3. FLUJO LIBRE

3.1 INTRODUCCION.

Como se indicó en el numeral 1.5 del capítulo primero el flujo libre se caracteriza porque la cara superior de la masa de fluido está en contacto con la atmósfera. Sobre esta cara la presión es generalmente igual a la presión atmosférica, en algunos casos de flujo libre en conducto cerrado la presión sobre la cara superior del líquido puede ser mayor o menor que la atmosférica. El flujo libre sólo puede existir para los líquidos y dentro de éstos el más común es el agua.

Todos los estudios experimentales de flujo libre se han hecho con agua, pero utilizando los principios de la mecánica de fluidos se pueden generalizar las ecuaciones hidráulicas para ser aplicadas al flujo libre de líquidos diferentes del agua.

En la mayoría de los problemas de flujo libre las líneas de flujo son paralelas o sensiblemente paralelas y la distribución de presiones dentro de la masa líquida es hidrostática. La presión sobre la superficie del líquido es constante e igual a la presión de la atmósfera sobre ella. Debido a la presión constante sobre la superficie del líquido y a la distribución hidrostática de presiones la línea piezométrica coincide con la superficie del agua para todas las líneas del flujo.

La figura No. 22 presenta los cortes transversal y longitudinal de un canal. La posición del fondo del canal con respecto al plano de referencia está medida por z. La profundidad del canal o distancia desde la superficie líquida hasta el punto más bajo de la sección se designa por y. La energía cinética se toma como $V^2/2g$ porque α es generalmente cercano a la unidad. La energía total medida con respecto al plano de referencia se designa por $H = z + y + V^2/2g$. La energía medida con respecto al fondo del canal se denomina energía específica y se designa con la letra $E = y + V^2/2g$. La pérdida de energía entre dos secciones del canal se designa por h_f.

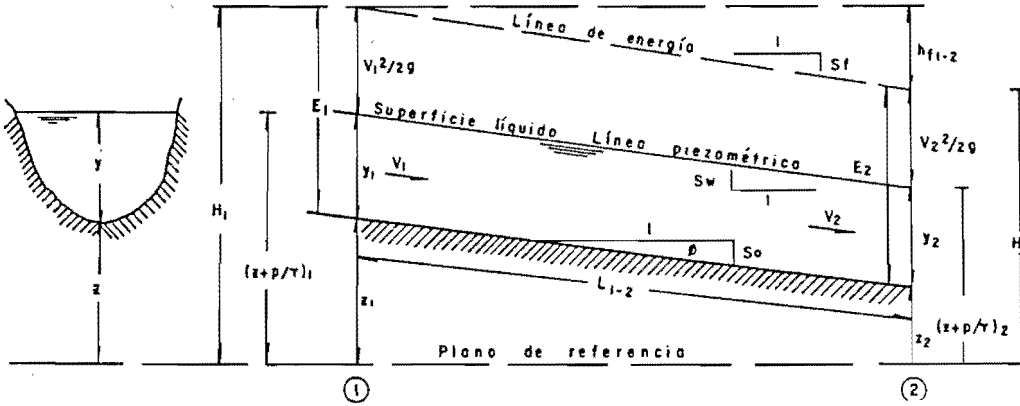


Figura 22

La pendiente del fondo del canal es un valor importante en estos problemas. Llamando θ al ángulo que el canal forma con la horizontal y L la distancia entre dos secciones medida a lo largo del canal se tiene: $\operatorname{sen}\theta = (z_1 - z_2)/L$. Cuando las secciones son muy próximas $\operatorname{sen}\theta = dz/dL$. Las pendientes de los canales son generalmente muy pequeñas y esto permite hacer $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg}\theta = S_o$. En la mayoría de los problemas de canales se usa la pendiente del canal $S_o = \operatorname{tg}\theta$ en vez de $\operatorname{sen}\theta$.

La pendiente de la línea de energía se designa por S_f y la de la superficie del líquido por Sw.

3.2 CLASIFICACION DEL FLUJO LIBRE.

Internamente el flujo libre puede ser laminar o turbulento con las mismas características del flujo confinado. Externamente el flujo en canales puede variar con el espacio y con el tiempo. Cuando la profundidad del líquido "y" permanece constante a lo largo del canal el flujo se denomina uniforme. Cuando "y" varía a lo largo del canal el flujo se llama variado. Cuando la variación de "y" a lo largo del canal es pequeña y las líneas de flujo se conservan sensiblemente paralelas el flujo se llama gradualmente variado. Si "y" varía muy rápido y las líneas de flujo presentan curvatura apreciable el flujo se denomina rápidamente variado.

La profundida de flujo "y" puede variar con el tiempo o permanecer constante con éste. Cuando "y" no varía con el tiempo el flujo se denomina estable o permanente, en caso contrario el flujo se denomina inestable o no permanente.

Se llama velocidad crítica a la velocidad de traslación de una onda elemental de

gravedad generada en un canal. Cuando la velocidad media del líquido en el canal es igual a la velocidad crítica el flujo se denomina crítico. Si la velocidad media del líquido es mayor que la crítica el flujo se llama supercrítico y si es menor que la crítica subcrítico.

Las cuatro bases de clasificación del flujo en canales definidos anteriormente son independientes y un problema de flujo en canales cumple con un caso de cada una de las cuatro clasificaciones, sin embargo hay combinaciones de las diferentes clasificaciones que no son físicamente posibles. Por ejemplo el flujo uniforme no permanente es físicamente imposible porque si existiera la superficie del líquido tendría que variar con el tiempo permaneciendo paralela al fondo del canal lo cual es imposible en la realidad.

En la mayoría de los casos de flujo libre el flujo es turbulento. El flujo libre laminar se presenta en muy pocos casos por ejemplo en drenaje de aguas lluvias en superficies planas en capas de muy poco espesor.

3.3 ECUACION RACIONAL PARA EL FLUJO UNIFORME.

El flujo uniforme puede ser: laminar o turbulento, crítico, subcrítico o supercrítico. En todos los casos debe ser permanente.

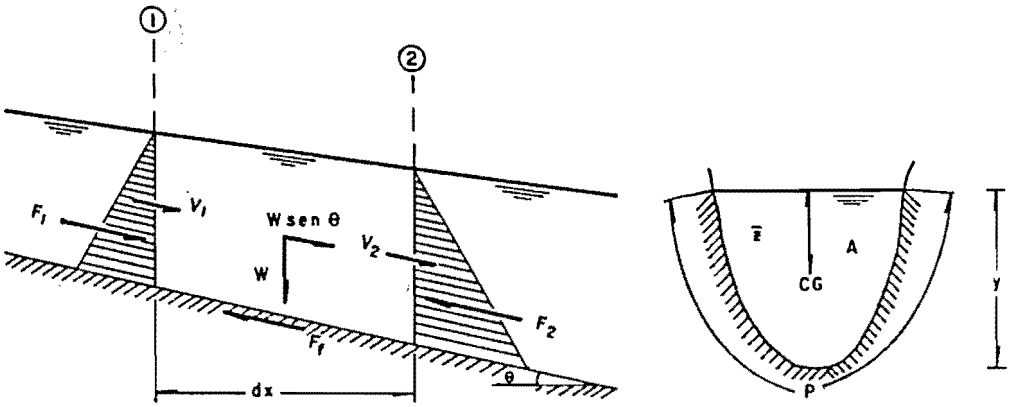


Figura 23

La figura No. 23 muestra un sector de un canal prismático y su sección transversal. Se llama canal prismático al que tiene pendiente de fondo constante y la forma y tamaño de su sección transversal constantes. Se toma una fracción del canal de longitud dx y se aisla como un cuerpo libre. Sobre el cuerpo libre actúan las siguientes fuerzas: presiones hidrostáticas F_1 y F_2 en las dos caras extremas, $F = \gamma \bar{z} A$ en donde γ es el peso específico del líquido $\bar{z}$ es la distancia

vertical del centro de gravedad de la sección transversal a la superficie del líquido y A el área de la sección transversal. Fricción en la superficie del canal $Ff = \tau_o Pdx$ en donde τ_o es el esfuerzo unitario de fricción, P el perímetro húmedo o de contacto entre líquido y canal, y dx la longitud del sector de canal. Peso del líquido contenido en el volumen de control $W = \gamma Adx$. Al aplicar la ecuación de momento lineal en dirección paralela al fondo del canal se tiene:

$$F_1 - F_2 + W\text{sen}\theta - Ff = \rho Q(V_2 - V_1) \qquad (65)$$

ρ es la densidad del líquido y Q el gasto o descarga del canal, $Q = AV$ y V es la velocidad media de la sección. Como el flujo es permanente Q es constante. Considerando la superficie del canal como una lámina curvada con flujo paralelo a ella, la fuerza de fricción es igual a la fuerza de dragado ejercida por el líquido sobre la lámina, esta fuerza puede expresarse como $Ff = \tau_o Pdx = C\rho V^2 Pdx/2$ en donde C es una constante que depende de las características del líquido, la superficie del canal y la velocidad de flujo. Cuando a la entrada de un canal la velocidad es muy baja el área de la sección (1) es muy grande y F_1 es mayor que F_2, como la fuerza de fricción es proporcional a V tiene un valor muy pequeño en este caso $F_1 + W\text{sen}\theta > F_2 + Ff$ en la ecuación (65) y $V_2 > V_1$, lo cual indica que el flujo se acelera al avanzar en el canal. Al aumentar la velocidad aumenta Ff y disminuyen F_1 y $W\text{sen}\theta$, hasta llegar a un punto en donde las fuerzas del lado izquierdo de la ecuación (65) se equilibran y se tiene $\rho Q(V_2 - V_1) = 0$, $V_1 = V_2$, y $F_1 = F_2$. Si $F_1 = F_2$, $y_1 = y_2$, lo cual indica que la profundidad del canal no varía y el flujo es uniforme.

Cuando a la entrada del canal la velocidad es muy alta la fuerza de fricción es muy grande y el lado izquierdo de la ecuación (65) es negativo, en este caso $V_2 < V_1$. El flujo se retarda al avanzar en el canal. Al disminuir la velocidad disminuye la fuerza de fricción, aumenta la profundidad de flujo y aumenta el peso del agua contenido en el volumen de control, hasta que finalmente se alcanza un equilibrio en las fuerzas del lado izquierdo de la ecuación (65). Como en el primer caso se produce:

$\rho Q(V_2 - V_1) = 0 = F_1 - F_2 + W\text{sen}\theta - Ff$, luego $V_1 = V_2$ y esto implica que $y_1 = y_2$ y $F_1 = F_2$, la simplificación de esta ecuación produce la igualdad $W\text{sen}\theta - Ff = 0$.

Las dos condiciones extremas detalladas anteriormente demuestran que si el canal es suficientemente largo, independientemente de la velocidad a la entrada el flujo tiende a ser uniforme.

Reemplazando Ff y W por sus valores en la igualdad anterior se tiene: $\gamma Adx\ \text{sen}\theta - C\rho V^2 Pdx/2 = 0$. Al simplificar resulta: $V^2 = 2g\ R\ \text{sen}\theta/C$. En donde $R = A/P$ es el radio hidráulico.

El ángulo θ que forma el canal con el plano horizontal es muy pequeño y se puede tomar $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg}\theta = S_o$ en donde S_o es la pendiente del fondo del canal. Al hacer esta sustitución y despejar se obtiene:

$$V = \sqrt{2/C}\ \sqrt{gRS_o}$$

Cuando el flujo es uniforme la profundidad de flujo y la velocidad media son constantes a lo largo del canal, luego la superficie líquida y la línea de energía son paralelas al fondo del canal y $S_o = Sw = Sf$.

Si en la ecuación obtenida anteriormente para la velocidad media del flujo uniforme en canales se hace $C = f/4$, se obtiene la ecuación (32) deducida para flujo confinado, lo cual indica que la ecuación racional puede aplicarse al cálculo del flujo uniforme en canales si se usa un valor apropiado para el coeficiente de fricción f.

$$V = \sqrt{8/f}\ \sqrt{gRS} \qquad (32)$$

El factor de fricción f para canales posee características similares al del flujo confinado, es función del número de Reynolds y la rugosidad relativa del material. Para aplicar la ecuación (32) a canales se toma un diámetro equivalente $De = 4R$, la rugosidad relativa es $e/4R$ y el número de Reynolds.

$$R = 4VR/\nu$$

El factor de fricción depende también de la forma de la sección del canal. En la mayoría de los casos de canales que se presentan en la práctica el flujo es turbulento con superficie hidráulicamente rugosa; como una aproximación pueden usarse para estos casos las ecuaciones (32) y (57) deducidas para el flujo confinado en tuberías. Las ecuaciones deducidas anteriormente son aplicables al flujo uniforme en canales prismáticos exclusivamente.

