Aspectos Computacionales de Problemas Inversos de Conducción de Calor

Alejandro Vasco Dávila

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2017

Aspectos Computacionales de Problemas Inversos de Conducción de Calor

Alejandro Vasco Dávila

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias-Matemáticas Aplicadas

Director:
Ph.D. Carlos Enrique Mejía Salazar

Línea de Investigación:
Problemas Inversos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2017

Agradecimientos

Un profundo agradecimiento al profesor Carlos Enrique Mejía Salazar por su importante apoyo y constante participación durante todo este proceso, y a la profesora Bibiana López Rodríguez por sus correcciones las cuales fueron fundamentales para la culminación exitosa de esta tesis.

Índice general

Índice general vi

1. Introducción 1

2. Problemas Inversos de Conducción de Calor en Dimensión 1 6
2.1. IHCP 1D Sobre Dominios Semi-Infinitos 7
2.2. IHCP 1D Sobre Dominios Acotados 23

3. Problemas Inversos de Conducción de Calor en Dimensión 2 31
3.1. IHCP en Dimensión 2 Sobre Dominio Semi-Infinito 31
3.2. IHCP en Dimensión 2 Sobre Dominio Acotado 40

4. Identificación de Parámetros en un IHCP 47

5. Conclusiones y Observaciones Finales 54
5.1. Conclusiones 54
5.2. Observaciones Finales 55

Bibliografía 56

Capítulo 1

Introducción

En esta investigación monográfica se estudia la teoría e implementación de métodos numéricos para la solución de problemas inversos de conducción de calor (IHCP). Se usan esquemas de diferencias finitas con sentido de marcha en la dirección espacial para la solución de problemas inversos de conducción de calor. Además se incluyen problemas con función objetivo en la frontera de la región y problemas de identificación de parámetros. Para la solución numérica de estos problemas se construyen rutinas propias MATLAB y se hace apoyo del software especializado Regularization Tools, Hansen (1994).

Nuestra cotidianidad está llena de problemas inversos, algunos de ellos los solucionamos de manera tan rápida y sencilla que ni siquiera somos conscientes de esto. Un claro ejemplo de esto es la percepción visual, que es la capacidad de reconocimiento de los objetos en función de su forma, patrón y color, según Irani (2011). Sabemos que el ojo humano es capaz de recibir información visual de una cantidad finita de puntos, sin embargo la imagen que percibimos es una imagen continua y sin huecos. En el momento en que los ojos están abiertos, la información visual fluye desde la retina a través del nervio óptico hasta el cerebro, que ensambla esta información realizando una compleja operación de completar la imagen mediante interpolación y extrapolación de los datos que fueron obtenidos a través de los ojos; es de esta manera como reconstruye nuestro cerebro una imagen, y así da forma a objetos y a escenas. De lo que no podemos estar seguros es de que tan buena o nítida pueda ser esta reconstrucción de la imagen. Para que el cerebro pueda reconstruir una imagen nítida debe primero haber tenido una interacción previa con el objeto que intenta reconstruir y con su entorno. Reconocemos los objetos porque existe una grabación previa en el cerebro de cierto tipo de datos que le permiten caracterizarlos. Lo que nos indica que entre

mejores sean los datos que se tienen del objeto y su entorno mejor será la reconstrucción de su imagen. Así entonces, el problema de cómo nuestro cerebro reconstruye una imagen a partir de datos previamente recopilados, se convierte en un problema inverso.

En el ámbito de los problemas inversos es bien sabido que estos problemas traen consigo una característica que aumenta su grado de complejidad, hablamos del mal condicionamiento que se da en dichos problemas. Un problema mal condicionado (Ill posed problem) es un problema que presenta un alto grado de inestabilidad en los datos. Para no irnos tan lejos volvamos al caso de nuestra cotidianidad. En el momento en que tratamos de traer al presente un suceso del pasado como una boda o una reunión, normalmente distorsionamos los hechos ocurridos en el proceso de hacer memoria del suceso. Este error es frecuente y puede llegar a ser muy grande, debido a que no poseemos la información precisa de todos los detalles y acontecimientos dados allí. Al distorsionar el suceso se puede presentar que se agreguen eventos no ocurridos o se omitan detalles, dando como resultado un recuerdo no preciso de lo acontecido. Es así como el problema de recordar un acontecimiento o suceso basados en nuestros recuerdos distorsionados se convierte en un problema mal condicionado producto de su alto grado de inestabilidad.

Un problema mal condicionado es un problema en el cual su solución: no se encuentra en el espacio deseado, tiene más de una solución, o puede darse que su proceso para encontrar una solución sea altamente inestable, es decir, pequeños cambios en los datos de entrada pueden conducir a grandes cambios en la solución, los resultados de salida. Por el lado de los problemas inversos debido a la carencia de una definición universal del concepto de problema inverso, es más fácil pensar en un problema inverso como un problema que es planteado de manera inversa de aquella en que se plantean la mayoría de los problemas directos, Groetsch (1993). Un Problema directo es un problema que usualmente modela algunos acontecimientos o procesos físicos, tales como la temperatura en un punto de un espacio determinado y en un tiempo cualesquiera, la dispersión de una onda acústica y su amplitud de onda, entre otros fenómenos de la naturaleza. El objetivo que se busca al solucionar un problema directo es encontrar una función $u(x,t)$ que describa un acontecimiento o proceso físico en cualquier punto x de un dominio y en cualquier instante de tiempo t.

Los problemas directos son problemas en los cuales se busca determinar el efecto y, que se da mediante un modelo matemático establecido K, y unas causas conocidas x.

Expresado en forma de ecuación, un problema directo es representado por la expresión $Kx = y$, donde el objetivo es encontrar y, dados K y x. Muchos problemas directos poseen grandes ventajas a la hora de ser solucionados debido a que son problemas bien condicionados (well-posed problems). La principal característica del buen condicionamiento que poseen los problemas directos es que se supone que el operador K está bien definido y es continuo, lo que garantiza que dada un causa x, exista un único efecto y; y además se cumple que si hay pequeños cambios en la causa x, entonces hay pequeños cambios en el efecto y, lo que significa que el proceso de solución es consistente y estable.

Para dar solución al problema inverso de la conducción de calor es necesario saber cierta información proveniente del problema directo de la conducción de calor, debido a que estos datos juegan un papel fundamental para encontrar las funciones incógnitas del problema inverso. El proceso de solucionar problemas directos esta basado en la determinación de la temperatura cuando se conocen las condiciones iniciales y de frontera, mientras la solución de problemas inversos está basada en la búsqueda de condiciones de frontera cuando se conocen propiedades de la temperatura en función del tiempo y en una selección de puntos interiores del cuerpo, Taler and Duda (2010). Las incógnitas que buscamos son las denominadas soluciones del problema inverso. En el problema inverso se busca determinar las funciones desconocidas que que definen el modelo matemático inherente al problema directo a partir de los datos proporcionados por las condiciones de frontera y algunos datos extras del problema directo. Lo anterior nos permite mostrar la conexión que hay entre ambos problemas. Es importante resaltar una gran diferencia entre estas dos clases de problemas. En el problema directo se cumple que existe solución única y estable, pero en el problema inverso estas características no se pueden garantizar, lo que hace un poco más compleja la tarea de solucionar el problema inverso.

Usualmente los problemas inversos son muy sensibles a errores aleatorios en la medición de los datos de entrada. Es por esta razón que se requieren técnicas y métodos especiales para la solución que permitan garantizar la condición de estabilidad. A mitad del siglo XX se comenzaron a formalizar diferentes métodos y técnicas para solucionar el problema inverso de la conducción de calor (IHCP por sus siglas en inglés). Estos métodos se caracterizan por hacer un buen arreglo a la inestabilidad debida al mal condicionamiento del problema. La idea de estos métodos consiste en reformular el problema inverso con la finalidad de volverlo “cercano” a un problema bien condi-

cionado. A este proceso de reformulación del problema inverso se le denomina método de regularización.

En el desarrollo de los programas espaciales a través de los años se han realizado grandes aportes en el desarrollo de técnicas para la solución del problema inverso de la conducción de calor. Una de las situaciones en las que se presenta este problema es al momento en el que una nave espacial regresa a la tierra. La superficie de la nave es sometida a un fuerte calentamiento producto de las altas temperaturas que se generan por la velocidad del objeto y la fricción con la atmósfera. Debido a las altas temperaturas a las que se somete el escudo de la nave es imposible realizar mediciones directas con algún dispositivo de medición de calor. Entonces se hace necesario introducir lectores de calor debajo de la superficie de la nave para hacer mediciones indirectas de la temperatura, y a partir de estos datos recuperar el valor de la temperatura superficial de la nave mediante un análisis inverso.

En la literatura existen muchas técnicas para solucionar problemas inversos de conducción de calor, comenzando por los pioneros. El famoso proceso de regularización de Tikhonov (ver Groetsch (1993), Hansen (1994) y Hansen (1998)) y el enfoque de estimación de funciones de Beck (ver Beck et al. (1985)). Muchos otros métodos numéricos han sido desarrollados para solucionar la sensibilidad de las mediciones del problema inverso, para más detalles ver Murio (1993), Alifanov (1994), Ozisik (2000), Taler and Duda (2010). Los métodos que más usaremos en este trabajo son la regularización de Tikhonov, basados en Groetsch (1993) y Hansen (1998), la regularización por molificación discreta presentada en Acosta and Mejía (2014) y la molificación infinito dimensional presentada en Murio (1993).

En este trabajo usamos esquemas de diferencias finitas con marcha en dirección espacial con el fin de dar soluciones numéricas a problemas inversos de la conducción de calor siguiendo a Murio (1993), Shidfar and Zakeri (2005), Alghamdi (2010), Shidfar et al. (2010) y Wang and Wang (2012), y usamos la técnica de molificación discreta como método de regularización siguiendo a Acosta and Mejía (2014) y Murio (1993).

Es importante mencionar que ningún método de regularización es mejor que otro. Para ser más precisos cada método tiene sus ventajas, dependiendo de la aplicación en la que se utilice. Nosotros escogimos el método de regularización por molificación discreta solo por ser de nuestra preferencia.

Por último, hacemos hincapié en la cantidad de material propio que hay en la investigación. Todas las rutinas computacionales presentadas en esta tesis son propias y fueron construidas en MATLAB R2016, a excepción de las rutinas de regularización de Tikhonov de Hansen (1994) y de molificación discreta de Acosta[1]. Además, queremos destacar que en la colección de aplicaciones presentadas incluimos un problema inverso basado en un problema no lineal de difusión (sección 2.2), y también incursionamos en la solución de problemas inversos en dos dimensiones (capítulo 3). El nivel de dificultad en estos problemas es mayor que en los demás, y nos deja motivados para seguir investigando en problemas inversos.

[1]Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas y Estadística, Manizales, Colombia.

Capítulo 2

Problemas Inversos de Conducción de Calor en Dimensión 1

En este capítulo presentamos soluciones numéricas de problemas inversos de conducción de calor (IHCP) en dimensión 1, incluyendo diferentes geometrías del dominio. Además se desarrollan conceptos básicos y presentan resultados numéricos obtenidos mediante el uso de rutinas MATLAB propias. Esto con el fin de comparar las aproximaciones obtenidas mediante nuestros algoritmos con las soluciones exactas de los problemas o con soluciones publicadas por otros investigadores.

El problema inverso de la conducción de calor depende de las mediciones de la temperatura y/o del flujo de calor en puntos específicos del dominio espacio temporal y que son usados para estimar cantidades que aparecen en los términos del operador diferencial que caracteriza el problema físico. En muchas situaciones de transferencia de calor es necesario estimar superficies de flujo de calor y/o la temperatura transitoria a partir de mediciones dentro de un cuerpo conductor de calor. Los problemas inversos de conducción de calor (IHCP) se encuentran en situaciones como el proceso de hallar constantes térmicas en los procesos de enfriamiento rápido, en el diseño de dispositivos para la detección del calor y diseño de armas de uso militar, como también en la reconstrucción de imágenes médicas, entre otras.

Para la siguiente parte suponemos que todas las funciones involucradas en el desarrollo pertenecen a $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$, extendiendo el dominio en el caso de ser necesario, a todo el eje t definiendo la función como cero cuando $t < 0$.

2.1. IHCP 1D Sobre Dominios Semi-Infinitos

Para analizar el IHCP en un dominio semi-infinito presentamos cuatro métodos de solución propuestos en Murio (1993), Alifanov (1994) y Hansen (1994). Los métodos usados son: el método de molificación discreta, el método de aproximación hiperbólica, el método intermedio y el metodo de aproximación por medio de una ecuación integral de Volterra de primera clase.

Problema

Comenzamos considerando una barra semi-infinita con simetría unidimensional y suponemos que la conducción del calor es lineal con propiedades térmicas constantes. Después de realizar cambios apropiados en las escalas de espacio y tiempo, el problema es normalizado usando cantidades adimensionales lo que permite describir el problema inverso de la conducción de calor de la siguiente manera. Se busca una función desconocida $u(x,t)$ que satisfaga

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad 0 < x,\ t > 0, \tag{2.1a}$$

$$u(1,t) = F(t), \qquad t > 0, \tag{2.1b}$$

$$\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad F_m(t), \tag{2.1c}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.1d}$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{2.1e}$$

$$u(x,t) \text{ es acotada cuando } x \to \infty,\ t > 0, \tag{2.1f}$$

donde t es el tiempo y x es la distancia medida desde la superficie calentada. La condición de frontera desconocida en (2.1d) puede ser cambiada por la condición de frontera desconocida $-u_x(0,t) = q(t)$. La meta es estimar la temperatura superficial f y/o el flujo de calor superficial q en $x = 0$, dadas las mediciones interiores de la temperatura F_m en $x = 1$. Suponemos que las funciones de datos medidos F_m satisfacen la cota de error en $\mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$

$$||F - F_m|| \leqslant \epsilon.$$

donde ϵ es conocido. En Murio (1993) encontramos que al intentar encontrar f dada la función de datos medidos F_m, el problema inverso de la conducción de calor aumenta sus componentes de alta frecuencia, lo que vuelve un problema mal condicionado, y por tanto es necesario usar una técnica de regularización.

Método de Molificación

Con el objetivo de solucionar el mal condicionamiento presentado en el IHCP, se usa la técnica de molificación, como método de regularización, para lograr encontrar una solución estable y convergente del problema inverso. Para una introducción al método de molificación sugerimos Acosta and Mejía (2014). Dado a que nuestro fin es solucionar el IHCP mediante molificación discreta, entonces en vez de tratar de hallar los valores de la función de temperatura f, bajamos nuestra meta e intentamos reconstruir la δ-molificación de la función f en el tiempo t, dada por $J_\delta f(t) = (\rho_\delta * f)(t)$, siendo ρ_δ el núcleo Gaussiano de radio difuminador δ dado por

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{\delta^2}\right).$$

Además, ρ_δ cae a valores cercanos al cero fuera del intervalo $(-3\delta, 3\delta)$. El siguiente teorema nos garantiza que el problema (2.1) molificado, es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos, es decir, pequeños cambios en los datos de entrada inducen pequeños cambios en los datos de salida. Además, garantiza que la solución $J_\delta f_m$ del problema molificado es una buena aproximación a la solución f del problema original. Este resultado se encuentra Murio (1993), teorema 3.1.

Teorema 2.1.1 *(Estimativo de Error). Supongamos que $||F - F_m|| \leqslant \epsilon$, entonces*

1. *El problema*

$$J_\delta u_{xx}(x,t) = (J_\delta u)_t(x,t), \qquad 0 < x, \quad t > 0, \tag{2.2a}$$

$$J_\delta u(1,t) = J_\delta F_m(t), \qquad t > 0, \tag{2.2b}$$

$$J_\delta u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.2c}$$

$$J_\delta u(0,t) = J_\delta f_m(t), \qquad t \geqslant 0 \quad \textit{incógnita}, \tag{2.2d}$$

$$J_\delta u(x,t) \textit{ es acotada cuando } x \to \infty, \ t > 0. \tag{2.2e}$$

es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos.

