

EL RADICAL DE JACOBSON

Por:

DEBORA MARIA TEJADA JIMENEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

Trabajo presentado como requisito parcial para
promoción a la categoría de Profesora Asociada.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Medellín, Abril de 1986

Conf

I
512.74
T34

Donación: 26-VI-86 \$1200=

CONTENIDO

	pp.
INTRODUCCION	
I. EL RADICAL DE UN ANILLO	1
II. EL RADICAL DE UNA ALGEBRA	29
CONCLUSIONES	53
BIBLIOGRAFIA	54

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL
28202

UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA CENTRAL

INTRODUCCION

Si queremos conocer a fondo una estructura matemática debemos conocer los elementos que la conforman. Así, cuando un álgebraista desea investigar un anillo procederá a "desamarlo" en anillos más "simples" utilizando como herramienta importante el llamado radical de Jacobson.

Para confirmar la importancia de el radical de Jacobson en el mundo algebraico, basta observar el gran porcentaje de artículos que lo mencionan en alguna de sus diferentes formas.

El objetivo principal de esta monografía ha sido el de reunir en un solo texto algunas de estas definiciones de radical, e ir mostrando a lo largo de ésta, como cada nueva definición contiene a la anterior como caso particular.

En el primer capítulo estudiaremos sucesivamente el radical de un anillo conmutativo con unidad, de un anillo can unidad y de un anillo cualquiera. También consideraremos algunas propiedades del radical de un anillo.

Este primer capítulo está basado principalmente en el artículo "The radical and semi-simplicity for arbitrary rings" de N. Jacobson [5].

En el segundo capítulo consideraremos primero el radical de un algebra asociativa para luego estudiarlo en un algebra no asociativa. Como la estructura de un algebra asociativa es muy similar a la de un anillo es fácil ver que todos los resultados del primer capítulo son válidos para el radical de las algebras asociativas. El lector podrá observar que el grado de dificultad hasta este punto ha sido mínimo. Por el contrario, en el caso no asociativo debemos restringir enormemente nuestras hipótesis y hacer un largo recorrido en preliminares antes de poder garantizar la existencia de el radical. El estudio de este caso está basado en el artículo "The radical of a non-associative algebra" de A.A. Albert, [1].

Como nuestro objetivo ha sido el de concentrarnos en algunas definiciones de radical no hemos querido detenernos en ejemplos de radical. Para el caso de anillos y de algebras asociativas los ejemplos son bastante conocidos. Por el contrario, como las algebras no asociativas no son tan conocidas, es pertinente comentar lo siguiente: los principales ejemplos de estas algebras son las llamadas algebras genéticas, en general ellas son \mathbb{R} -algebras no asociativas de dimensión finita (ver [10] pp. 67). Además cada algebra genética tiene una función asociada a ella llamada la

función peso y se sabe que si el radical de un algebra genética existe, éste no es mas que el Kernel de dicha función peso (ver [7] pp. 90).

Debemos anotar que también existe el radical de otras estructuras, por ejemplo de módulos, o de grupos de operadores, cuyo estudio no es contemplado en el presente trabajo pero que sería un objeto interesante para nuevas monografías en este campo.

1. EL RADICAL DE UN ANILLO

Dedicaremos este primer capítulo al estudio del radical de Jacobson de un anillo. Consideraremos primero los anillos conmutativos con unidad. A continuación quitaremos la condición de conmutatividad, y por último estudiaremos el radical de anillos sin unidad. Al irle quitando condiciones al anillo, iremos probando que la definición de radical que se da en cada nuevo caso es la generalización de la anterior.

Terminaremos el capítulo mostrando algunas propiedades del radical.

1. ANILLOS CONMUTATIVOS CON UNIDAD

1.1 Sea A un anillo conmutativo con unidad, definimos como RADICAL DE A , $R(A)$, a la intersección de todos los ideales maximales de A . Así:

$$R(A) = \bigcap \beta \quad (\beta \text{ es ideal maximal de } A).$$

Recordemos que como A es un anillo con unidad, el teorema de Krull ([2] pp. 4) nos garantiza la existencia de ideales maximales y es por esto, que dicha intersección es no vacía.

La siguiente proposición nos caracteriza los elementos del radical de A .

1.2 PROPOSICION: Sea A un anillo conmutativo con unidad. Entonces:

$$R(A) = \{ x \in A / 1 - xy \text{ es inversible para todo } y \in A \}.$$

"C". En efecto, razonemos por el absurdo, supongamos que $x \in R(A)$ y que existe $y \in A$ tal que $1 - xy$ no es inversible, por el teorema

de Krull existe un ideal maximal ξ_0 tal que $1 - xy \in \xi_0$, pero como $x \in \bigcap \beta$ (β ideal maximal de A) entonces concluimos que $1 \in \bigcap \beta$, lo cual es una contradicción.

" \supset ". Supongamos ahora que $1 - xy$ es inversible para todo $y \in A$ y que $x \notin R(A)$, entonces existe ξ_0 , ideal maximal de A , tal que $x \notin \xi_0$. Así $\xi_0 + (x) = A$, o sea que existen $m \in \xi_0$, $y \in A$ tales que $m + xy = 1$, de donde $1 - xy \in \xi_0$, Absurdo!. \square

2. ANILLOS NO CONMUTATIVOS CON UNIDAD

2.1 Supondremos ahora que nuestro anillo tiene unidad pero que no es necesariamente conmutativo. Definiremos en este caso el RADICAL DE A , $R(A)$, como la intersección de todos los ideales maximales a derecha de A . Así:

$$R(A) = \bigcap \delta \quad (\delta \text{ ideal maximal a derecha de } A)$$

Otra vez, como en el caso anterior, la unidad del anillo A garantiza la existencia de ideales maximales, haciendo que $\bigcap \delta$ sea no vacía.

La proposición siguiente, al igual que la proposición 1-1.2 nos caracteriza los elementos del radical de A .

2.2 PROPOSICION: Sea A un anillo cualquiera con unidad, entonces:

$$R(A) = \{x \in A / 1 - xy \text{ es inversible a la derecha para todo } y \in A\}.$$

" \subset ". Supongamos que $x \in R(A)$ y que $1 - xy$ no es inversible a la derecha para algún $y \in A$, entonces el ideal a la derecha generado por el elemento $1 - xy$ es diferente de A , luego existe δ_0 ideal maximal a la derecha que contiene a $1 - xy$, pero como $x \in \delta_0$, es claro que $1 \in \delta_0$. Absurdo!.

" \supset ". Conversamente, supongamos que $1 - xy$ es inversible a la derecha para todo $y \in A$ y supongamos que $x \notin R(A)$, entonces existe δ_0 , ideal maximal a la derecha, tal que $x \notin \delta_0$, luego si $(x)_D$ es el ideal a la derecha generado por x , tendremos que $\delta_0 + (x)_D = A$ implicando esto que $1 - xy \in \delta_0$, lo cual es una contradicción. \square

Es evidente en este caso, que el radical de A es un ideal a derecha, pues proviene de una intersección de ideales a derecha, pero lo sorprendente (!) de esta definición es que $R(A)$ es en realidad un ideal bilateral.

2.3 PROPOSICION: Sea A un anillo cualquiera con unidad, entonces
 $R(A)$ es un ideal bilateral.

En efecto, supongamos que $R(A)$ no es un ideal a la izquierda, así
 pues existen $y \in A$, $x \in R(A)$ tales que $yx \notin R(A)$, luego existe
 un ideal maximal \mathfrak{m}_0 a la derecha tal que $yx \notin \mathfrak{m}_0$, luego $y \notin \mathfrak{m}_0$.

Consideremos ahora, el conjunto $D = \mathfrak{m}_0 + yR(A)$, donde $yR(A)$
 es el conjunto de todos los elementos yr estando $r \in R(A)$. Es claro
 que D así definido, es un ideal a derecha diferente de \mathfrak{m}_0 , por la
 maximalidad de este último, $D = A$ y así existen $m \in \mathfrak{m}_0$, $r \in R(A)$
 tales que $y = m + yr$, ie: $y(1-r) = m$, pero como $r \in R(A)$,
 $1-r$ es invertible a la derecha, luego $y \in \mathfrak{m}_0$. Absurdo!. \square

2.4 Teniendo en cuenta este último resultado y modificando un poco la de-
 mostración de la proposición 1-2.2, podemos generalizarla así:

$$R(A) = \{x \in A / 1 - xy \text{ es inversible para todo } y \in A\}.$$

Observemos que se tiene entonces, el mismo resultado de la proposición
 1.2 del caso de los anillos conmutativos con unidad.

