UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Uso de los recursos y materiales como propuesta didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones adición y sustracción de fracciones en cuarto grado

José Manuel Padilla Meriño

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá D.C., Colombia
2018

Uso de los recursos y materiales como propuesta didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones adición y sustracción de fracciones en cuarto grado

José Manuel Padilla Meriño

Trabajo Final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Ph.D. Ibeth Marcela Rubio Perilla

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá D.C., Colombia
2018

Dedicatoria

A DIOS el timonel de mi vida y a quien debo todo, a mi madre Martha Isabel que ya partió de este mundo, a mi padre José Isabel, a mi esposa Lineth Adriana, a mis hijos Gineth Gissel y Pablo José, quienes son la fuente de mi felicidad…

José Manuel Padilla Meriño

"Un hombre es como una fracción cuyo numerador corresponde a lo que él es, en tanto que el denominador es lo que cree ser".

León Tolstói

Agradecimientos

Hoy quiero agradecer a todos aquellos que de una u otra manera contribuyeron a que pudiera culminar esta etapa tan importante para mi vida, por lo que les doy las gracias a:

Dios, por ser él quien permite que te sucedan cosas maravillosas.

Mis padres que fueron mi fuente de vida y apoyo en todas las cosas buenas que emprendo.

Mi esposa Lineth Adriana Calderón Corzo y a mis hijos Gineth Gissel Padilla Calderón y Pablo José Padilla Calderón por apoyarme y soportar con paciencia mi entrega a la consecución de esta meta.

Mi directora Ibeth Marcela Rubio Perilla, por todas sus recomendaciones que me permitieron ser cada vez mejor.

Docentes y estudiantes de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre de la ciudad de Valledupar, por ser ellos quienes llevaron a cabo esta iniciativa.

Resumen

En los últimos informes arrojados por el ICFES sobre los resultados de las pruebas SABER 3° y 5° se evidenciaron diferentes deficiencias por parte de los estudiantes de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre de la ciudad de Valledupar (Cesar) con el manejo de situaciones que involucran las operaciones entre fracciones. Además, en las observaciones de clases a docentes se identificaron algunas fallas en la metodología y desarrollo de actividades en la misma temática.
Basándose en estas problemáticas se opta por el diseño de una unidad didáctica, dirigida a docentes de básica primaria y estudiantes del grado cuarto, que les permita dar significado a las operaciones adición y sustracción de fracciones, con el apoyo de recursos y materiales diversos.

Para el diseño de esta, se revisaron diferentes documentos relacionados con la problemática en mención, se hizo un análisis histórico-epistemológico, disciplinar y didáctico del concepto de fracción y sus operaciones (adición y sustracción).
Por otra parte, la propuesta se fundamenta en los estándares de matemáticas para el grado 4°, los derechos básicos de aprendizaje, las mallas de aprendizaje y la matriz de referencia (Componentes – competencias – aprendizaje y evidencias) dada por el ICFES para la resolución de problemas.

La unidad didáctica diseñada fue implementada con 33 estudiantes y el apoyo de 10 docentes de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre y se validó mediante la comparación entre los resultados de la prueba diagnóstica y la prueba final (las dos pruebas fueron iguales), mediante el uso de la ganancia de Hake, la cual evidenció excelentes resultados tanto en los estudiantes, como en los docentes.

Palabras clave: Fracción, operaciones con fracciones, adición, sustracción.

Abstract

In the latest reports published by the ICFES about SABER 3 and 5 tests, we found different deficiencies in the students of the Casimiro Raul Maestre Educational Institution in the city of Valledupar (Cesar), particularly in the handling of situations that involve operations between fractions. Also, by observing the teachers during their classes, some difficulties in the methodology and development of activities in the same topic were identified.

Based on these problems, we chose the design of a didactic unit wended to elementary school teachers and fourth degree students, which allows them to give meaning to the addition and subtraction of fractions, with the support of several materials and resources.

For the design of this unit, previous writings of different authors that describe this problem have been reviewed, and an historical-epistemological, disciplinary and didactic analysis about the fraction concept and its operations was conducted. On the other hand, the design of the didactic unit was based on the mathematics standards for the fourth degree, the existent curriculum and the reference matrix (Components-competences-learning and evidences) given by the ICFES for the solving of problems.

The designed didactic unit was implemented on 33 students with the support of 10 teachers of the Casimiro Raul Maestre Educational Institution. It was validated through the use of Hake's normalized gain, comparing the results between the diagnostic test and the final test (both tests were the same) and it showed excellent results in both the students and the teachers.

Key Words: Fraction, Operations with fractions, Addition, Subtraction.

Contenido

Pág.

Dedicatoria ..... **V**

Agradecimientos ..... **VII**

Resumen ..... **IX**

Abstract ..... **X**

Introducción **17**

1. **Planteamiento del problema** **19**

1.1. Objetivo General 21

1.2. Objetivos Específicos 21

2. **Marco teórico** **23**

2.1. Fundamento histórico y epistemológico 23

2.1.1. El concepto de fracción desde las diferentes civilizaciones 24

2.1.1.1. Las fracciones para los babilónicos 24

2.1.1.2. Las fracciones para los antiguos egipcios 27

2.1.1.3. Las fracciones para los antiguos griegos 31

2.1.1.4. Las fracciones para los hindúes 33

2.1.1.5. Las fracciones para los árabes 34

2.1.2. Significado de la fracción 35

2.1.3. Adición y sustracción de fracciones 37

2.2. Fundamento disciplinar 39

2.2.1. El concepto de fracción 39

2.2.2. Criterios de divisibilidad (2, 3, 5, 7 y 11) 45

2.2.3. Amplificación de fracciones 47
2.2.4. Simplificación de fracciones 48
2.2.5. Mínimo común múltiplo (m.c.m.) 49
2.2.6. Adición y sustracción de fracciones 50
2.2.7. Fundamentación teórica. 53
2.3. Fundamento didáctico 57
2.3.1. Los referentes de calidad y su injerencia en las fracciones 57
2.3.2. Los estándares básicos de competencias en matemáticas 59
2.3.3. Los principales problemas en la enseñanza de las fracciones 60
2.3.4. La unidad didáctica 61
2.3.5. Ganancia de Hake 62
2.3.6. Índice de dificultad 63

***3.* Marco metodológico 65**
3.1. Metodología general 65
3.2. Estructura de la unidad didáctica 67

4. Implementación y análisis de resultados de la unidad didáctica 69
4.1. Caracterización de la población 69
4.2. Prueba diagnóstica 69
4.3. La unidad didáctica: “El mundo mágico de las fracciones” 72
4.3.1. Primera sesión. Concepto de fracción y representación gráfica. (Ver anexo C) 72
4.3.2. Segunda sesión. Fracciones propias, impropias y fracciones equivalentes. (Ver anexo D) 74
4.3.3. Tercera sesión. Amplificación y simplificación de fracciones. (Ver anexo E) 75
4.3.4. Cuarta sesión. Operaciones entre fracciones. (Adición y sustracción) (Ver anexo F) 77
4.4. Evaluación final 78

5. Conclusiones y recomendaciones 87
5.1. Conclusiones 87
5.2. Recomendaciones 89

Bibliografía **91**

Anexos **94**

A. Prueba diagnóstica aplicada a docentes **95**

B. Prueba diagnóstica aplicada a estudiantes..... **99**

C. Guía concepto de fracción y representación gráfica. (Primera sesión) **103**

D. Guía fracciones propias, impropias y fracciones equivalentes. (Segunda sesión) . **111**

E. Guía amplificación y simplificación de fracciones. (Tercera sesión)..... **123**

F. Guía operaciones entre fracciones. Adición y sustracción. (Cuarta sesión)..... **131**

Lista de figuras

Pág.

Figura 1-1. Números babilónicos (cuneiforme). **24**
Figura 1-2. Tablillas usadas por los Babilónicos. **25**
Figura 1-3. Símbolos de los números egipcios (jeroglíficos). **27**
Figura 1-4. Símbolos de los números egipcios (hieráticos). **28**
Figura 1-5. Tabla de problemas escritos en el papiro de Rhind. **28**
Figura 1-6. Fracciones Egipcias con numerador 1. ..... **29**
Figura 1-7. Tabla de fracciones de la forma $\mathbf{2/n}$ $(\boldsymbol{n} = \mathbf{3, 5, 7, \ldots, 101})$ escritos en el papiro de Rhind. **30**
Figura 1-8. Tabla n/10 ..... **31**
Figura 1-9. Tabla de los números jónicos usados por los griegos. **31**
Figura 1-10. Números Brahmi. **33**
Figura 1-11. Evolución de los símbolos numerales occidentales. **33**
Figura 1-12. Fracciones propias de tipo continuo. **40**
Figura 1-13. Unidad fraccionada. **40**
Figura 1-14. Representación de la fracción faltante en el rectángulo. **41**
Figura 1-15. Representación gráfica y numérica de una fracción propia en contexto continuo. **42**
Figura 1-16. Representación gráfica y numérica de una fracción impropia en contexto continuo. **42**
Figura 1-17. Número mixto. **42**
Figura 1-18. Representación gráfica de una fracción impropia. **43**
Figura 1-19. Expresión de un número mixto en fracción impropia y viceversa. **43**
Figura 1-20. Fracciones en contextos discretos. **44**

Figura 1-21. Representación gráfica de fracciones de tipo discreto. **44**
Figura 1-22. Fracciones equivalentes. **45**
Figura 1-23. Amplificación de fracciones. **47**
Figura 1-24. Amplificación de fracciones de forma gráfica y numérica..... **48**
Figura 1-25. Simplificación de fracciones..... **48**
Figura 1-26. Descomposición en factores primos. **49**
Figura 1-27. Obtención del mínimo común múltiplo de varios números. **50**
Figura 1-28. Suma de fracciones con igual denominador. **51**
Figura 1-29. Resta de fracciones con igual denominador. **51**
Figura 1-30. Suma de fracciones heterogéneas. **52**
Figura 1-31. Resta de fracciones heterogéneas. **52**
Figura 1-32. Fracciones equivalentes. **58**
Figura 1-33. Sustracción de fracciones homogéneas. **58**
Figura 1-34. Adición de fracciones..... **58**
Figura 1-35. Resultados evaluación diagnóstica estudiantes, por pregunta. **70**
Figura 1-36. Prueba diagnóstica estudiantes y docentes. **70**
Figura 1-37. Resultados evaluación diagnóstica docentes, por pregunta..... **71**
Figura 1-38. Resultados evaluación primera sesión estudiantes..... **73**
Figura 1-39. Primera sesión estudiantes..... **73**
Figura 1-40. Primera sesión docentes. **73**
Figura 1-41. Resultados evaluación segunda sesión estudiantes. **74**
Figura 1-42. Segunda sesión. **75**
Figura 1-43. Resultados evaluación tercera sesión estudiantes. **76**
Figura 1-44. Resultados evaluación cuarta sesión estudiantes. **77**
Figura 1-45. Resultados evaluación final estudiantes. **78**
Figura 1-46. Resultados evaluación final docentes. **79**
Figura 1-47. Comparativo porcentaje de respuestas correctas entre la prueba diagnóstica y la evaluación final aplicada a estudiantes. **79**
Figura 1-48. Comparativo porcentaje de respuestas correctas entre la prueba diagnóstica y la evaluación final aplicada a docentes. **80**
Figura 1-49. Evaluación final. **81**

Lista de tablas

Pág.

Tabla 2-1. Estándares básicos en competencias Matemáticas para los grupos de grados 4º y 5º **59**

Tabla 2-2. Categorías de la ganancia de Hake. **63**

Tabla 2-3. Rango índice de dificultad. **63**

Tabla 3-1. Metodología para cumplir objetivos. **65**

Tabla 3-2. Actividades de la unidad didáctica. **67**

Tabla 4-1. Resultados prueba diagnóstica por estudiante. **70**

Tabla 4-2. Resultados prueba diagnóstica por docente. **71**

Tabla 4-3. Resultados prueba final por estudiante. **78**

Tabla 4-4. Resultados evaluación final por docentes. **79**

Tabla 4-5. Resultado prueba diagnóstica estudiantes. **80**

Tabla 4-6. Resultados evaluación final estudiantes. **80**

Tabla 4-7. Resultado prueba diagnóstica docentes. **81**

Tabla 4-8. Resultados evaluación final docentes. **81**

Tabla 4-9. Ganancia de Hake estudiantes. **82**

Tabla 4-10. Ganancia de Hake docentes. **83**

Tabla 4-11. Índice de dificultad estudiantes **84**

Tabla 4-12. Índice de dificultad docentes. **85**

Introducción

Según Pilar Vivó, citado por Gisbert y Blanes (2013) *"una unidad didáctica es un conjunto coherente de trabajo que comparte unos principios comunes",* el cual es importante en la programación curricular.

Mientras que Fernández- Espada (2012), "*La unidad didáctica como módulo básico de trabajo para procesos completos de enseñanza/aprendizaje [...] las unidades constituyen, pues, el instrumento fundamental de diseño y desarrollo de la enseñanza, concretándose en ellas todas las decisiones y opciones adoptadas en la planificación educativa. Son además el reflejo de un amplio conjunto de ideas y referencias didácticas anteriores que, combinadas coherentemente entre sí, compondrán una guía flexible para la práctica, con un extenso margen de maniobra y diversidad de uso".*

La elaboración de este trabajo tiene como principal objetivo el diseño de una unidad didáctica dirigida a docentes y estudiantes de grado cuarto (4º) de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre de Valledupar (Cesar), que les permita dar significado a las operaciones de adición y sustracción de fracciones, con el apoyo de recursos y materiales diversos.

Se desarrolla la unidad didáctica y se diseña una guía de implementación para que cualquier docente que desee aplicarla, lo pueda hacer sin ningún inconveniente.

El presente trabajo final se estructura en cinco capítulos, de la siguiente manera:

Se inicia con una introducción del tema a desarrollar, que contiene entre otras cosas, la importancia del desarrollo de las unidades didácticas.

En el capítulo I se presenta el planteamiento del problema que dio inicio a esta investigación, seguido de los objetivos, general y específicos.

En el capítulo II se establece el marco teórico desde el punto de vista histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico.

En el capítulo III se presenta el marco metodológico de la propuesta, donde se indican las actividades que fueron desarrolladas para lograr los objetivos propuestos y la estructura de la unidad didáctica diseñada.

El capítulo IV contiene la implementación y el análisis de los resultados de la propuesta, contiene la guía de cada una de las sesiones de la unidad didáctica, además de la validación mediante la ganancia de Hake, obtenida al comparar los resultados de la prueba diagnóstica, la evaluación final y el índice de dificultad.

En el capítulo V se presentan las conclusiones y recomendaciones que surgieron luego del análisis de los resultados obtenidos con la implementación de la propuesta.

1. Planteamiento del problema

El Establecimiento Educativo Casimiro Raúl Maestre está ubicado en el municipio de Valledupar, departamento del Cesar. La población estudiantil proviene de los barrios aledaños a esta y pertenece a los estratos socioeconómicos uno o dos. El Establecimiento tiene dos sedes, una funciona en la sede principal, en la jornada de la tarde y la otra en la anexa Daniel Tapias Pico en jornadas de mañana y tarde.

En la sede Daniel Tapias Pico, un número grande de estudiantes vive con su abuela materna o paterna, quien en la mayoría de los casos no tienen ningún grado de escolaridad, y esto hace que el acompañamiento a los estudiantes en casa sea nulo. En los grados cuarto (4º) del Establecimiento Educativa Casimiro Raúl Maestre hay 307 estudiantes matriculados (SIMAT, 2017). Los grados cuarto están conformados solo por estudiantes que cursan ese grado, cada grupo está formado por 43 estudiantes aproximadamente, el texto de matemáticas que siguen los estudiantes y docentes es el Proyecto Sé, el cual es distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación Nacional, en el Programa Todos a Aprender (PTA 2.0). En cuanto a la accesibilidad a herramientas tecnológicas, en cada una de sus sedes la institución tiene sala de audiovisuales y cómputo, donde los estudiantes desarrollan actividades de diversas áreas, incluyendo matemáticas; el acceso a la Internet es irregular, ya que falta compromiso con esta dependencia.

Una de las grandes dificultades de los estudiantes de básica primaria en el estudio de las matemáticas es el manejo de las fracciones. Este es un problema que cada día se agudiza en las instituciones del país y el establecimiento Educativo Casimiro Raúl Maestre de Valledupar (Cesar) no es la excepción, se presentan una serie de dificultades en el aprendizaje y la enseñanza en los estudiantes de los grados cuarto (4º) en el manejo de la

lectura, equivalencia, representación gráfica y operaciones básicas (adición y sustracción) de las fracciones.

La problemática antes descrita se ha confirmado a través de las observaciones en el aula (una de mis funciones como docente tutor del Programa Todos a Aprender (PTA)) que realizo en el establecimiento y del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en preguntas relacionadas con la fracción y sus operaciones, en diferentes pruebas, entre ellas las diagnósticas (MEN 2014), las saber 3º en el año 2016 (ICFES, 2016) y las internas, tipo saber y tradicionales. De la situación anterior me inquieta el aprendizaje de los estudiantes, pero más que eso me preocupa la manera como se les está enseñando la fracción y las operaciones de adición y sustracción a estos. En las observaciones que realizo, principalmente de las clases de matemáticas y el seguimiento a las planeaciones de clases y actividades que se ejecutan en el aula, se evidencia que existen muchas fallas e ideas erróneas que se les están enseñando a los estudiantes en relación al significado de la fracción y sus operaciones, principalmente en la adición y sustracción.

De la situación anterior surge la siguiente pregunta:

¿Qué características debe tener una estrategia didáctica que permita a los docentes lograr que los estudiantes de grado cuarto, puedan dar significado a las operaciones de adición y sustracción de fracciones?

Dado que en las observaciones de clases se evidencia la ausencia de recursos y materiales didácticos usados por docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, esto podría ser una de las causas por la que los estudiantes avanzan poco en sus aprendizajes; por ello se plantea una propuesta didáctica donde se utilicen estos como herramientas facilitadoras.

Se plantea como una alternativa para aportar en la solución de dicha problemática, el uso de materiales didácticos (lúdicos o no) como ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estos temas. Los docentes pueden utilizar juegos existentes y ajustarlos a la temática en desarrollo, dándoles la finalidad y propósito que interese, para que los estudiantes hagan uso de estos.

Se construirá una unidad didáctica apoyada en el uso de recursos y diversos materiales de intervención en el aula, que brinde a los docentes herramientas para que los estudiantes puedan dar significado a las operaciones de adición y sustracción de fracciones.

En la unidad se desarrollarán temas relacionados con las operaciones de adición y sustracción de fracciones y para evaluar la efectividad de la estrategia pedagógica se realizará una comparación de los resultados de la prueba diagnóstica con los resultados de la evaluación final; como las pruebas son iguales, se hará uso de la ganancia de Hake.

1.1. Objetivo General

Elaborar una unidad didáctica para docentes y estudiantes de grado cuarto (4º) del Establecimiento Educativo Casimiro Raúl Maestre de Valledupar que les permita dar significado a las operaciones de adición y sustracción de fracciones, con el apoyo de recursos y materiales diversos.

1.2. Objetivos Específicos

- ✓ Determinar conceptos previos de los estudiantes y docentes con respecto a la adición y sustracción de fracciones.
- ✓ Seleccionar componentes teóricos, epistemológicos, curriculares y didácticos que fundamentan la unidad didáctica.
- ✓ Adaptar juegos y materiales didácticos que servirán de soporte al desarrollo de la unidad.
- ✓ Estructurar las actividades que conformarán la unidad didáctica.
- ✓ Evaluar la unidad didáctica con docentes y estudiantes de grado cuarto.

2. Marco teórico

2.1. Fundamento histórico y epistemológico

El gozar en la actualidad de un sistema numérico de base 10, con todas las comodidades y precisiones en el conteo, no fue una tarea fácil para la humanidad; para poder llegar a este mundo de confort hubo que pasar por una serie de intentos y diversos sistemas numéricos, desde el punto de vista de diferentes civilizaciones.

Desde el inicio de nuestras vidas, el hombre ha tenido la necesidad de contar para tener control de sus pertenencias y delimitar su territorio, es por ello que en ese afán de contabilizar nacen los diferentes sistemas y conjuntos de números.

Uno de los primeros conjuntos de números creados por el hombre fueron los naturales, llevando ese nombre por el conteo de elementos de la naturaleza, eran utilizados para contar sus pertenencias como alimentos, ganados, herramientas de trabajo, abrigos, delimitación de tierras, etc. y para la realizar trueques o intercambios de productos con otros miembros de su comunidad o de otras comunidades.

Después se dieron cuenta que no había solamente números naturales, sino que se podían tomar partes de un elemento, media naranja, un becerro y medio, un cuarto de una liebre, así fueron surgiendo los números fraccionarios, que en un principio los llamaron “rotos” posteriormente “quebrados” hasta llegar a las fracciones y finalizar con los números racionales positivos, esto se debe al hecho de dividir unidades en partes iguales.

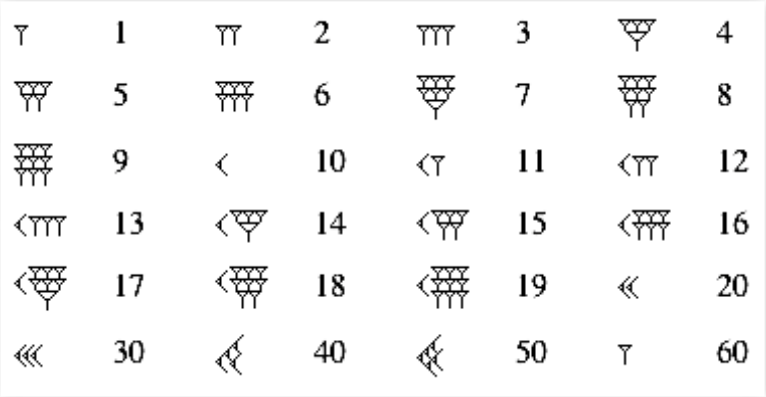
A continuación, se hace un recorrido histórico por diversas civilizaciones que fueron fundamentales en la construcción de los diferentes sistemas numéricos existentes, y se señalan algunas de las dificultades que vivieron para poder perfeccionarlos.

2.1.1. El concepto de fracción desde las diferentes civilizaciones

2.1.1.1. Las fracciones para los babilónicos

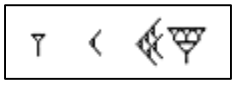
Los escritos más antiguos de esta cultura fueron realizados en tablillas de arcilla. Los babilónicos en la antigüedad contaban con un sistema sexagesimal de numeración cuneiforme, tal como se muestra en la siguiente ilustración:

Figura 1- 1. Números babilónicos (cuneiforme)**.**



Fuente: Tomado de: https://francis.naukas.com/2017/09/07/el-significado-matematico-de-la-tablilla-babilonica-plimpton-322/

Al detallar la tabla se evidencia que los babilonios usaban solo dos símbolos $\left(\text{𒁹} \; y \; \text{𒌋} \right)$ con valoración 1 y 10 respectivamente , dichos símbolos lo sobreponían según la cantidad, esta civilización fue la primera en utilizar un sistema posicional de base sexagesimal, por ejemplo el número 4.254 lo escribían simbólicamente de la siguiente manera:



El número 4.254 en el sistema sexagesimal es:

$$1{,}10{,}54 = 1 \times 60^2 + 10 \times 60 + 54 = 3600 + 600 + 54 = 4.254$$

“No obstante, debe señalarse que los babilonios no usaban solamente la base 60. En ocasiones, aparecía la base 10, pero otras bases también. Al igual que sucede con otras culturas y sistemas numéricos, con los babilonios se dio una forma combinada de sistemas numéricos determinados por circunstancias históricas o incluso regionales. En lo que sí

parece haber consenso es que se dio el uso bastante sistemático de la base 60 para todos los cálculos relacionados con la astronomía". (Ruiz, 1990)

Los babilonios poseían una forma particular de formar las fracciones, estas tenían como denominador una potencia de base 60 (fracciones sexagesimales). En las siguientes tablas se muestra dos columnas donde cada valor con su correspondiente cumplen una relación inversa o recíproca, además el producto entre ellos es equivalente a 1 en el sistema sexagesimal. (Adaptado de Martínez & Solano, 2006).

Figura 1-2. Tablillas usadas por los Babilónicos.

I	II
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7.30
9	6.40
10	6
12	5
15	4

Tabla 1

I	II
16	3.45
18	3.20
20	3
24	2.30
25	3.24
27	2.13.20
30	2
32	1.52.30
36	1.40
40	1.30

Tabla 2

I	II
45	1.20
48	1.15
50	1.12
54	1.60.40
1	1
1.4	56.15
1.12	50
1.15	48
1.20	45
1.21	44.26.40

Tabla 3

Fuente: Tomado de http://funes.uniandes.edu.co/884/1/20Conferencias.pdf

En las anteriores tablas se cumple lo siguiente:

Fila 7 de la tabla 1.

$$9 \rightarrow 6{,}40 \quad ; \quad 9 \times 6{,}40 = 9 \times (6 \times 60 + 40) = 9 \times (360 + 40) = 9 \times 400 = 3600 = 60^2 = 1$$

$$6{,}40 = \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{6{,}40}{60^2} = \frac{400}{3600} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Fila 8 de la tabla 2.

$32 \rightarrow 1{,}52{,}30$

$$32 \times 1{,}52{,}30 = 32 \times (1 \times 60^2 + 52 \times 60 + 30) = 32 \times (3600 + 3120 + 30) = 32 \times 6750$$
$$= 216000 = 60^3 = 1$$

$$1{,}52{,}30 = \frac{1}{32} \quad ; \quad \frac{1{,}52{,}30}{60^3} = \frac{6750}{216000} = \frac{675}{21600} = \frac{1}{32}$$

Fila 10 de la tabla 3.

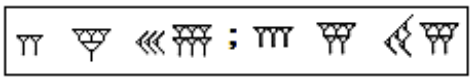
$1{,}21 \rightarrow 44{,}26{,}40$

$$1{,}21 \times 44{,}26{,}40 = (1 \times 60 + 21) \times (44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40)$$
$$= (60 + 21) \times (158400 + 1560 + 40) = 81 \times 160000 = 12960000 = 60^4$$
$$= 1$$

$$1{,}21 = \frac{1}{44{,}26{,}40} = \frac{1}{160000} \quad ; \quad \frac{1{,}21}{60^4} = \frac{81}{12960000} = \frac{1}{160000}$$

En la numeración de los antiguos babilonios no tenían definido símbolo para el cero, esto traía muchas veces inconvenientes en la lectura y escritura de algunos números, ellos en la posición del cero dejaban un espacio, dicho espacio era mayor que el de separación de las potencias de 60. Por ejemplo, el número 10.824 equivalente a 3,0,24 en el sistema sexagesimal, se representaba así:

Para el caso de las fracciones, los denominadores eran potencias de base 60 y su escritura con símbolos cuneiforme era la misma que la parte entera, solo que separaban por medio de punto y coma la parte entera de la parte de las fracciones o decimales; por ejemplo, el número 2,4,36;3,5,45 corresponde a $2 \times 60^2 + 4 \times 60 + 36 + \frac{3}{60} + \frac{5}{60^2} + \frac{45}{60^3}$ y en símbolos es:



2.1.1.2. Las fracciones para los antiguos egipcios

Los antiguos egipcios gozaban principalmente de dos sistemas para escribir los números naturales, uno jeroglífico y otro el hierático, este último lo consideraban sagrado y era utilizado por los escribas y sacerdotes. (Peral, 2002) describe a continuación el funcionamiento de estos sistemas:

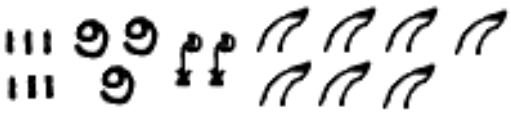
- ***"Sistema jeroglífico.*** *Sistema de base 10, no posicional, en el que el principio aditivo determina la disposición de los símbolos. La utilización de este principio permite expresar cualquier número; cada símbolo se repite el número de veces necesario".*

En la siguiente ilustración se muestra los símbolos de algunas potencias de base 10.

Figura 1- 3 Símbolos de los números egipcios (jeroglíficos).

Fuente: Tomado de: http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/2-egipto-3/

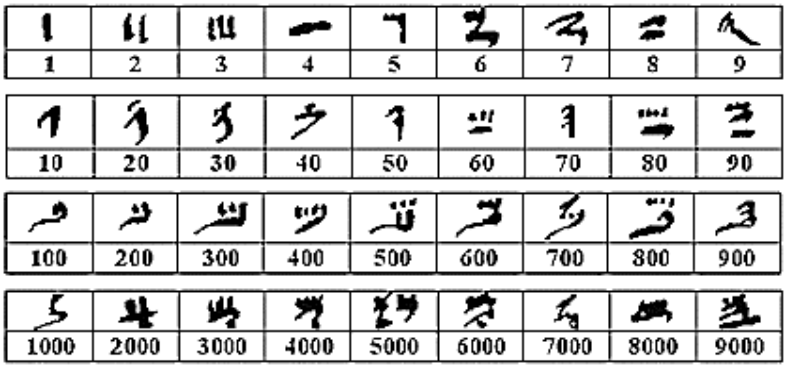
Los egipcios escribían y leían los números naturales de derecha a izquierda, por ejemplo, el número 72.306 simbólicamente lo escribían de la siguiente manera:



A medida que pasa el tiempo ellos perfeccionan y mejoran la organización de estos símbolos en su escritura.

- ***"Sistema hierático.*** *También es decimal, pero el principio de repetición del sistema jeroglífico se sustituye por la introducción de símbolos especiales, por lo que la notación hierática es más sencilla. Estos signos representan los números de 1 a 10, así como las potencias de 10. Los egipcios escriben de derecha a izquierda".*

Figura 1- 4 Símbolos de los números egipcios (hieráticos).