3.4 ECUACIONES EMPIRICAS PARA EL CALCULO DEL FLUJO UNIFORME.

En la ecuación (32) se puede tomar $\sqrt{8g/f} = C$ y al reemplazar se obtiene:

$$V = C\sqrt{RS} \qquad (66)$$

La ecuación (66) se conoció desde el siglo diez y ocho y se ha utilizado mucho para el cálculo de flujo en canales. Esta ecuación fue obtenida experimentalmente por el ingeniero francés Antoine Chezy en 1775 y se conoce con el nombre del experimentador. El coeficiente C se conoce como coeficiente de Chezy, inicialmente se creyó que este valor era una constante para cada material pero este valor varía con las características del canal. Durante el siglo pasado se pro-

pusieron muchas ecuaciones para C, las más conocidas fueron las de: Bazin, Cangille y Kutten y la de Manning.

Robert Manning basado en sus propias experiencias y en las medidas experimentales de flujo hechas en canales naturales por otros, propuso una ecuación para C que con posteriores modificaciones hechas por otros tomó la forma $C = R^{1/6}/n$. En esta ecuación n es un coeficiente característico del material en que está construido el canal. Al reemplazar la ecuación anterior en la de Chezy se obtiene la ecuación conocida con el nombre de Chezy-Manning o simplemente de Manning.

$$V = R^{2/3} S_o^{1/2} / n \tag{67}$$

En sistema inglés la ecuación de Manning toma la forma $V = 1{,}486\, R^{2/3}\, S_o^{1/2} / n$, en donde R se expresa en pies y V se obtiene en pies/segundo.

La ecuación de Manning da buenos resultados y es la más utilizada en la actualidad para el cálculo del flujo en canales, en los libros de hidráulica o de flujo en canales se encuentran tablas con valores de n para un gran número de canales. El coeficiente n varía desde valores tan bajos como $n = 0{,}0080$ para canales con pared de vidrio o plástico hasta $n = 0{,}500$ y aún valores mayores para canales naturales con piedras grandes y arbustos en el fondo; se requiere una buena experiencia para escoger un valor apropiado de n para un canal dado. El coeficiente n no corresponde a un parámetro físico que puede ser apreciado por los sentidos humanos y por esta razón es difícil de estimar, además para un canal dado n varía con la profundidad de flujo.

Estas dificultades en el uso de la ecuación de Manning hacen que sea más recomendable utilizar la ecuación racional (32) para calcular el flujo uniforme en canales.

Las ecuaciones (32) y (57) toman la forma:

$$V = \sqrt{8/f}\, \sqrt{gRS_o} \tag{32}$$

$$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log(4R/e) \tag{33}$$

Aunque la ecuación (57) se obtuvo para flujo turbulento en tuberías con superficie hidráulicamente rugosa, al aplicarla al cálculo del flujo uniforme en canales da resultados aceptables.

La rugosidad absoluta del material e para flujo en canales tiene el mismo valor que para flujo en tuberías del mismo material. Para materiales no usados en tuberías es fácil estimar el valor de rugosidad absoluta y debido a la forma de la ecuación (57) los errores cometidos en el estimativo de e tienden a minimizarse.

Para establecer una relación entre "n" y "f" se igualan las ecuaciones (32) y (67), se simplifica y se obtiene:

$$n = R^{1/6} \sqrt{f/8g} = R^{1/6} / (\sqrt{8g}\,(1{,}14 + 2 \log (4R/e))) \qquad (68)$$

La ecuación (68) muestra que n depende no sólo de la rugosidad absoluta del material sino también del radio hidráulico siempre que se tenga turbulencia total. Esta condición es la más común para el flujo en canales.

Problema No. 19

Se tienen dos canales de sección rectangular de ancho B = 2,00 m el primero con superficie de mortero de cemento con e = 1,0 mm, el segundo con superficie de piedra pegada con mortero de cemento con e = 30,0 mm la pendiente de los dos canales es S_o = 0,01 calcular para varias profundidades de flujo n, V, Q.

$R = By/(B + 2y)$, $B = 2{,}00$ m , y = profundidad de flujo

$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log(4R/e)$, $n = R^{1/6} \sqrt{f/8g}$

$V = \sqrt{8/f}\,\sqrt{gRS_o}$, $Q = ByV$

Al reemplazar los valores numéricos en las ecuaciones anteriores se obtiene:

y m	n_1	V_1 m/s	Q_1 m^3/s	n_2	V_2 m/s	Q_2 m^3/s
0,50	0,01273	3,78	3,78	0,02120	2,27	2,27
1,00	0,01300	4,85	9,69	0,02102	3,00	6,00
1,50	0,01313	5,42	16,26	0,02097	3,39	10,18
2,00	0,01321	5,78	23,11	0,02095	3,64	14,57
2,50	0,01326	6,02	30,13	0,02095	3,81	19,07
3,00	0,01330	6,21	37,24	0,02094	3,94	23,65

Los resultados numéricos muestran que cuando la rugosidad absoluta es pequeña n aumenta ligeramente con la profundidad de flujo, cuando la rugosidad absoluta es grande n disminuye ligeramente al aumentar la profundidad. En ambos casos la variación de n es muy pequeña, por esta razón la ecuación de Manning con n constante da buenos resultados y esa es la causa de su amplia aplicación. Pero en la actualidad es más recomendable usar la ecuación racional y estimar el valor de la rugosidad absoluta del material.

3.4.1 Valores experimentales para los coeficientes de fricción.

La tabla No. 2 presenta valores de n recomendados para el cálculo de flujo uniforme en canales hechos con los materiales de uso más común, presenta además

los valores de e para estos materiales calculados a partir de los valores de n usando la ecuación (68) con R = 1,0 m. Los valores de n se tomaron de "Open Channel Hidraulics" por Ven Te Chow.

TABLA No. 2

Material	"n" Mínimo	"n" Normal	"n" Máximo	"e" mm Mínimo	"e" mm Normal	"e" mm Máximo
Acero liso pintado	0,012	0,013	0,017	0,293	0,673	7,085
Mortero de cemento	0,011	0,013	0,015	0,109	0,673	2,555
Madera pulida sin tratar	0,010	0,012	0,014	0,034	0,293	1,376
Madera pulida tratada	0,011	0,012	0,015	0,109	0,293	2,555
Madera sin pulir	0,011	0,013	0,015	0,109	0,673	2,555
Concreto pulido	0,011	0,013	0,015	0,109	0,673	2,555
Concreto pulido y cascajo en fondo	0,015	0,017	0,020	2,555	7,085	22,315
Concreto sin pulir	0,014	0,017	0,020	1,376	7,085	22,315
Gunita	0,016	0,019	0,023	4,393	15,849	52,105
Gunita sobre roca lisa	0,017	0,020		7,085	22,315	
Gunita sobre roca irregular	0,022	0,027		40,297	120,394	
Fondo cascajo, muros concreto	0,017	0,020	0,025	7,085	22,315	81,901
Fondo cascajo, muros piedra con mortero	0,020	0,023	0,026	22,315	52,105	100,038

Problema No. 20.

Un canal de sección rectangular ancho B = 6,00 m pendiente S_o = 0,018 construido en concreto pulido con e = 0,5 mm transporta una descarga = 126 m^3/s. Calcular la profundidad normal.

Ecuaciones $Q = ByV$, $V = \sqrt{8/f}\sqrt{gRS_o}$, $R = By/(B + 2y)$

$$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/e)$$

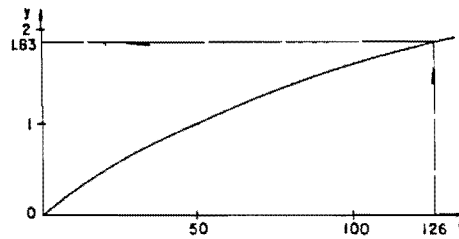
Reemplazando los valores numéricos de este problema se tiene:

$$126 = 6yV, \quad V = \sqrt{8/f}\ \sqrt{9{,}8 \times 0{,}018\ R}, \quad R = 6y/(6 + 2y),$$

$$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/0{,}0005)$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución directa para "y" para resolver esta dificultad se suponen valores de "y", se calcula el valor de Q correspondiente, se dibuja una curva de "y" contra Q, y con esta curva se obtiene "y" para $Q = 126\ m^3/s$.

y m	R m	$1/\sqrt{f}$	V m/s	Q m^3/s
0,50	0,43	8,2102	6,39	19,155
1,00	0,75	8,6913	8,95	53,680
1,50	1,00	8,9462	10,63	95,648
1,90	1,16	9,0775	11,63	132,589
1,83	1,14	9,0574	11,47	125,955
1,84	1,14	9,0604	11,49	126,898



3.5 FLUJO UNIFORME LAMINAR EN CANALES ANCHOS.

El flujo laminar en canales se presenta casi exclusivamente en el drenaje de agua lluvia de superficies planas impermeables como parqueaderos, pistas de aeropuerto y vías, cuando el espesor de la capa de agua es muy pequeño. Se llama canal ancho aquel en el cual la profundidad es muy pequeña comparada con el ancho. Para el canal ancho: $R = By/(B + 2y) = y/(1 + 2y/B)$, pero $y/B \simeq 0$, luego $R \simeq y$.

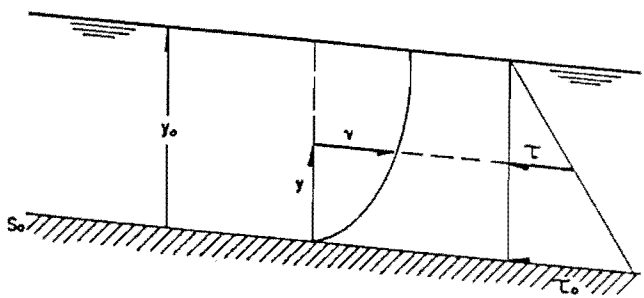


Figura 24

En la figura No. 24 se muestra una sección de un canal ancho con flujo laminar y espesor de la capa de agua y_o. Como el flujo es laminar vale la ecuación de Newton $\tau = \mu dv/dy$, $dv = (\tau/\mu)dy$, el esfuerzo unitario de fricción varía linealmente entre un máximo τ_o en el fondo y cero en la superficie del agua, luego $\tau = \tau_o (1 - y/y_o)$. Al reemplazar se obtiene:

$$dv = (\tau_o/\mu)(1 - y/y_o)dy$$

Al integrar la ecuación anterior se obtiene:

$$v = -(\tau_o y_o/2\mu)(1 - y/y_o)^2 + C$$

Para $y = 0$, $v = 0$, $C = \tau_o y_o/2\mu$

Después de reemplazar el valor de la constante de integración en la ecuación anterior se obtiene:

$$v = (\tau_o y_o/2\mu)(1 - (1 - y/y_o)^2)$$

El diagrama de velocidad tiene forma parabólica, la cual es característica del flujo laminar. Para un canal de ancho B el gasto es $Q = By_o V$, siendo V la velocidad media. De la figura No. 24 se tiene:

$$dQ = vdA = vBdy = (\tau_o y_o B/2\mu)\ (1 - (1 - y/y_o)^2)dy, \quad Q = \int_o^{y_o} vdA$$

Al integrar se obtiene: $Q = \tau_o y_o^2 B/(3\mu)$

La velocidad media para este flujo es: $V = Q/By_o = \tau_o y_o/3\mu$.

Se demostró anteriormente que para el flujo uniforme se cumple la ecuación: $W\text{sen}\theta - Ff = 0$, la cual se puede transformar a: $\gamma A dx S_o - \tau_o P dx = 0$.

Al simplificar se obtiene $\tau_o = \gamma R S_o$, valor que se reemplaza en la ecuación para la velocidad media y se obtiene $V = \gamma R S_o y_o/3\mu$

Para canal ancho $R = y_o$, luego $V = \gamma y_o^2 S_o/3\mu = gy_o^2 S_o/3\nu$

De la ecuación racional para el cálculo del flujo uniforme se despeja $f = 8gy_o S_o/V^2$, y al reemplazar el valor de V para flujo laminar se obtiene:

$$f = 24\nu/Vy_o$$

Para este tipo de canal el número de Reynolds toma la forma $\mathbf{R} = Vy_o/\nu$ y al reemplazar este valor en la ecuación anterior se obtiene:

$$f = 24/\mathbf{R} \tag{69}$$

Igual que en el flujo confinado, en el flujo libre el factor de fricción para flujo laminar es una función exclusiva del número de Reynolds.

En canales anchos se presenta flujo laminar cuando el número de Reynolds es inferior a 500.

Problema No. 21.

Para una pista de aeropuerto de 20 m de ancho con pendiente $S_o = 0{,}003$ calcular el espesor máximo de la capa de agua lluvia que produce flujo laminar uniforme, y calcular la descarga total Q si la temperatura del agua es 15°C.

