Modelado de motor de combustión interna para predicción de fallas de funcionamiento.

Alejandro Muñoz Rodríguez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ingeniería Mecánica

Director:
I.M. MSc Carlos Humberto Galeano Urueña

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería
Bogotá, D.C., Colombia
2012

Tesis aprobada por la Facultad de Ingeniería en cumplimiento de los requisitos exigidos para otorgar el título de: **Magíster en Ingeniería Mecánica**

I.M. MSc Carlos Humberto Galeano Urueña.
Director(a) de la tesis

(Nombre del jurado 1)
Jurado

(Nombre del jurado 2)
Jurado

(Nombre del jurado 3)
Jurado

Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.C., 25.05.2012

Prefacio y Agradecimientos

El autor del presente trabajo desea hacer especial agradecimiento a:
Al I.M. MSc Carlos Humberto Galeano Urueña Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional y Director de Proyecto, por su paciencia y apoyo en los momentos difíciles.
Al I.M. MSc Diego Ospina Latorre Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central, por el apoyo en el desarrollo del modelo y la compresión de la técnica de modelado.
Al I.M. MSc Fernando Mejía Umaña, Director del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central, por permitir el desarrollo del proyecto contando con sus instalaciones y equipos.
Al I.M. MSc Phd Juan Miguel Mantilla Gonzales, Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional, por su colaboración en los modelos de simulación de presión en el cilindro.

Epur si muove.

Galileo Galilei.

Resumen

El presente trabajo presenta un modelo matemático de un motor de combustión interna monocilíndrico que simula las vibraciones producidas en sus anclajes bajo funcionamiento en condiciones normales. Los modelos más simples y analíticos parten de la cinemática plana de movimiento absoluto para el mecanismo, pero deben establecer un modelo dinámico equivalente para la biela que es el eslabón que tiene el movimiento más complejo. Se utilizará la técnica de los gráficos de unión, ampliamente utilizada en el modelado de mecanismos mecatrónicos (brazos robóticos y maquinaria de movimiento de tierra) y a la luz de este desarrollo se ofrece una alternativa interesante para simular el motor sin tener que acudir a al modelo dinámico equivalente para la biela, lo cual garantiza un modelo más preciso. Adicionalmente, se introducen variaciones en el modelo simulando fallas de funcionamiento bajo las cuales el modelo muestra variación en el comportamiento vibratorio.

Palabras clave: gráficos de unión, modelado, motores de combustión interna, vibraciones.

Abstract

Title: Modeling of the internal combustion engine for malfunction prediction.
This paper presents a mathematical model of a single cylinder internal combustion engine that simulates vibration produced in their anchors under normal in operating conditions. The simplest and analytical models are based on the flat kinematic absolute motion for the mechanism, but should establish a dynamic model equivalent to the connecting rod which is the link that has the most complex movement. Be used graphics technique binding, widely used in the modeling mechatronic mechanisms (robotic arms and machinery earthmoving) and in light of this development provides an interesting alternative to simulate the engine without having to resort to the equivalent dynamic model for the rod, which ensures more accurate model. Additionally, variations are introduced into the model simulating malfunctions under which the model shows variation in the vibrational behavior.

Keywords: bond graphs, modeling,internal combustion engines, vibrations.

Contenido

Prefacio y/o Agradecimientos v

Resumen vi

Lista de símbolos x

Lista de tablas xii

Lista de figuras xiv

1. Introducción 1

2. Planteamiento del problema 4
2.1. Necesidad y aplicación de un modelo vibratorio. 4
2.2. Origen de las vibraciones de un motor de combustión interna. Modelado del motor de combustión interna. 6
2.3. Objetivo general. 11
2.4. Objetivos específicos. 11

3. Modelo analítico y consideraciones dinámicas iniciales 12
3.1. Cinemática de un motor de combustión interna monocilíndrico 12
3.2. Análisis cinetostático del mecanismo de un motor de combustión interna . . 15
3.2.1. Análisis de fuerzas debidas a la expansión del gas 15
3.2.2. Modelo dinámicamente equivalente de la biela 20
3.2.3. Análisis de las fuerzas de inercia y de sacudimiento 24
3.2.4. Equilibrio dinámico en un motor monocilíndrico 28

4. Modelo propuesto: Gráficos de unión. 30
4.1. Gráficos de unión. Fundamentos matemáticos y físicos 30
4.1.1. Variables de potencia y variables energéticas. 31
4.1.2. Puertos y elementos multipuerto. Ecuaciones constitutivas 33
4.2. Enfoque multicuerpo utilizando gráficos de unión 43
4.2.1. Modelo en gráficos de unión para un eslabón en movimiento plano general. 45

4.3. Modelo del mecanismo del motor de combustión interna 49

5. Resultados del modelo. 56

5.1. Comparación de resultados con el modelo analítico. 56

5.2. Resultados del modelo con función de presión. 57

5.2.1. Comportamiento con el cigüeñal desbalanceado. 58

5.2.2. Variación de parámetros dinámicos de otros componentes 59

5.2.3. Variación de la función de presión 62

6. Conclusiones y trabajos futuros 65

A. Anexo:Datos técnicos del motor. 68

Bibliografía 81

Lista de símbolos

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
P	Presión de los gases en el cilindro	Pa	
t	Tiempo	s	
x_{p}	Desplazamiento del pistón	mm	
b	Longitud de la biela	mm	
m	Masa	kg	
p	Coordenada modal	mm	
A	Área del pistón	mm	
B	Diámetro del pistón	mm	
c	Longitud de la manivela del cigüeñal	mm	

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI	Definición
ϕ	Ángulo de biela	rad	
θ	Ángulo de giro del cigüeñal	rad	
ω	Velocidad angular del cigüeñal	$\frac{rad}{s}$	$\frac{d\omega}{dt}$
Φ	Forma modal del cigüeñal	*Adimensional*	

Subíndices

Subíndice	Término
i	Inercia (inercial)
x	Dirección vertical
y	Dirección horizontal
p	Relativo al pistón
g	Relativo al gas (fluido de trabajo)

Abreviaturas

Abreviatura	Término
PMS	Punto muerto superior
$OCWM$	Modelo acoplado en una dirección (de sus siglas en inglés).
FCM	Modelo acoplado totalmente (de sus siglas en inglés).

Lista de Tablas

A-1. Datos de función de presión utilizada en el modelo. 69
A-2. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 70
A-3. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 71
A-4. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 72
A-5. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 73
A-6. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 74
A-7. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 75
A-8. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 76
A-9. Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 77
A-10 Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación) 78
A-11 Datos técnicos del motor modelado. 79
A-12 Parámetros de simulación de la función de presión. 79

Lista de Figuras

2-1. Concepto de acoplamiento para motor de combustión interna. [23]. 9

3-1. Mecanismo típico de un motor de combustión interna. 13
3-2. Fuerzas aplicadas sobre el pistón. 17
3-3. Fuerzas aplicadas sobre la biela, el cigüeñal y el pistón. 17
3-4. Fuerzas aplicadas sobre el bloque de motor (eslabón 1). 19
3-5. Trayectoria de la biela [5]. 21
3-6. Modelo dinámico equivalente de la biela. 23
3-7. Modelo de masas concentradas. 24
3-8. Fuerzas de inercia en la masa reciprocante, la biela y el cigüeñal. 25
3-9. Fuerzas de sacudimiento. 26
3-10.Equilibrado dinámico de un motor monocilíndrico. 28

4-1. Flujo de potencia y su símbolo en gráficos de unión. 33
4-2. Puerta resistor y su símbolo en gráficos de unión. 35
4-3. Puerta capacitor y su símbolo en gráficos de unión. 36
4-4. Puerta inercia y su símbolo en gráficos de unión. 36
4-5. Elementos tipo fuente. Arriba, fuente de flujo. Abajo, fuente de esfuerzo. . . 37
4-6. Transformador y su símbolo en gráficos de unión. 38
4-7. Unión de flujo común y su símbolo en gráficos de unión. 39
4-8. Unión de esfuerzo común y su símbolo en gráficos de unión. 39
4-9. Elemento resistor con sus posibles causalidades. 40
4-10.Elemento capacitor con sus posibles causalidades. Arriba, causalidad derivativa. Abajo, causalidad integral. 41
4-11.Elemento inercia con sus posibles causalidades. Arriba, causalidad integral. Abajo, causalidad derivativa. 42
4-12.Elemento transformador con sus posibles causalidades. 42
4-13.Uniones tipo 1 y 0 con sus posibles causalidades. 43
4-14.Uniones tipo 1 y 0 con sus posibles causalidades. 43
4-15.Cuerpo rígido en movimiento plano general. 44
4-16.Modelo en bond graph de un eslabón en movimiento plano general. 46
4-17.Detalle de la representación del movimiento del centro de gravedad del cuerpo. 47
4-18.Detalle de la representación del movimiento del centro de gravedad del cuerpo. 47

4-19.Detalle de la representación de las velocidades en los puntos A y B del eslabón. 49
4-20.Sistema de referencia para la construcción del modelo. 50
4-21.Modelo en gráficos de unión para mecanismo de motor de combustión interna. 51
4-22.Sección cigüeñal del modelo en gráficos de unión. 52
4-23.Sección biela del modelo en gráficos de unión. 53
4-24.Sección pistón del modelo en gráficos de unión. 54

5-1. Resultados del modelos arrojados por el programa 20-sim. 56
5-2. Resultados arrojados por el programa Matlab. 57
5-3. Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph de la fuerza de bancada y del ángulo de torsión para cigüeñal equilibrado. 59
5-4. Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con el cigüeñal desbalanceado. 60
5-5. Simulación en 20-sim de las fuerzas de bancada con el cigüeñal balanceado (negro) y sobreequilibrado (rojo). 60
5-6. Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con el cigüeñal sobreequilibrado. 61
5-7. Simulación en 20-sim para una reducción en el momento de inercia del volante. 61
5-8. Simulación en 20-sim para un aumento en la masa del pistón. 62
5-9. Simulación en 20-sim para una variación el a posición del centro de gravedad de la biela. 63
5-10.Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con una función de presión anormal. 63
5-11.Función de presión normal con la que se alimentó al modelo. 64
5-12.Función de presión anormal con la que se alimentó al modelo. 64

A-1. Curva característica de potencia del motor modelado. 68
A-2. Curva característica de torque del motor modelado. 80

1. Introducción

El análisis de vibraciones en maquinaria es un importante campo de trabajo en ingeniería mecánica. Tiene aplicación en múltiples áreas, particularmente cabe destacar su aplicación en el diseño de componentes, la optimización de dispositivos y el mantenimiento de maquinaria operativa.

En cualquiera de estas aplicaciones es útil la determinación del comportamiento del dispositivo por medio de un modelo matemático, con el fin de interpretar correctamente el espectro vibratorio y su susceptibilidad a variaciones. La teoría de los sistemas dinámicos fundamenta el planteamiento de un modelo de este tipo.

El planteamiento de estos modelos puede ser más sencillo en ciertos tipos de máquina. Es claro por ejemplo que, en el caso de la maquinaria rotativa como las bombas centrífugas y las turbinas de gas o de vapor, su dinámica es más sencilla y es más fácil la obtención de estos modelos. En contraposición, las máquinas alternativas o reciprocantes como los compresores de pistón y los motores de combustión interna, implican mecanismos más complejos para llevar a cabo este modelamiento.

En un motor de combustión interna tiene interés práctico en determinar dos tipos de vibraciones principalmente: las que se producen en los anclajes del motor y las vibraciones torsionales a las cuales se somete el cigüeñal. Las primeras deben conocerse a fin de diseñar cimentaciones en donde se alojará el motor o en caso de aplicaciones para transporte, cuantificar las vibraciones que se transmitirán a la estructura del vehículo a fin de limitarlas. El el caso de las vibraciones torsionales del cigüeñal, estas se deben determinan por consideraciones de diseño del componente. El análisis del mecanismo principal del motor de combustión interna (pistón-biela-cigüeñal) es el punto de partida para estos estudios.

A pesar de la complejidad inicial, el mecanismo principal de motor de combustión interna (pistón-biela-cigueñal) es susceptible de ser descrito en su dinámica por ecuaciones trigonométricas sencillas. Estos desarrollos se encuentran ampliamente desarrollados en libros de texto de ingeniería mecánica como Norton [38] o en textos específicos sobre motores de combustión interna como Schneider [17], Schnurle [1] y Giacossa [9]. Esto indica que la obtención de un modelo que explique el origen de las vibraciones de un motor de combustión interna fue solucionado hace bastante tiempo. Sin embargo este modelo analítico platea simplificaciones

importantes. Una de ellas es la obtención de un modelo dinámico equivalente para el eslabón acoplador (biela) que se denomina *modelo de parámetros concentrados.* Con este modelo se busca el dividir la biela en dos masas; una que se considera con movimiento rectilíneo y ubicada en unión con el pistón y otra que se considera con movimiento rotacional y que se ubica en la unión con el cigüeñal. Finalmente, el modelo entrega como conclusión que el origen de las vibraciones por parte del mecanismo principal provienen del movimiento de la masa reciprocante.

Sin embargo es de anotar que no solamente el mecanismo principal del motor en el causante del comportamiento vibratorio del motor en conjunto. Mecanismos como el de distribución (árbol de levas, válvulas), fenómenos provenientes de irregularidades en el proceso de combustión (detonación) afectan el comportamiento vibratorio del motor. Lo anterior hace que la técnica de análisis de vibraciones como herramienta de diagnóstico tenga dificultades en su aplicación para este tipo de máquinas. Lo anterior justifica entonces la obtención un modelo que explique el comportamiento del dispositivo, aunque también el considerar que dicho modelo contemple todos aportes de los sistemas del motor lo lleva a convertirse en un modelo de cierta complejidad.

A pesar de esta dificultad, los requerimientos actuales de eficiencia, rendimiento y comfort exigen controlar el fenómeno vibratorio del motor.El tema de las vibraciones de los motores de combustión interna de uso automotriz es un parámetro importante dentro del desarrollo y avance de los vehículos modernos. Lo anterior debe controlarse a fin de lograr niveles de ruido y vibración tolerables. Los esfuerzos de los trabajos de modelado se encaminan principalmente hacia la descripción del comportamiento vibratorio con el fin de lograr estas especificaciones de diseño. Como ejemplo se tienen los trabajos de Mitzuo [34], Aiminudin [25], Kushwaha [24] y Granda [27] [12].

Se trabaja actualmente en el modelado de subsistemas del motor analizando particularmente los fenómenos vibratorios de estos, con el fin de controlar la vibración final del dispositivo. Como se dijo anteriormente el mecanismo principal es el más importante. Para el modelamiento de este se utilizan diversas técnicas de modelado dando como resultado modelos de cierta complejidad que permiten a fabricantes y diseñadores solucionar problemas puntuales. Sin embargo el planteamiento de estos requieren estudios avanzados en dinámica de maquinaria.

Existe una técnica para el modelamiento de sistemas dinámicos denominada *Bond Graphs* (Gráficos de Unión) que permite a partir de unos fundamentos físicos sencillos y una metodología de planteamiento del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el modelo basada en una estructura gráfica que permite sistematizar la escritura de los modelos y su solución por medio de programas orientados a programación por objetos.

Lo interesante de esta técnica consiste en que aun cuando el modelo propuesto se orienta hacia la parte de diagnóstico, este puede con unas pocas variaciones dar respuesta a otros interrogantes. Adicionalmente, su construcción su construcción manera modular o por bloques, es decir, puede abordarse el mecanismo estudiándolo por partes y proponiendo submodelos para cada uno de los componentes que después se concatenarán y dando como resultado el modelo final.

El presente trabajo tiene como propósito general el obtener un modelo del mecanismo principal del un motor de combustión interna. Para este desarrollo se utilizará la técnica de gráficos de unión orientada hacia la descripción del mecanismo utilizando técnicas multicuerpo de movimiento plano. Se considera que el modelo predice inicialmente la vibración del motor vista como las fuerzas de sacudimiento producidas sobre el eslabón referencia, que en este caso es el bloque de cilindros del motor.

Se intentará observar según el modelo como se afecta la vibración del motor al modificarse condiciones dinámicas del mecanismo como son masas y distribuciones de masa de los componentes (balanceo dinámico) lo cual puede entenderse como alteraciones inducidas al motor. También se mostrará el efecto que tiene sobre el modelo la modificación de la curva de presión del motor como resultado de alguna anormalidad en esta. Finalmente se verá que aunque este modelo esta orientado al diagnóstico inicialmente, puede con unas modificaciones utilizarse para adelantar otros estudios. Incluso gracias a la técnica de modelamiento utilizada, puede ser un punto de partida para la construcción de un modelo que contenga el aporte vibratorio de todos los mecanismos constitutivos de un motor de combustión interna.

2. Planteamiento del problema

En este capítulo se presenta la necesidad de obtener un modelo vibratorio de un motor, los distintos mecanismos constitutivos de la máquina que pueden ser fuente de vibración del motor y se citan diversos trabajos que son ejemplo de diversas situaciones en donde la obtención de un modelo vibratorio es la solución para explicar problemas relacionados con el funcionamiento de la máquina y en algunos casos posibilitar soluciones.

2.1. Necesidad y aplicación de un modelo vibratorio.

Una máquina en operación genera un espectro vibratorio que es característico de su condición de funcionamiento. La naturaleza de este espectro depende de la dinámica interna de la máquina. Cada uno de los distintos sistemas que la conforman aporta a la característica vibratoria de la máquina en conjunto. El aporte de estos sistemas consiste en la generación de un modo de vibración dependiendo de sus condiciones propias de inercia, elasticidad y amortiguamiento.
La determinación de un modelo de este tipo es más fácil para ciertas máquinas que para otras. Las máquinas rotativas son relativamente simples en cuanto a su funcionamiento y los sistemas dinámicos que pueden modelar su movilidad son sencillos. Por el contrario, una máquina alternativa como el motor de combustión interna involucra un sistema dinámico más complejo. La complejidad de esta dinámica consiste en la variación para cada instante de tiempo de la condición de carga del cigüeñal, dependiendo de la fase de trabajo (admisión, compresión, explosión, escape) en que se encuentre cada cilindro.
En el caso de un motor de combustión interna, el conocimiento de su comportamiento vibratorio cobra importancia en los diseños de sus cimentaciones o anclajes a la estructura que lo soporta. Particularmente y teniendo en cuenta que una de las principales aplicaciones del motor de combustión interna es en el sector transporte, el conocimiento del espectro vibratorio de la máquina es importante ya que se requiere el control de la transmisión de vibraciones a la estructura del móvil con el fin de garantizar comodidad y seguridad a los pasajeros u objetos que se transportan.
En esta área de trabajo se tienen trabajos como el de Kaul, Dhingra y Hunter [31] en donde se optimiza el diseño de un sistema de anclaje de un motor de motocicleta. Inicialmente se minimiza la carga que se transmite a la estructura y se restringe el movimiento del motor a una envolvente definida. A continuación se cambian las frecuencias naturales del sistema

por modificación de los parámetros de los soportes, con el fin de evitar la trasmisión de vibraciones en ciertos rangos de frecuencia específicos. El trabajo de Kalsule, Askhedkar, Sajanpawar [30] analiza el diseño del bastidor de una motocicleta por medio de análisis modal de la estructura tanto por métodos experimentales, como por una validación computacional usando paquetes de elementos finitos. El objetivo del estudio es el diseño del bastidor teniendo en cuenta que las frecuencias de excitación son función de la frecuencia de rotación del motor. El trabajo de Steel [43] estudia la transmisión de ruido por parte de un motor a través de la estructura de un vehículo de pasajeros usando para ello análisis estadístico de energía (SEA por sus siglas en inglés). Adicionalmente intenta explicar el porqué de las diferencias de la vibración medida y los valores predichos utilizando la técnica antedicha. Concluye que la mayor fuente de entrada de vibración son los anclajes del motor en un rango de baja frecuencia, pero a alta frecuencia los fenómenos resonancia son predominantes y potencializados por la pared de fuego del vehículo. Según el estudio, la causa de la diferencia entre los datos medidos y los predichos radica en la estimación de la potencia de entrada de la fuente que se considera como origen de la vibración.

En esta área de trabajo se ha llegado hasta el diseño de sistemas activos de control de vibraciones transmitidas a la estructura los cuales son aquellos que modifican sus condiciones de rigidez y amortiguamiento en función de las frecuencias de excitación modificando así las trasmisión de estas vibraciones a la estructura en rangos específicos según las necesidades de diseño. El trabajo de Lee y Lee [32] muestra el diseño de uno de estos sistemas activos.

Existe otro escenario en el cual el planteamiento de un modelo vibratorio es una herramienta importante: la aplicación del análisis de vibraciones como herramienta de diagnostico. No obstante, se debe aclarar que las máquinas reciprocantes como los motores de combustión interna presentan más complejidad en su análisis que las máquinas rotativas dado su dinámica mas compleja y la gran cantidad de mecanismos que componen sus subsistemas, lo cual implica que la vibración atribuible a un defecto puede enmascararse dentro del modo correspondiente a un subsistema.

Existen varios trabajos que muestran la viabilidad de utilizar el análisis de vibraciones como herramienta de diagnóstico en motores de combustión interna. El trabajo de Carlucci, Chiara y Laforgia [7] investiga la posibilidad de utilizar la vibración en el bloque de cilindros de un motor diesel como medio para diagnosticar la variación de combustión así como los tiempos y presiones de inyección. Correlaciona también la curva de presión de los cilindros con la vibración del bloque por medio análisis de Fourier y análisis tiempo-frecuencia, encontrando que la presión de inyección y las cantidades inyectadas tienen un efecto particular, mientras que el tiempo de inyección no tiene un efecto tan marcado. Azzoni y otros [3] utilizan las fluctuaciones en la velocidad del cigüeñal para detectar defectos de encendido tanto en aceleración, desaceleración o estado estable. Ball y otros [4] probaron un sistema de diagnóstico basado en la medición de ruido ambiental, analizado por medio de una transformada continua

wavelet. Se indujeron fallas en un motor diesel de prueba como reducción de la compresión de un cilindro o en la presión de apertura de un inyector con resultados satisfactorios, pero para distinguir entre distintos defectos se requiere depurar el método.

Utilizando medición de vibraciones por medio de acelerómetros se reportan grandes resultados como los de Chun y Kim [8] que estudian el fenómeno de detonación en motores encendidos por chispa analizando vibraciones en la parte superior del bloque de cilindros. Zurita y otros [49] reconstruyeron la curva de presión de un motor a etanol usando acelerómetros externos y Othman [35] determinó anormalidades de la combustión utilizando acelerómetros ubicados en la dirección horizontal.

Los trabajos de Seybert, Hamilton y Hayes [40] y Griffiths y Skorecki [19] analizan las vibraciones producidas por el golpe de pistón. El trabajo de Mauer y Watts [42] busca establecer un método de reconocimiento de la falla en el amortiguador de vibraciones de un motor de combustión interna en operación. Según los autores dicha falla no se puede reconocer solamente con la obtención de la forma de onda de vibración torsional del volante. Se debe hacer uso de un segundo sensor que indique la vibración torsional en el amortiguador dinámico para así detectar la diferencia entre las ondas al frente y atrás del cigüeñal, siendo este el parámetro de detección de la falla.

2.2. Origen de las vibraciones de un motor de combustión interna. Modelado del motor de combustión interna.

La máquina de combustión interna, al estar constituida por distintos subsistemas, tendrá distintas fuentes de vibración que deberán tenerse en cuenta al momento de intentar hacer una interpretación del comportamiento vibratorio del dispositivo. Esto es importante al momento de aplicar el análisis de vibraciones como herramienta de diagnóstico. Según Hartog [12], dentro del fenómeno de las vibraciones en las máquinas alternativas existen particularmente dos que involucran interés práctico:

1. Las vibraciones transmitidas por el motor a su anclaje.
2. Las vibraciones de tipo torsional que presenta el cigüeñal.

La principal fuente de vibración en la máquina de combustión interna es el mecanismo pistón-biela-cigüeñal. Este mecanismo es susceptible de ser descrito en su dinámica por ecuaciones trigonométricas sencillas. Estos análisis se encuentran ampliamente desarrollados en textos específicos sobre motores de combustión interna como Heywood [26], Ganessan [18], Pulkrabek, [36], Giacossa [9], y Jovag [29] que son publicaciones relativamente actuales. No obstante

textos como Ferpi [16], Schnurle [1], y Schneider [17] que son más antiguos, parten de las mismas ecuaciones trigonométricas, lo cual lleva a pensar que el problema de describir la dinámica del mecanismo fue solucionado hace bastante tiempo. Sin embargo, estos modelos, aunque sencillos, requieren para garantizar su validez el planteamiento de múltiples suposiciones y simplificaciones, aún más cuando se utilizaron desde momentos de la técnica en que no existían todavía las ayudas computacionales que se tienen actualmente.

