decir que el resultado de las pruebas sólo son validas para los grados once de la Institución Educativa El Rosario año lectivo 2015.

- El resultado final no es de un ciento por ciento, pues a pesar del rendimiento, los estudiantes presentaron dudas, errores, pero que fueron confrotados, discutidos y corregidos; ademas, se destaca que el trabajo grupal en algunas ocasiones favorecen la participacion activa de los estudiantes y muestra que el método usado fue acertado y permitió la interacción entre pares de estudiantes y el docente.

7. RECOMENDACIONES

- En cualquier area del saber debe buscarse por medio de los docentes una alternativa tecnológica que modifique la metodología de enseñanza y aprendizaje para obtener mejores logros educativos tanto para los estudiantes como para los docentes.

- Establecer ambientes de aprendizajes que le proporcionen al estudiante un enfoque investigativo y explorativo con nuevas herramientas tecnológicas que posibiliten los procesos de enseñanza y aprendizaje de manera que los métodos logren hacerse dinámicos, incursionando las TIC en el sistema educativo.

- Es importante la utilización de un Software Educativo en las labores docentes para mejorar el aprendizaje, permitiendo que el alumno emplee distintas estrategias para jerarquizar la información entregada de acuerdo a su ritmo de aprendizaje.

- Siempre es importante considerar las ideas previas del estudiante puesto que son fundamentales a la hora de abordar un tema y son un buen punto de partida hacia la enseñanza de un concepto.

- La experiencia en este trabajo proporciona informacion para que se implemente esta propuesta con los futuros estudiantes de grado undecimo de esta institucion y/o de otras.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AQUREERE, S; ENGLER, A; VRANCKEN, S; MÜLLER, D; HECKLEIN, M; GREGORINI, M; HENZENN, N. Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. Prov. de Santa Fe (Argentina) Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Esperanza. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/40%20Engler.pdf

BROUSSEAU, GUY. Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática. (1983). Recuperadodehttps://mealejandrofm.files.wordpress.com/2012/03/5oprocesoscognitivosy cambioconceptualenmatemc3a1ticasyciencias-docx.pdf

FERRANTE, Jorge.(2009)Una introducción al concepto de límite,(dos mil años en un renglón). Recuperado de http://www.edutecne.utn.edu.ar/guias_de_estudio/limites.pdf

FLORES, R; VALENCIA, M; DAVILA, G; GARCIA, M. Fundamentos de cálculo. (feb- de 2008). ISBN: 970-9920-18-5. Recuperado http://www.mat.uson.mx/sitio/documentos/fundamen tos-de-calculo.pdf

GODINO, J. D; BATANERO, C; FONT, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el Aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 pág.]. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

HITT, F. (2004) Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. Recuperado de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2005 /133187_1.pdf

LOZANO, Y. (2011). Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción de limite (tesis de pregrado, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia). Recuperado de http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO_DE_LA_DERI VADA_SIN_LA%20NOCION_DEL_LIMTE.pdf

LUPIÁÑEZ, J; CODINA, A.(sf). Calculadoras y sensores: la matemática en Movimiento. Recuperado de http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBR OS/MATEMÁTICAS/LOS%20MATERIALES%20Y%20RECURSOS%20EN%20MATEMATI CAS%20SECUNDARIA.pdf

RICO, L. (1995).Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L; Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

RUANO, R; SOCAS, M; PALAREA, M. Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en algebra. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2258680.pdf

TEDESCO, J; BURBULES, N; BRUNNER, J, MARTIN, E; HEPP, P; MORRISSEY, J;...AGUERRONDO, I. (2008). Las TIC: del aula la agenda política (pp. 25-30). Buenos Aires. ISBN: 978-92-806- 4287-2. Recuperado de http://virtualeduca.org/ifd/pdf/las-tic-aula-agenda-politica.pdf

URBINA, M. Taller sobre curvas de peano en el geogebra.(4:2012). Actas del cuarto congreso Uruguayo de educación matemática. Centro nacional de profesores del suroeste, Uruguay. 2012. Recuperado de http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1358800415/62.pdf

VALERIO, T; SOSA, C; SPÍNDOL, P. Límite de una función en un punto y en el infinito. Revista electrónica Amiutem. Nº 1. (Junio de 2013). Recuperado de http:/revista.amiutem.edu.mx/ojs/index.php/relecamiutem/article/view/1/4

VRANCKEN, S; GREGORINI, M; ENGLER, A ; MÜLLER, D; HECKLEIN, M. Dificultades Relacionadas Con La Enseñanza Y El Aprendizaje Del Concepto De Límite. Prov. de Santa Fe (Argentina) Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Esperanza. Recuperado de http:/ www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

9. ANEXOS

Anexo 1. Actividad 1

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL CAUCA
INSTITUCION EDUCATIVA EL ROSARIO
RESOLUCION DE APROBACION No. 0482DE ABRIL 26 DE 2004
NIT. 817.005.597-1
DANE 319455000200

1. Establecer si cada una de las funciones dadas a continuación tienen puntos donde se indeterminan. Luego completar las tablas de valores y deducir a qué valor se aproximan para determinar el límite.