Se dispone de las ecuaciones:

$$\mathbf{R} = Vy_o/\upsilon \ , \ f = 24/\mathbf{R} \ , \ V = \sqrt{8/f}\sqrt{gy_o S_o} \ , \ Q = By_o V$$

Datos:

$$B = 20 \text{ m} \ , \ S_o = 0{,}003 \ , \ T = 15^oC \ , \ \upsilon = 1{,}15 \times 10^{-6} m^2/s$$

Con estos valores se calcula:

$$R = Vy_o/1{,}15 \times 10^{-6} \ , V = \sqrt{8/f}\sqrt{9{,}8 \times 0{,}003y_o} \ , Q = 20y_o V$$

Para $\mathbf{R} = 500$ $f = 24/500$ $V = \mathbf{R}\upsilon/y_o = 500 \times 1{,}15 \times 10^{-6}/y_o$ (a)
$V = \sqrt{8 \times 500/24}\sqrt{9{,}8 \times 0{,}003y_o}$ (b)

Al igualar las ecuaciones a y b se despeja $y_o = 0{,}0041$ m
$V = \sqrt{500 \times 9{,}8 \times 0{,}003 \times 0{,}0041/3} = 0{,}141$ m/s
$Q = BVy_o = 20 \times 0{,}141 \times 0{,}0041 = 0{,}0115 \ m^3/s = 11{,}5$ l/s.

3.6 CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DE LA SECCION DE UN CANAL.

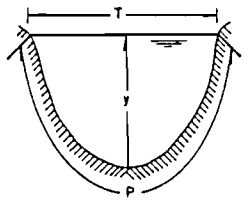
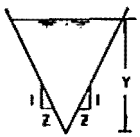
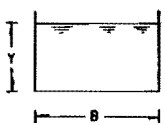
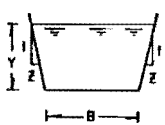
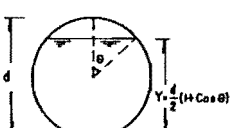


Figura 25

La sección transversal de un canal natural o artificial tiene una importancia primordial en el comportamiento del flujo del mismo. Los factores geométricos más importantes de la sección son: la profundidad y, el perímetro P, el área A, el ancho superficial T, el radio hidráulico R y la profundidad hidráulica D.

FORMA	SECCION	P	A	T	R	D
Triángulo		$2(1+Z^2)^{1/2}Y$	ZY^2	$2ZY$	$\frac{ZY}{2(1+Z^2)^{1/2}}$	$\frac{Y}{2}$
Rectángulo		$B+2Y$	BY	B	$\frac{BY}{B+2Y}$	Y
Trapecio		$B+2(1+Z^2)^{1/2}Y$	$(B+ZY)Y$	$B+2ZY$	$\frac{(B+ZY)Y}{B+2Y(1+Z^2)^{1/2}}$	$\frac{(B+ZY)Y}{B+2ZY}$
Círculo		$(\pi-\theta)d$	$\frac{d^2}{4}(\pi-\theta+\frac{1}{2}\operatorname{Sen}2\theta)$	$d\operatorname{Sen}\theta$	$\frac{d}{4}\left[1+\frac{\operatorname{Sen}2\theta}{2(\pi-\theta)}\right]$	$\frac{d}{4}\frac{(\pi-\theta+\frac{1}{2}\operatorname{Sen}2\theta)}{\operatorname{Sen}\theta}$

Se llama profundidad la distancia vertical desde la superficie del líquido hasta el punto más bajo de la sección y se designa con con la letra y. Perímetro es la longitud del contorno de la sección transversal en contacto con el líquido, se designa con la letra P, define la zona en donde se desarrolla la fricción entre la superficie del canal y el líquido en movimiento. Se denomina área a la correspondiente a la sección transversal del líquido y se designa por A. El ancho superficial del líquido designado por T como se indica en la figura No. 25 desempeña papel importante en el movimiento de las ondas en el canal. Hay dos relaciones geométricas que tienen gran importancia en el movimiento de los líquidos en canales: el radio hidráulico definido con la ecuación $R = A/P$ y la profundidad hidráulica $D = A/T$, estas dos relaciones tienen dimensión lineal

Las formas geométricas más usadas en canales artificiales son: triángulo isóceles, rectángulo, trapecio y círculo. El cuadro siguiente presenta las ecuaciones para las propiedades geométricas de estas secciones.

El radio hidráulico aparece como factor importante en las ecuaciones para el cálculo de la velocidad y la descarga o gasto en los canales por esto es importante conocer su forma de variación.

La sección rectangular es de uso muy común en canales artificiales, para esta sección $R = By/(B + 2y)$, para un canal con ancho B constante el radio hidráulico varía según la curva de la figura No. 26. La ecuación del radio hidráulico se transforma a $R = B/(B/y + 2)$, para $y = 0$, $R = 0$, cuando $y \to \infty$, $R \to B/2$. Cuando el canal rectangular tiene ancho constante el radio hidráulico será siempre menor que B/2, esto indica que no es recomendable tomar un valor grande para la profundidad y.

Para un canal rectangular con profundidad "y" constante el radio hidráulico varía según la curva de la figura No. 27. La ecuación del radio hidráulico se transforma a $R = y/(1 + 2y/B)$. Para $B = 0$, $R = 0$, cuando $B \to \infty$, $R \to y$. Para un canal rectangular con profundidad constante, el radio hidráulico será siempre menor que "y", para canales muy anchos se toma $R = y$.

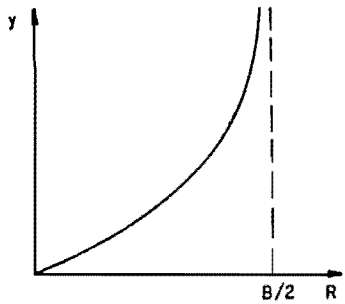


Figura 26

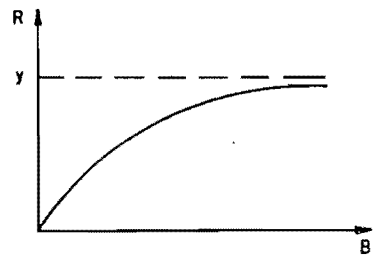


Figura 27

Los análisis anteriores muestran que debe existir una relación adecuada entre las dimensiones de una sección rectangular para que se produzca un radio hidráulico máximo sin aumentar exageradamente alguna dimensión.

Se define como sección hidráulicamente óptima la que posee radio hidráulico máximo para un área dada A. Como el área es constante y $R = A/P$, la sección hidráulicamente óptima será la que dé R = máximo, o P = mínimo. Es posible demostrar matemáticamente que de todas las formas geométricas usadas en canales artificiales el semicírculo posee el perímetro mínimo, pero para cada forma geométrica pueden encontrarse unas relaciones que den la sección hidráulicamente óptima.

Para un rectángulo: $P = B + 2y$, $A = By$; luego $P = A/y + 2y$, $(DP/dy) = -A/y^2 + 2 = 0$, $A = 2y^2 = By$, $y = B/2$.

Una sección rectangular es hidráulicamente óptima cuando la profundidad es igual a un medio del ancho. Siguiendo el mismo proceso se puede encontrar las relaciones geométricas que den sección hidráulicamente óptima para otras formas.

En ríos de baja pendiente el canal posee una sección profunda por donde corre el agua en forma permanente en períodos de sequía y una sección contigua a la anterior más alta o zona de inundación por donde corre el agua en tiempos de lluvias intensas, lo anterior se muestra en la figura No. 28

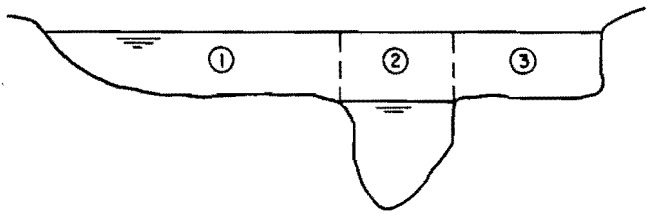


Figura 28

Las zonas de inundación permanecen sin agua la mayor parte del tiempo lo cual permite que crezca vegetación abundante sobre ellas, en cambio la zona de flujo permanente del río posee poca vegetación o ninguna, estas circunstancias hacen que la rugosidad sea muy alta en las zonas de inundación y baja en el canal central de flujo permanente. La diferencia en la rugosidad de las secciones genera bajas velocidades en las zonas de inundación y altas en la central. Estas características del flujo obligan a calcular separadamente las zonas de inundación y la zona central o de flujo permanente. Cada sección se calcula independientemente y luego se suman las tres descargas para obtener

la descarga total del río. Para cada sección debe estimarse un coeficiente de rugosidad según sus características particulares.

La línea divisoria de dos secciones contiguas es arbitraria y puede tomarse vertical como indica la figura No. 28 o inclinada según el criterio de quien analiza el problema. El perímetro para cada sección es la longitud del contacto agua-suelo, la longitud de la divisoria entre secciones no se considera en los perímetros correspondientes porque en este contacto sólo se desarrolla una baja fricción entre capas de aguas vecinas.

3.7 LA ONDA ELEMENTAL DE GRAVEDAD.

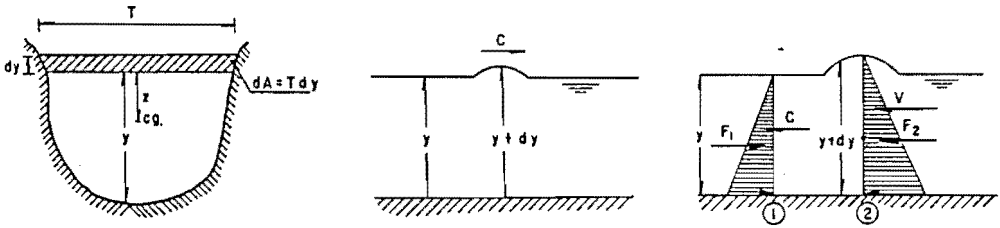


Figura 29

Se llama onda elemental de gravedad a una pequeña sobreelevación en el agua que se mueve con velocidad constante mientras no varíe la profundidad hidráulica del canal. Las ondas elementales de gravedad son generadas por cualquier obstáculo que se oponga al movimiento o por cualquier cuerpo que golpee en el agua.

La figura No. 29 muestra un canal de fondo horizontal con agua en reposo y sobre ésta se mueve una onda elemental de gravedad con velocidad C. La onda de gravedad se llama elemental cuando su altura "dy" es muy pequeña comparada con la profundidad "y". Para un observador exterior la onda cruza con velocidad C y desaparece, el flujo es inestable o no permanente. Si el observador viaja con la velocidad C puede observar la onda en estado permanente, en este caso el agua en el canal se mueve con velocidad C excepto bajo la onda donde se mueve con velocidad V.

Al aplicar la ecuación de continuidad entre las secciones 1 y 2 se tiene $AC = (A + dA)V$. Sobre el volumen de control limitado por: los planos 1 y 2, la pared del canal y la superficie del agua actúan en la dirección del movimiento las fuerzas F_1 y F_2, se ignora la fricción del canal.

$$F_1 = \gamma \bar{z}_1 A \quad , \quad F_2 = \gamma \bar{z}_2 (A + dA)$$

En donde z es la distancia desde el centro de gravedad de la sección hasta la superficie del agua. Al tomar momentos de área respecto de la superficie del agua se tiene:

$$\bar{z}_2 (A + dA) = A (\bar{z}_1 + dy) + dAdy/2$$

Como $dAdy/2$ es diferencial de segundo orden se puede ignorar, y se obtiene:

$$\bar{z}_2 (A + dA) = A (\bar{z}_1 + dy) \quad , \quad F_2 = \gamma A (\bar{z}_1 + dy)$$

Al aplicar la ecuación de momento lineal entre las secciones 1 y 2 se obtiene:

$$F_2 - F_1 = (\gamma AC (C - V)) \; /g$$

Al reemplazar en la ecuación anterior los valores F_1 F_2 y V se obtiene:

$$C^2 = g (A + dA)(dy/dA)$$

dA se puede despreciar con respecto a A, luego:

$$C^2 = gA/(dA/dy)$$

En la figura No. 29 se observa que $dA = T\,dy$, luego:

$$C^2 = gA/T \quad , \quad C = \sqrt{gD} \tag{70}$$

La figura No. 30 presenta una sección longitudinal de un canal en donde el agua avanza con velocidad V y una onda elemental de gravedad se mueve aguas arriba con velocidad C.