Incluso el mecanismo de un motor de combustión interna es ampliamente estudiado en textos de mecanismos como Norton [38] y Mabie y Ovirk [33]. En el mecanismo de pistón-biela-cigüeñal, su pistón tiene un movimiento de geometría lineal y el cigüeñal tiene un movimiento rotatorio. Estos movimientos son fáciles de describir según los principios de la dinámica. Sin embargo el eslabón acoplador (biela) conecta en uno de sus nodos al cigüeñal y en el otro al pistón lo cual indicaría que la biela tiene un movimiento plano general. Baránov [5] muestra que la trayectoria del centro de masa de la biela corresponde a una elipse degenerada y rotada. Esta trayectoria es obtenida por métodos gráficos y es un indicativo de la dificultad planteada por el movimiento de la biela.

Con el fin de darle sencillez al modelo, el eslabón acoplador se reemplaza normalmente por un modelo de masas concentradas en donde una parte de la masa de la biela se le asume movimiento lineal y otra se le asume movimiento rotacional. Un ejemplo de aplicación práctica se encuentra en Vsorov [46]. La anterior simplificación permite entonces plantear una cinemática del mecanismo regida únicamente por ecuaciones de movimiento absoluto para cada uno de los puntos en los cuales se sitúan las masas concentradas. Estas expresiones son trigonométricas y por medio de una expansión binomial se pueden reducir a expresiones en términos de series de Fourier, lo que facilita el análisis armónico de las posibles fuentes de vibración del dispositivo. Incluso según Rahnejat [37] estas expresiones son la base para una verificación inicial de los modelos numéricos e incluso para el análisis coherente de datos experimentales, pero con los modelos numéricos se busca abandonar estas suposiciones iniciales y acercarse un poco más a la realidad dinámicamente hablando.

El tema de las vibraciones de los motores de combustión interna de uso automotriz es un parámetro importante dentro del desarrollo y avance de los vehículos modernos. Lo anterior debe controlarse a fin de lograr niveles de ruido y vibración tolerables. Existe un primer trabajo realizado por Ma y Perkins [48], que consiste en un modelo del mecanismo pistón-biela-cigüeñal de un motor de combustión interna Ford 2.5 L de seis cilindros en V, que utiliza como técnica de modelado mecánica multicuerpo. Este trabajo desarrolla el modelo del comportamiento vibratorio para estado estable y en un plano vertical del motor de prueba, orientando el estudio hacia la aplicación en las fases tempranas de desarrollo de producto, en las cuales la geometría de los componentes aún no ha sido definida. La validación de este trabajo se hace comparando sus resultados contra los arrojados por un modelo desarrollado

en un software de simulación de dinámica de cuerpos (ADAMS) para el mismo motor de estudio.

Se tiene entonces una primera técnica de modelado como lo es la mecánica multicuerpo. La mecánica multicuerpo aparece como una metodología interesante al momento de intentar obtener ecuaciones de movimiento para un mecanismo, que se puede considerar como un sistema de cuerpos interconectados (un sistema multicuerpo Shabama, [41]). La técnica consiste principalmente en relacionar por medio de sistemas de referencia no inerciales y fijos a cada uno de los cuerpos interconectados, el movimiento de cada uno de los cuerpos refiriéndolo a un sistema global o de referencia, este si inercial. Se debe tener en cuenta que las ecuaciones de movimiento de un cuerpo se fundamentan en la aplicación de la segunda ley de Newton. Esta ley puede expresarse de múltiples formas siendo más fácil la obtención de las ecuaciones de movimiento por algunas de ellas que por otras (Symon [44]). Una de estas formas alternativas muy utilizada son las ecuaciones de Lagrange, las cuales se obtienen a partir de la aplicación de las ecuaciones de D'Alembert y el principio del trabajo virtual (Targ [45]). Su virtud radica en eliminar del problema dinámico aquellas fuerzas que no realizan trabajo, como lo son las reacciones presentes en cada interconexión entre cuerpos. Finalmente el objetivo es obtener una función de energía cinética en términos de unas coordenadas generalizadas y se propone un sistema de ecuaciones diferenciales en el cual se tienen tantas ecuaciones como coordenadas generalizadas independientes (grados de libertad) se tengan. Sin embargo esta técnica requiere la aplicación de algoritmos robustos para el planteamiento de las ecuaciones y la solución del sistema generado (Amirouche [2]). Cabe mencionar dentro de la técnica de mecánica multicuerpo el trabajo de Hoffman [23] en el cual se desarrolla un modelo denominado totalmente acoplado. El concepto de acople del modelo tiene que ver con los efectos dinámicos que tiene el mecanismo pistón-biela-cigüeñal sobre el bloque de cilindros. Un modelo que solo tiene en cuenta este efecto se denomina acoplado en una dirección. No obstante, el movimiento del bloque, como eslabón que soporta al mecanismo pistón-biela-cigüeñal involucra un efecto de aceleración de Coriolis sobre el movimiento del pistón. Si se tiene en cuenta este efecto el modelo cumplirá con el principio de conservación de la energía y se tiene un modelo denominado totalmente acoplado. Hoffman [23] afirma que la suposición de acoplamiento en una vía entre los componentes móviles del motor y su bloque de cilindros es la alternativa más utilizada a la hora de modelar vibraciones de motores. No obstante, esta suposición aunque permite despreciar los efectos de Coriolis y giroscópicos, no permite que el modelo cumpla adecuadamente con la conservación de energía. Presenta entonces un modelo de siete grados de libertad para vibraciones de baja frecuencia y totalmente acoplado para pistones, bielas, cigüeñal, volante y bloque de cilindros. Compara los resultados de este modelo contra los arrojados por modelos acoplados en una vía para un motor monocilíndrico y de seis cilindros en línea. Los resultados son disímiles para el caso del motor monocilíndrico, pero bastante cercanos para el de seis cilindros. El nuevo modelo presenta además la ventaja de conservar la energía apropiadamente y tener en cuenta efectos

gravitatorios.

El concepto de acople de modelos para motores de combustión interna se muestra esquemáticamente en la Figura **2-1**.

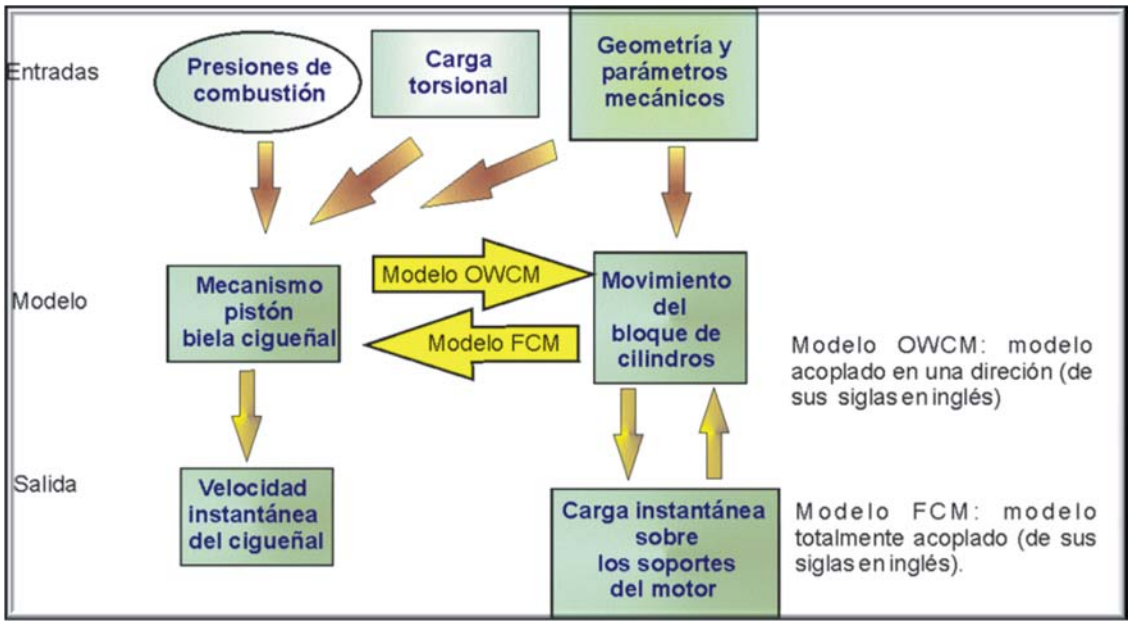

Figura 2-1.: Concepto de acoplamiento para motor de combustión interna. [23].

Otra técnica utilizada para abordar el modelado de este dispositivo son los gráficos de unión (Bond Graphs). Esta técnica de modelamiento de sistemas dinámicos consiste en analizar el flujo de energía a través del mecanismo. Este flujo de energía en el tiempo (potencia) se considera resultado del producto de dos variables llamadas variables de potencia que se denominan esfuerzo y flujo. Estas a su vez son función de otras dos variables denominadas variables energéticas que se denominan momentum y desplazamiento. Cada elemento de un sistema dinámico puede almacenar, transformar o disipar la energía. Todo lo anterior se puede traducir en ecuaciones constitutivas entre las variables mencionadas cuya combinación puede utilizarse para estructurar las ecuaciones de movimiento del sistema. Cada elemento del sistema dinámico puede representarse por un elemento genérico que almacena, disipa o transforma energía el cual se representa por un símbolo y pueden interconectarse según una topología establecida. Esta interconexión de elementos constituye lo que se denomina un grafo el cual puede editarse en software especializado que traduce este en términos de sistemas de ecuaciones diferenciales, los cuales de ser solucionables arrojan la descripción del movimiento del sistema.

Como ejemplo de utilización de esta técnica se encuentra el trabajo desarrollado por Granda y Sime [28] que modela el sistema dinámico de un motor monocilíndrico utilizando la técnica de gráficos de unión. Para la obtención de resultados se utiliza un software que permite traducir el grafo desarrollado a un sistema de ecuaciones diferenciales denominado ACSL el cual también soluciona el sistema por medio de métodos numéricos. Otro trabajo que utiliza también los gráficos de unión como herramienta de modelado es el desarrollado por Margolis [10]. Se valida experimentalmente en un motor de motocicleta, pero está orientado hacia la predicción de entrega de torque y potencia.
Dentro de los distintos subsistemas es el cigüeñal el que presenta un comportamiento vibratorio más complejo. Lo anterior se debe principalmente a que los impulsos de trabajo son variables en el tiempo, lo cual hace que el componente tenga una deformación también variable. Es entonces el cigüeñal uno de los elementos sobre los que se requiere conocer mejor su comportamiento vibratorio. Aiminudin [25] propone un método de análisis para el comportamiento mecánico del cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea en etapas iniciales de encendido. Utiliza como herramienta el cálculo de los valores medios cuadráticos para obtener la energía en cada cojinete y la mejor forma para los contrapesos. Kushwaha, Gupta, Kelly, y Rahnejat [24], desarrollaron un modelo multicuerpo para un motor Diesel de cuatro cilindros y cuatro tiempos teniendo en cuenta la flexibilidad de los componentes y el orden de encendido. El propósito de este modelo es describir el movimiento cónico que puede adquirir el volante del motor como resultado de la deformación del cigüeñal a torsión y a flexión. Importa el estudio de este fenómeno ya que se encontró como el causante de vibraciones en los mandos de embrague en la transmisión de vehículos. Otro trabajo, el de Granda [27] simula un motor de combustión interna V-8 orientado a predecir vibraciones torsionales, cargas dinámicas y frecuencias naturales como parámetros influyentes en la vida de los componentes.
Se tienen otros trabajos encaminados al estudio del comportamiento vibratorio del motor en conjunto. El realizado por Mitzuo, Atsushi, Takayuki, y Ken-Ich [34] muestra el desarrollo de un sistema para análisis de vibración de motores. Consiste en un programa de diseño asistido por computador que analiza la vibración cinemática y estructural acoplada en el rango de bajas frecuencias. El trabajo de Boysal [6] plantea un modelo dinámico no lineal multicuerpo de un motor monocilíndrico de combustión interna. Este modelo tiene en cuenta también los efectos inerciales de los componentes, así como los efectos de los soportes, juntas, conexiones y los efectos de amortiguamiento. El modelo predice los desplazamientos los componentes, las vibraciones infinitesimales de los soportes, el movimiento elíptico del cigüeñal dentro de su soporte y las vibraciones torsionales del cigüeñal. En trabajo de Sohn, Honda, Okuma, T., y Nagamatsu [42] pretende analizar y predecir el comportamiento vibratorio de un motor de combustión interna por medio de dos enfoques distintos. Primero se modela cada uno de los componentes individualmente por medio de elementos finitos y se sintetiza sus características dinámicas por medio de dos metodologías: método de síntesis por modo de componente (CMS de sus siglas en inglés) y método de síntesis por modo de multicomponente (MCMS

de sus siglas en inglés). El otro enfoque es modelar el sistema como un todo por medio de MCMS comparándose luego con resultados experimentales.
Es claro sin embargo que el mecanismo pistón-biela-cigüeñal no es la única fuente de vibraciones en el motor. Otro mecanismo que puede ser fuente de vibraciones es la distribución del motor. Sopouch, Hellinger, Priebsch [13] analizan por medio de un modelo multicuerpo las vibraciones causadas por el sistema de distribución ocasionadas principalmente por el efecto poligonal de la cadena de repartición junto con los impactos entre los eslabones de la cadena y los dientes de los engranajes. El trabajo de Lei, Song y Xue [47] utiliza técnicas de elementos finitos para caracterizar las vibraciones tridimensionales del cigüeñal de un motor de combustión interna. Utiliza elementos cuadráticos de viga tipo Timoshenko para modelar la estructura del cigüeñal y considera el volante y la biela como cuerpos sólidos. Se utiliza para modelar la vibración del cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea obteniendo su frecuencia natural tanto en estado libre como soportado y se comparan con los resultados analíticos presentados por otras publicaciones. También modela el cigüeñal en operación determinando su respuesta armónica.

2.3. Objetivo general.

Aplicar técnicas de modelado de sistemas dinámicos, tales como gráficos de unión y/o mecánica multicuerpo, para elaborar un modelo del mecanismo pitón-biela-cigüeñal de un motor de combustión interna con el fin de describir el comportamiento vibratorio del motor en un plano vertical, tanto en funcionamiento normal, como en presencia de fallas consistentes en desbalanceos de los componentes móviles.

2.4. Objetivos específicos.

- Proponer un modelo dinámico de motor de combustión interna de dos tiempos monocilíndrico que describa su comportamiento vibratorio en un plano vertical y en estado estable.
- Validar el modelo propuesto frente a las predicciones arrojadas por un modelo analítico simplificado.
- Verificar la factibilidad de poder describir por medio de la variación del comportamiento vibratorio la aparición de un defecto de funcionamiento

3. Modelo analítico y consideraciones dinámicas iniciales

En esta parte del trabajo se presentan las consideraciones dinámicas que se deben tener en cuenta para el mecanismo piston-biela-cigüeñal. Se presenta primero la cinemática de dicho mecanismo y seguidamente su cinética. Finalmente se establecen a partir de este análisis las fuentes de vibración para un motor de combustión interna monocilíndrico.
En análisis dinámico de este mecanismo ha sido ampliamente estudiado en libros de dinámica de maquinaria como Norton [38], Baránov [34], y Mabie. Se tomarán como base estos autores en los desarrollos teóricos planteados.

3.1. Cinemática de un motor de combustión interna monocilíndrico

Un mecanismo pistón-biela-cigüeñal corresponde a una variante del mecanismo manivela corredera estándar, es cual es ampliamente estudiado en diversos libros de dinámica de maquinaria. Normalmente constituye un mecanismo sin corrimiento, ya que la prolongación de la trayectoria rectilínea del pistón cruza por el punto de giro del cigüeñal [34]. Adicionalmente la corredera en la cual desliza el pistón (es decir su cilindro) coincide con el plano de fijación que se considera estacionario, lo cual descarta la presencia de aceleraciones de Coriolis [38].
El mecanismo así planteado ofrece gran facilidad para analizar su cinemática aplicando trigonometría plana obteniendo así ecuaciones escalares para su cinemática. En la Figura **3-1** se encuentra representado el mecanismo típico de un motor de combustión interna monocilíndrico.
Sea:

c:longitud de brazo de cigüeñal (manivela).
b:longitud de la biela.
θ:ángulo de giro de la manivela.
ϕ:ángulo de biela que forma la biela con el eje x.

Como se observa en la figura **3-1**, la coordenada x se utiliza para definir el movimiento del

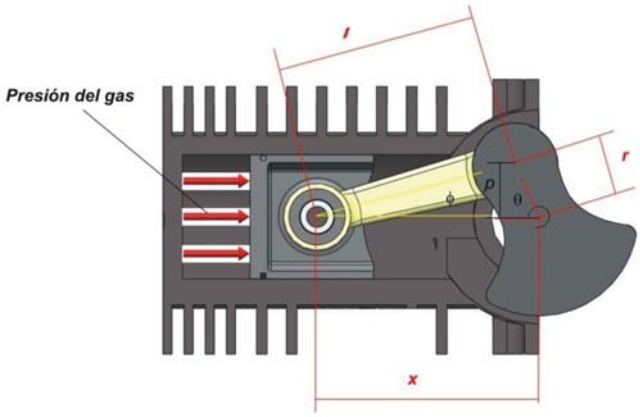

Figura 3-1.: Mecanismo típico de un motor de combustión interna.

pistón a lo largo de su cilindro. Tomando como origen el centro de giro del cigüeñal, dicha distancia x sería:

$$x = s + r \tag{3-1}$$

De la Figura **3-1** también se pueden extraer las siguientes relaciones:

$$h = c \sin\theta = b \sin\phi \tag{3-2}$$

Despejando $\sin\phi$ en términos de $\sin\theta$ se tiene:

$$\sin\phi = \left(\frac{c}{b}\right) \sin\theta \tag{3-3}$$

Además $s = c\cos\theta$ y $r = b\cos\phi$. Reemplazando en la ecuación 3-1 se tiene:

$$x = c\cos\theta + b\cos\phi \tag{3-4}$$

Aplicando la identidad $\cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi}$ y reemplazando en la ecuación 3-4 se tiene:

$$x = c\cos\theta + b\sqrt{1 - \sin^2\phi} \tag{3-5}$$

Reemplazando ahora la ecuación 3-3 en la ecuación 3-5 se tiene finalmente:

$$x = c\cos\theta + b\sqrt{1 - \left(\frac{c}{b}\sin\theta\right)^2} \tag{3-6}$$

Aunque esta última expresión podría derivarse sucesivamente para obtener la velocidad y la aceleración, no representaría claramente el papel de que juega la velocidad de giro del cigüeñal y sus correspondientes armónicas como principales generadoras de vibraciones. Por ello se prefiere representar esta expresión por medio de alguna expansión. Frecuentemente se utiliza el teorema del binomio [38][34] el cual establece:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots \tag{3-7}$$

Aplicando el teorema del binomio a la expresión que se encuentra en el radical de la ecuación 3-6 con $a = 1$, $n = \frac{1}{2}$ y $b = -\left(\frac{c}{b}\sin\theta\right)$ se tiene la siguiente expansión:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{c}{b}\sin\theta\right)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin^2\theta + \frac{1}{8}\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin^4\theta - \frac{1}{16}\left(\frac{c}{b}\right)^6\sin^6\theta + \cdots \tag{3-8}$$

En términos prácticos, la relación $\frac{c}{b}$ (manivela-biela) en los motores modernos oscila entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$. Si se trunca la expansión en el segundo término y teniendo en cuenta el valor de la relación manivela-biela, el error que se tendría seria de menos de 1 % [38]. En virtud de ello, el desplazamiento del pistón sería entonces:

$$x \cong c\cos\theta + b\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin^2\theta\right] \tag{3-9}$$

Aplicando la identidad $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ se tiene:

$$x \cong c\cos\theta + b\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right] \tag{3-10}$$

Desarrollando la última expresión, simplificando y considerando velocidad constante de giro del cigüeñal ($\theta = \omega t$) se llega finalmente a:

$$x \cong b - \frac{c^2}{4b} + c\left[\cos\omega t + \frac{c}{4b}\cos 2\omega t\right] \tag{3-11}$$

Derivando con respecto al tiempo la expresión dada por la ecuación 3-11 para obtener una

expresión de velocidad del pistón se llega a:

$$\dot{x} \cong -c\omega\left[\sin\omega t + \frac{c}{2b}\sin 2\omega t\right] \tag{3-12}$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo la expresión dada por la ecuación 3-12 para obtener la aceleración del pistón se obtiene finalmente:

$$\ddot{x} \cong -c\omega^2\left[\cos\omega t + \frac{c}{b}\cos 2\omega t\right] \tag{3-13}$$

3.2. Análisis cinetostático del mecanismo de un motor de combustión interna

Por medio de un análisis cinetostático del mecanismo biela-manivela de un motor de combustión interna se puede visualizar las fuerzas que se aplican sobre el bloque de cilindro y que finalmente producirán su movimiento y por consiguiente vibraciones. Las fuerzas presentes en el mecanismo son de los siguientes tipos:

- Fuerzas debidas a la expansión del fluido de trabajo.
- Fuerzas debidas a la inercia de los componentes.

3.2.1. Análisis de fuerzas debidas a la expansión del gas

La fuerza debida a la expansión del gas se aplica directamente sobre la cabeza del pistón y obedece a la siguiente ecuación:

$$F_g = P_g A_p \tag{3-14}$$

Donde:
F_g es la fuerza resultante aplicada sobre la cabeza del cilindro.
P_g es la presión obtenida por la expansión del fluido de trabajo.
A_p es el área del la cabeza del pistón.

El área del pistón corresponde a:

$$A_p = \frac{\pi B^2}{4} \tag{3-15}$$

Donde B es el diámetro del pistón. Reemplazando la ecuación 3-15 en la ecuación 3-14 se llega finalmente a:

$$F_g = \frac{\pi P_g B^2}{4} \tag{3-16}$$

Obsérvese que la fuerza debida a la expansión del gas corresponde a la presión del gas multiplicada por un factor constante $\frac{\pi B^2}{4}$. De ello se deduce que la curva correspondiente a la fuerza del gas corresponderá en su forma con la de presión del gas.

En la figura **??** se presenta también el mecanismo biela manivela con la fuerza del gas aplicada sobre la cabeza del pistón.

En concordancia con la figura **3-1** los eslabones del mecanismo son los siguientes:

1. corresponde al bloque de cilindros y se considera estacionario.
2. corresponde a la manivela del cigüeñal.
3. corresponde a la biela.
4. corresponde al pistón.

Se comienza con el análisis de las fuerzas aplicadas sobre el pistón (eslabón 4).

Existirán sobre el pistón las siguientes fuerzas:

1. La fuerza del gas aplicada directamente sobre él (F_g).
2. Una fuerza de reacción proveniente de la biela (eslabón 3) (F_{g34}).
3. Una fuerza de reacción proveniente del marco o bloque de motor (F_{g14}).

Lo anterior se encuentra representado en la figura **3-2**
En la figura **3-2** se presenta también un triángulo de fuerzas concurrentes formado por las fuerzas aplicadas sobre el pistón. De dicho triángulo se extrae la siguiente relación 3-17:

$$\tan\phi = \frac{F_{g14}}{F_g} \tag{3-17}$$

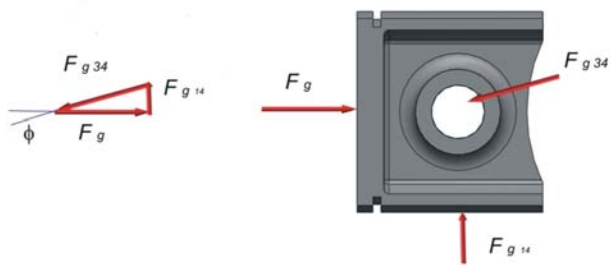

Figura 3-2.: Fuerzas aplicadas sobre el pistón.