2. *Si la temperatura fronteriza exacta f es tal que $f' \in L^2(-\infty, \infty)$, y además si $||f'|| \leqslant M$, entonces $J_\delta f_m$ satisface la desigualdad.*

$$||f - J_\delta f_m|| \leqslant \frac{1}{2} M\delta + \epsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{3}{4\delta^{2/3}}\right].$$

Debido a que consideramos a $u_t = u_{xx}$ como una ecuación diferencial ordinaria de

segundo orden, es necesario tener dos condiciones iniciales en $x = 1$ para realizar el proceso de marcha hacia atrás en el sentido espacial. Estas condiciones están dadas por las funciones de datos de temperatura F_m y G_m respectivamente. Dado que solo contamos con una función de datos de temperatura inicial $F_m(t) \approx u(1,t)$, es necesario encontrar una segunda función de datos. Utilizando el hecho de tener un dominio semi-infinito, realizamos lecturas de los historiales de la temperatura en el punto $x = 1+h$, y obtenemos una segunda función de datos de temperatura $G_m(t) \approx u(1+h,t)$. Aproximamos el flujo de calor en $x = 1$ como $Q_m(t) = (G_m(t) - F_m(t))/h$. Esto nos permite agregar la nueva condición Q_m al problema (2.2).

Presentamos un esquema de diferencias finitas que es incondicionalmente estable y consistente con la ecuación diferencial $J_\delta u_{xx} = (J_\delta u)_t$, y por lo tanto la solución de diferencias finitas converge a la solución del problema molificado (2.3). Las pruebas de consistencia y estabilidad del esquema de diferencias finitas se encuentran en Murio (1993), página 79 a 82.

$$J_\delta u_{xx}(x,t) = (J_\delta u)_t(x,t), \qquad 0 < x,\ t > 0, \tag{2.3a}$$
$$J_\delta u(1,t) = J_\delta F_m(t), \qquad t > 0, \tag{2.3b}$$
$$J_\delta u_x(1,t) = J_\delta Q_m(t), \qquad t > 0, \tag{2.3c}$$
$$J_\delta u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.3d}$$
$$J_\delta u(0,t) = J_\delta f_m(t), \qquad t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}, \tag{2.3e}$$
$$J_\delta u(x,t) \text{ es acotada cuando } x \to \infty,\ t > 0. \tag{2.3f}$$

Realizando el cambio de variable $v = J_\delta u$ y $w = \partial v/\partial x$ tenemos el sistema asociado

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t, \tag{2.4}$$
$$w = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t, \tag{2.5}$$
$$v(1,t) = J_\delta F_m(t), \qquad 0 < t, \tag{2.6}$$
$$w(1,t) = J_\delta Q_m(t), \qquad 0 < t, \tag{2.7}$$
$$v(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.8}$$
$$v(0,t) = J_\delta f_m(t), \qquad 0 < t, \quad \text{incógnita}. \tag{2.9}$$

Para reconstruir la función de temperatura molificada $J_\delta f_m$ y/o la función de flujo de calor molificado $J_\delta q_m$ en el intervalo de tiempo $I = [0,1]$ consideramos una malla

uniforme en el plano (x,t)

$$\{(x_s = sh,\ t_j = jk),\ s = 0,1,...,N,\ Nh = 1;\ j = 0,1,...,M,\ Mk = L\},$$

donde L depende de h y k, y se define más adelante. Sean V y W las funciones malla dadas por

$$V_s^j = v(x_s,t_j),\quad W_s^j = w(x_s,t_j), \qquad 0 \leqslant s \leqslant N,\ 0 \leqslant j \leqslant M.$$

Aproximamos el sistema de ecuaciones diferenciales (2.4) mediante el esquema de diferencias finitas

$$\begin{aligned} \frac{W_s^j - W_{s-1}^j}{h} &= \frac{V_s^{j+1} - V_s^{j-1}}{2k}, \\ W_{s-1}^j &= \frac{V_s^j - V_{s-1}^j}{h}, \qquad N \geqslant s \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant M-1 \end{aligned}$$

Esta aproximación nos permite obtener un error de truncamiento local que se comporta como $\mathcal{O}(h+k^2)$ para la temperatura discreta molificada y $\mathcal{O}(h+k^2)$ para el flujo de calor discreto molificado cuando $h,k \to 0$. El sistema discreto asociado con (2.4) está dado por

$$\begin{aligned} &W_{s-1}^j = W_s^j - \frac{h}{2k}\left(V_s^{j+1} - V_s^{j-1}\right), \\ &V_{s-1}^j = V_s^j - hW_{s-1}^j, \\ &\qquad s = N, N-1, ..., 1, \quad j = 1,2,...,M-N+s-1, \\ &V_N^j = J_\delta F_m(jk), \qquad j = 1,2,...,M, \\ &W_N^j = J_\delta Q_m(jk), \qquad j = 1,2,...,M, \\ &V_s^0 = 0, \qquad s = 0,1,...,N. \end{aligned}$$

Observamos que debido a la estructura del algoritmo, a medida que avanzamos hacia atrás en el espacio, es necesario abandonar la estimación de la temperatura del paso anterior en el punto más alto en el tiempo, puesto que nuestro objetivo es encontrar V_0^j y W_0^j después de N iteraciones sobre el intervalo $I = [0,1]$. De lo anterior tenemos que la longitud inicial mínima L del intervalo de datos debe satisfacer la condición $Mk - Nk = 1$, y así $L = Mk = 1 + k/h$.

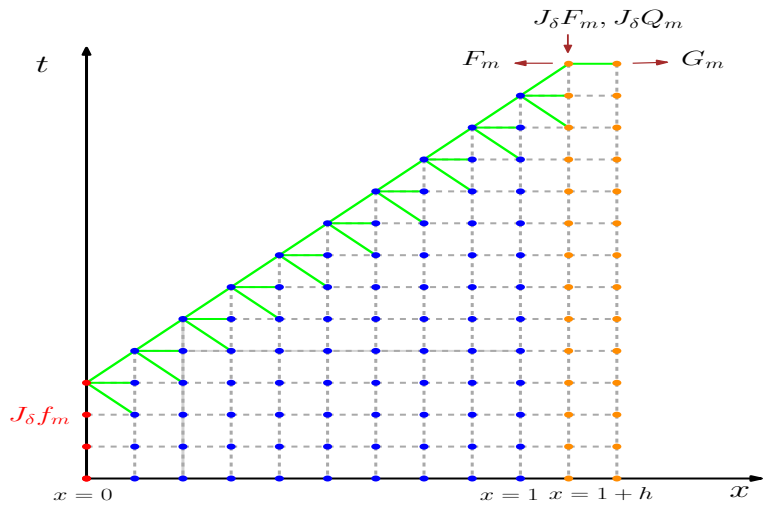

Figura 2.1 Esquema Molificado

El proceso que realiza el algoritmo lo podemos ver en la Figura 2.1, en donde los puntos de color naranja, indican los valores de las funciones de datos iniciales F_m y G_m. Los puntos de color azul, indican los valores de la temperatura y del flujo reconstruidos en los pasos intermedios, y los puntos de color rojo representan los valores de las reconstrucciones de las funciones de temperatura molificada V_0^j, y de flujo molificado W_0^j, las cuales son nuestras funciones objetivo.

Para probar la precisión y estabilidad de los métodos expuestos en esta sección, investigamos la reconstrucción de la función de temperatura superficial f de valor 1 para $0.2 \leqslant t \leqslant 0.6$, y 0 en otros casos. Usamos esta función debido a que es una buena manera de probar los algoritmos ya que presenta cambios abruptos de subida y de bajada.

En Murio (1993) encontramos que la función de datos exactos F para el problema directo asociado al problema (2.1) está dada por

$$F(t) = \phi(t - 0{,}2) - \phi(t - 0{,}6),$$

donde

$$\phi(t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right),$$

y

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2)\, \mathrm{d}t.$$

La función de datos ruidosos denotada por F_m está dada por $F_m(t_j) = F(t_j) + \epsilon_j$, donde los ϵ_j son variables aleatorias Gaussianas con varianza $\sigma^2 = \epsilon^2$.

Para probar el grado de estabilidad de los algoritmos de esta sección introducimos ruido con el objetivo de perturbar los datos. El nivel de ruido promedio introducido es de $\epsilon = 0.001$, 0.003 y 0.005. El error cometido por nuestras aproximaciones lo medimos con la norma ponderada discreta de $\mathcal{L}^2$ dada por la siguiente expresión, donde $f_j = f(t_j)$ denota la función de datos exactos restringida a los puntos de la malla

$$||V_0 - f||_I = \left\{ \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^{M} \left(V_0^j - f_j \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

En la Figura 2.2 se presentan las tablas con los valores absolutos de la temperatura reconstruida con diferentes tamaños de paso k, y con diferentes niveles de ruido ϵ en los datos. La Figura 2.3 muestra la gráfica de la reconstrucción de temperatura f sin usar molificación, y la Figura 2.4 muestra la gráfica de la reconstrucción de la δ-molificación de la funcion f.

Cuando se trabaja con molificación como técnica de regularización, dado $p > 0$, que (usualmente tomamos $p = 3$) y $h > 0$, entonces el parámetro de molificación δ es seleccionado de manera automática mediante Validación cruzada generalizada (GCV). Para una mayor introducción al método GCV, sugerimos Golub et al. (1979).

Figura 2.2 Tablas de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	δ	Error
0.000	0.07	0.12519
0.001	0.07	0.12551
0.003	0.07	0.12716
0.005	0.07	0.12908

(a) $h/2 = k = 0.01$

Temperatura		
ϵ	δ	Error
0.000	0.035	0.08890
0.001	0.035	0.09179
0.003	0.035	0.10736
0.005	0.035	0.10963

(b) $h/2 = k = 0.005$

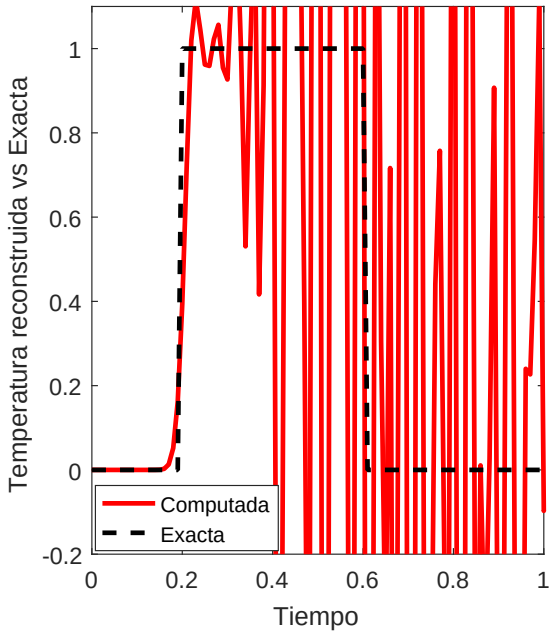

Figura 2.3 Función de temperatura reconstruida. Sin usar método de molificación: $\epsilon = 0.005$, $h/2 = k = 0.01$

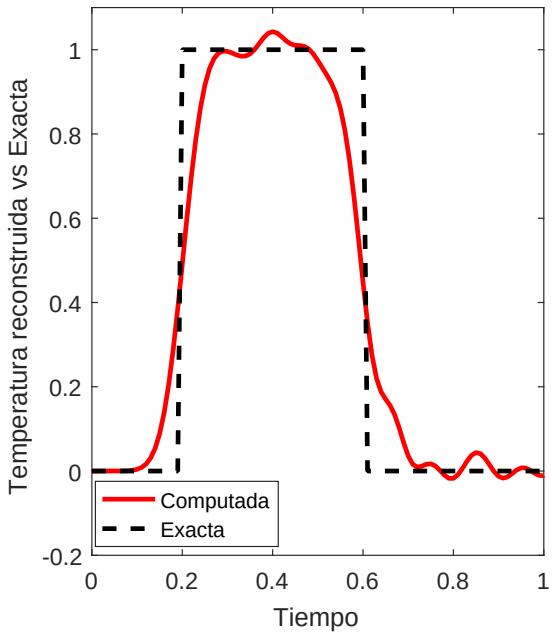

Figura 2.4 Función de temperatura reconstruida. Método de molificación: $\epsilon = 0.005$, $\delta = 0.07$, $h/2 = k = 0.01$

Método Hiperbólico

El segundo método, denominado método hiperbólico consiste en sustituir el operador de difusión de calor por un operador hiperbólico estrechamente relacionado. Este proceso de reemplazo de operador brinda cierta estabilidad numérica en la resolución del IHCP. Desarrollando esta idea, podemos intentar reformular un problema inverso para la ecuación parabólica en un problema inverso para la ecuación hiperbólica de la conducción del calor. En Alifanov (1994) se muestra que una hiperbolización artificial de la ecuación de conducción de calor permite, para un esquema de diferencias finitas, ampliar la región de estabilidad de la solución numérica del IHCP. El problema hiperbólico es el siguiente.

$$\nu_{xx}(x,t) = \frac{1}{c^2}\nu_{tt}(x,t) + \nu_t(x,t), \qquad 0 < x,\ t > 0, \tag{2.11a}$$

$$\nu(1,t) = F(t), \qquad t > 0, \tag{2.11b}$$

$$\text{con la correspondiente función de datos aproximados} \quad F_m(t), \tag{2.11c}$$

$$\nu(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.11d}$$

$$\nu(0,t) = f_c^H(t), \qquad t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}, \tag{2.11e}$$

$$\nu(x,t) \text{ es acotada cuando } x \to \infty,\ t > 0. \tag{2.11f}$$

El parámetro c, $c >> 1$, es interpretado como la velocidad de propagación térmica finita. Mediante un análisis vía transformada de Fourier se prueba que la solución del problema inverso (2.11) $f_{c,m}^H$ es una buena aproximación a la solución del problema original (2.1), y que el problema (2.11) es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos. Este resultado que aparece en Murio (1993), teorema 3.2, y se enuncia a continuación

Teorema 2.1.2 *(Estimativo de Error). Supongamos que se cumple* $||F - F_m|| \leqslant \epsilon$, *entonces*

1. *El problema* (2.11) *es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos.*

2. *Si la temperatura fronteriza exacta* f *es tal que* $f' \in L^2(-\infty,\infty)$, *y además si* $max\,(||f||, ||f'||) \leqslant M$, *entonces* $f_{c,m}^H$ *satisface la desigualdad.*

$$||f - f_{c,m}^H|| \leqslant \epsilon\left(\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{M}{c^{2/3}}.$$

Este resultado nos garantiza que el nuevo problema, el problema hiperbólico, mejora la estabilidad del IHCP y además, es consistente. El esquema de diferencias finitas propuesto para este problema es el siguiente, y la prueba de consistencia y estabilidad se encuentra en Murio (1993), páginas 77 a 85.

$$
\begin{aligned}
V_{s-1}^{j} &= \frac{h^2}{c^2k^2}\left(V_s^{j+1} - 2V_s^{j} + V_s^{j-1}\right) + \frac{h^2}{2k}\left(V_s^{j+1} - V_s^{j-1}\right) + 2V_s^{j} - V_{s+1}^{j}, \\
&\qquad s = N, N-1, ..., 1. \quad j = 1, 2, ..., M - N + s - 1, \\
V_N^{j} &= F_m(jk), \qquad\qquad j = 1, 2, ..., M, \\
V_{N+1}^{j} &= G_m(jk), \qquad\qquad j = 1, 2, ..., M, \\
V_s^{0} &= 0, \qquad\qquad\qquad s = 0, 1, ..., N+1.
\end{aligned}
$$

En la Figura 2.5 se muestra un diagrama que permite describir los pasos del algoritmo y su efecto de descenso. La función de datos G_m es la segunda condición necesaria para ejecutar el algoritmo, y corresponde a las mediciones de la función de temperatura realizadas en el punto $x = 1 + h$. El parámetro c es tomado de tal manera que la solución que se está reconstruyendo satisfaga la tolerancia deseada. En la Figura 2.6 se muestran las tablas de los valores absolutos de la norma del error.

