UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN EL GRADO 3º A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS

Dora Lina Valencia Mosquera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Posgrados de Ingeniería y Administración
Maestría En Enseñanza De Las Ciencias Exactas Y Naturales
Palmira, 2019

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN EL GRADO 3º A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS

Dora Lina Valencia Mosquera

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Director:

Doctor: Oscar Yovany Checa Cerón.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Posgrados de Ingeniería y Administración
Maestría En Enseñanza De Las Ciencias Exactas Y Naturales
Palmira, 2019

A mis padres y abuelo, quienes siempre han estado presentes

aun cuando no estén,

Al profesor Oscar, por su apoyo a pesar de los errores,

A mis estudiantes, quienes de manera cariñosa participaron de este proyecto,

A mis hermanos, hermanas y sobrino por su motivación constante,

A Daniel, por su apoyo total e incondicional durante este proceso

Resumen

En esta investigación se diseñó y llevó a cabo una propuesta didáctica encaminada a potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en el grupo de 3° de la Institución Educativa Técnico Industrial “Donald Rodrigo Tafur”, sede Antonio Nariño de la ciudad de Cali, con la resolución de problemas matemáticos no rutinarios. Consistió en un conjunto de actividades, las cuales podían o no incluir, otras actividades de simplificación y/o extensión, dependiendo del trabajo y la respuesta de los estudiantes, frente a la actividad inicialmente planteada. Los principales enfoques que guiaron el diseño fueron la Teoría de la Objetivación y la Teoría Antropológica de lo didáctico. Gracias a la aplicación de la secuencia se mejoró en los niños la competencia de identificar variables, patrones y secuencias, a través de actividades interactivas e innovadoras, como el uso de objetos didácticos en la identificación de variables, especialmente durante la aplicación del primer grupo de actividades, resaltando que la aplicación de este trabajo permitió evidenciar la importancia y necesidad de involucrar el trabajo con actividades que permitan el desarrollo del pensamiento variacional, desde la resolución de problemas no rutinarios, de manera temprana en los primeros años de escolaridad, permitiendo resolver así problemas y situaciones que se presentan en el área de matemáticas.

Palabras claves:

Pensamiento variacional, pensamiento algebraico, propuesta didáctica, problemas no rutinarios, resolución de problemas, aprendizaje significativo, objetivación.

Abstract

In this research, a didactic proposal was designed and carried out aimed at promoting the development of variational thinking in the 3rd group of the Industrial Technical Educational Institution “Donald Rodrigo Tafur”, Antonio Nariño headquarters in the city of Cali, with the resolution of non-routine mathematical problems. It consisted of a set of activities, which may or may not include other simplification and / or extension activities, depending on the students' work and response, compared to the activity initially proposed. The main approaches that guided the design were the Theory of the Objectification and the Anthropological Theory of the didactic. Thanks to the application of the sequence, the ability to identify variables, patterns and sequences was improved in children, through interactive and innovative activities, such as the use of didactic objects in the identification of variables, especially during the application of the first group of activities, highlighting that the application of this work allowed to demonstrate the importance and need to involve work with activities that allow the development of variational thinking, from the resolution of non-routine problems, early in the first years of schooling, thus solving problems and situations that arise in the area of mathematics.

Keywords:

Variational thinking, algebraic thinking, didactic proposal, non-routine problems, problem solving, meaningful learning, objectification.

Tabla de contenido

Introducción 1

1. Planteamiento del problema 3

1.1 Justificación 8

1.2 Formulación del problema 9

1.3 Objetivos 9

1.3.1 Objetivo general 9

1.3.2 Objetivos específicos 10

1.4 Población 10

1.4.1 Comunidad educativa 10

1.4.2 Estudiantes 10

2. Marco referencial 12

2.1 Antecedentes del problema 12

2.2 Marco teórico 15

2.3 Enfoques teóricos y metodológicos 15

2.3.1 El pensamiento variacional 15

2.3.2 Pensamiento algebraico temprano 16

2.3.3 Teoría de la objetivación 18

2.3.4 La teoría antropológica de lo didáctico 20

2.4 Desde la teoría matemática 22

3. Metodología 25

3.1 Tipo de investigación 25

3.2 Instrumentos de recolección de datos 25

3.2.1 Observación 25

3.2.2 Diario de campo 26

3.3 Fases de la propuesta didáctica 26

3.3.1 Fase I: lluvia de ideas 27

3.3.2 Fase 2: Diagnóstico 27

3.3.3 Fase III: intervención No. 1 (primer grupo de actividades – actividad no. 2 a la 8) 28

3.3.4 Fase IV: Intervención No.2 (Segundo grupo de actividades - Situaciones problema, incluidas simplificaciones y/o extensiones - Actividades No. 1 a No.4) 30
3.4 Instrumentos de análisis de datos 32
4. Análisis de resultados 33
4.1 Fase I: Observación (Lluvia de ideas) 33
4.1.1 Concepciones iniciales sobre los términos 33
4.1.2 Observación inicial 34
4.2 Resultados de la fase II: Diagnóstico - Actividad No.1 35
4.2.1 Actividad 1 35
4.2.2 Discusión general de la Fase 2 38
4.3 Resultados de la fase III: intervención No. 1 38
4.3.1 El descubrimiento de las regularidades y los patrones: actividad 2 38
4.3.2 Actividad 3 40
4.3.3 Actividad 4 42
4.3.4 Actividad 5 43
4.3.5 Actividad 6 44
4.3.6 Actividad 7 45
4.3.7 Actividad 8 45
4.3.8 Actividad 9 46
4.3.9 Actividad 10 48
4.3.10 Resultados generales de la Fase III 48
4.4 Resultados de la fase IV. Intervención No. 2 49
4.4.1 Resultados generales de la Fase IV 55
5. Conclusiones y recomendaciones 58
5.1 Conclusiones 58
5.2 Recomendaciones 58
6. Referencias citadas 60
Anexos 63

Lista de figuras

Figura 1. Diagrama dialógico del marco teórico de la investigación. 15
Figura 2. Funcionamiento de la triangulación hermenéutica para la presente investigación. 32
Figura 3. Respuestas de los estudiantes en la actividad 1. Pregunta 1…..... 35
Figura 4. Respuestas de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 2..... 36
Figura 5. Respuesta de uno de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 3..... 36
Figura 6. Intento de reconocimiento de uno de los estudiantes del patrón de la pregunta 4, actividad 1…. 37
Figura 7. Respuesta de uno de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 4..... 37
Figura 8. Respuesta de uno de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 4..... 38
Figura 9. Respuestas de un estudiante en la actividad 2…..... 39
Figura 10. Respuestas de los estudiantes en la actividad 2..... 39
Figura 11. Respuestas de los estudiantes en la actividad 2..... 39
Figura 12. Niños durante el desarrollo de la actividad 3. 40
Figura 13. Respuestas de un niño en la actividad 3…….. 41
Figura 14. Respuestas de la actividad 4 de un estudiante…… 41
Figura 15. Respuestas de la actividad 4 de uno de los estudiantes……...43
Figura 16. Respuestas de un estudiante en la actividad 5…..... .44
Figura 17. Respuestas de un estudiante en la actividad 8…..... 46
Figura 18. Respuestas de un estudiante en la actividad 9…..... 47
Figura 19. Resultados de un estudiante en la actividad 1 de la Fase IV…..... 50
Figura 20. Resultados de un estudiante en la actividad 1 de la Fase IV…..... 51
Figura 21. Respuestas de un estudiante en la actividad 2 de la Fase IV…..... 53
Figura 22. Respuestas de un estudiante en la actividad 3 de la Fase IV…..... 54
Figura 23. Resultados de un estudiante en la fase IV……...56

Lista de tablas

Tabla 1. Logros relacionados a la competencia “Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos” para grado tercero. Fuente: MEN (2006) 24

Introducción

El pensamiento variacional es uno de los tipos de pensamiento matemático que existen y está involucrado en diversos cálculos y procesos sobre la identificación de cambios, variables y patrones en la vida diaria (MEN, 1998). Por esa razón, su práctica y desarrollo puede ser iniciado en tempranas etapas dentro del currículo de matemáticas (MEN, 1998), ya que los procesos mentales implicados son básicos dentro del desarrollo matemático de los niños, y se debe incluir en los planes de área de los primeros grados escolares, es desde esta perspectiva que se aborda en este trabajo y se debe pensar en el desarrollo del pensamiento variacional.

Con esta problemática en mente, en el presente trabajo se abordó el desarrollo de pensamiento variacional en la educación básica primaria, específicamente en estudiantes del grado Tercero (3º) de la Institución Educativa Donald Rodrigo Tafur, en Cali, Valle del Cauca. A pesar de que desde la expedición de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Calidad (2003) se establece el pensamiento variacional como uno de los 5 componentes a ser desarrollados durante la escolaridad, poco se sabe de cómo se lleva a cabo este proceso y en Colombia, la investigación alrededor del desarrollo del pensamiento variacional se ha concentrado en los grados de la básica secundaria (e.g., García, 2008), de modo que resulta pertinente abordar la problemática desde un grado de la básica primaria.

Por lo tanto, en el presente trabajo se asume el reto de diseñar e implementar una estrategia didáctica para propiciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado tercero de la Institución educativa antes mencionada, basados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1989) y la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006; 2014), que constituyeron dos de las bases conceptuales que rigieron la pedagogía de la intervención didáctica, donde más que un método centrado en el alumno como individuo y su experiencia, se quiere ver al alumno como parte de ese medio social en el que se incluye, de modo que el *knowing* “Conociendo”, según (Radford, 2006; 2014); se conjuga en gerundio al ser un proceso continuo, que no para) tendría para esta investigación su eje en la idea de *objetivación*, una “toma de conciencia” del individuo frente a las “formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente (2014, p. 141). Esta toma de conciencia se encuentra de manera implícita y explícita en el fin último de las actividades que componen la propuesta didáctica y la forma como los estudiantes se enfrentaron a la solución de las diferentes situaciones propuestas.

De tal manera se elaboró una secuencia didáctica compuesta por 14 actividades basadas en problemas no rutinarios, y ejercicios que involucraban los conceptos de *cambio*, *variación* y *patrón*, diseñada tomando como base los conceptos de Radford de *medio semiótico de objetivación* (Radford, 2006) y de Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD (Chevallard, 1989), teniendo en cuenta la importancia y necesidades de los estudiantes, frente a su quehacer y forma de enfrentar el saber a enseñar, pero sobre todo su forma de accionar y pensamiento frente a las diferentes situaciones que se les presentaron.

Las actividades se planearon e implementaron siguiendo la estrategia Activando la Resolución de Problemas en el Aula, ARPA propuesta por Felmer y Díaz-Perdomo (2017). De acuerdo con esta iniciativa, los estudiantes son organizados en grupos al azar para resolver un problema no rutinario. Si los estudiantes no pueden resolver el problema propuesto, se les da una simplificación de dicho problema que los ayude a entender y resolver el problema inicial. Cuando los estudiantes resuelven este último, se les da una extensión, un problema con un mayor nivel de dificultad.

El presente trabajo se desarrolló en cinco capítulos. El primero se desarrolla en torno al planteamiento del problema, donde se encuentran la justificación, la formulación del problema, los objetivos y una descripción de la población con que se trabajó. El segundo capítulo es el marco referencial, allí se reseñan los principales antecedentes investigativos y se contextualizan las bases conceptuales en la investigación, donde los principios didácticos oficiales (MEN, 1998, 2006), la teoría de la emergencia del pensamiento variacional (Vergel, 2016), la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1989) y la teoría de la objetivación (Radford, 2006; 2014) confluyen en una propuesta didáctica encaminada a desarrollar el pensamiento variacional y provocar la objetivación en los estudiantes. En el tercer capítulo se explica la metodología que se siguió. Seguidamente se encuentra el análisis de resultados, donde se da luz a las muestras recogidas teniendo en cuenta la teoría. Finalmente, se encuentran las conclusiones.

1. Planteamiento del problema

A nivel nacional, desde la básica primaria hasta grado 11º se mantiene el comportamiento de bajos resultados en las Pruebas Saber en el área de matemáticas, desde los diferentes pensamientos que son evaluados, entre ellos el variacional. Pero, además, se puede establecer una relación asociada con aquellas competencias que tienen que ver con el pensamiento variacional y lo referente a la competencia de resolución de problemas, necesarias desde los primeros años de escolaridad y que se hacen extensivas durante los años posteriores en lo relacionado con el pensamiento algebraico. Si se tienen en cuenta los resultados y dificultades que en esta etapa escolar se pueden observar en el área de matemáticas, la idea anterior cobra mayor relevancia, y se puede evidenciar en diferentes estudios realizados (Vasco, 2009; Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012; Rojas, P. J., y Vergel, R., 2013), donde los autores concuerdan en que si no se resuelven las dificultades en un trabajo inicial dentro del pensamiento variacional, se verá afectado el trabajo en otros momentos, por ejemplo cuando se encuentran en el campo del pensamiento algebraico y a su vez, en el proceso de resolución de problemas que incluyen la variación como eje central.