2.5 Notemos además que esta generalización implica que el radical de A es también la intersección de todos los ideales maximales a izquierda.

3. ANILLOS NO UNITARIOS

3.1 Consideraremos ahora el caso en que A es un anillo cualquiera. Como A no tiene necesariamente unidad, no podemos garantizar la existencia de ideales maximales a derecha ni a izquierdo, y por lo tanto la definición de radical que dimos en los casos anteriores no nos sirve aquí.

3.2 Antes de dar la definición de radical, observemos lo siguiente: Supongamos por un momento que A tiene unidad, y sea $x \in A$, si $1 - x$ tiene inverso a la derecha u , sea $x' = 1 - u$ entonces $(1 - x)(1 - x') = 1$ de donde $x + x' - xx' = 0$. Conversamente, si para $x \in A$ existe x' tal que $x + x' - xx' = 0$ podemos garantizar que $1 - x$ tiene como inverso a derecha a $1 + x'$.

O sea que en un anillo con unidad, el hecho de que el elemento $1 - x$ tenga como inverso a derecha a $1 - x'$ es equivalente a que exista un x' que verifique la ecuación $x + x' - xx' = 0$.

3.3 Observemos que en esta última ecuación el elemento 1 no interviene, y es aprovechando ésto, que se logrará la generalización de la definición de radical.

3.4 Si x es un elemento de A para el cual existe un x' en A tal que $x + x' - xx' = 0$ decimos que x es CUASI-REGULAR A LA DERECHA con CUASI-INVERSO x' .

O sea que en un anillo con unidad el elemento $1 - x$ es inversible a la derecha si y solamente si x es cuasi regular a la derecha.

Decimos que un ideal a derecha del anillo A es CUASI-REGULAR A DERECHA si todos sus elementos son cuasi-regulares a la derecha.

3.5 Sea, ahora sí, A un anillo cualquiera. Definiremos en este caso al RADICAL de A , $R(A)$, como la unión de todos los ideales cuasi-regulares a derecha. Así:

$$R(A) = \bigcup \partial \quad (\partial \text{ es ideal cuasi-regular a derecha de } A).$$

3.6 En 1-2.4 vimos que $x \in R(A)$ si y solo si $1 - xy$ es inversible a la derecha para todo $y \in A$, por 1-3.2 esto también es equivalente a decir que xy es cuasi-regular a la derecha para todo $y \in A$. En re-

sumen, en el caso en el cual A es un anillo unitario, tenemos la siguiente igualdad de conjuntos:

$$R(A) = \{x \in A / xy \text{ es casi-regular a la derecha, para todo } y \in A\}.$$

Ahora, como estamos trabajando con anillos sin unidad, la generalización natural de la anterior igualdad está dada en la proposición siguiente.

3.7 PROPOSICION: Sea A un anillo cualquiera, entonces:

$$R(A) = \{x \in A / xi + xy \text{ es casi-regular a la derecha para todo } i \in \mathbb{Z} \text{ y todo } y \in A\}.$$

En efecto, denotemos por R al conjunto

$$\{x \in A / xi + xy \text{ es casi-regular a derecha para todo } i \in \mathbb{Z} \text{ y todo } y \in A\}$$

y veamos que $R(A) = R$.

Sea \mathcal{D}_x el ideal a derecha generado por x , como A no tiene nece-

sariamente unidad, entonces $\mathcal{D}_x = \{xi + xy / i \in \mathbb{Z} \text{ y } y \in A\}$.

Ahora si $x \in R$, \mathcal{D}_x es un ideal cuasi-regular a derecha luego $\mathcal{D}_x \subset R(A)$ y así $R \subset R(A)$.

Conversamente, si $x \in R(A)$, existe un ideal D cuasi-regular a derecha tal que $x \in D$, luego $\mathcal{D}_x \subset D$, pero esto implica que \mathcal{D}_x es un ideal cuasi-regular a derecha, es decir $xi + xy$ es cuasi-regular a derecha para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in A$, luego $x \in R$. \square

Al igual que en 1-2.3, sorprendentemente (!), mostraremos no solo que $R(A)$ es un ideal a derecha, sino que es bilateral.

3.8 PROPOSICION: Sea A un anillo cualquiera, entonces $R(A)$ es un ideal bilateral.

Veamos primero que $R(A)$ es un ideal a derecha. Sean $x, y \in R(A)$ y sean $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_y$ los ideales a derecha generados por x, y respectivamente. (Ver 13.7) entonces $\mathcal{D}_x \subset R(A)$ y $\mathcal{D}_y \subset R(A)$ luego \mathcal{D}_x y \mathcal{D}_y son ideales cuasi-regulares a derecha.

NOTA: Obsérvese que aunque x sea un elemento cuasi-regular a derecha, en general el ideal a derecha \mathcal{D}_x no

\mathcal{D}_x tiene que ser cuasi-regular a derecha. En este caso es cierto, puesto que $x \in R(A)$ y así, debe pertenecer a un ideal D cuasi-regular a derecha y como $\mathcal{D}_x \subset D$, se concluye que \mathcal{D}_x es cuasi-regular a derecha.

Probemos que $\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y$ es también un ideal cuasi-regular a derecha.

Es evidente que $\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y$ es un ideal a derecho. Sean ahora $x_0 \in \mathcal{D}_x$, $y_0 \in \mathcal{D}_y$ y sea x_0' el cuasi-inverso a derecha de x_0 , es decir $x_0 + x_0' - x_0 x_0' = 0$.

Como $y_0 - y_0 x_0' \in \mathcal{D}_y$ (\mathcal{D}_y es ideal a derecha) sea w_0 el cuasi-inverso a derecha de $y_0 - y_0 x_0'$ es decir $(y_0 - y_0 x_0') + w_0 - (y_0 - y_0 x_0') w_0 = 0$. Probemos que $x_0 + y_0$ tiene como cuasi-inverso a derecha a $x_0 + w_0 - x_0' w_0$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 & (x_0 + y_0) + (x_0 + w_0 - x_0' w_0) - (x_0 + y_0)(x_0 + w_0 - x_0' w_0) \\
 &= (x_0 + x_0' - x_0 x_0') + [(y_0 - y_0 x_0') + w_0 - (y_0 - y_0 x_0') w_0] \\
 & - (x_0 + x_0' - x_0 x_0') w_0 = 0
 \end{aligned}$$

luego $\mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y$ es un ideal cuasi-regular a derecha, y como $x + y \in \mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y$ entonces $x + y \in R(A)$.

Por otro lado, si $x \in R(A)$, como $xi + xy$ es cuasi-regular a derecha para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in A$, xa es cuasi regular a derecha y siéndolo también xay para todo y, a en A .

Por un razonamiento similar a la primera parte de la demostración y en forma inductiva, se prueba que:

$$xa + \underbrace{xa + \dots + xa}_{i \text{ veces}} + xay$$

es cuasi-regular para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in A$. Luego $xa \in R(A)$.

Se concluye entonces que $R(A)$ es un ideal a derecha.

Probemos ahora que $R(A)$ es un ideal a izquierda.

Sea $x \in R(A)$ y $a \in A$, entonces $xa \in R(A)$ y sea w su cuasi-inverso a derecha, es decir $xa + w - (xa)w = 0$

Veamos que $-ax + awx$ es el cuasi-inverso a derecha de ax . En efecto:

$$ax + (-ax + awx) - (ax)(-ax + awx) \\ = a(w + xa - xaw)x = 0.$$

O sea que ax es cuasi-regular a la derecha. Por otro lado, sean $i \in \mathbb{Z}$, $y \in A$ entonces $(ax)^i + (ax)y = a(xi + xy)$, como $x \in R(A)$ entonces $x' = xi + xy$ es cuasi-regular a derecha, y aún más $x' \in R(A)$.

De manera similar a como se probó anteriormente que ax es cuasi-regular a derecha, se prueba que $ax' = (ax)^i + (ax)y$ es cuasi-regular a derecha, luego $ax \in R(A)$.

Luego $R(A)$ es un ideal bilateral. \square

- 3.9 En forma simétrica a la derecha, se definen elemento CUASI-REGULAR A IZQUIERDA, CUASI-INVERSO A IZQUIERDA e ideal CUASI-REGULAR A IZQUIERDA.

Un elemento será llamado CUASI-REGULAR, si es simultáneamente cuasi-regular a derecha y a izquierda.