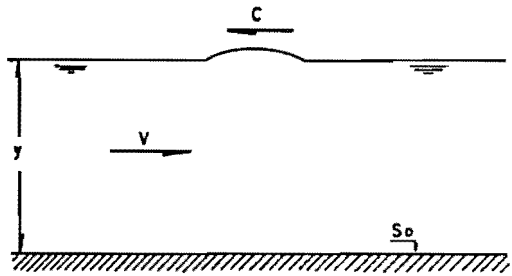


Figura 30

La velocidad C de la onda elemental de gravedad se denomina velocidad crítica. Cuando la velocidad superficial del agua en el canal es igual a la velocidad crítica las ondas elementales de gravedad con movimiento aguas arriba permanecen

en el punto donde se generaron y el flujo en el canal se denomina crítico. La velocidad de comparación para definir el flujo crítico debe ser la superficial del agua en el canal, pero este valor es difícil de calcular y en la práctica se toma como velocidad de comparación la media.

Cuando la velocidad media del agua en el canal es menor que la velocidad crítica del flujo se denomina subcrítico. En el flujo subcrítico una onda elemental de gravedad generada en cualquier parte del canal puede avanzar aguas arriba con velocidad C-V.

Cuando la velocidad media del agua en el canal es mayor que la velocidad crítica el flujo se denomina supercrítico. En el flujo supercrítico una onda elemental de gravedad generada en cualquier parte del canal no puede moverse aguas arriba, y es arrastrada aguas abajo con velocidad V-C.

En el flujo subcrítico el mensaje de una perturbación producida en cualquier parte del canal se transmite aguas arriba, en el supercrítico no puede transmitirse el mensaje aguas arriba. El comportamiento de los dos tipos de flujo es muy diferente, el flujo subcrítico se controla desde la parte inferior del canal y el supercrítico de la superior.

3.8 EL RESALTO HIDRAULICO.

Cuando en un canal con flujo supercrítico se coloca un obstáculo que obligue a disminuir la velocidad del agua hasta un valor inferior a la velocidad crítica se genera una onda estacionaria de altura finita denominada resalto hidráulico. La velocidad del agua se reduce de un valor $V_1 > C$ a $V_2 < C$, la profundidad del flujo aumenta de un valor bajo y_1 denominado inicial a un valor alto y_2 denominado secuente. El resalto hidráulico puede producirse en cualquier canal; el estudio de un resalto en canal con pendiente es un problema complejo y difícil de analizar teóricamente; en la práctica los resaltos se obligan a formarse en canales de fondo horizontal.

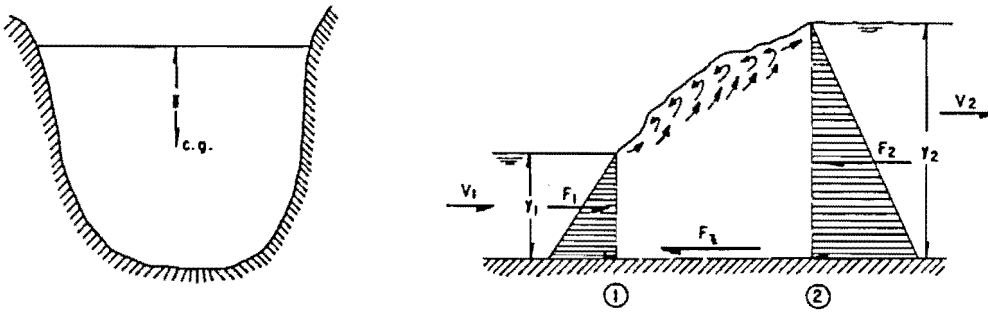


Figura 31

La figura No. 31 muestra un resalto hidráulico en un canal de fondo horizontal, sobre el volumen de control indicado con líneas punteadas actúan las fuerzas hidrostáticas F_1, F_2 y la fricción en el fondo F_f, esta tercera fuerza es muy pequeña en comparación con las dos primeras y puede ignorarse.

$$F_1 = \gamma \bar{z}_1 A_1 \ , \quad F_2 = \gamma \bar{z}_2 A_2$$

La ecuación de momento lineal aplicada al volumen de control da:

$$F_1 - F_2 = \gamma Q \ (V_2 - V_1) / g$$

La ecuación de continuidad produce $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$

Al reemplazar las ecuaciones de F_1, F_2, V_1 y V_2 en la ecuación del momento lineal y simplificar se obtiene:

$$Q^2 / gA_1 + \bar{z}_1 A_1 = Q^2 / gA_2 + \bar{z}_2 A_2 = M \qquad (71)$$

El valor M se denomina fuerza específica. Para que se produzca un resalto hidráulico la fuerza específica debe permanecer constante antes y después del resalto.

La figura No. 32 muestra la representación gráfica de la fuerza específica $M = Q^2 / gA + \bar{z}A = f(y)$.

Como los valores y, M son siempre mayores que cero, solamente tiene significado físico la rama de la curva $M = f(y)$ que se genera en el primer cuadrante. Cuando $y \to 0$, $M \to \alpha$, cuando $y \to \alpha$, $M \to \alpha$. La curva posee un valor mínimo en C.

$$dM/dy = -(Q^2/gA^2)(dA/dy) + d(\bar{z}A)/dy = 0$$

$$d(\bar{z}A) = A(\bar{z} + dy) + Tdy^2/2 - \bar{z}A$$

Al ignorar el diferencial de segundo orden se obtiene:

$$d(\bar{z}A) = Ady \qquad\qquad d(\bar{z}A)/dy = A$$

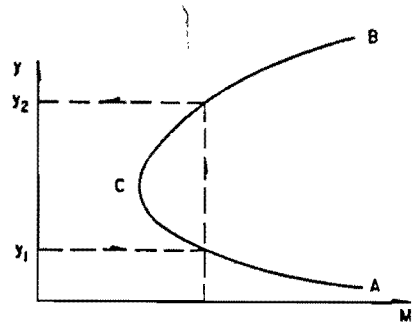


Figura 32

Se reemplaza este valor en la ecuación de la derivada de M se simplifica y se obtiene: $V = \sqrt{gD}$, lo cual prueba que cuando la fuerza específica es un mínimo el flujo es crítico.

En un canal conocida la forma geométrica de la sección y la descarga para la cual se analiza, se calcula y dibuja por puntos la curva de la fuerza específica. Con la profundidad inicial y_1 se entra a la curva, se avanza en la forma indicada por la figura No. 32 y se obtiene la profundidad secuente y_2.

El resalto hidráulico se caracteriza por la formación de macroturbulencia y grandes vórtices los cuales transforman parte importante de la energía en calor.

Las pérdidas de energía producidas por un resalto hidráulico se calculan con la ecuación:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = (y_1 + V_1^2/2g) - (y_2 + V_2^2/2g) \qquad (72)$$

El resalto hidráulico posee muchas aplicaciones prácticas, las principales son: disipador de energía, mezclador, aireador de agua.

El número de Froude se define como la relación entre la velocidad media del flujo V y la de la onda elemental de gravedad C. El número de Froude se representa con la letra **F** y se calcula con la ecuación $\mathbb{F} = V/\sqrt{dg}$. Para un canal de sección rectangular $\mathbb{F} = V/\sqrt{gy}$.

Un caso particular de uso muy frecuente es el resalto hidráulico formado en un canal rectangular de ancho constante B y fondo horizontal. Es este caso se tienen las siguientes ecuaciones:

$$A_1 = By_1 \;,\; A_2 = By_2 \;,\; \bar{z}_1 = y_1/2, \bar{z}_2 = y_2/2, \mathbb{F}_1 = V_1/\sqrt{gy_1}, \; Q = BV_1y_1 = BV_2y_2.$$

Al reemplazar estas ecuaciones en la (71) y simplificar se obtiene:

$$(y_2/y_1)^3 - (2\mathbb{F}_1^2 + 1)(y_2/y_1) + 2\mathbb{F}_1^2 = 0$$

Esta ecuación se puede transformar a:

$$((y_2/y_1) - 1)((y_2/y_1)^2 + (y_2/y_1) - 2\mathbb{F}_1^2) = 0$$

De la ecuación anterior se obtienen las ecuaciones:

$$(y_2/y_1) - 1 = 0, \; (y_2/y_1)^2 + (y_2/y_1) - 2\mathbb{F}_1^2 = 0$$

La primera ecuación da $y_2 = y_1$ esta condición corresponde al flujo crítico, no hay resalto hidráulico. La segunda ecuación tiene una solución positiva y

otra negativa, esta última carece de significado físico porque y_2 / y_1 es positivo, queda la solución:

$$y_2/y_1 = (1/2)(\sqrt{8\,\mathbb{F}_1^{\,2} + 1} - 1) \qquad (73)$$

La ecuación (73) permite calcular la profundidad secuente y_2 conocidas la profundidad inicial y la descarga.

Es importante tener presente que esta ecuación sólo es válida para el caso de un canal de sección rectangular, ancho constante y fondo horizontal.

Las pérdidas de energía producidas por el resalto se calculan con la ecuación (72), la cual se puede transformar a:

$$\Delta E \quad (y_1/2)\,(3 + \mathbb{F}_1^{\,2} - \sqrt{8\,\mathbb{F}_1^{\,2} + 1} - (\sqrt{8\,\mathbb{F}_1^{\,2} + 1} + 1)^2/16\,\mathbb{F}_1^{\,2}) \qquad (74)$$

Esta última ecuación es más fácil de aplicar porque las pérdidas de energía se expresan como función de y_1, $\mathbb{F}_1$ solamente.

3.9 ENERGIA ESPECIFICA Y PENDIENTE CRITICA.

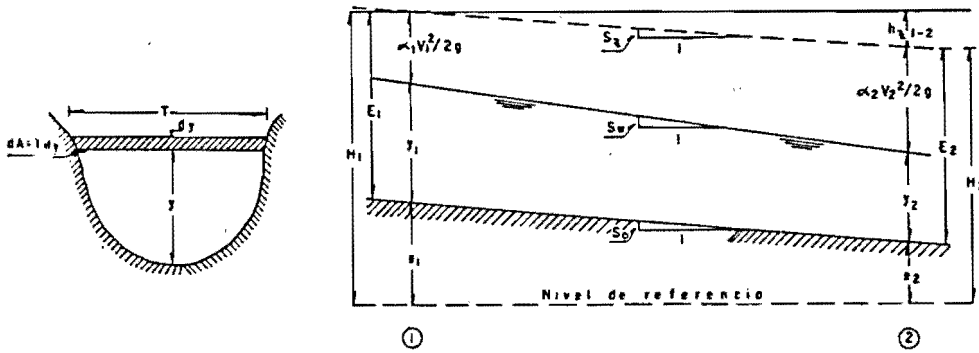


Figura 33

La energía total del líquido en movimiento medida con respecto a un plano de referencia está compuesta por las energías potenciales de posición z, presión "y", más la energía cinética $\alpha V^2/2g$. La energía total por unidad de peso H se expresa como en el flujo confinado por medio de la ecuación:

$$H = z + y + \alpha V^2/2g$$

La ecuación de energía aplicada entre las secciones 1 y 2 da:

$$H_1 = H_2 + hf_{1-2} \text{ o } z_1 + y_1 + \alpha_1 V_1^2/2g = z_2 + y_2 + \alpha_2 V_2^2/2g + hf_{1-2}$$

En donde hf_{1-2} representa las pérdidas de energía entre las secciones 1 y 2.

La pendiente del fondo del canal se expresa por S_o, la de la superficie del líquido por S_w y la de la línea de energía por S_f. En general estos tres valores son diferentes pero cuando el flujo es uniforme $y_1 = y_2$, $\alpha_1 V_1^2/2g = \alpha_2 V_2^2/2g$ y esto da como resultado: $S_o = S_w = S_f$.

La energía medida con respecto al fondo del canal se denomina energía específica y se designa por la letra E.

$$E = y + \alpha V^2/2g \ , \ E = y + \alpha Q^2/2gA^2 \tag{75}$$

Para un canal en estado permanente la descarga es constante y el área de la sección transversal es función de "y" luego $E = f(y)$.

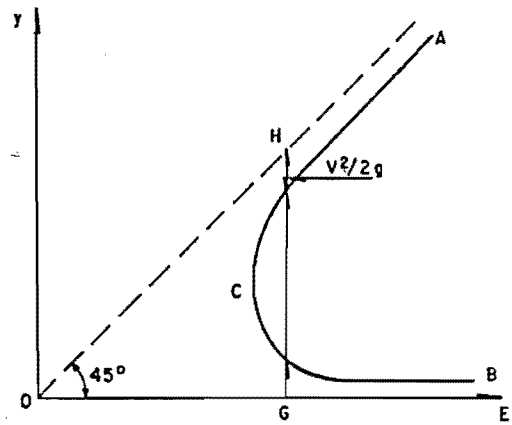


Figura 34

En la figura No. 34 se presenta la ecuación $E = f(y)$. Como E, "y" son valores siempre positivos la curva sólo posee significado físico en el primer cuadrante. Cuando $y \to 0$, $A \to 0$, $E \to \alpha$, la curva es asintótica al eje de las abscisas. Cuando $y \to \alpha$, $A \to \alpha$, $\alpha Q^2/2gA^2 \to 0$, $E \to y$ pero siempre $E > y$. $E = y$ es una recta con 45° de pendiente y la curva es asintótica a esta recta. Debido a la forma de la curva E posee un valor mínimo representado por el punto C de la figura No. 34.

$$DE/dy = 1 - (2\alpha Q^2/2gA^3)\, dA/dy = 0.$$

En la figura No..33 se ve que $dA = Tdy$, $dA/dy = T$, en la mayoría de los casos $\alpha \simeq 1$, al reemplazar estos valores en la ecuación anterior se obtiene: $V = \sqrt{gD}$. En el Numeral 3.7 se demostró que $C = \sqrt{gD}$ es la velocidad de la onda elemental de gravedad. Lo anterior prueba que cuando la energía específica es mínima el flujo es crítico, o que en flujo crítico la energía específica es mínima.