En este contexto, al realizar un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de la Institución Educativa Técnica Industrial “Donald Rodrigo Tafur” en las Pruebas Saber, son evidentes las dificultades en relación con el aprendizaje de aquellos objetos matemáticos relacionados con la variación; en particular, los desempeños de los estudiantes de grado 3° de la institución muestran que existen dificultades para construir y describir secuencias numéricas y geométricas, aspecto fundamental del pensamiento variacional (Valoyes-Chávez, 2013). Adicionalmente, se identifican dificultades relacionadas con la habilidad para resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa.

Los estudiantes del grado 3o se encuentran en una etapa donde para resolver problemas en el área de matemáticas deben ingresar al campo del pensamiento variacional. Esto les representa una serie de dificultades, ya que no tienen fortalecidas las competencias necesarias. Por ejemplo, el comparativo entre los años 2014-2016, presentado en el gráfico 1, permite visualizar el comportamiento de los resultados de la I.E. en el área de matemáticas para grado 3º.

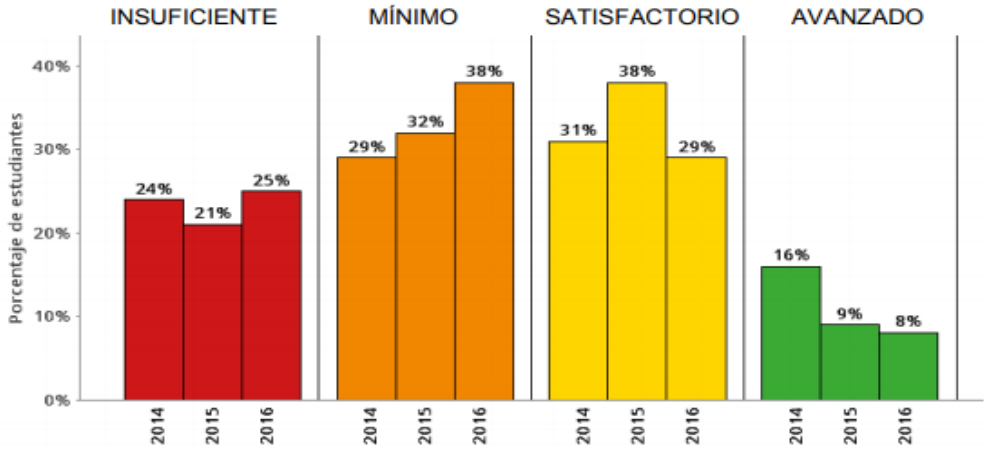


Gráfico 1. Resultados pruebas saber 2014-2016 I.E. Donald Rodrigo Tafur, grado 3º. Fuente: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/

En el análisis de resultados entregados a la institución para los componentes de la prueba se tiene, a nivel general, que los estudiantes presentan dificultades relacionadas con los aspectos mencionados a continuación: Primero, es débil en el componente Numérico-variacional; segundo, débil en Comunicación, representación y modelación; tercero, muy débil en Planteamiento y resolución de problemas.

Ahora, aunque para el año 2017, a nivel institucional, los resultados presentaron un leve aumento con relación a los años anteriores, continúan siendo bajos de acuerdo al promedio nacional, ya que a pesar de que aumentan los valores, las dificultades antes mencionadas persisten, siendo aquellas relacionadas con el pensamiento variacional. Según se ve, persiste una necesidad de trabajar el componente desde los grados inferiores.

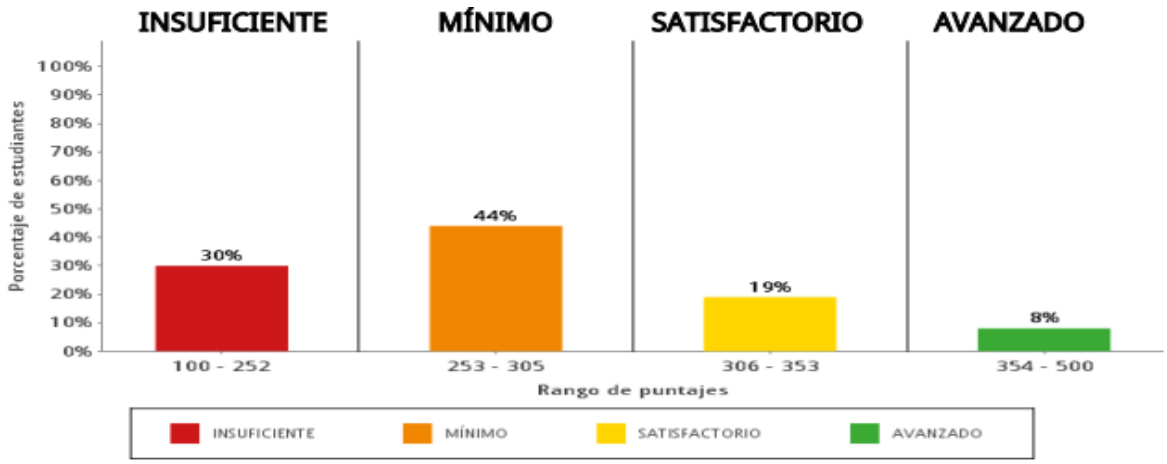


Gráfico 2. Resultados pruebas saber 2017, I.E. Donald Rodrigo Tafur, grado 3º.Fuente: http://www2.icfesinteractivo.gov.co

En el gráfico 2, se puede observar que, el estudiante promedio clasificado en el nivel mínimo soluciona problemas rutinarios utilizando la estructura aditiva cuando estos implican una sola operación, y establece relaciones de equivalencia entre expresiones que involucran sumas de números naturales. Reconoce diferentes representaciones y usos del número y describe secuencias numéricas y geométricas. Identifica frecuencia y moda en un conjunto de datos; interpreta información sencilla en diagramas de barras y pictogramas. Localiza objetos de acuerdo con instrucciones dadas; identifica atributos medibles y los instrumentos apropiados para medirlos e identifica figuras semejantes y congruentes entre sí. Con respecto a los porcentajes inferiores al valor mínimo, los estudiantes promedio ubicados en este nivel no superaron las preguntas de menor complejidad de la prueba (ICFES 2017).

En una lectura de los resultados para la sede Antonio Nariño (sede en la cual se hace la intervención) del año 2016, último año en que el ICFES presentó los resultados por sede antes de hacerlo por institución, se aprecia en los resultados comparados con

el promedio nacional, que las dificultades en el área de matemáticas son similares a las de otros estudiantes colombianos.

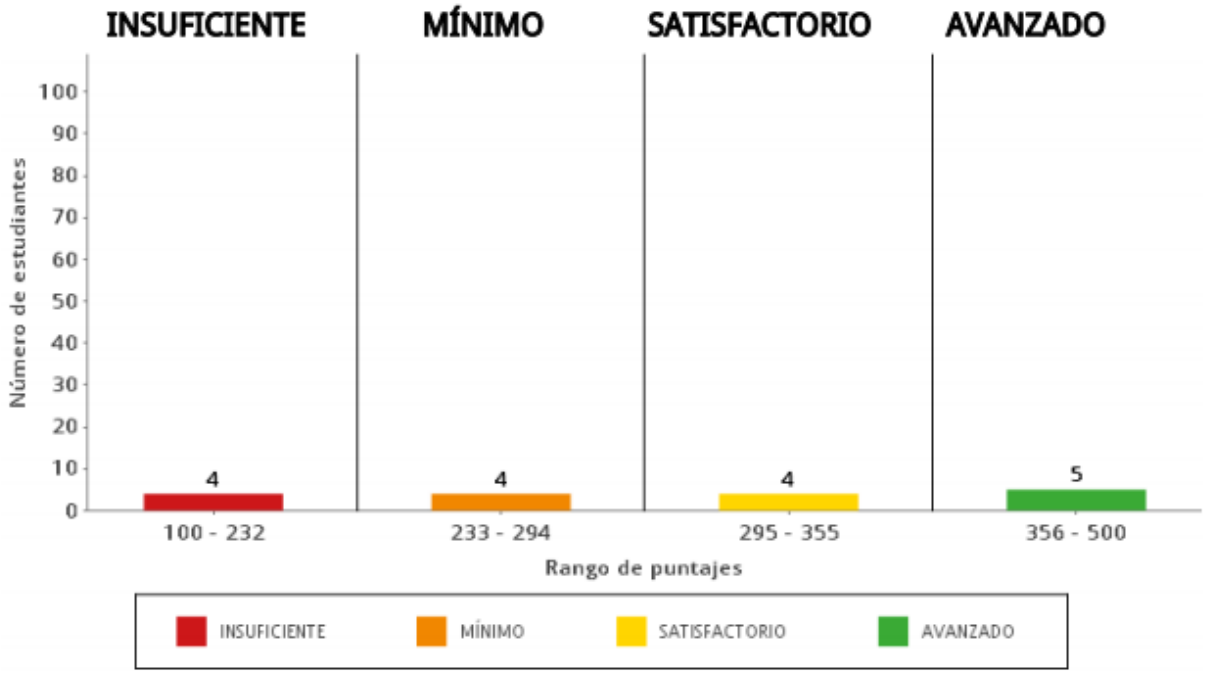


Gráfico 3. Resultados de prueba saber: Sede Antonio Nariño-grado 3º, año 2016
Fuente: I. E. Donald Rodrigo Tafur.

Según el gráfico 3, al analizar el resultado para el año 2016, se puede observar el alto número de estudiantes que se encuentran en los niveles insuficiente y mínimo, teniendo en cuenta el total de los estudiantes. Esto quiere decir que el estudiante no es capaz de realizar ciertas acciones que ya debería poder efectuar con el conocimiento adquirido. Entre los aspectos de los resultados de los estudiantes que no fueron satisfactorios para el caso de la I. E. Donald Rodrigo Tafur sede Antonio Nariño, se tiene, dividido por competencias, lo siguiente:

- **Competencia comunicación**

  - No identifica atributos de objetos y eventos que son susceptibles de ser medidos.
  - Los estudiantes no construyen ni describen secuencias numéricas y geométricas.
  - Los estudiantes no clasifican ni organizan la presentación de datos.

- **Competencia razonamiento**

  - Los estudiantes no generan equivalencias entre expresiones numéricas.

- **Competencia resolución de problemas**

- Los estudiantes no resuelven ni formulan problemas sencillos de proporcionalidad directa.
- Los estudiantes no estiman medidas con patrones arbitrarios.

De acuerdo con el análisis y planteamiento de las Pruebas Saber (2016), un estudiante de grado 3º lo mínimo que debería estar en capacidad de realizar en cuanto al pensamiento variacional sería lo siguiente:

- Reconoce diferentes representaciones y usos del número y describe secuencias numéricas y geométricas.
- Identifica atributos medibles y los instrumentos apropiados para medirlos e identifica figuras semejantes y congruentes entre sí.

En cuanto a los rasgos en razonamiento y argumentación, el estudiante:

- Establece equivalencias entre expresiones numéricas en situaciones que corresponden a estructuras aditivas.
- Compara y ordena objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con un atributo (tamaño, longitud o forma).
- Reconoce eventos posibles e imposibles.

Según los desempeños de la Sede Antonio Nariño en la prueba PISA 2012, cuyo énfasis fue en matemáticas, se evidencia que el 74% de los estudiantes se ubicaron por debajo del nivel de competencia básico y el 18% en el nivel básico. Es decir, solo 2 de cada 10 estudiantes lograba emplear algoritmos básicos y procedimientos para resolver problemas que involucraban números enteros y reconocer e interpretar situaciones en contexto que requieren una inferencia directa. Así pues, la discusión anterior evidencia la forma en la cual el dominio algebraico constituye un campo problemático para los estudiantes colombianos.