Fuente: Tomado de: http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf

En este sistema, el número 4325 simbólicamente lo escribían de la siguiente manera:

En lo referente a las fracciones, los egipcios las descubren al tratar de solucionar una serie de problemas, los cuales se encontraron en escritos, uno de estos es el papiro de Rhind. A continuación, se muestra un listado de estos problemas y otros diferentes al tema de fracciones, pero del contexto matemático.

Figura 1- 5 Tabla de problemas escritos en el papiro de Rhind.

Problemas	**Descripción**
1 - 6	Reparto de 1,2,6,7,8 y 9 barras entre 10 hombres
7 - 20	Multiplicación de fracciones
21 - 23	Sustracción
24 - 29	Búsqueda de números (28 y 29) y ecuaciones resueltas por "regula falsi" (24 a 27)
30 - 34	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante divisiones.
35 - 38	Ecuaciones lineales más complicadas resueltas mediante la regla de la falsa posición
39 - 40	Progresiones aritméticas
41 - 46	Volúmenes
47	Tabla de fracciones de 1 hekat en fracciones ojo de Horus
48 - 55	Áreas de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos
56 - 60	Pendientes, alturas y bases de pirámides
60 - 61B	Tabla de una regla para encontrar 2/3 de impares y fracciones unitarias
62	Peso de metales preciosos
63	Repartos proporcionales
64	Progresión aritmética
65	División proporcional de granos en grupos de hombres
69 - 78	Intercambios, proporción inversa, cálculos de "pesu"
79	Progresión geométrica
80 - 81	Tablas de fracciones ojo de Horus de grano en términos de hinu
82 - 84	Problemas, no claros, sobre cantidades de comida de gansos, pájaros y bueyes
85	Escritura enigmática. En el papiro aparece al revés.
86 - 87	Memorando de ciertas cuentas e incidentes, gran parte perdida.

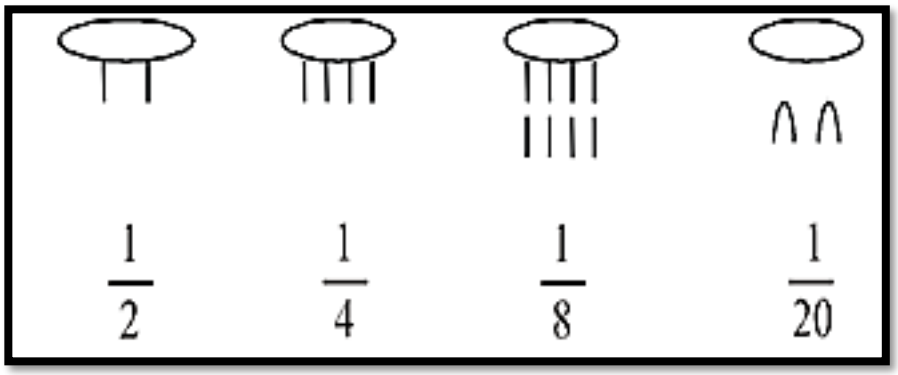
Fuente: Tomado de: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Inicialmente los egipcios construyen una serie de fracciones de la unidad, las cuales estaban formadas por un numerador unitario, los denominadores los constituían los números jeroglíficos naturales a partir del (||), los cuales formaban fracciones de la forma $\frac{1}{n}$, donde n pertenece a los números naturales iguales o mayores a 2.

Las fracciones, a diferencia de los números naturales, tenían en la parte superior el símbolo de la letra "r" ( ) y debajo las diferentes representaciones jeroglíficas de los números naturales. (Adaptado de Stewart, 2007)

Esto se muestran en la figura 1-6.

Figura 1-6. Fracciones Egipcias con numerador 1.



Fuente: Tomado de http://funes.uniandes.edu.co/884/1/20Conferencias.pdf

Los egipcios ampliaron el sistema de escritura de las fracciones, pasando a fracciones con numeradores diferentes de uno (forma $\frac{m}{n}$), para ello utilizaban un sistema aditivo de fracciones unitarias o "*alícuotas*"

Según (Ríbinicov, 1987) "*para facilitar estas operaciones se conformaron tablas especiales, por ejemplo, la tabla de los números de la forma* $\frac{2}{n}$ $(n = 3, 5, 7, \dots, 101)$. *Es interesante advertir que en esta tabla la selección de los sumandos no es unívoca. Las tablas, al parecer, se construyeron en el transcurso de un largo tiempo, perfeccionándose gradualmente y en la forma en que llegaron hasta nosotros representan simplemente un resumen de los resultados obtenidos. A propósito, la descomposición "trivial"* $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ *nunca se encuentra, probablemente por su evidencia o por la estabilidad de la tradición".*

A continuación se presenta la tabla para fracciones de la forma $\frac{2}{n}$ $(n = 3, 5, 7, \dots, 101)$ semejante a la que aparece en el papiro de Rhind.

Figura 1- 7. Tabla de fracciones de la forma $\mathbf{2/n}$ $(\boldsymbol{n} = \mathbf{3, 5, 7}, \dots, \mathbf{101})$ escritos en el papiro de Rhind.

Div.	Descomposición	Div.	Descomposición
3	2/3	53	1/30 + 1/318 + 1/795
5	1/3 + 1/15	55	1/30 + 1/330
7	1/3 + 1/15	57	1/38 + 1/114
9	1/6 + 1/18	59	1/36 + 1/236 + 1/531
11	1/6 + 1/66	61	1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
13	1/8 + 1/52 + 1/104	63	1/42 + 1/126
15	1/10 + 1/30	65	1/39 + 1/195
17	1/12 + 1/51 + 1/68	67	1/40 + 1/335 + 1/536
19	1/12 + 1/76 + 1/114	69	1/46 + 1/138
21	1/14 + 1/42	71	1/40 + 1/568 + 1/710
23	1/12 + 1/276	73	1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
25	1/15 + 1/75	75	1/50 + 1/150
27	1/18 + 1/54	77	1/44 + 1/308
29	1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	79	1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
31	1/20 + 1/124 + 1/155	81	1/54 + 1/162
33	1/22 + 1/66	83	1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498
35	1/30 + 1/42	85	1/51 + 1/255
37	1/24 + 1/111 + 1/296	87	1/58 + 1/174
39	1/26 + 1/78	89	1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890
41	1/24 + 1/246 + 1/328	91	1/70 + 1/130
43	1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301	93	1/62 + 1/186
45	1/30 + 1/90	95	1/60 + 1/380 + 1/570
47	1/30 + 1/141 + 1/470	97	1/56 + 1/679 + 1/776
49	1/28 + 1/196	99	1/66 + 1/198
51	1/34 + 1/102	101	1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606

Fuente: Tomado de: http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf

En la tabla se puede observar que los diferentes denominadores de 2 son impares, ya que si fuesen par, la fracción sería equivalente a una unitaria.

Según (Boyer, 1968) *"La tabla $\frac{2}{n}$ en el papiro de Ahmes es seguida por una corta tabla $\frac{n}{10}$ para n desde 1 hasta 9, las fracciones se expresan de nuevo en términos de las favoritas fracciones unitarias y la fracción $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, la fracción $\frac{9}{10}$ está formada por $\frac{1}{30}, \frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$".*

La tabla $\frac{n}{10}$ a la que hace referencia Boyer, nace de los problemas 1 a 6 escritos en el papiro de Ahmes, los cuales se planteaban a partir del reparto equitativo de diferentes cantidades (1, 2, 6, 7, 8 y 9) de barras de pan para diez hombres. A continuación, se muestra cómo estaba distribuida dicha tabla.

Figura 1- 8 Tabla n/10

1/ 10	1/10
2/10	1/5
3/10	1/5 + 1/10
4/10	1/3 + 1/15
5/10	1/2
6/10	1/2 + 1/10
7/10	2/3 + 1/30
8/10	2/3 + 1/10 + 1/30
9/10	2/3 + 1/5 + 1/30

Fuente: Tomado de: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

2.1.1.3. Las fracciones para los antiguos griegos

Los antiguos griegos utilizaban un sistema de numeración aproximado al de base 10 llamado "*jónico*", el cual consistía en asignarle un valor numérico a las letras de su alfabeto y colocaban un acento o tilde, sobre, o en la parte inferior de estas, para indicar que se trataba de un número. A continuación, se muestra la equivalencia de cada letra a su valor numérico.

Figura 1-9. Tabla de los números jónicos usados por los griegos.

α	alpha	1	ι	iota	10	ρ	rho	100
β	beta	2	κ	kappa	20	ς	sigma	200
γ	gamma	3	λ	lambda	30	τ	tau	300
δ	delta	4	μ	mu	40	υ	upsilon	400
ε	epsilon	5	ν	nu	50	φ	phi	500
ϛ	stigma	6	ξ	xi	60	χ	chi	600
ζ	zeta	7	ο	omicron	70	ψ	psi	700
η	eta	8	π	pi	80	ω	omega	800
ϑ	theta	9	ϙ	koppa	90	ϡ	sampi	900

Fuente: Tomado de https://sobrehistoria.com/los-numeros-griegos/

Por ejemplo, para escribir el número 342 lo simbolizaban de la siguiente manera:

$$\tau\mu\beta'$$

Pero está notación solo permitía escribir hasta el 999, después de esta cantidad cuando se trataba de unidades de mil, tomaban las mismas letras solo que la tilde o acento se lo colocaban en la parte inferior de las letras y de forma invertida, por ejemplo, el número 2000 lo escribían así:

$$\beta$$

Para los números compuestos mayores de mil lo organizaban de igual manera, pero colocándole en vez del acento una raya encima, por ejemplo 4389 lo escribían así:

$$\overline{\delta\tau\pi\theta}$$

A las fracciones los griegos las manejaban como razón, tomando las mismas notaciones de los números enteros y establecían relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo o características.

Estas comparaciones hacen una proximidad a las fracciones, las notaciones no eran uniformes, algunos tomaban el numerador como el primer número y el denominador lo duplicaban para poder diferenciarlos, algunos escribían el numerador seguido de la palabra en parte y luego expresaban el denominador y otros escribían el numerador en letras y el denominador en números. Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ lo escribían de las siguientes maneras:

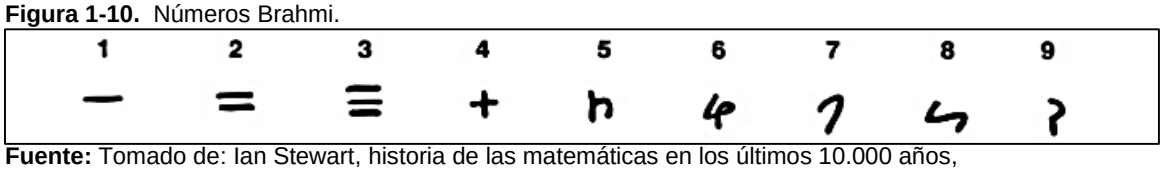
$$\gamma'\ \varphi'\varphi' = \frac{3}{5} \quad ; \quad \gamma\ \varphi' = \frac{3}{5} \quad ; \quad \gamma'\ \text{εν μέρει}\ \varphi' = \frac{3}{5}$$

"*Aunque el hombre siempre se planteó con qué criterio la música admite unos sonidos y rechaza otros, nos remontaremos como mínimo a la Mesopotamia del siglo VI a.C. Allí, muchos fenómenos cósmicos eran representados por la comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro proporciones que regían tanto el Universo, como la música o el destino de los hombres:* $1/1, 1/2, 2/3\ y\ 3/4$. *Estas relaciones, llamadas actualmente unísono, octava, quinta y cuarta, respectivamente, proporcionaban los sonidos consonantes y daban lugar a la escala caldea que, probablemente, contenía 7 notas. Estas proporciones, vistas como la correlación entre ciertos intervalos musicales y los primeros números naturales, hacen de Pitágoras el descubridor del método para obtener la escala musical".* (Carrión, 2008, pág. 3)

2.1.1.4. Las fracciones para los hindúes

Esta civilización tuvo muchos sistemas numéricos, entre estos el Brahmi, el cual estaba constituido por 9 símbolos y no era un sistema posicional, además utilizaban símbolos especiales para las potencias de base 10, lo que lo hacía similar al sistema griego.

Figura 1-10. Números Brahmi.



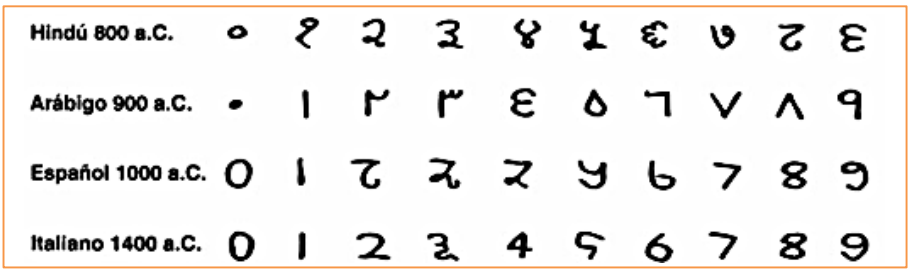
Fuente: Tomado de: Ian Stewart, historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años,

"Entre los siglos IV y VI el Imperio Gupta alcanzó el control de una gran parte de la India, y los numerales Brahmi se transformaron en los numerales Gupta. De éstos se transformaron en los numerales Nagari. La idea era la misma, pero los símbolos eran diferentes". (Stewart, 2007)

La falta del cero en estos sistemas numéricos traía dificultades y muchas ambigüedades cuando iniciaron los sistemas posicionales. Los babilonios fueron los primeros en tener presente este detalle, pero no lo expresaron con un símbolo sino que dejaban un espacio o faltante, esta consideración fue olvidada o no pasó a otras culturas.

Después de un lapso de tiempo considerable los hindúes empezaron a tener presente al cero. *"El manuscrito Bhakshali, cuya fecha es discutida, pero se encuentra en algún lugar entre 200 y 1100, utiliza un punto grueso •. El texto jaino Lokavibhaaga del 458 utiliza el concepto de 0, pero no un símbolo. Un sistema posicional que carecía del numeral «cero» fue introducido por Aryabhata alrededor del 500. Los matemáticos indios posteriores tenían nombres para cero, pero no utilizaban un símbolo. El primer uso indiscutido de cero en notación posicional aparece en una tablilla de piedra en Gwailior datada en el 876.".* (Stewart, 2007)

Figura 1-11. Evolución de los símbolos numerales occidentales.



Fuente: Tomado de: Ian Stewart, historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.

"Los hindúes establecieron reglas para efectuar operaciones con fracciones. Inicialmente Aryabhatese realizó trabajos en ese sentido y después, en el siglo VII, Bramagupta. Pero las reglas que en la actualidad se emplean al operar con fracciones están basadas en las obras de Mahavira del siglo IX y de Bháskar del siglo XII". (Martinez & Solano, 2006)

Esta civilización formaba las fracciones utilizando una notación donde ubicaba el numerador encima del denominador, pero sin el segmento de recta que se usa actualmente ($\frac{a}{b}$), además le dieron continuidad a la descomposición de unidades fraccionarias.

2.1.1.5. Las fracciones para los árabes

Esta civilización adoptó el sistema de numeración de los hindúes, manejaron un sistema de base diez que aún tiene vigencia y en la actualidad los números se denominan indoarábigos.

En lo referente a las fracciones "*Los árabes fueron los que introdujeron el uso de la línea vertical y horizontal para simbolizar las fracciones. Otro de sus aportes fue el trabajo inicial con las fracciones decimales, evidenciado en el manuscrito supérstite del Kitab al – Fusul fi Al – Hindo obra de Al – Uqlidisi. Al estudiar el libro, su traductor A.S. Saidan afirmó que la idea más notable de esta obra es la fracción decimal. Al Uqlidisi usa las fracciones decimales como tales, aprecia la importancia de un signo decimal y sugiere uno bueno"*. (Martinez & Solano, 2006)

Por otra parte, para los árabes la necesidad de contar los obligó a construir un sistema de numeración, el hecho de medir y comparar, los hizo ahondar en el mundo de las fracciones. Una fracción es un segmento o parte de la división equitativa de una o varias unidades con características iguales. La palabra árabe al-kasar significa romper o quebrar, lo cual da pie a que las fracciones inicialmente se les llamara quebrados. (Adaptado de Martínez & Solano, 2006)

2.1.2. Significado de la fracción

Si nos detenemos a mirar un poco sobre las situaciones donde se ve involucrada la fracción, serían muchas. Esto hace que la aplicabilidad de estas en la vida cotidiana sea muy notable y que se aplique en diversos contextos. De hecho, una serie de investigadores han tomado la fracción desde diferentes significados, en este caso se tomarán los descritos por Thomas Kieren citados por otros autores.

"*En cuanto a la didáctica de las fracciones, Thomas Kieren ha realizado diversos estudios acerca de la construcción de estos números. Este autor reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón), en los que subyace el conocimiento de la fracción. Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro, citados anteriormente*" (Perera & Valdemoros, 2009, pág. 33).

Dada la circunstancia, se toma cada constructo intuitivo para definirlo partiendo de la definición inicial del autor; a continuación se definen dichos constructos:

- ✓ **La fracción como medida: "***la fracción como medida es reconocida por Kieren como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad*" (Perera & Valdemoros, 2009, pág. 34).
- ✓ **La fracción como cociente:** si se toman dos números naturales y se representan como un cociente con denominador diferente de cero, a esa expresión se le conoce como una fracción; es decir si a y b son números naturales y $b \neq 0$ entonces al cociente $\frac{a}{b}$ se le conoce como una fracción.
- ✓ **La fracción como operador multiplicativo:** *"el papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones"* (Perera & Valdemoros, 2009, pág. 34).
- ✓ **La fracción como razón:** "l*a fracción como razón es considerada por Kieren como la comparación numérica entre dos magnitudes"* (Perera & Valdemoros, 2009, pág. 34).

"Una fracción puede ser considerada como una razón" y *"las razones desempeñan todas las propiedades de las fracciones, y todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en unas como en otras"* (Ramírez & Block, 2009, pág. 66).

Bajo esta interpretación, la fracción es una relación inversa entre un número que sirve como referencia o total y otro número que indica cuántos de ese total satisfacen una condición dada.

Es así como las fracciones se usan como un comparativo entre dos cantidades de una magnitud. A esto se le asocian las ideas de escala, proporcionalidad, porcentaje, probabilidad.

- ✓ **La fracción como parte todo: "***Los estudios de Kieren consideran la relación parte todo como un todo continuo o discreto subdividido en partes iguales, y destacan como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes"* (Acevedo, 2012).

El hecho que este autor tome dos componentes (continuo y discreto) para darle significado a la fracción como parte todo es muy razonable y puede dar claridad sobre lo que en realidad es la unidad como un todo. Un ejemplo de esto es: el número de estudiantes que conforman el grado 4º del grupo 01 es 32, los 32 estudiantes conforman el todo y cada grupo con igual número de individuos que se forme de ese salón se puede representar como una fracción o partición del mismo. Por ejemplo, 8 estudiantes del grado 4º del grupo 01, es equivalente a $\frac{1}{4}$ del total del grupo y para este caso se está tomando un todo discreto.

En el caso de tomar una cuerda que tiene una longitud de 125 cm y dividirla en 8 partes iguales, de las cuales se utilizan 2; las partes utilizadas corresponden a $\frac{1}{4}$ de la longitud de la cuerda, es decir, 31,25 cm y en esta situación el todo es continuo.

"*Llinares detalla algunas habilidades requeridas para tal significado: la noción piagetiana de inclusión de clases, identificar la unidad sobre la cual se trabaja, conservación de la cantidad y manejar la idea de área para representaciones continuas*" (Acevedo, 2012).

"Para Freudenthal las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales, o si se experimenta, imagina, piensa, como si lo fuera" (Acevedo, 2012).

Estos dos autores también coinciden con Kieren en cuanto a tomar el todo en dos tipos (discreto y continuo), solo que ellos profundizan más, considerando el todo como definido o indefinido y estructurado o carente de estructura.

2.1.3. Adición y sustracción de fracciones

"El proceso de resolución de la tarea de adición y sustracción de fracciones y números mixtos puede representarse como el resultado de la aplicación de una determinada serie de reglas condicionales, siendo cada una de ellas un componente de la habilidad total" (Jáuregui & Oliden, 2002)

Jáuregui, et al (2002) en un análisis hecho a la resolución de problemas, operaciones de fracciones e investigaciones cognitivas; propone una serie de reglas u operaciones, asumiéndose que cada una de ellas modelará una parte del conocimiento necesario para la resolución de los ítems.

A continuación, se enuncian cada una de esas reglas:

1. Si las dos fracciones $\frac{b}{c}, \frac{e}{f}$ a sumar o restar tienen denominadores diferentes y primos entre sí, entonces se multiplican los denominadores para obtener el denominador del resultado y se multiplica cada numerador por el denominador de la otra fracción esto es: $\frac{bf}{cf} \pm \frac{ce}{cf}$ **.**

   En cuanto a ésta regla se puede realizar la amplificación de cada fracción por el denominador de la otra fracción para que resulte una suma o resta de igual denominador y facilitar la operación, esto es: $\frac{b}{c} * \frac{f}{f}\ y\ \frac{e}{f} * \frac{c}{c}$ luego se resuelve $\frac{bf}{cf} \pm \frac{ce}{cf}$**.**

2. Si las dos fracciones $\frac{b}{c}, \frac{e}{f}$ a sumar o restar tienen los denominadores diferentes y uno de ellos (c) es múltiplo del otro (f) entonces "c" se establece como común denominador,

se divide c entre f y el resultado se multiplica por el numerador del segundo dejando invariable el numerador del primero.

3. Si las dos fracciones $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$, $\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}$ a sumar o restar tienen los denominadores diferentes no primos entre sí y con mínimo común múltiplo no coincidente con ninguno de ellos, entonces se establece el común denominador a partir del mínimo común múltiplo (m), se efectúa $\frac{(\boldsymbol{m}\div\boldsymbol{c})*\boldsymbol{b}\pm(\boldsymbol{m}\div\boldsymbol{f})*\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{m}}$.

4. Si uno de los componentes de la suma o resta es un número mixto $(a\frac{b}{c})$, entonces se convierte en fracción impropia, para sumar o restar las fracciones resultantes.

5. Si la fracción resultado de la suma o resta es simplificable entonces se reduce dividiendo numerador y denominador por el máximo común divisor (d); $\frac{r/_d}{r/_d}$.

6. Si la fracción resultado de la suma o resta es impropia, entonces se puede convertir en número mixto.

7. Si las dos fracciones $\frac{b}{c}$, $\frac{e}{f}$ a sumar o restar tienen el mismo denominador $(c = f)$ entonces se suman o restan los numeradores para obtener el numerador del resultado "y" el denominador del resultado es igual al denominador de cualquiera de los dos sumandos. $\frac{b\pm e}{c}$.

La tarea de los docentes consiste en hacer que los estudiantes den sentido a cada una de esas "reglas", además cada estrategia que utilice el maestro es parte de su ingenio y didáctica, el utilizar solo procedimientos basados en la representación simbólica no garantiza la aprehensión del tema, en algunos casos resulta más adecuado y práctico para el estudiante utilizar la representación gráfica. El manejo de dichas "reglas" se vuelve natural, cuando el estudiante ha comprendido el porqué de cada una de ellas.

2.2. Fundamento disciplinar

2.2.1. El concepto de fracción

"Uno de los aspectos importantes a tener en cuenta para entender las fracciones, es diferenciarlas del concepto de razón, es importante resaltar que el término "razón" no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes" (Godino & Batanero, 2002).

Hoffer (1998) explica claramente estas distinciones: <<*Manifestando que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida.*

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- ✓ *Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con* $2/3$. *Según esto la razón* 3 *jamones*$/145$ *euros no es una fracción.*
- ✓ *Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.*
- ✓ *Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón* 4 *a* 7 *se puede poner como* $4:7$, *o* $4 \rightarrow 7$.
- ✓ *En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser* $10:0$, *si es que todos son verdes y no se trata de hacer ninguna división por 0.*
- ✓ *Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número* π, *que se sabe no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado*

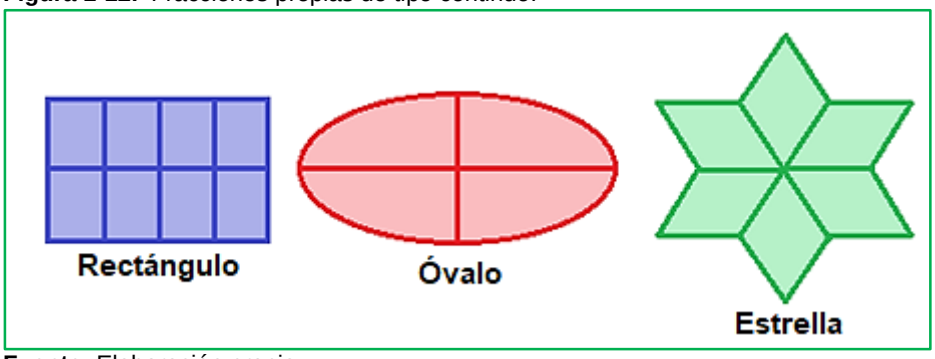
$(\sqrt{2})$. *Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que, las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.*

- ✓ *Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo,* 2 *aciertos sobre* 5 *intentos* $(2:5)$*, seguidos de* 3 *aciertos sobre* 7 *intentos* $(3:7)$ *se combinan para producir* 5 *aciertos en un total de* 12 *intentos, o sea, con estas razones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo.* $2:5 + 3:7 = 5:12$. *Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones>>.*

El concepto de la fracción se puede considerar desde dos componentes, uno de tipo continuo y otro discreto.

❖ **Fracciones de tipo continuo**

Figura 1-12. Fracciones propias de tipo continuo.



Fuente: Elaboración propia.

En la anterior figura se puede observar un rectángulo, un óvalo y una estrella, cada figura representa una unidad en diferentes figuras planas, que está dividida en partes equivalentes. Para el caso del rectángulo se encuentra dividido en 8 partes, cada parte corresponde a un pedazo o fragmento de este, pero no es la única división que puede hacerse, a continuación, se muestran otras formas.

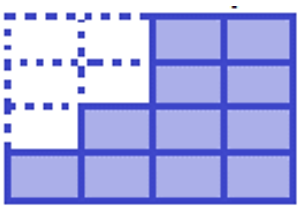
Figura 1-13. Unidad fraccionada.

Fuente: Elaboración propia.

De lo anterior, se define la fracción como la razón entre una o varias partes que se toman de la división de la unidad y la totalidad de partes en que se dividió la misma, esto es:

Fracción: $\dfrac{partes\ que\ se\ toman}{partes\ en\ que\ se\ divide\ la\ unidad}$

Figura 1-14. Representación de la fracción faltante en el rectángulo.



Fuente: Elaboración propia.

En la anterior ilustración se puede considerar que la parte sombreada es lo que se tiene del rectángulo. Se puede representar numéricamente la fracción de esa parte que se tiene o de la parte faltante, la representación numérica de la parte faltante es: $\frac{5}{16}$ y la de la parte que se tiene del rectángulo es: $\frac{11}{16}$.

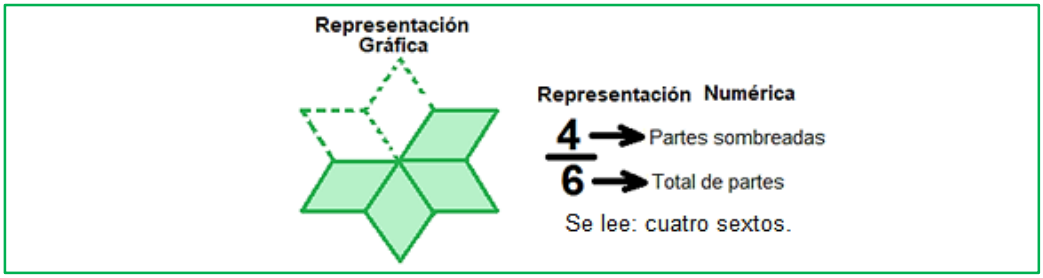
Cuando la unidad es el todo y se divide en partes equivalentes, se considera **la fracción en un contexto continuo,** tal como sucede con el rectángulo, el óvalo y la estrella. Los contextos de tipo continuo por lo general se presentan al hacer medidas de longitud, superficie, volumen, masa, etc. (Adaptado de: https://animateamas.files.wordpress.com/2015/10/fracciones.pdf, 2018).

En general, una fracción se representa en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros y $n \neq 0$. En este contexto, m representa el número de partes seleccionadas y n el número de partes en que se divide cada unidad.

Cuando el número de partes que se seleccionan es menor que el número de partes en que se divide la unidad, ***la fracción es propia,*** esto es, $m < n$. Son ejemplo de estas: $\frac{3}{5}$; $\frac{10}{17}$; $\frac{315}{431}$.

A continuación se representa de forma gráfica y numérica una fracción propia en un contexto continuo.

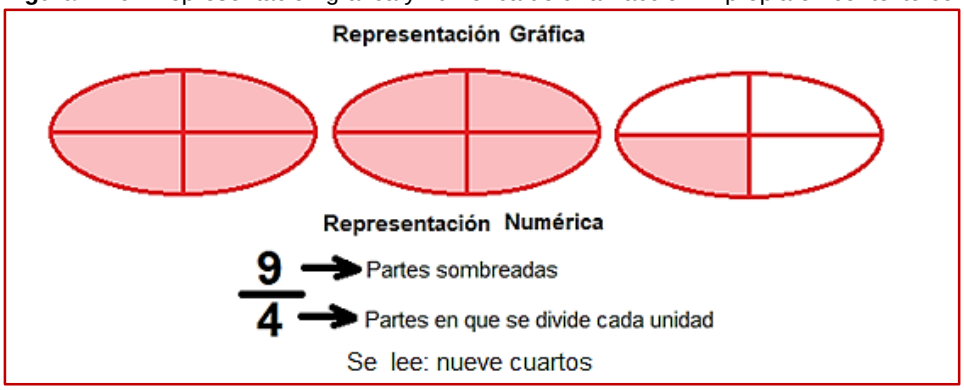
Figura 1-15. Representación gráfica y numérica de una fracción propia en contexto continuo.