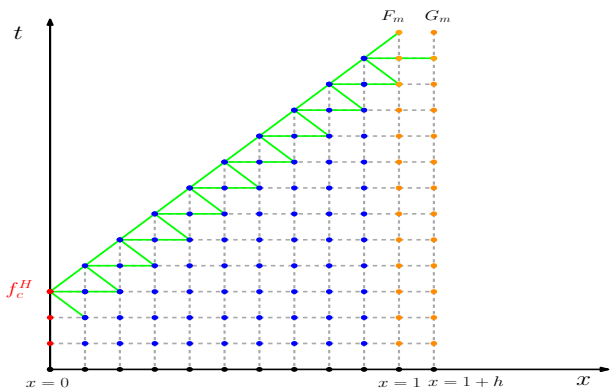

Figura 2.5 Descenso Hiperbólico

Figura 2.6 Tablas de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	c	Error
0.000	7	0.1565
0.001	7	0.1573
0.003	7	0.1592
0.005	7	0.1623

(a) $h/2 = k = 0.01$.

Temperatura		
ϵ	c	Error
0.000	10	0.12636
0.001	10	0.12840
0.003	10	0.13071
0.005	10	0.13728

(b) $h/2 = k = 0.05$.

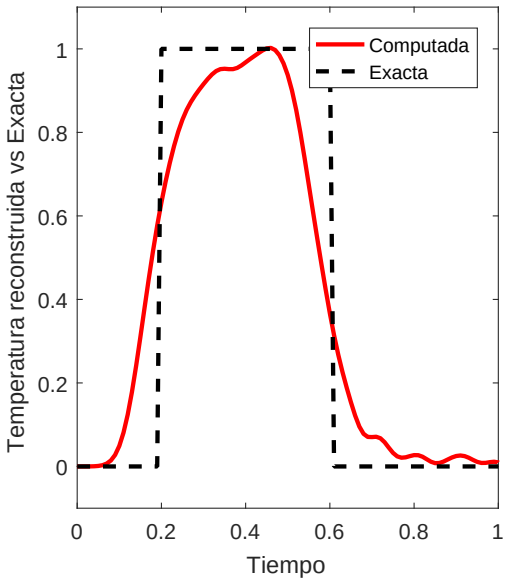

Figura 2.7 Función de temperatura reconstruida. Método hiperbólico: $\epsilon = 0.005$, $c = 7$, $h/2 = k = 0.01$

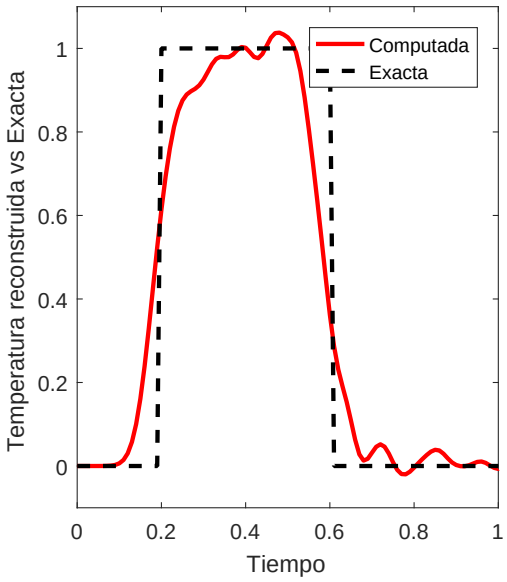

Figura 2.8 Función de temperatura reconstruida. Método hiperbólico: $\epsilon = 0.005$, $c = 10$, $h/2 = k = 0.05$

Las Figuras 2.7 y 2.8 muestran las aproximaciones calculadas con el método hiperbólico con nivel de ruido de $\epsilon = 0.005$ y tamaño de paso $k = 0.01$ y $k = 0.05$ respectivamente.

Método Intermedio

Un análisis más exhaustivo realizado en Murio (1993), páginas 67 y 68 demuestra que mientras el método de molificación logra anular las componentes de alta frecuencia de la función de datos ruidosos, el método hiperbólico amplifica las componentes de alta frecuencia en un factor de $\exp(c/2)$. En vista de lo anterior surge la idea de un nuevo método a partir de la idea de una perturbación singular en la ecuación diferencial del calor. El tercer método presentado para solucionar el problema IHCP se denomina método intermedio debido a que filtra solo cierta información, y no anula por completo las componentes de alta frecuencias de la función de datos medidos, y tampoco las amplifica en ningún factor. El problema es expresado de la siguiente manera

$$Z_{xx}(x,t) = Z_t(x,t) - \gamma^2 Z_{ttx}(x,t), \qquad 0 < x,\ t > 0, \tag{2.13a}$$

$$Z(1,t) = F(t), \qquad t > 0, \tag{2.13b}$$

$$\text{con la correspondiente función de datos aproximados } F_m(t), \tag{2.13c}$$

$$Z(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.13d}$$

$$Z(0,t) = f_\gamma^I(t), \qquad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{2.13e}$$

$$Z(x,t) \text{ es acotada cuando } x \to \infty, \quad t > 0, \tag{2.13f}$$

$$Z(x,t) \text{ es acotada cuando } t \to \infty, \quad x > 0. \tag{2.13g}$$

El parámetro $\gamma << 1$ es una constante positiva y γ^2 se interpreta como parámetro de relajación. El siguiente teorema nos garantiza, que el problema (2.13) es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos y su solución $f_{\gamma,m}^I$ aproxima la solución del problema original (2.1). La prueba se encuentra en Murio (1993), teorema 3.3.

Teorema 2.1.3 *(Estimativo de Error). Supongamos que se cumple $||F - F_m|| \leqslant \epsilon$, entonces*

1. *El problema 2.13 es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos.*

2. *Si la temperatura fronteriza exacta f es tal que $f' \in L^2(-\infty,\infty)$, y además si $max\,(||f||, ||f'||) \leqslant M$, entonces $f_{\gamma,m}^I$ satisface la desigualdad*

$$||f - f_{\bar{\gamma},m}^I|| \leqslant 3\left[3\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right]^{-3/4} M + \sqrt{\epsilon}. \quad \textit{donde} \quad \bar{\gamma} = [\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)]^{-3/4}.$$

El esquema de diferencias finitas propuesto para este problema es el siguiente. Para la prueba de consitencia y estabilidad ver Murio (1993) paginas 77 a 85.

$$
\begin{aligned}
Z_{s-1}^{j} = \frac{h^2}{2k}\left(Z_s^{j+1} - Z_s^{j-1}\right) - \frac{\gamma^2 h}{k^2}\left(Z_{s+1}^{j+1} - 2Z_{s+1}^{j} + Z_{s+1}^{j-1} - Z_s^{j+1} + 2Z_s^{j} - Z_s^{j-1}\right) \\
- Z_{s+1}^{j} + 2Z_s^{j}, \qquad s = N, N-1, ..., 1, \quad j = 1, 2, ..., M-N+s-1, \\
Z_N^{j} = F_m(jk), \qquad j = 1, 2, ..., M, \\
Z_{N+1}^{j} = G_m(jk), \qquad j = 1, 2, ..., M, \\
Z_s^{0} = 0, \qquad s = 0, 1, ..., N+1.
\end{aligned}
$$

Las mediciones de los datos de temperatura de la función G_m son realizadas en el punto $x = 1 + h$. La Figura 2.9 evidencia el descenso realizado por el algoritmo y los pasos que realiza. En la Figura 2.10 se encuentran las tablas de la norma del error absoluto de la temperatura reconstruida con el método intermedio. El parámetro γ es tomado a conveniencia para que la aproximación satisfaga la tolerancia deseada.

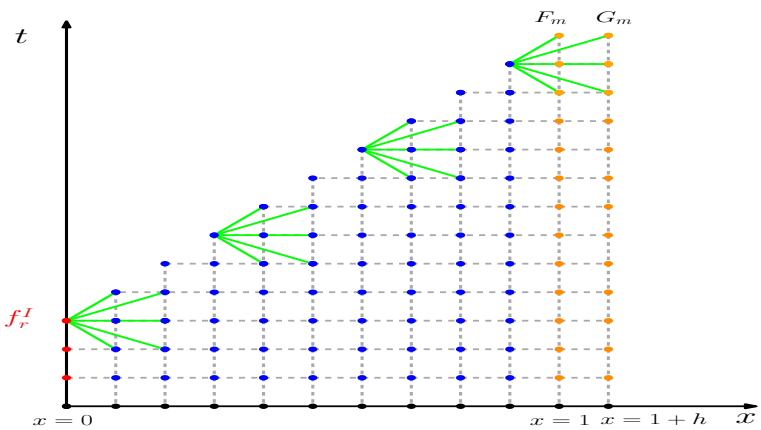

Figura 2.9 Descenso Intermedio

Figura 2.10 Tablas de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	γ^2	Error
0.000	0.0018	0.11705
0.001	0.0018	0.11736
0.003	0.0018	0.12071
0.005	0.0018	0.12495

(a) $h/2 = k = 0.01$.

Temperatura		
ϵ	γ^2	Error
0.000	0.0020	0.11400
0.001	0.0020	0.11553
0.003	0.0020	0.11822
0.005	0.0020	0.11445

(b) $h/2 = k = 0.02$.

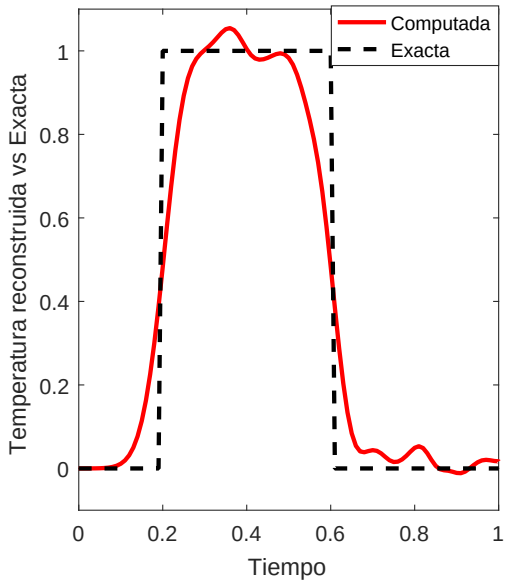

Figura 2.11 Función de temperatura reconstruida. Método Intermedio: $\epsilon = 0.005$, $\gamma^2 = 0.0018$, $k = 0.01$

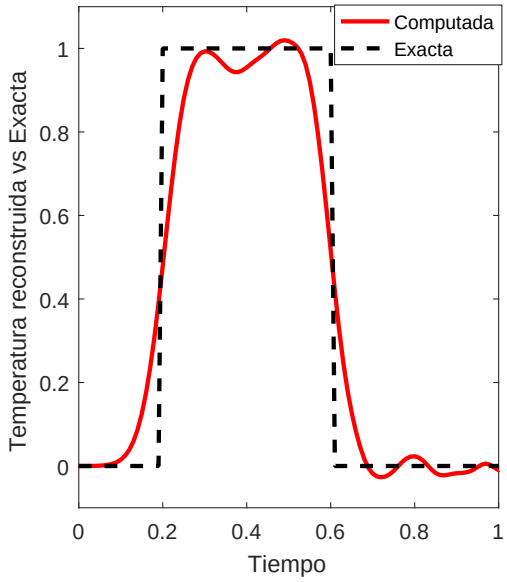

Figura 2.12 Función de temperatura reconstruida. Método Intermedio: $\epsilon = 0.005$, $\gamma^2 = 0.0020$, k =0.02

Las Figuras 2.11 y 2.12 muestran las aproximaciones calculadas con el método intermedio con nivel de ruido de $\epsilon = 0.005$ y tamaño de paso $k = 0{,}01$ y $k = 0{,}05$ respectivamente.

Método de la Ecuación Integral

El cuarto método consiste en remplazar el problema (2.1) por una ecuación integral de Volterra de primer orden dada por

$$F(t) = \int_0^t \frac{\partial \phi(1, t-s)}{\partial t} f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.15}$$

donde

$$\phi(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

La función F es la función de datos exactos y f la función objetivo. Si nuestro objetivo es reconstruir el flujo de calor q, entonces reemplazamos en (2.15) f por q, y nuestro problema es expresado por la ecuación integral de Volterra

$$F(t) = \int_0^t \frac{\partial \psi(1, t-s)}{\partial t} q(s)\,\mathrm{d}s,$$

donde

$$\psi(x,t) = \begin{cases} 2\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right) - x\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

Denotando $K(1, t-s) = \frac{\partial \phi(1,t-s)}{\partial t}$, nuestra ecuación integral (2.15) queda dada por

$$F(t) = \int_0^t K(1, t-s) f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.16}$$

El método consiste en discretizar la ecuación integral de Volterra de primer orden (2.16) mediante una regla de cuadratura de punto medio y un proceso de colocación con n puntos así

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=1}^{n} w_j K(s, t_j) f(t_j) = I_n(s). \tag{2.17}$$

Los pesos están dados por $w_j = (b-a)/n$ y $t_j = (j - 1/2)(b-a)/n$, con $j = 1, ..., n$. Debido al proceso de ubicación de n puntos $s_1, s_2, ..., s_n$, definimos $I_n(s_i) = F(s_i)$ para $i = 1, ..., n$. Esto nos permite obtener un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ de tamaño $n \times n$, con elementos dados por $a(i,j) = w_j K(s_i, t_j)$, $b_i = F(s_i)$ y $x_j = f(t_j)$ para $j = 1, ..., n$. El mal condicionamiento del IHCP se evidencia en el alto numero de condición de la matriz A. Para $n = 100$ tenemos que $\operatorname{cond}(A) = 9{,}2246e + 36$.

La ecuación integral (2.15) puede ser expresada por la expresión $Kx = y$, donde K es un operador entre espacios de Hilbert H_1 y H_2. Dado que el operador K no está bien definido no podemos garantizar que el problema $Kx = y$ tenga solución única. Buscamos una solución generalizada especial denominada la solución por mínimos cuadrados de norma mínima K^+y, que depende de manera discontinua de y. Como queremos que nuestras aproximaciones dependan de manera continuamente de y, entonces nuestra estrategia implica intercambiar el problema mal condicionado para la solución exacta por un problema bien condicionado con una solución aproximada.

La solución $x = K^+y$ del problema $Kx = y$, es la solución por minimos cuadrados, y satisface las ecuaciones normales $K^*Kx = K^*y$, donde K^* es el operador adjunto de K. Debido a que el operador compacto auto adjunto K^*K tiene valores propios no negativos, entonces para cualquier número positivo α, el operador $K^*K + \alpha I$, (donde I es el operador identidad en H_1), tiene valores propios estrictamente positivos. En particular, el operador $K^*K + \alpha I$ tiene inversa acotada, esto implica que el problema de solucionar

$$(K^*K + \alpha I)x_\alpha = K^*y, \tag{2.18}$$

es un problema bien condicionado. A la solución unica del problema (2.18) se le denomina aproximación de tikhonov de K^+y, y está dada por

$$x_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1}K * y.$$

Las rutinas de discretización de la ecuación integral (2.17) y de la regularización de Tikhonov son tomadas del software Regularization Tools, ver Hansen (1994). En la Figura 2.13 se muestran los resultados de las aproximaciones obtenidas con nivel de ruido de $\epsilon = 0.001$, 0.003 y 0.005. El parámetro de regularización $\alpha > 0$, es tomado de tal manera que la aproximación buscada satisfaga la tolerancia deseada.

Figura 2.13 Tabla de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	α	Error
0.000	1e-5	0.0725
0.001	1e-3	0.0885
0.003	1e-2	0.1154
0.005	5e-3	0.1023

(a) $n = 100$.