a. $f\ x\ = 2x - 1$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

b. $f\ x\ = 2x^2 - 1$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

c. $f\ x\ = 1 - 2x^2$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$									

d. $f\ x\ = \frac{x^2-1}{x-1}$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$									

e. $f\ x\ = \frac{x^3-8}{x-2}$

x	1.9	2.99	2.999	2.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$									

f. $f\ x\ = \frac{\sin x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

g. $f\ x\ = \frac{1-\cos x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

h. $f\ x\ = \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	1.1
$f(x)$									

i. $f\ x\ = e^x$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	1.1
$f(x)$									

j. $f\ x\ =\ 1+x^{\frac{1}{x}}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

Anexo 2. Actividad 2

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL CAUCA
INSTITUCION EDUCATIVA EL ROSARIO
RESOLUCION DE APROBACION No. 0482DE ABRIL 26 DE 2004
NIT. 817.005.597-1
DANE 319455000200

1. Comprobar el valor de límite con ε y δ. Verificar con el software

a. $\lim_{x\to 1} 2x+3=5$ b. $\lim_{x\to 2} 3x-4=2$ c. $\lim_{x\to 1} 2x+3=5$

d. $\lim_{x\to 2} 3x-5=1$ e. $\lim_{x\to 1} 2x+3=5$ f. $\lim_{x\to 2} x^2=4$

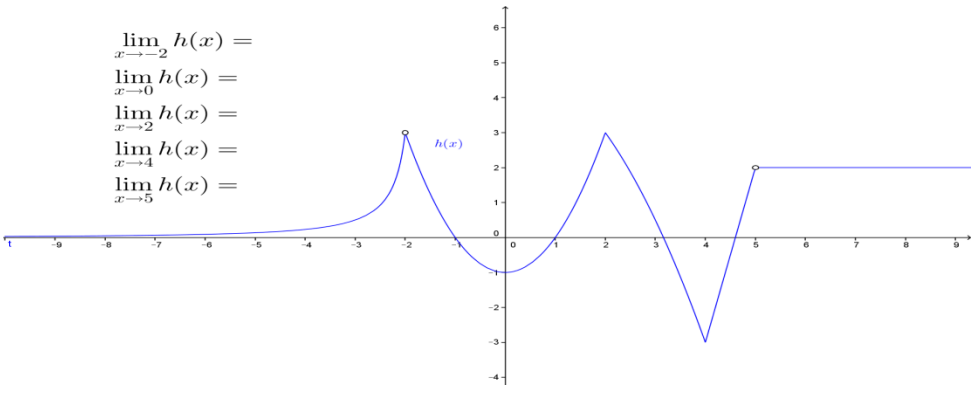
g. $\lim_{x\to 1} x^2-2=-1$ h. $\lim_{x\to 2} 2x^2-3=5$ i. $\lim_{x\to -2} x^2-3x+1=11$

j. $\lim_{x\to 2} \frac{6}{x+1}=2$ k. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4$ l. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1}=5$

m. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}=12$ n. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-ax}{x-a}$ ñ. $\lim_{x\to 1} x\sin\frac{1}{x}=0$

2. Determinar el valor de δ dado ε. Graficar las funciones para corroborar el valor de δ
   a. $\lim_{x\to 1} 2x+3=5$ si $\varepsilon=0.5$
   b. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}=6$ si $\varepsilon=0.03$
   c. $\lim_{x\to 3} \frac{2}{x}+1=\frac{5}{3}$ si $\varepsilon=0.01$
   d. $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}=-9$ si $\varepsilon=0.005$
   e. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}=2$ si $\varepsilon=0.01$
   f. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}=6$ si $\varepsilon=0.02$

3. Deducir el valor del límite de la función h en cada caso respecto a la gráfica



4. Determinar el límite de las funciones por simple evaluación.
   a. $\lim_{x\to 2} 2x - 5=$
   b. $\lim_{x\to 2} 1 - 3x =$
   c. $\lim_{x\to 2} 2x^2 =$
   d. $\lim_{x\to 2} 2x^2 =$
   e. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-1} =$
   f. $\lim_{x\to 2} \frac{4x-5}{x^2+3x+6} =$
   g. $\lim_{x\to 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 4}^{\,2} =$
   h. $\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt[3]{x}}{4x-10} =$

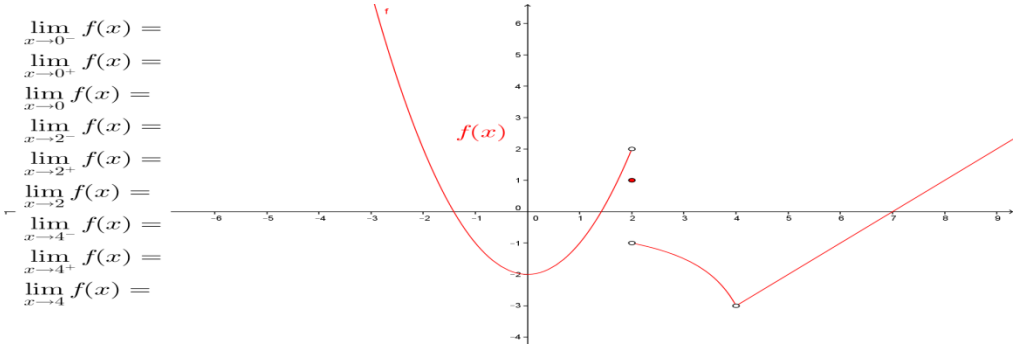
Anexo 3. Actividad 3

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL CAUCA
INSTITUCION EDUCATIVA EL ROSARIO
RESOLUCION DE APROBACION No. 0482DE ABRIL 26 DE 2004
NIT. 817.005.597-1
DANE 3194550002000