Fuente: Elaboración propia.

Cuando el número de partes que se seleccionan es mayor o igual que el número de partes en que se divide cada unidad, ***la fracción es impropia,*** esto es $\frac{m}{n}$ donde $m \geq n$ y $n \neq 0$. Son ejemplos de estas: $\frac{13}{7}$; $\frac{20}{19}$; $\frac{615}{531}$.

Figura 1-16. Representación gráfica y numérica de una fracción impropia en contexto continuo.



Fuente: Elaboración propia.

Nótese que al representar gráficamente la fracción impropia $\frac{9}{4}$ se necesitan 2 unidades completas y $\frac{1}{4}$ de otra unidad. Las fracciones impropias también se pueden escribir en forma de número mixto, por ejemplo, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ donde el número mixto $2\frac{1}{4}$ indica que se toman las dos unidades completas y una cuarta parte de otra unidad adicional.

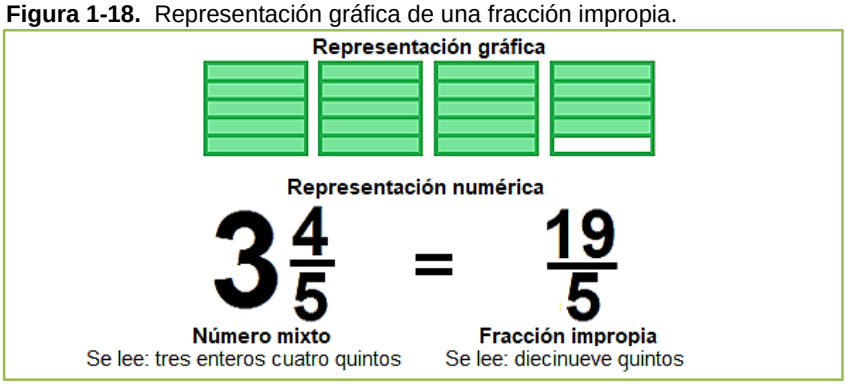
Figura 1-17. Número mixto.

Fuente: Elaboración propia.

Los números mixtos están constituidos por un número entero diferente de cero y una fracción propia, tal como se indica en la anterior ilustración. En general, un número mixto se representa en la forma $a\frac{m}{n}$, donde a, m y n son números enteros, $a \neq 0$ y $n \neq 0$. Son ejemplos: $10\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{7}$; $7\frac{15}{31}$.

En la siguiente figura se representa gráficamente un número mixto y su fracción impropia equivalente.

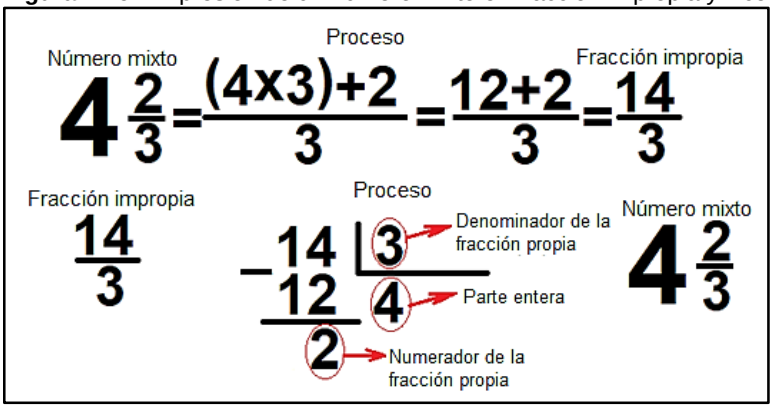
Figura 1-18. Representación gráfica de una fracción impropia.



Fuente: Elaboración propia.

Todo número mixto se puede expresar como una fracción impropia y viceversa. Para expresar un número mixto como fracción impropia, se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción y ese resultado se suma con el numerador de la misma, para formar el numerador de la fracción impropia y el denominador se mantiene igual. Para el caso de expresar una fracción impropia como número mixto, se realiza la división del numerador por el denominador y de esta se toma el cociente para la parte entera, el residuo para el numerador de la fracción propia y el divisor para el denominador de la misma. A continuación, se ilustra los dos procesos.

Figura 1-19. Expresión de un número mixto en fracción impropia y viceversa.



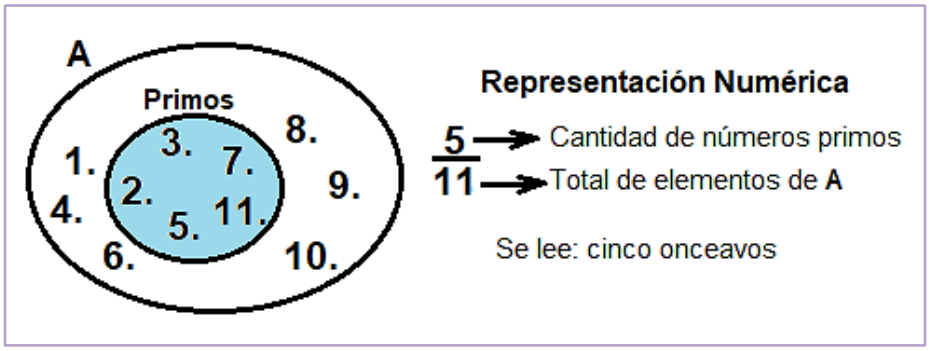
Fuente: Elaboración propia.

❖ Fracciones de tipo discreto

Cuando consideramos un conjunto o colección (finita) de diversos objetos y tomamos un subconjunto de él, podemos expresar con un fraccionario la cantidad de objetos del conjunto, que quedaron involucrados en el subconjunto.

Por ejemplo: si se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y se identifica un subconjunto de él formado por los números primos, se puede afirmar que $\frac{5}{11}$ cumplen con la condición de ser primos y se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

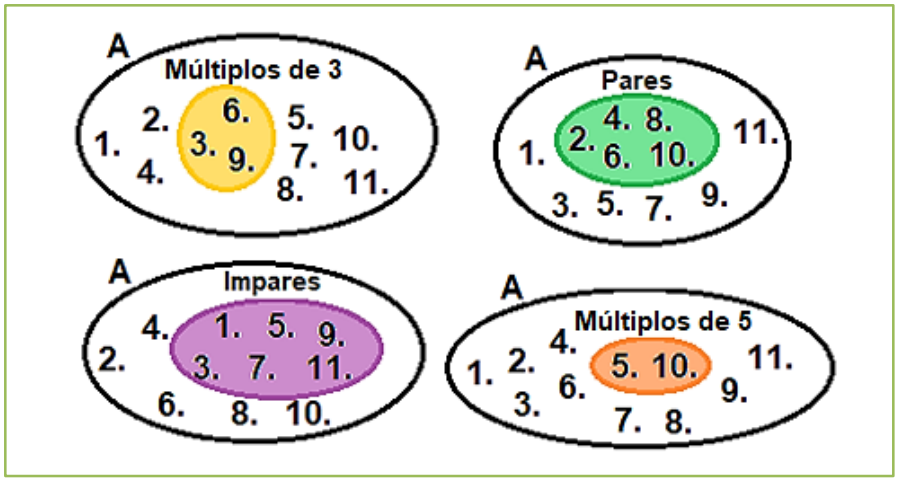
Figura 1-20. Fracciones en contextos discretos.



Fuente: Elaboración propia.

Otros ejemplos: si se consideran los números pares, o los números impares, o los múltiplos de tres, o los múltiplos de cinco que hay en el conjunto **A,** se tiene:

Figura 1-21. Representación gráfica de fracciones de tipo discreto.



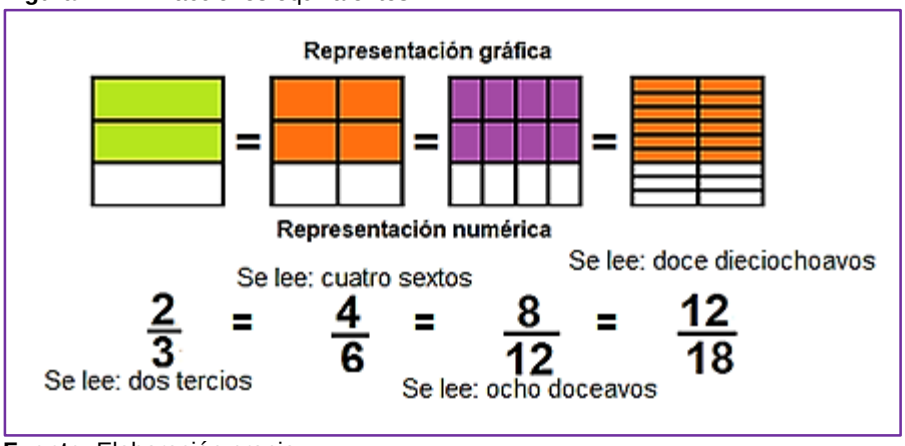
Fuente: Elaboración propia.

De lo representado en la figura1-13 se puede decir que $\frac{5}{11}$ son pares, $\frac{6}{11}$ son impares, $\frac{3}{11}$ son múltiplos de 3 y $\frac{2}{11}$ son múltiplos de 5.

Se considera una fracción en un contexto discreto cuando representa la cantidad de elementos de un conjunto finito, que satisfacen una condición adicional.

- **Fracciones equivalentes**

Figura 1-22. Fracciones equivalentes.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1-22 se evidencia que en las cuatro representaciones gráficas, las regiones coloreadas representan la misma porción de la unidad y como en cada dibujo se divide la unidad en diferente número de partes, las fracciones se mencionan diferente, pero todas representan la misma cantidad, por eso se llaman fracciones equivalentes. Además, se dice que dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Son ejemplos de estas: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18}$

2.2.2. Criterios de divisibilidad (2, 3, 5, 7 y 11)

Los criterios de divisibilidad son de suma importancia para los estudiantes de grado 4°, ya que son útiles para optimizar la simplificación de fracciones y la descomposición de un número en factores primos.

Existen diversas reglas o criterios que indican por simple inspección cuando un número natural es divisible por otro, en este caso se tomarán cinco números primos para conocer

cuando una cantidad es divisible por cada uno de ellos. (Tomado de: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/criterios_de_divisibilidad_matematicas_1_eso.pdf, 2018)

- **Divisibilidad por dos (2)**

Todo número par es divisible por dos. Para identificar si un número natural es divisible por dos, basta con observar su última cifra, si esta es $0, 2, 4, 6$ u 8 es divisible por 2. Son divisibles por 2: $10, 234, 1.026, 1.488, 123.452$.

- **Divisibilidad por tres (3)**

Para saber si un número es divisible por tres, se suman sus dígitos y si ese resultado es múltiplo de 3, entonces el número es divisible por tres.

Ejemplo:

246 es divisible por 3 porque $2 + 4 + 6 = 12$ es múltiplo de 3.

- **Divisibilidad por cinco (5)**

Para verificar si un número natural es divisible por cinco, basta con observar su última cifra, si esta es 0 ó 5 es divisible por 5. Son divisibles por 5: $10, 245, 1.020, 1.485, 103.850$.

- **Divisibilidad por siete (7)**

Un número es divisible por 7 si la diferencia entre dicho número sin la cifra de las unidades y el doble de las unidades es 0 o múltiplo de 7.

Ejemplos:

119 es divisible por 7, ya que la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades 11 y el doble de las unidades: $9 \times 2 = 18$ es $18 - 11 = 7$ y 7 es múltiplo de 7.

76 no es divisible por 7, ya que la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades: 7 y el doble de la cifra de las unidades: $6 \times 2 = 12$, es $12 - 7 = 5$ y 5 no es 0 ni múltiplo de 7. Si el número es grande, puede aplicarse varias veces el método.

Ejemplo: 2625 será divisible entre 7 si 262−5·2 = 262−10 = 252 es divisible entre 7. 252 es divisible entre 7, ya que 25−2·2 = 25−4 = 21 es divisible entre 7. Por tanto, 2625 es divisible entre 7.

- **Divisibilidad por once (11)**

Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de sus dígitos en las posiciones pares y la suma de sus dígitos en las posiciones impares es cero o múltiplo de 11. Al igual

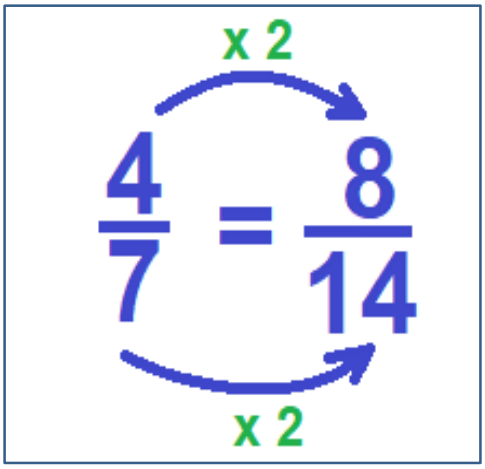
que en el criterio para la divisibilidad por 7, es posible que el método deba aplicarse varias veces.

Ejemplos:

37697 es divisible por 11, ya que la diferencia entre la suma de sus dígitos en las posiciones impares: $3 + 6 + 7 = 16$ menos la suma de sus dígitos las posiciones pares: $7 + 9 = 16$, es cero, $16 - 16 = 0$.
126 no es divisible por 11, ya que la diferencia entre la suma de sus dígitos en las posiciones impares, $1 + 6 = 7$ menos la suma de sus dígitos en las posiciones pares, (2), es 5, $7 - 2 = 5$, y 5 no es 0 ni múltiplo de 11.

2.2.3. Amplificación de fracciones

Figura 1-23. Amplificación de fracciones.

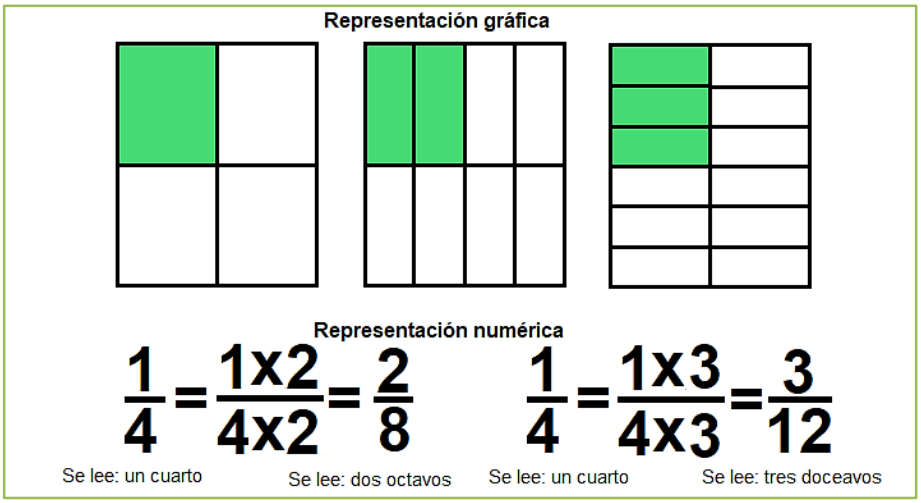


Fuente: Diseño Propio.

Amplificar una fracción consiste en hallar una fracción equivalente multiplicando al numerador y al denominador de esta por un mismo número diferente de cero y de uno.
En otras palabras, amplificar una fracción es transformarla en una equivalente con numerador y denominador mayores que los de la fracción inicial.

Para amplificar se hace uso del algoritmo de la multiplicación de fracciones y de su módulo 1, toda fracción que se desee amplificar debe multiplicarse por otra fracción equivalente a uno (1). Una fracción equivalente a uno (1) es de la forma $\frac{a}{b}\ donde\ \ a = b\ \ y\ \ a, b \neq 0$.

Figura 1-24. Amplificación de fracciones de forma gráfica y numérica.



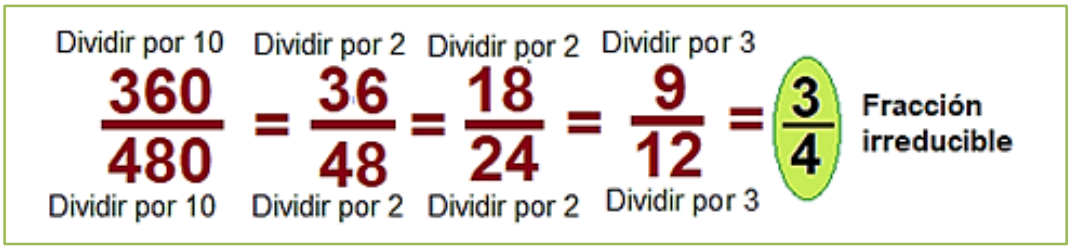
Fuente: Diseño Propio.

Nótese que en la figura anterior $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}\ y\ \frac{3}{12}$ corresponden a la misma porción sombreada de la unidad. Son fracciones equivalentes.

Amplificar no es sinónimo de aumentar la cantidad, este es el principal error que experimenta el estudiante creyendo que al amplificar una fracción esta se hizo mayor o se amplió. En el caso de la representación gráfica, amplificar una fracción es tomar la unidad y dividirla en más partes sin modificar su tamaño, tal como se puede observar en la figura 1-24. Al amplificar, la unidad y las regiones sombreadas mantienen su tamaño.

2.2.4. Simplificación de fracciones

Figura 1-25. Simplificación de fracciones.



Fuente: Diseño Propio.

Simplificar una fracción consiste en hallar fracciones equivalentes dividiendo sucesivamente al numerador y al denominador de esta por un mismo número diferente de

cero y de uno hasta llegar a una fracción irreducible, es decir, hasta que el numerador y el denominador sean primos entre sí.

Según (Palmer, 2003) *"Una fracción está simplificada o reducida a su mínima expresión cuando numerador y denominador son primos entre sí; es decir, cuando no tiene ningún divisor común; entonces se dice que la fracción es irreducible. Si se quiere simplificar una fracción, se divide numerador y denominador por el mismo número".*

Ejemplo:

Simplificar $\frac{50}{200} = \frac{50 \div 10}{200 \div 10} = \frac{5}{20} = \frac{5 \div 5}{20 \div 5} = \frac{1}{4}$

Nótese que cuando en cualquiera simplificación se llega a 1 en el numerador o en el denominador, la fracción ha llegado a su forma irreducible.

2.2.5. Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

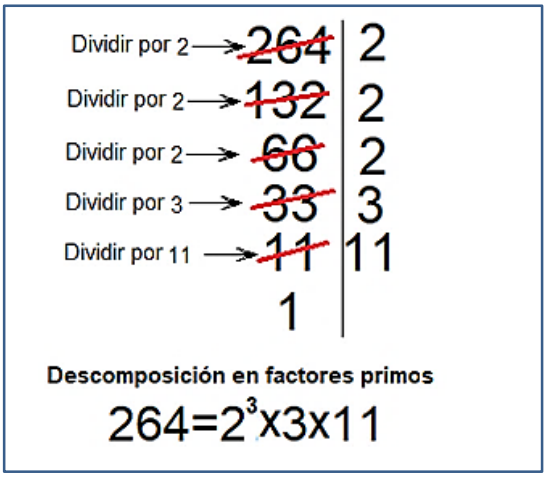
(Tomado de: https://www.santillana.es/file/repository/782765.pdf, 2018)

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varios números naturales es el número entero positivo más pequeño, que es múltiplo de todos.

El m.c.m. se obtiene descomponiendo los números en factores primos y multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados a su exponente mayor.

- **Descomposición en factores primos:**

Figura 1-26. Descomposición en factores primos.



Fuente: Diseño Propio.

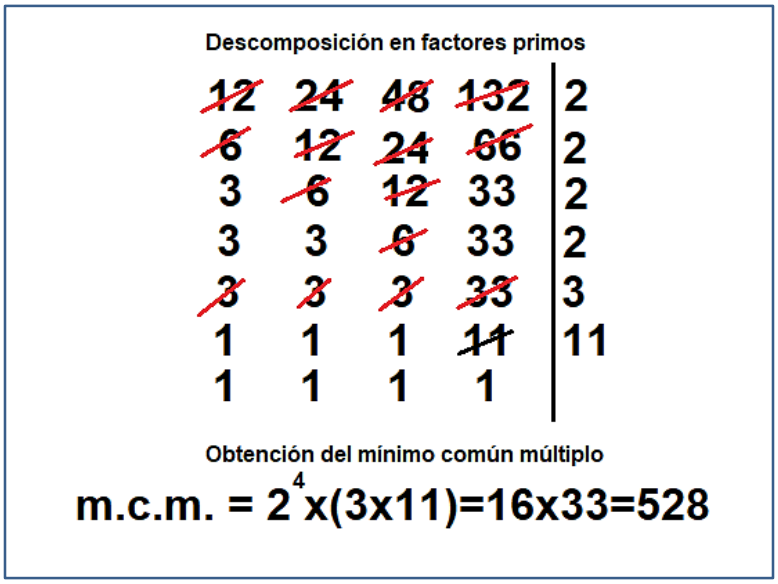
Cada número natural mayor que 1 se puede expresar como el producto de los números primos que lo dividen exactamente.

Existe un método resumido de calcular el m.cm de varios números, el cual consiste en realizar una descomposición en factores primos de los números y el producto de dichos factores es el m.c.m.

Ejemplo:

Halle el m.c.m. de los siguientes números: 12, 24, 48 y 132.

Figura 1-27. Obtención del mínimo común múltiplo de varios números.



Fuente: Diseño Propio.

2.2.6. Adición y sustracción de fracciones

Cuando se inicia el estudio de los fraccionarios se observa que a los estudiantes se les dificulta aplicar los algoritmos de la adición y la sustracción, ya que toda su etapa inicial de escolaridad se fundamenta en el trabajo con números naturales $(\mathbb{N})$.

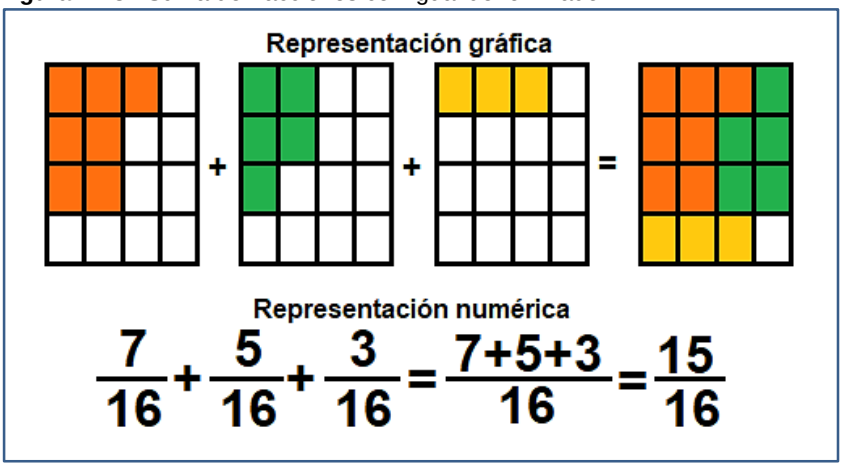
Es claro que las reglas mencionadas en la sección 2.1.3 no son para enseñarlas a los estudiantes de grado 4° en esa forma. Dichas reglas son una guía para el docente, quien tiene un pensamiento más formal y debe emplearlas para diseñar de manera adecuada los

ejercicios que propondrá a sus estudiantes, con un grado creciente de dificultad que les facilite comprender y mecanizar el algoritmo para sumar o restar fracciones.

Es importante que el docente haga uso de distintos materiales concretos que permitan a los estudiantes resolver ejercicios reales, así como la representación gráfica de los mismos y el desarrollo de los procedimientos, para que ellos logren dar significado a la suma y resta de fracciones. Los pasos a seguir son:

- **Suma (resta) de fracciones con igual denominador**

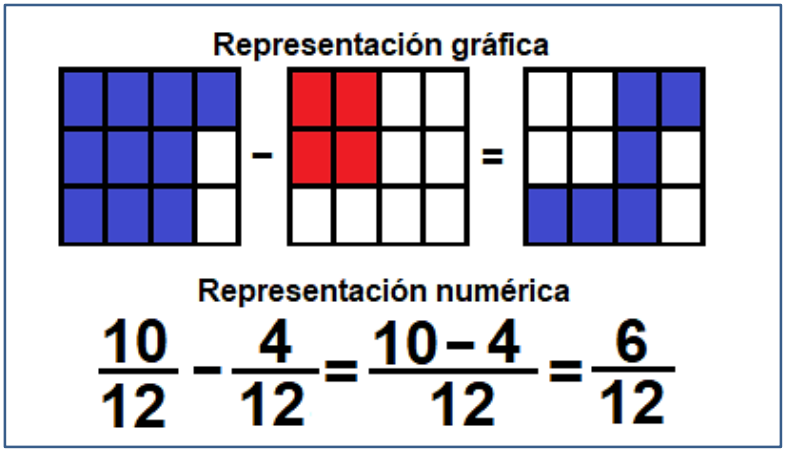
Figura 1-28. Suma de fracciones con igual denominador.



Fuente: Diseño Propio.

Para sumar fracciones del mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador. Gráficamente, como las unidades se dividen en el mismo número de partes, para el numerador basta sumar las partes las partes que se toman en cada sumando.

Figura 1-29. Resta de fracciones con igual denominador.



Fuente: Diseño Propio.

Para restar fracciones del mismo denominador, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador. En el caso gráfico la cantidad sombreada o coloreada disminuye.

- **Suma (resta) de fracciones con diferentes denominadores**

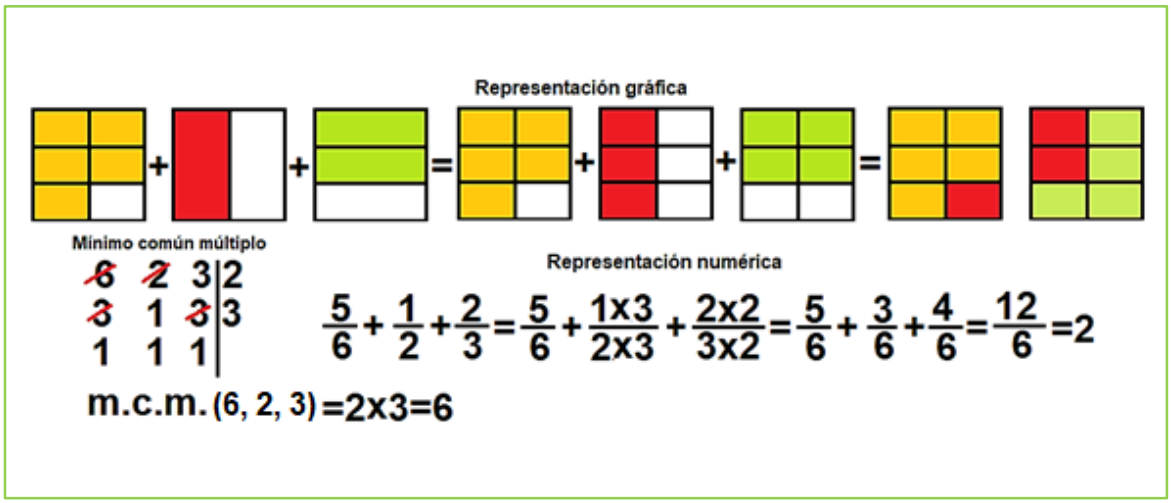
Para sumar o restar fracciones con diferentes denominadores se realizan los siguientes pasos:

i. Sacar el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones.

ii. Amplificar las fracciones.

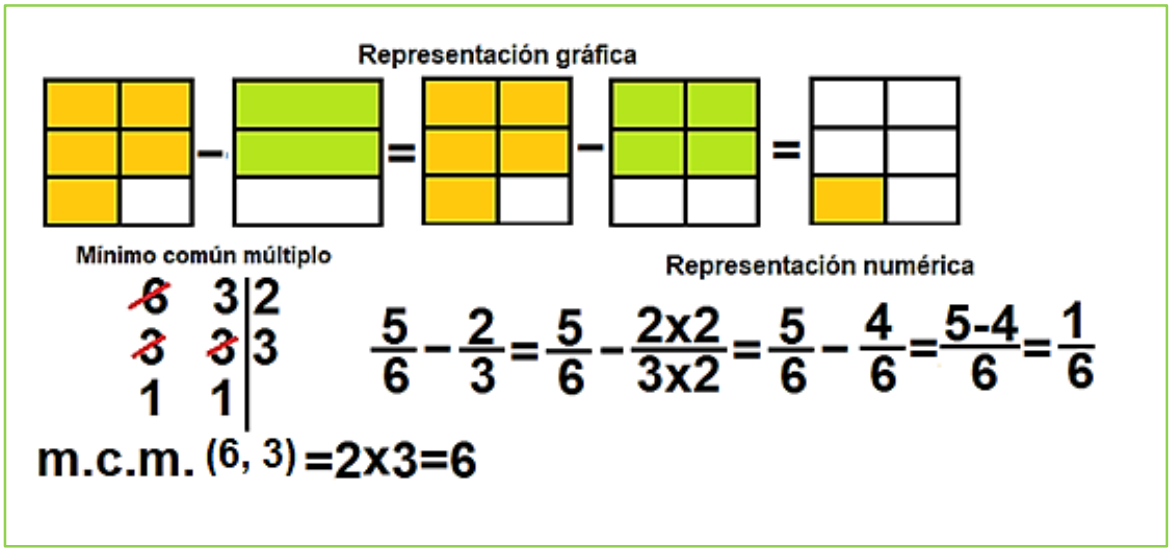
iii. Sumar o restar fracciones de igual denominador.