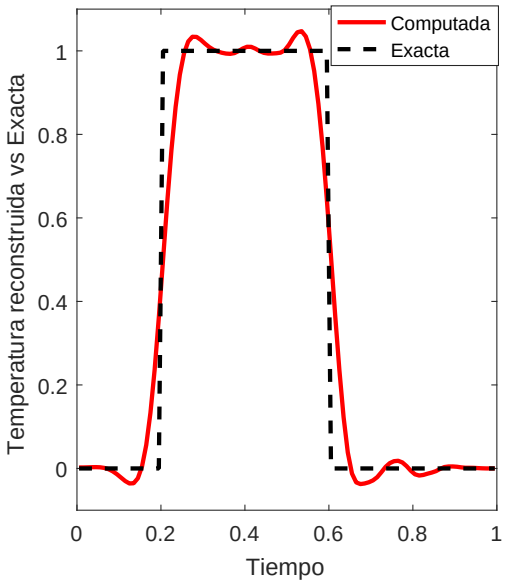

Figura 2.14 Función de temperatura reconstruida. Método de Tikhonov: $\epsilon = 0.005$, $\alpha =$ 10e-3, $n = 100$.

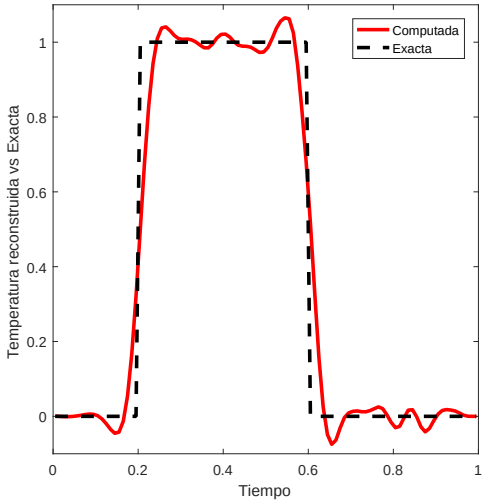

Figura 2.15 Función de temperatura reconstruida. Método de Tikhonov: $\epsilon = 0.005$, $\alpha =$ 5e-3, $n = 100$.

Las Figuras 2.14 y 2.15 se muestran las aproximaciones calculadas con el método de Tikhonov con nivel de ruido de $\epsilon = 0.005$, $n = 100$ y $\alpha =$ 10e-3, y $\alpha =$ 5e-3 respectivamente.

2.2. IHCP 1D Sobre Dominios Acotados

En dominios acotados resolvemos dos problemas de reconstrucción de datos de la temperatura superficial y del flujo de calor planteados en Murio (1993) y Guo et al. (1990). Usamos molificación discreta como método de regularización y utilizamos esquemas de diferencias finitas con marcha en la dirección espacial x para solucionarlos.

Consideramos un IHCP en dimesión 1 en una barra simétrica, en el que se desean conocer los historiales de la temperatura superficial y/o del flujo de calor superficial f y q respectivamente, en $x = 0$. Además, los historiales de la temperatura y del flujo de calor superficiales F y Q en $x = 1$ se conocen de forma aproximada. Suponemos conducción de calor lineal con coeficientes constantes y sin pérdida de generalidad que la temperatura inicial es cero, y normalizamos el problema usando cantidades adimensionales. El problema puede ser descrito matemáticamente como sigue. La temperatura desconocida $u(x,t)$ satisface

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \qquad 0 < x, \quad t > 0, \tag{2.19a}$$

$$\begin{aligned} u(1,t) &= F(t), \qquad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad F_m(t), \end{aligned} \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned} -u_x(1,t) &= Q(t), \qquad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad Q_m(t), \end{aligned} \tag{2.19c}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x, \tag{2.19d}$$

$$u(0,t) = f(t), \qquad t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}, \tag{2.19e}$$

$$-u_x(0,t) = q(t), \qquad t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}. \tag{2.19f}$$

La meta es estimar la temperatura superficial f y/o el flujo de calor superficial q dadas las mediciones interiores en $x = 1$, denotadas por F_m y Q_m. Suponemos que la función de datos medidos satisface la cota de error en $\mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$

$$||F - F_m|| \leqslant \epsilon, \quad y \quad ||Q - Q_m|| \leqslant \epsilon,$$

En Murio (1993) páginas 72 a 74 se prueba que al resolver el problema (2.19), obteniendo f y q a partir de F y Q, se amplifica el error en las componentes de alta frecuencia en un factor de $\exp\left(\sqrt{\omega/2}\right)$, mostrando que el IHCP es altamente inestable en los componentes de alta frecuencia. El IHCP puede ser estabilizado, si en vez de intentar reconstruir los valores de la función de temperatura f y de la función de flujo

de calor q, intentamos reconstruir las δ-molificaciones $J_\delta f_m$ y $J_\delta q_m$ dadas por

$$J_\delta f(t) = (\rho * f)(t), \quad J_\delta q(t) = (\rho * q)(t).$$

donde ρ está dado en (2.1) y $(\rho * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(s) f(t-s)\,\mathrm{d}s$, es la convolución de las funciones ρ_δ y f.

Para encontrar $J_\delta f_m(t) = J_\delta u(1,t)$ y $J_\delta q_m(t) = -J_\delta u_x(1,t)$ molificamos el sistema (2.19) y obtenemos el sistema molificado

$$\begin{aligned}
J_\delta u_{xx}(x,t) &= (J_\delta u)_t(x,t), && 0 < x, \quad t > 0, && \text{(2.20a)}\\
J_\delta u(1,t) &= J_\delta F_m(t), && t > 0, && \text{(2.20b)}\\
-J_\delta u_x(1,t) &= J_\delta Q_m(t), && t > 0, && \text{(2.20c)}\\
J_\delta u(x,0) &= 0, && 0 \leqslant x, && \text{(2.20d)}\\
J_\delta u(0,t) &= J_\delta f_m(t), && t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}, && \text{(2.20e)}\\
J_\delta u_x(0,t) &= -J_\delta q_m(t), && t \geqslant 0 \quad \text{incógnita}. && \text{(2.20f)}
\end{aligned}$$

El problema (2.20) y su solución satisfacen el siguiente teorema de estimativo de error. El cuál nos garantiza que problema es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos y consistente. Tomado de Murio (1993) teorema 3.4.

Teorema 2.2.1 *(Estimativo de Error). Supongamos que* $||F - F_m|| \leqslant \epsilon$, *y* $||Q - Q_m|| \leqslant \epsilon$ *entonces*

1. *El problema 2.20 es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos.*
2. *Si la temperatura fronteriza exacta* f *y* q *tienen derivadas uniformemente acotadas en algún intervalo* $I = [0,T]$, *esto es,* $max(||f'||_I, ||q'||_I) \leqslant M$, *entonces* $J_\delta f_m$ *y* $J_\delta q_m$*satisfacen*

$$||f - J_\delta f_m||_I \leqslant \frac{1}{2} M\delta + \epsilon \exp\left[\frac{1}{(2\delta)^{2/3}}\right],$$

$$||f - J_\delta q_m||_I \leqslant \frac{1}{2} M\delta + 2\epsilon \exp\left[\frac{1}{(2\delta)^{2/3}}\right],$$

donde $||\cdot||_I$ indica la norma $\mathcal{L}^2$ restringida al intervalo I.

Problema Lineal

En este problema buscamos reconstruir la temperatura superficial f en $x = 0$. Esta función objetivo toma valor 1 para t entre $t = 0.2$ y $t = 0.6$ y 0 en otro caso. Para encontrar las funciones de datos para el IHCP consideramos el problema directo asociado dado por

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{2.21a}$$
$$u(0,t) = 1, \qquad t > 0, \tag{2.21b}$$
$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.21c}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x. \tag{2.21d}$$

La función solución de temperatura para el problema (2.21) esta dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} (1-x) + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \exp\left[-(n\pi)^2 t\right] \sin n\pi(1-x), & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

y la función solución del flujo de calor esta dada por

$$u_x(x,t) = \begin{cases} -\left\{1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp\left[-(n\pi)^2 t\right] \cos n\pi(1-x)\right\}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

por lo tanto las funciones de datos exactos para el IHCP son

$$F(t) = u(1,t) = 0, \quad \text{y} \quad Q(t) = u_x(1,t).$$

Nuestro problema inverso queda expresado entonces así, la función $u(x,t)$ satisface

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x, \quad t > 0, \tag{2.22}$$
$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.23}$$
$$u_x(1,t) = Q_m(t), \qquad t > 0, \tag{2.24}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.25}$$
$$u_x(0,t) = f(t), \qquad t > 0, \quad \text{incógnita.} \tag{2.26}$$

Para resolver numéricamente el problema (2.22) utilizamos el esquema de diferencias finitas dado por

$$
\begin{aligned}
&W_{s-1}^{j} = W_{s}^{j} - \frac{h}{2k}\left(V_{s}^{j+1} - V_{s}^{j-1}\right), \\
&V_{s-1}^{j} = V_{s}^{j} - hW_{s-1}^{j}, \\
&\qquad s = N, N-1, ..., 1, \qquad j = 1, 2, ..., M-N+s-1, \\
&V_{N}^{j} = J_{\delta}F_{m}(jk), \qquad\qquad j = 1, 2, ..., M, \\
&W_{N}^{j} = J_{\delta}Q_{m}(jk), \qquad\qquad j = 1, 2, ..., M, \\
&V_{s}^{0} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad s = 0, 1, ..., N.
\end{aligned}
$$

Observemos que las funciones de datos F_m y Q_m son conocidas y dadas en el punto $x = 1$. En la Figura 2.16 se evidencian los pasos que realiza el algoritmo y su función objetivo localizada en $x = 0$. En la Figura 2.17 se encuentran los resultados numéricos realizados para nuestro problema con diferentes niveles de ruido en los datos y con tamaño de paso $h = k = 0.01$. En las Figuras 2.18 y 2.19 se muestran las gráficas de los resultados sin utilizar molificación y utilizando molificación con $\epsilon = 0.005$ respectivamente.

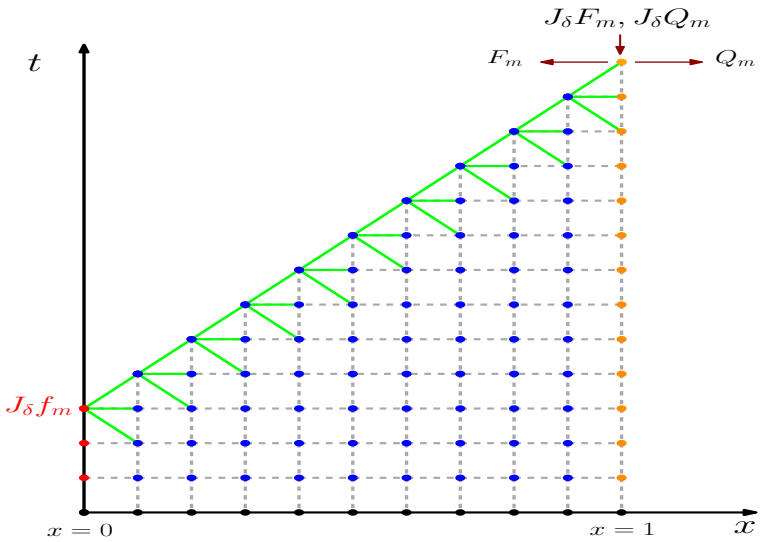

Figura 2.16 Descenso

Figura 2.17 Tabla de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	δ	Error
0.000	0.04	0.084278
0.001	0.04	0.084331
0.003	0.04	0.084447
0.005	0.04	0.084573

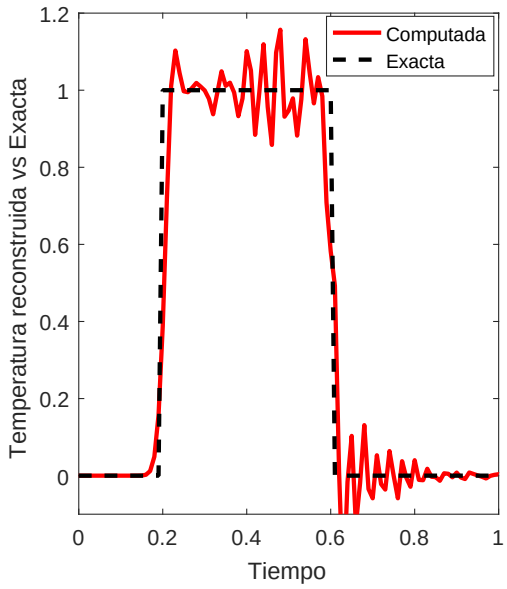

Figura 2.18 Función de temperatura reconstruida. Sin usar método de molificación: $\epsilon = 0.005$, $h = k = 0.01$.

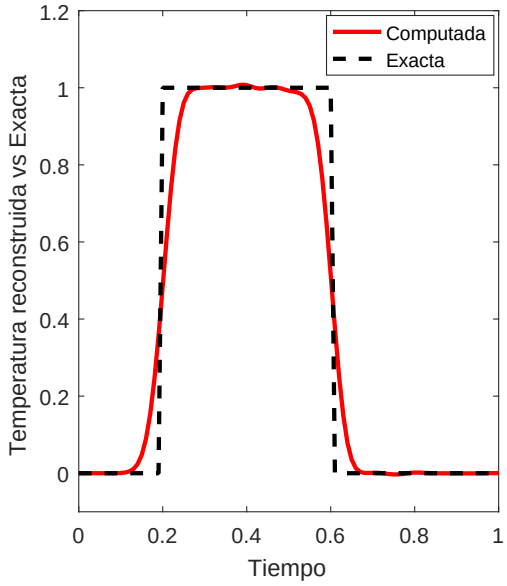

Figura 2.19 Función de temperatura reconstruida. Método molificación: $\epsilon = 0.005$, $\delta = 0.04$, $h = k = 0.01$.

Las Figuras 2.18 y 2.19 muestran las aproximaciones calculadas sin usar y usando el método molificación con nivel de ruido de $\epsilon = 0.005$ y tamaño de paso $k = 0.01$.