1. Determinar los límites que se piden con respecto a cada gráfica, si alguno de ellos no existe justificar la respuesta

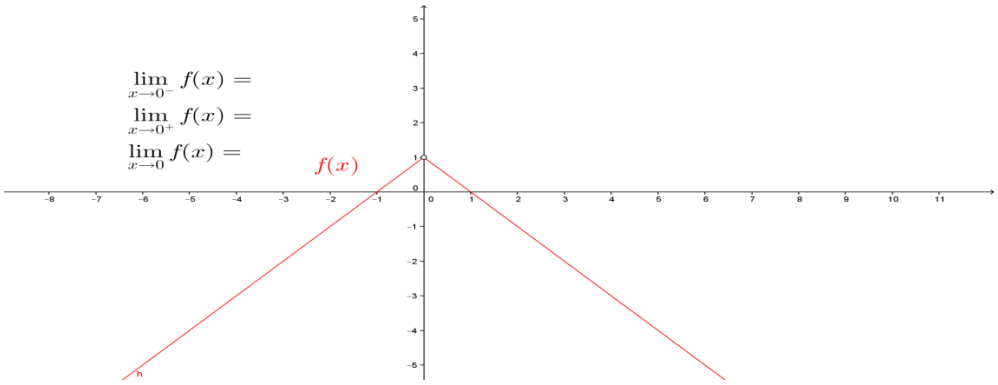
a.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 0} f(x) =$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 2} f(x) =$
$\lim_{x\to 4^-} f(x) =$
$\lim_{x\to 4^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 4} f(x) =$



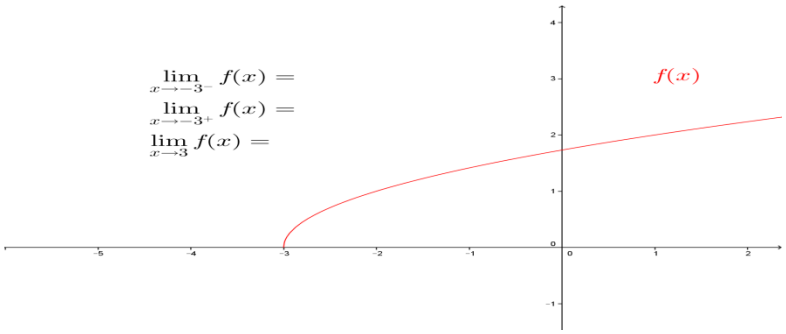
b.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 0} f(x) =$



c.

$\lim_{x\to -3^-} f(x) =$
$\lim_{x\to -3^+} f(x) =$
$\lim_{x\to -3} f(x) =$



2. Determinar si los límites de las funciones dadas existen. Comprobar el resultado graficando la función con el software

   a. $\lim_{x\to 1} t\ x \quad si \quad t\ x \ = \begin{matrix} 2x\ si\ 0 \le x < 1 \\ 4\ si\ x = 1 \\ 5 - 3x\ si\ 1 < x \le 2 \end{matrix}$

   b. $\lim_{x\to 0} g\ x \quad si \quad g\ x \ = \begin{matrix} x^2\ \ si\ \ -4 \le x < 0 \\ x + 2\ \ si\ 0 \le x < 5 \end{matrix}$

   c. $\lim_{x\to 0} h\ x \quad si \quad h\ x \ = \begin{matrix} 4 - x^2\ \ si\ \ -4 \le x < 1 \\ 2 + x^2\ \ si\ \ 1 \le x < 5 \end{matrix}$

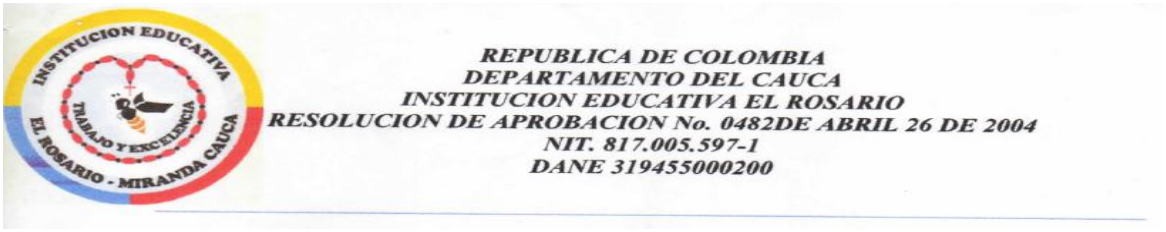
3. Calcular los siguientes límites de funciones. Verificar el resultado graficando las funciones con Geogebra.

   a. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
   b. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{2-x}$
   c. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-x}$
   d. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{9-x^2}$
   e. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
   f. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$
   g. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x+6}$
   h. $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{8}}{x-2}$
   i. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{1+x}$