Despejando F_{g14} se tiene:

$$F_{g14} = F_g \tan\phi \tag{3-18}$$

Teniendo en cuenta el sistema coordenado establecido para el análisis del mecanismo (figura **??**) se puede establecer qué vectorialmente la fuerza de reacción de la biela sobre el pistón esse puede expresar como:

$$\mathbf{F}_{34} = F_g\mathbf{i} - F_g \tan\phi\mathbf{j} \tag{3-19}$$

Analizando las fuerzas existentes en el eslabón 3 (biela) figura **3-3** se tienen las siguientes relaciones también vectoriales:

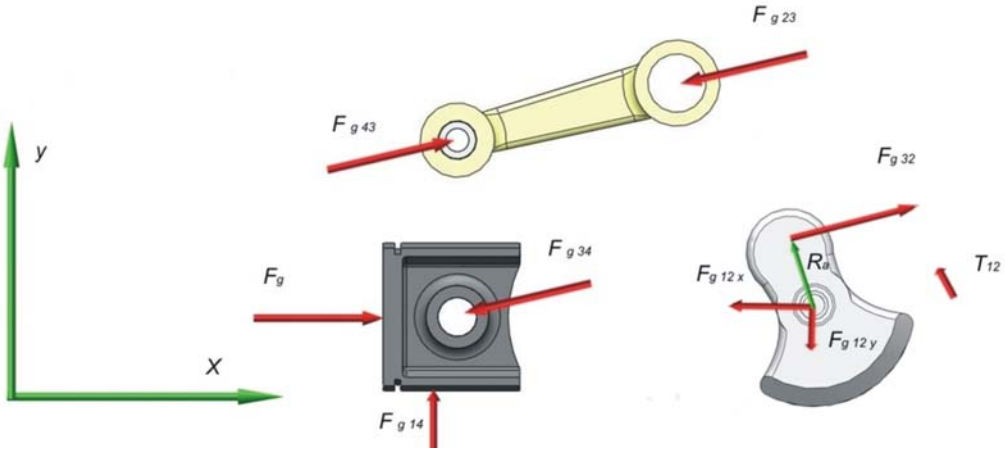

Figura 3-3.: Fuerzas aplicadas sobre la biela, el cigüeñal y el pistón.

$$\mathbf{F}_{g34} = -\mathbf{F}_{g43} \tag{3-20}$$

$$\mathbf{F}_{g23} = -\mathbf{F}_{g43} \tag{3-21}$$

Las fuerzas aplicadas sobre la manivela o cigüeñal (eslabón 2) se representan también en la Figura **3-3**.De lo mostrado en la figura se puede establecer que:

$$\mathbf{F}_{g32} = -\mathbf{F}_{g23} \tag{3-22}$$

$$\mathbf{F}_{g32} = -F_g\mathbf{i} + F_g \tan\phi\mathbf{j} \tag{3-23}$$

Y el torque producido por la expansión del gas sobre el cigüeñal sería:

$$\mathbf{T}_{g21} = \mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{g32} \tag{3-24}$$

De la ecuación 3-24 se obtendrá una expresión exacta para el torque producido por el gas. No obstante de la figura **5-12** se puede observar un torque de reacción aplicado sobre el eslabón 1 (bloque del motor) que compensa la tendencia de giro del bloque provocado por la presión del gas.
El torque debido a la presión del gas puede expresarse también como se muestra en la ecuación 3-25

$$\mathbf{T}_{g21} = F_{g14}x\mathbf{k} \tag{3-25}$$

De la figura **3-2** se tiene que $F_{g14} = F_g \tan\phi$ y de la ecuación 3-11 se tiene una expresión para x. Reemplazando lo anteriormente dicho en la ecuación 3-25 se tiene:

$$\mathbf{T}_{g21} = (F_g tan\phi)\left[b - \frac{c}{4b} + c\left(\cos\omega t + \frac{c}{4b}\cos 2\omega t\right)\right]\mathbf{k} \tag{3-26}$$

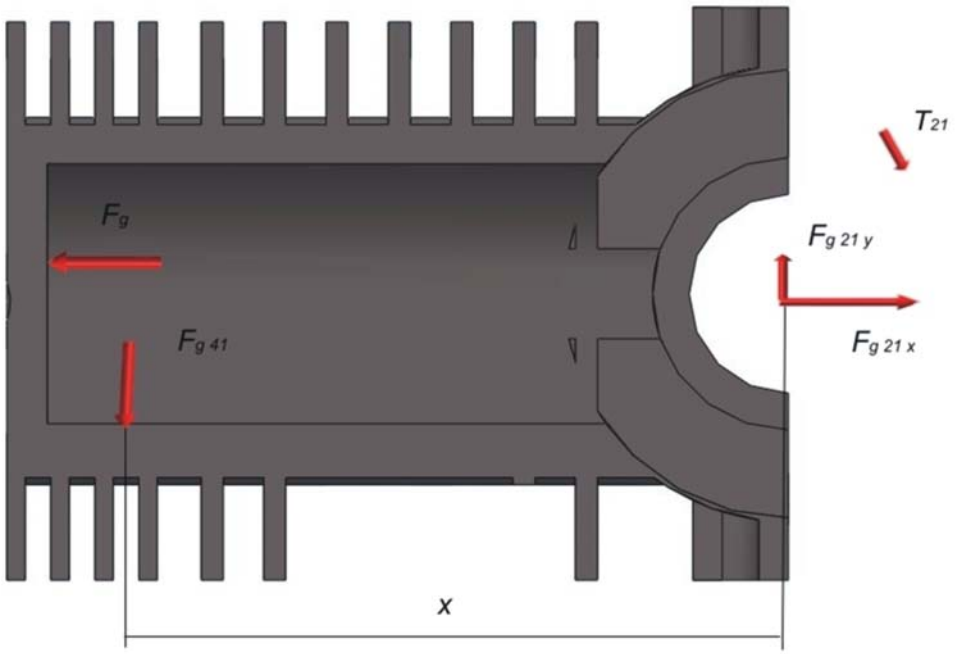

Figura 3-4.: Fuerzas aplicadas sobre el bloque de motor (eslabón 1).

Para tener esta expresión en términos solamente del ángulo de giro del cigüeñal ωt se acude a la geometría presentada en la figura **3-1**. Se tiene que:

$$\tan\phi = \frac{q}{u} = \frac{c\sin\omega t}{b\cos\phi} \tag{3-27}$$

Pero, $\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\sin\omega t\right)^2}$. Reemplazando esta última expresión en la ecuación 3-27 se tiene:

$$\tan\phi = \frac{c\sin\omega t}{b\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\sin\omega t\right)^2}} \tag{3-28}$$

Acudiendo nuevamente a la expansión por teorema del binomio utilizada para la expresión del radical del denominador 3-8 de la ecuación 3-28

$$\tan\phi = \frac{c\sin\omega t}{b\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\sin\omega t\right)^2}} \cong \frac{c}{b}\sin\omega t\left(1+\frac{c^2}{2b^2}\sin^2\omega t\right) \tag{3-29}$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación 3-26 se tiene

$$\mathbf{T}_{g21} = F_g\left[\frac{c}{b}\sin\omega t\left(1+\frac{c^2}{2b^2}\sin^2\omega t\right)\right]\left[b-\frac{c}{4b}+c\left(\cos\omega t+\frac{c}{4b}\cos 2\omega t\right)\right]\mathbf{k} \tag{3-30}$$

Desarrollando esta expresión y despreciando los términos que contengan un relación manivela-biela $\frac{c}{b}$ elevados a potencias mayores de 1, se tiene una expresión más simple para el torque producido por el gas.

$$\mathbf{T}_{g21} \cong F_g r\sin\omega t\left(1+\frac{c}{b}\cos\omega t\right)\mathbf{k} \tag{3-31}$$

3.2.2. Modelo dinámicamente equivalente de la biela

De todos los cuatro eslabones del mecanismo, la biela es la que tiene un movimiento más complicado. Mientras el pistón tiene movimiento lineal y la manivela tiene un movimiento rotacional, la biela posee un movimiento plano general. La curva que describe la trayectoria de este elemento ha sido estudiada por Baránov [5]. En la figura **4-6** se presenta la forma de esta trayectoria según el citado autor.
Con el fin de realizar el análisis de las fuerzas de inercia en el mecanismo se requiere proponer un modelo dinámicamente equivalente de la biela debido a su movimiento complejo. Esta simplificación es utilizada por varios autores [38, 12]. Este modelo se debe realizar cumpliendo con las siguientes tres consideraciones:

1. *La masa del modelo debe ser igual a la masa de la biela en estudio*
2. *El centro de gravedad del modelo debe tener la misma ubicación que el de la biela en estudio.*
3. *El momento de inercia del modelo debe ser igual al de la biela en estudio.*

Se considerará entonces la biela descompuesta en dos masas puntuales unidas por un eslabón. Sea entonces m_b la masa de la biela y m_1 y m_2 las masas puntuales en las cuales se va a

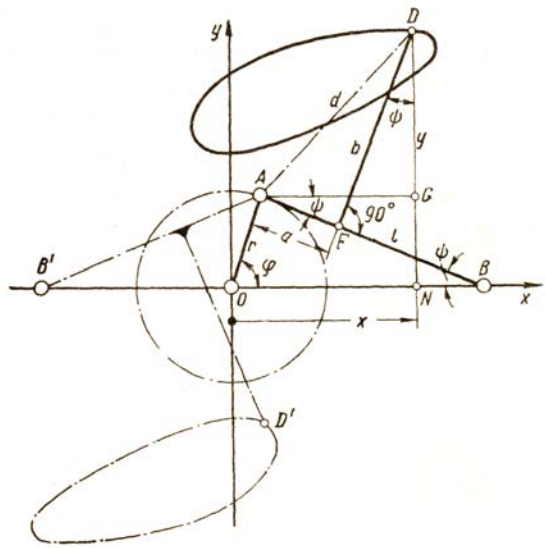

Figura 3-5.: Trayectoria de la biela [5].

descomponer la biela. Las condiciones que debe cumplir el modelo dinámicamente equivalente se pueden resumir por medio de las siguientes ecuaciones.

$$m_1 + m_2 = m_b \tag{3-32}$$

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \tag{3-33}$$

$$m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = I_{Gb} \tag{3-34}$$

Las masa puntuales se consideran ubicadas a sendas distancias l_1 y l_2 del centro de gravedad de la biela. I_{Gb} es el segundo momento de inercia centroidal de la biela.

Se tienen entonces un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, a saber:m_1, m_2, l_1, y l_2. Cabe aclarar que m_b e I_{Gb} se consideran conocidos ya que se pretende analizar el componente de un motor real.
Una de las masas puntuales se ubicará en la parte que tiene movimiento rectilíneo (junto con el pistón). Por ello se puede considerar la masa m_2 se posicionada a una distancia l_p medida desde el centro de gravedad de la biela hasta el agujero para el pasador del pistón. Esta distancia se puede asociar también con la variable l_2 del modelo equivalente, es decir

$l_2 = l_p$, y se reduce el número de incógnitas con lo cual el sistema se puede solucionar. De la ecuación 3-33 se tiene:

$$m_1 l_1 = m_2 l_p \tag{3-35}$$

$$m_2 = m_1 \frac{l_1}{l_p} \tag{3-36}$$

Reemplazando el último valor hallado en la ecuación 3-36 en la ecuación 3-32 se tiene:

$$m_1 + m_1 \frac{l_1}{l_p} = m_b \tag{3-37}$$

$$m_1 \big(1 + \frac{l_1}{l_p}\big) = m_b \tag{3-38}$$

$$m_1 = m_b \big(\frac{l_p}{l_p + l_1}\big) \tag{3-39}$$

La ecuación 3-39 establece el valor de masa puntual m_1 en función de la masa total de la biela. Realizando un procedimiento similar para obtener el valor de masa m_2 se tendría:

$$m_2 = m_b \big(\frac{l_1}{l_p + l_1}\big) \tag{3-40}$$

Reemplazando ahora las ecuaciones 3-39 y 3-40 en la ecuación 3-34 se obtiene finalmente el valor de la distancia l_1

$$m_b \big(\frac{l_p}{l_p + l_1}\big) l_1^2 + m_b \big(\frac{l_1}{l_p + l_1}\big) l_2^2 = I_{Gb} \tag{3-41}$$

$$m_b \big(\frac{l_p l_1^2 + l_1 l_p^2}{l_p + l_1}\big) = I_{Gb} \tag{3-42}$$

$$m_b\left(\frac{l_p(l_1^2 + l_1 l_p)}{l_p + l_1}\right) = I_{Gb} \tag{3-43}$$

$$m_b\left(\frac{l_p l_1(l_1 + l_p)}{l_p + l_1}\right) = I_{Gb} \tag{3-44}$$

$$l_1 = \frac{I_{Gb}}{m_b l_p} \tag{3-45}$$

La ecuación 3-45 implica que la ubicación de la masa m_1 correspondería en un modelo dinámicamente equivalente de la biela al centro de percusión correspondiente a un punto de giro en el pasador del pistón. No obstante según Norton [38], la ubicación de la masa m_1 en la articulación de la manivela del cigüeñal (es decir, a una distancia un poco mayor l_a) no implica errores significativos.

La anterior secuencia de deducciones se encuentran representadas en la figura **3-6**

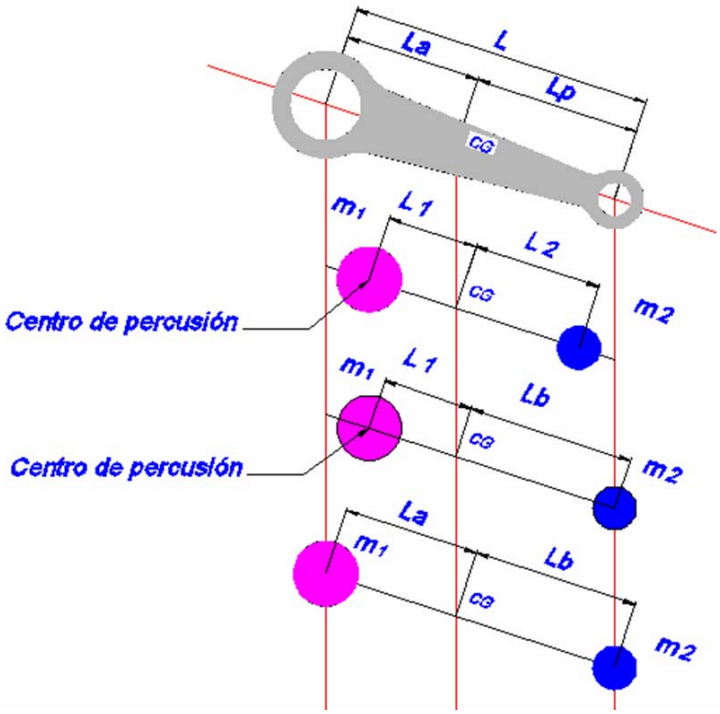

Figura 3-6.: Modelo dinámico equivalente de la biela.

3.2.3. Análisis de las fuerzas de inercia y de sacudimiento

Un modelo simplificado de masas concentradas, ahora de todo el mecanismo, se puede utilizar para poder visualizar de manera sencilla los efectos de la aceleración de masas en el sistema. Por medio del método de D'Alembert se pueden obtener expresiones de dichos efectos inerciales. El modelo de masas concentradas para el mecanismo de un motor de combustión interna se encuentra representado en la figura **3-7**.

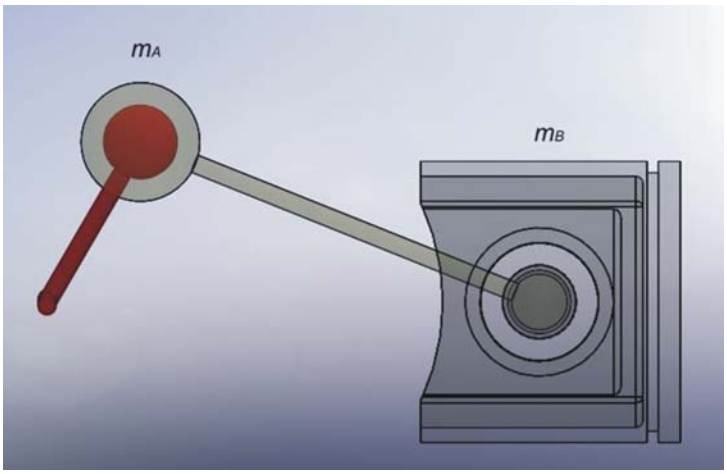

Figura 3-7.: Modelo de masas concentradas.

En la figura **3-8** se presenta la fuerza de inercia correspondiente a la masa en el punto B, que se considera compuesta por la parte de la masa de la biela que tiene movimiento rectilíneo y la masa del pistón.

La figura **3-8** muestra las fuerzas de inercia aplicadas sobre la biela. Recuérdese que la masa de la biela se ha considerado concentrada en el piston y en la manivela del cigüeñal, razón por la cual se considera un eslabón " sin masa " y por lo tanto carente de efectos inerciales. Simplemente transmite las fuerzas de inercia producidas en el punto B hacia el punto A.

En la figura **3-8** se presentan las fuerzas inerciales transmitidas por la biela. Adicionalmente, la masa ubicada en el punto A y constituida por la masa correspondiente a la manivela del cigüeñal y la masa de la biela que tiene movimiento rotacional, tendrán una aceleración dada por la segunda derivada con respecto al tiempo del vector de posición $\mathbf{R}_A$ es decir:

$$\mathbf{R}_A = c\cos\omega t\mathbf{i} + c\sin\omega t\mathbf{j} \tag{3-46}$$

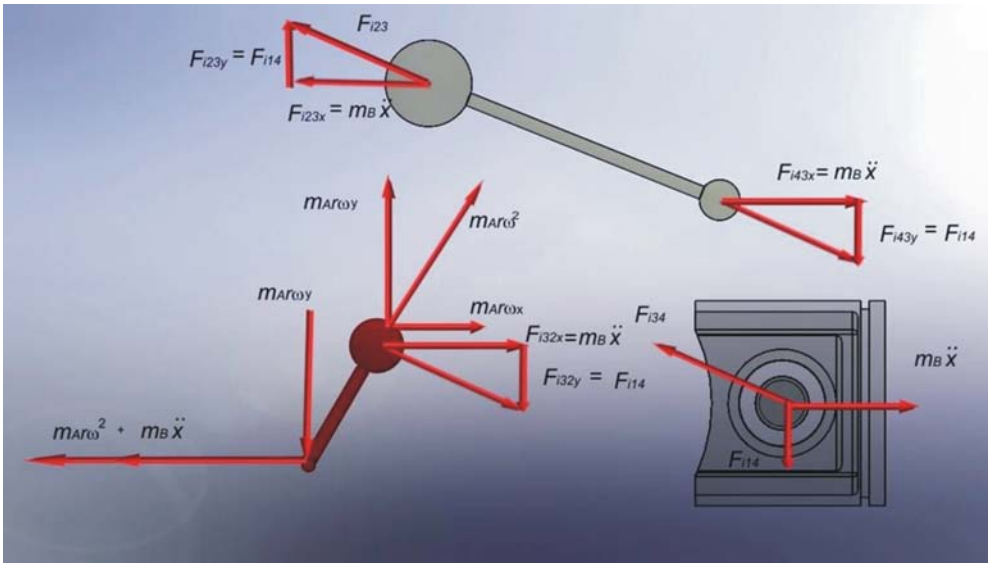

Figura 3-8.: Fuerzas de inercia en la masa reciprocante, la biela y el cigüeñal.

$$\mathbf{a}_A = -c\omega^2 \cos\omega t\mathbf{i} - c\omega^2 \sin\omega t\mathbf{j} \tag{3-47}$$

Obsérvese también de la figura **3-8** que la fuerza de inercia total en el punto A es la suma de la fuerza de inercia debida a la aceleración de la masa en A y la fuerza de inercia de la masa en el punto B. Descomponiendo esta fuerza en sus direcciones x y y como se muestra en la figura **3-8** se tiene:

$$F_{ix} = -m_a(-c\omega^2 \cos\omega t) - m_b\ddot{x} \tag{3-48}$$

$$F_{iy} = -m_a(-c\omega^2 \sin\omega t) \tag{3-49}$$

Al sustituir las expresiones halladas para la aceleración lineal del pistón en la ecuación 3-13 se tiene finalmente:

$$F_{ix} = -m_a(-r\omega^2 \cos\omega t) - m_b\left[-c\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{c}{b}\cos 2\omega t\right)\right] \tag{3-50}$$

$$F_{iy} = m_a(c\omega^2 \sin \omega t) \tag{3-51}$$

La fuerza de sacudimiento se define como la suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de fijación de un mecanismo. Como se considera el motor fijado en su bloque este estará ubicado en el plano de fijación e interesa conocer las fuerzas que se aplican sobre él a la hora de analizar comportamiento vibratorio . En la figura **5-11** se presenta las fuerzas de inercia que actúan finalmente sobre el bloque y que producirán su sacudimiento y por consiguiente vibraciones. Las fuerzas de sacudimiento serán entonces

$$\sum F_{sx} = -m_a(-r\omega^2 cos\omega t) - m_b\left[-c\omega^2\left(\cos \omega t + \frac{c}{b}\cos 2\omega t\right)\right] \tag{3-52}$$

$$\sum F_{sy} = m_a(c\omega^2 sin\omega t) + F_{i41} - F_{i41} \tag{3-53}$$

Obsérvese de la figura **5-11** que la fuerza de inercia F_{i14} sobre la pared del cilindro se cancela con una fuerza igual y opuesta que pasa por el muñón principal del cigüeñal. Sin embrago estas fuerzas forman un par que constituirá el *par de torsión de sacudimiento*.

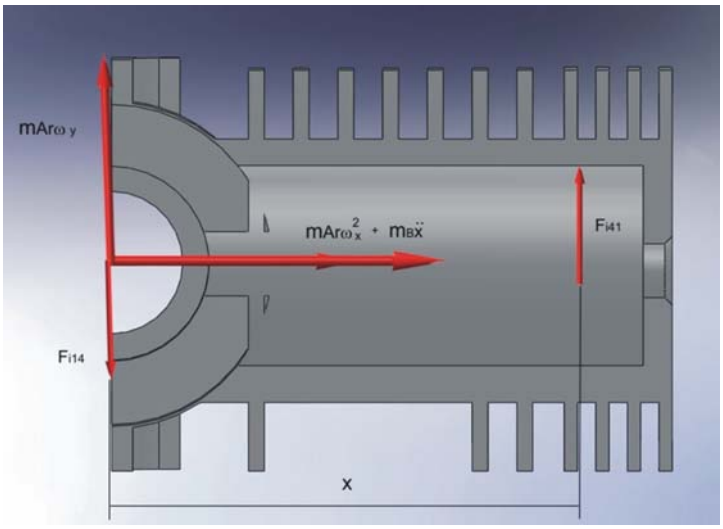

Figura 3-9.: Fuerzas de sacudimiento.

Estrictamente hablando para obtener el par de torsión de sacudimiento se analizan los momentos de las fuerzas de inercia con respecto al muñón del cigüeñal. La masa en el punto A produce una fuerza de inercia que tiene dos componentes: una radial (debida a la aceleración normal) y una tangencial (debida a la aceleración tangencial). La componente radial obviamente no tiene brazo de momento con respecto al muñón del cigüeñal, y la componente tangencial sería nula para el caso de un análisis en estado estable de giro del motor ($\omega = cte$).

De aquí que la masa en el punto A no contribuye a un par de torsión de inercia.

Analizando el caso de la masa en el punto B, esta posee una fuerza de inercia perpendicular a la pared de cilindro y que tiene un momento efectivo con respecto al muñón de bancada del cigüeñal ya que se encuentra a una distancia x. Así, el momento de torsión de inercia viene dado por la expresión 3-54.

$$\mathbf{T}_i = F_{i41} x \mathbf{k} \tag{3-54}$$

Para la fuerza de inercia F_{i14} se tiene una situación similar a la presentada para la fuerza producida por el gas. De la figura **3-8** se obtiene que dicha fuerza tiene un valor $F_{i14} = m_b \ddot{x} \tan\phi$. También de la ecuación 3-11 se tiene una expresión para x. Reemplazando lo anterior en la ecuación 3-54

$$\mathbf{T}_i = m_b \ddot{x} \tan\phi \left[b - \frac{c^2}{4b} + c\left(\cos\omega t + \frac{c}{4b}\cos 2\omega t \right) \right] \mathbf{k} \tag{3-55}$$

Reemplazando la ecuación 3-13 que provee una expresión para $\ddot{x}$ y la ecuación 3-29 que establece una expresión para $\tan\phi$ en la ecuación 3-56se tiene:

$$\mathbf{T}_i = m_b \left[-c\omega^2 \left(\cos\omega t + \frac{c}{b}\cos 2\omega t \right) \right] \left[\frac{c}{b}\sin\omega t \left(1 + \frac{c^2}{2b^2}\sin^2\omega t \right) \right] \left[b - \frac{c^2}{4b} + c\left(\cos\omega t + \frac{c}{4b}\cos 2\omega t \right) \right] \mathbf{k} \tag{3-56}$$

Desarrollando esta última expresión y eliminando términos que contengan la relación biela-manivela a una potencia mayor de uno se tiene.

$$\mathbf{T}_i = m_b c^2 \omega^2 \sin\omega t \left(\frac{c}{2b} + \cos\omega t + \frac{3c}{2b}\cos 2\omega t \right) \mathbf{k} \tag{3-57}$$

La expresión anterior está en términos de seno y coseno. Para expresarla en términos de seno solamente se utilizan las siguientes identidades.

$$2\sin\omega t \cos 2\omega t = \sin 3\omega t - \sin\omega t \tag{3-58}$$

$$2\sin\omega t\cos\omega t = \sin 2\omega t \tag{3-59}$$

Reemplazando estas identidades en la ecuación 3-57 se obtiene finalmente:

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{2}m_b c^2\omega^2\left(\frac{c}{2b}\sin\omega t - \sin 2\omega t\frac{3c}{2b}\sin 3\omega t\right)\mathbf{k} \tag{3-60}$$

Analizando esta última ecuación se observa que este par de torsión de inercia tiene términos en la primera, segunda y tercera armónicas, siendo el término de la segunda el que posee un mayor coeficiente y por consiguiente es el término dominante.