Para flujo crítico $\alpha V^2/2g = D/2$, luego en flujo crítico la energía cinética es igual a un medio de la profundidad hidráulica.

En estado permanente Q es constante, $V = Q/A$ y la velocidad crece en forma inversa a la profundidad. El punto crítico divide la curva de la energía específica en dos ramas: la superior CA con profundidad "y" mayor que la crítica y velocidad menor que la crítica corresponde al flujo subcrítico, la inferior CB con profundidad menor que la crítica y velocidad mayor que la crítica representa el flujo supercrítico. En la rama CA al aumentar "y" aumenta E, en la rama CB el fenómeno es inverso, luego en el flujo subcrítico al aumentar la profundidad aumenta la energía específica, en el supercrítico el fenómeno es inverso.

El triángulo OGH de la figura No. 34 es rectángulo isósceles luego el cateto horizontal que representa la energía específica es igual al cateto vertical, esto muestra que la distancia vertical desde la curva hasta la asíntota inclinada representa la energía cinética la cual es grande en flujo supercrítico y baja en subcrítico.

Para una energía específica dada mayor que la crítica existen siempre dos posibles condiciones de flujo una subcrítica y otra supercrítica, las profundidades de flujo correspondientes se denominan alternas.

Es imposible tener flujo en el canal con una energía específica menor que la correspondiente al flujo crítico.

La profundidad correspondiente al flujo crítico se denomina profundidad crítica y se designa por y_c. En el flujo crítico $Q = AC = A\sqrt{gD} = f(y)$, la descarga es función exclusiva de la profundidad y la forma de la sección del canal. Conocidas la descarga y forma de la sección se puede calcular la profundidad crítica o conocidas la profundidad crítica y la forma de sección se puede calcular la descarga.

Para flujo crítico $V = C$, $\mathbb{F} = 1$, para subcrítico $V < C$, $\mathbb{F} < 1$ y para supercrítico $V > C$, $\mathbb{F} > 1$.

Cuando un canal tiene una pendiente tal que el flujo es a la vez uniforme y crítico se dice que el canal tiene pendiente crítica y ésta se representa por S_c.

En flujo uniforme $V = \sqrt{8/f}\ \sqrt{gRS_c}$, en flujo crítico $V = \sqrt{gD}$, al igualar estas ecuaciones y simplificar se obtiene:

$$S_c = fD/8R \quad , \quad S_c = fP/8T \tag{76}$$

Al reemplazar la ecuación (68) en la (76) y simplificar se obtiene:

$$S_c = gn^2 P/(R^{1/3} T) \quad , \quad S_c = gn^2 A/(R^{4/3} T) \tag{77}$$

Las ecuaciones (76) y (77) sirven para calcular la pendiente crítica de un canal en función del factor de fricción de la ecuación racional o del coeficiente de fricción de Manning.

El valor de S_c disminuye al aumentar la profundidad del canal pero muy poco, por tal razón puede considerarse constante.

Cuando la pendiente de un canal S_o es menor que S_c el flujo uniforme será subcrítico, en este caso se dice que el canal tiene pendiente suave y se denomina tipo M. Cuando $S_o = S_c$ el flujo uniforme es crítico, el canal tiene pendiente crítica y se denomina tipo C. Cuando $S_o > S_c$ el flujo uniforme es supercrítico, el canal tiene alta pendiente y se denomina tipo S. Es importante tener presente que en cualquiera de los tres tipos de canal se puede producir flujo subcrítico, crítico o supercrítico.

3.10 SECCION DE CONTROL.

Se define como sección de control en un canal aquella en la cual para una descarga conocida se puede calcular la profundidad correspondiente. Si se define la superficie del agua en el canal con la ecuación $f(x, y) = 0$ en donde x es la distancia a lo largo del canal "y" la profundidad, la sección de control representa un punto de esta curva.

Las secciones de control determinan la forma del flujo en el canal y su localización es indispensable antes de iniciar el cálculo del perfil superficial del agua en flujo gradualmente variado. El caso más común de sección de control lo constituyen las secciones con flujo crítico, se presentan a continuación varios ejemplos.

La figura No. 35 muestra la unión de un canal largo tipo M con otro igualmente largo S. Aguas arriba en el canal 1 el flujo es uniforme con profundidad y_{n1} en las cercanías del cambio de pendiente el flujo se acelera y disminuye la profundidad, aguas abajo en el canal 2 el flujo es uniforme con profundidad y_{n2}. En el canal 1 el flujo es subcrítico y en el 2 supercrítico, para pasar de un estado al otro se produce una profundidad crítica. Experimentalmente se ha encontrado que la profundidad crítica se produce en las cercanías del cambio de pendiente, ligeramente aguas arriba, para efectos del cálculo se supone localizada en el cambio de pendiente. Antes y después del cambio de pendiente hay unos pequeños sectores de flujo rápidamente variado con alta curvatura en las

líneas de flujo, sin embargo las zonas de transición en los dos canales pueden considerarse como flujo gradualmente variado.

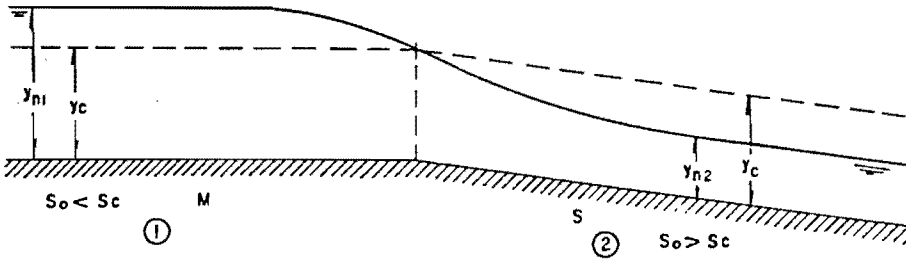


Figura 35

La figura No. 36 presenta otro ejemplo de sección de control con flujo crítico. Un canal de pendiente subcrítica que termina en una caída vertical, este caso fue experimentado por Hunter Rouse y encontró que la profundidad en la caída es $y_b = 0{,}715 y_c$. La profundidad crítica se produce aguas arriba a una distancia entre tres y cuatro veces y_c.

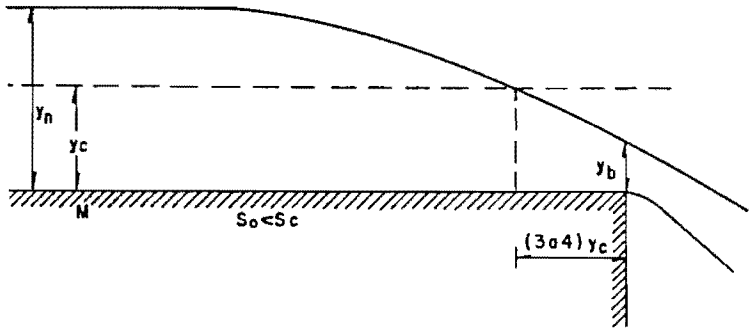


Figura 36

La figura No. 37 presenta dos ejemplos de sección de control. En el primer caso una compuerta regula la entrada del canal, conocidas las características de la compuerta y la profundidad de aguas arriba se pueden determinar la descarga y la profundidad y_o delante de la compuerta. En el segundo caso el nivel del agua en el embalse receptor controla el flujo en el canal siempre que se tenga flujo subcrítico y la profundidad a la entrada del embalse sea igual o mayor que la crítica.

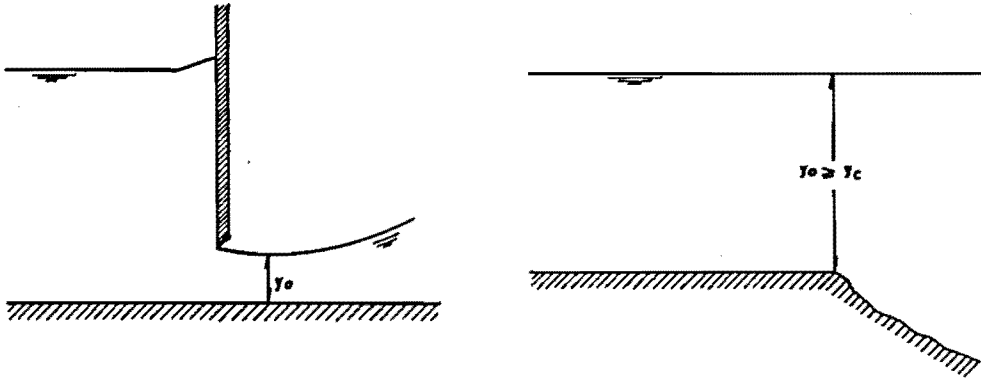


Figura 37

3.11 FLUJO GRADUALMENTE VARIADO.

En el Numeral 3.2 se definió el flujo gradualmente variado como aquel en donde la profundidad "y" varía a lo largo del canal pero en forma tal que la curvatura de las líneas de flujo es pequeña y las fuerzas centrífugas generadas por estos cambios de dirección en el movimiento son despreciables con relación a las demás fuerzas que intervienen en el movimiento. De acuerdo con la definición de flujo gradualmente variado las presiones internas del flujo varían hidrostáticamente. En estos numerales se estudiará el flujo gradualmente variado en estado permanente. El objetivo principal de este estudio es calcular el perfil superficial del agua en todo el canal.

3.11.1 Ecuación diferencial para el cálculo del flujo gradualmente variado.

La figura No. 38 muestra dos secciones de un canal espaciadas una longitud dx medida a lo largo del fondo del canal. La variable "y" se mide verticalmente a partir del fondo del canal, la variable x se mide a lo largo del fondo del canal y a partir de un origen arbitrario. En la sección 1 la profundidad es "y", la velocidad media V, la energía cinética $V^2/2g$ (se toma $\alpha = 1$). En la sección 2 la profundidad es $(y + dy)$ en donde dy puede ser positivo o negativo, la velocidad media $(V + dV)$, la energía cinética $V^2/2g + d(V^2/2g)$. La línea de energía tiene pendiente S_f, la superficie del agua S_w y el fondo del canal S_o un valor pequeño que permite hacer $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tag}\theta$, siendo θ el ángulo que forma el fondo del canal en la línea horizontal. Al aplicar la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2 se obtiene:

$$S_o dx + y + V^2/2g = y + dy + V^2/2g + d(V^2/2g) + S_f dx$$

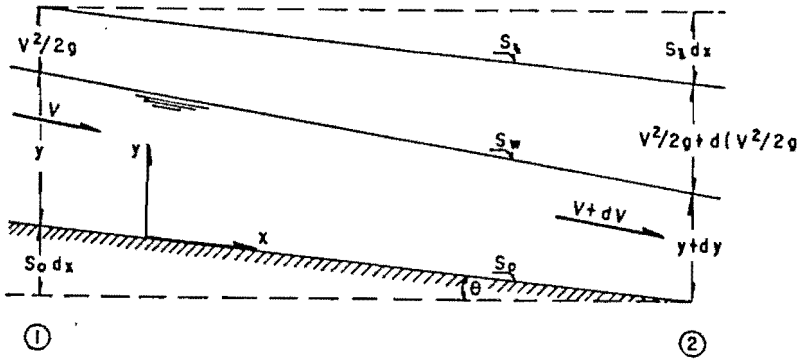


Figura 38

La ecuación anterior se puede transformar a:

$$dy/dx + d(V^2/2g)/dx = S_o - Sf$$
$$dy/dx + (d(V^2/2g)/dy)(dy/dx) = S_o - Sf$$
$$dy/dx = (S_o - Sf)/(1 + d(V^2/2g)/dy)$$

En la ecuación anterior se hace:

$$d(V^2/2g)/dy = d(Q^2/2gA^2)/dy$$
$$d(V^2/2g) = -(Q^2/gA^3)\,dA/dy,\ dA/dy = T$$
$$d(V^2/2g) = -V^2T/gA = -V^2/gD = -\mathbb{F}^2$$

Al reemplazar el valor anterior la ecuación diferencial se transforma a:

$$dy/dx = (S_o - Sf)/(1 - \mathbb{F}^2) \qquad (78)$$

La ecuación (78) presenta la pendiente del perfil superficial del agua en el canal medida con respecto al fondo del canal y no al plano horizontal.