Figura 1-30. Suma de fracciones heterogéneas.



Fuente: Diseño Propio.

Figura 1-31. Resta de fracciones heterogéneas.



Fuente: Diseño Propio.

2.2.7. Fundamentación teórica.

La fundamentación matemática detrás de los aspectos disciplinares que se mencionaron en los numerales 2.2.1 a 2.2.6 en términos para estudiantes de cuarto grado de primaria, corresponden a la construcción formal del cuerpo de los números racionales. Esta construcción formal se presenta a continuación y es una adaptación basada en (Paige & Dean, 1982) y (Mantilla, 2017).

La construcción del conjunto de los números racionales, se hace suponiendo conocida la estructura de anillo de los enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, es decir, se cumplen las siguientes propiedades:

A1. (Ley clausurativa $+$) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b \in \mathbb{Z}$**.**

A2. (Ley asociativa $+$) Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A3. (Ley modulativa $+$) Existe un elemento $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

A4. (Ley invertiva $+$) Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe un elemento $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

A5. (Ley conmutativa $+$) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b = b + a$.

M1. (Ley clausurativa $\cdot$) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{Z}$**.**

M2. (Ley asociativa $\cdot$) Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

M3. (Ley modulativa $\cdot$) Existe un elemento $1 \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \neq 0$ y $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

M4. (Ley conmutativa $\cdot$) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$, $a \cdot b = b \cdot a$.

D1. (Ley distributiva de $\cdot$ con respecto a $+$) Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ahora se define un conjunto $\boldsymbol{\varphi}$ de parejas ordenadas con primera componente en el conjunto $\mathbb{Z}$ y con segunda componente un entero diferente de cero. En notación de conjunto, esto se representa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(\alpha, \beta)/\alpha \in \mathbb{Z} \text{ y } \beta \in \mathbb{Z};\ \beta \neq 0\}, \text{ donde } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Además, para el conjunto $\boldsymbol{\varphi}$ se define una relación $\approx$ y las operaciones suma $\oplus$ y multiplicación $\otimes$ de la siguiente manera:

$(m,n) \approx (p,q) \leftrightarrow mq = np.$

$(m,n) \oplus (p,q) = (mq + np, nq).$

$(m,n) \otimes (p,q) = (mp, nq).$

Proposición: $\approx$ es una relación de equivalencia en $\boldsymbol{\varphi}$.

Demostración:

Se debe verificar que $\approx$ cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Esto es:

a) Sea $(m,n) \in \boldsymbol{\varphi}$, entonces $(m,n) \approx (m,n)$ dado que $mn = mn$ *(propiedad reflexiva).*

b) Sean $(m,n) \in \boldsymbol{\varphi}$ y $(p,q) \in \boldsymbol{\varphi}$. Si $(m,n) \approx (p,q)$, entonces $mq = np$ y por lo tanto $np = mq$. Entonces también se cumple que $(p,q) \approx (m,n)$ *(propiedad simétrica).*

c) *(Propiedad transitiva)* Sean $(m,n) \in \boldsymbol{\varphi}$**;** $(p,q) \in \boldsymbol{\varphi}$ y $(r,s) \in \boldsymbol{\varphi}$, además supóngase que $(m,n) \approx (p,q)$ y que $(p,q) \approx (r,s)$. Entonces se cumple que $mq = np$ y $ps = qr$, por tanto $mqps = npqr$.

Ahora para la expresión $mqps = npqr$, se tienen las siguientes consideraciones:

- Se sabe que $q \neq 0$, si $p \neq 0$, al suprimir términos semejantes $ms = nr$. Por lo tanto $(m,n) \approx (r,s)$.
- Dado que $mq = np$ y $ps = qr$, si se hace $p = 0$, entonces $m = r = 0$, y $n, q, s \neq 0$, por lo tanto $ms = nr$, eso implica que $(m,n) \approx (r,s)$.

Ahora se establece el siguiente teorema:

Teorema: Si (m,n), $(p,q), (c,d) \in \boldsymbol{\varphi}$ y $(m,n) \approx (p,q)$, entonces:

i. $(m,n) \oplus (c,d) \approx (p,q) \oplus (c,d).$

ii. $(m,n) \otimes (c,d) \approx (p,q) \otimes (c,d).$

Demostración:

Dado que $(m,n) \approx (p,q)$, entonces se cumple que $mq = np$. Luego:

i. $(m,n) \oplus (c,d) = (dm + cn, dn)$ y $(p,q) \oplus (c,d) = (dp + cq, dq)$. Nótese que: $(dm + cn)dq = d^2mq + cdnq$ y $(dp + cq)dn = d^2np + cdnq$, como $mq = np$ entonces, $(dm + cn)dq = (dp + cq)dn$ por lo tanto, $(m,n) \oplus (c,d) \approx (p,q) \oplus (c,d)$.

ii. $(m,n) \otimes (c,d) = (cm, dn)$ y $(p,q) \otimes (c,d) = (cp, dq)$. Nótese que: $(cm)(dq) = cdmq$ y $(dn)(cp) = cdnp$ son iguales debido a que $mq = np$, por lo tanto, $(m,n) \otimes (c,d) \approx (p,q) \otimes (c,d)$.

Lo mostrado anteriormente da fe de la compatibilidad de las operaciones $(\oplus\, y\, \otimes)$ y la relación de equivalencia $(\approx)$.

Finalmente, se define el conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$, como la partición del conjunto $\boldsymbol{\varphi}$ por la relación de equivalencia $(\approx)$, así:

$$\mathbb{Q} = \boldsymbol{\varphi}/\approx = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) /\approx$$

Dado todo este proceso, se concluye que en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, sus elementos son clases de equivalencia de parejas de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Usualmente se escoge como representante de cada clase de equivalencia $[(m,n)]$ a la pareja (m,n) en $\boldsymbol{\varphi}$, donde m y n son primos relativos.

Nótese que la elección del representante de cada clase de equivalencia de esta manera, es lo que justifica el proceso de simplificación de fracciones. A continuación se detallan algunos ejemplos:

- $[(1,1)] = [(3,3)]\ ya\ que\ (1,1) \approx (3,3)$
- $[(6,3)] = [(12,6)]\ ya\ que\ (6,3) \approx (12,6)$
- $[(1,3)] = [(5,15)]\ ya\ que\ (1,3) \approx (5,15)$
- $[(0,7)] = [(0,14)]\ ya\ que\ (0,7) \approx (0,14)$
- $[(5,8)] = [(10,16)]\ ya\ que\ (5,8) \approx (10,16)$
- $[(3,2)] = [(15,10)]\ ya\ que\ (3,2) \approx (15,10)$

Como las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ son compatibles con la relación de equivalencia $\approx$, las operaciones de suma $+$ y multiplicación $\times$ en $\mathbb{Q}$ se pueden definir de la siguiente manera:

- $[(m,n)] + [(p,q)] = [(m,n) \oplus (p,q)] = [(mq + np, nq)]$
- $[(m,n)] \times [(p,q)] = [(m,n) \otimes (p,q)] = [(mp, nq)]$

Es pertinente aclarar que existe una inyección entre los números enteros y el conjunto de los racionales, en la que a cada entero m se le hace corresponder la clase $[(m,1)]$. Simbólicamente esto es:

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} : i(m) = [(m,1)].$$

En virtud de lo anterior, $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $i(\mathbb{Z})$, la imagen de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ por la función i, con lo cual se muestra que $\mathbb{Z}$ es una parte de $\mathbb{Q}$.

Para el caso de los números racionales $\mathbb{Q}$, se usará la notación $\frac{m}{n}$ en lugar de $[(m,n)]$, donde m se llama numerador y n denominador. De esta manera el conjunto de los números racionales quedará definido así:

$$\mathbb{Q} = {(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)}/_{\approx} = \left\{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}\, y\, n \neq 0\right\}$$

Para las operaciones de suma y multiplicación, al expresar los números racionales de la forma $\frac{m}{n}$, se obtiene:

- $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$
- $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$

Estas formas de realizar las operaciones suma y multiplicación de racionales son las usuales y además, la inyección i lo que hace es corresponder a un entero m con el racional $\frac{m}{1}$.

En conclusión, al obtener las operaciones suma $(+)$ y multiplicación $(\times)$ definidas de esta manera en el conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ satisfacen las siguientes propiedades:

- $+$ y $\times$ son clausurativas, asociativas y conmutativas en $\mathbb{Q}$.
- Existen $0, 1 \in \mathbb{Q}$, con $0 \neq 1$ tales que para cada $a \in \mathbb{Q}$ se tiene:

$$a + 0 = a = 0 + a.$$
$$a \times 1 = a = 1 \times a.$$

- Para cada $a \in \mathbb{Q}$, existe $-a \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a.$$

- Para cada $a \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \times a^{-1} = 1 = a^{-1} \times a$.
- $\times$ es distributiva con respecto a $+$ en $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, $(\mathbb{Q},\ +,\ \times,\ 0, 1)$ tiene estructura de cuerpo o campo.

2.3. Fundamento didáctico

2.3.1. Los referentes de calidad y su injerencia en las fracciones

En la enseñanza de los números, los docentes deben tener como referente de calidad los lineamientos curriculares, mallas de aprendizaje, matriz de referencia, estándares básicos de competencias, derechos básicos de aprendizaje (DBA) y saber qué tipo de competencias necesitan desarrollar en sus estudiantes.

Los estándares de 4º a 5º en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, en lo referente a las fracciones establecen: (Tomado de: https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf, 2017)

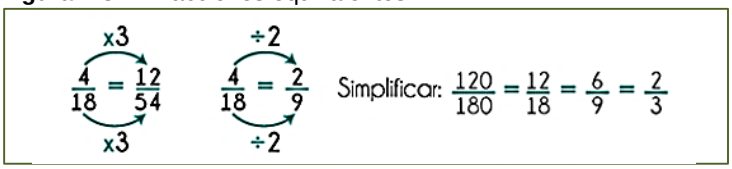
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.
- Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
- Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

Los derechos básicos de aprendizaje 5 y 6 para el grado 4º en cuanto a las fracciones citan: (Tomado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf, 2017)

- **Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones (DBA Nº 5).** Por ejemplo

Figura 1-32. Fracciones equivalentes.



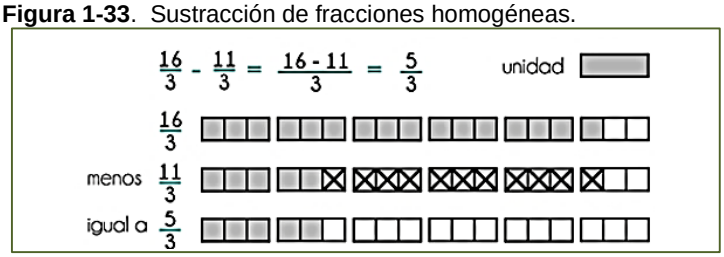
Fuente: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

- **Realiza sumas y restas de fracciones (DBA Nº 6).**

Utiliza estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento en los siguientes casos:

✓ Cuando tienen el mismo denominador. Por ejemplo:

Figura 1-33. Sustracción de fracciones homogéneas.

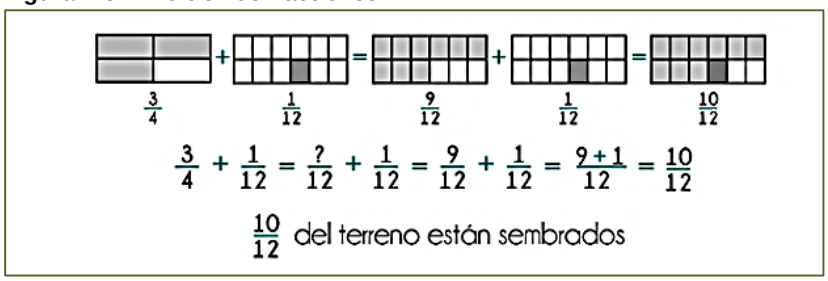


Tomado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

✓ Cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro.

Por ejemplo: En $\frac{3}{4}$ del terreno se sembró fresa y en $\frac{1}{12}$ del terreno se sembró ajo. El resto del terreno se dejó sin sembrar. ¿Qué parte del terreno está sembrado?

Figura 1-34. Adición de fracciones.



Tomado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Estos referentes de calidad son el punto de partida que tienen los docentes para poder llevar a sus estudiantes temáticas pertinentes y con las exigencias del Ministerio de Educación Nacional.

2.3.2. Los estándares básicos de competencias en matemáticas

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (M.E.N.) en los grupos de grados de cuarto a quinto se aborda el tema de fracciones. En la tabla 2 –1 se encuentran los estándares desde cada uno de los diferentes pensamientos matemáticos. (Tomado de: https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf, 2017)

Tabla 2-1. Estándares básicos en competencias Matemáticas para los grupos de grados 4º y 5º

Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	Pensamiento Métrico y sistema de Medidas	Pensamiento Aleatorio Y Sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
✓ Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. ✓ Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas .	✓ Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	✓ Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos). ✓ Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.	✓ Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). ✓ Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).	✓ Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. ✓ Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. ✓ Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Fuente: (Ministerio de Educación Nacional, 1998)

2.3.3. Los principales problemas en la enseñanza de las fracciones

Vilma Pruzzo de Di Pego (2012) realizó un estudio donde determina que los principales problemas para la enseñanza de las fracciones está dado por la manera de enseñarlas, es decir, considera que el principal error se da porque se plantean situaciones en el aula que provocan respuestas escolarizadas (memorizadas al margen de la comprensión), pero, también determina que si se cambia la situación al solicitárseles gráficos, esquemas o dibujos, afloran los modos de pensar de los estudiantes. Por eso, se considera indispensable a la hora de enseñar fracciones, incluir las gráficas de la situación problemática planteada.

Por otro lado, los ejes conceptuales que presentan mayor dificultad para ser comprendidos por los estudiantes, son las relaciones parte todo y la comparación de fracciones.

Darío González Del Olmo (2015) clasificó los que él considera que son los principales errores que se tienen al usar las fracciones; esta clasificación la hizo teniendo en cuenta los aportes de autores como Llinares & Sánchez, Egodawatte y Godino. La clasificación es la siguiente:

1. Errores por descuido o distracción.
2. Errores por desconocimiento de la respuesta.
2.1. Simplificación incompleta.
2.2. Operaciones con enteros.
2.3. Error en la jerarquía de las operaciones.
3. Errores por defectos en la comprensión del concepto.
3.1. Error con la conmutatividad de las operaciones.
3.2. Error en la ordenación de fracciones.
3.3. Comparación cualitativa incorrecta.
3.4. No consideran legitimo dividir/restar un número menor por uno mayor.
3.5. Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir.
3.6. Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones.

3.7. Error relacionado con la equivalencia de fracciones.

4. Aplicación sistemática de procedimientos erróneos.

4.1. Sobre simplificación.

4.2. Error en el algoritmo suma.

4.3. Error en el algoritmo multiplicación.

4.4. Multiplicación cruzada incorrecta.

4.5. Común denominador incorrecto.

4.6. División o multiplicación incorrecta

4.7. Dividir en lugar de multiplicar y viceversa.

2.3.4. La unidad didáctica

Para García (2009), una unidad didáctica se define como "*un conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje (motivación, relaciones con otros conocimientos, objetivos, contenidos, método y estrategias, actividades y evaluación) con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo*".

Mientras para Escamilla, citado por Gil (1997, págs. 166-177), la unidad didáctica *"es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso".*

Por otro lado, Pilar Vivó, citado por Gisbert y Blanes (2013) *"una unidad didáctica es un conjunto coherente de trabajo que comparte unos principios comunes, importante en la programación curricular".*

Fernández- Espada (2012) establece que "*una unidad didáctica no es un documento aislado, sino que siempre se deriva de otras decisiones más generales. Es el último*

eslabón de todo un proceso lógico, organizado y jerarquizado, que parte de la toma de decisiones de la institución, de los Departamentos y/o de los ciclos que proyectan su acción educativa a través de la elaboración de: Proyecto Educativo Institucional (PEI), Proyecto Curricular del grado, programación de Aula: conjunto de unidades didácticas".

2.3.5. Ganancia de Hake

Para la validación de la Unidad didáctica se utilizan dos métodos cuantitativos que permiten establecer la efectividad de la misma. Uno es la ganancia de Hake (1998), que es un método por el cual se puede establecer la ganancia conceptual obtenida con la aplicación de una estrategia, al comparar los resultados de la prueba diagnóstica con los de la evaluación final, que contienen las mismas preguntas.

Como ambas pruebas contienen las mismas preguntas, se tienen en cuenta los resultados para calcular el índice de ganancia $< g >$ para cuantificar el aprendizaje conceptual obtenido con la aplicación de la unidad didáctica.

La ganancia normalizada $< g >$ es la razón del aumento de un pre – Test (prueba diagnóstica) y un post – Test (Evaluación final) respecto al valor máximo posible, se determina a partir de los aciertos obtenidos en el instrumento de evaluación utilizado. Para calcular este índice de ganancia se aplica la ecuación $(2-1)$:

$$g = \frac{(\%\, posTest - \%\, preTest)}{100 - \%\, preTest} \qquad (2\text{-}1)$$

La ganancia también se puede obtener de manera grupal aplicando la ecuación $(2-2)$, esta ecuación permite calcular el promedio de la ganancia normalizada $< \bar{g} >$, teniendo en cuenta la ganancia de cada uno de los 33 estudiantes a quienes se les aplicó la secuencia.

$$< \bar{g} > = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_i \qquad (2\text{-}2)$$

Donde n es el número de estudiantes, en este caso n corresponde a 33 y g_i es la ganancia obtenida por cada estudiante.

Teniendo en cuenta el resultado de la ganancia de Hake, se puede categorizar, como lo establece la tabla $2-2$:

Tabla 2-2. Categorías de la ganancia de Hake.

Categoría	Rango
Ganancia baja	0,0 a 0,3
Ganancia media	0,3 a 0,7
Ganancia alta	0,7 a 1,0

Fuente: Elaboración propia.

2.3.6. Índice de dificultad

El índice de dificultad mide el nivel de complejidad de cada pregunta aplicada a diferentes individuos de un grupo evaluado. Este se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$P = \frac{N_i}{N} \qquad (2\text{-}3)$$

Donde N_i corresponde al número de estudiantes que respondieron de manera correcta la pregunta, N es el número total de estudiantes que presentaron la prueba y P es el índice de dificultad de la pregunta.

Según Backhoff y Otros (2000), las categorías para medir el índice de dificultad de las preguntas se establecen en la tabla 2–3:

Tabla 2-3. Rango índice de dificultad.

Rango	Categoría
0 – 0. 35	Muy difícil (MD)
Entre 0.35 – 0.60	Moderadamente difícil (mD),
Entre 0.60 – 0.85	Moderadamente fácil (mF)
Entre 0.85 – 1.00	Muy fácil (MF)

Fuente: Elaboración propia

3. Marco metodológico

En este capítulo se presenta la metodología que se sigue en la realización del presente trabajo final. Se relacionan las actividades desarrolladas para el cumplimiento de los objetivos propuestos, luego lo pertinente a la unidad didáctica, mostrando cada una de las actividades programadas y aplicadas.

3.1. Metodología general

La metodología planteada para la elaboración de la propuesta didáctica se relaciona en la tabla 3 – 1:

Tabla 3-1. **Metodología para cumplir objetivos.**

OBJETIVOS PLANTEADOS	TAREAS DESARROLLADAS
1. Determinar conceptos previos de los estudiantes y docentes respecto a la adición y sustracción de fracciones	Para determinar los conceptos previos se aplicó una prueba escrita que constaba de 15 preguntas tipo ejercicios para ser resueltos por docentes, y otra de 12 ejercicios para ser resueltas por estudiantes del grado cuarto de básica primaria.
2. Seleccionar componentes teóricos, epistemológicos, curriculares y didácticos que fundamentan la unidad didáctica.	Para estructurar el marco teórico en el cual se fundamenta la unidad didáctica diseñada, se analizaron diferentes planteamientos de investigaciones y propuestas didácticas relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, además de hacer un recorrido por la evolución histórica del concepto de fracción desde el punto de vista de las diferentes civilizaciones antiguas.

3. Elaborar juegos y materiales didácticos que servirán de soporte al desarrollo de la unidad.	Para cumplir este objetivo, se diseñaron diferentes materiales didácticos para ser usados en el desarrollo de la unidad didáctica. Además, se aplicaron juegos didácticos que permitieron afianzar los conceptos de fracción, permitiendo que los estudiantes pudieran crear sus propios conocimientos de una manera divertida y lúdica. Por otro lado, se adaptan otros juegos que los estudiantes conocen, para ser aplicados en las clases.
4. Estructurar las actividades que conformaran la unidad didáctica.	Se analizaron diferentes aspectos para lograr estructurar la unidad didáctica desarrollada, se tuvieron en cuenta los derechos básicos de aprendizaje (DBA), los estándares básicos de competencias en Matemáticas, mallas de aprendizajes, así como los principales problemas en los que incurren los estudiantes y docentes de la básica primaria, en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.
5. Evaluar la unidad didáctica con docentes y estudiantes de grado cuarto.	En este caso se aplicó una evaluación final a estudiantes y docentes, donde se incluía la misma prueba diagnóstica más otras preguntas de profundización, con el fin de evaluar los conceptos adquiridos por los estudiantes y docentes, después de desarrolladas las actividades incluidas en la unidad didáctica. Dicha evaluación se hizo al realizar un comparativo con los resultados iniciales obtenidos en la prueba diagnóstica y la prueba final, mediante ganancia de Hake y así poder sacar las respectivas conclusiones.

3.2. Estructura de la unidad didáctica

La unidad didáctica está estructurada tal como se indica en la Tabla 3 – 2, inicialmente se aplica una prueba diagnóstica, luego se desarrolla la temática organizada en 4 aspectos principales y al terminar el desarrollo de la misma se aplica la evaluación final, que consiste en una prueba similar a la evaluación diagnóstica, más algunas preguntas de profundización.

Tabla 3-2. Actividades de la unidad didáctica.

TEMA	SUBTEMAS		MATERIALES	INTENSIDAD HORARIA
1. Concepto de Fracción (4 horas)	Fracciones continuas		Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	2 horas
	Fracciones discretas		Fríjoles, piedras, botones, Estudiantes	2 horas
2. Representación de Fracciones (4 horas)	Fracciones Propias		Dominó	2 horas
	Fracciones Impropias		Bingo	2 horas
	Números Mixtos		Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	2 horas
3. Amplificación de Fracciones (3 horas)	Por representación gráfica		Formas geométricas	2 horas
	Numéricamente		Operaciones en el tablero	1 hora
	Adición de fracciones homogéneas	Por representación gráfica	Figuras geométricas	16 horas
		Numéricamente	Tablero y marcador	
		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
	Sustracción de fracciones homogéneas	Por representación gráfica	Figuras geométricas	
		Numéricamente	Tablero y marcador	

4. Adición y sustracción de fracciones (16 horas)		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
	Adición de fracciones heterogéneas	Por representación gráfica	Figuras geométricas	
		Numéricamente	Tablero y marcador	
		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
	Sustracción de fracciones heterogéneas	Por representación gráfica	Figuras geométricas	
		Numéricamente	Tablero y marcador	
		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
	Adición de números mixtos	Por representación gráfica	Figuras geométricas	
		Numéricamente	Tablero y marcador	
		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
	Sustracción de números mixtos	Por representación gráfica	Figuras geométricas	
		Numéricamente	Tablero y marcador	
		Utilizando objetos concretos	Cartulinas, chocolatinas, barras de jabón	
Total de horas				29 horas

Cada una de las actividades propuestas contienen el número de la actividad, el título, un espacio titulado “Debemos tener en cuenta” que trata de algunas indicaciones con respecto al tema de la guía, luego se presenta un ejemplo y finalmente se plantean los ejercicios propuestos.

4. Implementación y análisis de resultados de la unidad didáctica

4.1. Caracterización de la población

La propuesta se implementó con 33 estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre, un colegio de carácter oficial, ubicado en la ciudad de Valledupar, específicamente en el barrio del mismo nombre. Los estudiantes provienen de familias de estratos socioeconómicos 1 y 2 y están entre los 8 y 11 años.

La estrategia se implementó en el área de Matemática; que cuenta con una intensidad de 5 horas semanales.

Además, se tomó una muestra de 10 docentes que orientan matemáticas en el grado cuarto.

4.2. Prueba diagnóstica

La prueba inicial se planteó con el propósito de identificar las ideas previas y los principales problemas de los docentes y estudiantes frente a las fracciones y sus operaciones (adición y sustracción), a partir del análisis y resolución de diferentes ejercicios, 12 para los estudiantes y 15 para los docentes. (Ver anexos A y B)

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba diagnóstica en una escala de calificación de 1 a 10, siendo 1 la nota más baja y 10 la más alta.

Tabla 4-1. Resultados prueba diagnóstica por estudiante.

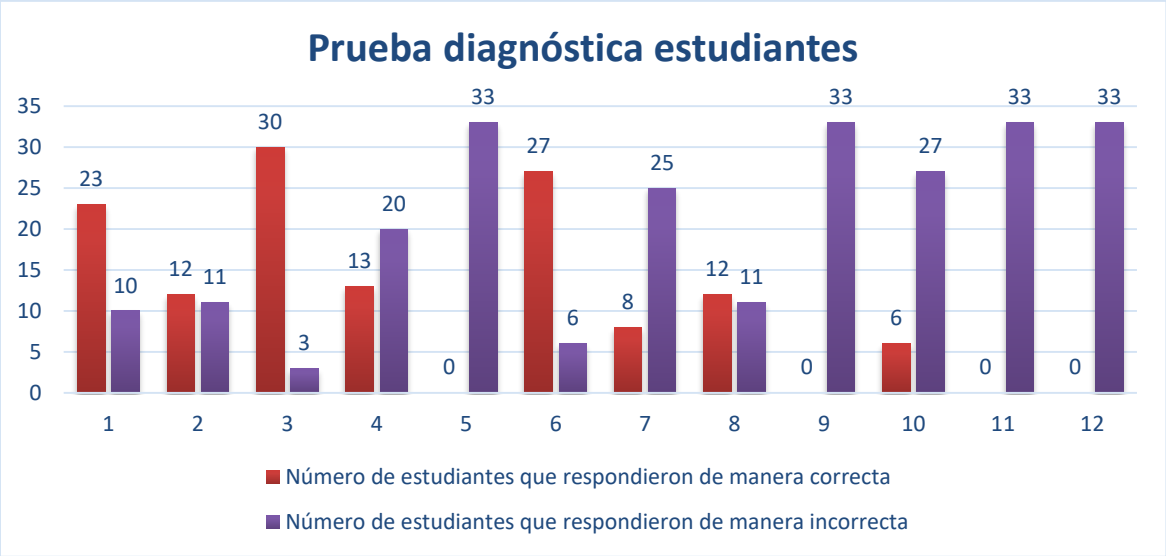
ESTUDIANTES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
CALIFICACIÓN INICIAL	2	4	1	3	2	1	4	3	1	3	3	5	4	3	4	4	3

ESTUDIANTES	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
CALIFICACIÓN INICIAL	4	2	5	6	4	3	2	2	4	4	2	3	2	3	3	2

Fuente: Elaboración propia.

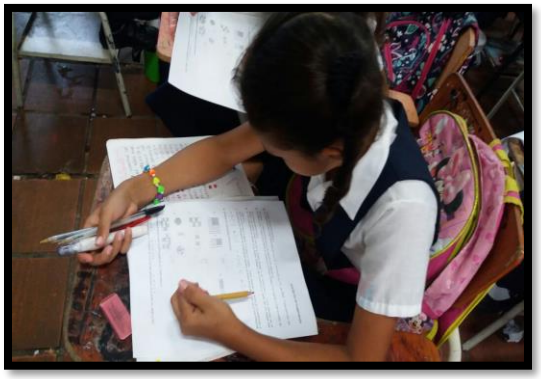
Estos resultados se pueden observar en la figura 1 – 35:

Figura 1-35. Resultados evaluación diagnóstica estudiantes, por pregunta.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 1-36. Prueba diagnóstica estudiantes y docentes.



Fuente: Fotografías tomadas por José Manuel Padilla Meriño.

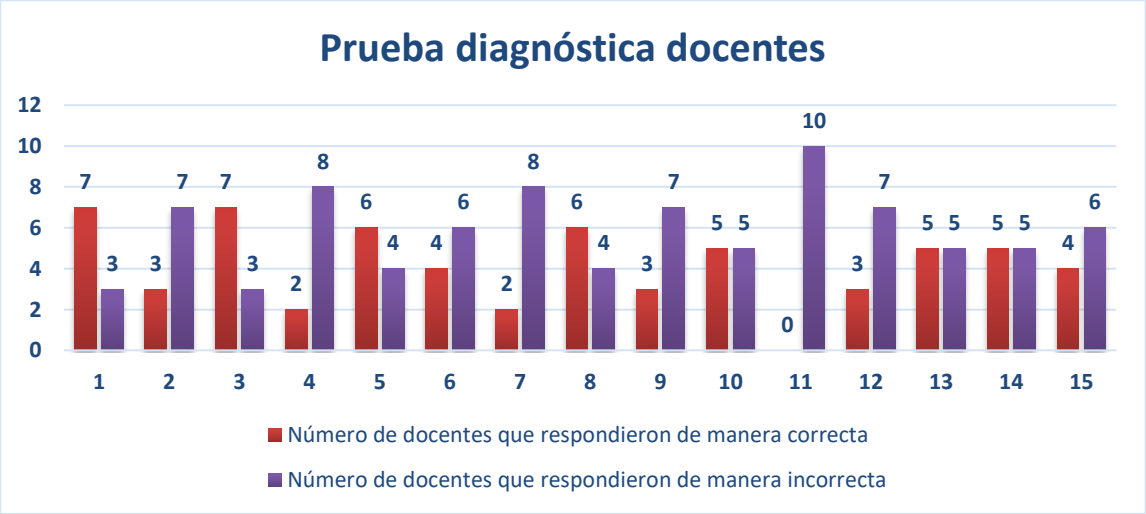
Tabla 4-2. Resultados prueba diagnóstica por docente.