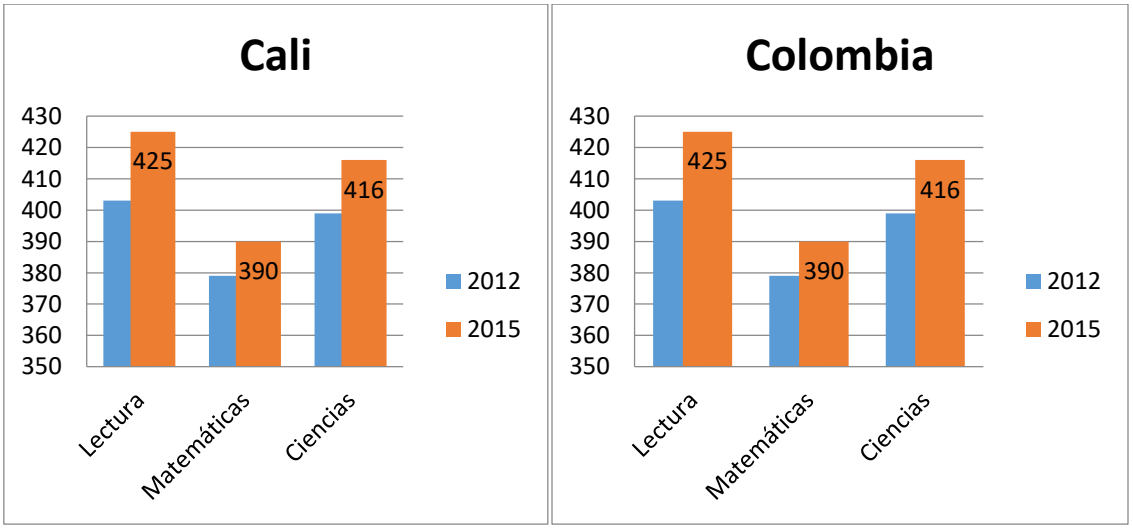


Gráfico 4. Resultados pruebas PISA, comparación Cali-Colombia, años 2012-2015.

Fuente: I.E. Donald Rodigo Tafur.

Ahora bien, con respecto a los resultados en PISA 2015, (gráfico 4), se evidencia un leve aumento en los porcentajes de los resultados de los estudiantes de Cali, con respecto a la media nacional, pero continúan siendo unos desempeños bajos dentro del área de matemáticas. Dichos resultados muestran una tendencia generalizada en los desempeños de los estudiantes en las diferentes I.E. del país, lo cual se va agudizando cuando se pasa especialmente al trabajo en el campo del pensamiento algebraico, posterior al trabajo con el pensamiento variacional.

Adicionalmente, esta dificultad se hace evidente en el alto número de investigaciones que se pueden encontrar a nivel local, nacional e internacional, sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra estrechamente relacionadas con la falta del desarrollo del pensamiento variacional. García, Serrano y Salamanca (2000) consideran la importancia en el desarrollo del pensamiento variacional en la escuela primaria (que constituye el énfasis de este trabajo), dado que este tipo de pensamiento en los estudiantes permite establecer la relación entre el cambio y su medición; lo cual si se tiene en cuenta se hace transversal a otras áreas del conocimiento, y a otros contextos.

Lo anterior se presenta como evidencia de la problemática que actualmente existe, relacionada con el pensamiento variacional dentro del campo de las matemáticas, y que de trabajar en ella, se piensa en resolver la problemática objeto de estudio en este trabajo, relacionada con la potencialización del desarrollo del pensamiento variacional, creando los espacios y ofreciendo herramientas adecuadas de trabajo para estudiantes de grado 3º, a partir de la resolución de problemas no rutinarios, planteando así una propuesta para avanzar en la problemática encontrada, y que a su vez se relaciona entre otras cosas con los resultados obtenidos por los estudiantes participantes de este estudio, los cuales se miden y evalúan también a través de las diferentes pruebas internas y externas que se realizan.

Gómez (2013), en su trabajo “Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno”, promueve la importancia de este tipo de pensamiento y lo asocia con la necesidad para el trabajo en años posteriores en la básica secundaria; donde para el campo del pensamiento algebraico, resulta de gran importancia y no solamente para cumplir con unas expectativas académicas, sino también a lo largo de las diferentes situaciones que se puedan presentar a nivel cotidiano.

En su trabajo, Gómez afirma que el desarrollo del pensamiento variacional está ligado a las formas de reconocimiento, de percepción, de identificación a las formas en que se caracteriza el cambio y la variación, teniendo en cuenta sus diferentes formas de representarlo. Así, se hace evidente en este trabajo, en el momento de contextualizar al estudiante a través de las diferentes situaciones con problemas no rutinarios a las que se vea enfrentado, por lo cual no se debe descartar el inicio de este trabajo desde los grados inferiores para nuestro caso grado 3º de la básica primaria.

Los resultados de las investigaciones referidas fueron unos primeros alicientes para plantear una solución que permita trabajar la variación, posibilitando el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes del grupo de estudio. Por lo tanto, se plantea la potenciación del pensamiento variacional, a partir de la creación de los espacios y las herramientas adecuadas de trabajo para estudiantes de grado 3º y la

resolución de problemas no rutinarios, teniendo en cuenta entre otras cosas a mejorar el trabajo de los estudiantes en este campo y los bajos resultados obtenidos por los estudiantes participantes de este estudio en las diferentes pruebas internas y externas que se realizan y pensamientos relacionados con el área, tal como el algebraico (Vasco, 2009; Paladínez, 2018).

Por lo tanto, es necesario, según como lo plantea la teoría de la objetivación (Radford, 2006), mediar para que el estudiante construya su propio conocimiento a partir de unas situaciones y unas herramientas apropiadas pertenecientes a su entorno, y con las cuales pueden interactuar además de aprovechar el trabajo en equipo, estando además en un medio creado para la situación, y donde los estudiantes tienen la oportunidad de relacionar conocimientos previos, y a partir de su proceso de construcción del conocimiento, poder lograr el objetivo que se propone en cada una de las situaciones que se van presentando, para llevar a cabo el gran objetivo de este trabajo; además teniendo presente también la interacción con la docente, quien apoya en el proceso, no como quien enseña y tiene la propiedad del conocimiento, sino como aquel integrante que participa en la construcción del mismo. Al poner en el contexto del trabajo lo anterior, sobresalen de manera implícita los enfoques que se precisaron para la intervención didáctica con los estudiantes, la teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2014), basada en el principio de que la educación no solo trabaja con saberes, sino con seres. Puede decirse que la teoría de la Objetivación es el medio, y el Aprendizaje Significativo es inherente al objetivo de desarrollar el pensamiento variacional.

1.1 Justificación

Mediante el presente trabajo se espera explorar y profundizar sobre una problemática que desde la básica primaria se hace presente en el área de matemáticas, el desarrollo del pensamiento variacional. Este componente del área de las matemáticas se relaciona estrechamente con la aplicación en la vida práctica, al depender de la identificación de variables, de ciclos y de sistemas de ciclos (MEN, 1998).

Si no se hace un trabajo de corrección en el momento oportuno de las dificultades relacionadas con el pensamiento variacional, aparecerán reflejadas en otros momentos del aprendizaje de los estudiantes, porque interfiere en el desarrollo de otros pensamientos como el algebraico. Diversas investigaciones (Butto y Rojano, 2010; Vasco, 2003; Vergel 2016) han manifestado esta relación, donde una dificultad en el pensamiento algebraico proviene o está relacionada con la falta de trabajo en el pensamiento variacional, al mostrar una baja comprensión frente al tipo de situaciones que involucran dicho pensamiento. Teniendo en cuenta lo anterior, el desarrollo del pensamiento variacional en grado 3º contribuye al desarrollo próximo del pensamiento algebraico, dada la proximidad lógica entre los componentes mencionados (Molina, 2006; Butto y Rojano, 2010).

Con la puesta en práctica de este estudio, se espera que los estudiantes de la I.E. Donald Rodrigo Tafur, en especial los estudiantes de la sede Antonio Nariño, tengan la posibilidad de iniciar de una manera diferente el trabajo en el área de matemáticas, al

potencializar aquellas competencias asociadas al pensamiento variacional, a través tales de problemas no rutinarios y el trabajo con patrones y secuencias, lo que permita el fortalecimiento en el área y a su vez un mejor desempeño de los estudiantes en años posteriores, como también en las diferentes pruebas que tanto a nivel interno como externo se realizan.

Para ello, es preciso basarse en los principios de la Teoría de la Objetivación de Radford (2006, 2014), porque el método a utilizar depende esencialmente de actividades donde los niños no solo responden ejercicios, sino que interactúan con los materiales didácticos y entre sí. Al hablar de Teoría de la Objetivación, se entiende el "conocer" como la "toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.)" (Radford, 2014, p. 142).

Así, se espera evidenciar si efectivamente las actividades que se proponen dentro de la secuencia, tanto las técnicas y las tareas, son acordes a los diferentes planteamientos formulados inicialmente, si cumplen con los objetivos que se proponen y que finalmente puedan llevar a los estudiantes a potencializar el pensamiento variacional, que a su vez permita la construcción de su conocimiento. Así se contribuye con la identificación del tipo de actividades que se deberían trabajar con los estudiantes desde grados inferiores, y que sirvan para la comprensión y aprehensión de todos aquellos objetos de estudio que se encuentran estrechamente relacionados con el pensamiento variacional, al igual que todos aquellos pensamientos que con este se relacionan, de los cuales se trata a lo largo del trabajo.

1.2 Formulación del problema

Después de lo anteriormente expuesto, se puede evidenciar que la situación del grupo de estudio no está alejada de lo que se ha plantea en las diferentes investigaciones a las que se hace mención sobre el pensamiento variacional, frente a la necesidad de iniciar su potenciación a una edad escolar temprana, lo que contribuya a minimizar las dificultades en años posteriores, como también en las diferentes pruebas internas y externas de las que deben participar. Se presenta entonces la problemática que se propone abordar en el presente trabajo a partir del interrogante:

¿Cómo es posible potencializar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado 3º de la I.E. Donald Rodrigo Tafur, sede Antonio Nariño, a partir de la resolución de problemas no rutinarios que involucran la generalización de patrones?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

- Diseñar y evaluar una propuesta didáctica dirigida a potencializar el desarrollo del pensamiento variacional, mediante el uso de situaciones con problemas no rutinarios que involucran la generalización de patrones, en estudiantes de grado 3º de la I.E. Donald Rodrigo Tafur sede Antonio Nariño.

1.3.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar el desempeño de los estudiantes de grado 3º de la I.E. Donald Rodrigo Tafur en la resolución de problemas que impliquen el pensamiento variacional.

- Desarrollar situaciones problema no rutinarias que aporten elementos sobre la generalización de patrones, enfocadas a potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado 3º.

- Evaluar los alcances de la propuesta a partir de los resultados de los estudiantes de grado 3º luego de ser aplicada.

1.4 Población

La I.E.T.I. “Donald Rodrigo Tafur” se encuentra ubicada en la comuna 16, en el sector oriente de la ciudad de Santiago de Cali. Dicha comuna la constituyen cinco barrios: Mariano Ramos, República de Israel, Unión de Vivienda Popular y Antonio Nariño, siendo este último al que pertenecen los estudiantes de la sede “Antonio Nariño”, con los cuales se puso en práctica desarrollo del presente trabajo, donde a partir de unos resultados obtenidos en diferentes pruebas, se pueden evidenciar las dificultades que presentan

1.4.1 Comunidad educativa

La comunidad de la Institución Educativa Técnico Industrial Donald Rodrigo Tafur está integrada por los estudiantes matriculados, docentes, directores de grupo, directivos docentes, orientadores escolares, personal administrativo y de servicios generales, egresados, padres y madres de familia o acudientes de los estudiantes.

1.4.2 Estudiantes

Los niños y jóvenes de la I.E. son personas dispuestas a recibir todos los aportes que realicen los docentes para su aprendizaje, puesto que es una población que por su ubicación y contexto espacial dentro de la ciudad carece de muchas oportunidades, por lo tanto, es desde la escuela donde se debe empezar a hacer el trabajo de cambio de mentalidad y concientización de la importancia de la educación.

Los estudiantes de la IETI Donald Rodrigo Tafur son niños y jóvenes con dinámicas personales y familiares similares a los de otras instituciones, donde en la mayoría de los casos conviven con sus hermanos y con uno de sus padres u otra persona que asume este rol, según lo manifestado por las personas acudientes y registrado en el libro del observador diario del estudiante.

Para el desarrollo del presente estudio, la población a trabajar es el número de estudiantes matriculados en el grado 3º de primaria de la sede Antonio Nariño, los cuales oscilan entre los 8 y 12 años de edad. Algunos de los padres de familia manifiestan presentar carencias a nivel económico, lo que conlleva a las faltas continuas a clases por parte de los estudiantes y en su gran mayoría cuentan

solamente con las herramientas que se les brindan en la institución para su proceso de aprendizaje. Esto se puede constituir en una de las principales variables limitante para el desarrollo del proceso, sin dejar de lado lo que ya se había mencionado antes, que es la falta de acompañamiento académico en casa en un alto porcentaje de los casos, manifestado por los padres de familia, como también al poco tiempo que por sus trabajos pueden permanecer en sus hogares.