La pendiente del perfil superficial del agua definida con la ecuación (78) presenta valores que varían desde $-\alpha$ hasta $+\alpha$. Cuando $dy/dx \rightarrow -\alpha$ el perfil del agua desciende rápidamente se tiene una caída hidráulica.

Cuando $dy/dx < 0$ la profundidad de flujo "y" decrece en la dirección del movimiento.

Cuando $dy/dx = 0$ la profundidad de flujo "y" permanece constante se tiene flujo uniforme y la superficie del agua es paralela al fondo del canal.

Cuando $dy/dx > 0$ la profundidad "y" crece en la dirección del movimiento.

Cuando $dy/dx = S_o$ la profundidad aumenta la misma cantidad que desciende el fondo del canal, la superficie del agua es un plano horizontal, por ejemplo cuando un canal descarga en un lago o en el mar.

Cuando $dy/dx \rightarrow \alpha$ la profundidad aumenta rápidamente, se tiene un resaldo hidráulico.

3.11.2 Análisis del perfil superficial del agua.

En el Numeral 3.9 se clasificaron los canales en tipo M, C y S según que su flujo uniforme sea subcrítico, crítico o supercrítico.

Se denomina canal de pendiente sostenida aquel en el cual es posible establecer flujo uniforme. Sólo se puede establecer flujo uniforme en un canal cuando su fondo desciende en la dirección del movimiento, la pendiente de estos canales se define como positiva. Cuando el fondo del canal es horizontal o asciende en la dirección del movimiento es imposible establecer flujo uniforme y los canales se denominan de pendiente no sostenida. Los canales de pendiente sostenida M, C, S tienen pendiente de fondo $S_o > 0$. Los canales de fondo horizontal tienen pendiente $S_o = 0$ y se denominan tipo H. Los canales de fondo ascendente llamados adversos tienen pendiente $S_o < 0$ y se denominan tipo A.

Se llama canal prismático el que tiene: alineamiento recto, pendiente de fondo constante y forma geométrica de la sección transversal constante. Los análisis y los cálculos de flujo gradualmente variado que se presentan en estos numerales corresponden a canales prismáticos.

Cuando en un canal varían el alineamiento la pendiente o la sección, se divide en sectores menores que cumplan con la definición de canal prismático y se efectúan cálculos separados para cada sector teniendo en consideración las condiciones de frontera establecidas por los sectores vecinos.

Si se denomina y_n la profundidad correspondiente al flujo uniforme, y_c la correspondiente al flujo crítico se tendrá:

En canales tipo M $y_n > y_c$
En canales tipo C $y_n = y_c$
En canales tipo S $y_n < y_c$
En canales tipo H $y_n \rightarrow \alpha$
En canales tipo A y_n no existe

La línea paralela al fondo del canal a una distancia y_n se denomina normal. La línea paralela al fondo del canal a una distancia y_c se denomina crítica.

La profundidad del flujo "y" varía teóricamente desde cero hasta infinito, el campo de variación de "y" queda dividido por el fondo del canal, la línea crítica y la normal en tres zonas denominadas: 1 la limitada por la línea más alta y el infinito, 2 la limitada por las dos líneas y 3 la limitada por la línea más baja y el fondo del canal. La profundidad de flujo "y" puede estar dentro de una cualquiera de las tres zonas, en uno cualquiera de los cinco tipos de canal, esta combinación de zonas y tipo de canal determina teóricamente quince diferentes perfiles de flujo, en la práctica sólo son posibles doce. Cada perfil de flujo se identifica con una letra y un número, la letra indica el tipo de canal y el número la zona, ejemplo un S2 es un perfil formado en la zona 2 de un canal de pendiente supercrítica.

En los canales tipo H y A no existe la línea normal, sólo se forman dos zonas: la 2 entre el infinito y la línea crítica y la 3 entre la línea crítica y el fondo del canal, esto hace que no existan los perfiles H1 y A1. En los canales tipo C la línea crítica se confunde con la línea normal y el perfil de flujo gradualmente variado C2 desaparece.

El análisis de la ecuación (78) permite determinar la forma de cada uno de los doce perfiles de flujo establecidos anteriormente; se presentan a continuación varios ejemplos.

ANALISIS DE PERFILES TIPO S.

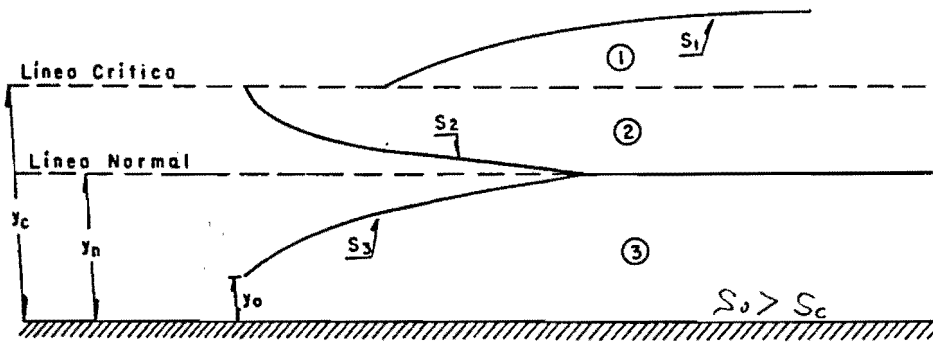


Figura 39

La figura No. 39 presenta un canal tipo S, la ecuación de continuidad da $Q = A_c V_c = A_n V_n = AV$. Las áreas son funciones crecientes con la profundidad. En un canal tipo S , $V_n > V_c$, luego $y_n < y_c$, la línea normal queda por debajo de la línea crítica.

Perfil S1.

El perfil de la superficie del agua está localizada dentro de la zona 1, la profundidad de flujo "y" es mayor que las dos profundidades de comparación, esto define la desigualdad $y > y_c > y_n$.

La pendiente de la línea de energía se calcula con la ecuación 32 expresada en la forma $Sf = V^2 f/8gR$, para el perfil S1 $y > y_n$ luego $V < V_n$, $R > R_n$, estas desigualdades muestran que $S_o > Sf$, $S_o - Sf > 0$, el numerador de la ecuación (78) es positivo.

Como $y > y_c$, $V < V_c$, $V/V_c < 1$, $\mathbb{F} < 1$, $1 - \mathbb{F}^2 > 0$, el flujo es subcrítico y el denominador de la ecuación (78) es positivo, esta ecuación da $dy/dx > 0$, luego la profundidad de flujo "y" crece en la dirección del movimiento.

Aguas arriba $y \to y_c$, $\mathbb{F} \to 1$, $dy/dx \to \alpha$ luego se presenta un resalto hidráulico. Aguas abajo $y \to \alpha$, $V \to 0$, $Sf \to 0$, $\mathbb{F} \to 0$, $dy/dx \to S_o$ la superficie del agua se torna horizontal. La figura No. 39 presenta el perfil S1.

Perfil S2.

Para este perfil se establecen las desigualdades $y_c > y > y_n$, $V < V_n$, $R > R_n$, $S_o > Sf$, $S_o - Sf > 0$, el numerador de la ecuación (78) es positivo.

Como $y < y_c$, $V > V_c$, $V/V_c > 1$, $\mathbb{F} > 1$, $1 - F^2 < 0$ el flujo es supercrítico y el denominador de la ecuación (78) es negativo. Para este perfil $dy/dx < 0$, la profundidad de flujo disminuye en la dirección del movimiento.

Aguas arriba $y \to y_c$, $\mathbb{F} \to 1$, $dy/dx \to -\alpha$, se presenta una caída hidráulica.

Aguas abajo $y \to y_n$, $V \to V_n$, $R \to R_n$, $Sf \to S_o$, $S_o - Sf \to 0$, $dy/dx \to 0$, el flujo se vuelve uniforme con profundidad $y = y_n$. En la figura No. 39 aparece el perfil S2.

Perfil S3.

Para este perfil se establecen las desigualdades $y_c > y_n > y$, como $y_n > y$, $V_n < V$, $R_n > R$, $S_o < Sf$, $S_o - Sf < 0$, el numerador de la ecuación (78) es negativo. Como $y < y_c$, $V > V_c$, $V/V_c > 1$, $\mathbb{F} > 1$, $1 - \mathbb{F}^2 < 0$, el flujo es supercrítico y el denominador de la ecuación (78) es negativo. Para este perfil las condiciones anteriores producen $dy/dx > 0$, la profundidad crece en la dirección del movimiento.

Aguas arriba la profundidad toma un valor constante y_o fijado por un control o por un canal de pendiente mayor.

Aguas abajo $y \to y_n$, $V \to V_n$, $R \to R_n$, $S_f \to S_o$, $S_o - S_f \to 0$, $dy/dx \to 0$, el flujo se hace uniforme con $y = y_n$. El perfil S3 aparece dibujado en la figura No. 39.

Los análisis anteriores muestran que cuando el perfil de flujo se acerca a la línea crítica se torna perpendicular a ésta mediante un resalto o una caída hidráulica, cuando el perfil de flujo se acerca a la línea normal la aproximación se hace en forma asintótica a esta línea.

Los perfiles de flujo gradualmente variado restantes; C1, C3, M1, M2, M3, H2, H3, A2, A3 se analizan en forma similar a la efectuada para los perfiles S1, S2, S3.

3.11.3 Cálculo del perfil de flujo gradualmente variado.

La integración de la ecuación (78) requiere un proceso matemático difícil porque la pendiente de la línea de energía S_f es función de: la forma geométrica de la sección, la profundidad de flujo "y", la descarga Q, y la rugosidad de la superficie del canal. El número de Froude es función de la forma geométrica de la sección, la profundidad de flujo "y", y la descarga Q.

Las funciones $S_f = F$ (forma, y, Q, e), $\mathbb{F} = F$ (forma, y, Q) pueden ser definidas mediante ecuaciones sólo para canales prismáticos con secciones definidas por ecuaciones.

Las restricciones anteriores hacen que la ecuación (78) sólo pueda ser integrada matemáticamente para algunos casos particulares pero no en forma general.

Para obviar esta dificultad se ha desarrollado un método denominado integración por pasos el cual realmente corresponde a una integración mediante el uso de elementos finitos, este método es aplicable a cualquier canal, su exactitud depende principalmente del tamaño de los incrementos utilizados.

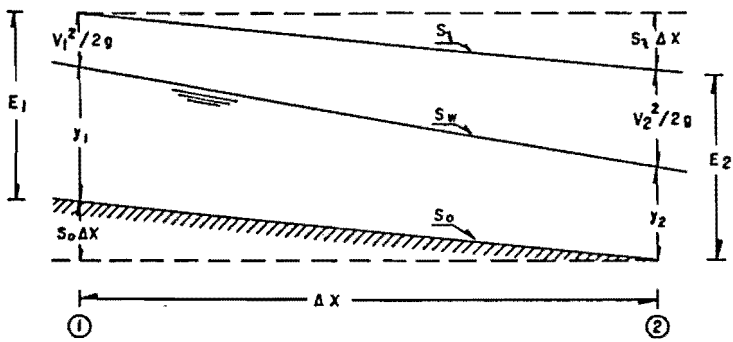


Figura 40

La figura No. 40 muestra dos secciones de un canal espaciadas una distancia Δx medida a lo largo del fondo del canal.

La ecuación de energía aplicada entre las secciones 1 y 2 da:

$$S_o \Delta x + E_1 = E_2 + \overline{S}_f \Delta x$$

De esta ecuación se obtiene:

$$\Delta x = (E_1 - E_2) / (\overline{S}_f - S_o) \qquad (79)$$

La pendiente de la línea de energía S_f puede calcularse con la ecuación:

$$S_f = V^2 f/(8gR) \qquad (32)$$

Las dos secciones se toman suficientemente cercanas para poder aproximar la línea de energía a una recta en este sector, la pendiente media de la línea de energía en el sector es $\overline{S}_f = (S_{f1} + S_{f2})/2$.

Para calcular el perfil de flujo con la ecuación (79) se parte de una sección de profundidad conocida, normalmente una sección de control, en esta sección se pueden calcular E y S_f para la descarga Q del problema.

Mediante el análisis del perfil de flujo se determina si la profundidad "y" aumenta o disminuye en la dirección hacia donde se esté efectuando el cálculo, se supone un nuevo valor de "y" mayor o menor que el de la sección de control según el caso, se calculan para esta profundidad E y S_f, se calcula $\overline{S}_f$ y con la ecuación (79) se calcula Δx.

Al sumar o restar (según la dirección en que se calcule) Δx a la abscisa de la sección de control se obtiene la abscisa de la sección correspondiente a la profundidad supuesta.