3.2.4. Equilibrio dinámico en un motor monocilíndrico

Del modelo de masas concentradas se puede deducir que algunas de las fuerzas de inercia podrían anularse contraponiendo una masa de las mismas características que la ubicada en el punto A, pero a 180° para que genere así una fuerza de inercia igual y opuesta que anule el efecto. Lo anterior se representa en la figura **4-4**.

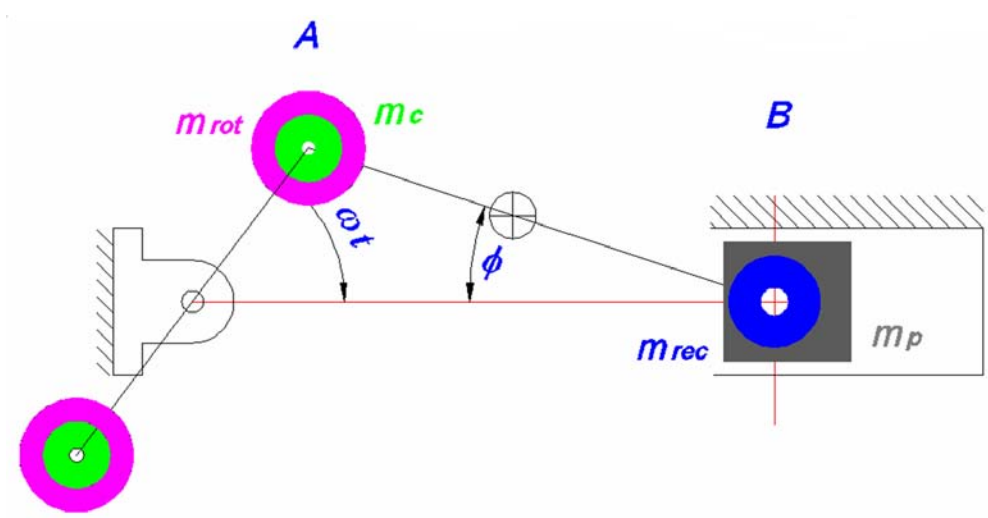

Figura 3-10.: Equilibrado dinámico de un motor monocilíndrico.

Lo anterior contrarrestaría las fuerzas de inercia correspondientes a la masa en A, con lo cual las fuerzas de sacudimiento serían ahora solamente las correspondientes al movimiento lineal del pistón

$$F_{ix} = m_b \left[-c\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{c}{b} \cos 2\omega t \right) \right] \tag{3-61}$$

$$F_{iy} = 0 \tag{3-62}$$

4. Modelo propuesto: Gráficos de unión.

En el campo del análisis de sistemas dinámicos existen diversas técnicas de modelado. La aplicabilidad de cada una depende del sistema dinámico que se pretenda analizar; es decir, algunas pueden tener mayor versatilidad para aplicarse en el modelado de un sistema que en otro. Se busca entonces por medio de alguna técnica el superar ciertas limitaciones que se tienen con los modelos analíticos, principalmente aquella que consiste en la construcción modelos dinámicos equivalentes para la biela. Se exploró inicialmente la técnica de mecánica multicuerpo la cual tiene varios ejemplos de utilización [24, 23, 48]. Sin embargo, estos modelos implican grandes sistemas de ecuaciones diferenciales y complejos algoritmos numéricos para su solución. Adicionalmente, aunque las restricciones pueden reducir el tamaño del sistema de ecuaciones dado que implican dependencia entre las coordenadas generalizadas, la imposibilidad de encontrar una ecuación simple para la trayectoria del pistón vista desde el bastidor de fijación, llevó a buscar técnicas que facilitaran el problema.
Una técnica que también ha sido utilizada para modelar el motor de combustión interna es la de *gráficos de unión* (Bond Graph del inglés). Aunque los modelos encontrados se utilizan para modelar la entrega de potencia y los intercambios energéticos [21, 22, 20], esta técnica puede utilizarse para modelar mecanismos multicuerpo; de hecho se utiliza en el modelamiento de brazos robóticos y maquinaria para movimiento de tierra [39]. Es esta aplicación la que se utilizará para abordar el problema.
A continuación se expondrá los fundamentos físicos en los cuales se sustenta la técnica. Seguidamente se presentará el enfoque multicuerpo visto desde el punto de vista de los gráficos de unión y finalmente se mostrará en forma detallada la construcción del modelo propuesto.

4.1. Gráficos de unión. Fundamentos matemáticos y físicos

A continuación se exponen los fundamentos matemáticos y físicos en los cuales se basa la técnica de gráficos de unión.

4.1.1. Variables de potencia y variables energéticas.

La teoría de los sistemas dinámicos se utiliza como herramienta en el modelamiento de dispositivos tales como televisores, automóviles, máquinas herramienta, entre otros. Finalmente, cada uno de estos artefactos se elabora gracias al acoplamiento de dispositivos tales como transistores, engranajes, motores, amortiguadores, y otros elementos entre los cuales existe una función común: el transporte o el manejo de la energía.
La energía en un sistema físico puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. A su vez, un sistema dinámico puede entenderse como la unión de varios elementos físicos los cuales pueden manejar la energía de estas distintas formas. La afirmación anterior es válida independientemente del dominio físico en el cual se trabaje (eléctrico, mecánico, hidráulico, etc). Haciendo una inspección más a fondo, la energía se transmite en forma de fuerzas, velocidades, presiones, caudales, voltajes y corrientes, teniendo cada una de estas denominaciones significado según el dominio físico. No obstante, las variables anteriores pueden considerarse enmarcadas en dos tipos: pueden ser variables tipo *flujo* o tipo *esfuerzo*. Dentro de la teoría de los gráficos de unión, estos términos no se interpretan con la misma definición dada en la mecánica de sólidos o de fluidos sino que tienen dentro de la teoría de los gráficos de unión un significado propio.
Cada una de estas variables se aplican en parejas (una variable esfuerzo asociada con una variable flujo) y en puntos específicos donde ocurre el intercambio energético que se denominan *puertos*. Por lo tanto, dichas variables son comunes a cada par de dispositivos acoplados, independientemente de dominio al cual pertenezcan los dispositivos (mecánico, hidráulico o eléctrico).
La transmisión de potencia a través del sistema dinámico se puede describir como función de las variables esfuerzo y flujo. Dependiendo del dominio físico en el que se trabaje, cada una de estas variables tendrá su representación en términos de magnitudes físicas. En sistemas eléctricos, por ejemplo, la variable esfuerzo es el voltaje, y la variable flujo es el amperaje. El producto de las dos es la potencia eléctrica. Para el caso de sistemas mecánicos, la variable *esfuerzo* la representa la *fuerza*, y la variable *flujo* la *velocidad*. El producto de las dos es la *potencia mecánica*. Todo esto viene expresado en la Ecuación 4-1.

$$P(t) = e(t)f(t) \tag{4-1}$$

En virtud de lo anterior, las variables *esfuerzo* y *flujo* reciben el nombre de *variables de potencia* [11].

Se define entonces la energía que se tiene en algún momento en un puerto como la integral de la potencia con respecto al tiempo (Ecuación 4-2).

$$E(t) = \int P(t)dt = \int e(t)f(t)dt \tag{4-2}$$

Existen otro tipo de variables denominadas *variables energéticas*[15, 14, 11], que reciben el nombre de *momento p* y *desplazamiento q*. Se definen como la integral con respecto al tiempo de las variables esfuerzo y flujo respectivamente (Ecuaciones 4-3 y 4-4). En el caso de la mecánica newtoniana, tanto para la variable momentum como para la variable desplazamiento, existe correspondencia con la definición y el nombre que se le asigna en la teoría de gráficos de unión.

$$p(t) = \int e(t)dt \tag{4-3}$$

$$q(t) = \int f(t)dt \tag{4-4}$$

También las variables energéticas pueden expresarse en términos diferenciales así (Ecuaciones 4-5 y 4-6):

$$\frac{dp}{dt} = e(t) \Rightarrow dp = edt \tag{4-5}$$

$$\frac{dq}{dt} = f(t) \Rightarrow dq = fdt \tag{4-6}$$

La energía del sistema puede expresarse en términos de variables energéticas siendo esta la razón por la cual toman estas variables ese nombre. Si se reemplaza la Ecuación 4-6 en la Ecuación 4-2 y se expresa el esfuerzo con función de desplazamiento se tiene una expresión adicional para la energía en términos del desplazamiento (Ecuación 4-7).

$$E(q) = \int e(q)dq \tag{4-7}$$

O si se reemplaza en la Ecuación 4-5 la Ecuación 4-2 y se expresa el flujo como función del

momentum se tiene una expresión para la energía en términos del momentum (Ecuación 4-8).

$$E(p) = \int f(p)dp \tag{4-8}$$

Aunque inicialmente no se reconoce de forma inmediata que a nivel físico puede expresarse el esfuerzo como función de desplazamiento o el flujo como función del momentum, al llegar a la parte donde se describen los distintos elementos constitutivos de un gráfico de unión, esto resultará evidente.

4.1.2. Puertos y elementos multipuerto. Ecuaciones constitutivas

Como se dijo anteriormente, los lugares donde se realiza el intercambio energético en cada elemento del sistema se denominan puertos. Algunos dispositivos constan de un solo puerto y se denominan *elementos de un puerto*. Otros dispositivos tienen dos, tres o más puertos y se denominan *elementos multipuerto*.
La topología de los gráficos de unión consiste en una línea de flecha que representa el flujo de potencia. Este símbolo se denomina *unión*. En la figura **5-9** se representa la situación de transferencia de potencia de un motor hacia su carga, y su símbolo equivalente en gráficos de unión.

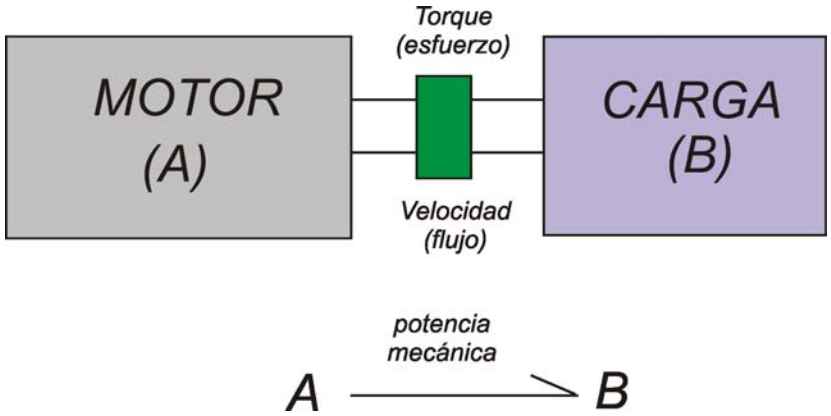

Figura 4-1.: Flujo de potencia y su símbolo en gráficos de unión.

Cada uno de los dispositivos que constituyen el sistema dinámico manejan la energía de forma distinta. Se pensaría inicialmente que una clasificación de los distintos elementos que pueden constituir cualquier sistema dinámico basada en la forma como manejan la energía podría ser demasiado extensa. Sorprendentemente, lo anterior no es cierto y son pocos los

elementos que pueden cubrir esta clasificación y adicionalmente modelar cualquier sistema dinámico.

Elementos básicos de un puerto

Un elemento de un solo puerto posee sola entrada a través de la cual ocurre el intercambio energético y de allí su definición.

A su vez para este elemento (y para todos los demás), se establecerán relaciones entre las variables de potencia o entre las energéticas. Estas relaciones definirán ecuaciones constitutivas que serán utilizadas en la construcción del sistema de ecuaciones diferenciales que será finalmente el modelo matemático correspondiente al modelo físico estudiado.

La energía se puede disipar y esta característica la tienen los elementos denominados *resistores*. Inicialmente su papel físico y su ecuación constitutiva es más sencilla de establecer en el dominio eléctrico. La relación entre el voltaje (esfuerzo) y la corriente eléctrica (flujo) se establece por la *ley de ohm* la cual indica (Ecuación 4-9):

$$v = ri \tag{4-9}$$

Donde r corresponde a la resistencia eléctrica, v es el voltaje e i es el amperaje o corriente eléctrica. Expresando esta ecuación en términos de variables de potencia en la teoría de gráficos de unión se tiene (Ecuación4-10):

$$e = Rf \tag{4-10}$$

La resistencia eléctrica establece un efecto energético disipativo y a su vez de la Ecuación 4-10 se presenta una relación entre la variable esfuerzo y la variable flujo eléctricas. Así, se llamará en la teoría de los gráficos de unión al elemento que ocasiona una disipación energética y que relaciona al esfuerzo y al flujo un *resistor*. Si la relación entre el esfuerzo y el flujo es lineal se tendrá entonces un *resistor lineal*. En el dominio mecánico, este efecto disipativo se ve representado por el amortiguamiento producido bien sea por amortiguadores propiamente dichos o por fricción. En la Figura **5-11** se encuentra representado el símbolo que representa este elemento en la topología de los gráficos de unión.

La energía puede almacenarse en el interior un sistema dinámico. Este almacenamiento se puede apreciar en términos de una función entre una variable de potencia en términos de una variable energética. Estas variables pueden ser inicialmente el esfuerzo y el desplazamiento

Figura 4-2.: Puerta resistor y su símbolo en gráficos de unión.

(Ecuación 4-7), y a partir de allí podría definirse una ecuación constitutiva. Dicha relación se encuentra expresada en la Ecuación 4-11 y rige el comportamiento del elemento denominado *capacitor*.

$$e = \frac{q}{C} \tag{4-11}$$

Siendo C la denominada *capacitancia*. En el caso del dominio mecánico la energía puede almacenarse en forma de energía potencial en un resorte. Este elemento relaciona la variable fuerza (esfuerzo) con la variable desplazamiento (deformación) a través de la denominada ley de Hooke (Ecuación 4-12).

$$F = kx \tag{4-12}$$

Al comparar las Ecuaciones 4-11 y 4-12 se observa que en términos mecánicos, el valor de la capacitancia corresponde al inverso de la constante de elasticidad del resorte (4-13).

$$C = \frac{1}{k} \tag{4-13}$$

Por medio de la capacitancia se modelarán todos los efectos elásticos del mecanismo, bien sea por resortes propiamente dichos o por la elasticidad inherente a los componentes. En la figura **5-12** se ilustra el símbolo que representa este elemento en la topología de los gráficos de unión.

El almacenamiento de energía puede verse reflejado por medio de una relación entre el flujo en términos del momentum (Ecuación 4-8). Dicha relación se está definida por la ecuación (Ecuación 4-14

Figura 4-3.: Puerta capacitor y su símbolo en gráficos de unión.

$$p = \frac{f}{I} \tag{4-14}$$

Con I simbolizando la denominada *inertancia*. De la definición de momentum lineal de la mecánica clásica (Ecuación 4-15) con p como el momentum lineal, m la masa y v la velocidad se tiene:

$$p = mv \tag{4-15}$$

Se deduce entonces que la masa o inercia mecánica se relaciona con la inertancia así (Ecuación 4-16).

$$m = \frac{1}{I} \tag{4-16}$$

Con el elemento inercia se representarán entonces todos los efectos inerciales del mecanismo tanto traslacionales (masa) o rotacionales (momentos de inercia de masa).

En la Figura **4-4** se representa el símbolo del elemento inercia en la topología de los gráficos de unión.

Figura 4-4.: Puerta inercia y su símbolo en gráficos de unión.

Los dos últimos elementos que se deben definir serían los correspondientes a las *fuentes de flujo o de esfuerzo*, cuya función es suministrar alguna de las dos variables de potencia al sistema. Se modelan con estos elementos los elementos que suministran al sistema dinámi-

co fuerzas, presiones, velocidades, voltajes, amperajes, etc. En la Figura **4-5** se muestra el símbolo utilizado en gráficos de unión para estos elementos.

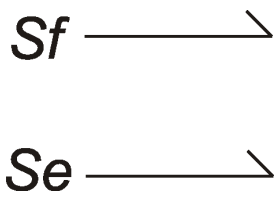

Figura 4-5.: Elementos tipo fuente. Arriba, fuente de flujo. Abajo, fuente de esfuerzo.

Elementos básicos de dos puertos.

La potencia a través de los elementos de un sistema dinámico debe conservarse dejando de lado efectos disipativos inherentes a cualquier dispositivo físico. Sin embargo, pueden establecerse modificaciones entre las variables esfuerzo y flujo sin ir en contravía de esta conservación de la potencia. Simplemente, la modificación que se realize a una de las variables debe compensarse en su pareja, con el fin de mantener el producto entre las dos variables constante(Ecuación 4-1). Los elementos de dos puertos se establecen bajo esta premisa de conservación de la potencia lo cual viene expresado matemáticamente así (Ecuación 4-17):

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t) \tag{4-17}$$

El elemento que modela esta transmisión de potencia se denomina *transformador*. La variación de las variables de potencia se cuantifica por medio de una ganancia representada por el parámetro m denominado *módulo de transformador*. De la condición de conservación de la potencia se tiene entonces unas relaciones entre los esfuerzos y los flujos de entrada con los de salida así (Ecuaciones 4-18 y 4-19) :

$$e_1(t) = me_2(t) \tag{4-18}$$

$$mf_1(t) = f_2(t) \tag{4-19}$$

El elemento transformador representa dispositivos tales como trasformadores eléctricos, reductores de velocidad (trenes de engranajes), prensas hidráulicas, palancas, etc, y jugará un papel importante en el desarrollo del modelo propuesto en el presente trabajo. Su símbolo

en gráficos de unión se presenta en la figura **4-6**.

Figura 4-6.: Transformador y su símbolo en gráficos de unión.

Existe otro elemento que trasmite potencia llamado *girador* con la variación medida por un parámetro r denominado *módulo de girador* cuyas ecuaciones constitutivas son las siguientes (Ecuaciones 4-20 y 4-21):

$$e_1(t) = r f_2(t) \tag{4-20}$$

$$r e_1(t) = e_2(t) \tag{4-21}$$

En mecánica se modelan con este elemento los efectos giroscópicos. No obstante, este elemento no hace parte integrante del modelo propuesto en el presente trabajo y se presenta solamente a nivel informativo.

Elementos de unión de tres puertos

Los distintos elementos descritos anteriormente se conectan entre sí por medio de lo que se denomina *nodos* o *uniones*. Estas uniones podrían conectar tres o más elementos por lo que deben tener entonces tres o más puertos. También en este tipo de elementos la potencia se conserva, pero su ecuación constitutiva está más orientada hacia el balance. Es importante destacar que el nodo opera sobre uno de los dos parámetros, el esfuerzo o el flujo, dejando constante aquel sobre el cual no actúa. Así, se tiene juntas de *flujo común o unión 1* en donde la variable que permanece constante es el flujo, y de *esfuerzo común o unión 0* en donde se mantiene constante el esfuerzo. Un ejemplo sencillo de una unión de flujo común, para el caso mecánico, consiste en aquellos puntos de un mecanismo que se mueven con igual velocidad. El caso de una junta de esfuerzo común representa a nivel mecánico aquellos puntos de un sistema que experimentan una misma fuerza. En la Figura **4-7** se encuentra el símbolo de una junta de flujo común. En la Figura **4-8** se halla representada una junta de esfuerzo común.

Un sistema dinámico se puede dividir en subsistemas que se pueden modelar aparte para luego encadenarse cada uno de los submodelos por medio de nodos, obteniéndose así el mo-

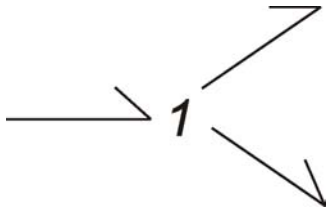

Figura 4-7.: Unión de flujo común y su símbolo en gráficos de unión.

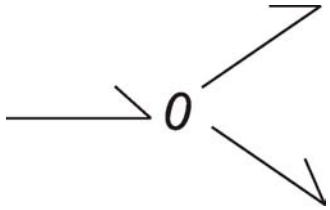

Figura 4-8.: Unión de esfuerzo común y su símbolo en gráficos de unión.

delo total de una máquina. Esto es una ventaja atractiva para el sistema de interés, ya que se puede trabajar el modelo del mecanismo por la unión submodelos de cada componente. Esta es la filosofía utilizada en la construcción del modelo propuesto.

La causalidad

La caracterización de sistemas dinámicos implica en muchos casos la realización de experimentos los cuales tienen como objetivo el establecer en función de una entrada al sistema su respuesta en términos de su salida. Siempre se seleccionará una variable sobre la cual se pueda ejercer algún control; esta será la entrada. Se observará en función del cambio de dicha entrada, la variación de una variable tomada como salida del sistema, obteniéndose así una característica o respuesta del sistema. Matemáticamente se puede decir que se intenta obtener la salida como un funcional de la entrada.

Como se vio anteriormente, el intercambio energético entre los elementos del sistema dinámico se realiza en términos de variables esfuerzo y flujo. Se mostró en las ecuaciones constitutivas de los distintos elementos que se establecen relaciones entre estas variables y según el tipo de elemento que se esté modelando se tendrá entonces una variación (respuesta) de una variable que es función de otra (entrada), según su ecuación constitutiva. Es decir, una variable como resultado o efecto (salida) de la *causa* que la produce (entrada). Es por ello que esta relación existente entre las variables de potencia se denomina *causalidad*.

Lo anterior debe verse reflejado tanto en la topología del gráfico de unión como en la construcción del modelo y esto se explicará a continuación utilizando para ello el caso del elemento

resistor que es el más sencillo. Después se mostrará la situación para los demás elementos. A partir de las ecuaciones constitutivas descritas para cada uno de los elementos se puede observar que estas relaciones funcionales (o relaciones de causalidad o causalidad simplemente) toman diferentes expresiones matemáticas. Para el caso de una puerta tipo resistor, el esfuerzo puede expresarse en función del flujo (Ecuación 4-22), o el flujo en función del esfuerzo (Ecuación 4-23) y es hasta cierto punto indiferente, siempre y cuando correspondan a funciones matemáticas univaluadas.

$$e = \Phi_R(f) \tag{4-22}$$

$$f = \Phi_R^{-1}(e) \tag{4-23}$$

Dentro de la topología de los gráficos de unión, la causalidad viene representada por una barra corta transversal a la flecha de flujo de energía y que representa el sentido que tiene la variable esfuerzo. Si esta barra va hacia el elemento, el esfuerzo será la variable de entrada a ese elemento. Si, por el contrario, va hacia afuera del elemento, el esfuerzo es considerado como la variable de salida. Lo anterior se muestra en la Figura **4-9**. En la parte superior se tiene el caso del esfuerzo como variable de entrada (Ecuación 4-23) y en la parte inferior el esfuerzo como variable de salida (Ecuación 4-22).

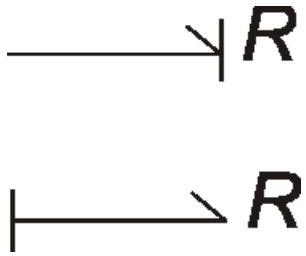

Figura 4-9.: Elemento resistor con sus posibles causalidades.

En el caso del elemento capacitor, la ecuación constitutiva establece una relación entre el esfuerzo y el desplazamiento (Ecuación 4-24) :

$$e = \Phi_C^{-1}(q) \tag{4-24}$$

Recordando que el desplazamiento se define como la integral de la variable flujo con respecto al tiempo. Reemplazando esto en la Ecuación 4-24 se tiene la Ecuación 4-25.

$$e = \Phi_C^{-1}\left(\int f(t)dt\right) \tag{4-25}$$

Esta situación implica una causalidad en la cual el esfuerzo es función de la integral del flujo y por esto se denomina *causalidad integral*. Matemáticamente es posible expresar el flujo como función del esfuerzo, lo cual se muestra en la Ecuación 4-26:

$$f = \frac{d}{dt}\Phi_C(e) \tag{4-26}$$

Aquí se tiene entonces el flujo como función de la derivada con respecto al tiempo de la función de esfuerzo. Es decir se tiene una *causalidad derivativa*.

Aunque a nivel matemático no se observe dificultad apreciable, al momento de construir el sistema de ecuaciones diferenciales e intentar su resolución, la utilización de uno u otro tipo de causalidad puede incluir problemas importantes que incluso hacen irresoluble el sistema. Por ello se prefiere en la medida de lo posible utilizar el tipo de causalidad integral, ya que a nivel del método numérico involucra mayor estabilidad.

En la Figura **4-10** se muestra las posibles causalidades para un elemento capacitor y su tipo de causalidad.

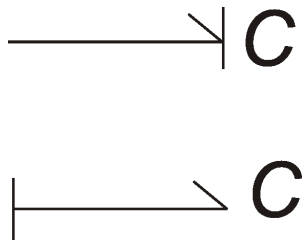

Figura 4-10.: Elemento capacitor con sus posibles causalidades. Arriba, causalidad derivativa. Abajo, causalidad integral.

En el caso de un elemento tipo inercia, se tiene una relación entre el flujo y el momentum, lo cual en términos de variables de potencia se puede expresar así (Ecuación 4-27).

$$f = \Phi_I^{-1}\left(\int e(t)dt\right) \tag{4-27}$$

Se tiene entonces para este caso un tipo de causalidad integral para un elemento tipo inercia.