4. Calcular los limites utilizando racionalización

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$
   b. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$
   c. $\lim_{x\to 4} \frac{\overline{x}-2}{x-4}$
   d. $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
   e. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+x-2}$
   f. $\lim_{x\to 0} \frac{\overline{2}-\ \overline{x+2}}{x}$
   g. $\lim_{x\to 3} \frac{\overline{x+1}-2}{x-3}$

Anexo 4. Actividad 4



1. Demostrar formalmente que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
2. Dada la función $f\ x\ = \frac{x+3}{x^2-9}$. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ no existe.
3. Dado el valor de M y la función correspondiente, determine el valor de δ para que se cumpla la definición de limite al infinito. Utilice geogebra para corroborar el resultado
   a. $M = 100$ y $f\ x\ = \frac{x}{x^2-1}$ en el punto $x = 1$.
   b. $M = 1000$ y $g\ x\ = \frac{-1}{x-3}$ en el punto $x = 3$.
   c. $M = 1000$ y $g\ x\ = \frac{3x}{x-2}$ en el punto $x = 2$.
   d. $M = 10000$ y $g\ x\ = \frac{x^2}{4-x}$ en el punto $x = 4$.

4. Calcular los siguientes límites y determinar las asíntotas verticales de cada función. Después grafique la función con geogebra.

a. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-x}$
b. $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$
c. $\lim_{x\to 3} \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$
d. $\lim_{x\to \frac{-1}{5}} \frac{2x-3}{5x-1}$
e. $\lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x^2-25}$
f. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\frac{x-2}{}}$
g. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\frac{x^2-x-2}{}}$
h. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\frac{x^2-x-2}{}}$
i. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{\frac{x^2-x-2}{}}$

5. Calcular los límites, determinar las asíntotas horizontales y utilizar geogebra para verificarlos.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+3}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{x-5}$

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x-1}{x^4+2x+1}$

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4+3x^2-1}{3x^4-2x+3}$

f. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4}{3x^4+3}$

g. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+10}{7-2x^4}$

h. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

i. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

j. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

k. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

l. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

m. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

ñ. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$

Anexo 5. Actividad 5

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL CAUCA
INSTITUCION EDUCATIVA EL ROSARIO
RESOLUCION DE APROBACION No. 0482DE ABRIL 26 DE 2004
NIT. 817.005.597-1
DANE 319455000200

1. Compruebe graficando en geogebra que si $f(x)$ es una de las seis funciones trigonométricas, entonces $\lim_{x\to a} f\ x\ = f\ a\ .$

2. Utilizar los resultados básicos sobre límites de funciones para realizar los siguientes cálculos.

a. $\lim_{x\to 0} sen\ 5x \cos 2x$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{x}$

c. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$

d. $\lim_{x\to 0} sen\ 5x \cos 2x$

e. $\lim_{x\to 3} \frac{3sen^2(x-3)}{x^2-6x+9}$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{2\ sec x}{\csc x}$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{sen\ x}$

h. $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{x}$

Anexo 6. Pre-test

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO DEL CAUCA
INSTITUCION EDUCATIVA EL ROSARIO
RESOLUCION DE APROBACION No. 0482DE ABRIL 26 DE 2004
NIT. 817.005.597-1
DANE 319455000200

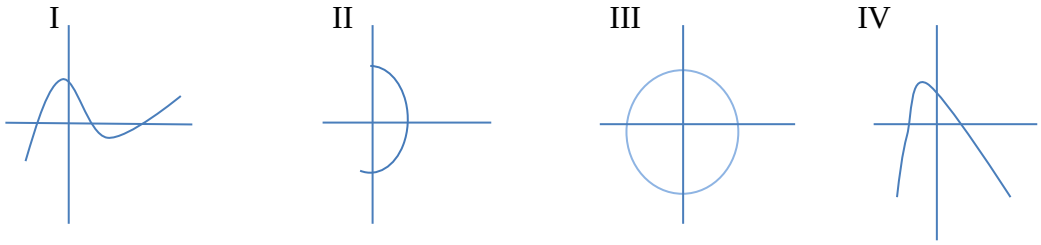
1. De los siguientes conjuntos de pares ordenados el que no corresponde a una función es

a. $f =$ 1,2 , 2,3 , 3,4 , 4,5 , 5,6 , 6,7 , 7,8 , 8,9 , 9,1
b. $g =$ 1,1 , 2,2 , 3,3 , 4,4 , 5,5 , 6,6 , 7,7 , 8,8 , 9,9
c. $h =$ 1,9 , 2,8 , 3,7 , 4,6 , 5,5 , 6,4 , 7,3 , 8,2 , 9,1
d. $t =$ 9,1 , 8,2 , 7,3 , 6,4 , 5,6 , 6,7 , 7,8 , 8,9 , 9,1

2. De las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$,la que no corresponde a una función es

a. $R_1 = (x, y)/y = 2x + 1$
b. $R_2 = (x, y)/y = 2x^2 + 1$
c. $R_3 = (x, y)/x = y$
d. $R_4 = (x, y)/x^2 + y^2 = 1$