Problema No Lineal

En este problema buscamos reconstruir el flujo superficie de calor q en $x = 0$ en una barra finita expuesta a un flujo de calor no lineal. Nuestra función objetivo está dada por $q(t) = 1/(1 + 0{,}1f(t))$ para $t > 0.2$. Para encontrar las funciones de datos para el IHCP consideramos el problema directo asociado dado por

$$
\begin{aligned}
&(1 + 0.1u(x,t))u_t(x,t) = \left((1 + 0.1u(x,t))\, u_x(x,t)\right)_x, && 0 < x, \quad t > 0, && \text{(2.28a)}\\
&u_x(1,t) = 0, && t > 0, && \text{(2.28b)}\\
&u_x(0,t) = \frac{1}{(1 + 0.1u(0,t))}, && t > 0, && \text{(2.28c)}\\
&u(x,0) = 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1. && \text{(2.28d)}
\end{aligned}
$$

Haciendo uso de la transformación, $\nu = \int_0^u (1 + 0.1s)\,\mathrm{d}s = u + \frac{1}{2}0.1u^2$, el problema (2.28) es expresado por

$$
\begin{aligned}
&\nu_t(x,t) = \nu_{xx}(x,t), && 0 < x < 1, \quad t > 0,\\
&\nu_x(0,t) = 1, && t > 0,\\
&\nu_x(1,t) = 0, && t > 0,\\
&\nu(x,0) = 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

Este problema directo tiene como soluciones exactas las funciones de temperatura y flujo de calor dadas por

$$
\nu(x,t) = \begin{cases} -t - \frac{1}{6}[3(1-x^2) - 1] + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos n\pi(1-x)}{n} \exp\left[-(n\pi)^2 t\right], & t > 0\\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.30}
$$

y

$$
\nu_x(x,t) = \begin{cases} 1 - x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\pi(1-x)}{n} \exp\left[-(n\pi)^2 t\right], & t > 0\\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.31}
$$

De (2.30) y (2.31), obtenemos las funciones de datos exactos para el IHCP no lineal, y están dadas por

$$
F(t) = u(1,t) = 10\left(\sqrt{1 + 0.2\nu(1,t)} - 1\right), \quad \text{y} \quad Q(t) = u_x(1,t) = 0.
$$

Además, de (2.30) y (2.31) obtenemos la solución exacta para el flujo de calor q del IHCP no lineal, y está dada por

$$q(t) = u_x(0,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+0.2\nu(0,t)}}, & t > 0{,}2, \\ 0, & t \leqslant 0{,}2 \end{cases}$$

El IHCP no lineal que queremos resolver queda expresado así:

$$(1+0.1u(x,t))u_t(x,t) = \left((1+0.1u(x,t))\, u_x(x,t)\right)_x, \quad 0 < x, \quad t > 0, \tag{2.32a}$$

$$u(1,t) = Fm(t), \quad t > 0, \tag{2.32b}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.32c}$$

$$u_x(0,t) = q(t), \quad t > 0 \text{ incógnita}, \tag{2.32d}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{2.32e}$$

Para solucionar numéricamente nuestro problema inverso, reescribimos la ecuación (2.32a) así $u_t = u_{xx} + \dfrac{0.1(u_x)^2}{1+0.1u}$, para usar el siguiente esquema de diferencias finitas

$$\begin{aligned}
&W_{s-1}^j = W_s^j - \frac{h}{2k}\left(V_s^{j+1} - V_s^{j-1}\right) + \frac{0.1h(W_s^j)^2}{1+0.1(V_s^j)}, \\
&V_{s-1}^j = V_s^j - hW_{s-1}^j, \quad s = N, N-1, ..., 1, \quad j = 1, 2, ..., M-N+s-1, \\
&V_s^0 = 0 \qquad s = 0, 1, ..., N, \\
&V_N^j = J_\delta F_m(jk), \qquad j = 1, 2, ..., M, \\
&W_N^j = J_\delta Q_m(jk) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., M.
\end{aligned}$$

En la Figura 2.20 se encuentran los resultados numéricos realizados con diferentes niveles de ruido en los datos para el problema 2. Las Figuras 2.21 y 2.22 muestran las aproximaciones calculadas sin usar y usando el método de molificación con nivel de ruido de $\epsilon = 0.005$ y tamaño de paso $k = h = 0.01$.

Figura 2.20 Norma del Error Absoluto del Error

Flujo		
ϵ	δ	Error
0.000	0.200	0.0851
0.001	0.200	0.0872
0.003	0.200	0.0940
0.005	0.200	0.1042

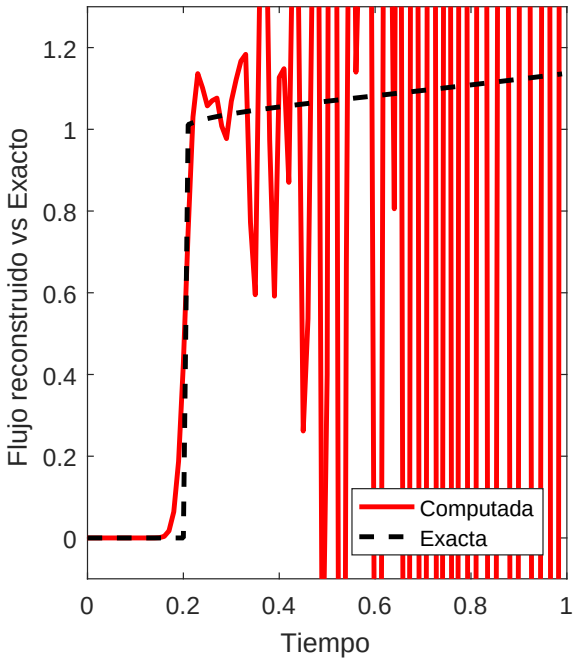

Figura 2.21 Función de flujo reconstruido. Sin usar método de molificación: $\epsilon = 0.005$, $h = k = 0.01$.

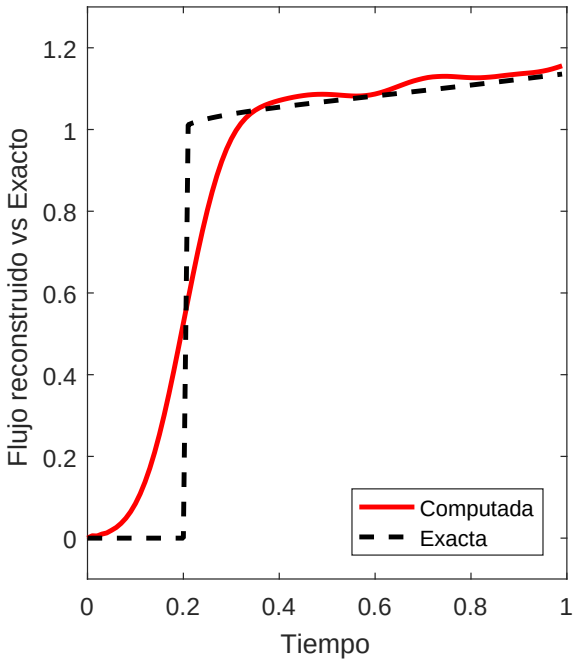

Figura 2.22 Función de Flujo reconstruido. Método molificación: ϵ =0.005, $\delta = 0.1$, $h = k = 0.01$.

Capítulo 3

Problemas Inversos de Conducción de Calor en Dimensión 2

En este capítulo se estudia el método de molificación para solucionar problemas inversos de conducción de calor en dimensión 2 sobre dominios semi-infinitos y acotados. Para el desarrollo de estos problemas suponemos que todas las funciones relacionadas son de $\mathcal{L}^2$ en $\mathbb{R}^2$, y se extienden de manera adecuada, cuando sea necesario en el análisis, como 0 para todo punto en $\{(y,t)|\ t \leqslant 0, y \leqslant 0\}$.

En la sección (3.1) presentamos la solución numérica de un IHCP en dimensión 2 sobre una placa semi-infinita en la cual se realizan reconstrucciones de temperatura y flujo de calor superficial simultaneamente. En la sección (3.2) presentamos la solución numérica de un IHCP en dimensión 2 sobre una placa finita donde se reconstruyen funciones de temperatura y flujo superficial superficial simultaneamente.

3.1. IHCP en Dimensión 2 Sobre Dominio Semi-Infinito

Consideremos un IHCP en dimensión 2 sobre una placa semi-infinita en el que los historiales de la temperatura f y del flujo de calor q en el lado derecho, $x = 1/2$, se desean encontrar. Como dato inicial disponemos de los valores de las mediciones de la temperatura y del flujo de calor superficial en el lado izquierdo, $x = 0$. El problema lineal normalizado es expresado matemáticamente de la siguiente manera. La función

de temperatura $u(x,y,t)$ satisface

$$u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), \quad 0 < x < 1/2, \quad y > 0, \quad t > 0, \tag{3.1a}$$

$$\begin{aligned} &u(0,y,t) = F(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad F_m(y,t), \end{aligned} \tag{3.1b}$$

$$\begin{aligned} &-u_x(0,y,t) = Q(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad Q_m(y,t), \end{aligned} \tag{3.1c}$$

$$u(x,y,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad y \geqslant 0, \tag{3.1d}$$

$$u(1/2,y,t) = f(y,t), \qquad y > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.1e}$$

$$-u_x(1/2,y,t) = q(y,t), \qquad y > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.1f}$$

$$u(x,0,t) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0. \tag{3.1g}$$

Asumimos que las funciones de datos exactos F y Q y las funciones de datos medidos F_m y G_m satisfacen las siguientes cotas de error en $\mathcal{L}^2$

$$||F - F_m|| \leqslant \epsilon \qquad \text{y} \qquad ||Q - Q_m|| \leqslant \epsilon.$$

En Murio (1993) páginas 107 a 109 y en Guo and Murio (1991) pagina 250 a 252 se prueba que al intentar resolver el problema (3.1) obteniendo f y q a partir de F y Q se amplifica el error en las componentes de alta frecuencia en un factor de $\exp\left[(\sqrt{s^4+w^2}+s^2)^{1/2}\right]$. Lo que evidencia que el IHCP en dimensión 2 es un problema altamente mal condicionamiento. Con el objetivo de solucionar el mal condicionamiento del problema, molificamos el sistema (3.1) y obtenemos el siguiente sistema asociado, en el cuál buscamos reconstruir $J_\delta u(x,y,t)$ la δ-molificación de la función $u(x,y,t)$, que satisface

$$(J_\delta u)_t = (J_\delta u)_{xx} + (J_\delta u)_{yy}, \quad 0 < x < 1/2, \quad y > 0, \quad t > 0 \tag{3.2a}$$

$$J_\delta u(0,y,t) = J_\delta F_m(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \tag{3.2b}$$

$$-J_\delta u_x(0,y,t) = J_\delta Q_m(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \tag{3.2c}$$

$$J_\delta u(x,y,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad y \geqslant 0, \tag{3.2d}$$

$$J_\delta u(x,0,t) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad y \geqslant 0, \tag{3.2e}$$

$$J_\delta u(1/2,y,t) = J_\delta f_m(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.2f}$$

$$J_\delta u_x(1/2,y,t) = -J_\delta q_m(y,t), \qquad y > 0, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}. \tag{3.2g}$$

El problema molificado (3.2) es un problema consistente y formalmente estable con

respecto a perturbaciones en los datos. Este resultado es garantizado por el siguiente teorema, y su prueba aparece en Murio (1993), teorema 4.1.

Teorema 3.1.1 *Supongamos que* $||F - F_m|| \leqslant \epsilon$ *y* $||Q - Q_m|| \leqslant \epsilon$, *entonces*

1. *El problema* (3.2) *es formalmente estable con respecto a perturbaciones en los datos.*

2. *Si la temperatura fronteriza* f *y el flujo de calor* q *tienen derivadas parciales de primer orden uniformemente acotadas en el dominio acotado* $D = [0, Y] \times [0, T]$, *entonces* $J_\delta f_m$ *y* $J_\delta q_m$ *cumplen*

$$||f - J_\delta f_m||_D \leqslant O(\delta) + 2\epsilon \exp[7\delta^{-2}],$$

$$||q - J_\delta q_m||_D \leqslant O(\delta) + 2\epsilon \exp[7\delta^{-2}],$$

donde $|| \cdot ||_D$ representa la norma $\mathcal{L}^2$ restringida al rectángulo D.

Con el objetivo de dar una solución numérica mediante diferencias finitas al problema (3.2), introducimos un cambio de variable dado por $v = J_\delta u$ y $w = -\partial v/\partial x$, y obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, && 0 < x < 1/2, \quad y > 0, \quad t > 0, && \text{(3.3a)}\\
\omega &= -\frac{\partial v}{\partial x}, && 0 < x < 1/2, \quad y > 0, \quad t > 0, && \text{(3.3b)}\\
v(0, y, t) &= J_\delta F_m(y, t), && y > 0, \quad t > 0, && \text{(3.3c)}\\
w(0, y, t) &= J_\delta Q_m(y, t), && y > 0, \quad t > 0, && \text{(3.3d)}\\
v(x, y, 0) &= 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad y \geqslant 0, && \text{(3.3e)}\\
v(1/2, y, t) &= J_\delta f_m(y, t), && y > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{incógnita}, && \text{(3.3f)}\\
w(1/2, y, t) &= J_\delta q_m(y, t), && y > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \text{incógnita}, && \text{(3.3g)}\\
v(x, 0, t) &= 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0. && \text{(3.3h)}
\end{aligned}$$

Para reconstruir numéricamente las función de temperatura superficial molificada $J_\delta f_m$, y la función de flujo de calor superficial molificado $J_\delta q_m$, en el cuadrado unitario $D = [0, 1] \times [0, 1]$ del plano (y, t) en $x = 1/2$, consideramos una malla uniforme en el

espacio (x, y, t) dada por

$$\{(x_i = ih, \quad y_j = js, \quad t_n = nk),$$
$$i = 0, 1, ..., N, \quad Nh = 1/2; j = 0, 1, ..., M, \quad Ms = L; \quad n = 0, 1, ..., P, \quad Pk = C\},$$

y definimos las funciones malla V y W como:

$$V_{i,j}^n = \nu(x_i, y_j, t_n), \quad W_{i,j}^n = \omega(x_i, y_j, t_n), \qquad 0 \leqslant i \leqslant N, \quad 0 \leqslant j \leqslant M, \quad 0 \leqslant n \leqslant P,$$

donde L y C dependen de h, s y k, y se definen más adelante. Aproximamos el sistema de ecuaciones diferenciales (3.3) mediante el siguiente esquema de diferencias finitas

$$W_{i+1,j}^n = W_{i,j}^n - \frac{h}{2k}\left(V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n-1}\right) + \frac{h}{s^2}\left(V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n\right), \tag{3.4a}$$

$$\begin{aligned} &V_{i+1,j}^n = V_{i,j}^n - hW_{i+1,j}^n, \\ &i = 0, 1, ..., N-1, \qquad j = 1, 2, ..., M-i-1, \quad n = 1, 2, ..., P-i-1, \end{aligned} \tag{3.4b}$$

$$V_{0,j}^n = (J_\delta F_m)_j^n, \qquad j = 1, 2, ..., M-1, \qquad n = 1, 2, ..., P-1, \tag{3.4c}$$

$$W_{0,j}^n = (J_\delta Q_m)_j^n, \qquad j = 1, 2, ..., M-1, \qquad n = 1, 2, ..., P-1, \tag{3.4d}$$

$$V_{i,0}^n = 0, \qquad i = 0, 1, ..., N-1, \qquad n = 1, 2, ..., P-i, \tag{3.4e}$$

$$V_{i,j}^0 = 0, \qquad i = 1, 2, ..., N, \qquad j = 1, 2, ..., M. \tag{3.4f}$$

En Murio (1993), páginas 113 a 117 se prueba mediante un análisis de frecuencias vía transformada de Fourier, que dado $\delta > 0$, el esquema de diferencias finitas (3.4) es consistente e incondicionalmente estable con la ecuación diferencial parcial $J_\delta u_{xx} = (J_\delta u)_t - J_\delta u_{yy}$, y además, la solución de diferencias finitas converge a la solución del problema molificado (3.4).

Observamos que mientras marchamos en dirección espacial x, en cada paso realizado debemos dejar los valores de las aproximaciones halladas de los punto más externo en la dirección temporal t y la dirección espacial y. Lo anterior indica que las matrices de aproximación halladas en cada paso de la marcha en dirección espacial x reducen sus filas y columnas en el número de veces que se marcha en la dirección espacial x. Este proceso se muestra en la Figura 3.1. Cada piso de la torre representa un avance en la marcha en dirección espacial x. Las líneas de color verde indican los puntos que utiliza el esquema de diferencias, a su vez marcados con color rojo, y la línea de color naranja indica la posición de los vectores con contienen la información de la temperatura molificada $J_\delta f$ y del flujo molificado $J_\delta q$ que se desean reconstruir.