Se tiene causalidad derivativa cuando se expresa el esfuerzo como función del flujo (Ecuación 4-28) .

$$e = \frac{d}{dt}\Phi_I(f) \tag{4-28}$$

En la Figura **4-11** se muestra las posibles causalidades para un elemento tipo inercia y su correspondiente tipo.

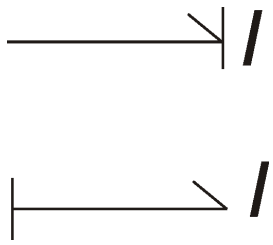

Figura 4-11.: Elemento inercia con sus posibles causalidades. Arriba, causalidad integral. Abajo, causalidad derivativa.

En el caso de los elementos de dos puertos, y en específico los elementos tipo transformador, la causalidad a la salida del elemento queda establecida por su causalidad a la entrada; es decir, si a la entrada del elemento se controla el esfuerzo, a la salida del elemento la variable esfuerzo sera su salida, dada la dependencia establecida por su ecuación constitutiva, y viceversa. Lo anterior se muestra en la Figura **4-12**

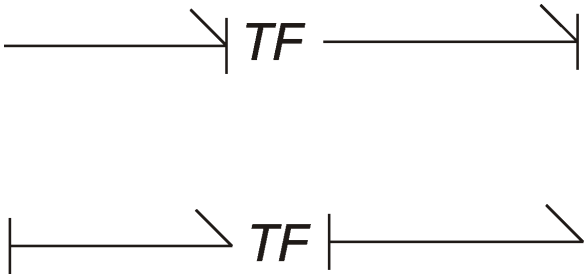

Figura 4-12.: Elemento transformador con sus posibles causalidades.

Para el caso de elementos de tres o más puertos, como el caso de la uniones de esfuerzo común (unión 0) solamente uno de los ramales puede tener un esfuerzo de entrada y los demás deberán ser de salida necesariamente. La misma situación se tiene con la uniones de flujo común (unión 1), pero teniendo en cuenta que la variable indicativa es el flujo. En caso

de los elementos de dos y tres puertos las ecuaciones constitutivas ya definen la dependencia entre una y otra variable sin más posibilidades. En la Figura **4-13** se muestra esta situación.

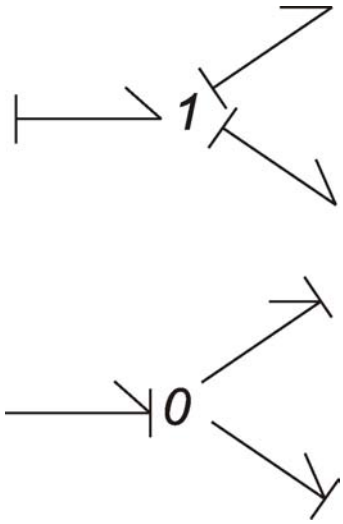

Figura 4-13.: Uniones tipo 1 y 0 con sus posibles causalidades.

Los elementos tipo fuente también tienen su causalidad determinada por definición. Esto se presenta en la Figura **4-14**

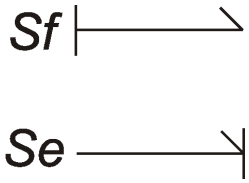

Figura 4-14.: Uniones tipo 1 y 0 con sus posibles causalidades.

4.2. Enfoque multicuerpo utilizando gráficos de unión

El análisis multicuerpo es la base para el diseño y síntesis de mecanismos. Consiste en establecer ecuaciones de movimiento para cada uno de los eslabones (cuerpos) que conforman un mecanismo referidas con respecto a un sistema de referencia fijado al eslabón fijo o de tierra (sistema de referencia local). En cada uno de los eslabones se fijan a su vez sendos sistemas de referencia (sistemas de referencia local) los cuales se trasladan y giran con ellos. Por lo anterior dichos sistemas locales no serán inerciales lo que obliga a incorporar términos adicionales en las expresiones de las leyes de Newton lo cual puede llevar a ecuaciones complejas.

La técnica de gráficos de unión permite hacer un abordaje del problema multicuerpo de una manera más sencilla. Para ello considérese un cuerpo rígido en movimiento plano general. La figura **4-15** muestra esta situación.

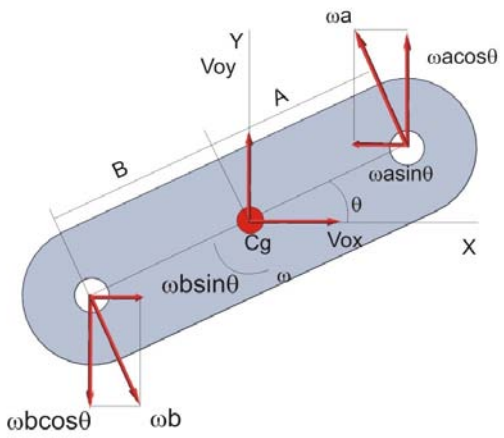

Figura 4-15.: Cuerpo rígido en movimiento plano general.

La velocidad de un punto A perteneciente al cuerpo rígido viene dada por la Ecuación 4-29.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O} \tag{4-29}$$

La velocidad de un punto **A** de un eslabón en movimiento plano general y referida a un sistema global o absoluto es la suma de la velocidad absoluta de un punto **O** del mismo eslabón y la velocidad relativa del punto **A** con respecto al punto **O**, medida en el sistema coordenado local el cual se traslada con el cuerpo pero no gira con él,lo cual lo hace un sistema inercial o Newtoniano.
Sea el punto **O** el centro de masa del cuerpo rígido y sean los puntos A y B los lugares en los cuales se ubicarán juntas de pasador en donde se conecta el cuerpo rígido con los demás eslabones del mecanismo. La Ecuación 4-29 se reescribe entonces dando como resultado la Ecuación 4-30.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/A} \tag{4-30}$$

Para el caso del movimiento plano y utilizando coordenadas rectangulares, la ecuación vectorial anterior se puede descomponer en cada componente así (Ecuaciones 4-31 y 4-32):

$$V_{Ax} = V_{Ox} - \omega A \sin\alpha \tag{4-31}$$

$$V_{Ay} = V_{Oy} + \omega A \cos\alpha \tag{4-32}$$

Para el caso del punto **B** se tendrá entonces una ecuación vectorial similar (Ecuación 4-33):

$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/B} \tag{4-33}$$

La cual se descompone a su vez en sus coordenadas rectangulares así (Ecuaciones 4-34 y 4-35).

$$V_{Bx} = V_{Ox} + \omega B \sin\alpha \tag{4-34}$$

$$V_{By} = V_{Oy} - \omega B \cos\alpha \tag{4-35}$$

Las ecuaciones 4-31,4-32,4-34 y 4-35, ahora escalares, pueden expresarse en términos de gráficos de unión lo cual se mostrará en el siguiente apartado.

4.2.1. Modelo en gráficos de unión para un eslabón en movimiento plano general.

Las ecuaciones anteriores quedan representadas por el gráfico de unión mostrado en la Figura **4-16**. El gráfico de unión fue construido utilizando el programa 20-SIM versión 4.0, el cual maneja distintos métodos para el modelado de sistemas dinámicos, entre ellos los gráficos de unión.

A continuación se irán analizando distintas zonas del gráfico de unión indicando su correspondencia con las ecuaciones de movimiento del eslabón.

En la figura **4-17** se indican los puntos del grafo correspondientes al movimiento del centro de gravedad del eslabón.

La unión **1** designada por *velang* representa la velocidad angular del eslabón. A esta junta **1** se asocia también el momento de inercia de masa del cuerpo simbolizado por elemento de inercia *inerrot*. Se considera que este momento de inercia es medido con respecto al centro de masa. Arriba y abajo de la junta **1** *velang* existen dos juntas **1** las cuales representan las velocidades lineales en las coordenadas x y y del centro de masa del eslabón (ver figura **4-17**). La unión **1** ubicada en la parte superior representa la velocidad lineal en la dirección x y se designa por *vel-cg-x*. La unión **1** en la parte inferior representa la velocidad en el eje y y se designa por *vel-cg-y*. En la unión superior *vel-cg-x* se asigna un elemento inercia denotado con *masax* el cual representa la masa del eslabón. Otro elemento inercia se asocia a la

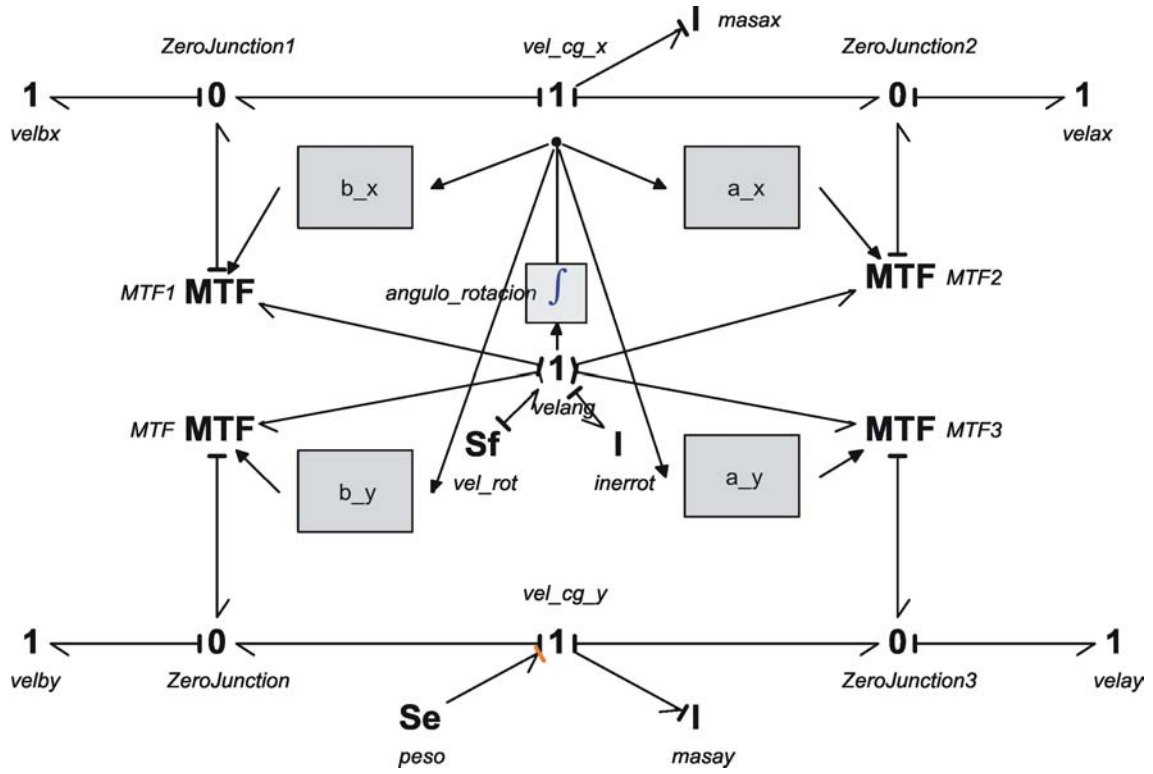

Figura 4-16.: Modelo en bond graph de un eslabón en movimiento plano general.

unión **1** inferior y esta denotado por *masay* y también representa la masa del eslabón. Podría pensarse (erróneamente) en una descomposición de la masa a lo largo de las coordenadas x y y, pero lo anterior no es cierto. A ambos elementos inercia se les asigna el mismo valor y simplemente se representa con ello el efecto inercial traslacional que tiene el eslabón en un movimiento plano.

Los trasformadores MTF, MTF1, MTF2, MTF3 representan los términos de velocidad relativa dados en las ecuaciones4-31,4-32,4-34 y 4-35. El módulo de cada trasformador es la distancia desde el punto deseado al centro de masa (designado con las distancias A o B véase Figura) multiplicada por el seno o el coseno del ángulo de rotación del eslabón.
Los transformadores descritos son *transformadores modulados*, su módulo de transformación no corresponde a un coeficiente constante, sino a una expresión matemática (trigonométrica en este caso). Por ello se requiere adicional al gráfico de unión unos bloques de señal (denotados por a_x, b_x, a_y, b_y) proveídos por el mismo software 20-Sim para establecer los módulos de los transformadores. Adicionalmente estos módulos son función del ángulo de rotación θ el cual se obtiene gracias a la integración de la velocidad angular de la junta **1** *velang*.En la la figura **4-18** se encuentran señalados estos transformadores y su función en el modelo.

La entrada de cada uno de los módulos de los trasformadores es la velocidad angular del

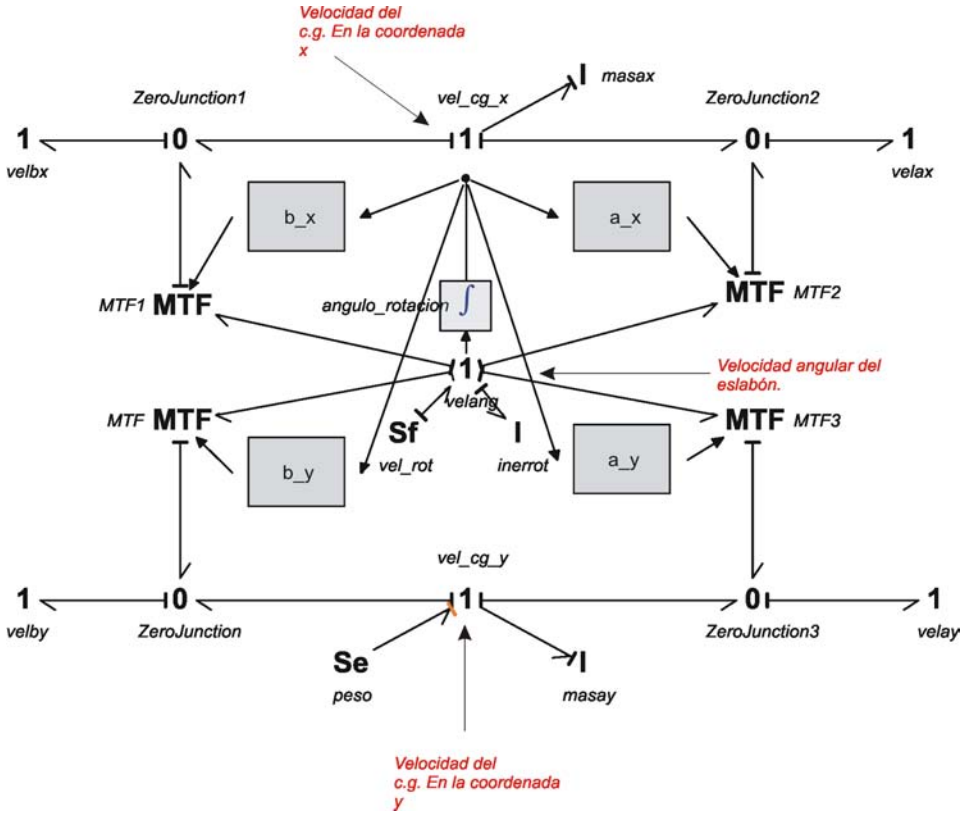

Figura 4-17.: Detalle de la representación del movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

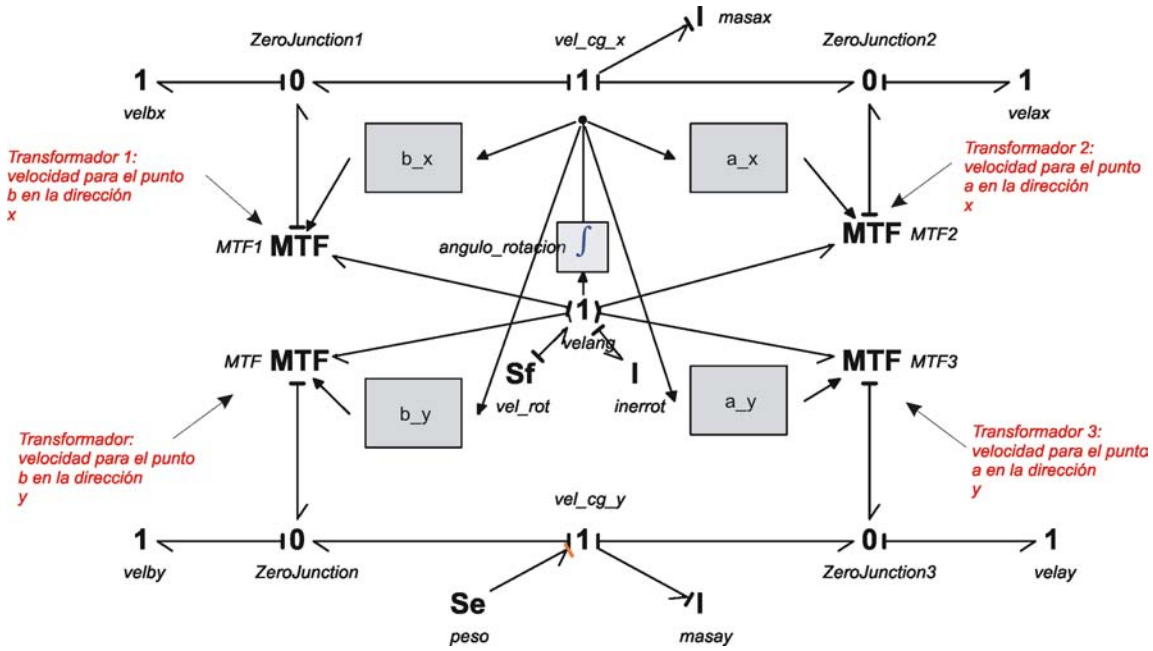

Figura 4-18.: Detalle de la representación del movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

eslabón. Las salidas de cada trasformador modulado son las siguientes:

Para el trasformador MTF

$$-bcos(\theta) \tag{4-36}$$

Para el trasformador MTF1

$$bsin(\theta) \tag{4-37}$$

Para el trasformador MTF2

$$-asin(\theta) \tag{4-38}$$

Para el trasformador MTF3

$$acos(\theta) \tag{4-39}$$

Con θ (ángulo de rotación del eslabón) dado por

$$\theta = \int \omega dt \tag{4-40}$$

Las uniones **1** que representan la velocidad lineal del centro de gravedad (en x y en y) conectan con uniones **0** las cuales están designadas en el gráfico de unión con *zerojuntion, zerojuntion1, zerojuntion2, zerojuntion3* . A estas juntas también llegan las salidas de los trasformadores modulados que representan los términos de velocidad relativa. La función de estas uniones **0** es hacer la suma de la velocidad absoluta del centro de gravedad (lineal) y la velocidad relativa con respecto al centro de gravedad (dada por las salidas de los transformadores). Esta suma se hace en cada componente, por lo tanto se tienen entonces cuatro salidas por cada una de las uniones **0** y que se representan por uniones **1** las cuales serán las velocidades absolutas en x (velax) y en y (velay) para el punto **A** y las velocidades absolutas en x (velbx) y en y (velby) para el punto **B**. Estos puntos se encuentran resaltados en la figura **4-19**

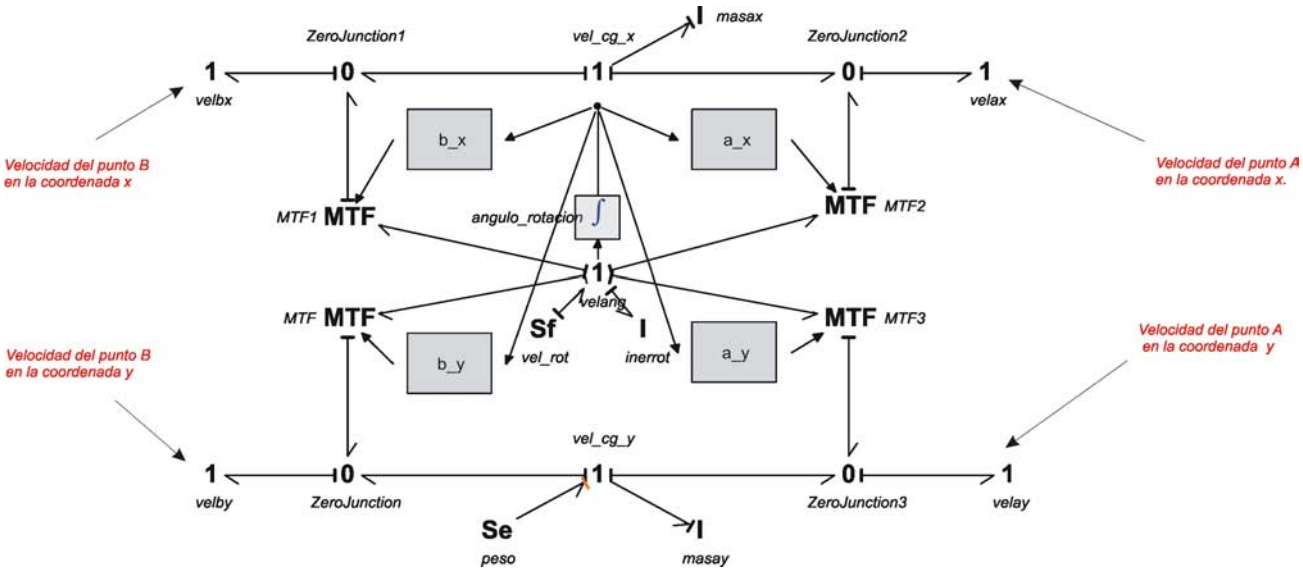

Figura 4-19.: Detalle de la representación de las velocidades en los puntos A y B del eslabón.

En la siguiente sección se muestra la aplicación de este modelo para cada elemento del mecanismo del motor de combustión interna más otras consideraciones necesarias para modelar este tipo de máquina.

4.3. Modelo del mecanismo del motor de combustión interna

El mecanismo del motor de combustión interna es un mecanismo biela manivela corredera sin corrimiento, constituido por los siguientes cuatro eslabones:

1. **Bloque de cilindros**. Constituye en elemento que soporta el mecanismo en conjunto. Para efectos del modelo se considerará como el eslabón referencia, es decir, en el se encontrará localizado el sistema coordenado global.

2. **Cigüeñal**. Este eslabón permite la entrega de potencia del motor en forma de energía cinética rotacional. Se considerará como un eslabón en rotación pura.

3. **Biela**. Corresponde al eslabón acoplador, que conecta al pistón que tiene movimiento rectilíneo con el cigüeñal que tiene movimiento rotatorio. Lo anterior le confiere un movimiento complejo, por lo que se considerará como un eslabón en movimiento plano general.

4. **Pistón**. Eslabón con movimiento rectilíneo con respecto al sistema coordenado global, que recibe la fuerza obtenida como resultado de la variación de presión de un fluido de trabajo (aire) sometido a un proceso de combustión.

Por lo anterior podemos considerar al mecanismo del motor de combustión interna como la conexión de cuatro eslabones. Uno es de referencia y se considera fijo (bloque de cilindros). Otros dos (biela y cigüeñal) pueden ser modelados por el modelo propuesto para el eslabón en movimiento plano general. El pistón tiene la cinemática más sencilla y corresponde a una parte del modelo final.

En la Figura **4-20** se muestra la orientación del motor para la construcción del modelo y los ángulos y el sistema de referencia para considerar el movimiento de los eslabones.

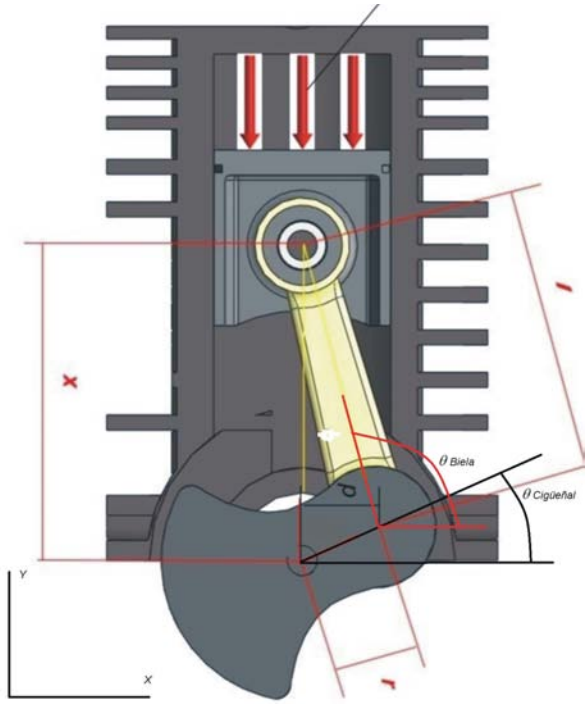

Figura 4-20.: Sistema de referencia para la construcción del modelo.