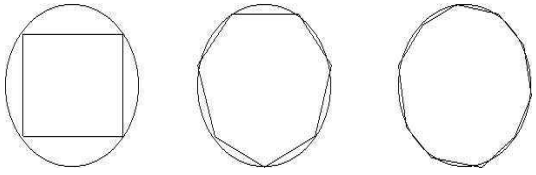
Observa las siguientes gráficas



3. Las que **no** representan una función son

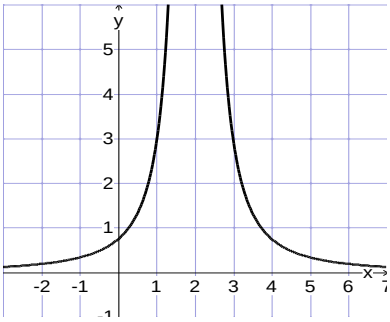
a. I y IV
b. II y III
c. III y IV
d. I y III

4. A medida que el número de lados del polígono inscrito en la circunferencia aumenta, entonces



a. El área del polígono disminuye
b. el área de la circunferencia disminuye
c. El área del polígono es igual al área de la circunferencia
d.El área del polígono se aproxima al área de la circunferencia.

Las preguntas 4-8 se responden de acuerdo a la siguiente gráfica



5. la función no está definida en el punto

a. $x = 0$

b. $x = 6$

c. $x = -2$

d. $x = 2$

6. Cuando nos acercamos al valor x *=2* por la izquierda, entonces $f(x)$

a. Toma el valor *2*
b. Crece ilimitadamente
c. no se sabe pues no está definida en *2*
d. Toma el valor cero.

7. Cuando nos acercamos al valor *x=2* por la derecha, entonces $f(x)$

a. Toma el valor *2*
b. Crece ilimitadamente
c. no se sabe pues no está definida en *2*
d. Toma el valor cero.

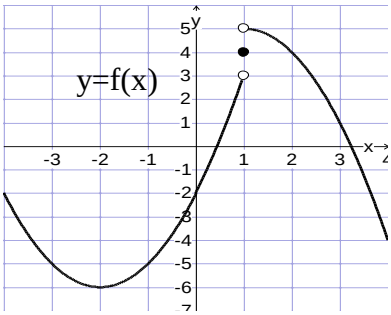
8. Cuando variable *x* crece ilimitadamente, entonces $f(x)$

a. Se aproxima al valor *2*
b. Crece ilimitadamente
c. Se aproxima al valor *0*
d. Se aproxima al valor *1*

9. El dominio y rango de la función $f(x)$ son respectivamente

a. $\mathbb{R}\ y\ \ 0, +\infty$
b. $\mathbb{R} -\ 2\ \ y\ \ 0, +\infty$
c. $\ \ 0, +\infty\ \ y\ \mathbb{R}$
d. $\mathbb{R}\ y\ \mathbb{R} -\ 2$

Responde las preguntas 10-12 de acuerdo al siguiente grafico



10. El valor de $f(x)$ cuando $x= 1$ es

a. *3* b. *5* c. *4* d. *1*

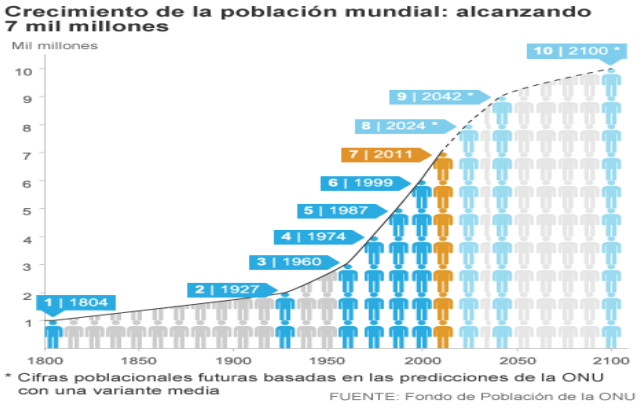
11. Cuando nos acercamos a x =1 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a

a. *4* b. *3* c. *5* d. *1*

12. Cuando nos acercamos a x =*1* por la derecha, $f(x)$ se aproxima a

a. *4* b. *3* c. *5* d. *1*

Responde las preguntas 13 y 14 de acuerdo con la siguiente gráfica



13. a través del tiempo la población en el mundo

a. disminuye

b. permanece constante

c. aumenta

d. ninguna de las anteriores

14. En el año 2100 la población mundial es aproximadamente

a. 10.000 millones b. 210.000 millones c. 7.000 millones d. 2.011 millones

La fuerza de atracción gravitacional F_g, enunciada por Isaac Newton, dice que dos cuerpos cualesquiera de masas m_1 y m_2, respectivamente se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa. Es decir:

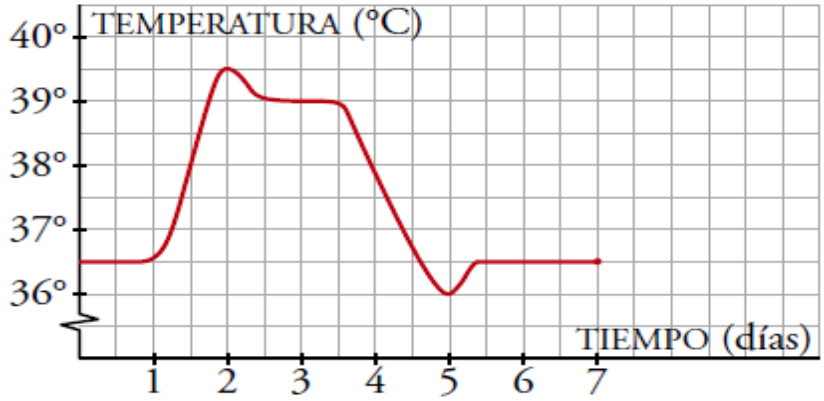
$$F_g = G.\frac{m_1.m_2}{r}$$

Donde G es denominada constante de gravitación universal.

15. si dos cuerpos se alejan infinitamente, ¿Qué sucede con la fuerza de atracción entre ellos?

a. aumenta
b. tiende acero
c. se mantiene constante
d. no se puede descifrar.

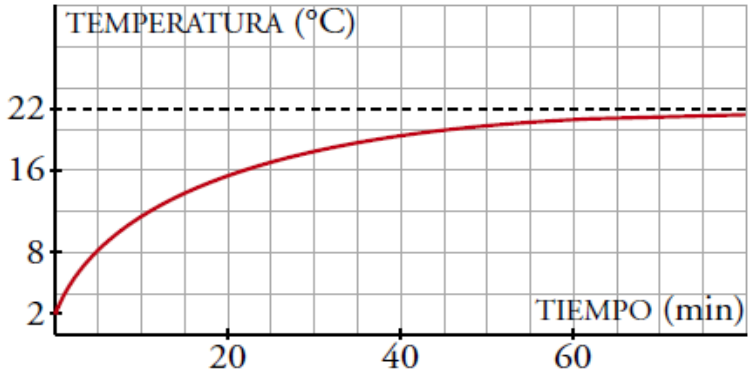
La evolución de la temperatura de un enfermo está dada por la siguiente gráfica



16. Se puede afirmar que:

a. La temperatura tiende a estabilizarse hacia los 36°C
b. La temperatura máxima es de 36°C
c. La temperatura tiende a estabilizarse hacia los 36,5°C
d. La temperatura tiende a estabilizarse hacia los 39,5°C

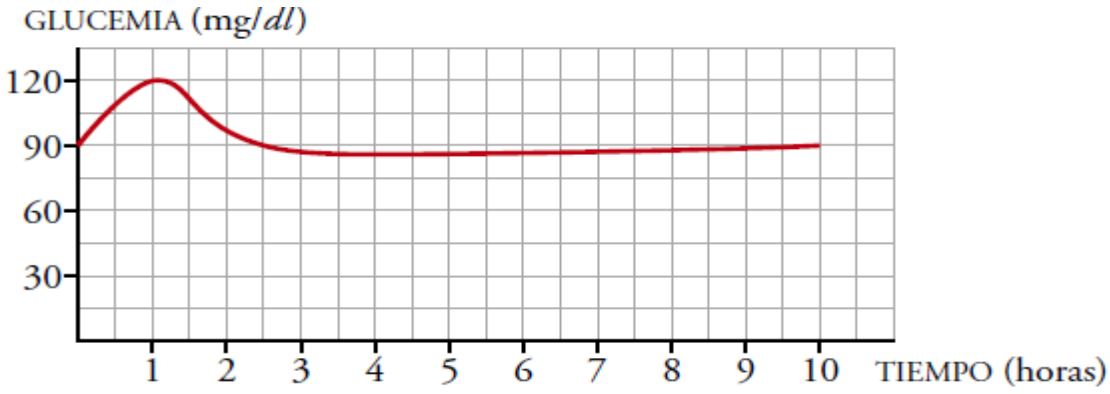
Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.



17. ¿Hacía que valor tiende la temperatura del vaso con el pasar del tiempo?

a. 2^oC b. 0^oC c. 60^oC d. 22^oC

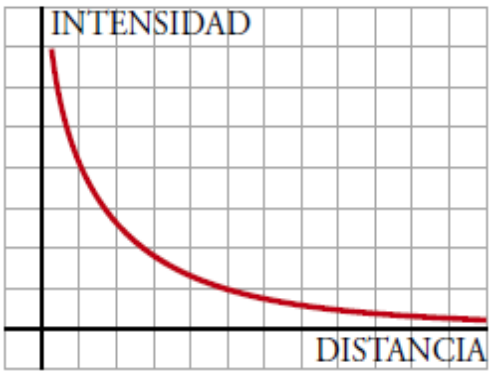
Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/dl, que es el nivel normal, hasta 120 mg/dl. Luego, en las 3 horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas. La siguiente gráfica representa la situación planteada.