2. Marco referencial

2.1 Antecedentes del problema

Al hacer una revisión de las investigaciones en torno a la enseñanza de la matemática en primaria sobresalen varios de trabajos, por lo cual fue necesario realizar una delimitación siguiendo los criterios: 1. la cercanía con el tema del desarrollo del pensamiento variacional; 2. la pertinencia de su metodología con la propuesta y 3. Su realización en el contexto escolar de básica primaria, así como en la región hispanoamericana. Se presentan de forma cronológica, de modo que funcione como una línea de tiempo.

En primer lugar, encontramos como referente principal a nivel nacional a Vasco (2003), como un exponente de la importancia del pensamiento variacional dentro del currículo; Vasco propone en un primer momento conceptualizar sobre el pensamiento variacional. (PV), para ubicarlo, desde un recorrido histórico, en el currículo de matemáticas en Colombia, esencialmente en la exploración de fenómenos que tienen que ver con la transformación y la modelación. El autor define el PV como “una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (p. 6).

Vasco brinda algunas directrices sobre el desarrollo de este pensamiento, y describe que el elemento crucial es el uso de los pensamientos matemáticos relacionados: el numérico, el espacial, el métrico, el proporcional tradicional; conjuntamente con las representaciones gestuales, de máquinas y circuitos, igualmente con ejercicios como reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares, las representaciones sagitales de la “matemática moderna”, el uso de papel cuadriculado, el milimetrado y el ajuste de curvas, el estudio de las esplinas cúbicas y el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas y logísticas (2003, p. 7-8)

También se considera la posición de Vergel (2016), en su tesis doctoral “Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria”, quien desde la perspectiva sociocultural de Vygotsky entra a analizar lo que llama “la zona de emergencia del pensamiento algebraico” y luego toma como eje central de su argumentación la teoría de la objetivación, para singularizar el pensamiento algebraico, distinguirlo de los otros tipos de pensamiento según las funciones analíticas o simbólicas que demandan.

Esta base conceptual y metodológica le sirvió a Vergel (2016) para diseñar una serie de ejercicios destinados a dos grupos de primaria de cuarto y quinto, en plena etapa de lo que él llama “zona de emergencia” del pensamiento algebraico, y obtener resultados en sus estudiantes que lo lleven a presentar propuestas de una mejor intervención y didáctica de este pensamiento en el aula, pues consideran que los estudiantes ven el uso de los pensamientos como posibilidades que emergen al momento de realizar un ejercicio. Lo que se quiere destacar aquí y para esta investigación es la crucial relación

entre el pensamiento variacional y el algebraico: tal parece que su desarrollo se encuentra hermanado, como si el primero no pudiera ocurrir sin llevar al segundo.

Por otra parte, Maury, Palmezano y Cárcamo (2012) llevaron a cabo una investigación donde proponen la construcción de una metodología destinada a favorecer el desarrollo del pensamiento variacional a los estudiantes. Como resultado del estudio, en vez de un aplicativo con ejercicios para estudiantes, los autores presentan el producto final como una guía a los docentes de básica primaria de la Institución Educativa Distrital Comunitaria Octavio Paz, para el mejoramiento de sus prácticas en el aula de matemáticas. La metodología fue construida con base en tareas elaboradas para los fines propuestos, sistemáticamente complejas según avanzaba el proceso.

Este antecedente de Maury, Palmezano y Cárcamo (2012) es importante de reseñar ya que presenta como foco principal de la cuestión al docente a partir del grupo de estudio de 31 participantes. No obstante, la investigación consideró los posibles resultados que se pudieran ver en sus estudiantes, por lo que la muestra también tuvo en cuenta a 48 de los estudiantes. Finalmente, el trabajo con los docentes repercutió en el mejoramiento del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas que implicaran el pensamiento variacional, como deducciones de patrones de variación, interpretación de la variación a través de gráficas, identificación de las variables, cálculo de la magnitud desconocida y la elaboración de modelos.

En otra investigación, Rivera y Sánchez (2012) trabajaron en un grupo de estudiantes una secuencia didáctica destinada, por un lado, a desarrollar algunos aspectos del pensamiento variacional, y por otro, a que esto conlleve a potenciar la iniciación al álgebra escolar y el mejoramiento del pensamiento algebraico. La secuencia se basó en el cuento clásico de Hanzel y Gretel, con la adaptación a problemas algebraicos de algunas escenas del cuento que los estudiantes resolvieron durante cuatro fases.

Estas cuatro fases se resumen cada una en: “Acerquémonos a los patrones”, centrada en el reconocimiento visual de patrones geométricos para que a través de unas preguntas se demuestre que los estudiantes identificaron la organización de las figuras que componen el patrón, así como cuántas figuras hay y cómo se relacionan entre ellas; la segunda, “Hansel y Gretel y los patrones numéricos”, para que los estudiantes realicen la transición a través de imágenes desde el reconocimiento de los patrones hacia los patrones numéricos (2012); la tercera, “Patrones y productos con piedritas”, para trabajar con múltiplos y divisores; y la cuarta “estrategias multiplicativas”, para continuar con el trabajo de la multiplicación como operación cuaternaria.

El principal aporte del trabajo de Rivera y Sánchez (2012) es significativo porque propone una estrategia basada en las estructuras multiplicativas y brindar un ejemplo de diseño de secuencia claro y conciso. No se limita a la comprobación de la eficacia de una secuencia didáctica cuyo fin sea el desarrollo del pensamiento variacional, más bien brinda a la comunidad docente el diseño de una alternativa que puede replicarse sin muchas variaciones.

De otro lado, sobresale la investigación de Acosta, Jiménez y Villar (2015), quienes trabajaron una actividad “applet” para desarrollar el pensamiento variacional en un grupo de grado quinto del colegio Americano, en Bogotá. Los investigadores se plantearon como objetivo definir el diseño concreto de una actividad con resultados efectivos que pudiera brindarse al colegio para que futuros estudiantes tuvieran un mejor acceso a las resoluciones lógicas propias del pensamiento variacional. Utilizaron el software *Geogebra* para construir una sencilla aplicación con la que su grupo de estudio hizo las actividades correspondientes a la identificación de patrones y variables. Este trabajo se hace importante de reseñar al integrar tanto las aplicaciones alternativas como una presentación sistematizada de los resultados y la actividad final.

Acosta, Jiménez y Villar (2015) permitieron que todos los estudiantes involucrados desarrollaran y expusieran ideas del pensamiento variacional a partir de la actividad “applet” trabajada, así como la formulación de conjeturas y, en un par de casos, la validación de algunas de ellas. De tal manera, los estudiantes, por medio de la visualización de la actividad en la pantalla, aprendieron a utilizar un medio para descubrir regularidades frente a la variación.

En una investigación reciente, Paladínez (2018) combina el objetivo del desarrollo del pensamiento variacional con el aprendizaje basado en problemas (ABP). Las actividades trabajadas con base en el ABP fueron denominadas así: de iniciación, donde se familiariza al estudiante con los elementos repetidos en una secuencia, como figuras geométricas, sucesiones, etc.; de afianzamiento, basadas en un proceso de construcción colectiva del conocimiento, donde se resuelven situaciones problema entre docente y estudiante; y de profundización, donde se complejizan las situaciones problema, con las que se demanda una integración de las características que dan cuenta del razonamiento algebraico.

Este trabajo es importante de reseñar porque metodológicamente se relaciona con esta investigación, ya que Paladínez (2018) consiguió fortalecer los procesos relacionados al pensamiento variacional a partir de brindarles a los estudiantes previamente los conocimientos requeridos para ello. Es decir, antes de enfrentar a los estudiantes al uso complejo del pensamiento, primero procuró darles las bases necesarias, procedimiento que se comparte en este ejercicio de intervención.

Como se puede observar, son varios los estudiosos dentro del campo de las matemáticas que han presentado sus posturas frente a la situación del pensamiento variacional temprano y a la vez sus propuestas para los diversos problemas que acarrea en el aula de matemáticas en la educación primaria. Todos coinciden en que tiene una importancia elemental para el pensamiento matemático en general, razón por la cual todas las personas que intervienen en el proceso de enseñanza en el área de matemáticas deben enfocar sus metas en la emergencia de los pensamientos matemáticos, especialmente el variacional, si no han ocurrido, su desarrollo si se encuentran incipientes, y su potenciación cuando se han comenzado a dominar.

2.2 Marco teórico

En este apartado confluyen los diversos enfoques teóricos y epistémicos que sustentaron el desarrollo del trabajo. Debe recordarse que, al depender esta investigación de una intervención en el aula, este marco no debe limitarse a explicar los conceptos matemáticos implicados, sino tener en cuenta también los principios matemáticos pedagógicos y la didáctica que cimentaron tanto la realización de actividades en clases como el análisis de sus resultados.

Por tales motivos, primero se presentan las nociones básicas sobre pedagogía y didáctica de las matemáticas, para dar paso a conceptos específicos que se utilizaron en las actividades con los niños, tales como los problemas no rutinarios, el método de resolución de problemas y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas.

2.3 Enfoques teóricos y metodológicos

En torno a las posibilidades propiciadas por el trabajo con el pensamiento variacional en el aula, en esta investigación se trabajaron enfoques teóricos y metodológicos que confluyeron en la propuesta didáctica: la idea de pensamiento variacional emergente, de Vasco (2015); los *Lineamientos Curriculares* y los *Estándares básicos de competencias* del MEN (1998; 2006); la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard (1989); y la teoría de la objetivación de Radford (2006; 2014), que confluyen a través de una propuesta de intervención en el aula en el desarrollo del pensamiento variacional. Las relaciones de este entramado de enfoques pueden verse graficadas en la figura 1.

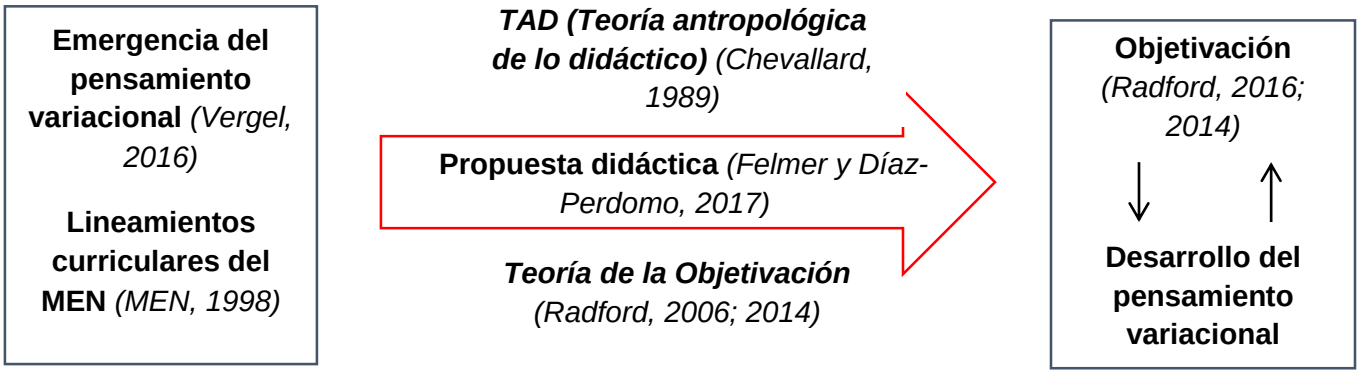


Figura 1. Diagrama dialógico del marco teórico de la investigación. Fuente: propia.

2.3.1 El pensamiento variacional

En los Estándares Curriculares Colombianos del área de Matemáticas (MEN, 2006) se describe el pensamiento variacional como un pensamiento que tiene que ver con el reconocimiento, la identificación, percepción y caracterización “de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos” (2006, p. 66). Según el MEN (1998), el pensamiento variacional tiene que ver con el análisis, la organización y la modelación de situaciones de la vida práctica, científicas o matemáticas donde

influya una componente variacional. Se identifican además algunos núcleos conceptuales en los que se encuentra involucrada la variación, como puede ser el continuo numérico, la función como dependencia y modelo; las magnitudes; el álgebra en su sentido simbólico y liberado de su significación geométrica; y los modelos matemáticos de tipos de variación (MEN, 1998). En cuanto a la vida práctica y el ámbito científico,

> La variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático (…) El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas (1998, p. 50).

Esta definición toma importancia en el presente trabajo para la adquisición del conocimiento, puesto que es una apuesta para que los estudiantes puedan identificar, reconocer y caracterizar el pensamiento variacional ampliando su campo, en una visualización de las variables, las magnitudes y el cambio; viendo su representación en diferentes contextos cotidianos como ya se ha mencionado.