- 3.10 OBSERVACION: Si un elemento x es cuasi-regular, entonces sus

cuasi-inversos, a derecha y a izquierda, son iguales. En efecto, sean x_1, x_2 los cuasi-inversos a derecha y a izquierda de x respectivamente, entonces:

$$x + x_1 - xx_1 = 0 \quad \text{y} \quad x + x_2 - x_2x = 0$$

de donde:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2 + (x + x_1 - xx_1) - x_2(x + x_1 - xx_1) \\ &= x_1 + (x + x_2 - x_2x) - (x + x_2 - x_2x)x_1 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Además se puede probar que $xx_1 = x_2x = x_1x$.

3.11 Sea ahora $x \in R(A)$, sabemos que x es cuasi-regular a derecha, probemos que también es cuasi-regular a izquierda.

Sea x' su cuasi-inverso a derecha, entonces $x' = -x + xx'$ y como $x \in R(A)$ y $R(A)$ es un radical entonces $x' \in R(A)$ luego x' es cuasi-regular a derecha. Como x es su cuasi-inverso a izquierda, entonces por la observación inmediatamente anterior, x es también su cuasi-inverso a derecha. Luego x es cuasi-regular a izquierda. O sea que los elementos del radical son cuasi-regulares.

3.12 Como corolario, tenemos que $R(A)$ es también la unión de todos los ideales cuasi-regulares a izquierda.

4. ANILLOS OBTENIDOS POR ADJUNCION DE 1

4.1 En este numeral veremos la relación existente entre el radical de un anillo cualquiera y el radical de un anillo obtenido por adjunción de una unidad.

Sean A un anillo cualquiera, \mathbb{Z} el anillo de los enteros, consideremos el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times A$ (denotado por A_1) con las siguientes operaciones :

Suma :

$$\begin{aligned} +: \quad A_1 \times A_1 &\longrightarrow A_1 \\ ((z, a), (z', a')) &\longmapsto (z + z', a + a') \end{aligned}$$

Multiplicación :

$$\begin{aligned} \times: \quad A_1 \times A_1 &\longrightarrow A_1 \\ ((z, a), (z', a')) &\longmapsto (zz', za' + z'a + aa') \end{aligned}$$

para todo z, z' en \mathbb{Z} y todo a en A .

Es de rutina probar que A_1 con estas operaciones es un anillo con unidad $(1,0)$.

Por otro lado si $f: A \longrightarrow A_1$ es la aplicación tal que $f(a) = (0,a)$ para todo $a \in A$, entonces es fácil probar que $f(A)$ es isomorfo a A , y en este sentido identificaremos a $f(A)$ con A , mirando a A como un subconjunto de A_1 , entenderemos también que el elemento a de A es el elemento $(0,a)$ de A_1 .

Si consideramos la proyección canónica:

$$\begin{aligned} \Pi_1: \quad A_1 &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (z,a) &\longmapsto z \end{aligned}$$

entonces $\text{Ker}(\Pi_1) = A$, luego A es un ideal bilateral de A_1 .

4.2 Sea ahora $z \in R(A_1) \cap A$. Entonces $z \in A$ y z tiene un cuasi-inverso z' en A_1 . Como $z' = -z + zz'$ y A es un ideal de A_1 entonces $z' \in A$ y así $z \in R(A)$. Luego $R(A_1) \cap A \subset R(A)$.

Por la construcción de A_1 , cualquier ideal a derecha de A es ideal a derecha de A_1 , luego $R(A) \subset R(A_1) \cap A$.

Es decir $R(A) = R(A_1) \cap A$.

Pero además si $z_0 \in R(A_1)$ entonces $\bar{z}_1 \in R(A_1/A) = R(\mathbb{Z}) = \{0\}$

pues $A_1/A \cong \mathbb{Z}$, luego $z_0 \in A$.

Y así $R(A_1) = R(A)$.

Hemos demostrado entonces, la siguiente proposición.

4.3 PROPOSICION: Sean A un anillo cualquiera, A_1 el anillo obtenido por adjunción de una unidad, entonces $R(A_1) = R(A)$.

5. ANILLOS CON IDEALES MAXIMALES

5.1 Sabemos que si A es un anillo con unidad, su radical es la intersección de sus ideales maximales a derecha. Nos preguntamos ahora: si A es un anillo cualquiera con ideales maximales a derecha, qué relación existe entre su radical y la intersección de dichos ideales?

5.2 Primero observemos que un elemento z de A es cuasi-regular a derecha en A si y solo si $\{-x + zx / x \in A\} = A$.

En efecto si $z \in A$ es fácil probar que $J_z = \{-x + zx / x \in A\}$ es un ideal a derecha.

Supongamos que z es cuasi-regular a derecha con cuasi-inverso a

derecha z' , entonces $z = -z' + zz' \in J_z$. Y sea $x \in A$, entonces $-zx \in J_z$ y como $-x + zx \in J_z$, para todo x , entonces $-x \in J_z$, es decir $x \in J_z$, luego $A \subset J_z$, es decir $A = J_z$.

Conversamente, si $J_z = A$ existe z' tal que $z = -z' + zz'$ luego z es casi-regular a la derecha.

5.3 Decimos que un anillo A es un ANILLO RADICAL si $R(A) = A$.

La siguiente proposición es la generalización del teorema de Krull, para anillos no radicales.

5.4 PROPOSICION: Si A es un anillo cualquiera no radical entonces A admite la existencia de ideales maximales.

Como $R(A) \neq A$ sea z un elemento que no es casi-regular a la derecha en A , entonces $J_z \neq A$ y aún más $z \notin J_z$.

Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{E} = \{ I \mid I \text{ es ideal a derecha de } A, J_z \subset I \text{ y } z \notin I \}$$

entonces $\mathcal{E} \neq \emptyset$, y además toda cadena de ideales admite cota superior, luego por el lema de Zorn existe un ideal maximal a derecha.

Simétricamente, se prueba la existencia de ideales maximales a izquierda.

El teorema que sigue nos establece la relación entre el radical de un anillo que admite la existencia de ideales maximales y la intersección de todos los ideales maximales a derecha.

5.5 TEOREMA: Sea A un anillo que admite la existencia de ideales maximales a derecha, entonces

$$\bigcap \mathfrak{l}_D \subset R(A) \quad \text{y} \quad A \cdot R(A) \subset \bigcap \mathfrak{l}_D$$

donde \mathfrak{l}_D es ideal maximal a derecha de A .

En efecto, sea $z \in \bigcap \mathfrak{l}_D$, entonces z debe ser cuasi-regular a la derecha, pues si no lo fuese, $J_z = \{ -x + zx / x \in A \}$ sería diferente de A , luego existiría un ideal maximal a derecha \mathfrak{l}_0 tal que $z \notin \mathfrak{l}_0$ y $J_z \subset \mathfrak{l}_0$. Absurdo! pues $z \in \bigcap \mathfrak{l}_D$, luego z es cuasi-regular a la derecha, y así $\bigcap \mathfrak{l}_D$ es un ideal cuasi-regular a la derecha, y por la definición de radical de A entonces $\bigcap \mathfrak{l}_D \subset R(A)$.

Probemos ahora la otra inclusión.

Sea ℓ_D un ideal maximal a derecha cualquiera. Consideremos el conjunto

$$B = \left\{ \bar{z} \in A/\ell_D / \overline{za} = 0 \text{ para todo } a \in A \right\}$$

Es evidente que B es un ideal a derecha de A/ℓ_D , y como ℓ_D es maximal a derecha entonces $B = \{0\}$ o $B = A/\ell_D$.

Sea $z \in R(A)$ entonces $\bar{z} \in R(A/\ell_D)$ y sea $\bar{x} \in A/\ell_D$, $\bar{x} \neq 0$.

Supongamos que $\overline{xz} \neq 0$, entonces por la definición de B , $B \neq A/\ell_D$ luego $B = \{0\}$.

Como $\overline{xz} \neq 0$, $\overline{xz} \notin B$ luego existe $a \in A$ tal que $\overline{xza} \neq 0$. Consideremos ahora el conjunto $\Gamma = \left\{ \overline{xzb} \in A/\ell_D / b \in A \right\}$ es fácil probar que Γ es un ideal a derecha, y como $\overline{xza} \in \Gamma$ y $\overline{xza} \neq 0$ entonces $\Gamma = A/\ell_D$.