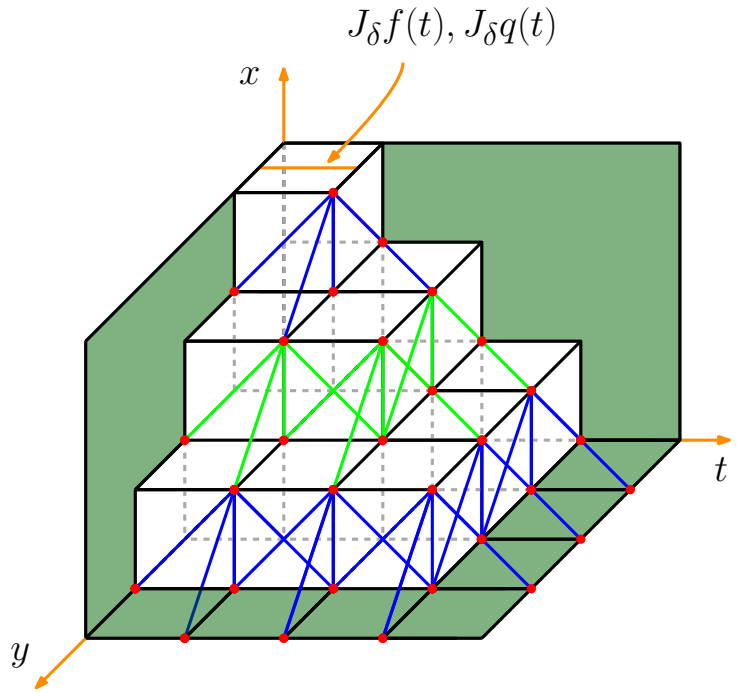

Figura 3.1 Esquema de Torre Truncada

Nuestras funciones objetivo $J_\delta f$ y $J_\delta q$ son aproximadas por $\{V_{N,j}^n\}$ y $\{W_{N,j}^n\}$ en los puntos de la malla del cuadrado unitario $D = [0,1] \times [0,1]$ del plano $x = 1/2$. Para lograr que nuestras reconstrucciones se realicen en $[0,1] \times [0,1]$ del plano $x = 1/2$, tomamos una longitud inicial mínima C en el eje temporal t, donde C cumple que $C = Pk = 1 - k + k/h$. De igual manera tomamos una longitud inicial mínima L en el eje espacial y, y cumple que $L = Ms = 1 - s + s/h$.

En la solución numérica trabajamos con las funciones de datos ruidosos para la temperatura $F_m(y_j, t_n)$ y para el flujo de calor $Q_m(y_j, t_n)$ definidas por

$$F_m(y_j, t_n) = F(y_j, t_n) + \epsilon_{1,j,n}, \quad y \quad Q_m(y_j, t_n) = Q(y_j, t_n) + \epsilon_{2,j,n},$$

donde F y Q son las funciones de datos exactos, y $\epsilon_{1,j,n}$ y $\epsilon_{2,j,n}$ son variables aleatorias Gaussianas con varianza $\epsilon^2 = (\epsilon_1)^2 = (\epsilon_2)^2$. Para estudiar numéricamente la estabilidad de los algoritmos realizados utilizamos diferentes niveles de perturbación en los datos, $\epsilon = 0.001$, 0.003, 0.005, 0.007 y 0.009.

Problema

En este problema buscamos reconstruir la temperatura superficial $f(y,t)$ y el flujo de calor superficial $q(y,t)$ en $x = 1/2$ sobre una placa expuesta a una función de datos de flujo de calor en la superficie libre $x = 0$ dada por

$$\begin{aligned} u_x(0,y,t) &= Q(y,t) \\ &= \begin{cases} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-n^2\pi^2 t\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{t}}\right), & y \geqslant 0, \quad t > 0, \\ 0, & e.o.c, \end{cases} \end{aligned}$$

y a una función de datos de temperatura dada por

$$u(0,y,t) = F(y,t) = 0 \qquad \text{para todo } t \text{ y } y.$$

La solución $u(x,y,t)$ del problema directo asociado al problema inverso (3.1) esta dada por el producto de dos funciones de temperatura de dimensión 1, es decir, $u(x,y,t) = u_1(x,t) \cdot u_2(y,t)$, y están dadas por

$$u_1(x,t) = \begin{cases} x + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\exp\left(-n^2\pi^2 t\right)\sin\left(n\pi x\right), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ t > 0, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$u_2(y,t) = \begin{cases} \operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{t}}\right), & y \geqslant 0, \quad t > 0, \\ 0, & y \geqslant 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones exactas de la temperatura superficial y del flujo de calor superficial en $x = 1/2$ están dadas por

$$\begin{aligned} u(1/2,y,t) &= f(y,t) \\ &= \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\exp(-n^2\pi^2 t)\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]\operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{t}}\right), & y \geqslant 0,\ t > 0, \\ 0, & e.o.c, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(1/2,y,t) &= q(y,t) \\ &= \begin{cases} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp(-n^2\pi^2 t)\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]\operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{t}}\right), & y \geqslant 0,\ t > 0, \\ 0, & e.o.c, \end{cases} \end{aligned}$$

Para el cálculo de errores de la solución de las funciones discretas de temperatura y flujo de calor, en $x = y = 1/2$ y sobre el intervalo discretizado $I = [0, 1]$ usamos las siguientes normas ponderadas

$$||V_{N,j} - f_j||_I = \left\{ \frac{1}{P-N+1} \sum_{n=1}^{P-N+1} \left(V_{N,j}^n - f_j^n \right)^2 \right\}^{1/2},$$

$$||W_{N,j} - q_j||_I = \left\{ \frac{1}{P-N+1} \sum_{n=1}^{P-N+1} \left(W_{N,j}^n - q_j^n \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad js = \frac{1}{2}$$

En la Figura 3.2 se muestran las tablas de resultados de los experimentos numéricos realizados para las reconstrucciones de la temperatura y del flujo de calor superficial del problema. Los comportamientos cualitativos de la temperatura superficial reconstruida $J_\delta f$ y del flujo de calor superficial reconstruido $J_\delta q$, en la ubicación $y = x = 1/2$, se ilustran en las Figuras 3.3 y 3.4, y en las Figuras 3.5 y 3.6 se presentan las soluciones sin usar molificación. Para el esquema de diferencias finitas usamos $h = 0.1$, $s = 0.1$ y $k = 0.01$.

Figura 3.2 Tablas de Norma del Error Absoluto

Temperatura

ϵ	δ	Error
0.000	0.0125	0.003902
0.001	0.0125	0.003913
0.003	0.0125	0.003978
0.005	0.0125	0.004102
0.007	0.0125	0.004146
0.009	0.0125	0.004437

Flujo

ϵ	δ	Error
0.000	0.0130	0.013368
0.001	0.0130	0.013471
0.003	0.0130	0.014703
0.005	0.0130	0.014643
0.007	0.0130	0.015671
0.009	0.0130	0.017808

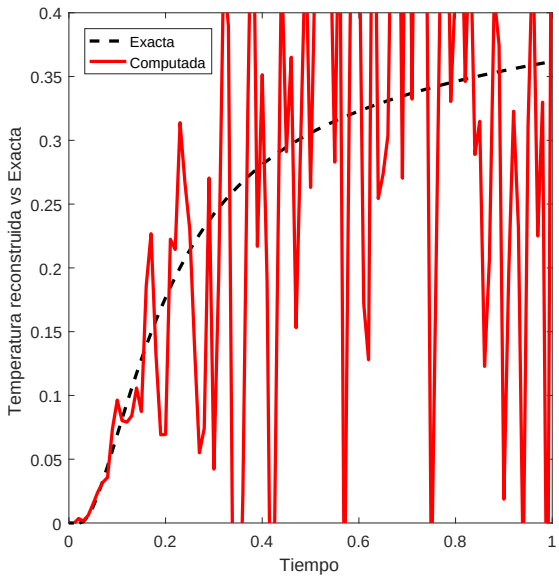

Figura 3.3 Función de temperatura reconstruida. Sin usar método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $h = s = 0.1$, k =0.01

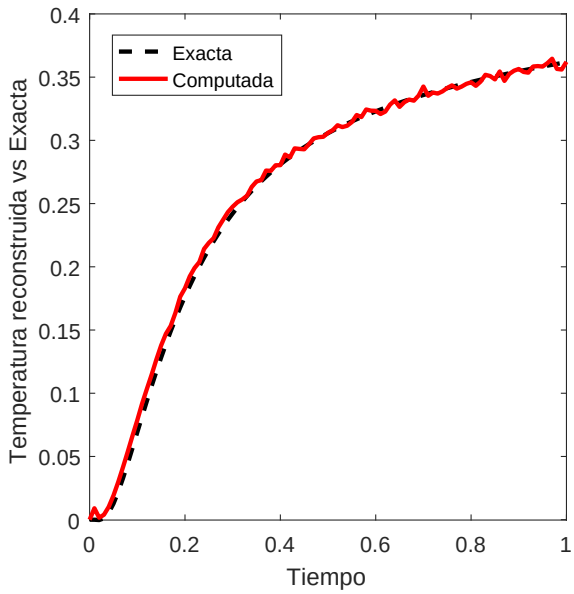

Figura 3.4 Función de temperatura reconstruida. Método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $\delta = 0.0125$, $h = s = 0.1$, k =0.01

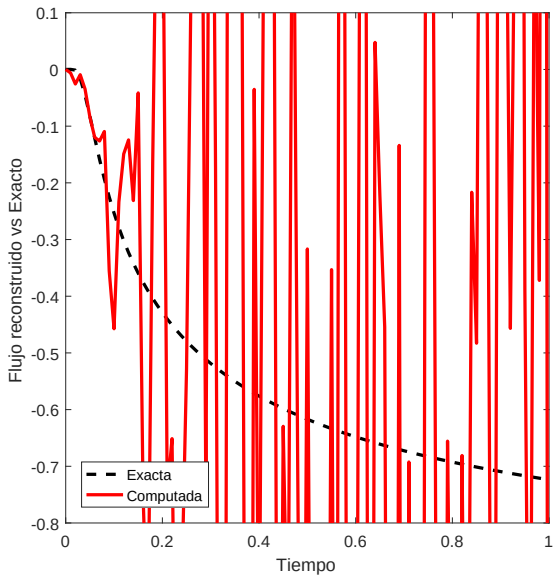

Figura 3.5 Función de flujo reconstruido. Sin usar método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $h = s = 0.1$, k =0.01

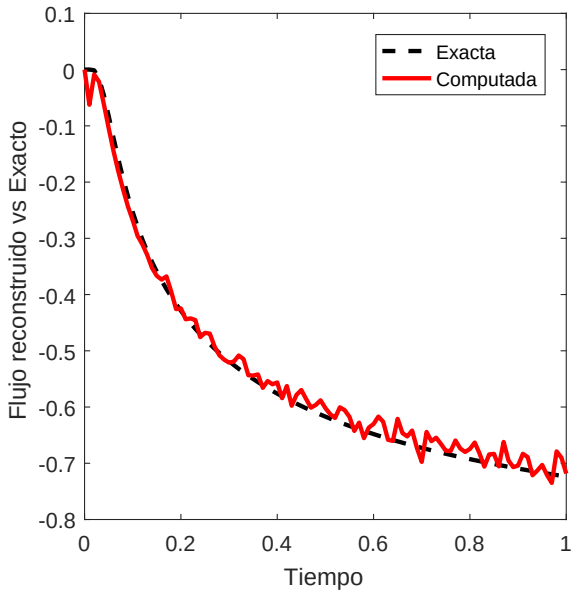

Figura 3.6 Función de Flujo reconstruido. Usando método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $h = s = 0.1$, k =0.01

3.2. IHCP en Dimensión 2 Sobre Dominio Acotado

En esta sección centramos nuestra atención en una aplicación del algoritmo realizado en la sección 3.1 para el IHCP en dimensión 2 sobre una placa infinita, y lo aplicamos a una situación más real, en la cual el IHCP en dimensión 2 se presenta en un dominio rectangular acotado $R = [0, 1/2] \times [0, 1]$ del plano (x, y). Debido a las condiciones del dominio, y del esquema de marcha en dirección espacial x, se agrega la condición de frontera

$$u(x, 1, t) = h_1(x, t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0,$$

además, no requeriremos de la homogeneidad de la condición de frontera $u(x, 0, t) = 0$, por lo tanto esta condición queda dada por

$$u(x, 0, t) = h_0(x, t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0,$$

Sin embargo, como las funciones f, h_0, h_1 y F determinan la solución del problema directo, incluyendo los flujos de calor Q y q en $x = 0$ y $x = 1/2$ respectivamente, está claro que, para el problema inverso, las funciones de datos F y Q poseen toda la información necesaria para la recuperación de las funciones de temperatura y flujo de calor f y q en la superficie $x = 1/2$, y de las funciones h_0 y h_1 en $y = 0$ y $y = 1$. Por lo tanto, las funciones $u(x, 0, t)$ y $u(x, 1, t)$ serán tratadas como incógnitas y su recuperación hace parte de la solución del IHCP 2D. Matemáticamente nuestro problema inverso es expresado de la siguiente manera. La función $u(x, y, t)$ satisface

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), \quad 0 < x < 1/2, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0, \tag{3.5a}$$

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = F(y, t), && 0 < y < 1, \quad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad F_m(y, t), \end{aligned} \tag{3.5b}$$

$$\begin{aligned} &u_x(0, y, t) = Q(y, t), && 0 < y < 1, \quad t > 0, \\ &\text{con correspondiente función de aproximación de datos} \quad Q_m(y, t), \end{aligned} \tag{3.5c}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad 0 < y < 1, \tag{3.5d}$$

$$u(1/2, y, t) = f(y, t), \qquad 0 < y < 1, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.5e}$$

$$u_x(1/2, y, t) = q(y, t), \qquad 0 < y < 1, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.5f}$$

$$u(x, 0, t) = h_0(x, t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}, \tag{3.5g}$$

$$u(x, 1, t) = h_1(x, t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t > 0, \quad \text{incógnita}. \tag{3.5h}$$

En Murio (1993) páginas 125 a 126 prueba que (3.5), tiene solución única. Para la implementación numérica aproximamos el sistema (3.5) con el esquema de diferencias finitas consistente

$$
\begin{array}{lll}
W_{i+1,j}^n = W_{i,j}^n + \dfrac{h}{2k}\left(V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n-1}\right) - \dfrac{h}{s^2}\left(V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n\right), & & \\
V_{i+1,j}^n = V_{i,j}^n + hW_{i+1,j}^n, & & \\
i = 0, 1, ..., N-1, & j = 1, 2, ..., M-1, & n = 1, 2, ..., P-i-1, \\
V_{0,j}^n = (J_\delta F_m)_j^n, & j = 0, 1, ..., M, & n = 1, 2, ..., P-1, \\
W_{0,j}^n = (J_\delta Q_m)_j^n, & j = 0, 1, ..., M, & n = 1, 2, ..., P-1, \\
V_{i,j}^0 = 0, & i = 1, 2, ..., N, & j = 1, 2, ..., M.
\end{array}
$$

A medida que marchamos hacia adelante en la dirección espacial x, es necesario dejar la estimación del valor de la temperatura en el punto anterior más alto en el tiempo. Los flujos de calor discretos $W_{i+1,0}^n$ y $W_{i+1,M}^n$ se calculan mediante extrapolación lineal a partir de los valores $W_{i+1,1}^n$,$W_{i+1,2}^n$ y $W_{i+1,M-1}^n$ y $W_{i+1,M-2}^n$ ya estimados. La extrapolación anterior introduce un error local del orden $\mathcal{O}(s)$:

$$
\begin{aligned}
W_{i+1,0}^n &= 2W_{i+1,1}^n - W_{i+1,2}^n, \\
W_{i+1,M}^n &= 2W_{i+1,M-1}^n - W_{i+1,M-2}^n.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Las temperaturas fronterizas desconocidas son calculadas por

$$
\begin{aligned}
V_{i+1,0}^n &= V_{i,0}^n + hW_{i+1,0}^n, \\
V_{i+1,M}^n &= V_{i,M}^n + hW_{i+1,M}^n.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Este proceso se continúa para $n = 1, 2, ..., P-i-1$ hasta que la solución aproximada se calcule en todos los puntos de la malla del dominio en el plano x_{i+1}. Luego se repite el ciclo entero para los puntos de la malla del plano x_{i+2}, y así sucesivamente. En la Figura 3.7 presentamos el esquema de las escaleras truncadas que nos permite visualizar gráficamente lo que hace el algoritmo. Los puntos de color rojo indican los puntos que se utilizan en el algoritmo. Las lineas de color verde y azul indican los puntos que toma el algoritmo para avanzar en la marcha espacial x, y el rectangulo de color verde, indica el plano donde ocurren las reconstrucciones de la tempertarura superficial molificada y del flujo de calor superficial molificado $J_\delta f$ y $J_\delta q$ respectivamente.