DOCENTES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CALIFICACIÓN INICIAL	5	4	3	9	6	8	8	3	6	4

Fuente: Elaboración propia.

Estos resultados se observan en la figura 1 – 37:

Figura 1-37. Resultados evaluación diagnóstica docentes, por pregunta.



Fuente: Elaboración propia.

En la prueba se pudo evidenciar la dificultad que tienen los estudiantes al no diferenciar las fracciones en los contextos continuos y discretos, además en la representación gráfica de fracciones impropias las toman como si fueran propias, esta misma dificultad se presentó en algunos docentes. En lo referente a la resolución de situaciones problemas las dificultades son más notorias tanto en estudiantes como docentes.

4.3. La unidad didáctica: “El mundo mágico de las fracciones”

4.3.1. Primera sesión. Concepto de fracción y representación gráfica. (Ver anexo C)

Todas las imágenes usadas en esta guía son diseño propio. La estrategia de iniciar la guía con preguntas exploradoras ayuda a conocer qué tanto conocen los estudiantes del tema y los involucra en el contexto.

En la primera sesión los estudiantes estaban muy motivados en la resolución de las actividades, salvo 3 estudiantes que representan el 10% aproximado, que no presentaron la actividad completa debido a la falta de atención e indisciplina que mostraron durante el proceso.
La dinámica de implementación consistió en la socialización de la guía con los docentes que desarrollan el área de matemáticas y luego se lleva a los estudiantes el desarrollo de las clases, con el acompañamiento de estos, quienes se encargan de explicar la parte conceptual.

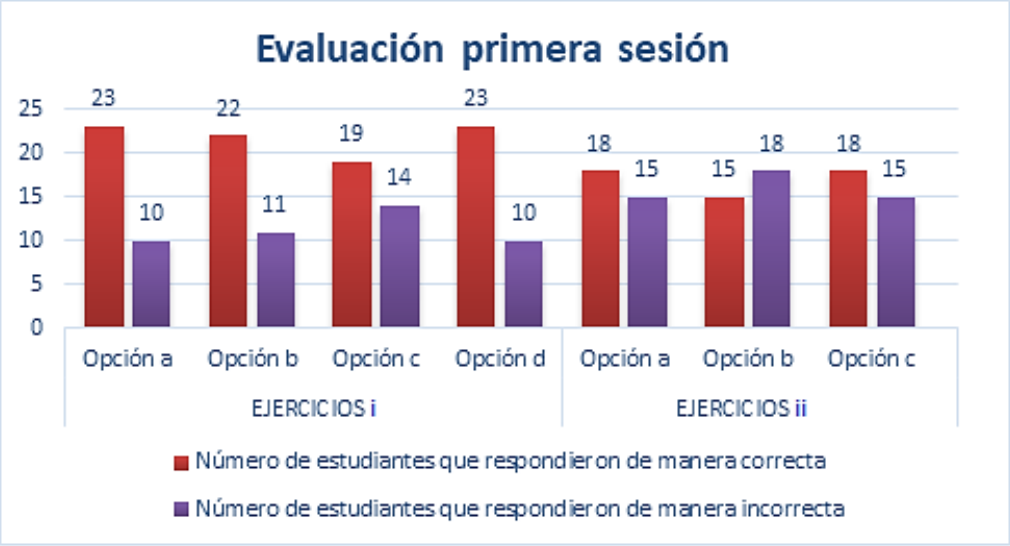
Los docentes utilizan materiales concretos como chocolatinas, botones, frijoles, figuras geométricas hechas en cartón paja, galletas, frutas, entre otros; los cuales ayudan a que las clases sean más productivas para los estudiantes, ya que ellos en esta etapa necesitan la manipulación de los objetos a operar, para facilitar la comprensión de los temas y el paso a la representación.

Los estudiantes trabajan las actividades de la guía con el apoyo de los materiales concretos que usan los docentes, mostrando una mejor comprensión y motivación en el aprendizaje del tema.

Finalmente se aplica la evaluación que está titulada en la guía como “Prueba tus competencias”. En el desarrollo de la evaluación los estudiantes trabajaron individualmente y mostraron un buen desempeño.

El resultado de esta evaluación se presenta en la figura 1 – 38:

Figura 1-38. Resultados evaluación primera sesión estudiantes.



Fuente: Elaboración propia.

Al analizar la figura 1 – 38 se puede apreciar que los estudiantes han presentado mejoría al comparar con los resultados de la prueba diagnóstica en el concepto de fracción.

Figura 1- 39. Primera sesión estudiantes.

Figura 1- 40. Primera sesión docentes.

Fuente: Fotografías tomadas por José Manuel Padilla Meriño.

Al finalizar la primera guía se observó una mayor participación de los estudiantes en la clase, el docente no fue su único protagonista. Se observó que la mayoría de los

estudiantes respondió correctamente las preguntas donde realizó figuras geométricas para representar la fracción y darle significado a la misma, mostrando de esa manera la efectividad del manejo de la estrategia.

4.3.2. Segunda sesión. Fracciones propias, impropias y fracciones equivalentes. (Ver anexo D)

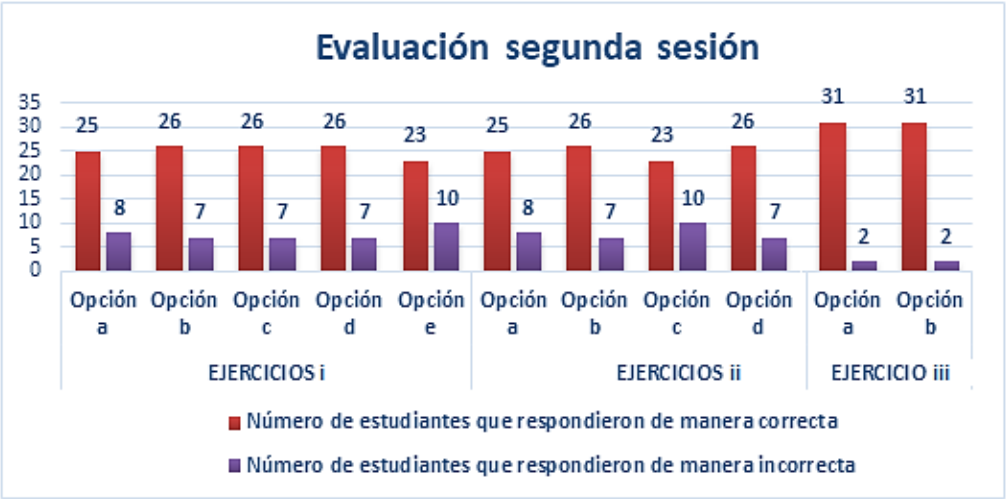
Todas las imágenes usadas en esta guía son diseño propio. Excepto la galleta de soda que fue tomada de: https://spanish.alibaba.com/product-detail/peppito-150g-salted-butter-soda-crackers-biscuits-1261646846.html

Pese a que algunos de los estudiantes faltaron a clases, se desarrolló la guía completa con todos ellos, ya que cuando alguno faltaba, se trabajaba con ese estudiante en una hora diferente, para ser nivelado con sus compañeros.

En el desarrollo de la guía se utilizó el dominó de fracciones propias equivalentes, donde los estudiantes mostraron destreza y manejo del mismo. Los docentes sacaron una serie de preguntas de las fichas y la clase se desarrolló de una forma muy amena.

Al final, se aplicó la evaluación titulada en la guía como “Prueba tus competencias”, donde los estudiantes mostraron un excelente desempeño, los resultados son presentados en la figura 1 – 41:

Figura 1- 41. Resultados evaluación segunda sesión estudiantes.



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de esta evaluación evidencian que los estudiantes han asimilado lo relacionado con la identificación de fracciones propias, impropias y fracciones equivalentes, ya que en su mayoría han respondido correctamente los ejercicios propuestos.

El trabajo con los docentes fue presentar la guía mediante uso de video Beam, y aclarar dudas, explicando la manera de desarrollar la unidad.

Figura 1- 42. Segunda sesión.

Fuente: Fotografías tomadas por José Manuel Padilla Meriño.

El uso de materiales y la representación de las fracciones en figuras geométricas hacen más comprensibles las fracciones, motiva y facilita el proceso de enseñanza - aprendizaje.

4.3.3. Tercera sesión. Amplificación y simplificación de fracciones. (Ver anexo E)

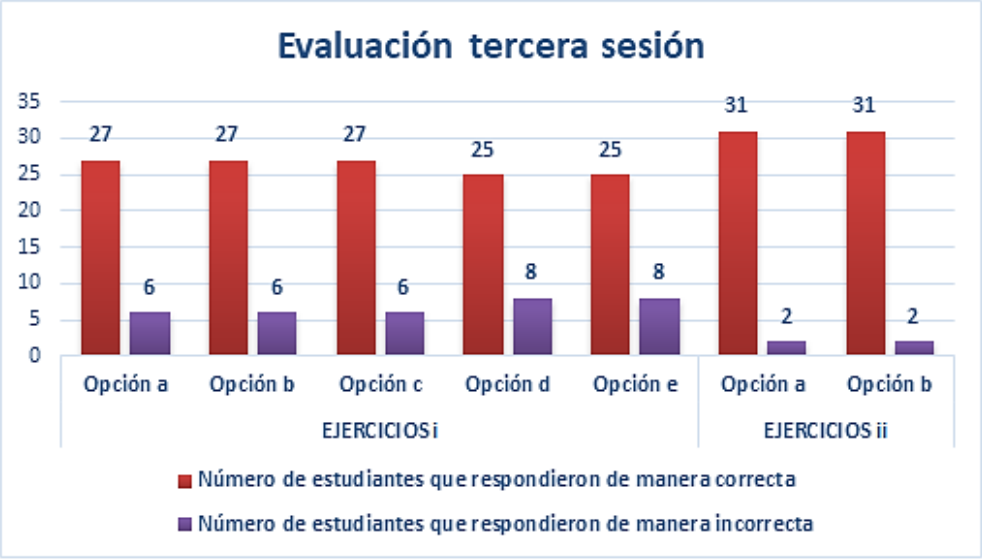
En el desarrollo de esta guía el manejo de figuras geométricas y representación gráfica ayudaron mucho en la comprensión del concepto de amplificación, donde estudiantes y docentes modificaban el tamaño de la figura que representaba la unidad.

En el caso de los números mixtos los principales erros cometidos por estudiantes y algunos docentes fueron que aumentaban la parte natural y amplificaban la fracción propia.

En la simplificación de fracciones los estudiantes no identificaban por simple inspección cuando un número era divisible por otro. Uno de los errores más notables fue el dividir el numerador por un número diferente al que dividían al denominador.

Nuevamente se aplicó a los estudiantes la evaluación titulada “Prueba tus competencias” y el resultado se presenta en la figura 1 – 43:

Figura 1 - 43. Resultados evaluación tercera sesión estudiantes.



Fuente: Elaboración propia

El tema desarrollado en esta sesión fue amplificación y simplificación de fracciones, al analizar la figura 1 – 43, se observa que los estudiantes respondieron de manera positiva a la aplicación de esta sesión, ya que en su mayoría respondieron la evaluación de manera correcta.

Después del desarrollo de la guía los estudiantes no cayeron en los errores mencionados inicialmente.

4.3.4. Cuarta sesión. Operaciones entre fracciones. (Adición y sustracción) (Ver anexo F)

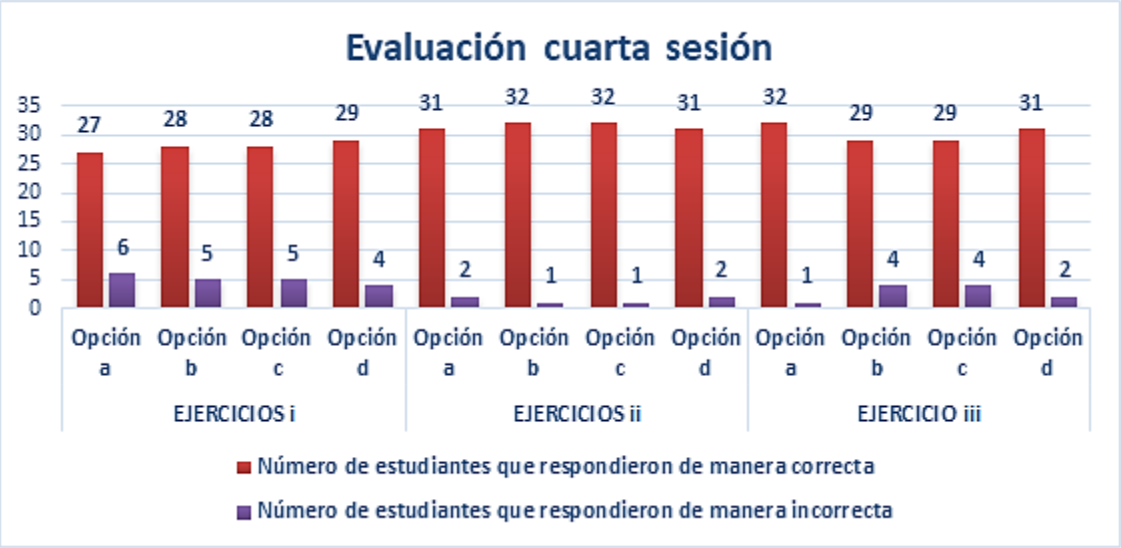
Todas las imágenes usadas en esta guía son diseño propio.
Esta sesión contó con 16 horas de implementación.

En la etapa inicial del proceso los estudiantes manejaban la suma y la resta de fracciones, operando los numeradores con los denominadores sobre la suma o resta de los denominadores, para las fracciones homogéneas cometían el mismo error.

Después del desarrollo de la guía los estudiantes mejoraron notoriamente y los errores cometidos fueron minimizados, las representaciones gráficas de las fracciones, el manejo de los criterios de divisibilidad, la amplificación y simplificación de fracciones, el mínimo común múltiplo fueron de mucha ayuda en el mejoramiento del aprendizaje de suma y resta de fracciones. El manejo de los temas mencionados anteriormente se dio con la ayuda de los materiales y recursos utilizados en las demás guías, generando en los estudiantes una disposición y cambio de actitud sobre el estudio de las matemáticas.

Finalmente se aplicó la evaluación contenida en la guía y los resultados se presenta en la figura 1 – 44:

Figura 1-44. Resultados evaluación cuarta sesión estudiantes.



Fuente: Elaboración propia.

Para esta evaluación, muchos de los estudiantes presentaron grandes avances en la comprensión de las operaciones de adición y sustracción de fracciones.

4.4. Evaluación final

Al finalizar la implementación de la Unidad didáctica diseñada, se aplica nuevamente la evaluación diagnóstica con el fin de poder realizar la comparación y de esta manera medir la efectividad de la misma mediante dos métodos cuantitativos, la ganancia de Hake y el índice de dificultad.

Los resultados obtenidos en esta prueba final aplicada a los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre de Valledupar se presentan en la tabla 4– 3:

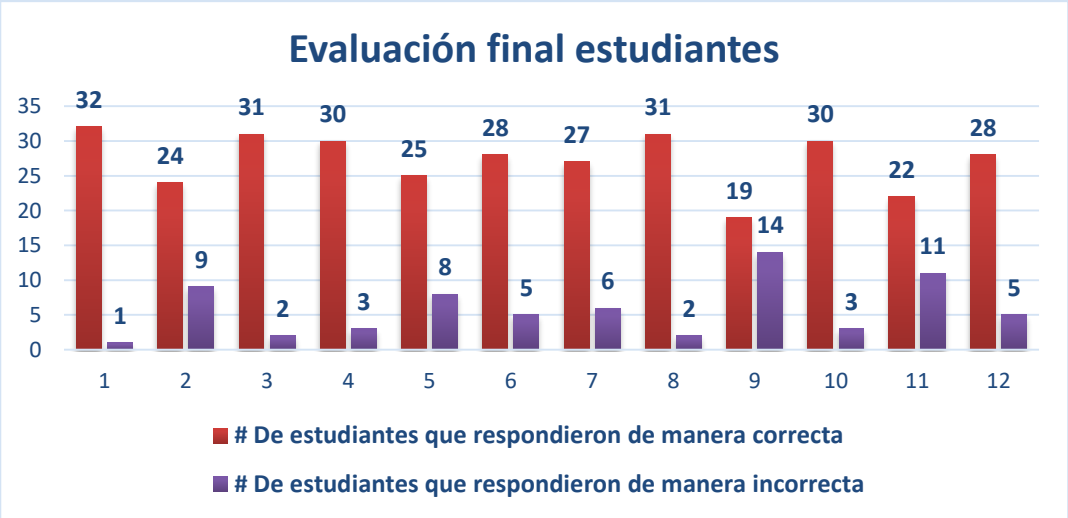
Tabla 4-3. Resultados prueba final por estudiante.

ESTUDIANTES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
CALIFICACIÓN FINAL	80	80	60	80	80	70	70	70	50	90	90	90	90	80	80	90	90

ESTUDIANTES	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
CALIFICACIÓN FINAL	80	75	80	100	80	80	90	75	100	100	75	80	80	80	90	80

Fuente: Elaboración propia.

Figura 1-45. Resultados evaluación final estudiantes.



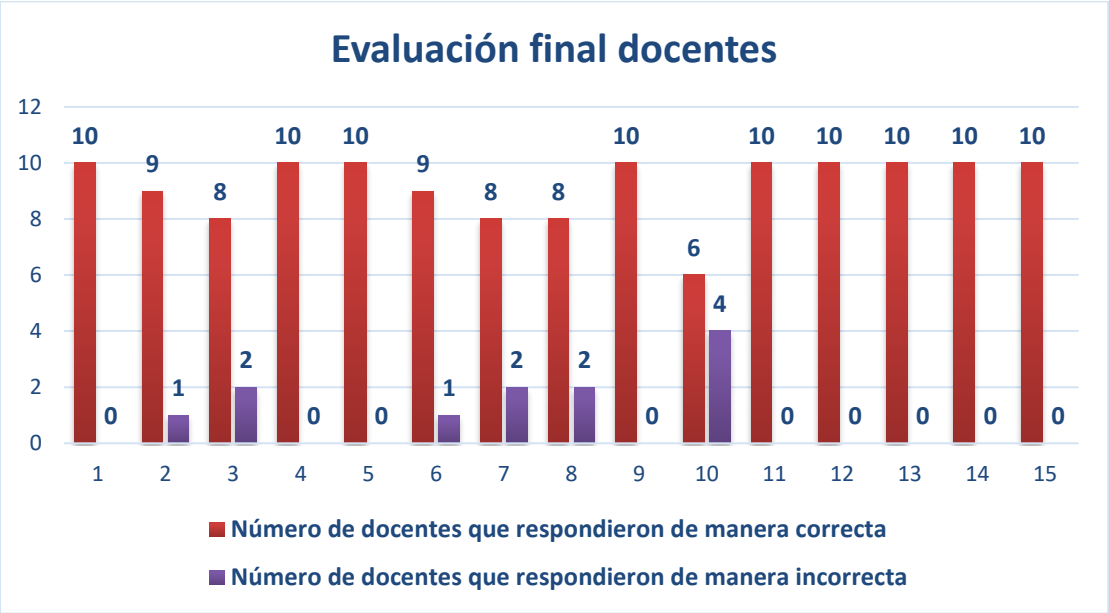
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4-4. Resultados evaluación final por docentes.

DOCENTES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CALIFICACIÓN FINALAL	90	90	80	100	100	100	100	80	90	100

Fuente: Elaboración propia.

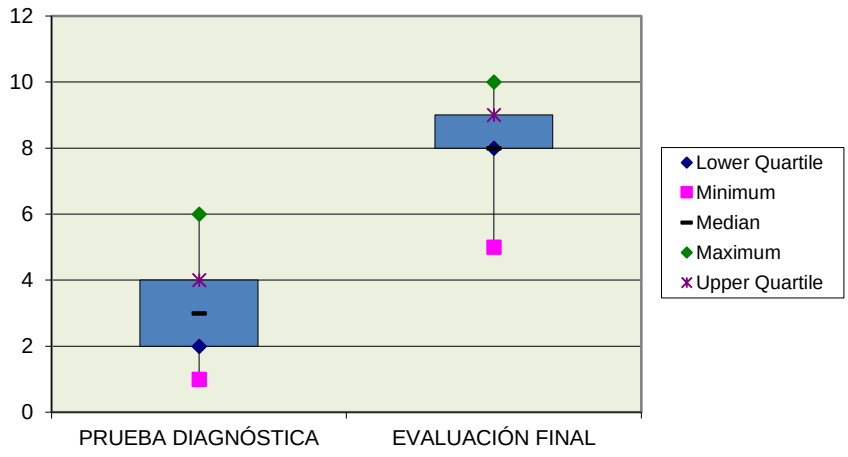
Figura 1-46. Resultados evaluación final docentes.



Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presenta un comparativo entre el porcentaje de respuestas correctas de la prueba diagnóstica con la evaluación final:

Figura 1-47. Comparativo porcentaje de respuestas correctas entre la prueba diagnóstica y la evaluación final aplicada a estudiantes.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4-5. Resultado prueba diagnóstica estudiantes.

PRUEBA DIAGNÓSTICA	
Cuartil inferior	2
Nota mínima	1
Mediana	3
Nota máxima	6
Cuartil superior	4

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4-6. Resultados evaluación final estudiantes.

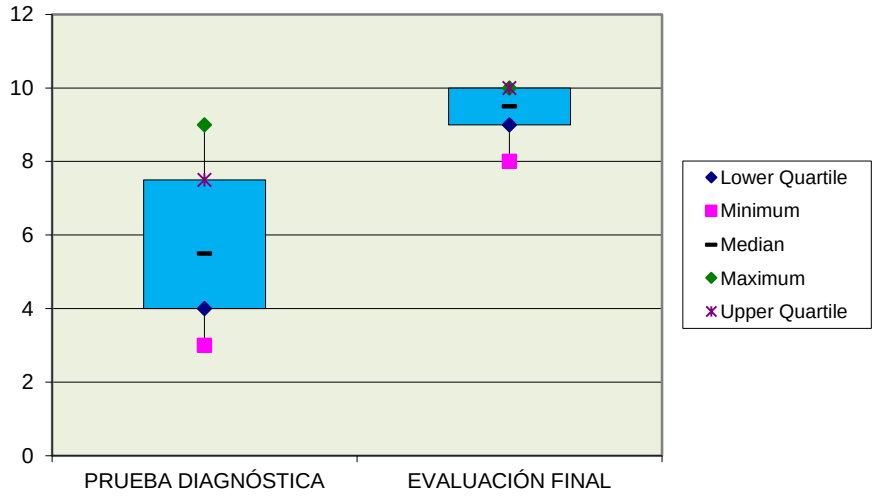
EVALUACIÓN FINAL	
Cuartil inferior	8
Nota mínima	5
Mediana	8
Nota máxima	10
Cuartil superior	9

Fuente: Elaboración propia.

Analizando la figura 1 – 47 y sus tablas adjuntas, se puede observar que los estudiantes pasaron de ser un grupo muy heterogéneo teniendo en cuenta sus resultados de la evaluación diagnóstica, a un grupo mucho más homogéneo y con mejores resultados.

Los estudiantes pasaron de una nota mínima de 1.0 a una de 5.0, mientras que en la nota máxima pasaron de 6.0 a 10.0, lo que corrobora que la aplicación de la unidad didáctica fue exitosa.

Figura 1- 48. Comparativo porcentaje de respuestas correctas entre la prueba diagnóstica y la evaluación final aplicada a docentes.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4- 7. Resultado prueba diagnóstica docentes.

PRUEBA DIAGNÓSTICA	
Cuartil inferior	4
Nota mínima	3
Mediana	5,5
Nota máxima	9
Cuartil superior	7,5

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4-8. Resultados evaluación final docentes.

EVALUACIÓN FINAL	
Cuartil inferior	9
Nota mínima	8
Mediana	9,5
Nota máxima	10
Cuartil superior	10

Fuente: Elaboración propia.

Al observar la figura 1 – 48 y sus tablas adjuntas se puede apreciar de la prueba diagnóstica, que los docentes evidencian problemas de comprensión de algunos conceptos relacionados con las fracciones y su manera de enseñarlas a sus estudiantes, sin embargo, con el desarrollo de la unidad se pueden validar que muchos de esos errores conceptuales quedaron superados al lograr una nota mínima en la evaluación final de 8 sobre 10 y una máxima de 10 sobre 10.

Figura 1- 49. Evaluación final**.**

Fuente: Fotografías tomadas por José Manuel Padilla Meriño.

En la tabla 4 – 9 se muestran los resultados de la ganancia de Hake para cada uno de los 33 estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre.

Tabla 4-9. Ganancia de Hake estudiantes.

ESTUDIANTES	% EVAL. DIAG.	% EVAL. FINAL	GANANCIA DE HAKE <*g*>	CATEGORÍA GANANCIA DE HAKE
1	20	80	0,75	Alta
2	40	80	0,67	Media
3	10	60	0,56	Media
4	30	80	0,71	Alta
5	20	80	0,75	Alta
6	10	70	0,67	Media
7	40	70	0,50	Media
8	30	70	0,57	Media
9	10	50	0,44	Media
10	30	90	0,86	Alta
11	30	90	0,86	Alta
12	50	90	0,80	Alta
13	40	90	0,83	Alta
14	30	80	0,71	Alta
15	40	80	0,67	Media
16	40	90	0,83	Alta
17	30	90	0,86	Alta
18	40	80	0,67	Media
19	20	75	0,69	Media
20	50	80	0,60	Media
21	60	100	1,00	Alta
22	40	80	0,67	Media
23	30	80	0,71	Alta
24	20	90	0,88	Alta
25	20	75	0,69	Media
26	40	100	1,00	Alta
27	40	100	1,00	Alta
28	20	75	0,69	Media
29	30	80	0,71	Alta
30	20	80	0,75	Alta
31	30	80	0,71	Alta
32	30	90	0,86	Alta
33	20	80	0,75	Alta
PROMEDIO	30,606	81,36	0,74	

Fuente: Elaboración propia

El promedio de ganancia de Hake del grupo es 0,74, está ubicada en la zona alta, teniendo en cuenta la tabla 2 – 2, de esto se puede decir que la implementación de la unidad didáctica para la enseñanza de las fracciones para estudiantes del grado 4º fue efectiva.

El 60,6% de los estudiantes quedaron ubicados en la zona alta y el 39,4% en la zona media, ninguno de los estudiantes quedó ubicado en la zona baja.

Por otro lado, se calcula la ganancia del grupo mediante la ecuación (2 – 2)

$$< \bar{g} > = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_i$$

$$< \bar{g} > = \frac{1}{33} \sum_{i=1}^{n} 24{,}42 = \frac{1}{33} \times 24{,}41$$

$$= 0{,}74$$

Se puede ver que el resultado es exactamente el mismo para el promedio del grupo, lo que corrobora que la unidad didáctica desarrollada fue efectiva.

En cuanto a los docentes, en la tabla 4 – 10 se muestran las ganancias de Hake obtenidas por cada uno de ellos:

Tabla 4-10. Ganancia de Hake docentes.

DOCENTES	% EVAL. DIAG.	% EVAL. FINAL	GANANCIA HAKE <*g*>	CATEGORÍA GANANCIA DE HAKE
1	50	90	0,80	Alta
2	40	90	0,83	Alta
3	30	80	0,71	Alta
4	90	100	1,00	Alta
5	60	100	1,00	Alta
6	80	100	1,00	Alta
7	80	100	1,00	Alta
8	30	80	0,71	Alta
9	60	90	0,75	Alta
10	40	100	1,00	Alta
PROMEDIO	56,00	93,00	0,88	

Fuente: Elaboración propia.

El promedio de ganancia de Hake del grupo es 0,88, está ubicada en la zona alta teniendo en cuenta la tabla 2 – 2, de esto se puede decir que la implementación de la unidad didáctica para la enseñanza de las fracciones también resultó efectiva para los docentes.

El 100% de los docentes quedaron ubicados en la zona alta.

En cuanto a la ganancia grupal, se vuelve a usar la ecuación (2 – 2) y se obtiene:

$$< \bar{g} > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i$$

$$< \bar{g} > = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n} 8{,}81 = \frac{1}{10} \times 8{,}81$$

$$= 0{,}881$$

El resultado es exactamente el mismo para el promedio del grupo, lo que corrobora que la unidad didáctica desarrollada fue efectiva.

Para verificar si la propuesta fue realmente efectiva también se utilizó el índice de dificultad para cada una de las preguntas que contenía la prueba diagnóstica (la evaluación final contiene las mismas preguntas).

Teniendo en cuenta lo anterior, y haciendo uso de la ecuación 2 – 3 se calcula el índice de dificultad para los estudiantes y se presenta en la tabla 4 – 11:

Tabla 4-11. Índice de dificultad estudiantes

PREGUNTAS	% RESPUESTAS CORRECTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA	% RESPUESTAS CORRECTAS EVALUACIÓN FINAL	GANANCIA DE HAKE POR PREGUNTAS	ÍNDICE DE DIFICULTAD	CATEGORÍA DE LA PREGUNTA
1	69,7	96,97	0,9	0,70	Mf
2	36,4	72,73	0,6	0,36	Md
3	90,9	93,94	0,3	0,91	MF
4	39,4	90,91	0,9	0,39	Md
5	0,0	75,76	0,8	0,00	MD
6	81,8	84,85	0,2	0,82	Mf
7	24,2	81,82	0,8	0,24	MD
8	36,4	93,94	0,9	0,36	Md
9	0,0	57,58	0,6	0,00	MD
10	18,2	90,91	0,9	0,18	MD
11	0,0	66,67	0,7	0,00	MD
12	0,0	84,85	0,8	0,00	MD

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la tabla 4 – 11, la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grado 4º contenía seis preguntas catalogadas como muy difícil (MD), tres como moderadamente difícil (mD), dos como moderadamente fácil (mF) y una pregunta muy fácil (MF).