Luego existe un $b \in A$ tal que $\overline{xzb} = \bar{x}$. Por otro lado, como $\bar{z} \in R(A/\ell_D)$ entonces \overline{za} es cuasi-regular y sea \bar{z}' su cuasi-inverso, es decir $\overline{za} + \bar{z}' - (\overline{za})\bar{z}' = 0$.

Pero:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} - \bar{x} (\bar{z}a + \bar{z}' - \bar{z}a\bar{z}') = \\ &= \bar{x} - \overline{xza} - \overline{xz'} + \overline{xza\bar{z}'} = \\ &= (\bar{x} - \overline{xza}) - (\bar{x} - \overline{xza})\bar{z}' = 0 \end{aligned}$$

Absurdo! pues $\bar{x} \neq 0$. Luego $\overline{xz} = 0$ es decir $xz \in \ell_D$ para todo $x \in A - \ell_D$, pero como ℓ_D es ideal a derecha, si $x \in \ell_D$ $xz \in \ell_D$. Luego $xz \in \ell_D$ para todo $x \in A$. Es decir $A \cdot R(A) \subset \ell_D$ y como ℓ_D es arbitrario, se tiene la otra inclusión $A \cdot R(A) \subset \bigcap \ell_D$. \square

5.6 COROLARIOS: Con la misma notación anterior

i) Si A es un anillo na radical entonces

$$A \cdot R(A) \subset \bigcap \ell_D \subset R(A)$$

ii) Si A es un anillo con unidad

$$R(A) = \bigcap \ell_D$$

iii) Si A es un anillo cualquiera y ℓ_D es un ideal maximal a la derecha tal que A/ℓ_D no tiene divisores de cero a la derecha, entonces

$$R(A) \subset \ell_D$$

La demostración de i) y ii) es evidente.

Para deducir iii) basta observar que bajo dichas hipótesis, se concluye en la demostración del teorema que $\bar{z} = 0$ luego $z \in \ell_D$. \square

5.7 NOTA: Obsérvese que el corolario ii) nos dice que la definición que se dió de radical para el caso del anillo con unidad, sí coincide con lo dada en el caso de un anillo arbitrario.

6. PROPIEDADES DEL RADICAL DE UN ANILLO

6.1 Sea A un anillo cualquiera. Como la definición de radical en este caso es la más general, las propiedades que se deducirán a continuación son válidas no importa como sea el anillo, a menos que se haga alguna salvedad.

Diremos que un anillo A es SEMI-SIMPLE si $R(A) = \{0\}$.

6.2 PROPOSICION: Sea A un anillo cualquiera. Entonces el anillo cociente $A/R(A)$ es semi-simple.

Sea $\bar{z} \in R(A/R(A))$, y sea \bar{z}' su cuasi-inverso a derecha, es decir $\bar{z} + \bar{z}' - \bar{z}\bar{z}' = 0$ luego existe $u \in R(A)$ tal que $z + z' - zz' = u$,

y sea u' el cuasi-inverso a derecha de u , entonces

$$0 = (z + z' - zz') + u' - (z + z' - zz')u' = \\ z + (z' + u' - z'u') - z(z' + u' - z'u')$$

es decir $(z' + u' - z'u')$ es cuasi-inverso de z en A , luego z es cuasi-regular a derecha en A .

Ahora como $\bar{z}i + \bar{z}y \in R(A/R(A))$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, $y \in A$, por la misma demostración que se acaba de hacer para z , podemos concluir que $zi + zy$ es cuasi-regular a derecha para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in A$. Luego $z \in R(A)$ y así $\bar{z} = 0$. \square

6.3 Decimos que un elemento $x \in A$ es NILPOTENTE si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Si I es un ideal tal que todos sus elementos son nilpotentes se dice que I es un NILIDEAL. Si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $I^n = \{0\}$ decimos que I es un IDEAL NILPOTENTE.

Obsérvese que todo ideal nilpotente es nilideal, pero el recíproco no es cierto.

El conjunto de todos los elementos nilpotentes de A lo definimos como

el NILRADICAL del anillo A y lo denotamos por $N(A)$. Se puede probar que $N(A)$ es un ideal, si A es conmutativo.

La proposición que sigue nos da la relación entre el nilradical y el radical de un anillo.

6.4 PROPOSICION: Sea A un anillo conmutativo, entonces

$$N(A) \subset R(A).$$

En efecto, sea x un elemento nilpotente tal que $x^n = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x + (-x - x^2 - \dots - x^{n-1}) &= x(-x - x^2 - \dots - x^{n-1}) \\ &= x + (-x - x^2 - \dots - x^{n-1}) - (-x - x^2 - \dots - x^{n-1})x = 0 \end{aligned}$$

O sea que x es casi-regular con casi-inverso $(-x - x^2 - \dots - x^{n-1})$.

Por otro lado, si x es nilpotente, no es difícil mostrar que $x^i + xy$ es nilpotente para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in A$, luego por la misma demostración que acabamos de hacer para x , $x^i + xy$ es casi-regular, luego $x \in R(A)$. \square

6.5 Como corolario de esta proposición tenemos que todo nilideal está contenido en el radical de un anillo conmutativo.

ideales,

6.6 Sin embargo el radical de un anillo conmutativo no tiene que ser un nilideal y por lo tanto tampoco un ideal nilpotente. Por ejemplo, sea $\mathbb{Z}[[X]]$ el anillo de series formales en la variable X con coeficiente en \mathbb{Z} . Teniendo en cuenta que los elementos inversibles en $\mathbb{Z}[[X]]$ son aquellos de la forma $\pm X + \sum_{i \geq 1} a_i X^i$, no es difícil probar que

$$R(\mathbb{Z}[[X]]) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i \right\},$$

es decir es el conjunto de las series formales cuyo término constante a_0 es cero. Es claro que $R(\mathbb{Z}[[X]]) \neq \{0\}$ pues por ejemplo $X \in R(\mathbb{Z}[[X]])$.

Sin embargo como los elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}[[X]]$ son los elementos de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ con a_i nilpotente en \mathbb{Z} , entonces necesariamente $N(\mathbb{Z}[[X]]) = \{0\}$.

6.7 A continuación estudiaremos el radical de un anillo Artiniano y veremos que en este caso el radical si es un ideal nilpotente y por lo tanto un nilideal.

Decimos que un anillo A conmutativo es ARTINIANO si toda sucesión decreciente de ideales es estacionaria, es decir si

$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$ es una sucesión decreciente de ideales,

entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+1} = \dots$

6.8 PROPOSICION: Si A es un anillo artiniiano, $R(A)$ es nilpotente
 χ $N(A) = R(A)$.

En efecto, probemos que todos los elementos de $R(A)$ son nilpotentes. Para esto mostremos que $R(A)$ es un ideal nilpotente.

Como $R(A) \supset R(A)^2 \supset R(A)^3 \supset \dots$ es una cadena descendente de ideales, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(A)^n = R(A)^{n+1} = \dots$ o sea que $(R(A)^n)^2 = R(A)^n$. Denotemos $R(A)^n$ por I , entonces $I^2 = I$. Si $I \neq \{0\}$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ J \subset I / J \text{ es ideal de } A \text{ y } J \neq \{0\} \right\}$$

entonces $\mathcal{E} \neq \emptyset$ pues $I \in \mathcal{E}$. Además como A es artiniiano, cualquier cadena tiene cota inferior, y por el lema de Zorn existe un ideal minimal de \mathcal{E} . Llamémoslo η .

Ahora sea $b \in \eta$ tal que $bI \neq \{0\}$, entonces

$(bI)I = bI^2 = bI \neq \{0\}$, pero por la minimalidad de η como

$bI \subset I$ entonces $bI = \eta$, luego existe $y \in I$ tal que $by = b$,

como $I \in R(A)$ sea y' el cuasi-inverso de y , entonces:

$$\begin{aligned}
 0 &= (b - by) - (by' - byy') \\
 &= b - b(y + y' - yy') = b
 \end{aligned}$$

pues $y + y' - yy' = 0$ luego $\eta = b1 = \{0\}$. Absurdo! pues $\eta 1 \neq \{0\}$. Luego $R(A)^n = 1 = \{0\}$. Y así $R(A)$ es nilpotente, luego $R(A) = N(A)$.

6.9 NOTA: En la proposición anterior mostramos que si A es un anillo artiniiano, entonces su radical es un ideal nilpotente. Nuestra definición de anillo artiniiano es válida para anillos conmutativos, sin embargo si A es un anillo cualquiera, se entenderá por anillo ARTINIANO A DERECHA aquel para el cual toda sucesión decreciente de ideales a derecha es estacionaria.