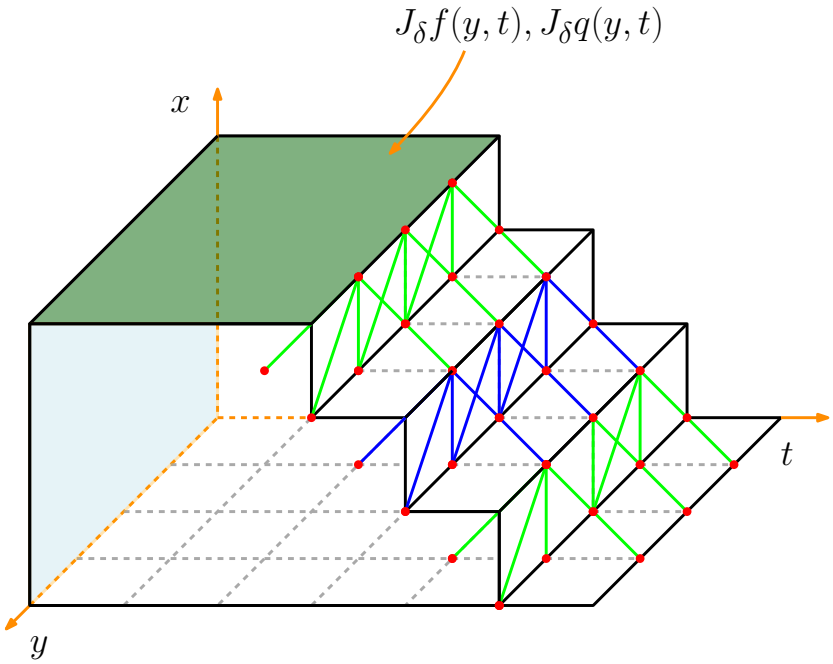

Figura 3.7 Escalera Truncada

Problema

La función $u(x,y,t)$ debe satisfacer

$$
\begin{aligned}
u_t(x,y,t) &= u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), && 0 < x < 1/2, \quad 0 < y < 1,\ t > 0,\\
u(0,y,t) &= 0, && 0 < y < 1,\ t > 0,\\
u_x(0,y,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right), && 0 < y < 1,\ t > 0,\\
u(x,y,0) &= \operatorname{sen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), && 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ 0 < y < 1,\\
u(1/2,y,t) &= f(y,t), \quad \text{incógnita}, && 0 < y < 1,\ t > 0,\\
u_x(1/2,y,t) &= q(y,t), \quad \text{incógnita}, && 0 < y < 1,\ t > 0,\\
u(x,0,t) &= h_0(x,t), \quad \text{incógnita}, && 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ t > 0,\\
u(x,1,t) &= h_1(y,t), \quad \text{incógnita}, && 0 \leqslant x \leqslant 1/2,\ t > 0.
\end{aligned}
$$

La única solución exacta de la temperatura para el problema (3.9) está dada por

$$
u(x,y,t) = e^{-t} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad t > 0,
$$

y como consecuencia, las funciones desconocidas para el IHCP están dadas por

$$\begin{aligned}
f(y,t) &= e^{-t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), && 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad t>0,\\
q(y,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), && 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad t>0,\\
h_0(x,t) &= 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t>0,\\
h_1(x,t) &= e^{-t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), && 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \quad t>0.
\end{aligned}$$

En el cálculo de errores de la solución de las funciones discretas de la temperatura superficial molificada reconstruida y del flujo de calor superficial molificado reconstruido, en $x = 1/2$ y sobre el rectangulo $R = [0,1] \times [0, P-N+1]$ del plano (y,t) usamos las normas ponderadas

$$||V^n_{N,j} - f^n_j|| = \left[\frac{1}{(M+1)(P-N+1)}\sum_{j=1}^{M+1}\sum_{n=1}^{P-N+1}|V(js,nk) - f(js,nk)|^2\right]^{1/2},$$

$$||W^n_{N,j} - q^n_j|| = \left[\frac{1}{(M+1)(P-N+1)}\sum_{j=1}^{M+1}\sum_{n=1}^{P-N+1}|W(js,nk) - f(js,nk)|^2\right]^{1/2}.$$

En la solución numérica trabajamos con las funciones de datos ruidosos para la temperatura $F_m(y_j,t_n)$ y para el flujo de calor $Q_m(y_j,t_n)$ definidas por

$$F_m(y_j,t_n) = F(y_j,t_n) + \epsilon_{1,j,n}, \quad y \quad Q_m(y_j,t_n) = Q(y_j,t_n) + \epsilon_{2,j,n},$$

donde F y Q son las funciones de datos exactos, y $\epsilon_{1,j,n}$ y $\epsilon_{2,j,n}$ son variables aleatorias Gaussianas con varianza $\epsilon^2 = (\epsilon_1)^2 = (\epsilon_2)^2$. Para estudiar numéricamente la estabilidad de los algoritmos realizados utilizamos diferentes niveles de perturbación en los datos, $\epsilon = 0.001$, 0.003, 0.005, 0.007 y 0.009. Para el esquema de diferencias finitas usamos $h = 0.1$, $s = 0.01$ y $k = 0.01$.

Observamos que todas las δ-molificaciones realizadas en nuestro algoritmo se efectúan solo en la dirección temporal t. Además, observamos que debido a que las normas obtenidas por nuestros algoritmo, en el rectángulo $R = [0,1]\times[0,0.8]$ del plano $x = 1/2$ toman valores positivos demasiado altos producidos por las extrapolaciones dadas en (3.7) y (3.8). Estos valores no nos permiten realizar buenas aproximaciones en el sen-

tido de la norma, por ende no se aproximaron las funciones h_0 y h_1. Debido a esto, tomamos como rectángulo de aproximación a $R = [0.06, 0.95] \times [0.05, 0.8]$ del plano $x = 1/2$. Es importante notar que todas las extrapolaciones son realizadas hasta el último paso del algoritmo pero no se toman para las normas calculadas.

En las Figura 3.8 se muestran las tablas de resultados de los experimentos numéricos realizados para las reconstrucciones de la temperatura superficial molificada y del flujo de calor superficial molificado del problema acotado. Los comportamientos cualitativos de la temperatura superficial reconstruida y del flujo de calor superficial reconstruido en $x = 1/2$, y en el rectangulo $R = [0.06, 0.95] \times [0.05, 0.8]$ del plano (y, t) se ilustran en las Figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, donde el nivel de perturbación en los datos es de $\epsilon = 0.009$. Para el esquema de diferencias finitas usamos $h = 0.1$, $s = 0.01$ y $k = 0.01$. Las Figuras 3.9 y 3.10 muestra la aproximación de la temperatura con el método de molificación con nivel de ruido de $\epsilon = 0.009$, con $k = 0{,}01$, y la solución exacta. Las Figuras 3.11 y 3.12 muestra la aproximación del flujo con el método de molificación con nivel de ruido de $\epsilon = 0.009$, con $k = 0{,}01$, y la solución exacta.

Figura 3.8 Tablas de la Norma del Error Absoluto

Temperatura		
ϵ	δ	Error
0.000	0.9	0.011584
0.001	0.9	0.011585
0.003	0.9	0.011586
0.005	0.9	0.011587
0.007	0.9	0.011591
0.009	0.9	0.011592

Flujo		
ϵ	δ	Error
0.000	0.4	0.013840
0.001	0.4	0.013843
0.003	0.4	0.013847
0.005	0.4	0.013849
0.007	0.4	0.013854
0.009	0.4	0.013863

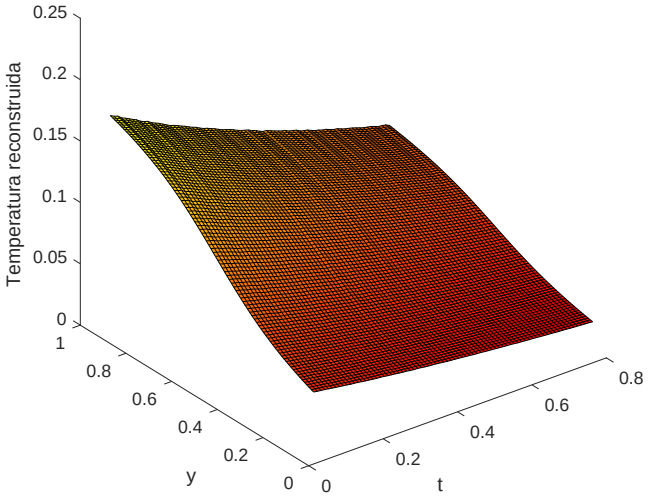

Figura 3.9 Función de temperatura reconstruida. Método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $\delta = 0.9$, $h = 0.1$, $s = k = 0.01$.

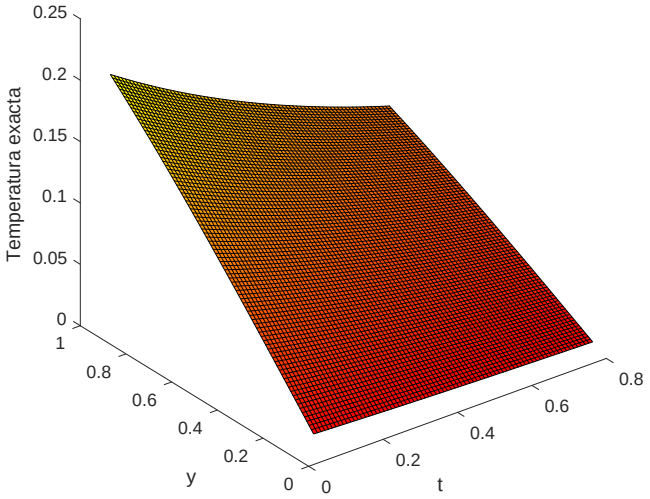

Figura 3.10 Función de temperatura exacta en $x = 1/2$.

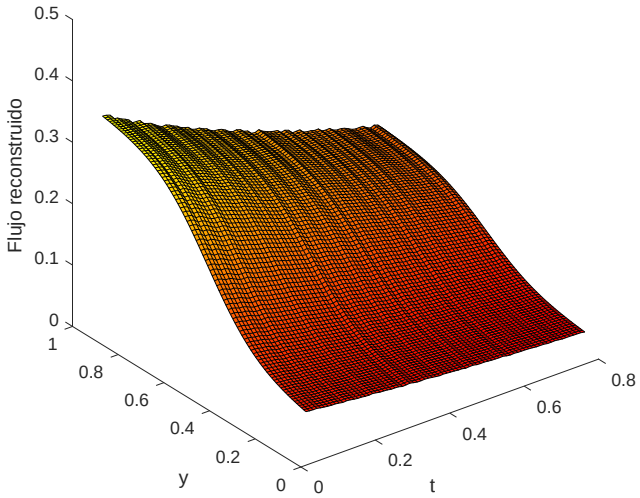

Figura 3.11 Función de flujo reconstruido. Método de molificación: $\epsilon = 0.009$, $\delta = 0.4$, $h = 0.1$, $s = k = 0.01$.

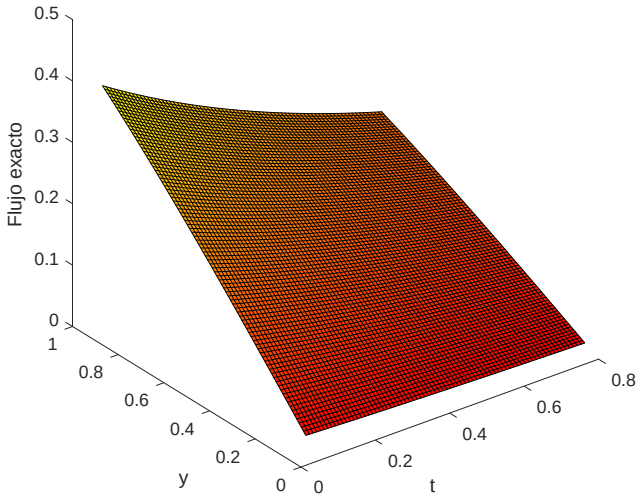

Figura 3.12 Función de flujo exacto en $x = 1/2$.

Capítulo 4

Identificación de Parámetros en un IHCP

El problema de identificación simultanea de parámetros en las ecuaciones parabólicas continua despertando interés en diversos campos tales como la conducción de calor, la recuperación de petroleo, los flujos de aguas subterráneas y las finanzas entre otros. El uso de esquemas numéricos de marcha espacial junto con algún tipo de regularización han probado ser un método eficiente para solucionar problemas mal condicionados de identificación de parámetros en un IHCP uno dimensional. Ver Zhan and Murio (1998), Woodbury (2002) y Yi and Murio (2004). Nosotros seguimos las ideas planteadas en Yi and Murio (2004) y nos soportamos en los teoremas presentamos en las referencias mencionadas arriba.

Problema

Consideramos a continuación el problema de determinar las funciones u, au_x y f, temperatura, flujo y fuente, respectivamente, en el intervalo $I = [0, 1]$ a lo largo del dominio $I \times I$ del plano (x, t), a partir de aproximaciones dadas por las funciones α, β, γ y τ que satisfacen

$$u_t(x,t) = (a(x)u_x(x,t))_x + f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \tag{4.1a}$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.1b}$$

$$u_x(0,t) = \beta(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.1c}$$

$$f(0,t) = \gamma(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.1d}$$

$$u_t(0,t) = \tau(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.1e}$$

donde a es dada y las funciones α, β, γ y τ no son conocidas con exactitud. Las funciones de datos disponibles α_m, β_m, γ_m, τ_m son mediciones aproximadas de α, β, γ y τ, respectivamente, y satisfacen los estimativos $||\alpha-\alpha_m||_I \leqslant \epsilon$, $||\beta-\beta_m||_I \leqslant \epsilon$, $||\gamma-\gamma_m||_I \leqslant \epsilon$, $||\tau - \tau_m||_I \leqslant \epsilon$. El problema es regularizado mediante δ-mollificación y las nuevas incógnitas v, av_x, y f satisfacen

$$v_t(x,t) = (a(x)v_x(x,t))_x + f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \tag{4.2a}$$

$$v(0,t) = J_{\delta_1^0}\alpha(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.2b}$$

$$v_x(0,t) = J_{\delta_2^0}\beta(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.2c}$$

$$f(0,t) = J_{\delta_3^0}\gamma(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.2d}$$

$$v_t(0,t) = J_{\delta_4^0}\tau(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.2e}$$

Todas las δ-molificaciones δ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ se realizan con respecto a t. Es importante notar que el método no requiere información sobre la cantidad y/o características del ruido en los datos, y también que los parámetros de la molificación son elegidos automáticamente.

Para el esquema de marcha espacial consideramos M y N dos enteros tales que $h = 1/M$ y $k = 1/N$, donde h y k son los parámetros de la discretización de las diferencias finitas de $I = [0, 1]$. Definimos $q(ih, nk) = a(ih)v_x(ih, nk)$, e introducimos las siguientes funciones discretas

R_i^n : La aproximación calculada discreta de $v(ih, nk)$,
W_i^n : La aproximación calculada discreta de $v_t(ih, nk)$,
Q_i^n : La aproximación calculada discreta de $q(ih, nk)$,
U_i^n : La aproximación calculada discreta de $q_x(ih, nk)$,
F_i^n : La aproximación calculada discreta de $f(ih, nk)$,
A_i : La aproximación calculada discreta de $a(ih)$.