De las preguntas catalogadas como muy difícil, el porcentaje de la ganancia de Hake es de 0,75, ubicada en la zona alta, teniendo en cuenta la tabla 2 – 2, las que son moderadamente difícil, tienen un porcentaje de ganancia de Hake de 0,77 que también está zonificada como alta y las preguntas moderadamente fáciles tienen una ganancia de Hake de 0,53 que es una ganancia media y la pregunta muy fácil tiene una ganancia de Hake de 0,33 categorizada como media.

Para los docentes se aplica la ecuación 2 – 3 y se obtiene el índice de dificultad para cada una de las preguntas contenidas en la prueba diagnóstica aplicada a ellos.

Los resultados se presentan en la tabla 4 – 12:

Tabla 4-12. Índice de dificultad docentes.

PREGUNTAS	% RESPUESTAS CORRECTAS PRUEBA DIAGNÓSTICA	% RESPUESTAS CORRECTAS EVALUACIÓN FINAL	GANANCIA DE HAKE POR PREGUNTAS	ÍNDICE DE DIFICULTAD	CATEGORÍA DE LA PREGUNTA
1	70,0	100,00	1,0	0,70	Mf
2	30,0	90,00	0,9	0,30	MD
3	70,0	80,00	0,3	0,70	Mf
4	20,0	100,00	1,0	0,20	MD
5	60,0	100,00	1,0	0,60	Md
6	40,0	90,00	0,8	0,40	Md
7	20,0	80,00	0,8	0,20	MD
8	60,0	80,00	0,5	0,60	Md
9	30,0	100,00	1,0	0,30	MD
10	50,0	60,00	0,2	0,50	Md
11	0,0	100,00	1,0	0,00	MD
12	30,0	100,00	1,0	0,30	MD
13	50,0	100,00	1,0	0,50	Md
14	50,0	100,00	1,0	0,50	Md
15	40,0	100,00	1,0	0,40	Md

Fuente: Elaboración propia.

Al analizar la tabla 4 – 12 se puede observar que de las 15 preguntas contenidas en la prueba diagnóstica aplicada a los docentes que orientan el área de Matemáticas, seis de ellas están categorizadas como muy Difícil (MD), siete de ellas como moderadamente difícil (mD) y dos como moderadamente fácil (mF), ninguna estuvo categorizada como muy Fácil.

De las preguntas catalogadas como muy difícil, el porcentaje de la ganancia de Hake es de 0,93, ubicada en la zona alta, teniendo en cuenta la tabla 2 – 2, las que son moderadamente difícil, tienen un porcentaje de ganancia de Hake de 0,79 que también está zonificada como Alta y las preguntas moderadamente fáciles tienen una ganancia de Hake de 0,66 que es una ganancia media.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo final es la elaboración una unidad didáctica para docentes y estudiantes de grado cuarto (4º) que les permita dar significado a las operaciones adición y sustracción de fracciones, con el apoyo de recursos y materiales diversos.
La unidad didáctica fue diseñada e implementada en la Institución Educativa Casimiro Raúl maestre de la ciudad de Valledupar y su validez se corroboró mediante dos métodos cuantitativos: la ganancia de Hake y el índice de dificultad.

Al finalizar la implementación se pueden señalar las siguientes conclusiones:

- La aplicación de la unidad didáctica fue efectiva, si se analiza que la ganancia de Hake obtenida entre los estudiantes fue de 0,74; lo que permite determinar que hubo ganancia conceptual sobre las fracciones en los estudiantes del grado 4º.

- Con la implementación de la unidad didáctica los docentes pudieron superar errores conceptuales que tenían y esto se evidenció con el resultado de la evaluación diagnóstica, ya que al calcular la ganancia de Hake, fue de 0,88 categorizada como alta, teniendo en cuenta la Tabla 2 – 2.

- Al realizar un comparativo entre el promedio de la prueba diagnóstica de los estudiantes y la evaluación final, pasó de 30,6% a 81, 36%, lo que establece que los estudiantes mejoraron su desempeño frente al tema de fracciones en un 50%. Mientras que los docentes, pasaron de un promedio de 56% en la prueba diagnóstica a 93% en la evaluación final, logrando una mejoría porcentual de 37%.

- Con respecto a la ganancia normalizada promedio para estudiantes de las preguntas realizadas en la prueba diagnóstica y la evaluación final, se obtuvo un valor de $< \bar{g} > = 0{,}74$ que concuerda con la ganancia normalizada del promedio del grupo de estudiantes del grado 4º. Esto muestra una vez más que la aplicación de la unidad didáctica diseñada fue efectiva para los estudiantes, ya que este resultado se encuentra categorizado en una zona de ganancia alta. En cuanto a los docentes, esta ganancia normalizada es de 0,881, también categorizada como alta.

- Las preguntas categorizadas como muy difícil (MD) en la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes, tuvieron una ganancia de Hake de 0,77, ubicado en la zona alta, lo que permite establecer que las preguntas donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad, lograron un avance conceptual significativo. Por parte de los docentes, las preguntas categorizadas como muy difícil (MD) obtuvieron una ganancia de Hake de 0,93, lo que corrobora una vez más la efectividad de la unidad didáctica diseñada.

- El promedio de la ganancia de Hake para las preguntas de los estudiantes tiene un valor de 0,7, que se ubica en la categoría alta, mientras que para los docentes es de 0,8, también categorizada como alta. Esto permite establecer que desde cualquier aspecto que se evalúe la unidad didáctica, esta resulta ser efectiva.

- Como aspecto cualitativo, cabe resaltar que los estudiantes se mostraron emocionados con el desarrollo de la unidad didáctica, ya que les llamaba mucho la atención los gráficos y juegos que se utilizaron para una mejor comprensión de los conceptos relacionados con la adición y sustracción de fracciones. Al finalizar cada sesión, manifestaban su agrado por los materiales utilizados en las clases y los aspectos lúdicos que contenían.

- Al visualizar la figura 1 – 47 donde se comparan los resultados de la prueba diagnóstica con la evaluación final, se observa un avance significativo en cuanto a la comprensión de los temas desarrollados por parte de los estudiantes. De igual manera se puede ver en la figura 1 – 48 que realiza la misma comparación, pero en el caso de los docentes.

- Otro aspecto importante es la opinión de los docentes partícipes de la estrategia, quienes manifiestan gran interés en desarrollar sus clases con el estilo presentado en la unidad didáctica implementada ya que, según su opinión, facilita la comprensión por parte de los estudiantes, deja a un lado el temor de los niños hacia las matemáticas y desarrolla un especial interés en esta asignatura.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda, principalmente a los docentes, que acojan y apliquen la unidad didáctica diseñada. Para mejoras futuras, se puede incorporar también el desarrollo de las actividades usando herramientas tecnológicas (Software de dibujos), tales como Corel Draw o Paint, ya que a los estudiantes les gusta mucho el uso del computador en el proceso de enseñanza – aprendizaje. Por otra parte, se puede continuar el diseño de la unidad didáctica acá presentada, considerando las demás operaciones entre fracciones, por ejemplo.

Bibliografía

Acevedo, Y. (2012). *Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica.*

Adaptado de: https://animateamas.files.wordpress.com/2015/10/fracciones.pdf. (12 de Enero de 2018).

Backhoff Escudero, E., Larrazolo Reyna, N., & Rosas Morales, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Redie, Revista Electrónica de Investigación Educativa, 2* (1).

Boyer, C. (1968). A History of Mathematics. USA: Wiley International Edition.

Carrión, V. L. (2008). *La armonia de los números.* España.

Fernández-Espada, C. (2012). *Cómo elaborar unidades didácticas.* Madrid.

García Aretio, L. (2009). *Las Unidades Didácticas I .* Bened.

Gil, D. (1997). *La formación permanente de profesores de Ciencias Experimentales.* España: Programa Alfa. Red Gacela, (24-25).

Gisbert Soler, V., & Blanes Nadal, C. (2013). Análisis de la Importancia de la Programación didáctica en la Gestión Docente. *Revista de investigación, Editada por Área de Innovación y Desarrollo, S.L*, (3 - 21).

Godino, J., & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros.

González Del Olmo, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria.* Cantabria: Universidad de Cantabria.

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *66*(1).

Hoffer, A. (1998). *Ratios y pensamiento proporcional. La enseñanza de las Matemáticas en los grados Octavos.* Boston: Allyn and Bacon.

ICFES. (2016). *ICFES*. Recuperado el 2015, de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Jáuregui, A. L., & Oliden, P. E. (2002). *Formulación y validación de un modelo logístico lineal para la tarea de adición y sustracción de fracciones y números mixtos.* Psicothema.

Mantilla, J. F. (2017). Conceptualización de expresiones decimales para estudiantes de quinto de primaria. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Martinez, L., & Solano, A. (2006). *Reflexiones acerca de las fracciones.* Gemat: Valledupar.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Santafé de Bogotá.

Paige, L., & Dean, J. (1982). *Elementos de álgebra lineal.* Barcelona: Reverté S.A.

Palmer, B. J. (2003). *Matemáticas Prácticas.* Barcelona: Reverté, S.A.

Peral, L. M. (2002). *Apuntes de historia de las matemáticas.* México: Universidad de Sonora.

Perera, P. B., & Valdemoros, M. E. (2009). *Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado.* México: Educación matemática.

Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las Fracciones: ¿Problemas de aprendizaje o problemas de la enseñanza? . *Pilquen, sección Psicopedagogía - año XIV - Nº 8*, 1 - 14.

Ramírez, M., & Block, D. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares.* Educación Matemática, vol. 21, núm. 1.

Ríbinicov, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Moscú: Mir Moscú.

Ruiz, Á. (1990). *Historia y filosofía de las matemáticas.* Costa Rica: UCR.

SIMAT. (2017).

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Crítica.

Tomado de: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/criterios_de_divisibilidad_matematicas_1_eso.pdf. (5 de mayo de 2018).

Tomado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf. (14 de octubre de 2017).

Tomado de: https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf. (13 de Octubre de 2017).

Tomado de: https://www.santillana.es/file/repository/782765.pdf. (12 de mayo de 2018).

Anexos

ANEXOS

A. Prueba diagnóstica aplicada a docentes

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Prueba Inicial Para Docentes

Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre **Grado: 4º** **Fecha:** _____

Nombre: _____

Temas: Representación gráfica de fracciones, Amplificación, Mínimo común múltiplo, Adición y Sustracción de fracciones

Apreciados Docentes: Esta prueba solo es para tener presente para el mejoramiento de la calidad educativa de la institución, en ningún caso sirve como instrumento para calificar al estudiante ni mucho menos evaluar el desempeño del docente, agradezco ser muy preciso y sincero en sus respuestas.

En los puntos de 1 a 4 escribe al frente de cada situación, si se trata de un contexto discreto o continuo donde se describe la fracción.

1. De la siguiente chocolatina se toman tres pedazos. La fracción de la chocolatina que se tomó fue $\frac{3}{24}$ _____

2. En uno de los salones del grado 4° que está conformado por 32 estudiantes, se seleccionan 5 para participar en las olimpiadas de matemáticas. La fracción de la totalidad de estudiantes del grado 4° que participaran en las olimpiadas de matemáticas es $\frac{5}{32}$ _____

3. Una cuerda mide 1,20 m y se divide equitativamente en 6 partes, de las cuales se utilizan 2 para un amarre. La fracción de la cuerda que no se utilizó fue $\frac{4}{6}$

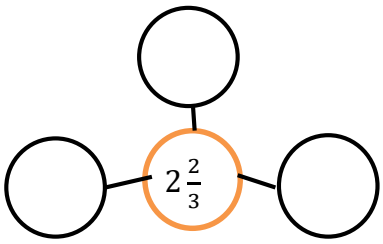
_____

4. De una caja que contiene 24 latas de gaseosas, 2 se rompieron y se perdió el contenido. La fracción de la totalidad de latas que se aprovecharon de la caja fue $\frac{22}{24}$

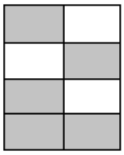
_____

5. Ubica en el óvalo la fracción numérica que se encuentra representada gráficamente.

6. Amplifica de tres maneras diferentes la fracción indicada y ubícalas en los óvalos correspondientes.



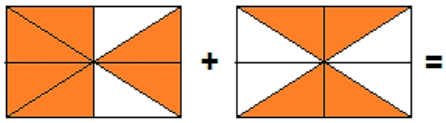
7. Para la siguiente fracción representada gráficamente, amplifica de dos maneras diferentes y represéntalas gráficamente.



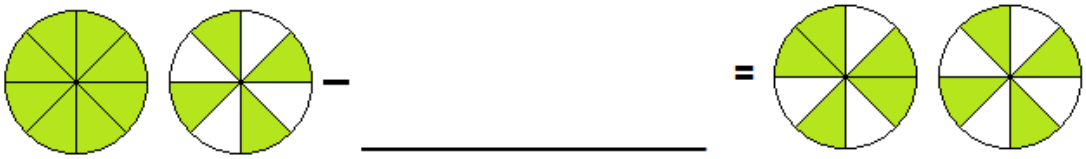
8. Halla el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las siguientes cantidades.

5, 12, 3, y 4

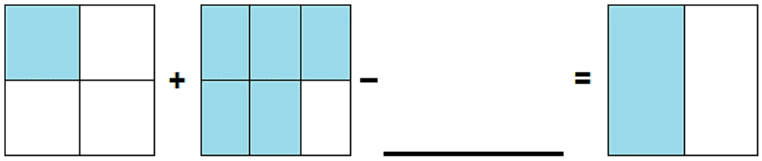
En los puntos de 9 a 11 ubica la figura faltante que satisfaga la operación indicada, tome como referencia en la representación la parte sombreada.

9.  **+** **=** _____

10.



11.



En los puntos 12 y 13 realiza las operaciones indicadas.

12. $3\frac{2}{7} + 4\frac{1}{7} - 5\frac{3}{7}$

13. $3\frac{1}{6} + 2\frac{5}{12} - 4\frac{3}{4}$

Resuelve las siguientes situaciones

14. Si una chocolatina se divide en 6 partes iguales y se consumen 4, luego las dos partes que quedan se dividen cada una en 4 partes iguales y se consumen 5. ¿Qué fracción de la chocolatina entera sobró?

15. Un alambre de 1 metro de longitud se divide en 5 partes iguales y se utilizan 3 más la mitad de una parte. ¿Cuántos centímetros de alambre se utilizaron?

Gracias por su colaboración

B. Prueba diagnóstica aplicada a estudiantes.

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Prueba Inicial Para Estudiantes

Institución Educativa Casimiro Raúl Maestre **Grado: 4º** **Fecha:** _____

Nombre: _____

Temas: Representación gráfica de fracciones, Amplificación, Mínimo común múltiplo, Adición y Sustracción de fracciones

Apreciados Estudiantes: Esta prueba solo es para tener presente en el mejoramiento de la calidad educativa de la institución, en ningún caso sirve como instrumento para calificar al estudiante ni mucho menos evaluar el desempeño del docente, agradezco ser muy preciso y sincero en sus respuestas.

En los puntos 1 y 2 escribe al frente de cada situación, si se trata de un contexto discreto o continuo donde se describe la fracción.

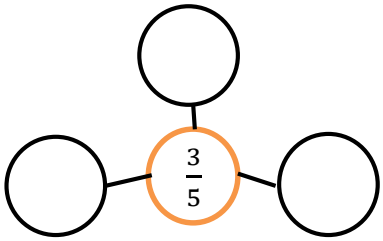
1. De la siguiente chocolatina se toman tres pedazos. La fracción de la chocolatina que se tomó fue $\frac{3}{24}$ _____

2. De una caja que contiene 24 latas de gaseosas, 2 se rompieron y se perdió el contenido. La fracción de la totalidad de latas que se aprovecharon de la caja fue $\frac{22}{24}$

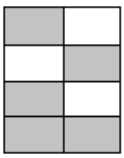
_____

3. Ubica en el óvalo la fracción que representa la parte sombreada en la siguiente representación gráfica.

4. Amplifica de tres maneras diferentes la fracción indicada y ubícalas en los óvalos correspondientes.



5. Para la siguiente fracción representada gráficamente, amplifica de dos maneras diferentes y represéntalas gráficamente.

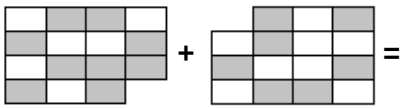


6. Halla el mínimo común múltiplo (m.c.m) de las siguientes cantidades.

3, 4, 8 y 12

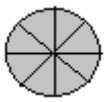
En los puntos 7 y 8 ubica la figura faltante que satisfaga la operación indicada, toma como referencia en la representación la parte sombreada.

7.

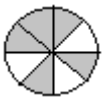


+ **=** _____

8.



- _____ **=**



En los puntos 9 y 10 realiza las operaciones indicadas.

9. $3\frac{2}{7} + 4\frac{1}{7}$

10. $\frac{5}{12} - \frac{3}{4}$

11. Si una chocolatina se divide en 6 partes iguales y se consumen 4, luego las dos partes que quedan se dividen cada una en 4 partes iguales y se consumen 5. ¿Qué fracción de la chocolatina entera sobró?

12. Un alambre de 1 metro de longitud se divide en 5 partes iguales y se utilizan 3, más la mitad de una parte. ¿Cuántos centímetros de alambre se utilizaron?

Gracias por su colaboración

C. Guía concepto de fracción y representación gráfica. (Primera sesión)

TIEMPO: 4 Horas

- **Estándar:** Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.

- **Eje Temático:** Concepto de fracción y representación gráfica.

- **Derecho básico de aprendizaje asociado al eje temático.**
- Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales. (DBA # 6 GRADO 3°)

- **Competencia:** Comunicación

- **Aprendizaje:** Identificar el uso de las fracciones para describir situaciones continuas y discretas en un contexto.

- **Evidencias:**
- ✓ Identificar situaciones donde se usa la fracción en contextos continuos
- ✓ Identificar situaciones donde se usa la fracción en contextos discretos
- ✓ Representar gráfica y simbólicamente fracciones en contextos continuos
- ✓ Representar gráfica y simbólicamente fracciones en contextos discretos

LA FRACCIÓN

I. Exploración de contextos

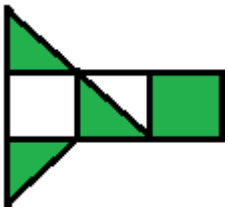
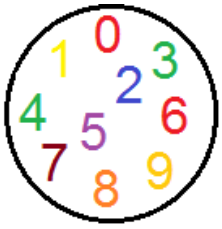


FIGURA GEOMÉTRICA

CHOCOLATINA

CONJUNTO DE FRIJOLES



CONJUNTO DE NÚMEROS

Preguntas exploradoras

a. Si tienes 15 triángulos elaborados en cartulina, congruentes con los pequeños que conforman la figura geométrica y quieres cubrir totalmente dicha figura con estos. ¿Cuántos necesitarías?

b. Si tienes 15 triángulos elaborados en cartulina, congruentes con los pequeños que conforman la figura geométrica y quieres cubrir la parte sombreada con estos. ¿Cuántos necesitarías?

c. Si uno de los triángulos pequeños que conforman la figura geométrica tiene como medida de su área 2 centímetros cuadrados. ¿Cuál es la medida del área de la parte sombreada? ¿Cuál es la medida del área total de la figura geométrica?

d. Escribe en el cuadro superior el número de triángulos que utilizaste para cubrir la parte sombreada de la figura geométrica y en el cuadro inferior escribe el número de triángulos que utilizaste para cubrir toda la figura geométrica.

e. ¿En cuántas partes equivalentes se encuentra dividida la chocolatina?

f. ¿La chocolatina se puede dividir en más partes de tamaños equivalentes?

g. Escribe la cantidad de frijoles rojos en el cuadro superior y la totalidad de frijoles que tiene el conjunto, en la parte inferior.

h. ¿Qué parte del conjunto de frijoles es negro?

i. Si en el conjunto de números, se toman las parejas que suman 5. ¿Cuántos elementos se utilizaron en el proceso?

j. Escribe en el cuadro superior la cantidad de números que no se utilizaron en el experimento anterior y en el cuadro inferior el número total de elementos del conjunto numérico.

k. ¿En cuáles figuras se puede hacer divisiones por porciones?

l. ¿En cuáles figuras se puede hacer divisiones por elementos?

II. Conceptualización

El uso y manejo de las fracciones se puede dar en diversos contextos, de los cuales algunos son de tipo continuo y otros de tipo discreto. Observa y detalla las figuras mostradas a continuación:

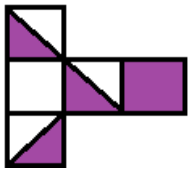
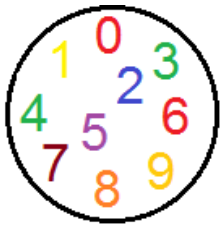


FIGURA GEOMÉTRICA

CHOCOLATINA

CONJUNTO DE FRIJOLES



CONJUNTO DE NÚMEROS

La figura geométrica, al igual que la chocolatina, es un solo elemento dividido en diversas partes, mientras que los conjuntos de frijoles y números están constituidos por diferentes elementos con alguna característica en común. Esta forma como están constituidos los objetos, figuras o conjuntos de elementos, es lo que hace que se clasifiquen en continuos o discretos.

La chocolatina y la figura geométrica se pueden partir en porciones equivalentes, de diferentes maneras, en estos casos estamos en contextos continuos. Al realizar subconjuntos o tomar elementos de los conjuntos de frijoles y de números hay que coger elementos completos, en estos casos estamos en contextos discretos.

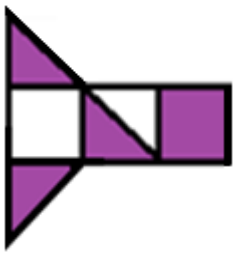
Fracciones en contextos continuos

Cuando cada objeto se divide en partes equivalentes, se denomina fracción a la razón entre una o varias partes equivalentes que se toman y la suma de todas las partes equivalentes.

Ejemplo 1:

Este elemento es de tipo continuo y está dividido en 10 partes equivalentes, si se consumen tres de estas, la fracción de la chocolatina que se consumió, representada simbólicamente es $\frac{3}{10}$ y representada gráficamente es donde la parte en blanco indica las partes que se consumieron. La parte sombreada representa $\frac{7}{10}$ de chocolatina y corresponde a la chocolatina que quedó.

Ejemplo 2:

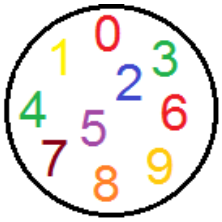


Este elemento es de tipo continuo y los triángulos pequeños que se visualizan son congruentes. En este caso no es necesario que la figura esté dividida en todas las partes iguales para poder escribir simbólicamente la fracción que representa el área sombreada, se puede inferir que cada cuadrado está formado por dos triángulos congruentes y toda la figura está formada por ocho triángulos de ese tipo. Para representar simbólicamente como una fracción el área de la región sombreada, esta es $\frac{5}{8}$ del área total de la figura geométrica.

Fracciones en contextos discretos

Si se tiene un conjunto formado por varios elementos con alguna característica en común, se denomina fracción a la razón entre el número de elementos escogidos en el conjunto y el número total de elementos que lo conforman.

Ejemplo 1



Teniendo en cuenta el anterior conjunto numérico, expresa simbólicamente como una fracción cada situación descrita a continuación:

1. La fracción del conjunto numérico que representa la cantidad de números mayores o iguales a 5 es: $\frac{5}{10}$
2. La fracción del conjunto numérico que representa la cantidad de números de color verde o azul pertenecientes a dicho conjunto es: $\frac{3}{10}$

III. Actividades prácticas en el aula

Observa las siguientes imágenes y situaciones:

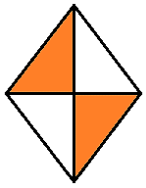


FIGURA 1

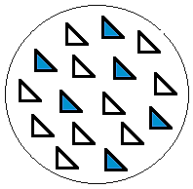


FIGURA 2

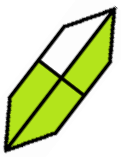


FIGURA 3

FIGURA 4

FIGURA 5

FIGURA 6

FIGURA 7

FIGURA 8

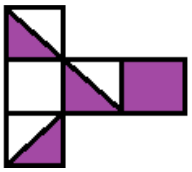


FIGURA 9

FIGURA 10

Situaciones

1. Una cuerda de un metro de largo se divide en pedazos de 20 centímetros cada uno y se toman 3 para unos amarres. ¿Cuántos pedazos salen del metro de cuerda? ¿Qué fracción del metro de cuerda se utilizó?

2. En un recipiente hay 32 granos de frijol y se utilizan 12 para un trabajo manual. ¿Qué fracción de los granos de frijol del recipiente quedó?

3. Se está pintando una pared de forma cuadrada con 4 metros de ancho y en este instante solo llevan 6 metros cuadrados pintados. ¿Qué fracción de la pared falta por pintar?

4. Una bolsa de dulces contiene 100 unidades, si se reparten dos dulces por asistente menor y en la fiesta hay 35 de estos, ¿qué fracción de los dulces de la bolsa se repartió?

Realiza y resuelve

i. Utilizar diversos materiales (galletas, frutas, bebidas, etc.) para dividirlos por partes equivalentes y tomar partes de estas, para escribir simbólicamente la fracción correspondiente.

ii. Construir en cartón paja los rompecabezas de las figuras 1, 3, 5, 6 y 9 y recortarlos por piezas (Tener presente en cada figura la semejanza y congruencia de las piezas).

iii. Comparar tamaños entre piezas de un mismo rompecabezas e inventar figuras de diferentes formas.

iv. Ubicar individualmente en pedazos cuadrados de cartón paja los elementos de los conjuntos 2, 4, 8 y 10 (los números y las letras recortarlos de revistas, los frijoles se pueden trabajar con diferentes tipos de granos y los triángulos del conjunto 2 hacerlos en cartulina de diferentes colores, respetando la congruencia entre ellos).

v. En la siguiente tabla marcar con una X el contexto de la fracción y escribir su representación numérica, teniendo en cuenta el punto de referencia dado (utilizar para esta actividad los rompecabezas y los conjuntos concretos realizados anteriormente).

	Punto de referencia para la representación	Contexto		Representación simbólica de la fracción
		Continuo	Discreto	
Figura 1	Región sombreada	X		$\frac{2}{4}$
Figura 2	Triángulos azules			
Figura 3	Región sombreada			
Figura 4	Frijoles rojos			
Figura 5	Botones verdes			
Figura 6	Región en blanco			
Figura 7	Partes consumidas			
Figura 8	Vocales abiertas			
Figura 9	Región en blanco			
Figura 10	Múltiplos de dos			

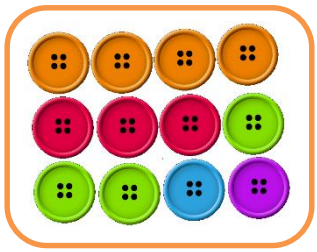
	Contexto		Representación simbólica de la fracción
	Continuo	Discreto	
Situación 1			
Situación 2			
Situación 3			
Situación 4			

IV. Prueba tus competencias

i. Escribe al frente de cada figura la representación simbólica de la fracción (según el punto de referencia) y el contexto de la misma (continuo o discreto)

a.

(Región sombreada) _____; _____

b. 

(Botones de color naranja) _____ ; _____

c.

(Región sombreada) _____ ; _____

d.

(Nombres terminados en o) _____ ; _____

ii. Escribe al final de cada situación la representación simbólica de la fracción y el contexto de la misma (continuo o discreto)

a. Una gaseosa grande contiene 3600 mililitros y se reparte en vasos con capacidad de 180 mililitros (6 onzas aproximadamente), si los vasos se llenan a ras y se reparten 15. ¿Qué fracción del contenido de la botella sobró? _____ ; _____

b. En el grado 4°, de 35 estudiantes solo 15 obtuvieron nota superior en la calificación definitiva de matemáticas. ¿Qué fracción del curso se encuentra en nivel superior en el área de matemáticas? _____ ; _____

c. En una encuesta hecha a 40 estudiantes sobre el área de su preferencia, 15 dijeron Ciencias Naturales, 8 Matemáticas, 10 Lenguaje y 7 Ciencias Sociales. ¿Qué fracción del total de estudiantes prefieren matemáticas? _____ ; _____

¿Qué fracción prefieren lenguaje? _____ ; _____

D. Guía fracciones propias, impropias y fracciones equivalentes. (Segunda sesión)

TIEMPO: 4 Horas

- **Estándar:** Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- **Eje Temático:** Representación de las fracciones propias e impropias.
- **Derechos básicos de aprendizajes asociados al eje temático**
- Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales. (DBA # 6 GRADO 3°)

- Compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad. (DBA # 7 GRADO 3°)

- **Competencia:** Comunicación

- **Aprendizaje:** Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.

- **Evidencias:**

✓ Representar gráficamente las fracciones en contextos continuos y discretos.
✓ Utilizar el lenguaje natural y la representación numérica para enunciar una fracción.
✓ Representar gráficamente las fracciones propias e impropias.
✓ Identificar cuando dos o más fracciones son equivalentes.
✓ Obtener fracciones equivalentes a partir de representaciones gráficas.