Por una copia casi exacta de la demostración de la proposición anterior, se puede probar lo siguiente: Si A es un anillo artiniiano a derecha, entonces su radical es un ideal nilpotente.

La siguiente proposición nos muestra otro caso en el cual el nilradical del anillo coincide con el radical.

6.10 PROPOSICION: Si A es un anillo conmutativo con unidad tal que todo ideal no contenido en el nilradical contiene un elemento idemp-

tente diferente de cero, entonces $N(A) = R(A)$.

Sabemos que $N(A) \subset R(A)$.

Sea $x \in R(A)$ entonces $1 - xy$ es invertible para todo $y \in A$. Si $x \in N(A)$ entonces consideremos el ideal (x) generado por x , entonces $(x) \subset N(A)$ y así existe $e \in (x)$, $e \neq 0$ tal que $e^2 = e$ luego existe $a \in A$ tal que $e = ax$ y así

$$e^2 = (ax)^2 = a^2x^2 = e = ax \quad \text{entonces}$$

$$a^2x^2 - ax = 0 = ax(1 - ax) \quad \text{Absurdo! pues } 1 - ax \text{ es invertible y } ax \neq 0.$$

□

6.11 Si A es un anillo conmutativo tal que sus únicos ideales son $\{0\}$ y él mismo, decimos que A es un anillo SIMPLE.

Se puede probar ([2] pp. 89) que en un anillo artiniiano con unidad, el número de ideales maximales es finito. Teniendo en cuenta ésto podemos probar la siguiente proposición.

6.12 PROPOSICION: Sea A un anillo Artiniano a derecha con unidad,
entonces $A/R(A)$ es una suma directa finita de anillos simples.

Considérese la siguiente aplicación:

$$\Phi : A/R(A) \longrightarrow A/\partial_1 \oplus \dots \oplus A/\partial_n$$

$$a + R(A) \longmapsto (a + \partial_1, \dots, a + \partial_n), \text{ para todo } a \in A,$$

donde $\partial_1, \dots, \partial_n$ son los ideales maximales a derecha de A .

Es de rutina probar que Φ es un isomorfismo. ([2], pp. 7).

Esta proposición nos muestra por qué a veces un anillo semi-simple se define como la suma de anillos simples.

II. EL RADICAL DE UNA ALGEBRA

Nos concentraremos ahora en el estudio del radical de una algebra.

Primero consideraremos el radical de una algebra asociativa. Como en este caso los resultados que se obtienen son simple generalización de aquellos encontrados en el capítulo anterior, nos limitaremos a dar su enunciado y demostraremos solamente la proposición II 1.5.

En la segunda parte de este capítulo definiremos el radical de una algebra no asociativa. Para esto nos veremos obligados a construir una algebra asociativa (asociada a la no asociativa), cuyo radical permitirá la definición de el radical en el algebra no asociativa.

1. ALGEBRAS ASOCIATIVAS

1.1 Sean K un anillo conmutativo con unidad, A una K -álgebra asociativa cualquiera. Al igual que en los anillos (1.3.7) definimos el RADICAL DE A , $R(A)$, como el conjunto siguiente:

$$R(A) = \left\{ x \in A / kx + xy \text{ es cuasi-regular a derecha para todo } y \in A \text{ y todo } k \in K \right\}.$$

1.2 Teniendo este conjunto como el radical de A , y similarmente a como se probó con los anillos, se tienen los siguientes resultados.

(a) $R(A)$ es un ideal bilateral. (1.3.8)

(b) Se le puede quitar la condición a derecha en la definición.
(1.3.10)

(c) Si A es conmutativa y tiene unidad entonces $R(A) = \bigcap \beta$
(β ideal maximal de A). (1.1.1)

(d) Si A tiene unidad

$$\begin{aligned} R(A) &= \bigcap \partial \quad (\partial \text{ ideal maximal a derecha de } A) \\ &= \bigcap I \quad (I \text{ ideal maximal a izquierda de } A). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

(e) Si A admite la existencia de ideales maximales a derecha

$$A \setminus R(A) \subset \bigcap \ell \subset R(A)$$

donde ℓ es ideal maximal a derecha. (15.5)

- (f) Si A es artiniana a derecha entonces $R(A)$ es un ideal nilpotente. (16.9)
- (g) Si A es conmutativa artiniana entonces su radical es igual al conjunto de todos los elementos nilpotentes. (16.8)
- (h) El radical del algebra cociente $A/R(A)$ es cero. (16.2)

1.3 NOTA: Decimos que una algebra es SIMPLE (SIMPLE A DERECHA) si $A^2 \neq \{0\}$ y si sus únicos ideales bilaterales (resp. a derecho) son $\{0\}$ y A . Si una algebra es una suma directa finita de algebras simples (resp. simples a derecha) diremos que es una algebra SEMI-SIMPLE (resp. A DERECHA).

Obsérvese que si A es simple a derecha entonces es simple. Lo mismo ocurre si A es semi-simple a derecha. Nótese que la definición de algebra semi-simple no es la análoga a la de anillo semi-simple dada en 16.1.

- (i) Si A tiene unidad y es artiniana a derecha entonces $A/R(A)$ es semi-simple (a derecha). (16.12)

La demostración de estos enunciados es casi una copia de las proposiciones análogas del capítulo 1.

1.4 Además, si K es un anillo conmutativo con unidad y A es una K -álgebra de dimensión finita, es de rutina probar que A es artiniana (ver [9] pp. 41); es así como los resultados (f), (g), (h) e (i) son válidos también para K -álgebras de dimensión finita.

Como generalización del numeral (i) probemos la siguiente proposición.

1.5 PROPOSICION: Sean K un anillo conmutativo con unidad, A una K -álgebra asociativa con unidad. Entonces A es una K -álgebra semi-simple (o derecha) si y solo si A es una K -álgebra artiniana (a derecha) y $R(A) = \{0\}$.

En efecto, por (i) si A es artiniana a derecha y $R(A) = \{0\}$ entonces $A/R(A)$ es isomorfa a A , luego A es semi-simple.

Supongamos ahora que A es semi-simple (a derecha), luego A tiene un número finito de ideales bilaterales (a derecha) y por lo tanto A es artiniana (a derecha). Veamos que $R(A) = \{0\}$.

En efecto si $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ ($n \in \mathbb{N}$, A_i simple para todo i), denotemos

por $B_j = \sum_{i \neq j} A_i$ entonces $A/B_j \cong A_j$ es simple (a derecha) es

decir B_j es un ideal maximal (a derecha) luego $R(A) \subset B_j$ para

todo i (ver (d)) pero $\bigcap_{i=1}^n B_i = \{0\}$ pues A es suma directa,

luego $R(A) = \{0\}$.

2. ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS

2.1 Restringiremos nuestro estudio a las K -álgebras no asociativas de dimensión finita, siendo K un anillo conmutativo con unidad. Por supuesto, todos los resultados serán también válidos para álgebras no asociativas artinianas (II 1.4).

Por la nota II 1.4 sabemos que si A es una álgebra asociativa de dimensión finita entonces $A/R(A)$ es una álgebra semi-simple. La definición del radical de una álgebra no asociativa de dimensión finita sobre un anillo conmutativo con unidad K , será la generalización de este hecho.

2.2 Así pues, si K es un anillo conmutativo con 1, y A una K -álgebra de dimensión finita, decimos que el RADICAL DE A , $R(A)$, es el ideal bilateral mínimo, entre los ideales bilaterales B tales que A/B es semi-simple.

Observemos que esta definición la estamos dando no solo para álge-

bras no asociativas, sino asociativas de dimensión finita.

2.3 Probemos entonces que en el caso asociativo, la definición de radical dada en II 1.1, coincide con esta última.

Así pues, sea A una K -álgebra con unidad asociativa de dimensión finita (K un anillo conmutativo con unidad) y sea $R(A)$ su radical. Según la definición II 2.2, probemos que $R(A)$ es el ideal bilateral mínimo entre los ideales bilaterales B que hacen a A/B semi-simple.

En efecto sabemos que $R(A)$ es un ideal bilateral (II 1.2 (a)) y por la nota II 1.4, $A/R(A)$ es semi-simple. Sea ahora B un ideal bilateral tal que A/B es semi-simple, luego si $x \in R(A)$ es claro que $\bar{x} \in R(A/B)$, y como A/B es una K -álgebra de dimensión finita semi-simple entonces $R(A/B) = \{0\}$ (II 1.5) luego $x \in B$, es decir $R(A) \subset B$. Así pues, en el caso asociativo esta nueva definición de radical coincide con la anteriormente dada.