En la Figura **4-21** se muestra el gráfico de unión propuesto para modelar el mecanismo de un motor de combustión interna. En la figura se resalta una serie de zonas del modelo que representan elementos específicos del mecanismo (sección cigüeñal, sección biela y sección pistón).
La sección cigüeñal representa el movimiento del cigüeñal el cual es un cuerpo en movimiento giratorio (sin traslación). No obstante, existen dos puntos importantes en el componente que deben tenerse en cuenta en el modelo: uno es el **muñón de bancada** el cual es el lugar

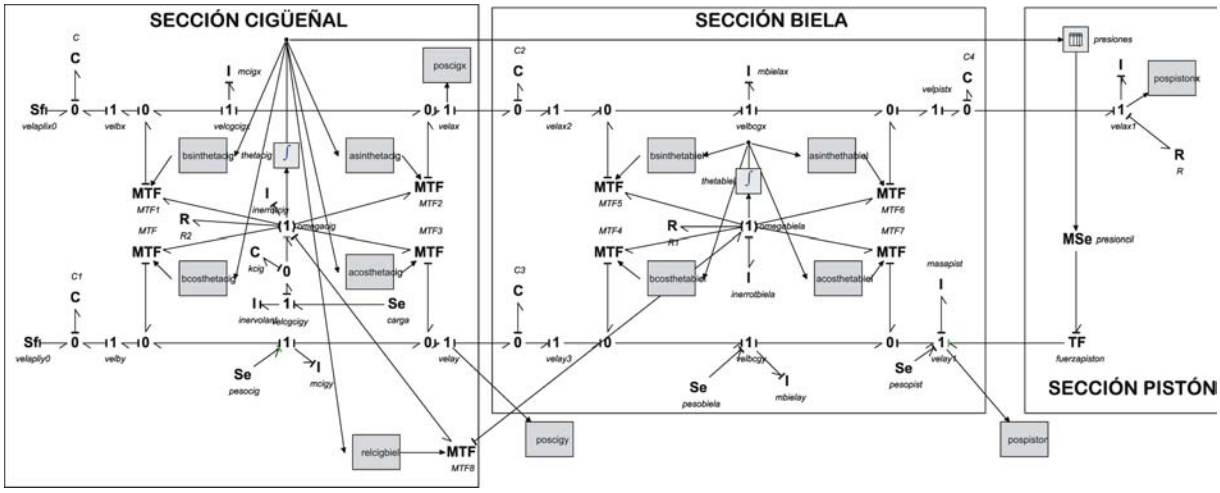

Figura 4-21.: Modelo en gráficos de unión para mecanismo de motor de combustión interna.

donde el cigüeñal descansa sobre el bloque de cilindros del motor.

El modelo elaborado para un cuerpo en movimiento plano general se modifica para llevarlo al caso de un cuerpo en movimiento giratorio. Para ello, se introducen dos fuentes de flujo denominadas *velaplix0* y *velapliy0* las cuales son fuentes de flujo de valor nulo (velocidad cero). Lo anterior se hace para representar que el cigüeñal esta restringido a girar solamente (no trasladarse) con respecto al bloque de cilindros en su conexión **b** que representa para efectos del modelo el muñón de bancada.

El lugar donde el cigüeñal conecta con el eslabón acoplador (*biela*) se denomina **muñón de biela** y para efectos del modelo esta representado en el punto **a** de la sección de cigüeñal. Nótese en este punto que en el modelo las uniones tipo **1** del *velax* y *velay* correspondientes ala sección del cigüeñal conectan con la siguiente sección del modelo (sección biela). La anterior conexión garantiza que la velocidad del punto **a** del cigüeñal sea la misma que la del punto **b** de la biela. Nótese adicionalmente una diferencia con respecto al modelo propuesto para el eslabón en movimiento plano general. La incorporación de dos elementos capacitores llamados **C** y **C1**. Estos elementos se incorporan con el fin de reducir el número de estados independientes del modelo y facilitar la construcción de sistema de ecuaciones. Estos elementos capacitores representan resortes mecánicos con una constante de elasticidad muy alta, simulando entonces la alta rigidez de los muñones. El la Figura **4-22** se muestran estos detalles en la sección cigüeñal del modelo.

En la Figura **4-23** se muestra en detalle la sección biela del modelo. Las uniones **1** denominadas *velax2* y *velay3* corresponden a la unión de la biela con el cigüeñal. Nótese en la Figura **4-23** la existencia de los elementos resorte **C2** y **C3**, que representan resortes mecánicos

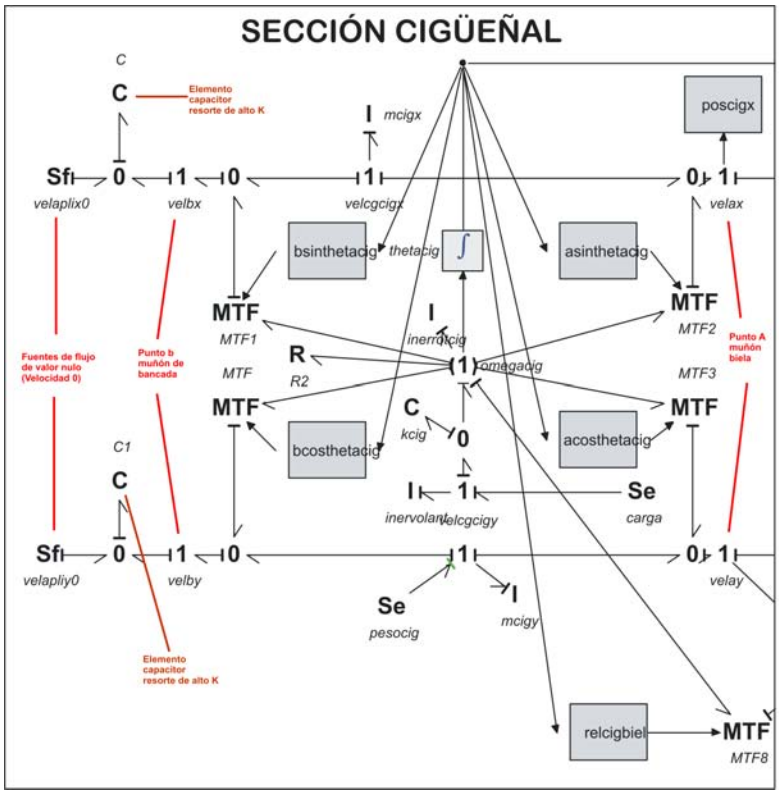

Figura 4-22.: Sección cigüeñal del modelo en gráficos de unión.

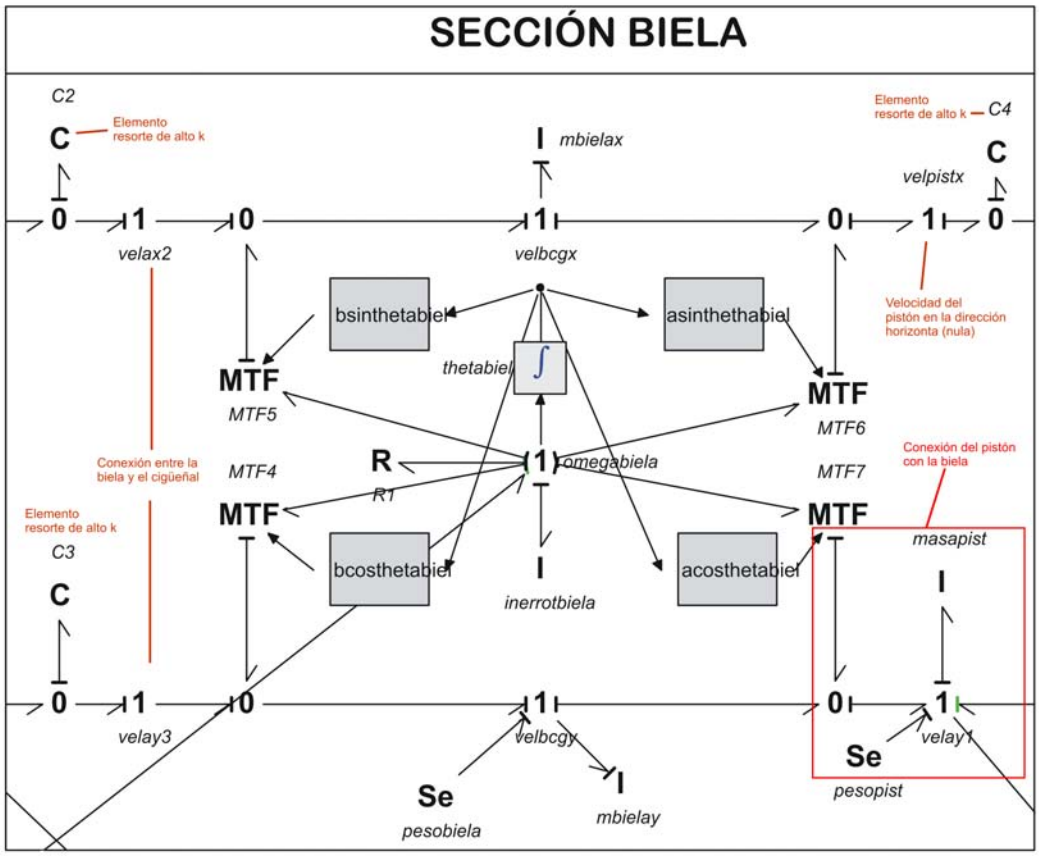

Figura 4-23.: Sección biela del modelo en gráficos de unión.

de una alta constante de elasticidad con la misma función que la mencionada en la sección cigüeñal. La junta tipo **1** denominada *velpistx* representa la velocidad del pistón en la dirección horizontal que obviamente debe ser nula. Esta junta confluye a una unión **0** en la que se asocia el elemento capacitor **C4** el cual también representa un resorte mecánico de alta constante de elasticidad. La junta tipo **1** denominada *velay1* representa la conexión física entre el pistón y la biela. Allí confluyen una fuente de esfuerzo *pesopist* que representa el peso del pistón y el elemento inercia *masapist* que representa la masa del pistón. Los anteriores detalles están resaltados en la Figura **4-23**.

En la Figura **4-24** se presenta en detalle la sección pistón del modelo. La salida del transformador (**TF**) denominado *fuerzapistón* representa la fuerza aplicada sobre el pistón producto del incremento en la presión en la cámara del motor como resultado del proceso de combustión al cual se somete el fluido de trabajo. Se requiere un elemento transformador para convertir la presión en fuerza. La presión multiplicada por el área del pistón produce la fuerza resultante sobre el pistón. Por lo tanto, el módulo del trasformador estará representado por el valor de área del piston del motor en particular.

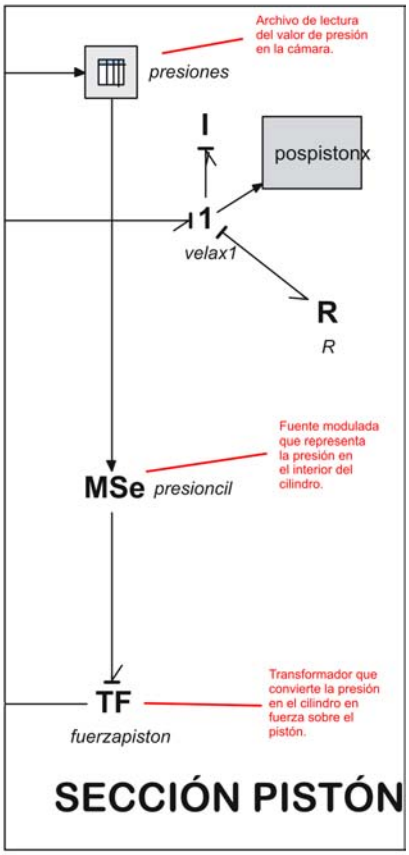

Figura 4-24.: Sección pistón del modelo en gráficos de unión.

La presión en el pistón esta representada por una fuente de esfuerzo denominada *presióncil*. Esta fuente de esfuerzo es una fuente cuyo valor de salida es variable en función de un parámetro, por lo tanto se considera una fuente de esfuerzo modulada. La salida de esta fuente de esfuerzo ingresa al transformador para ser convertida en la fuerza aplicada sobre el pistón.
Para el caso específico de este modelo, esta presión se obtuvo a partir de un modelo teórico que permite simular las condiciones de presión en la cámara de un motor a partir de la denominada función de Vibe. Los valores numéricos dados por el modelo mencionado, se almacenan en un archivo de datos que el programa de simulación lee en función de un parámetro que para este caso es el ángulo de rotación del cigüeñal. Nótese que este parámetro es fácil de obtener ya que el ángulo de giro del cigüeñal ha sido obtenido con anterioridad por medio del bloque integrador de la sección cigüeñal. En la Figura **4-24** se muestran estos detalles junto con un objeto propio del programa 20-Sim denominado *presiones*. Este elemento corresponde al comando mediante el cual el programa lee el archivo donde están almacenados los datos de presión en el cilindro correspondientes a un ángulo de cigüeñal específico.

5. Resultados del modelo.

5.1. Comparación de resultados con el modelo analítico.

En la figura **5-1** se muestran los resultados para la fuerza en la bancada del motor arrojados por el programa 20-Sim® el cual se alimentó con el gráfico propuesto. Esta fuerza es la que debe atenuar el sistema de anclajes del motor. El motor simulado correponde a un motor comercial de la casa Norteamericana Briggs Stratton cuyos datos se encuentran consignados en el Anexo A. La simulación se hace para una velocidad de giro de 3000 rpm. Este modelo contiene 62 ecuaciones, 56 variables, 2 estados independientes y 4 estados dependientes. Se utiliza para la solución de este sistema un método de diferencias finitas hacia atrás.
En la Figura **5-2** se muestra los resultados arrojados por el programa Matlab® el cual se alimentó con la ecuación obtenida de un modelo analítico para el mismo motor de estudio y bajo las mismas condiciones de funcionamiento.

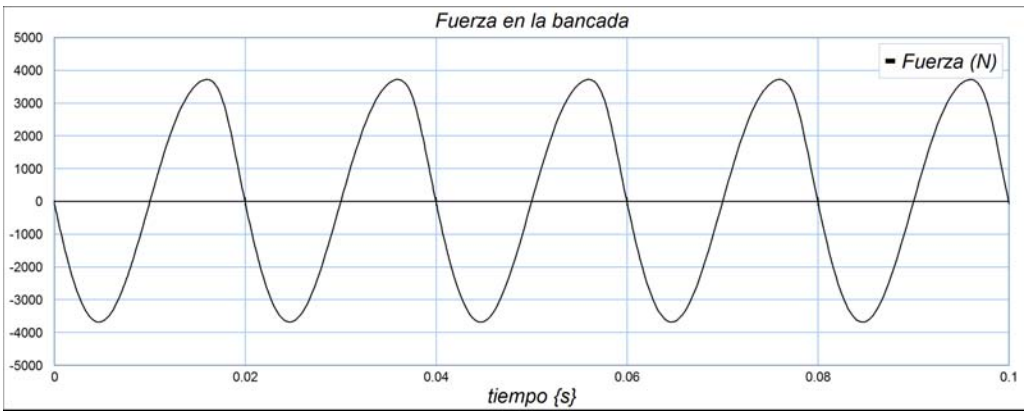

Figura 5-1.: Resultados del modelos arrojados por el programa 20-sim.

Como se puede apreciar en las Figuras **5-1** y **5-2** ambos modelos entregan una misma forma sinusoidal para la fuerza sobre la bancada. Esta forma tiene el mismo periodo dado que están obtenidas para una misma velocidad de rotación del cigüeñal, pero la gráfica entregada por 20-Sim presenta un pequeño corrimiento en el tiempo de 0.004 segundos. En cuanto a los valores de fuerza el modelo por gráficos de unión entrega unos valores de fuerza pico mayores (alrededor de 1000 N) con respecto al modelo analítico. A pesar de estas diferencias el modelo por gráficos de unión se acerca bastante bien al modelo analítico y sus diferencias en valores pueden atribuirse a las aproximaciones tenidas en cuenta en la construcción este último

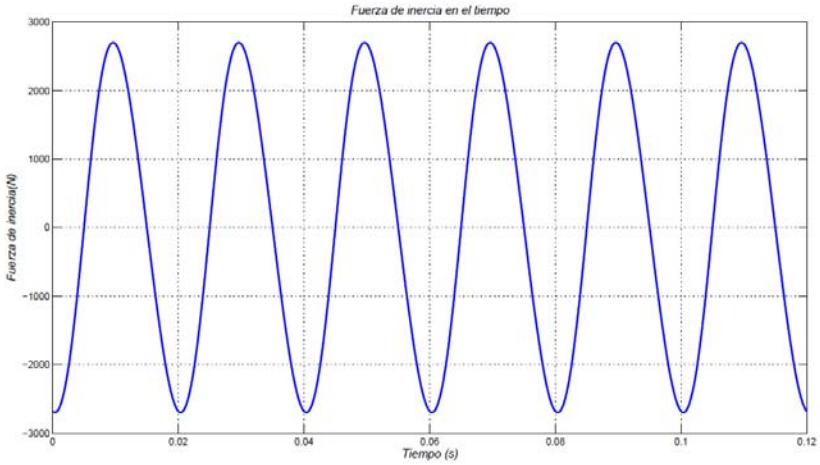

Figura 5-2.: Resultados arrojados por el programa Matlab.

las cuales son innecesarias en su aplicación para el caso del modelo construido con gráficos de unión. Por lo anterior podría considerarse que los resultados arrojados por un modelo analítico resultan conservadores por sus simplificaciones con respecto al presentado en este trabajo.

5.2. Resultados del modelo con función de presión.

El modelo comparado con el modelo analítico fue realizado sin tener en cuenta la aplicación de la fuerza sobre el pistón. Como se vio en el análisis cinetostático del motor, la fuerza sobre el pistón es una fuerza interna al mecanismo y por lo tanto se cancela. En el modelo en gráficos de unión comparado, simplemente se obliga a girar al mecanismo por medio de una fuente de flujo que representa una velocidad angular fija para el cigüeñal.

En el modelo propuesto en este trabajo la fuerza sobre el pistón se toma como fenómeno desencadenante del movimiento en el mecanismo y por lo tanto es tenida en cuenta, como se vio en la parte de construcción del modelo.

A continuación se presentan los resultados entregados por el modelo teniendo en cuenta la función de presión en el cilindro. Dicha presión fue obtenida con modelos teóricos utilizando la denominada función de Vibe. Estos modelos han sido desarrollados por el Profesor Ing Juan Miguel Mantilla, al cual se le solicitó el modelamiento de este proceso de combustión para un motor comercial tomado como modelo. Los datos del motor y los resultados arrojados por esta simulación se encuentran consignados en el Anexo A de este trabajo.

En cada uno de los siguientes apartados, se indicará las condiciones que se están simulando

en el motor como fallas o alteraciones en Su funcionamiento.

5.2.1. Comportamiento con el cigüeñal desbalanceado.

El cigüeñal gira en torno al muñón de bancada y se balancea por medio de contrapesos. Esta situación de balanceo dinámico esta representada por la coincidencia del centro de gravedad del componente con el punto donde intersecta el eje de rotación de elemento al plano de movimiento. Los cigüeñales que en la práctica cumplen con esta condición dinámica se denominan *cigúeñales equilibrados*.
En algunas situaciones esta situación no se cumple. Algunas veces se admite un pequeño corrimiento del centro de gravedad con el fin de atenuar las fuerzas de bancada en una dirección preferente, lo que indicaría que el cigüeñal es *sobreequilibrado* [38]. En otras situaciones por cuestiones de mantenimiento la posición del centro de gravedad puede verse alterada; por ejemplo, en el caso de un recambio del componente. Este cambio en el centro de gravedad puede alterar el comportamiento vibratorio del dispositivo y el modelo lo muestra.

La condición de balanceo del cigüeñal se controla en el modelo con el parámetro **b** correspondiente a la longitud existente entre el punto de conexión del cigüeñal con el bloque de cilindros (**muñón de bancada**) y el centro de gravedad del elemento. Con un parámetro **b** nulo (0) se consideraría que el centro de gravedad coincide con el muñón de bancada y el componente se encuentra balanceado. Esta situación es la que se ve reflejada en las gráficas presentadas en la Figura **5-3**.

En la Figura **5-3** se encuentran los datos arrojados por el modelo. Se aprecian cuatro gráficas en función del tiempo. De arriba a bajo se muestran el ángulo de cigüeñal y debajo las fuerzas sobre la bancada del motor en las direcciones x y y y el ángulo de torsión del cigüeñal. Esta simulación esta realizada para una velocidad de rotación del motor de 2500 rpm que es la condición de máximo torque.

Se simula ahora una condición de desbalanceo del cigüeñal. Para ello se tomará entonces ahora un valor del parámetro **b** no nulo y positivo. Para este caso se está considerando un desbalanceo del cigüeñal de 5 mm lo cual en términos prácticos es relativamente grande. Se simulan las fuerzas de bancada y el ángulo de torsión del cigüeñal para 2500 rpm. Los datos arrojados por el modelo para estas condiciones se presentan en la Figura **5-4**.

En la Figura **5-5** se muestran superpuestas las gráficas de fuerzas de bancada en x y en y. Las curvas en negro representan las fuerzas de bancada para el cigüeñal balanceado. En rojo están las curvas correspondientes al caso del cigüeñal desbalanceado. Nótese en las gráficas el incremento en las fuerzas de bancada en la dirección x de casi 20 veces. En la dirección y

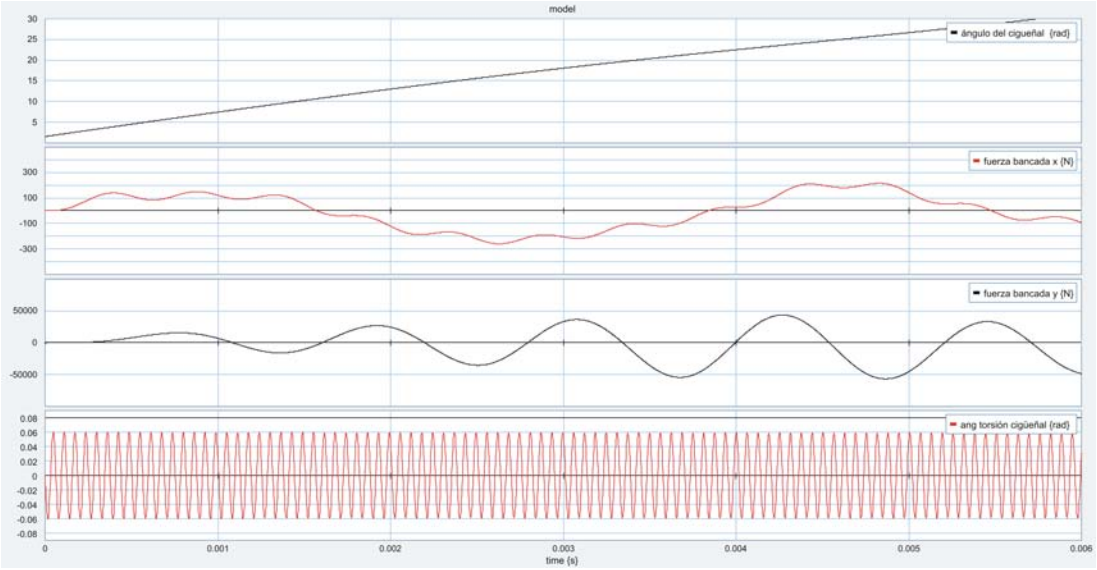

Figura 5-3.: Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph de la fuerza de bancada y del ángulo de torsión para cigüeñal equilibrado.

en incremento no es tan marcado aunque también se tiene aumento de la fuerza.

En la Figura **5-6** se encuentran superpuestas las gráficas de las simulaciones para el cigüeñal desbalanceado (en negro) y el cigüeñal sobreequilibrado (en rojo). Nótese el desfase de 180° entre entre una y otra gráfica.

5.2.2. Variación de parámetros dinámicos de otros componentes

En la Figura **5-7** se muestra las fuerzas de bancada para el motor con cigüeñal balanceado y sin alterar otro componente (en negro). Se sobreponen los resultados (en rojo) para el caso de una reducción en el volante de 10 veces en su momento de inercia.

Esta situación se presenta en la práctica cuando se realizan trucajes de motor con el fin de aumentar sus prestaciones con fines de competición. También puede darse como resultado de reparaciones del componente. Nótese el gran incremento en valor del ángulo de torsión del cigüeñal con una reducción en la frecuencia de la oscilación torsional. Lo anterior explicaría el porque estas variaciones en el volante podrían llevar a la fractura del cigüeñal.