18. ¿qué pasa con el nivel de glucemia a medida que el tiempo pasa ilimitadamente?

a. tiende a estabilizarse en 120 mg/dl
b. tiende a estabilizarse en 10 mg/dl
c. tiende a estabilizarse en 90 mg/dl
d. tiende a estabilizarse en 0 mg/dl

Responde las preguntas 19 y 20 de acuerdo a la siguiente información: La intensidad del sonido que podemos percibir desde un punto sonoro llamado foco dependerá de la distancia a la cual se encuentre el receptor desde el punto emisor del sonido. La intensidad que percibe el receptor está dada por la expresión $I = \frac{100}{d^2}$, donde I es la intensidad del sonido medido en decibeles y d es la distancia medida en metros a la que se encuentra el emisor del receptor.
Gráficamente se puede representar la situación como sigue:



19. A medida que la distancia entre emisor y receptor crece ilimitadamente, entonces

a. la intensidad del sonido crece ilimitadamente
b. la intensidad del sonido tiende acero
c. la intensidad del sonido siempre es la misma
d. ninguna de las anteriores

20. la intensidad del sonido y distancia son cantidades positivas. En la gráfica ¿qué significa que la magnitud Intensidad del sonido (eje y) aumente cada vez?

a. La magnitud distancia (eje x) se acerca a cero por la derecha
b. La magnitud distancia (eje x) se acerca a cero por la izquierda
c. La magnitud distancia (eje x) crece ilimitadamente
d. La magnitud intensidad del sonido (eje x) crece ilimitadamente

Anexo 7. Pos-test

Preguntas 1-5 conocimientos básicos

1. Las frases "la variable x se aproxima a a" o "x tiende a a" se escriben algebraicamente como
   a. $x = a$
   b. $x \leftarrow a$
   c. $x \leftrightarrow a$
   d. $x \rightarrow a$
2. Para referirse al límite lateral por la derecha de una función f se utiliza el símbolo
   a. $\lim_{x \to +a} f(x)$
   b. $\lim_{x \to a+} f(x)$
   c. $\lim_{x+a} f(x)$
   d. $\lim_{x \to a^+} f(x)$

3. La definición de limite finito de una función f en un punto a es
   a. $\forall \varepsilon < 0, \exists \delta > 0 \,/\, f\ x\ - L\ < \varepsilon\ siempre\ que\ \ x - a\ < \delta$
   b. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, f\ x\ - L\ < \varepsilon\ siempre\ que\ \ x - a\ < \delta$
   c. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, f\ x\ - L\ < \delta\ siempre\ que\ \ x - a\ < \varepsilon$
   d. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, f\ x\ - L\ > \varepsilon\ siempre\ que\ \ x - a\ < \delta$

4. Si los límites laterales de una función f en un punto a existen pero no son iguales, entonces:

   a. El límite existe, pero no es único.
   b. El límite no existe.
   c. El límite existe y es único.
   d. El límite es finito y es único.

5. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen, entonces una de las siguientes igualdades es verdadera
   a. $\lim_{x \to a}\ f.g\ \ x\ = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
   b. $\lim_{x \to a}\ f + g\ \ x\ = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
   c. $\lim_{x \to a}\ f/g\ \ x\ = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$
   d. $\lim_{x \to a}\ f + g\ \ x\ = f\ a\ + g(a)$

Preguntas 6-10 límite finito en un punto

Observa el desarrollo de la verificación del límite $\lim_{x\to 5} 2x-3=7$.
Sea $\varepsilon > 0$ talque $2x-3-7 < \varepsilon$ $paso\ 1$

$$2x+10 < \varepsilon \qquad paso\ 2$$

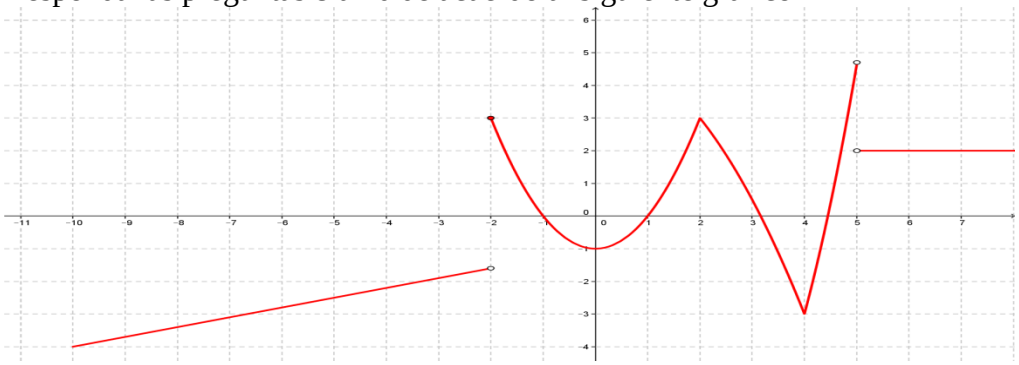
$$2\ x+5 < \varepsilon \qquad paso\ 3$$

$$x+5 < \frac{\varepsilon}{2} = \delta \qquad paso\ 4$$

6. Una de las afirmaciones siguientes es verdadera
   a. Hay un error en el paso 1.
   b. El error está en el paso 3.
   c. No es correcto el paso 2.
   d. La verificación del límite es correcta.