Fracciones propias e impropias

I. Exploración de contextos

Observa los siguientes números e imágenes

$$\frac{3}{5}; \quad 2\frac{1}{2}; \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{10}{3}$$

FIGURA 1

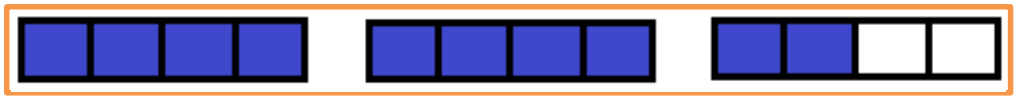


FIGURA 2

FIGURA 3

Preguntas exploradoras

a. ¿Cuáles números o figuras representan cantidades menor a 1?

b. ¿Cuáles números o figuras representan cantidades mayor a 1?

c. ¿Qué diferencia hay entre la figura 2 y la 3?

d. Observa la figura 1, escribe en el cuadro superior el número de partes de color amarillo y en el cuadro inferior el total de partes que forman dicha figura. $\frac{\square}{\square}$

e. Observa la figura 2, escribe en el cuadro superior el número total de partes de color azul y en el cuadro inferior el total de partes en que se divide cada uno de los tres rectángulos. $\frac{\square}{\square}$

f. Observa la figura 3, escribe en el cuadro superior el número total de partes de color azul y en el cuadro inferior el total de partes en que se dividió el rectángulo. $\frac{\square}{\square}$

II. Conceptualización

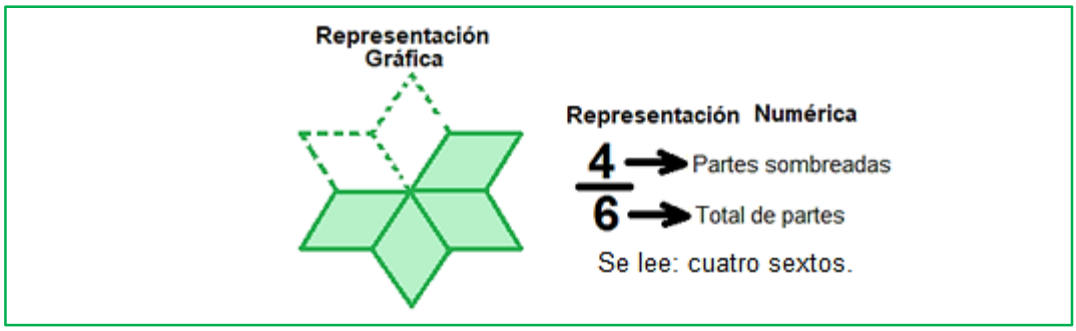
Fracciones propias e impropias

En general, una fracción se representa en la forma $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros y $n \neq 0$. En este contexto, m representa el número de partes seleccionadas y n el número de partes en que se divide cada unidad.

Cuando el número de partes que se seleccionan es menor que el número de partes en que se divide la unidad, ***la fracción es propia,*** esto es, $m < n$. Son ejemplo de estas: $\frac{3}{5}$; $\frac{10}{17}$; $\frac{315}{431}$.

A continuación se representa de forma gráfica y numérica una fracción propia en un contexto continuo.

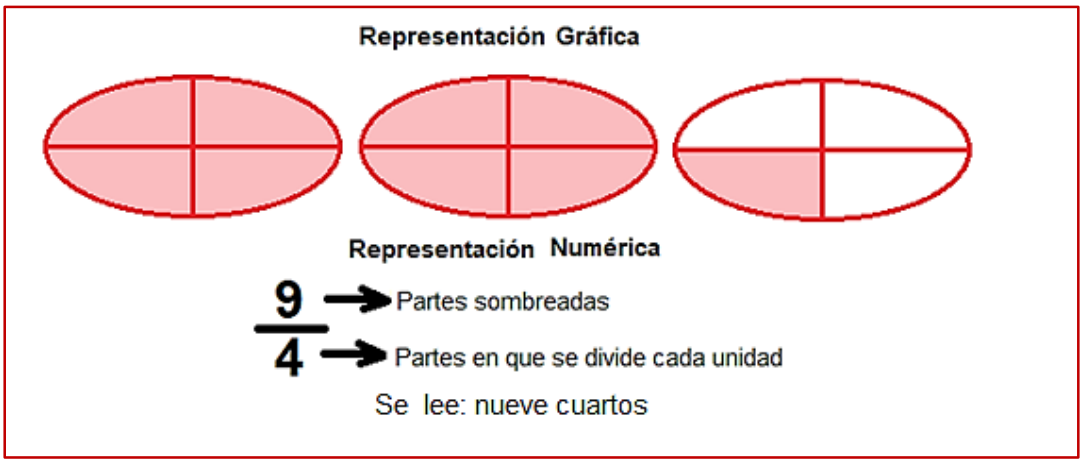
Representación gráfica y numérica de una fracción propia en contexto continuo.



Cuando el número de partes que se seleccionan es mayor o igual que el número de partes en que se divide cada unidad, ***la fracción es impropia,*** esto es $\frac{m}{n}$ donde $m \geq n$ y $n \neq 0$.

Son ejemplos de estas: $\frac{13}{7}$; $\frac{20}{19}$; $\frac{615}{531}$.

Representación gráfica y numérica de una fracción impropia en contexto continuo.



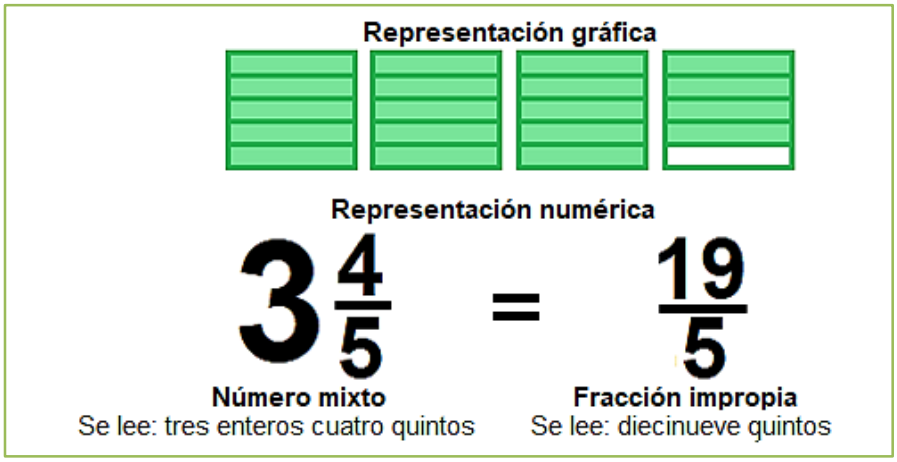
Nótese que al representar gráficamente la fracción impropia $\frac{9}{4}$ se necesitan 2 unidades completas y $\frac{1}{4}$ de otra unidad. Las fracciones impropias también se pueden escribir en forma de número mixto, por ejemplo, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ donde el número mixto $2\frac{1}{4}$ indica que se toman las dos unidades completas y la una cuarta parte de otra unidad adicional.

Número mixto

Los números mixtos están constituidos por un número entero diferente de cero y una fracción propia, tal como se indica en la anterior ilustración. En general, un número mixto se representa en la forma $a\frac{m}{n}$, donde a, m y n son números enteros, $a \neq 0$ y $n \neq 0$. Son ejemplos: $10\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{7}$; $7\frac{15}{31}$.

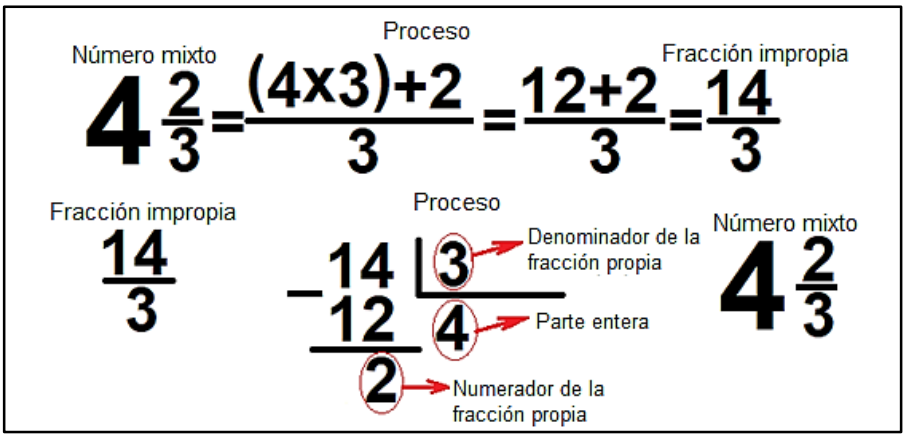
En la siguiente ilustración se representa gráficamente un número mixto y su fracción impropia equivalente.

Representación gráfica de una fracción impropia.



Todo número mixto se puede expresar como una fracción impropia y viceversa. Para expresar un número mixto como fracción impropia, se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción y ese resultado se suma con el numerador de la misma, para formar el numerador de la fracción impropia y el denominador se mantiene igual. Para el caso de expresar una fracción impropia como número mixto, se realiza la división del numerador por el denominador y de esta se toma el cociente para la parte entera, el residuo para el numerador de la fracción propia y el divisor para el denominador de la misma. A continuación, se ilustra los dos procesos.

Expresión de un número mixto en fracción impropia y viceversa.



Ejemplo 1

Representa gráficamente las siguientes fracciones:

$a.\ \frac{4}{5}$ $b.\ \frac{2}{7}$ $c.\ \frac{9}{2}$ $d.\ 2\frac{2}{3}$

Solución:

Representación gráfica de fracciones propias en contextos continuos

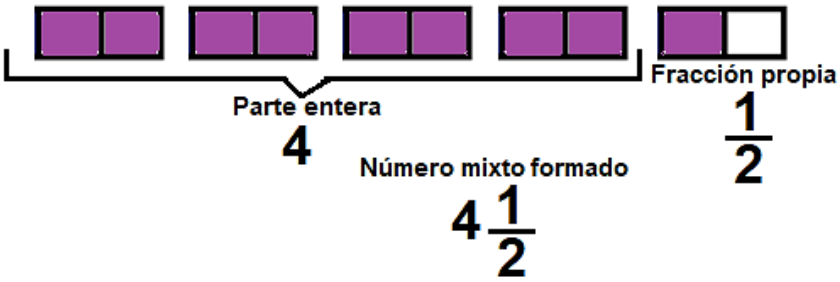
a. $\frac{4}{5}$ Se representa gráficamente así: esto indica que la parte sombreada representa gráficamente la fracción simbólica $\left(\frac{4}{5}\right)$. El 5 del denominador corresponde a las partes en que se divide la figura geométrica y el 4 del numerador, corresponde a las partes sombreadas o coloreadas.

b. $\frac{2}{7}$ Se representa gráficamente así:

Representación gráfica de fracciones impropias en contextos continuos

c. $\frac{9}{2}$ Se representa gráficamente así:

Cada unidad se divide en dos partes iguales, para tomar 9, de modo que se requieren varias unidades. Se puede notar en la fracción, que al dividir el numerador por el denominador, resulta 4 unidades más un residuo, lo que indica que se deben graficar 5 figuras geométricas. Cada figura se divide en 2 partes, como lo indica el denominador de la fracción, y luego sombrean 9 partes, como lo indica el numerador. La anterior fracción impropia se expresa como un número mixto, esto es:



d. $2\frac{2}{3}$ Se representa gráficamente así:

Cuando la fracción es impropia y está expresada como un número mixto (parte entera y fracción) se necesitan varias figuras geométricas para la representación gráfica, se deben dibujar tantas figuras geométricas como el valor del natural y una más para la parte de la fracción, en este caso el valor entero es 2, se deben dibujar tres figuras geométricas congruentes, dos para cubrir las dos unidades, y una más para representar la fracción. Cada figura debe dividirse en la misma cantidad de partes, en este caso 3, el denominador de la fracción. Las figuras que representan el número natural se deben sombrear todas y para la fracción solo las partes que indique el numerador de la fracción. En la representación gráfica se observa que cada unidad está dividida en 3 partes y hay 8 partes sombreadas o coloreadas, lo que indica que la fracción impropia tiene numerador 8 y denominador 3, esto es:

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Ejemplo 2

Representación gráfica de fracciones propias en contextos discretos

a. En una encuesta hecha a 40 estudiantes sobre el área de su preferencia, 15 dijeron Ciencias Naturales, 8 Matemáticas, 10 Lenguaje y 7 Ciencias Sociales. ¿Qué fracción del total de estudiantes prefieren Ciencias Sociales?

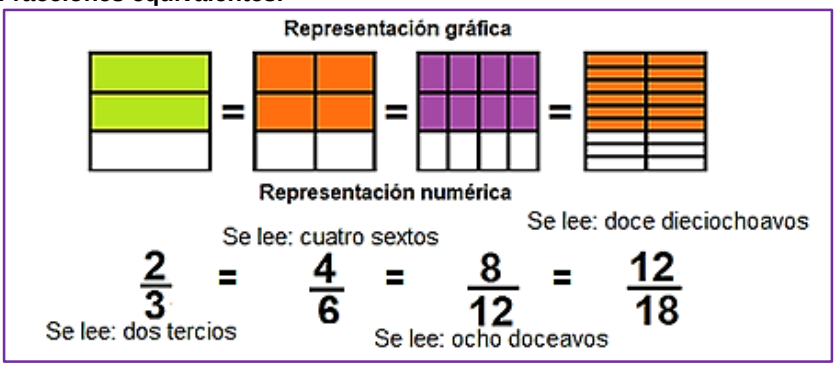
Solución:

Primero hagamos la representación simbólica de la situación. Como se pide la fracción del total de estudiantes que prefieren Ciencias Sociales, se debe tomar como numerador el número de estudiantes que prefieren esta área y como denominador la totalidad de estudiantes encuestados e indicar la razón entre estos; esto es: $\frac{7}{40}$, ahora hagamos la representación gráfica de la situación:

Representación gráfica

Fracciones equivalentes

Fracciones equivalentes.

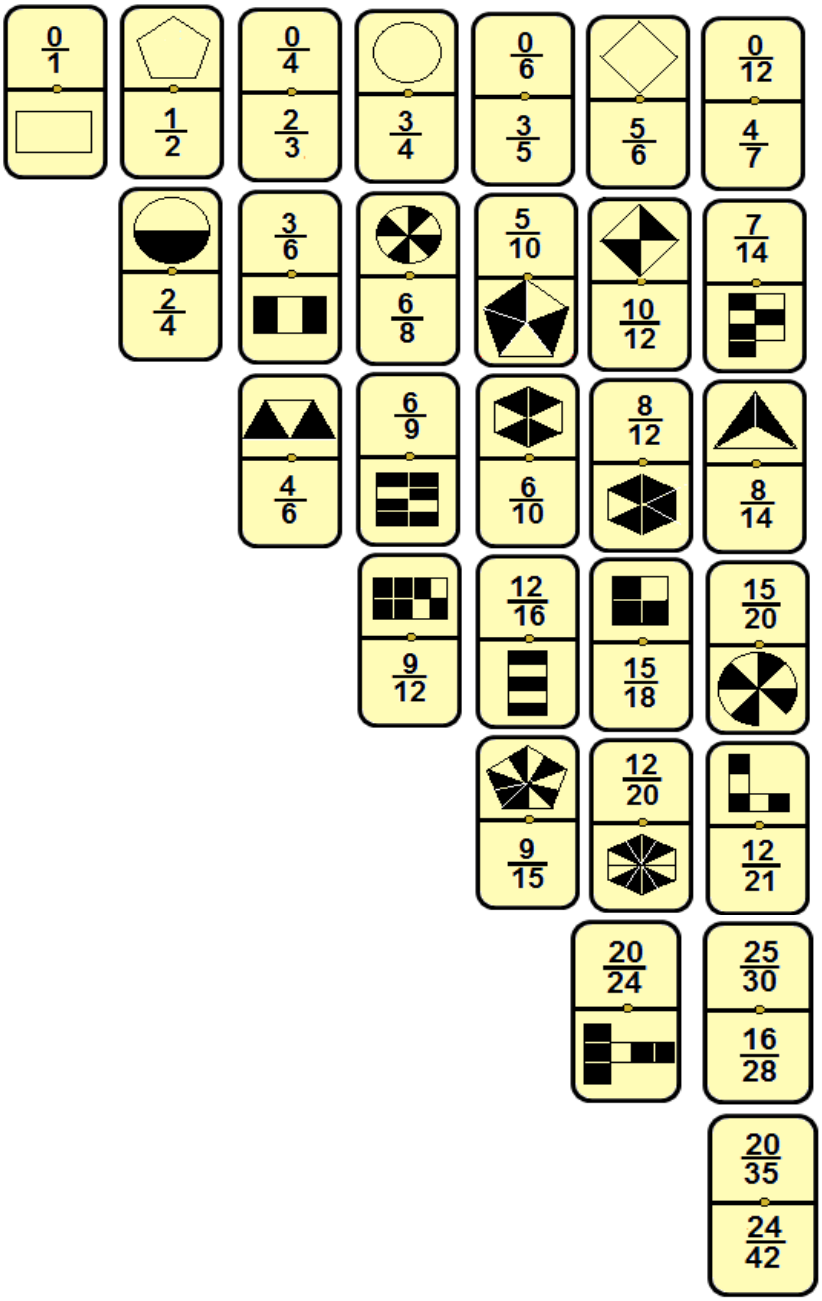


En la ilustración anterior se evidencia que en las cuatro representaciones gráficas, las regiones coloreadas representan la misma porción de la unidad y como en cada dibujo se divide la unidad en diferente número de partes, las fracciones se mencionan diferente, pero todas representan la misma cantidad, por eso se llaman fracciones equivalentes. Además,

se dice que dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Son ejemplos de estas: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18}$

III. Actividades prácticas en el aula

Dominó de fracciones propias equivalentes



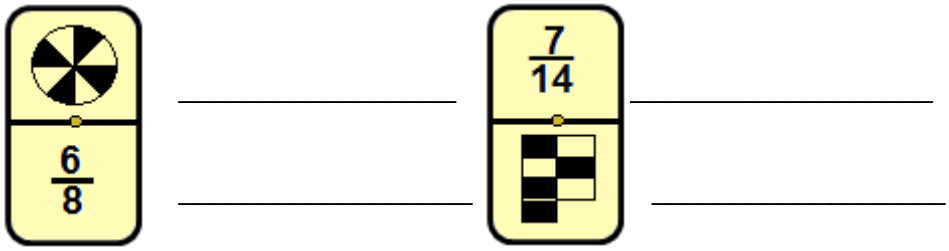
Reglas del juego:

1. En el juego pueden participar 4, 3 o 2 jugadores.
2. Cada jugador toma una ficha para definir quien inicia el juego, quien saque la ficha con el numerador mayor en alguna de las fracciones expresadas numéricamente inicia la partida, después de esta partida iniciará el juego quien cada vez gane el juego.
3. El orden del juego es en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
4. Si son 4 jugadores cada uno toma siete fichas, si son menos también toman 7 fichas cada uno y las sobrantes se colocan boca abajo en la mesa.
5. El jugador que inicia la partida puede salir con dobles o con cualquier ficha.
6. El segundo jugador ubica una ficha de tal manera que la fracción en uno de sus extremos sea equivalente a la que está ya jugada en la mesa.
7. El jugador que le toque el turno siempre tiene la opción de ubicar una de sus fichas en alguno de los dos extremos de la figura que se va armando.
8. Cuando un jugador, dentro de sus fichas no tiene una equivalente con alguno de los extremos de la figura formada en la mesa, come fichas de las disponibles hasta hallar la que puede jugar, si no hay fichas para comer, cede el turno.
9. El juego lo gana el primer jugador que quede sin fichas. En el caso que ningún jugador termine sin fichas, el jugador que tenga la menor suma de los numeradores en las fracciones simbólicas de sus fichas, es el ganador. Para las fichas que tienen dos fracciones simbólicas, se toma el numerador de la fracción con menor denominador para el conteo.
10. El punto de referencia para la fracción gráfica es la región sombreada.

Realiza o resuelve

i. Armar grupos de 4 estudiantes para jugar al dominó. El docente da las instrucciones y reglas del juego y verifica que en cada mesa se coloquen las fichas correctamente.

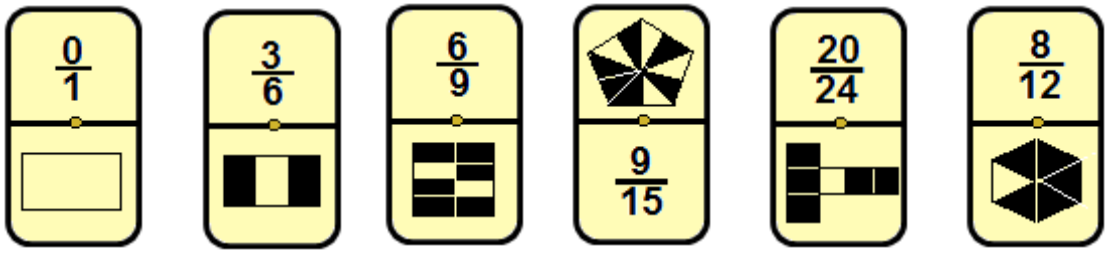
ii. Escribe o representa gráficamente según el caso, cada uno de los extremos de las siguientes fichas.



iii. En el dominó se le llama doble a la ficha que tiene fracciones equivalentes en sus extremos, por ejemplo, la ficha que se muestra a continuación es un doble:

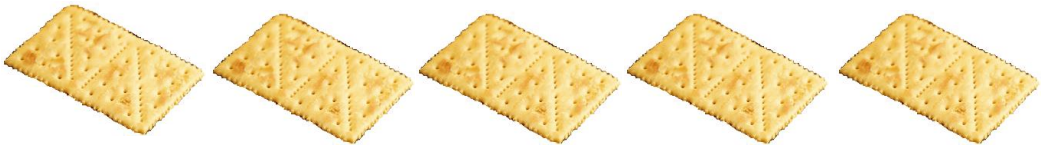
Esta ficha es doble porque $\frac{9}{12}$ y $\frac{6}{8}$ son equivalentes, ambas al simplificarse son $\frac{3}{4}$. Dicho de otra manera, si las dos partes que conforman una ficha son equivalentes, entonces esta será un doble.

Marca con una X las fichas que son dobles de las que se muestran a continuación:



iv. Representa simbólica y gráficamente las fracciones que se describen en las siguientes situaciones.

a. En la entrada a cine los menores pagan la mitad del valor que deben pagar los adultos para su ingreso, si en la taquilla se recolectaron 150 boletos de entrada, de los cuales 110 eran de menores. ¿Qué fracción del total de personas que pagaron su boleto de entrada eran adultos?

b. 

Se toman 5 galletas como las que se aprecian en la imagen anterior y cada una se divide en cuatro partes iguales. Un grupo de 17 niños consumen $\frac{1}{4}$ de galleta cada uno. ¿Qué cantidad de galletas consumieron?

c. Se le pide a un estudiante que forme el conjunto de los números naturales mayores que 7 y menores o iguales a 30, después que lo forma correctamente se le pide que subraye los múltiplos de 3. ¿Qué fracción del conjunto se subrayó?

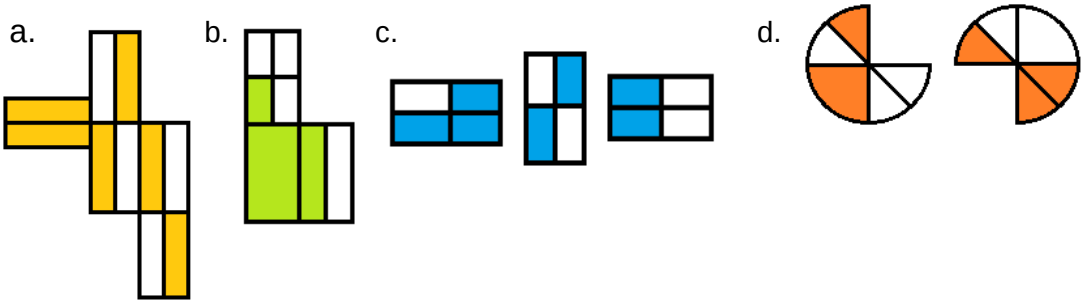
IV. Prueba tus competencias

i. Representa gráficamente las siguientes fracciones:

a. $\frac{4}{5}$ b. $\frac{8}{3}$ c. $3\frac{3}{5}$ d. $\frac{9}{2}$ e. $\frac{3}{7}$

ii. Escribe la fracción que corresponde a cada representación (punto de referencia región sombreada):

a. b. c. d.



iii. Resolución de problemas

En unas olimpiadas deportivas se hizo una encuesta a un grupo de niños participantes sobre el deporte en el que actuarían y respondieron según la siguiente lista:

Atletismo, fútbol, ciclismo, atletismo, baloncesto, fútbol, baloncesto, atletismo, ciclismo, fútbol, atletismo, ciclismo, baloncesto, ciclismo, fútbol, fútbol, ciclismo, atletismo, ciclismo y atletismo.

De acuerdo con lo anterior represente:

a. De manera gráfica la fracción de niños con respecto al grupo, que actuarán en fútbol.

b. De manera simbólica la fracción de niños con respecto al grupo, que actuarán en ciclismo.

E. Guía amplificación y simplificación de fracciones. (Tercera sesión)

TIEMPO: 3 Horas

- **Estándar:** Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.

- **Eje Temático:** Amplificación y simplificación de fracciones. (Propias e impropias)

- **Derechos básicos de aprendizajes asociados al eje temático**
- Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales. (DBA # 6 GRADO 3°)
- Compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad. (DBA # 7 GRADO 3°)
- Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones (DBA # 5 GRADO 4°)

- **Competencia:** Razonamiento

- **Aprendizaje: Justificar y generar equivalencias entre expresiones numéricas.**

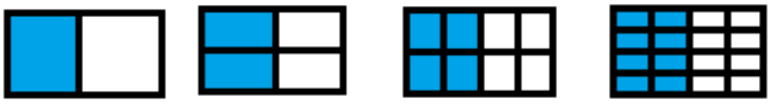
- **Evidencias:**
- ✓ Justificar por qué dos expresiones son o no equivalentes.
- ✓ Construir expresiones equivalentes a una expresión numérica determinada.
- ✓ Representar gráficamente las fracciones equivalentes.
- ✓ Diferenciar entre amplificación y ampliación en una representación gráfica.
- ✓ Llevar una fracción a su parte irreducible.

AMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES (PROPIAS E IMPROPIAS)

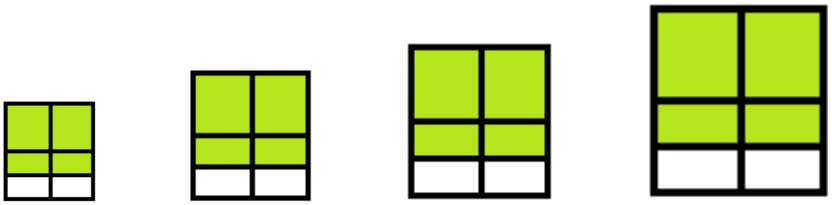
I. Exploración de contextos

Observa las siguientes figuras

a.



b.



Preguntas exploradoras

a. ¿Qué sucede con el área de la región sombreada de color azul en los rectángulos del inciso *a?*

b. ¿Qué sucede con el área de la región sombreada de color verde en los rectángulos del inciso *b?*

c. ¿En cuántas partes se encuentra dividido cada rectángulo en el inciso *a?*

d. ¿En cuántas partes se encuentra dividido cada rectángulo en el inciso *b?*

e. ¿Qué fracción del área del rectángulo representa la región sombreada de azul en cada figura?

f. ¿Qué observas en las fracciones que hallaste en el inciso *a*?

g. ¿Qué fracción del área del rectángulo representa la región sombreada de verde en cada figura?

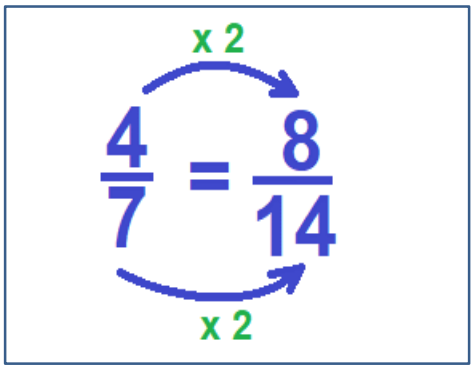
h. ¿Qué observas en las fracciones que hallaste en el inciso *b*?

i. ¿Crees qué dos fracciones que tengan diferencias de áreas en su representación gráfica e igual representación simbólica, tengan valores equivalentes?

II. Conceptualización

Amplificación de fracciones

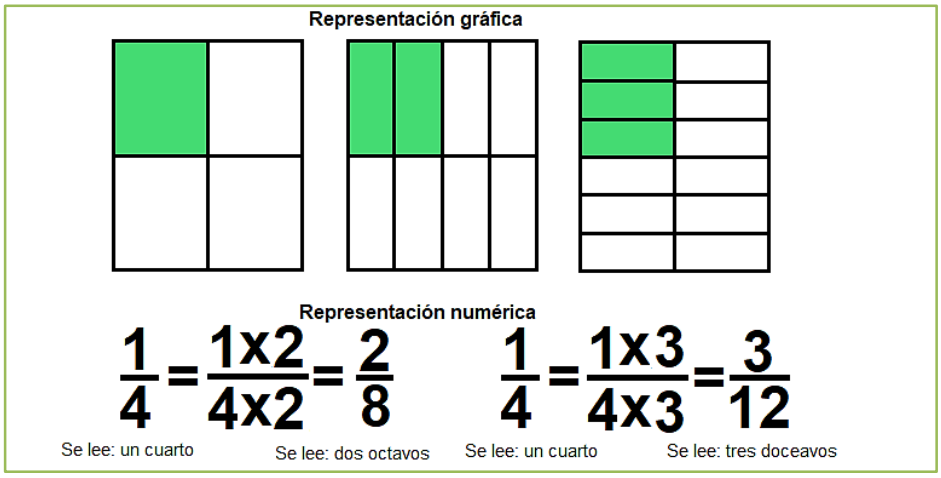
Amplificación de fracciones.