Así pues, se puede visualizar la gran importancia de este trabajo, cuando de la variación en la escuela primaria se trata, pero más interesante aún, trabajándola de manera integrada a partir de los componentes aritméticos, geométricos, estadísticos y variacional. El estudiante puede llegar a asociar y comprender la estrecha relación entre un sistema y otro (aritmético, geométrico y variacional), o mejor aún, sentir que no se encuentra en un tipo diferente de matemáticas, sino que es el mismo concepto, visto desde diferentes enfoques y que, dependiendo de su interiorización, puede manipular para lograr su objetivo final. En otras palabras, el estudiante puede llegar a un aprendizaje, a través del reconocimiento de aquellos fenómenos de diferentes modelos matemáticos que se encuentran incluidos dentro del de la variación.

En algunos casos, dichos fenómenos de pensamiento variacional del estudiante pueden ser creados por diversos factores por parte del docente; esto se puede desarrollar a través de diversos pensamientos y diversas técnicas, como pueden ser las siguientes: secuencias numéricas, variación del área o perímetro de una figura dependiendo de la longitud de sus lados, entre otras. A continuación, se verá cómo entran en juego estos elementos en la etapa de pensamiento algebraico temprano, en la que se encuentran los estudiantes (Vergel, 2016).

2.3.2 Pensamiento algebraico temprano

Tal como lo indica Vergel (2016), dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial del álgebra, suelen encontrarse dificultades, sobre todo en el proceso o tránsito de la aritmética al álgebra. Teniendo en cuenta la brecha que, según varios autores, entre ellos Radford (2006), indican que existe, se hace necesario inicialmente entender qué es el álgebra, cuáles son esos tipos de actividades que promueven el pensamiento algebraico y cuáles son esas dificultades que se pueden encontrar al pasar del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

Al no tener en cuenta la claridad frente a la diferencia entre aritmética y álgebra, es por lo que en algunos currículos se puede caer en el error de estar trabajando en el campo de una u otra sin haber una precisión, lo cual no debería ser considerado erróneo, siempre y cuando sea un trabajo que se haga a conciencia y direccionado para llevar allí al estudiante y generar en él un tipo de pensamiento diferente, más elaborado y que le permita una visión o perspectiva diferente en cuanto a lo que está aprendiendo.

La cuestión es que los estudiantes de las escuelas de primaria colombianas pueden actualmente estar trabajando, direccionados o no por sus maestros, en alguno de los dos campos sin darse cuenta y, por ende, la actividad no es compatible con el desarrollo adecuado en el pensamiento del estudiante (en nuestro caso del pensamiento variacional), lo que caso contrario le permitiría aprovechar de manera distinta y, por qué no decirlo, más eficiente todo aquello que recibe a través de sus maestros y del contexto, durante las clases o por medio de una actividad guiada para tal fin.

En otras palabras, según la situación problema presentada, en la adquisición y aplicación de algunos conocimientos los estudiantes pueden estar moviéndose desde el pensamiento algebraico al aritmético, del variacional al algebraico, sin que el docente lo haya dejado claro; es necesario, como uno de los objetivos de una propuesta basada en los pensamientos matemáticos, es que el estudiante claramente pueda llegar a identificarlos. Por ejemplo, en un ejercicio dirigido al pensamiento variacional, un estudiante puede llegar a deducciones y conclusiones del orden de lo aritmético, pero rozar las lindes de la figuración algebraica, aunque, como en el caso del grupo de estudio de este trabajo, sean de un nivel de básica primaria donde todavía no se enseña el álgebra.

Vergel (2016), en este sentido, considera respecto al desarrollo del pensamiento variacional que “se trata de un intento serio por rastrear formas de pensamiento algebraico temprano y de dilucidar las diferencias con las formas de pensamiento aritmético” (p.18), por lo cual se hace énfasis desde este trabajo, en la necesidad de pensar en fomentar o estimular el desarrollo del pensamiento variacional en la escuela primaria, en especial con los estudiantes que participan del estudio.

Así, el pensamiento variacional a desarrollar no depende tanto de la actividad en sí, si no la naturaleza de la misma, porque la actividad que se propone sola como tal (sin ninguna intencionalidad) no hace ni genera nada en el pensamiento del estudiante; por el contrario, se debe buscar o gestionar para que dichas actividades generen movimiento en el desarrollo del pensamiento.

Es así como para el caso de este trabajo, se piensa y propone en el diseño e implementación de otro tipo de actividades, con un menor o mayor grado de generalización con respecto a la actividad principal, a las que se les llama simplificación y extensión respectivamente. Las actividades de extensión, son aquellas que presentan un mayor grado de exigencia, al momento de abordar un conocimiento; para este caso la extensión se pidió ser trabajada de manera adicional por aquellos estudiantes que presentan cierto desarrollo, nivel de comprensión o aceptación positiva al desarrollo de la actividad inicial o general. Por otro lado, la simplificación que constituye aquella

actividad que describe en un paso a paso, para que los estudiantes se guíen y orienten en el trabajo cuando a pesar de las técnicas utilizadas para el desarrollo de la actividad general, manifiestan no comprender o no poder resolver la prueba.

Por otro lado, investigadores como Radford (2008); Radford (2010) y Vasco (2007) indican que cuando los estudiantes se enfrentan a determinadas situaciones, aquellas que se refieren a lo que ellos llaman “indeterminado”, es necesario prestarle atención no solo a las respuestas verbales, sino también a aquellas expresiones corporales con las cuales pueden estar comunicando las observaciones, apreciaciones y/o conclusiones a las que llegan frente a la problemática planteada. Además, se recomienda también prestarle atención a las dificultades que puedan presentar los estudiantes en el momento de la adquisición del conocimiento en aspectos relacionados con la sintaxis, semántica y pragmática (sobre todo en la relación entre ellas), lo cual se debe de hacer desde los primeros años de escolaridad.

En este orden de ideas, el pensamiento variacional se puede enmarcar dentro de los procesos algebraicos que consciente o inconscientemente el estudiante desarrolla y que no tiene sus inicios precisamente en la escuela secundaria, sino que, por el contrario, se propician desde la escuela primaria. Como lo dicen Kieran (2007) y Radford (1996), entre otros, no hay todavía respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, y qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico. Es en este punto y para solventar esta dificultad donde aparece con gran relevancia lo relacionado con la Teoría de la Objetivación.

2.3.3 Teoría de la objetivación

Según Radford (2009), los procesos de objetivación son asumidos como procesos sociales a través de los cuales los estudiantes capturan la lógica cultural con la que los objetos de saber han sido dados y se familiarizan con las formas de acción y pensamiento. Por lo tanto, se puede pensar que si a los estudiantes durante su proceso de aprendizaje, se los guía u orienta de manera indicada, es posible que el desarrollo de su pensamiento trascienda. En otras palabras, si ellos constantemente son permeados por circunstancias en las que se promueva el pensamiento variacional, muy seguramente se presentarán situaciones que no se tuvieran contempladas o por lo menos no para los niveles de escolaridad en los que se encuentran los estudiantes presentes en este estudio.

Es aquí donde el trabajo del maestro consiste en captar cierto tipo de información, bien sea de manera verbal durante la resolución de ciertas actividades o incluso el mismo lenguaje utilizado por los estudiantes, lo cual pueden estar indicando fenómenos nuevos y a su vez que pueden ser muy normales dentro de su propio pensamiento; al proceder de otra manera, se estarían desconociendo las prácticas semiótico-culturales, desaprovechando elementos importantes del pensamiento variacional que podrían traer inmersas todas estas apreciaciones por parte de los estudiantes.

A pesar de que se han realizado varias investigaciones al respecto del pensamiento variacional (Maury, Palmezano y Cárcamo, 2012; Rivera y Sánchez, 2012; Acosta,

Jiménez y Villar, 2015; Paladínez, 2018), se puede conocer que aún existen inquietudes frente al desarrollo de cierto tipo de pensamiento, en el caso de los autores de referencia también del pensamiento algebraico, estrechamente ligado al objeto de estudio de este trabajo. Para el presente caso se trata de mirar cuáles tipos de actividades son las que podrían contribuir para el desarrollo del pensamiento variacional, siendo solo una aproximación, a la conclusión que se puede llegar desde este estudio, el cual será aplicado a un número determinado de estudiantes de grado 3º de la sede Antonio Nariño de la IE Donald Rodrigo Tafur.

En tal entendido, puede darse el caso de que un estudiante en un ejercicio aritmético trascienda a lo algebraico por su cuenta, sin la necesidad de usar símbolos y letras, de modo que los estudiantes pueden hacer sus propias conjeturas, conclusiones y además llegar a una posición frente a una situación propuesta. La manera del estudiante de darle solución depende del camino por el cual haya sido llevado y la situación o contexto en el cual se encuentre inmerso, lo cual se podría considerar como un fenómeno didáctico. Tal como lo manifiesta (Radford, 2010):

> Es todo ese fenómeno de aparición de formas de pensamiento el que tenemos que entender mejor y esto depende de la estructura de la clase en particular, de la actuación del profesor, de la actividad de los alumnos, de los problemas que proponemos y el tipo de preguntas que planteamos, etc. (p.13)

De la teoría de la objetivación se resalta entre otras cosas algo muy importante, y es el hecho de reflexionar sobre las matemáticas, no como la resolución de problemas como el fin último, si no la suficiencia que tiene el estudiante de utilizar el conocimiento adquirido a la hora de enfrentarse a una situación problema como tal: que sea capaz de hacer las transformaciones necesarias, partiendo de unos conocimientos ya sean previos o adquiridos mediante su proceso de aprendizaje. A esto es lo que se quiere llegar con el presente trabajo, que el estudiante de grado 3º, pueda tener esa competencia de transformar su conocimiento, que lo que se le aporte en clase por parte del docente y compañeros, pueda ser una herramienta útil, además de las condiciones que se creen o propicien para ello, teniendo en cuenta la importancia también de esta última.

3.1.3.1. La objetivación

Radford (2014) define la objetivación, el núcleo central de la Teoría del mismo nombre, de la siguiente forma: “La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente” (p. 141). Esta “toma de conciencia” está relacionada directamente con el descubrimiento del niño de que el mundo no es el resultado de *sus* acciones. El mundo ha sido construido por la labor de sus antepasados, y los objetos que en él habitan ya están llenos de significados, porque llevan en sí la experiencia humana pasada (Radford, 2014). El autor también advierte que

> Lo que hay que tomar en cuenta es que, en nuestra definición de objetivación, no estamos hablando de la conciencia como entidad metafísica. Estamos hablando de la conciencia desde un punto de vista dialéctico-materialista. Desde este punto de vista, la conciencia es relación al mundo—relación concreta (2014, p. 142).

2.3.4 La teoría antropológica de lo didáctico

Dentro de la didáctica de las matemáticas y específicamente en el proceso enseñanza y de aprendizaje, es de importancia tener en cuenta no solamente los sujetos (estudiante - maestro), sino que hay otro aspecto de gran importancia a tener en cuenta. El Saber enseñado; el cual constituye un elemento clave dentro de dicho proceso, razón por la cual se han desarrollado diferentes estudios, investigaciones y teorías, entre las cuales se encuentra la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), donde Chevallard (1989), plantea lo siguiente: el objeto principal de estudio de la didáctica de la matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos - formados por los subsistemas: docentes, alumnos y saber enseñado - que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

Por otro lado, a partir de las perspectivas de otros autores al respecto cabe mencionar entonces a Bosch, Fonseca y Gascón (2004), quienes expresan que el conocimiento matemático se describe en términos de organizaciones matemáticas, donde los componentes principales son: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Además, que se debe recordar que las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber-hacer' formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber' formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente.

Teniendo en cuenta lo anterior, es desde este punto de vista desde el cual se pretendió abordar el concepto de variación en la escuela primaria, apuntándole a unas prácticas en el aula para contribuir en el mejor desarrollo y desempeño en el área de matemáticas por parte de los estudiantes, a través de la visualización, interiorización y de la aplicación del concepto en diversos contextos cotidianos, teniendo en consideración claro está el nivel de escolaridad donde se encuentran.

De acuerdo a los principios de la TAD, no se trata de que se imparta a los estudiantes un concepto vacío, sin significado, la idea es que inicialmente, sean ellos mismos quienes identifiquen ciertos patrones y/o comportamientos, los cuales los lleven a plantear de cierta forma la formulación de su propia teoría y que les permita su aplicación en otros contextos de la vida cotidiana, contando con el trabajo del (la) docente haciendo el acompañamiento, el apoyo necesario y correspondiente, como también el papel de guía, con la intención de poder llevar al estudiante al punto del conocimiento que se pretende desde el inicio del desarrollo de la actividad, al punto de un aprendizaje significativo (Chevallard, 1989).

Para la teoría antropológica de lo didáctico, el estudio de las matemáticas y las actividades asociadas a la misma, están constituidas por un conjunto de elementos y/o

de acciones asociadas a quienes, y donde se imparte el conocimiento, los cuales son de gran importancia y que a su vez le ceden un lugar a la didáctica, constituyéndose en uno de sus aliados.