7. Si $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, entonces el valor mínimo de delta para que cumpla la definición de límite es
   a. $\frac{\varepsilon}{2}$
   b. ε
   c. 2ε
   d. $\frac{\delta}{2}$

   Responda las preguntas 8 a 10 de acuerdo al siguiente grafico



8. $\lim_{x\to -2} f(x)$ es
   a. 3
   b. -2
   c. 2
   d. No existe

9. $\lim_{x\to 2} f(x)$ es
   a. 3
   b. 2
   c. 0
   d. No existe

10. $\lim_{x\to 4} f(x)$ es
    a. 3
    b. -3
    c. 4
    d. No existe

Preguntas 11-15 límites laterales

Responda las preguntas 11 a 15 con respecto a la función f definida mediante la expresión

$$f\ x\ = \begin{matrix} x^2-1 \quad si \quad -\infty < x \leq -5 \\ \frac{x^2+34x+145}{x+5} \quad si \quad -5 < x < 2 \\ x+2 \quad si \quad 2 < x \leq 7 \\ \frac{x^2-49}{x-7} \quad si \quad 7 < x < +\infty \end{matrix}$$

11. El valor del $\lim_{x\to -5^-} f\ x$ es
    a. 26
    b. -26
    c. 24
    d. 4

12. El valor del $\lim_{x\to -5^+} f\ x$ es
    a. -24
    b. 24
    c. -6
    d. 4

13. El valor de f en $x = 2$ es
    a. 217
    b. 4
    c. Es indefinido
    d. Por la derecha es 217 y por izquierda 9.

14. El valor del $\lim_{x\to 2} f\ x$ es
    a. 4
    b. 217
    c. 9
    d. No existe

15. Acerca del $\lim_{x\to 7} f\ x$ se puede afirmar que
    a. $\lim_{x\to 7^-} f(x) = \lim_{x\to 7^+} f(x)$ pero $\lim_{x\to 7} f\ x$ no existe
    b. $\lim_{x\to 7^-} f(x) \neq \lim_{x\to 7^+} f(x)$ por lo tanto $\lim_{x\to 7} f\ x$ no existe
    c. $\lim_{x\to 7^-} f(x) = \lim_{x\to 7^+} f(x)$ por lo tanto $\lim_{x\to 7} f\ x$ existe
    d. $\lim_{x\to 7^-} f\ x \neq \lim_{x\to 7^+} f(x)$ pero $\lim_{x\to 7} f\ x$ existe

Preguntas 16-20 límites al infinito

16. Sean $f\ x\ = \frac{1}{x-2}$ y $M = 10^2$. El épsilon correspondiente a M para que se cumpla la definición de limite infinito en el punto $x = 2$ es
    a. 2
    b. 2×10^2
    c. 10^2
    d. 10^{-2}
17. Para la función f. $\lim_{x\to 2^-} f\ x\ \ y\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$ son respectivamente
    a. $+\infty\ \ y\ \ +\infty$
    b. $-\infty\ \ y\ \ +\infty$
    c. $+\infty\ \ y\ \ -\infty$
    d. $-\infty\ \ y\ \ -\infty$

18. De acuerdo con la función f, se puede decir que $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$
    a. Es finito
    b. No existe
    c. Es infinito
    d. No se puede determinar

19. Dada la función $h\ x\ = \frac{x-1}{(x-2)^2}$. Una de las afirmaciones es verdadera.
    a. $\lim_{x\to 2} h\ x$ no existe
    b. $\lim_{x\to 2} h\ x\ = 0$
    c. $\lim_{x\to\ \frac{}{2}} h\ x\ = +\infty$
    d. $\lim_{x\to 2} h\ x\ = +\infty$

20. Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$. Entonces se puede afirmar que el $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$
    a. No existe
    b. Es cero
    c. Es uno
    d. Ninguna de las anteriores.

Preguntas 20-25 límites en el infinito

21. Observa el siguiente procedimiento

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty}\ \ indeterminado. \qquad paso\ 1$$

Luego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-4x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \qquad paso\ 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \qquad paso\ 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 4 + 0}{1 + 0} = +\infty \qquad paso\ 4$$

Con respecto al procedimiento, se puede decir que

a. Es correcto
b. Presenta un error desde el paso 1
c. Presenta un error desde el paso 2
d. Presenta un error en el paso 4

22. El valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+7}$ es

a. 0
b. $+\infty$
c. 2
d. 3

23. El valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x+3}{3x^2-5x+1}$ es

a. 0
b. $+\infty$

5/3

c. 5

24. Sea $f\ x\ = \frac{8x-3x^3+1}{9x^2-2x+4}$. Una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

a. f tiene una asíntota vertical en $y = 8/9$
b. f tiene una asíntota horizontal en $y = 8/9$
c. f tiene una asíntota horizontal en $y = -1/3$
d. f tiene una asíntota vertical en $y = -1/3$

25. Demuestre mediante el paso al límite que si

$f\ x\ = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ y $g\ x\ = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + b_0$

son funciones polinómicas de grado n y m respectivamente, entonces

a. Si $n >$ m, la función $h\ x\ = \frac{f\ x}{g\ x}$ no tiene asíntotas horizontales
b. Si $n =$ m, la función $h\ x\ = \frac{f\ x}{g\ x}$ tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{a_n}{b_m}$
c. Si $n <$m, la función $h\ x\ = \frac{f\ x}{g\ x}$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$