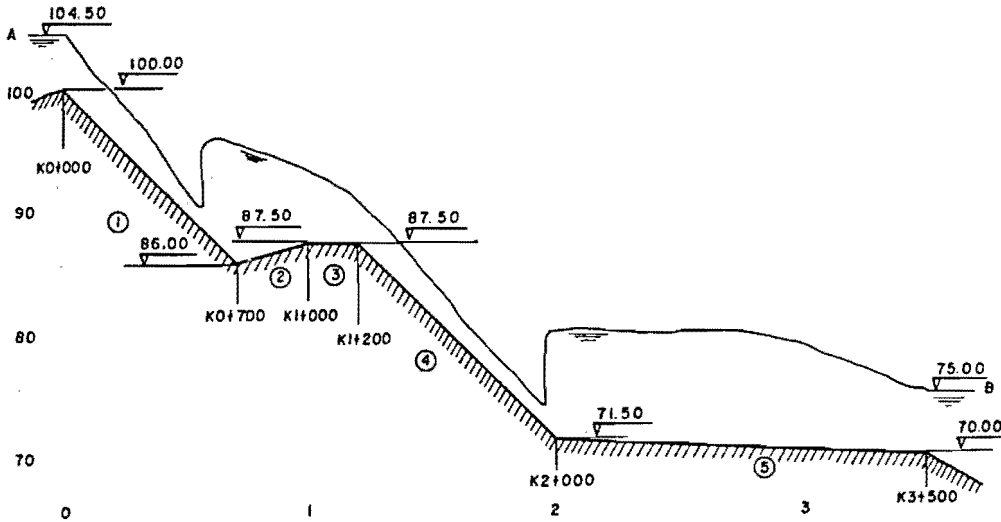
En flujo supercrítico el control está aguas arriba y el cálculo se efectúa siguiendo la dirección del movimiento, en flujo subcrítico el control está aguas abajo y el cálculo se efectúa en dirección contraria al movimiento.

Al aplicar la ecuación (79) debe tenerse presente que la sección 1 es siempre la localizada aguas arriba. La ecuación (79) supone que la línea de energía entre las secciones 1 y 2 es una recta con pendiente $\overline{S}_f$, esta suposición es bastante cercana a la realidad cuando Δx es pequeño, en caso contrario puede alejarse bastante de la realidad.

Problema No. 22.

Un canal comunica el lago A con el lago B, el nivel del agua en A es 104,50 m y

en B 75 m. El fondo del canal está definido por los siguientes puntos: K 0 + 000 C100, K 0 + 700 C86, K 1 + 000 C87,5, K 1 + 200 C87,5 K 2 + 000 C71,50, K 3 + 500 C70. El canal tiene sección rectangular de ancho B = 5,0 m y está construido en concreto con rugosidad absoluta e = 1,5 mm. Calcular la descarga Q que fluye por el canal y el perfil del flujo.



Divisiones del canal.

El fondo del canal tiene cinco cambios de pendiente, luego el canal debe dividirse en cinco canales prismáticos para efecto de análisis y cálculo.

Canal 1	K 0 + 000	K 0 + 700	S_o	=	(100 −86)/	700	=	0,0200
Canal 2	K 0 + 700	K 1 + 000	S_o	=	(86 −87,5)/	300	= −	0,0050
Canal 3	K 1 + 000	K 1 + 200	S_o	=	(87,5 −87,5)/	200	=	0,0000
Canal 4	K 1 + 200	K 2 + 000	S_o	=	(87,5 −71,5)/	800	=	0,0200
Canal 5	K 2 + 000	K 3 + 500	S_o	=	(71,5 −70,0)/	1.500	=	0,0010

Los canales 1, 4 y 5 son de pendiente sostenida, el canal 2 es adverso y el 3 horizontal.

Descarga del canal.

El canal 1 tiene pendiente alta. Se supone inicialmente que sea tipo S, posteriormente se comprobará o negará esta suposición. Si el canal 1 es tipo S se

produce flujo crítico en K0 + 000. La energía específica en K0 + 000 es $E = 104{,}50 - 100 = 4{,}50$ m, como el flujo en esta sección es crítico y el canal de sección rectangular $D = y$, $E = y + V^2/2g = y + y/2 = 3y/2$, $V^2/2g = E/3 = 1{,}50$ m, $V = 5{,}42$ m/s, $y = 2E/3 = 3{,}00$ m, $A = By = 5 \times 3$, $A = 15\ m^2$, $Q = AV$, $Q = 15 \times 5{,}42$, $Q = 81{,}333\ m^3/s$. Si el canal 1 es tipo S la descarga que pasa por todos los canales será $Q = 81{,}333\ m^3/s$.

$S_c = fD/8R$ (76).

$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/e)$ suponiendo turbulencia total $R = A/P$, $P = 5 + 2 \times 3 = 11$ m, $R = 15/11 = 1{,}364$ m

$1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4 \times 1{,}364/0{,}0015)$, $f = 0{,}014652$, $D = y = 3{,}0$ m.

Suponiendo el agua a 15°C $\nu = 1{,}13 \times 10^{-6}\ m^2/s$, $\mathbb{R} = 4RV/\nu$, $\mathbb{R} = 4 \times 1{,}364 \times 5{,}42/(1{,}3 \times 10^{-6})$, $\mathbb{R} = 2{,}6 \times 10^7$, $(e/4R) \times \mathbb{R} \sqrt{f} = (0{,}0015/4 \times 1{,}364) \times 2{,}6 \times 10^7 \times \sqrt{0{,}01465} = 871 \gg 9{,}33$ luego se tiene turbulencia total y la ecuación utilizada para calcular f es la correcta.

$S_c = (0{,}014652 \times 3) / (8 \times 1{,}364) = 0{,}00403$

Para el canal 1 $S_o = 0{,}0200 > S_c$ luego el canal es tipo S y la suposición para calcular Q es correcta.

El canal 4 tiene $S_o = 0{,}0200 > S_c$ es tipo S.
El canal 5 tiene $S_o = 0{,}0010 < S_c$ es tipo M.

Profundidades críticas.

Para flujo crítico $Q = AV_c$, $V_c = \sqrt{gD}$, $Q = A\sqrt{gD}$.

Para canal rectangular $A = By$, $D = y$, luego $Q = B\sqrt{g}y^{3/2}$, $y^{3/2} = 81{,}333/5 \times \sqrt{9{,}8}$, $y = 3{,}00$ m.

Como la forma y ancho de la sección son constantes para todos los canales, la profundidad crítica es 3,00 m para los cinco canales.

Profundidades normales.

Para flujo uniforme $V = \sqrt{8/f}\sqrt{gRS_o}$, $R = By/(B + 2y) = y/(1 + 2y/B)$, $1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/e)$, $Q = ByV$.

Para estos canales $R = y/(1 + 2y/5)$, $1\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/0{,}0015)$, $81{,}333 = 5y\sqrt{(8/f) \times 9{,}8RS_o}$.

El sistema de ecuaciones anterior no tiene solución directa para "y", se resuelve indirectamente suponiendo valores de "y", calculado Q, hasta obtener $Q = 81{,}333\ m^3/s$.

Para los canales 1 y 4 $S_o = 0{,}0200$, suponiendo valores de "y" se obtiene los siguientes valores de Q.

y	=	1,400	1,500	1,600	1,630	1,636	1,637 m
Q	=	40,743	72,163	78,865	80,898	81,306	81,374 m^3/s

En los canales 1 y 4 para $Q = 81{,}333\ m^3/s$ $y_n = 1{,}636$ m.

En los canales 2 y 3 no se puede establecer flujo uniforme, luego no existe y_n.

En el canal 5 $S_o = 0{,}0010$

y	=	4,000	5,000	5,200	5,270	5,277	5,278 m
Q	=	58,111	76,233	79,901	81,188	81,317	81,335 m^3/s

En este canal para $Q = 81{,}333\ m^3/s$, $y_n = 5{,}278$ m.

Análisis de los perfiles de flujo.

Canal 1.

Como el flujo en este canal tiende a ser supercrítico y está alimentado por un lago donde la velocidad del agua es nula a la entrada se produce una sección de control con flujo crítico $y_c = 3{,}000$ m, en el canal el flujo se acelera y se alcanza velocidad supercrítica, la profundidad de flujo disminuye. En este canal se tiene $y < y_c = 3{,}000$ m, $y_n = 1{,}636$ m, luego $y_c > y > y_n$ el perfil de flujo es tipo S2. El flujo tiende a ser uniforme en la parte inferior del canal.

Canal 2.

Al comienzo de este canal el flujo es supercrítico con profundidad de control igual a la producida en el extremo inferior del canal 1, $y < y_c$, el perfil es tipo A3. Al avanzar en el canal la profundidad aumenta y puede producirse un resalto hidráulico, si se presenta este fenómeno de ahí hacia adelante el perfil de flujo será A2 con control en el extremo aguas abajo producido por el canal 3.

Canal 3.

En este canal pueden producirse varios perfiles de flujo. Si en todo el canal 2 se profuce flujo supercrítico, al comienzo del canal 3 hay flujo supercrítico perfil H3 con control a la entrada fijado por el canal 2, el perfil H3 puede cu-

brir toda la longitud del canal 3 o puede producirse un resalto hidráulico con perfil H2 delante de éste, en esta circunstancia el control del H2 será una profundidad crítica en el extremo final del canal 3. Si en la parte final del canal 2 se produce flujo subcrítico, todo el canal 3 tendrá flujo subcrítico perfil H2 controlado por una profundidad crítica en su extremo final.

Canal 4.

En este canal el flujo es supercrítico, la sección de control está en su extremo superior. La profundidad de control estará definida por el canal 3 cuando en todo éste el perfil sea H3, en caso contrario la profundidad de control será la crítica.

Canal 5.

Este canal tiene $y_c = 3{,}000$ m, $y_n = 5{,}278$ m. Al comienzo del canal el flujo es supercrítico con profundidad de control fijada por el canal 4, el perfil es M3, más adelante puede producirse un resalto hidráulico y el flujo se torna subcrítico, en este caso en la sección de control estará en el extremo inferior del canal.

Como la profundidad de entrada al lago B es $y_o = 5{,}000$ m mayor que la crítica, la profundidad de control es $y_o = 5{,}000$ m, en este caso $y_n > y > y_c$ el perfil es M2. Los análisis anteriores muestran que siempre el flujo supercrítico se controla aguas arriba y el subcrítico aguas abajo, los cálculos se efectúan de la sección de control hacia el canal.

Cálculo de los perfiles de flujo.

Canal 1.

Perfil S2 con $y = 3{,}000$ m en K 0 + 000, $y_n = 1{,}636$ m, $S_o = 0{,}0200$ $\Delta x = (E_1 - E_2)/(\overline{S}_f - S_o)$, $\overline{S}_f = (S_{f1} + S_{f2})/2$, $S_f = V^2 f/8gR$, $1/\sqrt{f} = 1{,}14 + 2 \log (4R/e)$, $E = y + V^2/2g$, $R = 1\ (1 + 2y/B)$, $V = Q/By$.

Con base en las ecuaciones anteriores se calculan los valores del cuadro siguiente en el cual las columnas representan:

1 Profundidad de flujo en la sección.

2 Velocidad media en la sección.

3 Energía cinética.

4 Energía específica.

5 Pendiente de la línea de energía en la sección.

6 Pendiente promedia de la línea de energía entre las secciones.

7 Espaciamiento de las secciones.

8 Abscisa de la sección.

1 y m	2 V m/s	3 $V^2/2g$ m	4 E m	5 S_f	6 S_f	7 Δx m	8 x m
3,000	5,422	1,500	4,5000	0,00403			0 + 000,00
					0,00442	1,41	
2,800	5,810	1,722	4,52195	0,00481			0 + 001,41
					0,00532	5,11	
2,600	6,256	1,997	4,59706	0,00582			0 + 006,52
					0,00650	10,87	
2,400	6,778	2,344	4,74377	0,00717			0 + 017,39
					0,00810	20,62	
2,200	7,394	2,789	4,98928	0,00902			0 + 038,01
					0,00940	59,54	
2,000	8,133	3,375	5,37503	0,01162			0 + 097,55
					0,01353	91,40	
1,800	9,037	4,167	5,96670	0,01543			0 + 188,95
					0,01673	123,62	
1,700	9,569	4,671	6,37132	0,01802			0 + 321,57
					0,01879	195,80	
1,650	9,859	4,959	6,60872	0,01955			0 + 508,37
					0,01972	178,59	
1,640	9,919	5,019	6,65938	0,01988			0 + 686,91
					0,01995	386,40	
1,636	9,943	5,044	6,67995	0,02001			1 + 073,31

En el extremo inferior del canal $x = 0 + 700{,}00$ para esta abscisa y = 1,640 − ((1,640 − 1,636)/386,40) (700,00 − 686,91), y = 1,640 m.