Amplificar una fracción consiste en hallar una fracción equivalente multiplicando al numerador y al denominador de esta por un mismo número diferente de cero y de uno.

En otras palabras, amplificar una fracción es transformarla en una equivalente con numerador y denominador mayores que los de la fracción inicial. Para amplificar se hace uso del algoritmo de la multiplicación de fracciones y de su módulo 1, toda fracción que se desee amplificar debe multiplicarse por otra fracción equivalente a uno (1). Una fracción equivalente a uno (1) es de la forma $\frac{a}{b}\ donde\ \ a = b\ \ y\ \ a, b \neq 0$.

Amplificación de fracciones de forma gráfica y numérica.

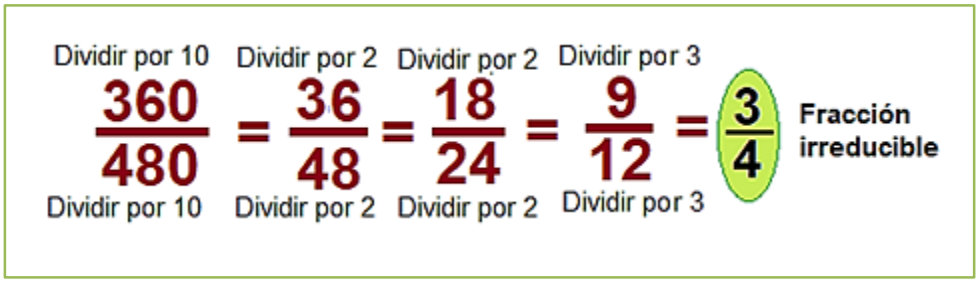


Nótese que en la ilustración anterior $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}\ y\ \frac{3}{12}$ corresponden a la misma porción sombreada de la unidad. Son fracciones equivalentes.

Amplificar no es sinónimo de aumentar la cantidad, este es el principal error que experimenta el estudiante creyendo que al amplificar una fracción esta se hizo mayor o se amplió. En el caso de la representación gráfica, amplificar una fracción es tomar la unidad y dividirla en más partes sin modificar su tamaño, tal como se puede observar en la ilustración 16. Al amplificar, la unidad y las regiones sombreadas mantienen su tamaño.

Simplificación de fracciones

Simplificación de fracciones.



Simplificar una fracción consiste en hallar fracciones equivalentes dividiendo sucesivamente al numerador y al denominador de esta por un mismo número diferente de cero y de uno.

Ejemplo:

Simplificar $\frac{50}{200} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones se debe multiplicar todos los numeradores y todos los denominadores de las fracciones involucradas y expresar estos resultados como la razón entre el resultado del producto de los numeradores por el de los denominadores.

Ejemplo

Multiplicar las siguientes fracciones

a. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{4\times5}{3\times2} = \frac{20}{6} = \frac{2\times10}{2\times3} = \frac{2}{2} \times \frac{10}{3} = 1 \times \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$

b. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{2\times3\times5}{3\times4\times2} = \frac{30}{24} = \frac{6\times5}{6\times4} = \frac{6}{6} \times \frac{5}{4} = 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

c. $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2\times3}{7\times5} = \frac{6}{35}$

Amplificación de fracciones

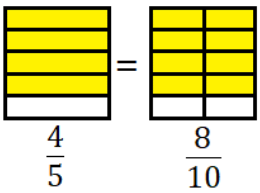
Para amplificar fracciones se procede de la siguiente manera:

a. $\frac{4}{5}$

Amplificación de la Fracción:

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4\times2}{5\times2} = \frac{8}{10}$$

Gráficamente se tiene:

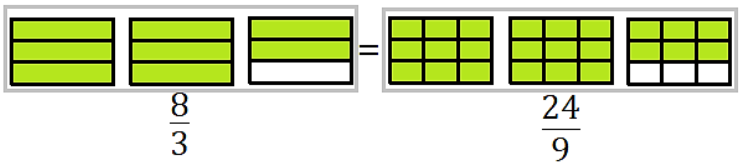


b. $\frac{8}{3}$

Amplificación de la Fracción:

$$\frac{8}{3} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{8\times3}{3\times3} = \frac{24}{9}$$

Gráficamente se tiene:

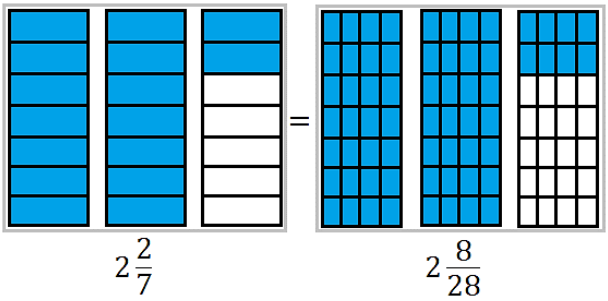


c. $2\frac{2}{7}$

Amplificación de la Fracción:

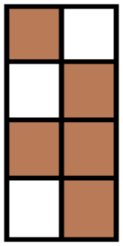
$$2\frac{2}{7} = 2\frac{2}{7} \times \frac{4}{4} = 2\frac{2\times4}{7\times4} = 2\frac{8}{28}$$

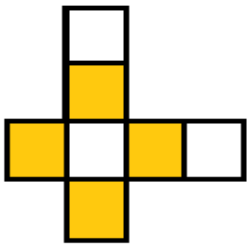
Gráficamente se tiene:

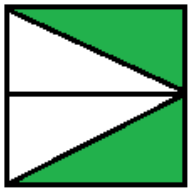


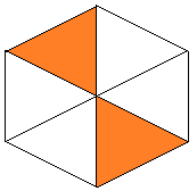
III. Actividades prácticas en el aula

i. Amplifique de manera gráfica las siguientes fracciones (punto de referencia la región sombreada)

a. 

b. 

c. 

d. 

ii. Amplifique de manera simbólica las siguientes fracciones

a. $\frac{5}{9}$ b. $\frac{9}{4}$ c. $5\frac{7}{9}$ d. $\frac{5}{7}$ e. $4\frac{3}{5}$

IV. Prueba tus competencias

i. Relaciona mediante una flecha la fracción (o gráfica) de la izquierda con su respectiva figura o fracción amplificada ubicada a su derecha, (para las gráficas el punto de referencia es la región sombreada).

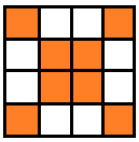
a. $\frac{6}{7}$

$\frac{10}{4}$

b.

$\frac{18}{21}$

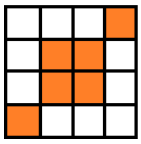
c. $2\frac{1}{2}$



d.

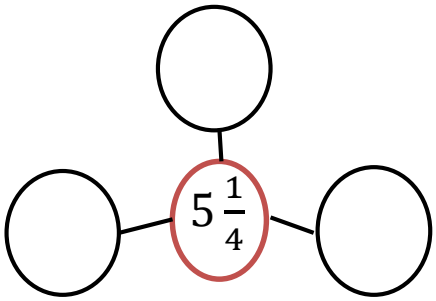
$2\frac{4}{6}$

e.

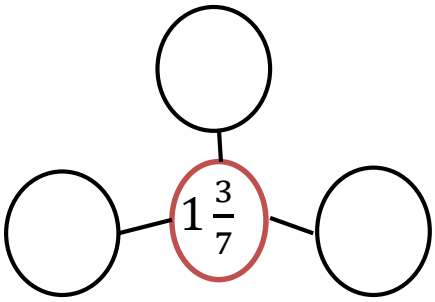


ii. Amplifica de tres maneras diferentes las fracciones indicadas y ubícalas en los óvalos correspondientes.

a.



b.



F. Guía operaciones entre fracciones. Adición y sustracción. (Cuarta sesión)

TIEMPO: 16 Horas

- **Estándar:** Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- **Eje Temático:** Adición y sustracción de fracciones. (Propias, Impropias, homogéneas y heterogéneas)
- **Derechos básicos de aprendizajes asociados al eje temático.**
- Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales. (DBA # 6 GRADO 3°)
- Compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que, aunque se vean distintas, representan la misma cantidad. (DBA # 7 GRADO 3°)
- Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones (DBA # 5 GRADO 4°)
- Realiza sumas y restas de fracciones (utilizando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento) en diferentes contextos (DBA # 6 GRADO 4°)
- **Competencia:** Comunicación
- **Aprendizaje:** Describir e interpretar propiedades y relaciones de los números y sus operaciones.
- **Evidencias:**
- ✓ Ordenar secuencias numéricas de acuerdo con las relaciones mayor, menor e igual que.
- ✓ Identificar propiedades de las operaciones.
- ✓ Identificar descomposiciones numéricas aditivas.
- **Aprendizaje:** Traducir relaciones numéricas expresada gráfica y simbólicamente.

- **Evidencias:**

✓ Establecer relaciones de ordenar (mayor, menor y equivalente) en fracciones simbólicas y representarlas gráficamente.

✓ Expresar simbólicamente operaciones (adición y sustracción) de fracciones.

➢ **Competencia:** Resolución de problemas.

- **Aprendizaje:** Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, cociente o razón.
- **Evidencias:**

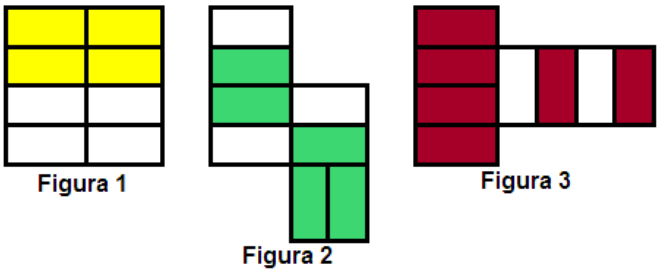
✓ Dar significado y utilizar la fracción como parte-todo, cociente o razón en contextos continuos y discretos para resolver problemas.

✓ Resolver situaciones problema sencillas con fracciones de uso común que requieran de la adición o sustracción para su solución.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

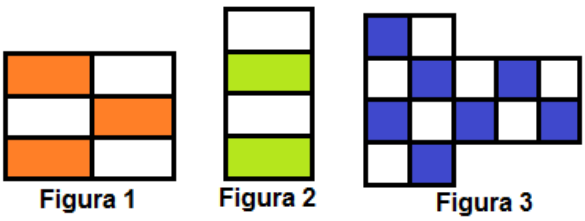
I. Exploración de Contextos

a.



b. $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{9}$; $1\frac{1}{9}$; $\frac{17}{9}$; $4\frac{5}{9}$; $\frac{23}{9}$

c.



d. $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $2\frac{3}{5}$; $\frac{15}{7}$; $7\frac{5}{8}$; $\frac{31}{2}$

Preguntas exploradoras

a. ¿En las figuras del inciso a qué fracciones simbólicas puedes escribir?
b. ¿Qué características comunes tienen las fracciones escritas en el punto anterior?
c. ¿Qué puedes decir de las partes en que se divide cada figura en el inciso a?
d. ¿Qué características comunes tienen las fracciones del inciso b?
e. ¿En las figuras del inciso c qué fracciones simbólicas puedes escribir?
f. ¿Qué sucede con los denominadores de las fracciones escritas en el punto anterior?
g. ¿Qué puedes decir de las fracciones del inciso d?
h. Dibuja todas las figuras del inciso a en cartón paja, recorta la figura 3 por cada división y toma esas partes para sobreponerlas en las partes en blanco de las otras dos figuras. ¿Qué fracción simbólica representa la nueva figura formada?
i. ¿Se puede hacer lo mismo que se hizo anteriormente con las figuras del inciso c?

II. Conceptualización

Para abordar el tema de adición y sustracción de fracciones se hace necesario recordar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos o más cantidades.

Mínimo común múltiplo

Para hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos o más cantidades, se debe descomponer en factores primos cada número y tomar los factores comunes con mayor exponente y los no comunes, multiplicarlos y el resultado corresponde al m.c.m de los números involucrados. Una manera de resumir este proceso es descomponer en factores primos en un mismo plano los valores en cuestión y luego multiplicar los números primos de la descomposición y este resultado corresponde al m.c.m

Ejemplo

Halle el m.c.m de las siguientes cantidades

a. 12, 24, 6 y 30

Descompongamos conjuntamente en factores primos los anteriores números

6	12	24	30	2
3	6	12	15	2
3	3	6	15	2
3	3	3	15	3
1	1	1	5	5
			1	

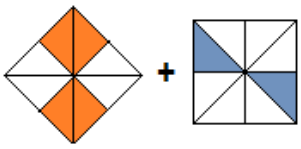
Luego el m.c.m de 6, 12, 24 y 30 es: $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

Adición de fracciones homogéneas

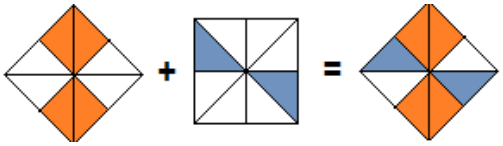
Las fracciones homogéneas son aquellas que sus denominadores son iguales.

Ejemplo 1

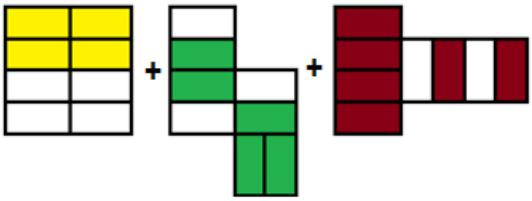
Representa gráficamente el resultado de la suma de las siguientes fracciones homogéneas (punto de referencia región sombreada) y luego escribe las fracciones.

a. 

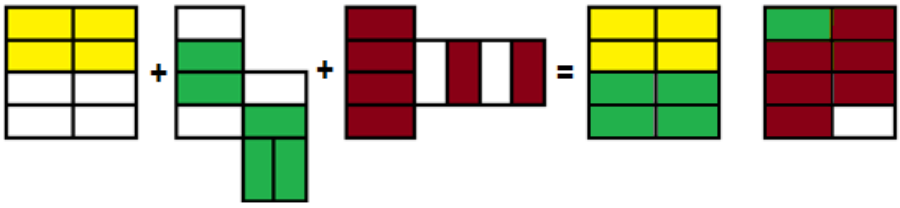
El resultado de la suma de las anteriores fracciones es:



Se tiene: $\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$

b. 

El resultado de la suma de las anteriores fracciones es:



Se tiene: $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{15}{8}$

En la adición de este tipo de fracciones el denominador se conserva y el numerador del resultado sale de la suma de todos los numeradores de las fracciones que se quieren sumar.

Ejemplo 2

Resuelve las siguientes sumas con fracciones

a. $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{17}{9}$

El resultado de la suma de las anteriores fracciones es

$$\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{17}{9}=\frac{2+3+17}{9}=\frac{22}{9}$$

b. $1\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}+4\frac{2}{5}$

Para sumar las anteriores fracciones se debe sumar tanto la parte natural como la parte fraccionaria de manera independiente y luego reunir los resultados, revisando si la fracción obtenida es propia o no, esto es:

$$1\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}+4\frac{2}{5}=(1+2+4)+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=7+\frac{1+3+2}{5}=7+\frac{6}{5}$$

$$=7+\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=7+1+\frac{1}{5}=8+\frac{1}{5}=8\frac{1}{5}$$

Adición de fracciones heterogéneas

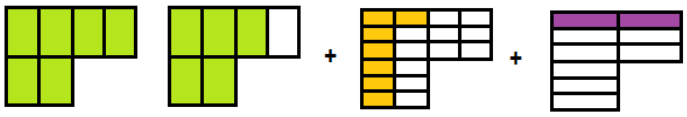
Dos fracciones son heterogéneas si sus denominadores son diferentes, para sumar fracciones de este tipo tomaremos algunos de los diferentes casos que se pueden presentar.

Caso 1

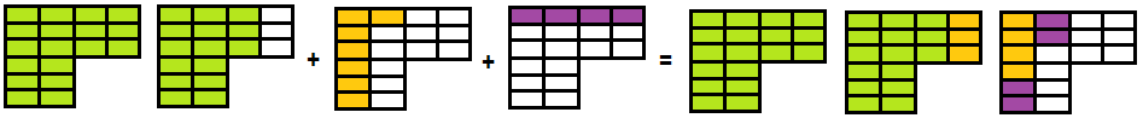
Cuando uno de los denominadores de las fracciones involucradas es divisible por los demás, esto es: $\frac{11}{6}+\frac{7}{18}+\frac{2}{9}$ en este caso 18 es divisible por 6 y por 9, ahora busquemos los valores que al multiplicar por 6 o por 9 dan como resultado 18, estos son 3 y 2 respectivamente. Estas fracciones heterogéneas se pueden convertir en homogéneas mediante el uso de la amplificación de fracciones, amplifiquemos de tal manera que los denominadores sean 18, esto es $\frac{11}{6}\times\frac{3}{3}=\frac{33}{18}\ \ y\ \frac{2}{9}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{18}$; después de amplificar se procede a operar la suma como homogéneas, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{11}{6}+\frac{7}{18}+\frac{2}{9}=\frac{33}{18}+\frac{7}{18}+\frac{4}{18}=\frac{33+7+4}{18}=\frac{44}{18}$$

De manera gráfica la anterior suma de fracciones se realiza de la siguiente manera:



Amplificación y resultado de la suma de las anteriores fracciones, esto es:



Nótese que en este caso 18 es el m.c.m de (3, 6 y 18).

Caso 2

Cuando ninguno de los denominadores es divisible por todos los demás por ejemplo $\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{3}{8}$, en este caso se busca el m.c.m entre los denominadores, hallémoslo:

$$\begin{array}{ccc|c} \cancel{5} & \cancel{10} & \cancel{8} & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{4} & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{2} & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{5} & 1 & 5 \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

El m.c.m es $2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

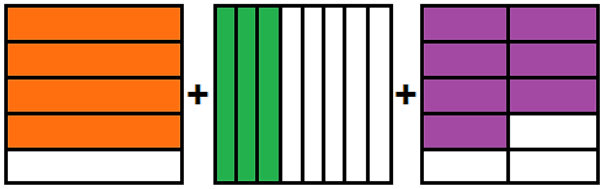
Ahora busquemos los valores que, al multiplicarlos por cada denominador resulta 40, estos son 8, 4 y 5 respectivamente, luego amplifiquemos cada fracción con el valor correspondiente, así:

$$\frac{4}{5}\times\frac{8}{8}=\frac{32}{40} \quad ; \quad \frac{7}{10}\times\frac{4}{4}=\frac{28}{40} \quad y \quad \frac{3}{8}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{40}$$

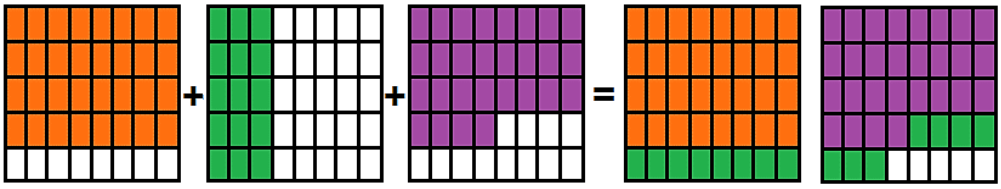
Las fracciones se convirtieron en homogéneas y se operan como tal, así:

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{3}{8}=\frac{32}{40}+\frac{28}{40}+\frac{15}{40}=\frac{32+28+15}{40}=\frac{75}{40}=\frac{5\times15}{5\times8}=\frac{5}{5}\times\frac{15}{8}=1\times\frac{15}{8}=\frac{15}{8}$$

De manera gráfica la anterior suma de fracciones se realiza de la siguiente manera



Amplificación y resultado de las anteriores operaciones con fracciones



Caso 3

Cuando las fracciones a sumar son mixtas, se debe realizar las sumas de las partes naturales independientemente de las partes fraccionarias y luego se reúnen los dos resultados. Para la parte fraccionaria se deben tener presente los casos 1 y 2, miremos el siguiente ejemplo:

Resolver la siguiente suma de fracciones mixtas

$$10\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}+9\frac{3}{5}$$

Solución

$$10\frac{2}{3}+3\frac{7}{4}+9\frac{3}{5}=(10+3+9)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)$$

Los denominadores son del caso 2, por tanto, el m.c.m es: $3\times 4\times 5=60$, luego:

3	~~4~~	~~5~~	2
3	~~2~~	5	2
~~3~~	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

m.cm. = 2x2x3x5 =60

$$10\frac{2}{3}+3\frac{7}{4}+9\frac{3}{5}=22+\left(\frac{2}{3}\times\frac{20}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{15}{15}+\frac{3}{5}\times\frac{12}{12}\right)$$

$$=22+\left(\frac{40}{60}+\frac{15}{60}+\frac{36}{60}\right)=22+\left(\frac{40+15+36}{60}\right)$$

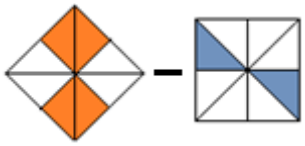
$$=22+\left(\frac{91}{60}\right)=22+\frac{60}{60}+\frac{31}{60}=22+1+\frac{31}{60}=23+\frac{31}{60}=23\frac{31}{60}$$

Sustracción de fracciones homogéneas

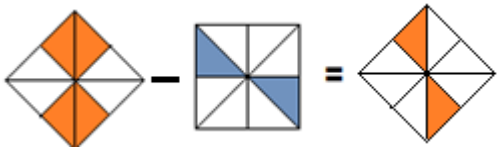
Las fracciones homogéneas son aquellas que sus denominadores son iguales, en la sustracción de este tipo de fracciones, el denominador se conserva y el numerador del resultado sale de la resta de los numeradores de las fracciones que se quieren operar.

Ejemplo 1

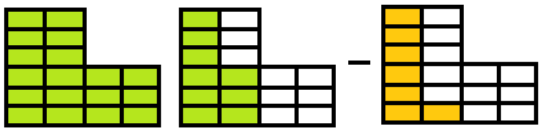
Representa el resultado de las operaciones indicadas en las siguientes fracciones homogéneas (punto de referencia región sombreada) y luego escribe las fracciones.

a. 

El resultado de la resta de las anteriores fracciones es:



Se tiene: $\frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$

b. 

El resultado de la sustracción de las anteriores fracciones es:

Se tiene: $\frac{27}{18} - \frac{7}{18} = \frac{20}{18}$

Ejemplo 2

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones

a. $\frac{17}{9} - \frac{7}{9}$

El resultado de la anterior resta de fracciones es:

$$\frac{17}{9} - \frac{7}{9} = \frac{17-7}{9} = \frac{10}{9}$$

b. $4\frac{2}{5} - 1\frac{1}{5}$

Para resolver la anterior resta de fracciones se debe operar tanto la parte natural como la parte fraccionaria de manera independiente y luego unir los resultados, esto es:

$$4\frac{2}{5} - 1\frac{1}{5} = (4-1) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 3 + \frac{2-1}{5} = 3\frac{1}{5}$$

Sustracciones de fracciones heterogéneas

Dos fracciones son heterogéneas si sus denominadores son diferentes, para operar fracciones (adición y sustracción) de este tipo tomaremos algunos de los diferentes casos que se pueden presentar.

Caso 1

Cuando uno de los denominadores de las fracciones involucradas es divisible por los demás, esto es: $\frac{1}{5} - \frac{4}{25}$ en este caso 25 es divisible por 5, ahora busquemos el valor que al multiplicarse por 5 da como resultado 25, este es 5. Amplifiquemos, esto es:

$\frac{1}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{25}$ después de amplificar se procede a operar la resta como homogénea, esto es:

$$\frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{5}{25} - \frac{4}{25} = \frac{5-4}{25} = \frac{1}{25}$$

Caso 2

Cuando los denominadores de las fracciones involucradas no son divisibles entre ello, por ejemplo $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, en este caso se busca el m.c.m entre los denominadores, hallémoslo:

$$\begin{array}{cc|c} \cancel{4} & \cancel{3} & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & 2 \\ 1 & \cancel{3} & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

El m.c.m. es $2 \times 2 \times 3 = 12$

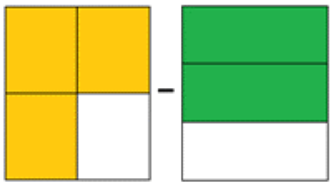
Ahora busquemos los valores que al multiplicarlos por los denominadores resulta 12, estos son 3, y 4 respectivamente. Amplifiquemos, esto es:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12} \quad y \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

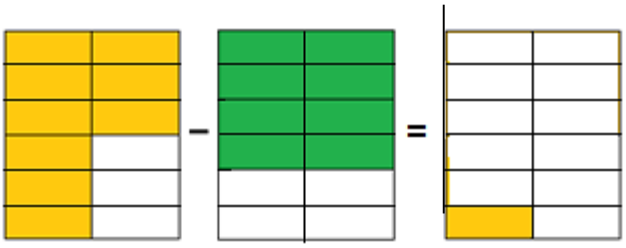
Las fracciones se convirtieron en homogéneas y se operan como tal, así:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12}$$

De manera gráfica la anterior resta de fracciones se realiza de la siguiente manera



Amplificación y resultado de la anterior operación con fracciones



Caso 3

Cuando las fracciones a operar (adición y sustracción) son mixtas, se debe realizar las operaciones de las partes naturales independientemente a las partes fraccionarias y luego se unen los dos resultados, para la parte fraccionaria se debe tener presente los casos 1 y 2, miremos el siguiente ejemplo:

Resolver la siguiente operación con fracciones mixtas

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6}$$

Solución

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6} = (25 - 12) + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{6}\right)$$

Hallemos el m.c.m. de los denominadores

~~8~~	~~6~~	2
~~4~~	~~3~~	2
~~2~~	~~3~~	2
1	~~3~~	3
	1	

El m.c.m de 8 y 6 es $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

Luego;

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6} = (25 - 12) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{3} - \frac{1}{6} \times \frac{4}{4}\right)$$

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6} = (13) + \left(\frac{9}{24} - \frac{4}{24}\right)$$

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6} = 13 + \frac{9-4}{24}$$

$$25\frac{3}{8} - 12\frac{1}{6} = 13 + \frac{5}{24} = 13\frac{5}{24}$$

Actividades prácticas en el aula

i. Utiliza cartón paja o cartulina para realizar las figuras geométricas y rompecabezas para representar y realizar las siguientes operaciones:

a. $\frac{3}{5} + \frac{12}{5} + \frac{2}{5}$ b. $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) - \frac{9}{16}$

ii. Realiza las siguientes operaciones utilizando representación gráfica y numéricamente.

a. $\left(2\frac{1}{4} + 4\frac{2}{8}\right) - 5\frac{1}{2}$ b. $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{12}\right) - \frac{1}{4}$ c. $\left(\frac{9}{4} + \frac{13}{4}\right) - \frac{22}{4}$

iii. **Situaciones problema**

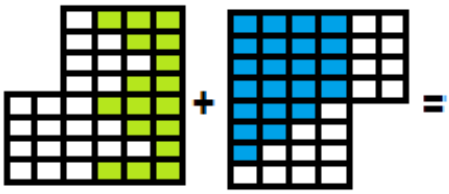
a. Si una torta se divide en 15 pedazos y luego 5 de estos se parten por la mitad, si se reparten 8 pedazos grandes y 9 pequeños. ¿Qué fracción de la torta no se repartió?

b. Una bolsa resiste máximo 25 kilogramos y en ella un cliente mete $15\frac{1}{4}\ kg$. de carne de res, $\frac{17}{5}\ kg$. de verdura y $\frac{13}{2} kg$. de pollo. ¿Qué fracción de gramos sobrepaso de la capacidad de la bolsa el cliente?

III. Prueba tus competencias

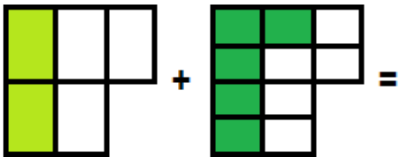
i. Representa gráficamente la figura faltante en cada espacio.

a.

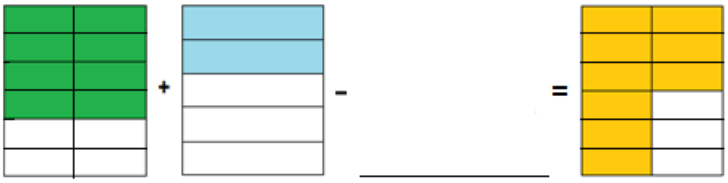


b.

c.



d.



ii. Realiza las siguientes operaciones

a. $\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\right)-\frac{3}{5}$ b. $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ c. $\left(3\frac{2}{7}+4\frac{1}{7}\right)-5\frac{3}{7}$ d. $\left(3\frac{1}{6}+2\frac{5}{12}\right)-1\frac{3}{4}$

iii. Resuelve las siguientes situaciones problemas

a. Si $240000 se repartieron de la siguiente manera: la cuarta parte para José, de lo que quedó se dio la tercera parte a Diana y el resto a Pedro. ¿Qué cantidad de dinero le correspondió a cada uno?

b. Si una torta se divide en 15 partes iguales y se consumen 10, luego las 5 partes que quedan se dividen cada una en 3 partes iguales y se consumen 12. ¿Qué fracción de la torta entera sobró?

c. Un alambre de $1\frac{1}{2}$ metro de longitud se divide en 5 partes iguales y se utilizan 3 más la mitad de una parte. ¿Cuántos centímetros de alambre se utilizaron?

d. Un recipiente tiene una capacidad de $3200\,cm^3$ y se echan $1200\,cm^3$ de agua. ¿Qué fracción del volumen del tanque se llenó?