2.4 Recordemos que cuando se dá una definición es porque se tiene garantizada la existencia de el objeto al cual se le está dando nombre. Para el caso no asociativo, debemos entonces probar la existencia de dicho radical. Para esto, a partir del algebra A construiremos el

álgebra $T(A)$ asociativa, y después, aprovechando la existencia de el radical de $T(A)$ mostraremos que $R(A)$ sí existe en algunos casos.

2.5 EL ALGEBRA $T(A)$

Sean K un anillo conmutativo con unidad, A una K -álgebra cualquiera y sea $\text{End}_K(A)$ la K -álgebra de todos los endomorfismos (de álgebras) de A .

Sea $x \in A$, y sean D_x, I_x los endomorfismos de A siguientes:

$$D_x : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ y \longmapsto xy \end{array} \quad \text{para todo } y \in A$$

$$I_x : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ y \longmapsto yx \end{array} \quad \text{para todo } y \in A.$$

Definimos a $T(A)$ como la K -subálgebra de $\text{End}_K(A)$ generada por la función identidad y todos los D_x, I_x cuando x recorre a A .

2.6 Recordemos que una CERO-ALGEBRA es una álgebra (no necesariamente igual a $\{0\}$) cuya multiplicación es nula, es decir para todo $x, y \in A$, $xy = 0$. Teniendo en cuenta esta definición, una K -álgebra A es una cero álgebra si y solamente si $T(A)$ es isomorfa a

K (como K -álgebras). En efecto, basta observar que si $T(A) \cong K$ entonces $T(A)$ está generada por un único elemento, que debe ser la función identidad, o sea que $D_x = 0 = I_x$ para todo $x \in A$, es decir la multiplicación en A debe ser nula. Obsérvese que si A tiene unidad y A es una cero-álgebra entonces $A = \{0\}$.

2.7 NOTACION: Si $G \subset \text{End}_K(A)$ y $B \subset A$, GB denotará la K -subálgebra de A generada por todos los elementos de la forma $g(b)$ con $g \in G$ y $b \in B$.

Si $e \in \text{End}_K(A)$, $\{e\}B$ se denotará más simplemente por eB .

2.8 EL RADICAL DE $T(A)$

Como $T(A)$ es una álgebra asociativa, entonces su radical existe, llamémoslo R .

Supongamos que A es una álgebra de dimensión finita, no es difícil probar que $T(A)$ también es de dimensión finita, luego R es un ideal nilpotente de $T(A)$ (II 1.4).

Si RA es la subálgebra de A definida como en II 2.7 y si $A \neq \{0\}$ entonces $RA \neq A$, pues si $RA = A$ se tendría que $A = RA = R^2A = \dots$

y como R es nilpotente se concluiría que $A = \{0\}$.

Además RA es un ideal bilateral de A , en efecto $A(RA) \subset RA$,

puesto que si $x \in A$, $y \in RA$, $xy = D_x(y)$, es decir

$A(RA) \subset T(A)RA$ y como R es ideal bilateral de $T(A)$, $T(A)R \subset R$

luego $A(RA) \subset T(A)RA \subset RA$. Por otro lado $(RA)A \subset RA$ puesto

que si $y \in RA$, $x \in A$, $yx = I_x(y)$ luego $(RA)A \subset T(A)RA$ y

como acabamos de ver, $T(A)RA \subset RA$ luego $(RA)A \subset RA$.

En resumen, si A es una algebra de dimensión finita diferente de $\{0\}$,

RA es un ideal bilateral propio de A .

Además por la definición de RA es claro que $RA = \{0\}$ si y solo

si $R = \{0\}$.

Recordemos que nuestro fin es probar la existencia del radical $R(A)$

en el caso no asociativo. Para probar esta existencia debemos probar

primero el siguiente teorema fundamental, el cual nos relaciona la

semi-simplicidad de $T(A)$ con la de A .

2.9 TEOREMA FUNDAMENTAL: Sean K un cuerpo, A una K -algebra
diferente de $\{0\}$ de dimensión finita, $T(A)$ el algebra definida ante-

riormente. Entonces $T(A)$ es una algebra semi-simple si y solamente si alguna de las condiciones siguientes se verifica:

- i) A es una algebra semi-simple,
- o ii) A es una cero-algebra,
- o iii) A es una suma directa de una algebra semi-simple con una cero-algebra.

Con el fin de agilizar la demostración de este teorema, daremos antes una serie de lemas.

LEMA 1: Sean K y A como en el teorema fundamental, B un ideal bilateral de A . Entonces existe un elemento idempotente $e \in \text{End}_K(A)$ ($e^2 = e$) tal que $B = eA$.

En efecto, si B es un ideal bilateral entonces A es isomorfa al algebra $A' = A/B \oplus B$. Definimos el endomorfismo $e: A \rightarrow A$ como la siguiente composición de homomorfismos canónicos:

$$e: A \xrightarrow{\sim} A' \longrightarrow A'/(A/B) \xrightarrow{\sim} B \hookrightarrow A$$

$$a \longmapsto a' = c + b \longmapsto b + A/B \longmapsto b \longmapsto b$$

donde $a \in A$, $a' \in A'$, $c \in A/B$, $b \in B$.

Con esta definición es inmediato que $e^2 = e$ y $eA = B$. \square

LEMA 2: Sean K y A como en el teorema fundamental, B una K -subálgebra de A para la que existe un elemento idempotente $e \in \text{End}_K(A)$ tal que $B = eA$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) B es un ideal bilateral de A
- ii) $eT(A)e = T(A)e$
- iii) $ete = te$ para todo t en $T(A)$

Antes que todo observemos que $B = eA$ implica que $b = e(b)$ para todo $b \in B$. En efecto, si $b \in B$ existe a en A tal que $e(a) = b$ luego $e^2(a) = e(b)$ pero $e^2(a) = e(a)$ y así $e(b) = b$.

Supongamos ahora que B es ideal bilateral, para probar ii) basta probarla en los generadores de $T(A)$. Sean x, y en A , $eD_x e(y) = e(xe(y))$, como $e(y) \in B$, $xe(y) \in B$ y $e(xe(y)) = xe(y) = D_x e(y)$ luego $eD_x e = D_x e$ para todo x en A . Similarmente $eI_x e = I_x e$ para todo x en A . Luego i) \Rightarrow ii).

Supongamos que $eT(A)e = T(A)e$ entonces si t es un elemento de $T(A)$ existe $t_1 \in T(A)$ tal que $et_1e = te$ luego $e^2t_1e = ete$

pero $e^2 t_1 e = e t_1 e$ y así $e t e = t e$ para todo t en $T(A)$. Queda probado $ii) \Rightarrow iii)$.

Supongamos ahora que $e t e = t e$ para todo t en $T(A)$ y sean $x \in A$, $b \in B$ entonces: $e D_x e(b) = D_x e(b)$ es decir $e(xb) = x b$ luego $xb \in B$ pues $eA = B$. Y como $e l_x e(b) = l_x e(b)$ entonces $bx \in B$. Luego B es un ideal bilateral. Es decir $iii) \Rightarrow i)$. \square

LEMA 3: Sean K y A como en el teorema fundamental, B un ideal bilateral de A entonces $T(A)B = B$.

En efecto, basta demostrarlo para los generadores de $T(A)$. Para la identidad es evidente. Sean $x \in A$, $b \in B$ entonces $l_x(b) = xb \in B$ y $D_x(b) = bx \in B$. \square

LEMA 4: Sean K y A como en el teorema fundamental. B un ideal bilateral de A para el que existe un elemento $e \in \text{End}_K(A)$ idempotente ($e^2 = e$) tal que $eA = B$. Si $G = eT(A) \cap T(A)$ entonces:

i) $G = \{ t / t \in T(A) \text{ y } e t = t \}$

ii) G es un ideal bilateral de $T(A)$

iii) $T(A)G = G$.

En efecto es evidente que $\{t'/t \in T(A) \text{ y } et = t\} \subset G$. Sea ahora $t \in G$, luego $t \in eT(A)$, es decir $t = et'$ con t' en $T(A)$, por la idempotencia de e , se prueba que $t = et$, luego i) queda probado.

Sean $t \in G$, $h \in T(A)$. Entonces $et = t$ y así $th = eth$, por i) $th \in G$.