Pasos del Algoritmo:

1. Realizar Molificación de $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \tau_m$ en el I, y definir:

$$R_0^n = J_{\delta_1}\alpha_m(nk), \quad Q_0^n = J_{\delta_2}a(ih)\beta_m(nk), \quad F_0^n = J_{\delta_3}\gamma_m(nk), \quad W_0^n = J_{\delta_4}\tau_m(nk).$$

2. Inicializar $i = 1$ y ejecutar hasta $i \leqslant M - 1$,

$$a)\ R_{i+1}^n = R_i^n + h\frac{Q_i^n}{A_i},$$

$$b)\ Q_{i+1}^n = Q_i^n + h\left(W_i^n - F_i^n\right),$$

$$c)\ W_{i+1}^n = W_i^n + \frac{h}{A_i}\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^{n-1}}{2k},$$

$$d)\ U_{i+1}^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{h},$$

$$e)\ F_{i+1}^n = W_{i+1}^n - U_{i+1}^n.$$

Implementación Numérica

Las medidas discretas aproximadas de los datos iniciales se modelan añadiendo errores aleatorios a las funciones de datos exactas. Por ejemplo, para la función de datos de iniciales $\eta(x,t)$, se genera su versión discreta ruidosa

$$\eta_{j,n}^{\epsilon} = \eta(x_j, t_n) + \epsilon_{j,n}, \quad j = 0, 1, ..., N, \quad n = 0, 1, ..., M,$$

donde los $\epsilon_{j,n}$ son variables aleatorias Gaussianas con varianza ϵ^2.
Los errores relativos de los parámetros recuperados son medidos con la norma ponderada relativa en L^2. Por ejemplo para medir la aproximación obtenida para el término fuente usamos la siguiente expresión

$$\frac{\left[\frac{1}{(M+1)(N+1)}\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}|f(ih,jl) - F(ih,jl)|^2\right]^{1/2}}{\left[\frac{1}{(M+1)(N+1)}\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}|f(ih,jl)|^2\right]^{1/2}}.$$

donde $f(ih,jl)$ representa el valor del termino fuente f restringida a la malla. Nuestro problema consiste en determinar u ,au_x y f que satisfacen

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \left((2-x)u_x(x,t)\right)_x + f(x,t), && 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1,\\
u(0,t) &= 4 - e^t\cos(10t), && 0 \leqslant t \leqslant 1,\\
u_x(0,t) &= -e^{-t}\cos(10t), && 0 \leqslant t \leqslant 1,\\
u_t(0,t) &= e^{-t}\left(10\,\mathrm{sen}(10t) + \cos(10t)\right), && 0 \leqslant t \leqslant 1,\\
f(0,t) &= e^{-t}\left(10\,\mathrm{sen}(10t) + 2\cos(10t)\right), && 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Las soluciones exactas para este problema están dadas por

$$u(x,t) = 4 - e^{x-t}\cos(10t),$$
$$f(x,t) = e^{x-t}\left(10\,\mathrm{sen}(10t) + (2-x)\cos(10t)\right).$$

En la Figura 4.1 se muestran los resultados numéricos de los experimentos realizados con diferentes niveles de ruido en los datos y diferentes tamaños para N. En las Figuras 4.2 y 4.3, 4.4 y 4.5, 4.6 y 4.7 se muestran las reconstrucciones de la temperatura molificada, y de la temperatura exacta, del flujo molificado y del flujo exacto, y del término fuente molificado y del término fuente exacto, respectivamente, en donde se utilizo un nivel de perturbación de los datos de $\epsilon = 0.01$, y $M = N = 64$.

Figura 4.1 Tablas de Norma del Error Relativo de la Fuente, Temperatura y Flujo

M	N	ϵ	δ_R	δ_Q	δ_W	δ_F	f	au_x	u
64	64	0.005	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.032353	0.041089	0.0024710
64	128	0.005	0.0375	0.0375	0.0375	0.0936	0.037857	0.042552	0.0019024
64	256	0.005	0.0375	0.0913	0.2000	0.0375	0.060320	0.041873	0.0016570
64	64	0.009	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.044676	0.043643	0.0033590
64	128	0.009	0.0375	0.0375	0.1535	0.0375	0.053689	0.042527	0.0027893
64	256	0.009	0.0375	0.1136	0.2000	0.0375	0.096182	0.043750	0.0024711
64	64	0.010	0.0375	0.0375	0.0375	0.0375	0.048388	0.048217	0.0045414
64	128	0.010	0.0375	0.0375	0.1625	0.0375	0.068210	0.044504	0.0035650
64	256	0.010	0.0790	0.0969	0.2000	0.0375	0.111480	0.042676	0.0028870

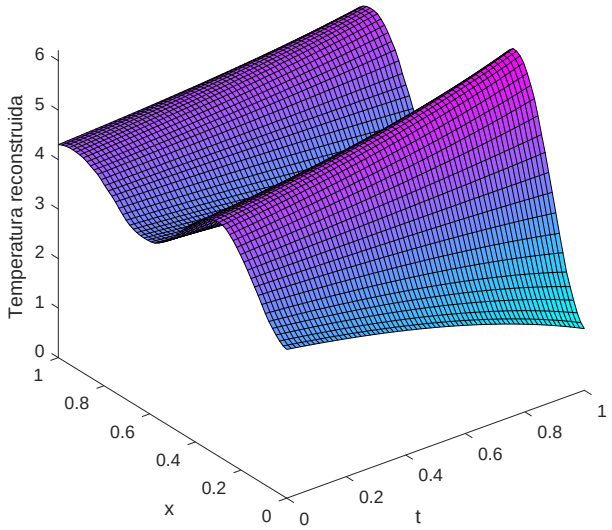

Figura 4.2 Función de temperatura reconstruida. Método de molificación: $\epsilon = 0.010$, $\delta = 0.0375$, $h = k = 1/64$.

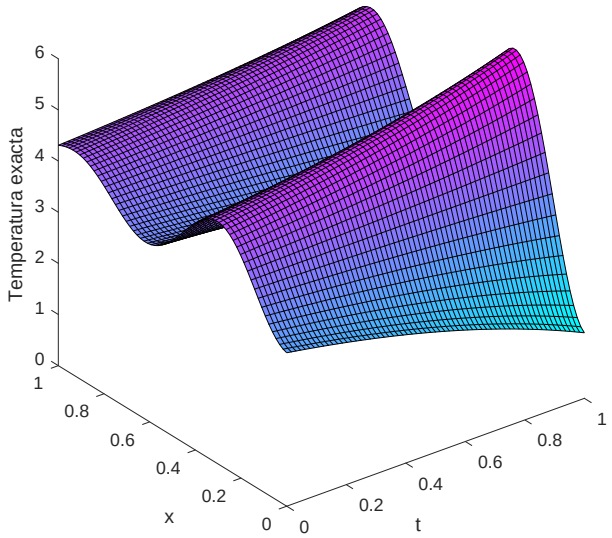

Figura 4.3 Función de temperatura exacta.

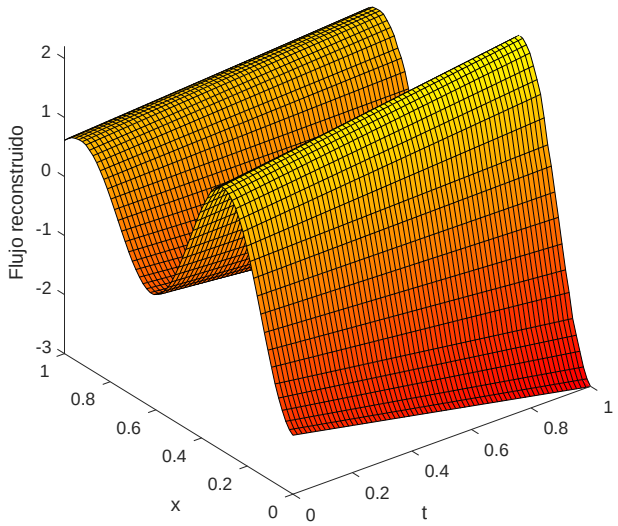

Figura 4.4 Función de flujo reconstruido. Método de Molificación: $\epsilon = 0.010$, $\delta = 0.0375$, $h = k = 1/64$.

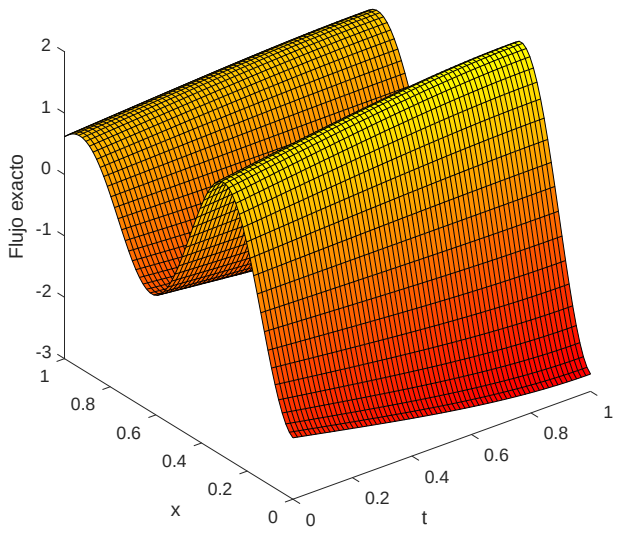

Figura 4.5 Función de flujo exacto.

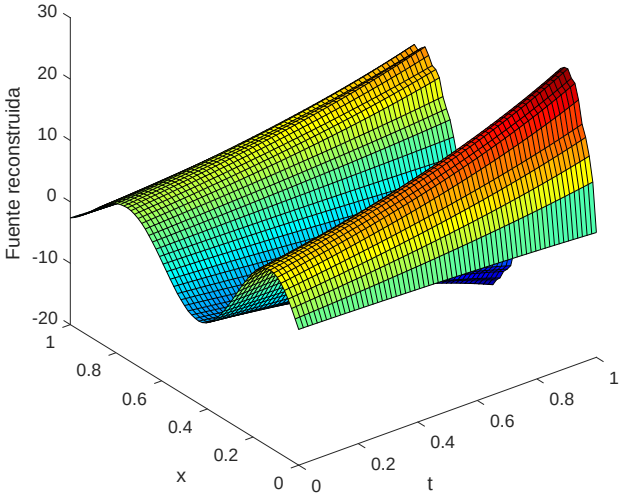

Figura 4.6 Función término de fuente reconstruido. Método de molificación: $\epsilon = 0.010$, $\delta = 0.0375$, $h = k = 1/64$.

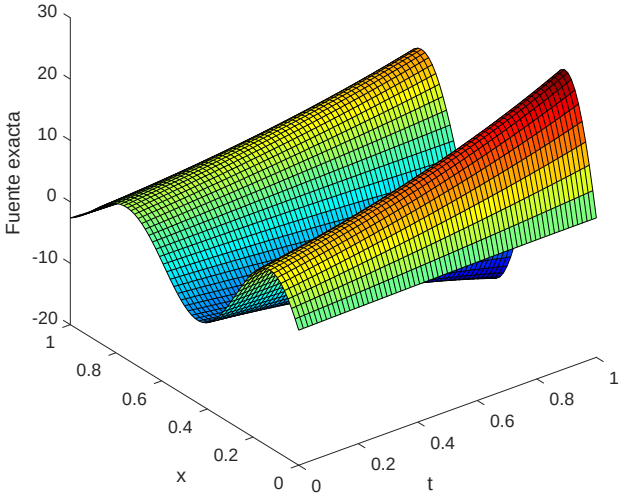

Figura 4.7 Función de término fuente exacta

Capítulo 5

Conclusiones y Observaciones Finales

5.1. Conclusiones

En esta tesis estudiamos e implementamos métodos numéricos para solucionar problemas inversos de conducción de calor en una y dos dimensiones. De igual modo se implementaron métodos numéricos para la solución de problemas de identificación de parámetros en un problema inverso de conducción de calor unidimensional.

Presentamos esquemas de diferencias finitas con sentido de marcha en la dirección espacial para solucionar problemas inversos de conducción de calor con función objetivo en la frontera de la región en una y dos dimensiones, y para solucionar problemas de identificación de parámetros en ecuaciones parabólicas.

En esta tesis estudiamos métodos de regularización de problemas inversos de conducción de calor lineales y no lineales mal condicionados, que son formulados por medio de operadores compactos en espacios de Hilbert. Para solucionar numéricamente dichos problemas implementamos computacionalmente el método de regularización de Tikhonov y el método de regularización por molificación discreta.

Los resultados obtenidos por medio de las rutinas MATLAB construidas proporcionan resultados que son comparables a los resultados obtenidos en Murio (1993),Guo et al. (1990), Guo and Murio (1991), Yi and Murio (2004).

5.2. Observaciones Finales

El algortimo presentado en Yi and Murio (2004) fue modificado de manera considerable con el objetivo de obtener mejores aproximaciones numéricas. Las modificaciones se realizaron en los pasos $(1), (2), (3), (d)$ y (e). Estos cambios realizados exigen modificaciones en resultados teóricos los cuales se investigan actualmente y se reportarán en otro lugar.

En el IHCP 2D semi-infinito hay molificación pre y post procesamiento. Esto exige que se deben realizar cambios en los resultados teóricos para soportar los cómputos. Dichos cambios en los resultados teóricos son producto de investigación actual y esperan reportarse a futuro en otro medio.

Actualmente se estudia la implementación numérica de la solución de un problema inverso no lineal en dimensión 2 en el cual se han logrado grandes avances, pero no se anexan debido a que aún no se ha completado.

Con respecto a los problemas de identificación simultánea de parámetros, actualmente se está estudiando la extensión del problema a dimensión 2. De igual manera se está estudiando sobre la implementación numérica del problema inverso de conducción de calor en dimensión 3 sobre un cubo finito.

Bibliografía

C.D Acosta and C.E Mejía. *Stable computations by discrete mollification.* Universidad Nacional de Colombia, editorial, 2014.

A Alghamdi. Inverse estimation of boundary heat flux for heat conduction model. *Engineering Sciences*, 21(1), 2010.

O Alifanov. *Analysis of Statements and Solution Methods for Inverse Heat Transfer Problems.* Springer, 1994.

J Beck, B Blackwell, and Clair J. *Inverse heat conduction: Ill-posed problems.* James Beck, 1985.

G H Golub, Michael Heath, and G Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223, 1979.

C.W Groetsch. *Inverse problems in the mathematical sciences*, volume 52. Springer, 1993.

L Guo and DA Murio. A mollified space-marching finite-different algorithm for the two-dimensional inverse heat conduction problem with slab symmetry. *Inverse Problems*, 7(2):247, 1991.

L Guo, DA Murio, and C Roth. A mollified space marching finite differences algorithm for the inverse heat conduction problem with slab symmetry. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(7):75–89, 1990.

P.C Hansen. *Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*, volume 6. Springer, 1994.

P.C Hansen. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion.* SIAM, 1998.

F Irani. *Visuoperceptual.* Springer, 2011.

D.A Murio. *The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems.* John Wiley & Sons, 1993.

M Ozisik. *Inverse heat transfer: fundamentals and applications.* CRC Press, 2000.

A Shidfar and A Zakeri. A numerical technique for backward inverse heat conduction problems in one-dimensional space. *Applied mathematics and computation*, 171(2): 1016–1024, 2005.

A Shidfar, A Babaei, and A Molabahrami. Solving the inverse problem of identifying an unknown source term in a parabolic equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(5):1209–1213, 2010.

J Taler and P Duda. *Solving direct and inverse heat conduction problems*. Springer Science & Business Media, 2010.

B Wang and Q Wang. Determination of unknown boundary condition in the two-dimensional inverse heat conduction problem. pages 383–390, 2012.

K Woodbury. *Inverse engineering handbook*. Crc press, 2002.

Z Yi and DA Murio. Source term identification in 1-d ihcp. *Computers & Mathematics with Applications*, 47(12):1921–1933, 2004.

S Zhan and DA Murio. Identification of parameters in one-dimensional ihcp. *Computers & Mathematics with Applications*, 35(3):1–16, 1998.