En la Figura **5-8** se muestran los resultados en negro para el motor sin alteraciones y en rojo para un incremento en la masa del pistón. Lo anterior es bastante frecuente en la práctica cuando se hacen reparaciones y se introducen pistones en sobremedida, por lo general un

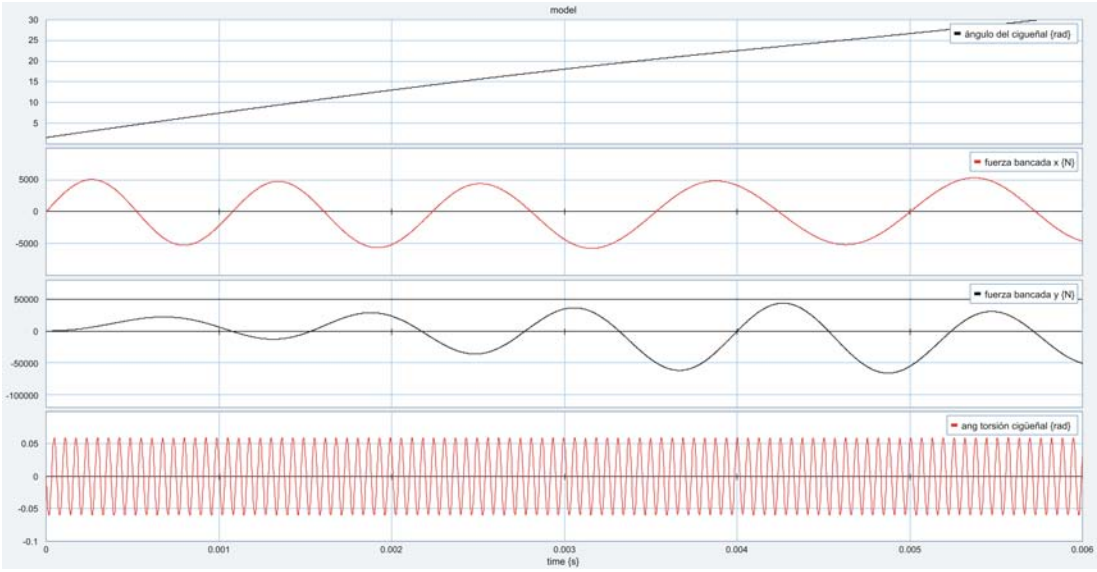

Figura 5-4.: Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con el cigüeñal desbalanceado.

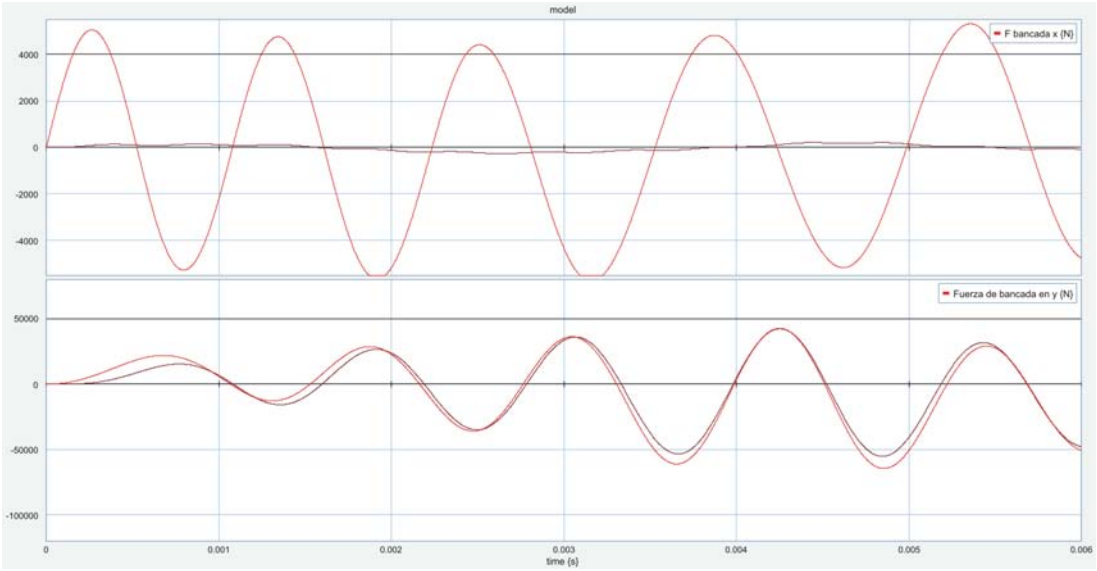

Figura 5-5.: Simulación en 20-sim de las fuerzas de bancada con el cigüeñal balanceado (negro) y sobreequilibrado (rojo).

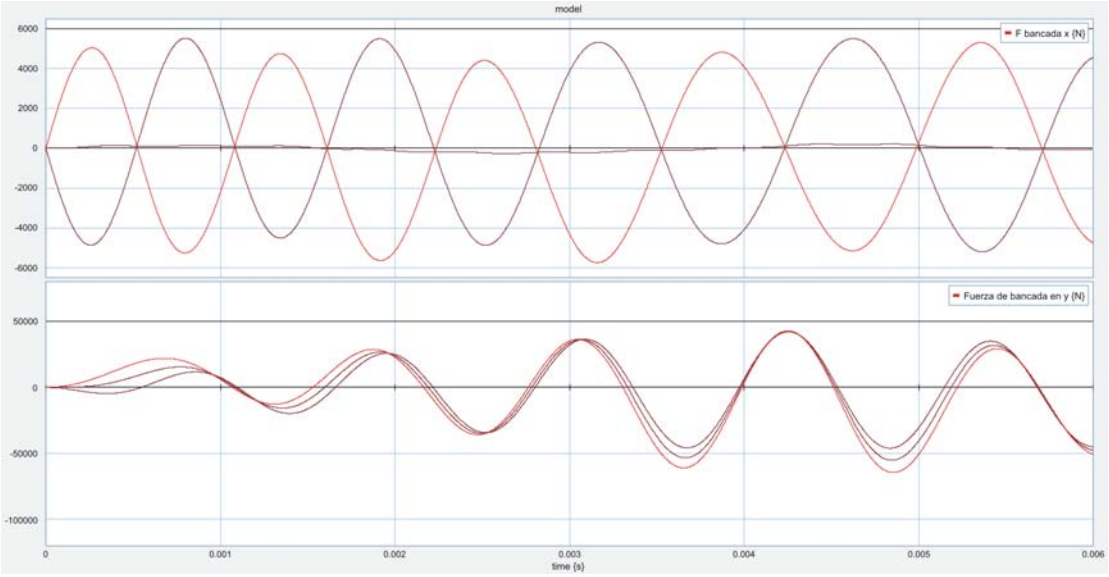

Figura 5-6.: Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con el cigüeñal sobreequilibrado.

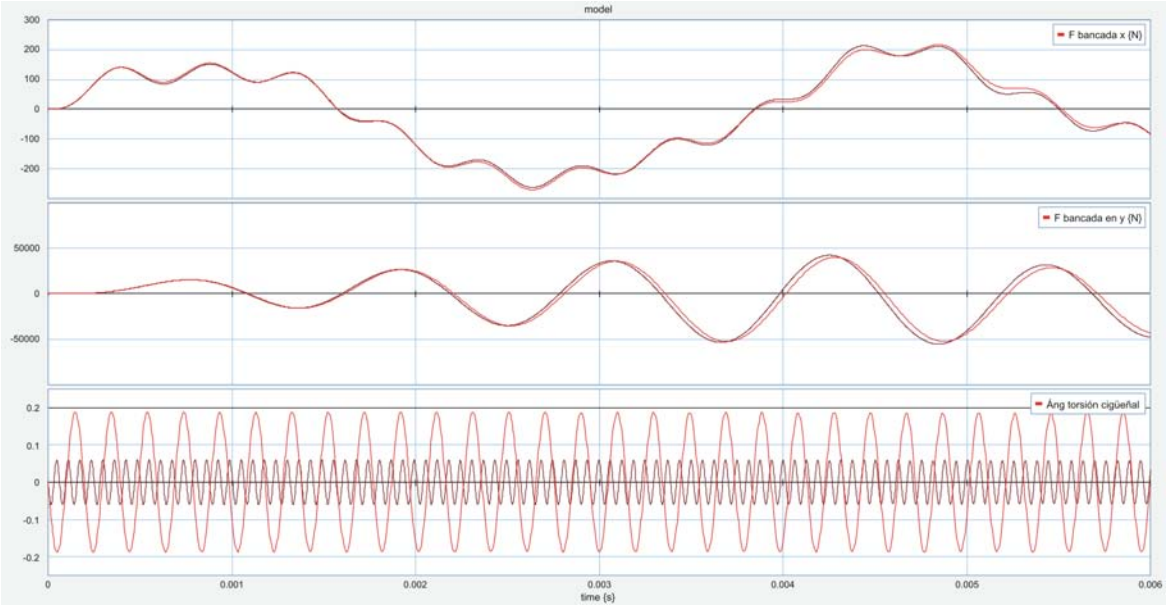

Figura 5-7.: Simulación en 20-sim para una reducción en el momento de inercia del volante.

poco más grades. No obstante el incremento propuesto es de 186 gr que es relativamente grande. Sin embargo nótese la variación en la fuerzas de bancada, sobretodo para el la dirección y.

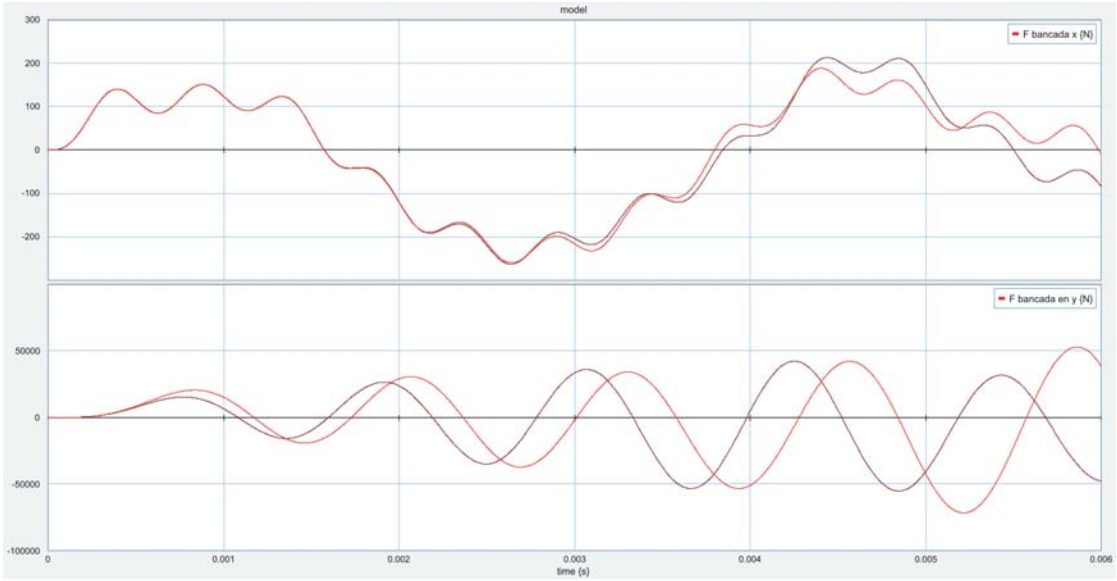

Figura 5-8.: Simulación en 20-sim para un aumento en la masa del pistón.

En la Figura **5-9** se muestran los resultados en negro para el motor sin alteraciones y en rojo para una variación en la posición del centro de gravedad de la biela. Esta situación se puede dar en la practica cuando se reemplazan componentes o si la biela es mecanizada para garantizar su circularidad en los muñones. La variación del centro de gravedad es de 10 mm. Nótese qué según el modelo existe una variación en la dirección en x mas no en la dirección en y.

5.2.3. Variación de la función de presión

En la Figura **5-10** se presentan los resultados de una simulación realizada con el modelo teniendo en cuanta una variación arbitraria de la función de presión. Nótese que según el modelo las fuerzas de bancada se reducen y también el ángulo de torsión. Sin embargo la forma de las curvas cambia drásticamente. En las Figuras **5-11** y **5-12** se muestran las curvas de presión normal y anormal respectivamente con las que se alimento al modelo.

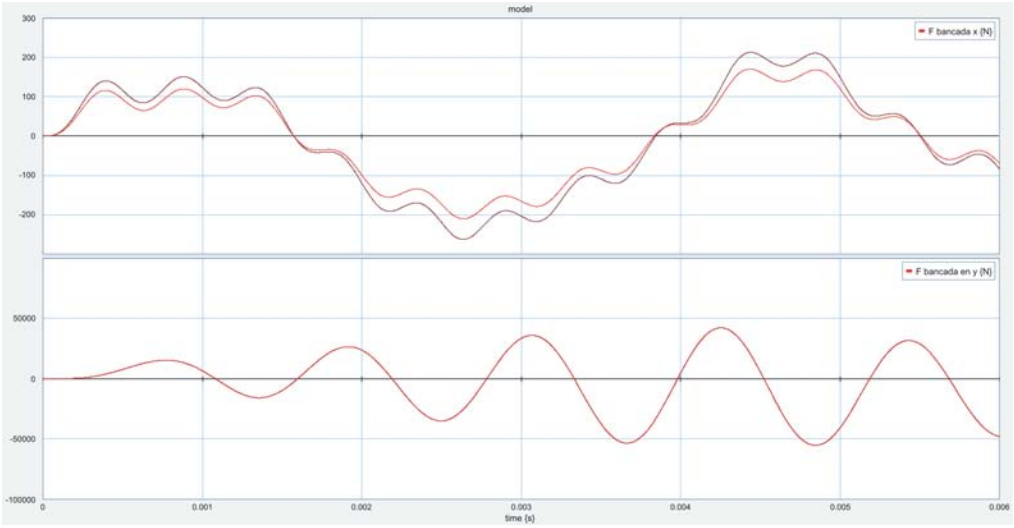

Figura 5-9.: Simulación en 20-sim para una variación el a posición del centro de gravedad de la biela.

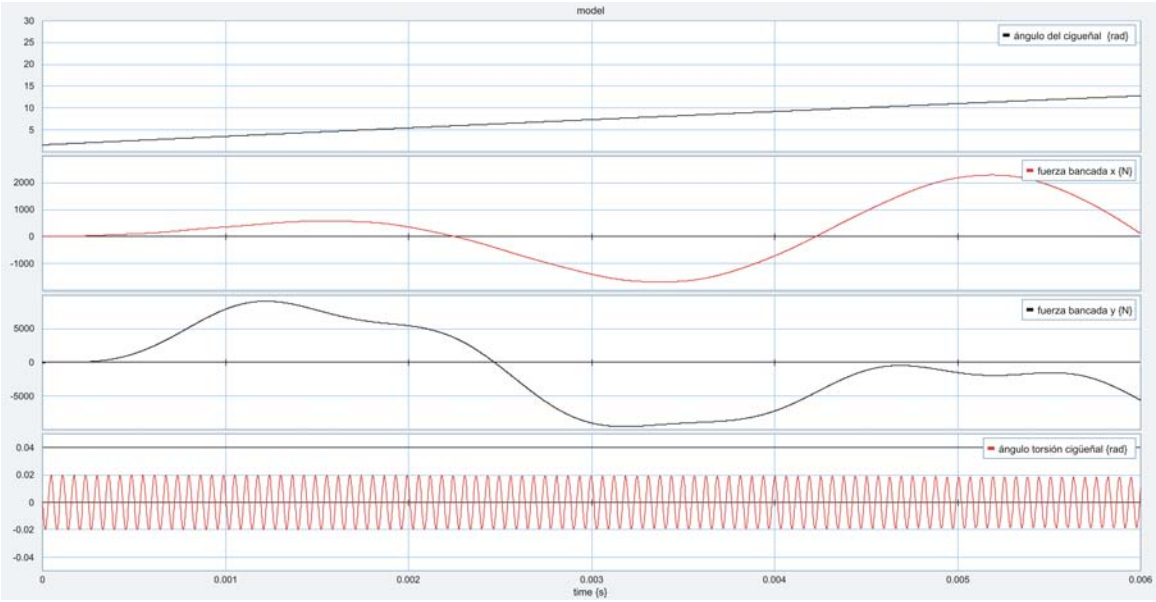

Figura 5-10.: Simulación en 20-sim con el modelo en bong graph con una función de presión anormal.

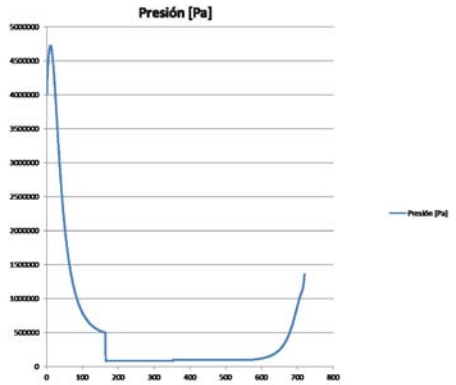

Figura 5-11.: Función de presión normal con la que se alimentó al modelo.

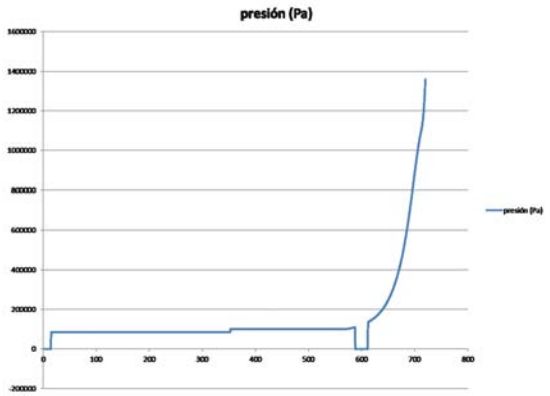

Figura 5-12.: Función de presión anormal con la que se alimentó al modelo.

6. Conclusiones y trabajos futuros

El realizar un modelo para un motor de combustión interna en funcionamiento implica multiples dificultades. La más importante es la gran cantidad de sistemas y subsistemas que pueden influir en el comportamiento vibratorio del motor. Sin embargo la técnica de gráficos de unión parte de un concepto sencillo (movimiento plano general de un cuerpo rígido) y propone un modelo para el mecanismo principal que por lo menos es susceptible a variaciones que pueden interpretarse como modificaciones en el funcionamiento de la máquina.

La técnica de gráficos de unión ofrece una alternativa interesante para la construcción de este tipo de modelos acoplados en una dirección. Permite solucionar de forma sencilla y metódica problemas como la descripción del movimiento complejo de un eslabón como la biela de un motor de combustión interna, sin tener que acudir a modelos dinámicos equivalentes con las consecuentes simplificaciones que esto conlleva.

También los gráficos de unión permiten incorporar la presión en el cilindro como fenómeno importante dentro del intercambio energético. No obstante fue necesario partir de los datos de un modelo teórico ya desarrollado para alimentar el modelo propuesto. Esta posibilidad permitiría también alimentar al modelo con datos reales (experimentales) para acercar más los resultados del modelo a una realidad experimental.

El modelo predijo variación en la característica vibratoria del dispositivo en situaciones que implicaban variación en las características dinámicas de los componentes, lo cual es de suponerse. Estas variaciones son susceptibles de obtenerse en la práctica dada las situaciones de reparaciones y cambio de componentes a los cuales están sometidos estos dispositivos. Una aplicación de este modelo podría darse en el caso de control de calidad en motores reparados, los cuales en función de cambio de su característica vibratoria se les podría detectar problemas. La validación del modelo a nivel experimental podría llevarse a cabo de una manera sencilla induciendo estas variaciones en los componentes que como se vio consisten simplemente en cambio en la posición de sus centros de gravedad, o en sus características inerciales de masa y momentos de masa.

En el caso de la simulación para variaciones en la presión en el cilindro, la modificación en la curva de presión fue arbitraria. Para una comprobación experimental se deberá determinar la posibilidad de simular con un modelo teórico un defecto del proceso de combustión que pueda

llevarse a cabo. La otra posibilidad surgiría de alimentar el modelo con una curva de presión en cilindro modificada y controlada experimentalmente para hacer este tipo de verificación. Sin embargo el diseño experimental para realizar este procedimiento puede resultar bastante más complejo que el propuesto para de caso de la validación en las modificaciones dinámicas de los componentes. De todo lo anterior se propone entonces que un trabajo futuro sea la validación experimental de este modelo, partiendo inicialmente de un diseño experimental detallado.

La técnica de gráficos de unión presenta gran versatilidad. Es importante destacar que aun cuando el sentido inicial del modelo fue la caracterización vibratoria de la máquina, este modelo puede ser utilizado para la predicción de otras necesidades. Nótese que fue sencillo en determinar vibraciones torsionales que inicialmente no estaban contempladas. Así pues este modelo, con algunas adiciones podría utilizarse para analizar entrega de potencia, comportamiento transitorio en variaciones de carga, diseño de anclajes activos y otras muchas aplicaciones.

La técnica también permite introducir características disipativas como la fricción en los cojinetes o entre el pistón y su cilindro, lo cual se hace simplemente con la introducción de puertas resistencia las cuales incluso pueden ser moduladas, para la solución de modelos no lineales. Existen variedad de trabajos en el campo de la tribología en motores que son no lineales y podrían alimentar el modelo propuesto y llevar a cabo una validación experimental interesante.

En el caso de las vibraciones torsionales se propuso modelar el cigüeñal como un sistema de dos grados de libertad y considerando su elasticidad como lineal. Cabe anotar que esta es una aproximación bastante gruesa y en el estado actual de la técnica el modelamiento del cigüeñal se hace por medio de elementos finitos. Se puede proponer también trabajos que involucren los resultados de estos modelos con el modelo propuesto.

La posibilidad de encadenar submodelos desarrollados que brinda la técnica de gráficos de unión, plantea la posibilidad de unir modelos de los distintos subsistemas del motor realizados por aparte para construir un modelo vibratorio más general.

Finalmente, una ventaja inherente a la utilización de los gráficos de unión para este mecanismo es la facilidad en la migración hacia un modelo para un motor policilíndrico, ya que esto se lograría simplemente repitiendo este modelo para cada uno de los cilindros componentes, introduciendo también las características elásticas del cigüeñal, lo cual permitiría predecir el comportamiento vibratorio torsional de este, el cual puede ser analizado para la determinación de fallas de funcionamiento ocasionadas por anormalidades en el proceso de combustión que pueden ser mas fáciles de hallar en este modelo. Partiendo de este modelo de

motor policilíndrico puede analizarse no solamente el comportamiento vibratorio del motor no solamente en un plano de movimiento, sino a nivel espacial. También se puede en una siguiente fase de este desarrollo el considerar el bloque de cilindros como un eslabón más y analizar el movimiento del mecanismo visto en un sistema de referencia ubicado en la cimentación del motor. Lo anterior puede servir como base para el desarrollo de un modelo totalmente acoplado.

A. Anexo:Datos técnicos del motor.

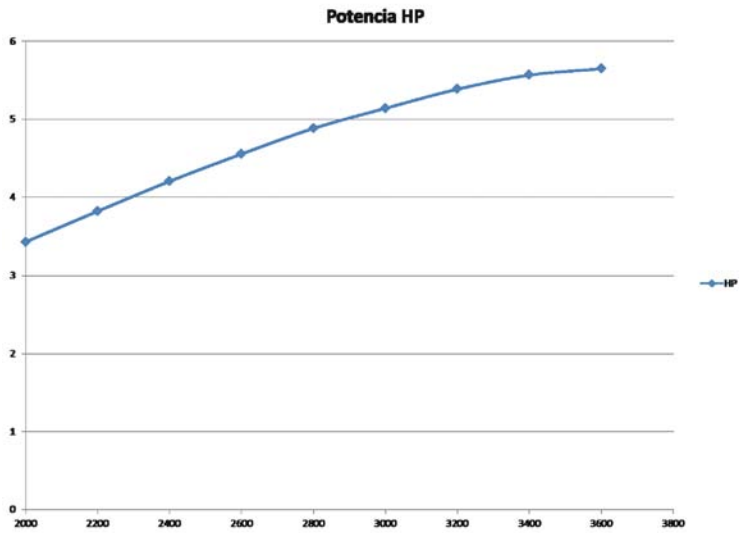

Figura A-1.: Curva característica de potencia del motor modelado.