Desde la TAD (teoría antropológica de lo didáctico), algo que no se debe desconocer es la transformación que sufren los objetos matemáticos cuando son enseñados, lo cual no solamente depende del objeto como tal sino también del componente didáctico al interior del aula que se desarrolle para la buena apropiación por parte de los estudiantes, lo cual contrasta con la pertinencia de la forma en la que dicha actividad de producción de conocimiento por parte de los estudiantes se lleve a cabo, lo que no implica solamente el objeto matemático como tal, sino la construcción de un sistema de conceptos, la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. Se resalta y es muy importante el tener en cuenta, que cualquier actividad matemática que se lleve a cabo, comprende aspectos tales como:

- La construcción del saber matemático: que se puede entender como la actividad matemática mediante la cual se desarrolla el proceso de aprendizaje a partir de un objeto de estudio específico.
- La difusión de dicho saber: entendido como la forma en la que el docente o la persona encargada de transmitir el conocimiento, mediante las herramientas elegidas, informa, pasa, comparte un saber con las personas que están en el proceso de aprendizaje.
- Su uso en diversas situaciones: en la medida que el estudiante se apropia del saber que se encuentra en escena, tendrá la destreza de poder utilizarlo en diferentes situaciones problemicas y de la vida cotidiana, donde en la medida que hubo un proceso correcto de apropiación, el estudiante tendrá la posibilidad de aplicarlos de manera adecuada y poder ganar otros conocimientos a partir del mismo.
- Su transposición a otras instituciones: en la medida que haya un real proceso de apropiación de un objeto matemático, que su aprendizaje haya sido significativo, se tendría la oportunidad de poder aplicarla en otras áreas del conocimiento o en otros contextos, haciendo la aplicación de manera transversal.

Para el caso del presente trabajo, no se está hablando de un saber matemático, sino del desarrollo de un tipo de pensamiento, el cual está inmerso no solamente en el campo de las matemáticas sino de otras áreas al igual que en la vida cotidiana; todo esto teniendo en cuenta que no se pueden separar la fundamentación y la utilización de un saber matemático determinado. Por lo tanto, no se pueden separar la fundamentación, la génesis y el desarrollo del saber matemático por un lado y por el otro, la enseñanza, la utilización y el saber matemático, tal como lo manifiesta Gascón (1993, p. 300).

En otras palabras, no se puede separar el objeto de enseñanza, la forma en la que se hace, la aplicabilidad en otros contextos y en general todos los agentes que intervienen en el proceso de aprendizaje; motivo por el cual en este trabajo se pretendía que el estudiante construya su conocimiento, no como un acto de información repetitiva,

sino que a partir de una serie de actividades pudiera encontrar dicha relación entre las diferentes situaciones de su cotidianidad y el pensamiento variacional, el cual introdujo desde diferentes situaciones que permitieron la ampliación del campo de aplicación de las matemáticas.

En últimas, el TAD se tiene como una apuesta muy importante para el trabajo, porque no solamente se está considerando el saber a enseñar, sino también la didáctica con la que se está haciendo y de paso según las OM (organizaciones matemáticas) con las cuales se está trabajando o se desean enseñar.

De tal manera, para el desarrollo del pensamiento variacional en grado 3º, se propuso el desarrollo de una secuencia didáctica, donde se espera que a partir de dicho trabajo, los estudiantes puedan desarrollar cierto tipo de habilidades, estrategias y herramientas, que les permitan resolver situaciones en diferentes contextos donde esté involucrado el pensamiento variacional, y que se tenga la oportunidad de escoger la herramienta o estrategia adecuada, no solamente para el planteamiento del problema sino para el desarrollo del mismo; a partir de unos saberes, conceptos, herramientas y estrategias, de las cuales se vayan apropiado los estudiantes en el transcurso de dichas actividades. Lo que se enseña se encuentra estrechamente relacionado con la forma de enseñarlo y la naturaleza misma del objeto matemático que se va a enseñar.

Por lo tanto, no solamente se deben de tener en cuenta las particularidades de la clase ya mencionadas si no que se debe tener claro también, que las actividades que el docente proponga para la adquisición del conocimiento son de gran importancia, puesto que permiten que el estudiante identifique las situaciones y de paso en qué contextos pueden ser utilizadas y sobre todo cómo hacerlo.

La idea es que mediante la secuencia didáctica enfocada en el trabajo con la variación, los estudiantes encuentren un ambiente propicio, cargado de contenido y significado en el campo del pensamiento variacional, además tengan la posibilidad de hacer la propia construcción de su conocimiento en el campo, que lleguen a tener la competencia para poder compartirlo a sus compañeros y no como una cuestión teórica, sino que desde sus diferentes apreciaciones se pueda dar cuenta del conocimiento adquirido, lo puedan utilizar y aplicarlo en otras situaciones, teniendo la capacidad de elegir dónde y cómo hacerlo para que sean pertinentes.

La adquisición del conocimiento que se menciona arriba no se lograría solamente con el ejercicio por parte del docente de transmitir unos conocimientos en el aula de clase; sino que deben de existir ciertas condiciones y características que hagan que esto sea posible. Se habla entonces de la construcción de ciertos espacios, tareas, artefactos tecnológicos, ambientes escolares y claro está, el elemento humano que sería el docente, como un conjunto que actúa con el fin último de llegar al estudiante, mover y transformar unos conocimientos previos, hacer asociaciones y posteriormente, llegar al punto de generar el proceso de adquisición del conocimiento.

2.4 Desde la teoría matemática

Para el diseño de la propuesta didáctica, se trabajaron algunos conceptos matemáticos específicos, que pasan a ser descritos a continuación:

2.4.1 Problemas no rutinarios

Según Díaz, M. V., & Poblete, Á. (2001), los problemas no rutinarios se deben de entender como aquel tipo de problemas o de situaciones, donde los estudiantes no conocen la respuesta, ni un procedimiento determinado para resolverlos, puesto que no se ha establecido una rutina previa, donde se defina un mecanismo de solución. Por el contrario, el estudiante debe recurrir a su conocimiento previo, a la información suministrada por el (la) docente, a la colaboración de sus compañeros o personas apropiadas y en fin a todas aquellas herramientas matemáticas que le permitan llegar a una solución válida del mismo, involucrando además una comprensión de los conceptos y algoritmos necesarios.

2.4.2 Resolución de problemas

A continuación, se presentan algunas definiciones sobre la resolución de problemas, con sus características y particularidades propias y que a su vez sirven para afianzar la idea del porqué el desarrollo del presente trabajo constituye un apoyo para resolver situaciones de la cotidianidad, propiciando y/o generando en el estudiante otras alternativas de solución, mediante la búsqueda, análisis e interpretación de la tarea o situación problema que se le presente, teniendo como referente el concepto pensamiento variacional.

- Newell y Simón (1972, como se cita en Maloney, 1994), establecen: “Una persona es enfrentada a un problema, cuando desea algo y no conoce inmediatamente qué serie de acciones debe llevar a cabo para alcanzarlo”.
- Contrario a los anteriores, Novak, (1977, como se cita en Palacios, 1993), define la actividad de solucionar problemas como “la reorganización de la información almacenada en la estructura cognitiva, es decir, un aprendizaje”.
- Por su parte, Garret (1977, citado por Helgeson, 1994), define la actividad como un proceso en el cual “el aprendiz descubre una combinación de reglas previamente aprendidas las cuales pueden ser aplicadas para lograr la solución de situaciones nuevas”.

Claramente en las definiciones anteriores, se puede evidenciar que hay autores que entienden la resolución de problemas en términos de la actividad cognitiva y otros del tipo de tarea. Algunos se refieren a tareas completamente abiertas, otros a tareas intelectuales, que difieren entre sí según consideren situaciones espontáneas o provocadas. Otros investigadores la definen con relación al aprendizaje. En este trabajo se abordaron ambas perspectivas, en pos de no desdeñar las ventajas que cada una trae consigo.

2.4.3 Competencias matemáticas

Para finalizar esta primera parte de definiciones y teorías iniciales, las cuales son de importancia para la comprensión del presente trabajo, sobre las competencias matemáticas, se puede establecer que, según los Estándares de Matemáticas, MEN Colombia (2006):

> En las dimensiones de la comprensión se incluye no sólo la más usual de los contenidos y sus redes conceptuales, sino que se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la praxis cotidiana, profesional o científico técnica en que se despliegue dicha comprensión (p.49).

Lo que significa que, dentro del proceso de aprendizaje de los estudiantes, no solamente se deben tener en cuenta si aprende o no unos contenidos, si no que el estudiante debe poder realizar una serie de acciones a partir de lo aprendido y poder darlo a conocer a los demás, esto como evidencia de una clara aprehensión de los objetos de estudio que le fueron enseñados y que fueron apropiados o aprendidos. Los Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006) estipulan para grado tercero y para el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, los siguientes logros:

Tabla 1. Logros relacionados a la competencia “Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos” para grado tercero. Fuente: MEN (2006)

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). • Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. • Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos, aunque el valor siga igual. • Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Se concluye con que el ideal es que los saberes que se producen en el aula, sean significativos para los estudiantes, para nuestro caso el trabajo con la secuencia didáctica, cuyo eje central que es la variación y que se encuentra contextualizado desde situaciones problema no rutinarios, que dicho aprendizaje sea generado desde el mismo contexto, siendo esto uno de los objetivos de la TO; aprendizaje significativo el cual puede ser expresado o manifestado por el estudiante de distintas formas, argumentos, actitudes, comportamientos, etc., al momento de dar a conocer el trabajo que ha realizado, bien sea en el aula de clase o en cualquier otro lugar donde se esté desarrollando el proceso de aprendizaje, como se piensa desde la TAD.

3. Metodología

3.1 Tipo de investigación

Esta investigación se enmarca bajo el enfoque cualitativo, pero se vale de algunos recursos cuantitativos para sintetizar resultados. Cualitativo en tanto se quiso evidenciar procesos de pensamiento variacional en los niños del grupo de estudio, para lo cual, era necesario analizar las muestras tomadas de manera individual y contrastarlas con la teoría. Cuantitativo en tanto también se evalúa la efectividad de una propuesta didáctica para obtener ciertos logros, por lo que una sistematización estadística general se hace necesaria, aunque no sea el aspecto predominante.

Se trabajara con 27 estudiantes de grado 3º, de la I.E. Donald Rodrigo Tafur, sede Antonio Nariño, aplicando diferentes estrategias divididas en cuatro fases, con la idea de encontrar cuál o cuáles son aquellas estrategias que mejor llegar a favorecer o fortalecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemáticas, específicamente las relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional. Es teniendo en cuenta este planteamiento que, para el desarrollo de este trabajo, se utiliza el método cualitativo, puesto que se tendrán en cuenta todos los aspectos presentados por los estudiantes y que a su vez vienen o nacen como consecuencia del desarrollo del pensamiento, a partir de las situaciones que les son creadas y/o presentadas para su desarrollo, como estrategia de la investigación. En el enfoque cualitativo “Se estudia el contexto para lograr las descripciones más detalladas y completas posibles de la situación, con el fin de explicar la realidad subjetiva que subyace a la acción de los miembros de la sociedad” (Bonilla y Rodríguez, 1997, pp. 41-57).

3.2 Instrumentos de recolección de datos

Para este caso, se consideran los datos como todo aquel tipo de información proporcionada por los estudiantes, de manera oral y/o escrita, la cual tenga relevancia para la investigación que se está desarrollando y que provea de algún tipo de testimonio que contribuya al cumplimento de los objetivos propuestos. Cuando se indica que puede ser de manera oral y/o escrita, se refiere a que dependiendo del tipo de actividad que se presente, así mismo se esperarían cierto tipo de resultados y, tal como se ha indicado desde la misma teoría de la objetivación, las palabras, acciones y hasta los gestos de los estudiantes en estos casos pueden constituir una prueba de si se están o no alcanzando los objetivos propuestos con dicha actividad.

3.2.1 Observación

De acuerdo a Cerda (1991), “es unánime entre los defensores de la observación afirmar que se trata de una técnica que nos permite percibir directamente, sin intermediarios que deformen la percepción, los hechos de la realidad objetiva, con lo cual se eliminan las deformaciones subjetivas propias de otras técnicas indirectas” (p. 238). De acuerdo a las características de trabajo en el aula que tiene este trabajo, se habla aquí de una *observación directa* (Cerda, 1991).

Según Carvajal (2005), la observación se convierte en técnica científica en la medida que sirve a un objeto ya formulado de investigación. Es planificada y controlada

sistemáticamente y relacionada con proposiciones más generales, así como está sujeta a comprobaciones y controles de validez y confiabilidad (pp. 68-70). Por lo tanto, se debe de estar muy pendiente de los estudiantes al momento de aplicar cada una de las tareas, puesto que hasta el más mínimo detalle es de importancia, en el momento del análisis, teniendo en cuenta que los detalles a observar son todos aquellos que tengan relación directa con la problemática que se está abordando, para este caso el pensamiento variacional.