Por otro lado $ht = het$ es decir $eht = eh et$, y como B es ideal bilateral, por el lema 2, $ehe = he$, luego $eh et = het$ pero $et = t$, así $eht = ht$, y por i) $ht \in G$. Queda probado que G es un ideal bilateral de $T(A)$

La demostración de iii) es evidente pues por ii) $T(A)G \subset G$, y como $T(A)$ tiene unidad, entonces $G \subset GT(A)$. \square

LEMA 5: Sean K, A, B y G como en el lema 4. Entonces las K -álgebras $T(A)/G$ y $T(A/B)$ son isomorfas.

En efecto si t pertenece a $T(A)$ existe un único endomorfismo \bar{t} de A/B perteneciente a $T(A/B)$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{t} & A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A/B & \xrightarrow{\bar{t}} & A/B
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son los homomorfismos canónicos. Consideremos la aplicación $\Phi : T(A) \longrightarrow T(A/B)$, es fácil ver que Φ es un homomorfismo de K -álgebras sobreyectivo. Probemos que $\text{Ker}(\Phi) = G$.

Sea $t \in \text{Ker}(\Phi)$ entonces $\bar{t}(\bar{x}) = 0$ para todo $\bar{x} \in A/B$, luego $t(x) \in B$, por la observación hecha al comienzo de la demostración del lema 2, $e(t(x)) = t(x)$ luego $et = t$ y así $t \in G$ (por i) del lema 4). Así pues $\text{Ker}(\Phi) \subset G$. Para probar el recíproco basta invertir los pasos anteriores. \square

Diremos que un elemento x de A , $x \neq 0$ es un DIVISOR ABSOLUTO DE CERO si para todo y en A $xy = yx = 0$.

Obsérvese que A es una cero-álgebra (II 2.6) si y solo si para todo x en A , x es divisor absoluto de cero.

LEMA 6: (Lema de Jacobson)

Sea K un cuerpo y A una K -álgebra de dimensión finita que no tiene divisores absolutos de cero. Entonces A es una K -álgebra simple si y solo si $T(A)$ es una K -álgebra simple.

Debido a la longitud de esta demostración, no la haremos, ella se puede encontrar en el artículo [4].

Después de estos 6 lemas nos encontramos en disposición de probar el teorema fundamental.

Bajo las hipótesis de dicho teorema, probemos primero que si $T(A)$ es semi-simple entonces

- i) A es semi-simple, o
- ii) A es una cero-álgebra, o
- iii) A es la suma directa de una álgebra semi-simple con una cero-álgebra.

En efecto, si $T(A) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ con E_i álgebra simple ($i = 1, \dots, n$). Si 1 es la función identidad $\in T(A)$ entonces $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, donde e_i es el elemento unidad de E_i ($i = 1, \dots, n$) y además es inmediato observar que $e_i e_j = 0$

si $i \neq j$ y que $e_i^2 = e_i$. Además también es claro que $E_i = e_i T(A)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Observemos que e_i ($i = 1, \dots, n$) conmuta con cualquier elemento de $T(A)$. En efecto si $h \in T(A)$, $h = h_1 + \dots + h_n$ con $h_i \in E_i$ ($i = 1, \dots, n$), luego $e_i h = e_i (h_1 + \dots + h_n) = e_i h_i = h_i e_i = (h_1 + \dots + h_n) e_i = h e_i$.

Denotemos $e_i(A)$ por A_i . Como $e_i T(A) e_i = T(A) e_i e_i = T(A) e_i$ (pues e_i conmuta con los elementos de $T(A)$ y $e_i^2 = e_i$) entonces por el lema 2, A_i es un ideal bilateral de A .

Además $1(A) = e_1(A) + \dots + e_n(A)$ y $e_i(A) \cap e_j(A) = \{0\}$ si $i \neq j$, en efecto, si existen $a, b \in A$ tales que $e_i(a) = e_j(b)$ entonces $e_i^2(a) = e_i e_j(b) = 0$ luego $e_i(a) = 0$. Así pues $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$.

Supongamos que A no tiene divisores absolutos de cero y probemos así que cada A_i es simple.

Escribamos a $A = A_i \oplus B_i$ donde $B_i = \bigoplus_{j \neq i} A_j$.

Como $1 = e_i + 1 - e_i$ entonces $T(A) = e_i T(A) \oplus (1 - e_i) T(A)$

donde $(1 - e_i)^2 = 1 - e_i$ y además es claro que $(1 - e_i)(A) = B_i$.

Si llamamos $(1 - e_i)T(A)$ por G_i , tenemos que $T(A) = E_i \oplus G_i$ (pues $E_i = e_i T(A)$) y como $G_i \subset T(A)$ entonces en realidad $G_i = (1 - e_i)T(A) \cap T(A)$ y así G_i y B_i cumplen las hipótesis del lema 5. Luego $T(A)/G_i \cong T(A/B_i)$ pero como G_i es el suplementario de E_i , $E_i \cong T(A)/G_i$ y como B_i es el suplementario de A_i , $A/B_i \cong A_i$ luego $E_i \cong T(A_i)$ y así A_i es simple (Lema 6).

Luego A es semi-simple.

Por otro lado si A tiene divisores absolutos de cero, sea N el conjunto de ellos. Es evidente que N es un ideal bilateral de A.

Si $N = A$ entonces A es una cero-algebra.

Si por el contrario $N \neq A$, como N es un ideal bilateral, por el lema 1, existe e en $\text{End}_K(A)$ tal que $N = eA$.

Como $A = 1A = (1 - e)A \oplus eA$, denotemos a $(1 - e)A$ por B y probemos que B es semi-simple. Observemos que B no tiene divisores absolutos de cero, pues $eA = N$ que es el conjunto de todos ellos.

Sean $x = b_1 + n_1$, $y = b_2 + n_2 \in A$, con $b_1, b_2 \in B$ y $n_1, n_2 \in N$. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (1-e)D_x(y) &= (1-e)(xy) = (1-e)(b_1 b_2 - n_1 n_2) \\ &= (1-e)(b_1 b_2) = b_1 b_2 = D_{b_1}(b_2) \end{aligned}$$

(1) (2)

(1) por el lema 1.

(2) por la observación del lema 2.

Similarmente $(1-e)l_x(y) = l_{b_1}(b_2)$, estas dos igualdades me

implican $T(B) = (1-e)T(A)$, luego

$$T(B) = (1-e)E_1 \oplus \dots \oplus (1-e)E_n.$$

Veamos que cada $(1-e)E_i$ es un ideal bilateral de E_i ($i=1, \dots, n$).

En efecto sea $g = (1-e)t$ con $t \in E_i$ y sea $f \in E_i$, entonces es

evidente que $gf = (1-e)tf \in (1-e)E_i$. Por otro lado si x, y son

como dijimos arriba, entonces $(1-e)D_x(y) = D_{b_1}(b_2) = D_x((1-e)(y))$,

es decir $(1-e)D_x = D_x(1-e)$, similarmente $(1-e)l_x = l_x(1-e)$,

luego el elemento $(1-e)$ conmuta con todos los elementos de $T(A)$.

Así pues $f(1-e)t = (1-e)ft \in (1-e)E_i$. Luego $(1-e)E_i$ es un

ideal bilateral de E_i ($i=1, \dots, n$) y como cada E_i es simple entonces

$(1-e)E_i = E_i$ o $(1-e)E_i = \{0\}$ ($i=1, \dots, n$), de todas maneras

$T(B)$ es semi-simple, y por i) de esta demostración, concluimos que B es semi-simple. Luego A es la suma directa de una algebra semi-simple con una cera-algebra.

□

Probemos en seguida el recíproco del teorema.

a) Supongamos que A es semi-simple es decir $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ con cada $A_i \neq \{0\}$ simple ($i = 1, \dots, n$).

Como cada A_i es un ideal bilateral existe un elemento $e_i \in \text{End}_K(A)$ idempotente tal que $e_i A = A_i$, por la definición de e_i (lema 1) si $a = a_1 + \dots + a_n$ ($a_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$) entonces $e_i(a) = a_i$, y según esta es evidente que $e_i e_j = 0$ ($i \neq j$) y $1 = e_1 + \dots + e_n$.

Por el lema 2 $t e_i = e_i = e_i t e_j$ ($i = 1, \dots, n$) para todo $t \in T(A)$ y si R es el radical de el algebra $T(A)$ tenemos que $r e_i = e_i r e_j$ para todo $r \in R$, ($i = 1, \dots, n$) es decir $e_i R e_j = R e_j$.