El flujo es aproximadamente uniforme al final del canal 1.

Canal 2.

Perfil A3 con y = 1,640 m en K 0 + 700, $y_c = 3{,}000$, $S_o = -0{,}0050$.

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	8 x
1,640	9,919	5,019	6,65938	0,01988			0 + 700,00
					0,01895	12,03	
1,700	9,569	4,671	6,37132	0,01802			0 + 712,03
					0,01673	18,62	
1,800	9,037	4,162	5,96670	0,01543			0 + 730,65
					0,01353	31,94	
2,000	8,133	3,375	5,37503	0,01162			0 + 762,69
					0,01032	25,18	
2,200	7,394	2,789	4,98928	0,00902			0 + 787,77
					0,00810	18,75	
2,400	6,778	2,344	4,74377	0,00717			0 + 806,51
					0,00650	12,76	
2,600	6,256	1,997	4,59706	0,00582			0 + 819,27
					0,00532	7,28	
2,800	5,810	1,722	4,52195	0,00481			0 + 826,55
					0,00442	2,33	
3,000	5,422	1,500	4,50001	0,00403			0 + 828,88

El perfil superficial alcanza la profundidad crítica dentro del canal 2, luego puede producirse un resalto hidráulico dentro de este canal.

La parte final del canal 2 presenta flujo subcrítico perfil A2 controlado por el canal 3, para determinar la localización del resalto hidráulico es necesario calcular el canal 3.

Canal 3.

Perfil H2 con $y = y_c = 3{,}000$ m en K 1 + 200, $S_o = 0$

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	8 x
3,000	5,422	1,500	4,50001	0,00403			1 + 200,00
3,200	5,083	1,318	4,51837	0,00342	0,00372	− 4,93	1 + 195,07
3,400	4,784	1,168	4,56783	0,00294	0,00318	−15,56	1 + 179,51
3,600	4,519	1,042	4,64168	0,00254	0,00274	−26,96	1 + 152,55
3,800	4,281	0,935	4,73491	0,00222	0,00238	−39,11	1 + 113,44
4,000	4,067	0,844	4,84376	0,00196	0,00209	−52,05	1 + 061,39
4,200	3,873	0,765	4,96531	0,00174	0,00185	−65,77	0 + 995,63

Para x = 1 + 000 y = 4,000 + (0,20/65,77) x 61,39 y = 4,187 m.

Canal 2.

Perfil A2 con y = 4,187 m en K 1 + 000, $S_o = -0{,}0050$.

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	9 x
4,187	3,885	0,770	4,95707	0,00175			1 + 000,00
4,400	3,697	0,697	5,09732	5,00155	0,00165	−21,09	0 + 978,91
4,700	3,461	0,611	5,31114	0,00132	0,00144	−33,22	0 + 945,69
5,100	3,190	0,519	5,61904	0,00109	0,00120	−49,63	0 + 896,06
5,500	2,958	0,446	5,94628	0,00091	0,00100	−54,58	0 + 841,48
6,000	2,711	0,375	6,37500	0,00074	0,00082	−73,69	0 + 767,84
6,440	2,526	0,326	6,76551	0,00063	0,00068	−68,73	0 + 699,11

Para x = 0 + 700 y = 6,000 + (0,440/68,73) x 67,84, y = 6,434 m.

En la abscisa K 0 + 700 el perfil A2 tiene E ≃ 6,765 m y el perfil A3 E ≃ 6,659, como la energía del A2 es mayor que la de A3 no se forma resalto en el canal 2 y se genera un perfil S1 en el canal 1.

Canal 1.

Perfil S1 y = 6,434 m en K 0 + 700, S_o = 0,0200.

1	2	3	4	5	6	7	8
y	V	$V^2/2g$	E	S_f	S_f	Δx	x
6,434	2,528	0,326	6,76012	0,00063			0 + 700,00
					0,00068	−19,94	
6,000	2,711	0,375	6,37500	0,00074			0 + 680,06
					0,00082	−22,35	
5,500	2,958	0,446	5,94628	0,00091			0 + 657,71
					0,00102	−21,41	
5,000	3,253	0,540	5,54000	0,00114			0 + 636,30
					0,00130	−19,97	
4,500	3,615	0,667	5,16667	0,00147			0 + 616,33
					0,00171	−17,66	
4,000	4,067	0,884	4,84376	0,00196			0 + 598,67
					0,00234	−13,69	
3,500	4,648	1,102	4,60205	0,00273			0 + 584,98
					0,00338	− 6,14	
3,000	5,422	1,500	4,50001	0,00403			0 + 578,85

Entre las abscisas 0 + 578,85 y 0 + 700 se produce un resalto hidráulico, para su localización debe calcularse el perfil secuente del S2 y su intersección con el S1.

El perfil secuente se calcula con las ecuaciones:

$$y_2/y_1 = (\sqrt{1 + 8\,\mathbb{F}_1^{\,2}} - 1)/2, \quad \mathbb{F}_1 = V/C = Q/B\sqrt{g}\,y_1^{\,3/2}$$

$$\mathbb{F}_1 = 81{,}333/(5\sqrt{9{,}8}\;y_1^{\,3/2})$$

En las ecuaciones anteriores y_1 es la profundidad inicial y_2 la secuente.

Del perfil S2 se toman los valores y_1 , x.

y_1	1,650	1,640	1,643
x	0 + 508,32	0 + 686,91	0 + 635,13
y_2	4,955	4,977	4,971

El perfil secuente entre estas dos secciones puede reemplazarse por la recta de ecuación $y = mx + b$, $4{,}955 = 508{,}37\ m + b$, $4{,}977 = 686{,}91\ m + b$, de estas dos ecuaciones se obtiene $m = 123{,}22 \times 10^{-6}$, $b = 4{,}892$ $y = 1{,}2322 \times 10^{-4}x + 4{,}892$.

Del perfil S1 se toman: $y = 5{,}000$ $x = 0 + 636{,}30$ $y = 4{,}500$, $x = 0 + 516{,}33$, al reemplazar el perfil S1 por una recta entre estas dos secciones se obtiene la ecuación $y = 2{,}2038 \times 10^{-2}\,x - 10{,}931$.

La intersección del perfil secuente con el S1 se obtiene al igualar las ecuaciones $1{,}2322 \times 10^{-4}\,x + 4{,}892 = 2{,}2038 = 10^{-2}x - 10{,}931$, de esta ecuación se obtiene: $x = 0 + 635{,}13$ $y = 4{,}971$ m.

Los cálculos anteriores indican que en el canal 1 se produce un perfil S1 desde K 0 + 635,16 hasta K 0 + 700, en el canal 2 se produce un perfil A2 en el canal 3 un H2.

En K 0 + 635,13 se produce un resalto hidráulico, en esta sección la profundidad aumenta de $y_1 = 1{,}643$ m a $y_2 = 4{,}971$ m, $\mathbb{F}_1 = 81{,}333/5\sqrt{9{,}8} \times 1{,}643^{1{,}5}$, $\mathbb{F}_1 = 2{,}47$.

Canal 4.

Perfil S2 con $y = 3{,}000$ en K 1 + 200 , $S_o = 0{,}0200$.

Este canal es igual al canal 1, su perfil S1 será igual al del canal 1 sumando 1.200 m a todas las abscisas. La profundidad del perfil S2 al final del canal 4 será la correspondiente a K 0 + 800 en el perfil S2 del canal 1.

$y = 1{,}640 + (1{,}636 - 1{,}640)/(1.073{,}31 - 686{,}91))\ (800 - 686{,}91)$
$y = 1{,}639$ m.

Canal 5.

Perfil M3 con $y = 1{,}639$ m en K2 + 000, $S_o = 0{,}0010$, $y_c = 3{,}00$ m, $y_n = 5{,}278$ m.

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	8 x
1,639	9,924	5,026	6,66450	0,01991			2 + 000,00
1,700	9,569	4,671	6,37132	0,01802	0,01897	16,32	2 + 016,32
1,800	9,037	4,167	5,96670	0,01543	0,01673	25,73	2 + 042,04
2,000	8,133	3,375	5,37503	0,01162	0,01353	47,23	2 + 089,28
2,200	7,394	2,789	4,98928	0,00902	0,01032	41,39	2 + 130,67
2,400	6,778	2,344	4,74377	0,00717	0,00810	34,60	2 + 165,27
2,600	6,256	1,997	4,59706	0,00582	0,00660	26,69	2 + 191,95
2,800	5,810	1,722	4,52195	0,00481	0,00532	17,41	2 + 209,36
3,000	5,422	1,500	4,50001	0,00403	0,00442	6,42	2 + 215,78

El perfil superficial alcanza la profundidad crítica dentro del canal 5, es posible que se produzca resalto hidráulico dentro de este canal.

En la parte final del canal 5 se produce flujo subcrítico perfil M2 controlado en la parte inferior.

Canal 5.

Perfil M2 con $y = 5{,}000$ en K 3 + 500, $S_o = 0{,}0010$ $y_n = 5{,}278$.

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	8 x
5,000	3,253	0,540	5,54000	0,00114			3 + 500,00
5,050	3,221	0,529	5,57936	0,00111	0,00112	−315,24	3 + 184,76
5,100	3,190	0,519	5,61904	0,00109	0,00110	−402,97	2 + 781,79
5,150	3,159	0,509	5,65901	0,00106	0,00107	−548,02	2 + 233,77
5,166	3,149	0,506	5,67186	0,00105	0,00106	−227,56	2 + 006,21

En la parte inicial del canal 5 puede producirse un resalto hidráulico, para localizarlo es necesario calcular el perfil secuente del M3.

Con los valores y_1 , x tomados del perfil M3 y las ecuaciones del resalto hidráulico se calcula y_2 la profundidad del perfil secuente.

y_1	1,639	1,700
x	2 + 000,00	2 + 016,32
y_2	4,979	4,850

La profundidad secuente en K 2 + 000 y_2 = 4,979 m es menor que la profundidad del perfil M2 en esta sección y = 5,166 m luego el resalto se produce en el canal 4, debe calcularse el perfil S1.

Canal 4.

Perfil S1 con y = 5,166 en K 2 + 000, S_o = 0,0200

1 y	2 V	3 $V^2/2g$	4 E	5 S_f	6 S_f	7 Δx	8 x
5,166	3,149	0,506	5,67186	0,00105			2 + 000,00
5,100	3,189	0,519	5,61904	0,00109	0,00107	− 2,79	1 + 997,21
5,000	3,253	0,540	5,54000	0,00114	0,00111	− 4,18	1 + 993,03
4,900	3,320	0,562	5,46227	0,00119	0,00117	− 4,13	1 + 988,90

Perfil secuente del S2 en el canal 4.

y_1	1,639	1,640
x	2 + 000,0	1 + 886,91
y_2	4,979	4,977

El perfil secuente del S2 puede reemplazarse por una recta de ecuación: 4,979 = 2.000 m + b, 4,977 = 1.886,91 m + b, y = 1,77 x $10^{-5}x$ + 4,944.

El perfil S1 entre las abscisas 1 + 993,03 y 1 + 988,90 puede reemplazarse por una recta de ecuación: 5,000 = 1.993,03 m + b, 4,900 = 1.988,90 m + b, y = 2,42 x $10^{-2}x$ − 43,257.

La intersección de las dos rectas da la localización del resalto hidráulico.

1,77 x $10^{-5}x$ + 4,944 = 2,42 x $10^{-2}x$ − 43,257, x = 1 + 992,16, y = 4,979 m.

Los cálculos anteriores indican que en el canal 4 se produce un perfil S2 desde K1 + 200 hasta K1 + 992,16.

En K 1 + 992,16 se produce un resalto hidráulico y la profundidad aumenta de $y_1 = 1,639$ m a $y_2 = 4,979$ m.

Entre K 1 + 992,16 y K 2 + 000 se produce un perfil S1.

En el canal 5 se produce un perfil M2.

En los cálculos anteriores se han ignorado las longitudes de los resaltos hidráulicos.

Côeficiente de rugosidad de Manning.

Con base en la ecuación $n = R^{1/6} \sqrt{f / 8g}$ se puede calcular el coeficiente n correspondiente a estos canales.

En el canal 1 la profundidad varía entre 3,000 y 1,643 para estos valores se calcula n = (0,0144 – 0,0141).

En la parte final del canal 1 la profundidad varía entre 4,971 y 6,434 para estos valores n = (0,0146 – 0,0147).

En el canal 2 la profundidad varía entre 6,434 y 4,187 para estos valores n = (0,0147 – 0,0145).

En el canal 3 la profundidad varía entre 4,187 y 3,000 para estos valores n = (0,0145 – 0,0144).

En el canal 4 la profundidad varía entre 3,000 y 1,639, n = (0.0144 – 0,0141).

En el canal 5 la profundidad varía entre 5,166 y 5,000, n = (0,0146 – 0,0146).