3.2.2 Diario de campo

Constituye aquel registro donde en el día a día de la observación que se realiza se deja escrito todo lo concerniente a los resultados obtenidos. Cerda (1991) lo define como “una narración minuciosa y periódica de las experiencias vividas y los hechos observados por el investigador. Este diario se elabora sobre la base de las notas realizadas en la libreta de campo o cuadernos de notas que utiliza el Investigador para registrar los datos e información recogida en el campo de los hechos” (p. 249-248).

De acuerdo a los principios de la teoría de la objetivación (Radford, 2006), no solamente se aplican pruebas escritas durante el proceso de implementación de la propuesta didáctica, también lo constituyen todas aquellas expresiones, palabras, gestos, explicaciones y demás que estarían presentes y que, si no fuera por el objeto de la investigación, podrían pasar desapercibidas. Es aquí donde juegan también un papel bien importante el dominio y conocimiento que tiene la persona que está desarrollando la actividad con los estudiantes, porque el sentido perceptivo debe de estar muy bien puesto, y no se deben dejar pasar aspectos de importancia con un gran valor y significado, durante la aplicación de las estrategias. Según Bonilla y Rodríguez (1997):

> Entre los tipos de notas que se pueden llevar, cuando se desarrolla un diario de campo se tienen: “Notas Observacionales” (NO), “Notas teóricas” (NT), “Notas metodológicas” (NM); por lo cual se indica que es necesario y básico tomar apuntes en cuanto a la parte descriptiva de todo lo que se “ve” y “oye” de la situación que está investigando, tal como se presenta en la realidad. (p.34).

Para el desarrollo del presente trabajo, los registros que se toman se realizan de manera escrita, fotográfica y fílmica.

3.3 Fases de la propuesta didáctica

Con base en los principios del método cualitativo y la teoría de la objetivación, la propuesta debió diseñarse a través de actividades que funcionaran, de acuerdo a la teoría de Radford (2003, como se cita en Vergel, 2016), como *medios semióticos de objetivación*. De este concepto, Vergel (2016) dice, a partir de su lectura de Radford, que “no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Son también mediadores de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes” (p. 57).

3.3.1 Fase I: lluvia de ideas

Para el desarrollo de la primera fase, se trabaja con los estudiantes de grado 3o. de la sede Antonio Nariño jornada de la mañana de la I.E Donald Rodrigo Tafur. Se realiza la discusión con 20 niños del curso 3-6, el cual está bajo responsabilidad de la docente orientadora en todas las áreas del conocimiento.

La actividad se inicia con una lluvia de ideas, donde se les plantea a los estudiantes que se va a realizar la discusión acerca de 2 términos que muy seguramente son de su conocimiento, ellos son: *el cambio* y *la variación*, a lo cual los niños responden de una manera muy activa y participativa. La idea de esta actividad es indagar qué conocimientos previos tienen los estudiantes al respecto, antes de iniciarlos en el campo de la variación en el ámbito de las matemáticas. La docente no sensibiliza ni contextualiza frente a la temática, porque se trata de una actividad previa a la actividad inicial de diagnóstico y la idea es indagar sobre los conocimientos que muy a su nivel escolar tengan los estudiantes frente a la misma y así saber cuáles son las posibles estrategias a utilizar durante el desarrollo de las siguientes actividades de clase.

Primero se inicia con el término cambio y posteriormente el de variación, con la indicación desde el inicio de que no fueran a pensar en la respuesta de sus compañeros, tampoco pensar que, porque era diferente a la suya, su respuesta fuera incorrecta. Posteriormente se toman los registros teniendo en cuenta las respuestas emitidas por los estudiantes. Para esta actividad el papel de la docente es direccionar y guiar, pero sin intervenir en los planteamientos de los estudiantes y mucho menos cuestionarlos al igual que sus puntos de vista. Se hacen los registros correspondientes (diario de campo), consultando entre los estudiantes sobre lo que significan para ellos los términos variación y cambio, identificando además el contexto en el cual lo definen, lo utilizan o intentan hacerlo.

En la lluvia de ideas, se toman los apuntes (la docente) sobre las diferentes opiniones expresadas por los estudiantes, con intervención docente y sobre todo cuando se esté desviando la dinámica de la actividad propuesta, para la actividad de lluvia de ideas sobre el fenómeno de la variación.

Con el fin de conocer los saberes previos, se hacen las siguientes preguntas:

- ¿Qué piensas o qué viene a tu mente cuando escuchas la palabra cambio?
- ¿Qué piensas o qué viene a tu mente cuando escuchas la palabra variación?

3.3.2 Fase 2: Diagnóstico

Etapa de implementación, la cual se inicia con la primera de una serie de actividades, donde se les permite a los estudiantes, organizados en grupos, asumir de manera autónoma las situaciones problema, guiando de manera adecuada a los estudiantes; pero a su vez, permitiendo cierta autonomía en el trabajo que cada uno de los grupos estaba desarrollando, con la idea de que puedan socializar, compartir y hacer las discusiones correspondientes frente a la problemática presentada.

- **Actividad 1**

Para este caso, se propone la primera actividad, que consta de 4 puntos. El primero corresponde a la pregunta abierta sobre los términos cambio y variación (previamente iniciados a trabajar en la lluvia de ideas), luego en la pregunta no. 2 se indaga sobre el término o el fenómeno de cambio, pero haciendo énfasis que sea en el área o en el contexto de las matemáticas. Se les pide a los estudiantes indicar 3 ejemplos y en ellos se debe identificar qué o cuál es el fenómeno que identifica dicho cambio, o cómo este se manifiesta o de qué depende, y si tiene algún tipo de regularidad o no, tal como se hizo en la fase anterior (lluvia de ideas). Por lo tanto, en esta fase II se trabajan situaciones simples de cambio y otros donde se presenta variación y la idea es que los estudiantes puedan tener un primer acercamiento a algún tipo de patrones previamente establecidos (ver anexo 2).

La prueba se aplicará a la totalidad de los estudiantes del curso 3-6, (jornada de la mañana) asistentes a la clase (20 niños). Para el desarrollo de la misma, se hace entrega a los estudiantes de material impreso, el cual tiene como nombre Prueba Diagnóstica. Tema: Cambio-Variación, con la consigna que deben de trabajar, teniendo en cuenta las instrucciones que en la misma aparecen y los conocimientos previos adquiridos desde las diferentes áreas hasta el momento.

La prueba consta de 4 puntos, los cuales se poden considerar como ese primer acercamiento a la temática objeto de estudio de este trabajo (Variación), indagando los saberes previos que los niños puedan tener frente al trabajo de situaciones que involucran el pensamiento variacional, y posteriormente junto con sus conocimientos intentaran dar solución a las situaciones planteadas.

3.3.3 Fase III: intervención No. 1 (primer grupo de actividades – actividad no. 2 a la 8)

En el tercer momento, se aplicarán pruebas cuya base es la variación utilizando figuras a nivel geométrico y también material manipulativo, como otra alternativa de trabajo para los estudiantes, de modo que pueda observarse cómo es el abordaje de las situaciones en este nuevo contexto. Igualmente se hace el acompañamiento correspondiente y se guía la situación.

- **Actividad 2. “Números pares e impares (I)”**

Su objetivo consiste en que los estudiantes puedan reconocer en las diferentes fichas con una cierta cantidad de puntos donde varias de ellas corresponden a los números pares, luego de comprender o llegar a nivel grupal a la conclusión que se pueden hacer asociaciones de a 2 puntos, y en aquella tarjeta que no sobran entonces corresponde un número par. Los estudiantes tendrán para su trabajo diferentes tarjetas con cierta cantidad de puntos 2, 10, 15, 20, etc. (Ver anexo no. 3).

- **Actividad 3. “Números pares e impares (II)”**

El objetivo de esta actividad es identificar si se tiene un número par o impar de figuras necesidad sin contarlas, identificando si hay algún patrón o algo que mediante los colores o las figuras del material manipulable que se esté trabajando, los estudiantes pueden hacer la asociación correspondiente (ver anexo No. 4).

Se inician las preguntas 1 y 2 indagando una vez más sobre los números pares e impares, para luego dar paso a las actividades con el material manipulable (preguntas 3 y 4), donde sin contar las figuras, deben llegar a una respuesta de indicar si se tiene un número par o impar de elementos, solamente a partir de la observación y de seguir la regularidad en los colores

- **Actividad 4 "¿Qué pasa con la figura V?"**

El objetivo de esta actividad consiste en que los estudiantes identifiquen la secuencia de la figura que se va formando, donde inicialmente se dan las 3 primeras figuras que conforman la secuencia, y la idea es que completen las que hacen falta tal como se indica en la actividad, y que además se pueda encontrar una generalidad para hallar por ejemplo la figura no. 50 y la figura no.100, sin necesidad de realizarla gráficamente. Para el desarrollo de la misma se utilizará material manipulativo, para que los estudiantes que deseen puedan ir formando la figura y a partir de ello se pueda completar la tabla y realizar el resto de la actividad (Ver Anexo No. 5).

- **Actividad No. 5 "Repitiendo las figuras vamos aprendiendo"**

Esta actividad tiene como objetivo el reconocimiento y trabajo con patrones geométricos, que se presenta a los estudiantes para que también sea trabajado con material manipulativo cuando sea necesario o cuando ellos lo estimen conveniente (ver anexo no. 6).

- **Actividad No. 6 "Aprendiendo construyendo"**

Esta actividad ya presenta un grado de dificultad mayor a las que se les había presentado hasta el momento a los estudiantes. Consiste en indicar el número de barras que se necesitan para construir la estructura que en ella se muestra, posteriormente se debe completar la tabla (ver anexo No.7).

- **Actividad No. 7 "Pensemos patrones – descubriendo voy aprendiendo"**

Como su nombre lo indica, el objetivo de esta actividad es la construcción de figuras a partir de la identificación del patrón correspondiente, utilizando cuadros conformados por otros cuadrados internos, los cuales tienen cierto tipo de generalización (ver anexo No.8).

- **Actividad No. 8 "Momento de completar"**

Esta actividad, a diferencia de las anteriores, presenta patrones, pero no de forma gráfica ni geométrica, si no en forma de filas (lineal), mediante unas cintas, teniendo como objetivo identificar la secuencia a seguir, completar los espacios faltantes en cada

una de las tiras y llegar a la construcción de generalidades a partir de la solución de la actividad (ver anexo No. 9).

- **Actividad No. 9 “Juguemos a pensar y a calcular”**

En esta actividad se presentan varias situaciones problema, donde los estudiantes cuentan con el recurso o la ayuda de tablas para dar solución a lo planteado, teniendo como objetivo la solución de secuencias, pero utilizando el recurso de tabular (ver anexo No. 10).

- **Actividad No. 10 “Momento de concluir”**

El objetivo de esta última actividad de la implementación I, es tener una percepción, recoger las experiencias ganadas por parte de los estudiantes sobre el trabajo con patrones numéricos y secuencias numéricas, donde dichos conceptos se trabajaran de manera diversa: tablas, filas de secuencias y secuencias de figuras, y si además se pudiera lograr en ellos algún tipo de generalización con respecto a la problemática que se estaba abordando, el desarrollo del pensamiento variacional (ver anexo No. 11).

Cada una de las pruebas antes mencionadas, lleva una serie de interrogantes o cuestionamientos frente a la misma, los cuales deberán ser resueltos por los estudiantes al finalizar cada una de ellas. La idea no es solamente resolver pruebas, sino que analicen y presenten sus conclusiones sobre la manera de resolver, sobre sus resultados, las dificultades que se les presenten, los conceptos que aprendieron, etc., y en general cada uno de aquellos elementos presentes, que permitieran caracterizar las actividades que promueven en ellos ciertas habilidades relacionadas con el pensamiento variacional. Todo ello haría parte del análisis correspondiente a la hora de plantear como alternativa esta propuesta para el trabajo en el aula con los estudiantes de grado 3º de la I.E. Donald Rodrigo Tafur, sede Antonio Nariño.

3.3.4 Fase IV: Intervención No.2 (Segundo grupo de actividades - Situaciones problema, incluidas simplificaciones y/o extensiones - Actividades No. 1 a No.4)

Este grupo de actividades, que también están relacionadas con el pensamiento variacional, las cuales consisten en diferentes situaciones problema, que pueden ser de la cotidianidad de los niños del curso o de su entorno. Los estudiantes se reúnen en grupos de 3 personas y posterior a las orientaciones dadas por la docente, proceden a realizar el trabajo correspondiente, el cual constantemente es supervisado y se hacen las aclaraciones necesarias; se resalta aquí la importancia de trabajo en grupo, puesto que son muy enriquecedoras las discusiones sobre los planteamientos que al interior de los mismos se presentan.