Tabla A-1.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
0,000	4023868,996	0,436	3946229,075	0,873	2085523,191
0,017	4023868,996	0,454	3859760,309	0,890	2033358,282
0,035	4252597,536	0,471	3772512,691	0,908	1982871,270
0,052	4353793,062	0,489	3684920,759	0,925	1934017,206
0,070	4443366,730	0,506	3597371,156	0,942	1886750,878
0,087	4520863,669	0,524	3510204,612	0,960	1841027,200
0,105	4585989,780	0,541	3423718,420	0,977	1796801,286
0,122	4638609,689	0,559	3338169,255	0,995	1754028,601
0,140	4678741,246	0,576	3253776,201	1,012	1712665,100
0,157	4706546,873	0,593	3170723,896	1,030	1672667,338
0,175	4722322,177	0,611	3089165,691	1,047	1633992,560
0,192	4726482,325	0,628	3009226,760	1,065	1596598,780
0,209	4719546,736	0,646	2931007,100	1,082	1560444,845
0,227	4702122,656	0,663	2854584,382	1,100	1525490,477
0,244	4674888,192	0,681	2780016,616	1,117	1491696,324
0,262	4638575,338	0,698	2707344,635	1,134	1459023,979
0,279	4593953,471	0,716	2636594,350	1,152	1427436,013
0,297	4541813,736	0,733	2567778,815	1,169	1396895,982
0,314	4482954,649	0,750	2500900,080	1,187	1367368,443
0,332	4418169,173	0,768	2435950,841	1,204	1338818,958
0,349	4348233,438	0,785	2372915,914	1,222	1311214,090
0,367	4273897,188	0,803	2311773,529	1,239	1284521,404
0,384	4195875,987	0,820	2252496,466	1,257	1258709,459
0,401	4114845,135	0,838	2195053,048	1,274	1233747,797
0,419	4031435,204	0,855	2139407,999	1,292	1209606,930

Tabla A-2.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
1,309	1186258,329	1,745	793222,733	2,182	612413,864
1,326	1163674,403	1,763	783031,218	2,199	607597,758
1,344	1141828,485	1,780	773286,081	2,217	602919,014
1,361	1120694,809	1,798	763693,536	2,234	598373,824
1,379	1100248,495	1,815	754521,038	2,251	593958,520
1,396	1080465,522	1,833	745488,415	2,269	589669,574
1,414	1061322,710	1,850	736851,354	2,286	585503,585
1,431	1042797,699	1,868	728342,580	2,304	581457,280
1,449	1024868,922	1,885	720206,590	2,321	577527,507
1,466	1007515,588	1,902	712188,322	2,339	573711,233
1,484	990717,653	1,920	704521,640	2,356	570005,536
1,501	974455,802	1,937	696963,048	2,374	566407,604
1,518	958711,425	1,955	689736,304	2,391	562914,729
1,536	943466,595	1,972	682608,871	2,409	559524,307
1,553	928704,043	1,990	675794,898	2,426	556233,828
1,571	914345,322	2,007	669072,232	2,443	553040,879
1,588	900436,586	2,025	662645,893	2,461	549943,140
1,606	886961,896	2,042	656395,918	2,478	546938,375
1,623	873905,951	2,059	650324,934	2,496	544024,436
1,641	861254,059	2,077	644427,581	2,513	541199,257
1,658	848992,113	2,094	638698,699	2,531	538460,853
1,676	837106,566	2,112	633133,321	2,548	535807,313
1,693	825584,411	2,129	627726,665	2,566	533236,803
1,710	814413,154	2,147	622474,130	2,583	530747,562
1,728	803580,794	2,164	617371,285	2,601	528337,897

Tabla A-3.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
2,618	526006,185	3,054	85113,000	3,491	85113,000
2,635	523750,866	3,072	85113,000	3,508	85113,000
2,653	521570,448	3,089	85113,000	3,526	85113,000
2,670	519463,498	3,107	85113,000	3,543	85113,000
2,688	517428,645	3,124	85113,000	3,560	85113,000
2,705	515464,574	3,142	85113,000	3,578	85113,000
2,723	513570,031	3,159	85113,000	3,595	85113,000
2,740	511743,815	3,176	85113,000	3,613	85113,000
2,758	509984,778	3,194	85113,000	3,630	85113,000
2,775	508291,826	3,211	85113,000	3,648	85113,000
2,793	506663,917	3,229	85113,000	3,665	85113,000
2,810	505100,058	3,246	85113,000	3,683	85113,000
2,827	503599,304	3,264	85113,000	3,700	85113,000
2,845	502160,760	3,281	85113,000	3,718	85113,000
2,862	500783,574	3,299	85113,000	3,735	85113,000
2,880	85113,000	3,316	85113,000	3,752	85113,000
2,897	85113,000	3,334	85113,000	3,770	85113,000
2,915	85113,000	3,351	85113,000	3,787	85113,000
2,932	85113,000	3,368	85113,000	3,805	85113,000
2,950	85113,000	3,386	85113,000	3,822	85113,000
2,967	85113,000	3,403	85113,000	3,840	85113,000
2,985	85113,000	3,421	85113,000	3,857	85113,000
3,002	85113,000	3,438	85113,000	3,875	85113,000
3,019	85113,000	3,456	85113,000	3,892	85113,000
3,037	85113,000	3,473	85113,000	3,910	85113,000

Tabla A-4.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
3,927	85113,000	4,363	85113,000	4,800	85113,000
3,944	85113,000	4,381	85113,000	4,817	85113,000
3,962	85113,000	4,398	85113,000	4,835	85113,000
3,979	85113,000	4,416	85113,000	4,852	85113,000
3,997	85113,000	4,433	85113,000	4,869	85113,000
4,014	85113,000	4,451	85113,000	4,887	85113,000
4,032	85113,000	4,468	85113,000	4,904	85113,000
4,049	85113,000	4,485	85113,000	4,922	85113,000
4,067	85113,000	4,503	85113,000	4,939	85113,000
4,084	85113,000	4,520	85113,000	4,957	85113,000
4,102	85113,000	4,538	85113,000	4,974	85113,000
4,119	85113,000	4,555	85113,000	4,992	85113,000
4,136	85113,000	4,573	85113,000	5,009	85113,000
4,154	85113,000	4,590	85113,000	5,027	85113,000
4,171	85113,000	4,608	85113,000	5,044	85113,000
4,189	85113,000	4,625	85113,000	5,061	85113,000
4,206	85113,000	4,643	85113,000	5,079	85113,000
4,224	85113,000	4,660	85113,000	5,096	85113,000
4,241	85113,000	4,677	85113,000	5,114	85113,000
4,259	85113,000	4,695	85113,000	5,131	85113,000
4,276	85113,000	4,712	85113,000	5,149	85113,000
4,294	85113,000	4,730	85113,000	5,166	85113,000
4,311	85113,000	4,747	85113,000	5,184	85113,000
4,328	85113,000	4,765	85113,000	5,201	85113,000
4,346	85113,000	4,782	85113,000	5,219	85113,000

Tabla A-5.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
5,236	85113,000	5,672	85113,000	6,109	85113,000
5,253	85113,000	5,690	85113,000	6,126	85113,000
5,271	85113,000	5,707	85113,000	6,144	85113,000
5,288	85113,000	5,725	85113,000	6,161	100000,000
5,306	85113,000	5,742	85113,000	6,178	100000,000
5,323	85113,000	5,760	85113,000	6,196	100000,000
5,341	85113,000	5,777	85113,000	6,213	100000,000
5,358	85113,000	5,794	85113,000	6,231	100000,000
5,376	85113,000	5,812	85113,000	6,248	100000,000
5,393	85113,000	5,829	85113,000	6,266	100000,000
5,411	85113,000	5,847	85113,000	6,283	100000,000
5,428	85113,000	5,864	85113,000	6,301	100000,000
5,445	85113,000	5,882	85113,000	6,318	100000,000
5,463	85113,000	5,899	85113,000	6,336	100000,000
5,480	85113,000	5,917	85113,000	6,353	100000,000
5,498	85113,000	5,934	85113,000	6,370	100000,000
5,515	85113,000	5,952	85113,000	6,388	100000,000
5,533	85113,000	5,969	85113,000	6,405	100000,000
5,550	85113,000	5,986	85113,000	6,423	100000,000
5,568	85113,000	6,004	85113,000	6,440	100000,000
5,585	85113,000	6,021	85113,000	6,458	100000,000
5,603	85113,000	6,039	85113,000	6,475	100000,000
5,620	85113,000	6,056	85113,000	6,493	100000,000
5,637	85113,000	6,074	85113,000	6,510	100000,000
5,655	85113,000	6,091	85113,000	6,528	100000,000

Tabla A-6.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
6,545	100000,000	6,981	100000,000	7,418	100000,000
6,562	100000,000	6,999	100000,000	7,435	100000,000
6,580	100000,000	7,016	100000,000	7,453	100000,000
6,597	100000,000	7,034	100000,000	7,470	100000,000
6,615	100000,000	7,051	100000,000	7,487	100000,000
6,632	100000,000	7,069	100000,000	7,505	100000,000
6,650	100000,000	7,086	100000,000	7,522	100000,000
6,667	100000,000	7,103	100000,000	7,540	100000,000
6,685	100000,000	7,121	100000,000	7,557	100000,000
6,702	100000,000	7,138	100000,000	7,575	100000,000
6,720	100000,000	7,156	100000,000	7,592	100000,000
6,737	100000,000	7,173	100000,000	7,610	100000,000
6,754	100000,000	7,191	100000,000	7,627	100000,000
6,772	100000,000	7,208	100000,000	7,645	100000,000
6,789	100000,000	7,226	100000,000	7,662	100000,000
6,807	100000,000	7,243	100000,000	7,679	100000,000
6,824	100000,000	7,261	100000,000	7,697	100000,000
6,842	100000,000	7,278	100000,000	7,714	100000,000
6,859	100000,000	7,295	100000,000	7,732	100000,000
6,877	100000,000	7,313	100000,000	7,749	100000,000
6,894	100000,000	7,330	100000,000	7,767	100000,000
6,912	100000,000	7,348	100000,000	7,784	100000,000
6,929	100000,000	7,365	100000,000	7,802	100000,000
6,946	100000,000	7,383	100000,000	7,819	100000,000
6,964	100000,000	7,400	100000,000	7,837	100000,000

Tabla A-7.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
7,854	100000,000	8,290	100000,000	8,727	100000,000
7,871	100000,000	8,308	100000,000	8,744	100000,000
7,889	100000,000	8,325	100000,000	8,762	100000,000
7,906	100000,000	8,343	100000,000	8,779	100000,000
7,924	100000,000	8,360	100000,000	8,796	100000,000
7,941	100000,000	8,378	100000,000	8,814	100000,000
7,959	100000,000	8,395	100000,000	8,831	100000,000
7,976	100000,000	8,412	100000,000	8,849	100000,000
7,994	100000,000	8,430	100000,000	8,866	100000,000
8,011	100000,000	8,447	100000,000	8,884	100000,000
8,029	100000,000	8,465	100000,000	8,901	100000,000
8,046	100000,000	8,482	100000,000	8,919	100000,000
8,063	100000,000	8,500	100000,000	8,936	100000,000
8,081	100000,000	8,517	100000,000	8,954	100000,000
8,098	100000,000	8,535	100000,000	8,971	100000,000
8,116	100000,000	8,552	100000,000	8,988	100000,000
8,133	100000,000	8,570	100000,000	9,006	100000,000
8,151	100000,000	8,587	100000,000	9,023	100000,000
8,168	100000,000	8,604	100000,000	9,041	100000,000
8,186	100000,000	8,622	100000,000	9,058	100000,000
8,203	100000,000	8,639	100000,000	9,076	100000,000
8,221	100000,000	8,657	100000,000	9,093	100000,000
8,238	100000,000	8,674	100000,000	9,111	100000,000
8,255	100000,000	8,692	100000,000	9,128	100000,000
8,273	100000,000	8,709	100000,000	9,146	100000,000

Tabla A-8.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
9,163	100000,000	9,599	100000,000	10,036	102551,068
9,180	100000,000	9,617	100000,000	10,053	103032,518
9,198	100000,000	9,634	100000,000	10,071	103530,962
9,215	100000,000	9,652	100000,000	10,088	104046,777
9,233	100000,000	9,669	100000,000	10,105	104580,355
9,250	100000,000	9,687	100000,000	10,123	105132,106
9,268	100000,000	9,704	100000,000	10,140	105702,456
9,285	100000,000	9,721	100000,000	10,158	106291,847
9,303	100000,000	9,739	100000,000	10,175	106900,740
9,320	100000,000	9,756	100000,000	10,193	107529,616
9,338	100000,000	9,774	100000,000	10,210	108178,974
9,355	100000,000	9,791	100000,000	10,228	108849,333
9,372	100000,000	9,809	100000,000	10,245	109541,232
9,390	100000,000	9,826	100000,000	10,263	110255,233
9,407	100000,000	9,844	100000,000	10,280	110991,919
9,425	100000,000	9,861	100000,000	10,297	111751,897
9,442	100000,000	9,879	100000,000	10,315	112535,797
9,460	100000,000	9,896	100000,000	10,332	113344,275
9,477	100000,000	9,913	100000,000	10,350	114178,011
9,495	100000,000	9,931	100000,000	10,367	115037,714
9,512	100000,000	9,948	100396,626	10,385	115924,119
9,529	100000,000	9,966	100788,194	10,402	116837,991
9,547	100000,000	9,983	101205,139	10,420	117780,123
9,564	100000,000	10,001	101637,718	10,437	118751,342
9,582	100000,000	10,018	102086,250	10,455	119752,506

Tabla A-9.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa	rad	Pa
10,472	120784,507	10,908	160100,313	11,345	247791,385
10,489	121848,271	10,926	162398,594	11,362	253085,110
10,507	122944,761	10,943	164771,354	11,380	258566,960
10,524	124074,980	10,961	167221,287	11,397	264244,147
10,542	125239,968	10,978	169751,202	11,414	270124,135
10,559	126440,806	10,996	172364,020	11,432	276214,645
10,577	127678,620	11,013	175062,785	11,449	282523,658
10,594	128954,578	11,030	177850,670	11,467	289059,415
10,612	130269,898	11,048	180730,974	11,484	295830,415
10,629	131625,842	11,065	183707,137	11,502	302845,410
10,647	133023,725	11,083	186782,741	11,519	310113,402
10,664	134464,914	11,100	189961,514	11,537	317643,638
10,681	135950,832	11,118	193247,340	11,554	325445,594
10,699	137482,957	11,135	196644,263	11,572	333528,964
10,716	139062,827	11,153	200156,492	11,589	341903,646
10,734	140692,043	11,170	203788,412	11,606	350579,716
10,751	142372,270	11,188	207544,584	11,624	359567,407
10,769	144105,240	11,205	211429,755	11,641	368877,073
10,786	145892,756	11,222	215448,867	11,659	378519,158
10,804	147736,694	11,240	219607,058	11,676	388504,150
10,821	149639,007	11,257	223909,673	11,694	398842,528
10,838	151601,727	11,275	228362,269	11,711	409544,710
10,856	153626,970	11,292	232970,621	11,729	420620,981
10,873	155716,938	11,310	237740,731	11,746	432081,414
10,891	157873,923	11,327	242678,829	11,764	443935,790

Tabla A-10.: Datos de función de presión utilizada en el modelo.(Continuación)

ángulo	presión	ángulo	presión
rad	Pa	rad	Pa
11,781	456193,491	12,217	892415,028
11,798	468863,391	12,235	912701,236
11,816	481953,728	12,252	932751,602
11,833	495471,969	12,270	952478,489
11,851	509424,647	12,287	971789,607
11,868	523817,193	12,305	990588,651
11,886	538653,744	12,322	1008776,072
11,903	553936,938	12,339	1026249,995
11,921	569667,689	12,357	1042907,273
11,938	585844,940	12,374	1058644,662
11,956	602465,407	12,392	1073360,113
11,973	619523,298	12,409	1086954,144
11,990	637010,020	12,427	1100176,806
12,008	654913,875	12,444	1113205,674
12,025	673219,738	12,462	1128977,343
12,043	691908,733	12,479	1149328,714
12,060	710957,909	12,497	1175606,219
12,078	730339,910	12,514	1208874,709
12,095	750022,659	12,531	1249970,668
12,113	769969,062	12,549	1299517,175
12,130	790136,736	12,566	1357926,254
12,147	810477,770		
12,165	830938,535		
12,182	851459,560		
12,200	871975,473		

Tabla A-11.: Datos técnicos del motor modelado.

Fabricante	Brigss Stratton
Referencia	Snow Series 900
Tipo	Monocilíndrico 4 tiempos OHV
Cilindrada	175 c.c.
Carrera	53 mm
Diámetro	65 mm
Masa del cigüeñal	1919.4 gr
Momento de inercia del cigüeñal	1192721.4 $gr * mm^2$
Longitud de la biela	94mm
Masa de la biela	85.75 gr
Momento de inercia de la biela	117910.32 $gr * mm^2$
Masa del pistón	321 gr

Tabla A-12.: Parámetros de simulación de la función de presión.

Combustible	isooctano.
Fracción de masa residual	0
Presión de arranque de la simulación	100000 Pa
Temperatura de arranque de la simulación	300 K
Modelo utilizado para combustión	Vibe
Modelo de admisión y escape	condiciones fijas (Bayraktar, 2005)

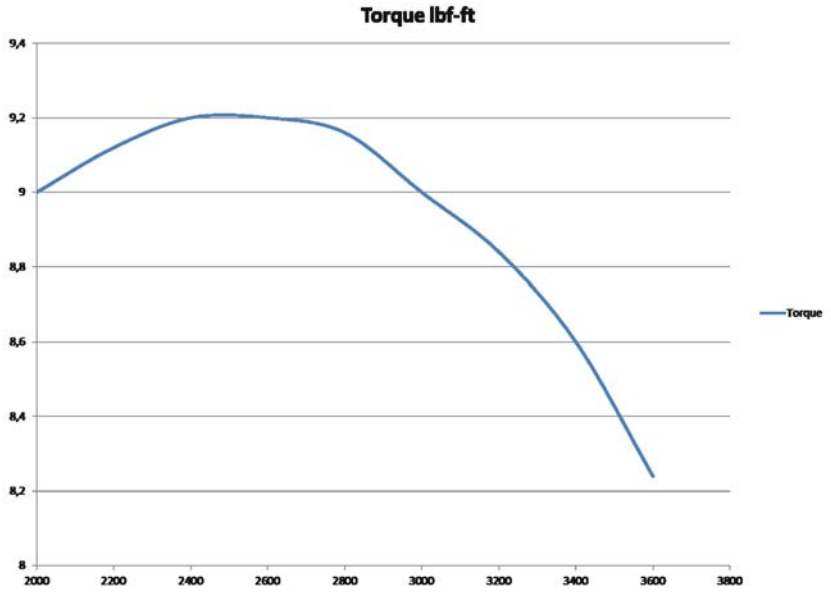

Figura A-2.: Curva característica de torque del motor modelado.

Bibliografía

[1] A., Schnurle: *Motores de combustión interna: motores de gas.* Barcelona : Labor, 1944

[2] Amirouche, F.: *Fundamentals of multibody dynamics.* Londres : Springer., 2003

[3] Azzoni, G. ; Cantoni, G. ; Minelli, G. ; Moro, D. ; Rizzoni, G. ; Ceccarani, M. ; Manzzetti, S.: Measurement of engine mishfire in the Lamborghini 533 V-12 engine using cranckshaft speed flutuations / Society of Automotive Engineers. 1995. – Informe de Investigación

[4] Ball, A.D. ; Gu, F. ; Li, W.: The condition monitoring of diesel engines using acoustics measurements / Society of Automotive Engineers. 2000. – Informe de Investigación

[5] Baránov, G.G.: *Curso de la teoría de mecanismos y máquinas.* Moscú : MIR, 1979

[6] Boysal, A. ; Rahnejat, H.: Torsional vibration analysis of a multi-body single cylinder internal combustion engine model.

[7] Carlucci, A.P. ; Chiara, F.F. ; Laforgia, D.: Analysis of the relation betwen injection parameters variation and block vibration of an internal combustion diesel engine. En: *295* (2006), p. 141–164

[8] Chun, K.M. ; Kim, K.W.: Mesurement and analysis of knock in a SI engine usig the cilynder presure and block vibrtion signals / Society of Automotive Engineers. 1994. – Informe de Investigación

[9] D., Giacossa: *Motores endotérmicos.* Barcelona : Omega, 1988

[10] D., Margolis: Modeling of two-stroke internal combustion engine dynamics using the bond graph technique / SAE. 1975 (750860). – Informe de Investigación

[11] D.C., Karnopp ; D.L., Margolis ; R.C., Rosemberg: *System dynamics.* New York : Jhon Willey, 2006

[12] Den., Hartog J.: *Mecánica de las vibraciones.* Mexico : CECSA, 1980

[13] EBSCO Publishing. (Org.): *Prediction of vibroacoustic excitation due to the timing chains of reciprocating engines.* 2003 . – 225–240 p.

[14] F., Aparicio: *Dinámica vehicular usando la técnica de Bond Graph.* Madrid : Universidad Politécnica de Madrid, 1993

[15] F., Aparicio: *Simulación de sistemas dinámicos usando la técnica de Bond Graph.* Madrid : Universidad Politécnica de Madrid, 1993

[16] Ferpi, J.: *Motores a explosión.* Buenos Aires : José Montesó, 1950

[17] G., Schneider: Manuales del ingeniero técnico. En: *Motores térmicos: otores de pistón y turbinas de gas*

[18] Ganessan, V.: *Internal combustion engine fundamentals.* Singapore : Mac Graw-Hill, 2003

[19] Griffths, W.J. ; J., Skorecki: Some anpects of a vibration of a single cylinder diesel engine.

[20] H., Engja ; K., Strand: Modeling form transcient performance simulation of diesel engines using bond grphs / I.S.M.E. Tokyo, 1983. – Informe de Investigación

[21] H., Engja ; K., Strand: Bond graph modelling of diesel engines. Selected topics / Inst. of Technology Trondheim. Norway, 1988. – Informe de Investigación

[22] H.A., Mergen ; J.J., Granda: Bond graph models and finite element models for engine valve spring transient response. En: *International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation* Universidad de Sacramento, 1997, p. 129–134

[23] Hoffman, D.F.W.: Fully coupled rigid internal combustion engine dynamics and vibration. En: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power ASME* (2001), p. 677–684

[24] Institution of Mechanical Engineers. (Org.): *Elasto-multi-body dynamics of a multicylinder internal combustion engine.* Vol. *216.* 2002 . – 281–293 p.

[25] Institution of Mechanical Engineers. (Org.): *Analysis of an in-line engine crankshaft under firing condition.* 2004 . – 345–354 p.

[26] J.B., Heywood: *Internal combustion engine fundamentals.* New York : Mc Graw Hill, 1988

[27] J.J., Granda: V-8 internal combustion engine bond graph model. A detailed modeling procedure. En: *International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation*, 1997, p. 233–238

[28] J.J., Granda ; K., Sime. *Computer aided modeling of the four stroke internal combustion engine.* California State University

[29] Jovag, M.: *Motores de automovil.* La Habana : Pueblo y educación, 1985

[30] Kalsule, D. ; Askhedkar, R. ; Sajanpawar, R.: Engne induced vibration control for a motorcycle chasis frame by right combination of finite element mathod and experimental techniques. En: *Noise and vibration conference exposition.* (1999), p. 1–9

[31] Kaul, S. ; Dhingra, A. ; Hunter, T.: Two approaches for optimun desing of motorcycle engine mount systems. En: *Engineering Optimization.* (2005), p. 307–324

[32] Lee, Y. ; Lee, W.: Dynamic analysis and control of an active engine mount system. En: *Journal automobile engineering.* (2002), p. 921–931

[33] Mabie, H. ; Orvirk, F.: *Mecanismos y dinámica de maquinaria.* Mexico : Limusa, 1993

[34] Mitzuo, I. ; Atsushi, K. ; Takayuki, A. ; Y., Ken-Ich: Prediction of estructural and kinematic cupled vibration on internal combustion engine. / Toyota R& D Laboratory. Tokyo., 2004. – Informe de Investigación

[35] M.O., Othman: Improving the performance of a multicylinder engine by spectrun analyser feedback / Journal of sound and vibration. 1989. – Informe de Investigación

[36] Pulkrabeck, W.: *Engineering fundamentals of the internal combustion engine.* New Jersey : Prentice-Hall, 1994

[37] Rahnejat, H.: *Multibody dynamics.* Londres : Professional Engineering Publishing., 1998

[38] R.L., Norton: *Diseño de maquinaria.* Mexico : Mc Graw Hill, 2003

[39] Romero, G. ; Felez, J. ; Maroto, J. ; Mera, M.: Efficient simulation of mechanism kinematics using bond graphs.

[40] Seybert, A. F. ; Hamilton, J. F. ; Hayes, P. A.: Model of piston impact and vibration for internal combustion engine noise reduction.

[41] Shabama, A.: *Dynamics of multibody systems.* Cambridge : Cambridge University Press, 2008

[42] Sohn, K. ; Honda, S. ; Okuma, M. ; Ishii, T. ; Nagamatsu, A.: Basic research on the vibration and noise of internal combustion engines. (Vibration analysis and prediction of actual responses on the whole structure).

[43] Steel, J.: A study of engine noise transmissión using statistical energy analysis. En: *Instutution of Mechanical Engineers* (1997), p. 205–213

[44] Symon, K.: *Mecánica.* Madrid : Aguilar, 1974

[45] Targ, S.: *Curso breve de mecánica teórica.* Moscú : MIR, 1973

[46] Vsorov, B.: *Manual de motores Diesel para tractores.* Moscú : MIR, 1986

[47] Xuanyang, L. ; Xigeng, S. ; Dongxin, X.: New model for 3D Vibration of internal combustion engine (I.C.E.) Crankshaft.

[48] Z.D., Ma ; M, Perkins: An Efficient Multibody Dynamics Model for Internal Combustion Engine Systems.

[49] Zurita, G. ; Agren, A. ; Paterson, E.: Recosntruction of the cylinder pressure from a vibration measurements for predidtion of exhaust and noise emissions in ethanol engines / Society of Automotive Engineers. 1999. – Informe de Investigación

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 24.05.2012

(Alejandro Muñoz Rodríguez)