Denotemos a $R e_i$ por R_i , como $R = R e_1 \oplus \dots \oplus R e_n$ entonces

$R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ y como R es un ideal bilateral nilpotente, cada R_i es

un ideal bilateral nilpotente de la subalgebra $T(A) e_i$, ($i = 1, \dots, n$).

Ahora, como $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ es claro que $RA = \bigoplus_{i=1}^n R_i A_i$ donde

cada $R_i A_i$ es un ideal bilateral de A_i , donde A_i es simple ($i = 1, \dots, n$) entonces $R_i A_i = A_i$ o $R_i A_i = \{0\}$, por el segundo párrafo de II 2.8, como R_i es nilpotente y $A_i \neq \{0\}$ entonces $R_i A_i \neq A_i$ luego $R_i A_i = \{0\}$ para $i = 1, \dots, n$, es decir $RA = \{0\}$ (II 2.8) luego $R = \{0\}$.

Ya que A es de dimensión finita, $T(A)$ también lo es, o sea que es artiniana con radical cero y por la proposición II 1.5 $T(A)$ es una algebra semi-simple.

b) Si A es una cero-algebra entonces $T(A) \cong K$ (II 2.6) luego $T(A)$ es semi-simple, puesto que K es un cuerpo.

c) Supongamos ahora que $A = B \oplus N$ donde B es semi-simple y N una cero-algebra. Como $T(A) \cong T(B) \oplus T(N)$, y por los casos a) y b) anteriores $T(B)$ y $T(N)$ son semi-simples entonces $T(A)$ es semi-simple. \square

2.10 EXISTENCIA DEL RADICAL PARA ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS

Si K es un cuerpo y A es una K -algebra no asociativa diferente

de $\{0\}$ de dimensión finita probaremos la existencia de su radical bajo ciertas condiciones.

Sea $T(A)$ el algebra definida en II 2.5, R su radical, por II 2.8 R es un ideal nilpotente y además RA es un ideal bilateral propio de A .

Como $T(A)$ es de dimensión finita y tiene unidad por (II 1.2 (i)) $T(A)/R$ es semi-simple.

Antes de continuar, observemos que para todo endomorfismo $t : A \rightarrow A$, $t(RA) \subseteq RA$, puesto que R es un ideal bilateral. Por paso a los cocientes existe un único endomorfismo \bar{t} de A/RA tal que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{t} & A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A/RA & \xrightarrow{\bar{t}} & A/RA
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son canónicas. Si consideramos a $\Phi : T(A) \rightarrow T(A/RA)$ es fácil probar que Φ es un homomorfismo sobreyectivo tal que $\text{Ker}(\Phi) = R$. Luego $T(A)/R$ es isomorfa a $T(A/RA)$.

2.11 Luego $T(A/RA)$ es semi-simple y como además $A/RA \neq \{0\}$ y es de dimensión finita, por el teorema fundamental (II 2.9) se verifica alguna de las condiciones siguientes :

- i) A/RA es semi-simple, o
- ii) A/RA es una cero-algebra, o bien
- iii) A/RA es una suma directa de un algebra semi-simple con una cero-algebra .

Vamos a mostrar que el radical de A existe solamente para los casos i) y iii).

2.12 Probemos ahora que si B es un ideal bilateral de A tal que A/B es semi-simple entonces $RA \subset B$.

En efecto sea $e \in \text{End}_K(A)$ tal que $e^2 = e$ y $eA = B$ (lema 1) y si $G = eT(A) \cap T(A)$ por el lema 5, $T(A)/G \cong T(A/B)$, y como A/B es semi-simple, por el teorema fundamental $T(A/B)$ es semi-simple luego $T(A)/G$ también lo es, y por II 2.3 el radical R de $T(A)$ es subconjunto de G (II 2.3).

Por otro lado para todo t en G , $et = t$ (lema 4) entonces para todo r en R , $er = r$, es decir $R = eR$ y así $RA = eRA \subset eG \subset eA = B$

luego $RA \subset B$.

Así pues si se da el numeral i) de II 2.11 RA es el ideal bilateral mínimo entre los ideales bilaterales B tales que A/B es semi-simple. Luego en este caso existe el radical de A y este es igual a RA .

Antes de considerar el numeral ii) de II 2.11 supongamos que se verifica el numeral iii), es decir $A/RA = C \oplus N$ donde C es una algebra semi-simple y N es una cero-algebra.

Si $\Theta: A \longrightarrow A/RA = C \oplus N$ es el homomorfismo canónico entonces por paso a los cocientes, existe un único isomorfismo f tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Theta} & C \oplus N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A/\Theta^{-1}(N) & \xrightarrow{\sim f} & (C \oplus N)/N \cong C
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son canónicas.

Como C es semi-simple $A/\Theta^{-1}(N)$ es semi-simple y por II 2.12, $RA \subset \Theta^{-1}(N)$. Y así $\Theta^{-1}(N)/RA \cong N$ o sea $\Theta^{-1}(N) \cong N \oplus RA$.

Denotemos a $N \oplus RA$ por R_0 y probemos que R_0 es el radical de

A. Por el diagrama vimos que A/R_0 es semi-simple. Si B es un ideal bilateral tal que A/B es semi-simple, ya probamos que $RA \subset B$ y como A/B es semi-simple es fácil probar que A/B no puede tener divisores absolutos de cero, luego necesariamente $N \subset B$ luego $R_0 = N \oplus RA \subset B$.

Queda entonces probada la existencia del radical cuando se da el numeral iii) de II 2.11.

Consideremos el numeral ii) de II 2.11, es decir supongamos que A/RA es una cero algebra, veamos que en este caso no se puede definir el radical.

En efecto si existiera un ideal bilateral B tal que A/B sea semi-simple entonces como $RA \subset B$ por el isomorfismo $(A/RA)/(B/RA) \cong A/B$ tendríamos que A/B también sería una cero-algebra lo que va en contra de su semi-simplicidad. Luego en ii) no se puede definir el radical de la forma II 2.2. \square

2.13 NOTA: Obsérvese que si A tiene unidad el caso ii) no se dá, pues por II 2.6, $A/RA = \{0\}$ es decir $A = RA$, Absurdo!.

CONCLUSIONES

A continuación resumiremos rápidamente el trabajo que acabamos de hacer.

En el primer capítulo probamos que la definición de radical de un anillo cualquiera contiene (como era de esperar) todas las definiciones dadas en los casos de anillos particulares.

En el segundo capítulo hemos visto que la definición del radical de un álgebra asociativa cualquiera contiene a su vez la del radical de un anillo cualquiera. Por otro lado, para estudiar el radical de las álgebras no asociativas, tuvimos que concentrarnos en las álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo. Vimos también, que la definición de radical dada en este caso coincide con la definición del radical, del caso asociativo, siempre que el álgebra tuviese unidad y fuese de dimensión finita (sobre un cuerpo). Además probamos que si A es un álgebra no asociativa de dimensión finita (sobre un cuerpo) para la cual existe un ideal B tal que A/B es semi-simple, entonces su radical existe. Aún más, en la nota II 2.13, concluimos que si el álgebra tiene unidad, entonces su radical siempre existe.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERT, A.A. "The radical of a non associative algebra", Bull Amer. Math. Soc 48(1942), pp. 891-897.
- [2] ATHIYAH, M.F. & MAC DONALD, I.G. "Introducción al Algebra Conmutativa", Ed. Reverté S.A. Barcelona, 1975.
- [3] BIRKHOFF, G. "The radical of a group with operators", Bull. Amer. Math. Soc. 49(1943), pp. 751-753.
- [4] JACOBSON, N. "A note on non-associative algebras", Duke Math. Journal, 3(1937), pp. 544-588.
- [5] JACOBSON, N. "The radical and semi-simplicity for arbitrary rings", Am. J. Math. 67(1945), 300-320.
- [6] LEVITZKI, J. "On the radical of a general ring", Bull. Amer. Math. Soc., 49(1943), pp. 462-466.
- [7] MICALI, A. "Algèbres non associatives". Notas de curso. Montpellier, 1978.
- [8] PERLIS, S. "A characterization of the radical of an algebra", Bull. Amer. Math. Soc. 48(1942), pp. 128-132.
- [9] PIERCE, R.S. "Associative Algebras", Springer Verlag. New York, 1980.
- [10] TEJADA, D. "Teoría de Algebras". Publ. Universidad Nacional, Medellín, Feb. 1986.