En esta parte se presenta otro aspecto bastante importante y es la implementación de las actividades de simplificación y las de extensión (definidas previamente) a partir de las situaciones principales y que dependiendo del nivel de complejidad percibido y/o manifestado por los estudiantes en algunos momentos, se decida cual aplican; cuando a pesar de las diferentes indicaciones manifiesten que no entienden, que no saben cómo resolver o cómo abordar la situación que se les presenta inicialmente (actividad

principal), se les asigna entonces la actividad de simplificación. Por otro lado, están las actividades de extensión, algunas de las cuales se asignan a aquellos grupos de estudiantes que manifiesten haber finalizado la actividad principal, mucho antes que sus compañeros y consideren la actividad principal de un nivel muy fácil y que pueden trabajar dentro de sus conocimientos.

- **Actividad No. 1 “Construyendo la V”**

Tal como se indicó anteriormente en esta parte las actividades están conformadas por situaciones problema de la vida cotidiana, con la particularidad que esta actividad es similar a la actividad No. 4” Qué Pasa Con La Figura V”, trabajada en la fase de implementación I, pero ahora se aborda de manera diferente, con una nueva contextualización, más enfocada a la resolución de problemas que a la simple resolución de una actividad numérica (ver anexo No. 12).

La idea general de la actividad consiste en resolver una secuencia de figuras, las cuales aumentan en su tamaño dependiendo de la posición que dicha figura ocupe. Se inicia con las figuras 1, 2 y 3, para que, a partir de ellas, los estudiantes construyan las figuras 4, 5, 10, 20 y pudieran llegar a definir una regla de generalización para encontrar la figura que ocupe cualquier lugar que se requiera.

En esta actividad se trabajaron además las actividades de simplificación y extensión. Simplificación para aquellos estudiantes (2 grupos) que presentaron dificultad en la comprensión y realización de la actividad principal, por lo tanto, se les suministró esta con la intensión de que fuera abordada de manera diferente a partir de otro tipo de actividad donde se mostraban más detalles del problema y a su vez contaban con la ayuda tabular, en las cuales se había evidenciado menor dificultad al momento de ser abordadas por los estudiantes (ver anexo No.12 a).

Con respecto a la actividad de extensión, se les ofreció a aquellos estudiantes que terminaron la actividad principal primero que el resto de sus compañeros (7 grupos) la posibilidad de ir más allá en la actividad, por lo tanto, se pide en la misma lo contrario a la actividad principal y de simplificación. Los estudiantes deben, a partir de un Número de bolitas determinado (literal a), concluir si se podía o no formar una figura en “forma de V” como la planteada en la situación problema y en el literal b, encontrar una generalización de cómo se puede encontrar el número de bolitas necesarias para formar *cualquier número* de figuras (ver Anexo No. 12 b).

- **Actividad No. 2 “Juan construye casas”**

El objetivo de la situación problema de esta actividad, consiste en encontrar la generalización a partir de un patrón representado gráficamente, debiendo encontrar el Número de “palitos” necesarios para ir formando el Número de la figura que se solicitara, a partir de las figuras 1, 2 y 3 que se muestran en la actividad (ver anexo No. 13).

- **Actividad 3 “Carlos construyendo en la panadería Sanín”**

Esta actividad consiste en una secuencia gráfica, las cuales se forman con mesas que están unidas y la tarea consiste en encontrar el número de éstas que se necesitan para acomodar a los clientes dependiendo del número de personas que lleguen (ver anexo No. 14).

- **Actividad 4 “El trencito divertido”**

La cuarta y última de las actividades de esta segunda parte de la implementación, corresponde una vez más a un patrón de figuras que se encuentran unidas (ver anexo No. 15), que se da el paso a paso por parte de la docente antes del inicio del desarrollo de la misma, lo cual también se puede evidenciar en la actividad misma y que a su vez, los estudiantes trabajando en grupos de 3 estudiantes, tengan la posibilidad de socializar sus inquietudes y resultados en grupo.

3.4 Instrumentos de análisis de datos

Con el fin de que las muestras suministradas por las actividades arriba descritas se organizaran y adquirieran sentido a la luz de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y la Teoría de la Objetivación que fundamentan el trabajo, se precisa de una técnica de análisis que permita ver los resultados de manera consecutiva, es decir, actividad tras actividad.

Fue necesario entonces utilizar la triangulación hermenéutica, que de acuerdo a Cisterna Cabrera (2005), se entiende como “la reunión y cruce dialéctico de toda la información pertinente al objeto de estudio surgida en una investigación, (para este caso aquella que se relaciona con el pensamiento variacional), por medio de los instrumentos correspondientes, y que en esencia constituye el corpus de resultados de la investigación” (p. 69). En tal sentido, en la triangulación hermenéutica convergen tres puntos de vista: la perspectiva del docente investigador, la teoría base de la investigación (TAD y TO) y los datos que arroja el trabajo de campo. La figura 2 muestra la forma como este método adquiere sentido en el contexto de esta investigación.

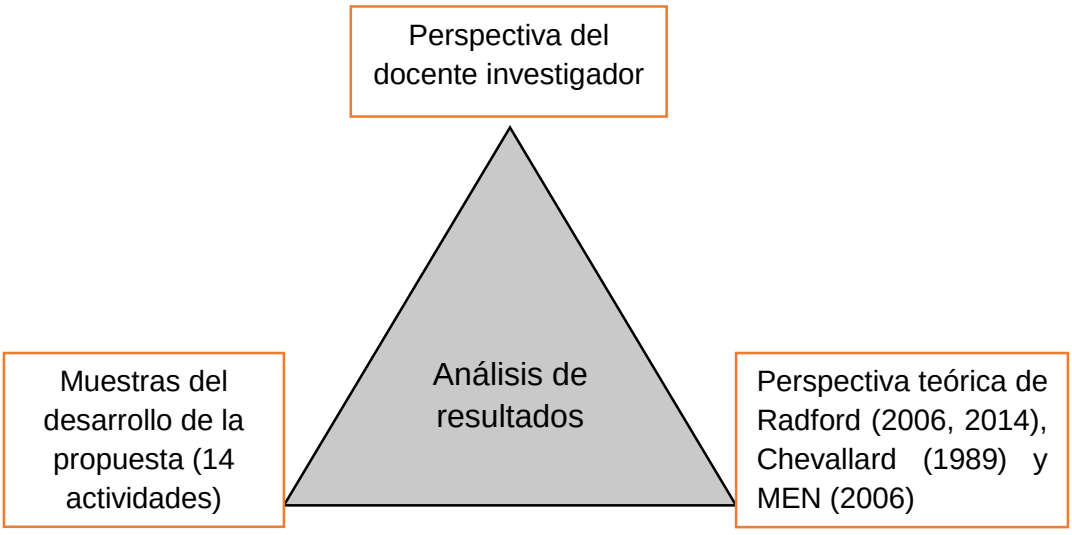


Figura 2. Funcionamiento de la triangulación hermenéutica para la presente investigación. Fuente: propia.

4. Análisis de resultados

Tal y como quedo descrito en el capítulo de metodología, el análisis de los resultados se divide por cada una de las fases de la intervención didáctica, y luego por cada actividad realizada. Primero se describe, a partir de lo registrado en la observación y el diario de campo, la forma como la actividad fue desarrollada en el aula, teniendo en cuenta los principios de la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006) que toma como muestras lo manifestado por los estudiantes más allá de las respuestas en los ejercicios (gestos, forma de hablar, posturas, etc.); segundo, este relato y los resultados tangibles de los estudiantes se contrastan con lo afirmado por la teoría, lo que conlleva a una breve conclusión por cada actividad.

Adicionalmente, con base en instrumentos cuantitativos se realiza una sistematización estadística de las respuestas de los niños durante las fases 3 y 4, pues se consideró pertinente que además del análisis de las respuestas, se tengan en cuenta el mejoramiento general del curso durante el desarrollo del trabajo, así queda demostrado la diferencia entre los resultados de la Fase 3 y la Fase 4.

4.1 Fase I: Observación (Lluvia de ideas)

A partir de los datos obtenidos en la plenaria de la clase, la cual fue trabajada de manera muy receptiva por todos los estudiantes, se pudieron identificar aspectos claves tales como el cambio y a la variación, donde los estudiantes son conocedores que cuando algo cambia o cuando algo varía es porque hay otro elemento que lo origina y por lo tanto se tiene o se encuentra luego otro resultado.

4.1.1 Concepciones iniciales sobre los términos

Las respuestas a las preguntas “¿Qué piensas o qué viene a tu mente cuando escuchas la palabra cambio?” y “¿Qué piensas o qué viene a tu mente cuando escuchas la palabra variación?” permiten comprender los siguientes supuestos de los niños sobre el cambio:

- Alrededor de veinte (20) consideraron que era algo que no se quedaba igual, que era algo que primero estaba de una forma y luego de otra.
- Cinco (5) de ellos dijeron que era algo que primero era grande y luego pequeño o lo contrario.
- Dos de ellos (5) dijeron que era algo que cada vez que lo veía tenía una forma diferente.

Cuando se direcciona la pregunta sobre el cambio, pero con respecto a los números, las respuestas fueron:

- Alrededor de la mitad del grupo dijo que los números podían ser más grandes o más pequeños.
- La otra mitad del grupo pensaba que los números podrían cambiar para crecer o para disminuir.

Con respecto a la pregunta sobre variación, las respuestas fueron las siguientes:

- Un grupo pequeño de tres estudiantes afirmaba que la variación es algo que varía, o sea que es algo que cambia.
- Un estudiante consideraba que es algo que primero está en un lugar y luego pasa a otro.
- Otro estudiante afirmaba que se trataba de cambio, es lo que pasa de un lado a otro.
- Una pareja de estudiantes consideró que, en los números, por ejemplo 1 está primero, luego está el 2, luego pasa al 3, luego al 4 y así sucesivamente.
- Algunos estudiantes afirmaron que la variación es como la temperatura que un día está un valor y varía o cambia y al otro día ya está en otro valor.
- Un estudiante dijo que variación es cuando uno está en un juego y cambian a un jugador por otro.
- Un grupo de cinco estudiantes concluyó que la variación era como en las tablas de multiplicar, que los números van cambiando de uno a otro y en cada una de las tablas.
- Otro grupo de estudiantes afirmaba que la variación se nota cuando vamos contando los números pares que van de 2 en 2 y los que no son pares también.
- Alrededor de diez estudiantes se pusieron de acuerdo en definir la variación según cambian los días del año, que empiezan en 1 de enero y llega a 30 de enero y así en todos los meses.
- Otro estudiante dijo que un día nos dan plata para el recreo y al otro día cambia y nos dan otra cantidad.

4.1.2 Observación inicial

Después de aplicada esta primera parte de la propuesta del trabajo, se observa que los estudiantes tienen a nivel general una idea de lo que es variación, lo cual asocian o relacionan con algo cambiante y además lo miran desde diferentes puntos de vista o contextos, teniendo en cuenta las respuestas que se recibieron anteriormente.

- **Un instante de confusión antes del reconocimiento**

Inicialmente, el término *variación* les generó a los estudiantes un poco de confusión e indicaban que no lo entendían, que no se imaginaban qué podía significar; se quedaron callados. Pero uno de los participantes finalmente hizo la pregunta de que, si eso era "como variar, así como cuando el clima está variando" y entre ellos mismos dijeron que sí, que era como eso. Llegaron a la conclusión que entonces también era como un cambio; después de ello, se les agregó una pregunta más: "*¿Por qué cambia el clima?*" (manifestaron que esta palabra la escuchaban en sus casas, a sus familiares y la asociaban con lluvia y sol), a lo cual respondieron que "si estaba haciendo sol, entonces la lluvia hace variar"; pero concluyeron que si estaba lloviendo era el sol el que hacía variar, que había algo que dependiendo de cómo estuviera el día se cambiaba, a lo que nuevamente concluyeron que era la lluvia o el sol lo que hacía variar.

- **Cambio como transformación de valores**

En lo anterior se puede observar que de manera intuitiva los estudiantes saben a qué se refiere cuando se habla de que algo varía o cambia, es decir, que el valor que inicialmente se tiene en una situación sufre una transformación. También se puede identificar que en ninguno de los casos indicaron por qué las cosas cambian: por ejemplo, cuando hablan de los números que van de 2 en 2 o de las tablas de multiplicar, no refuerzan o no hacen explícita la idea de que para cada una se tiene una constante (un patrón), que depende específicamente de la tabla que se está trabajando. De igual forma para los días del mes, no hacen explícito que se va sumando de 1 en 1, si no que indican que va de 1 hasta 30 o 31.

- **Apreciaciones iniciales**

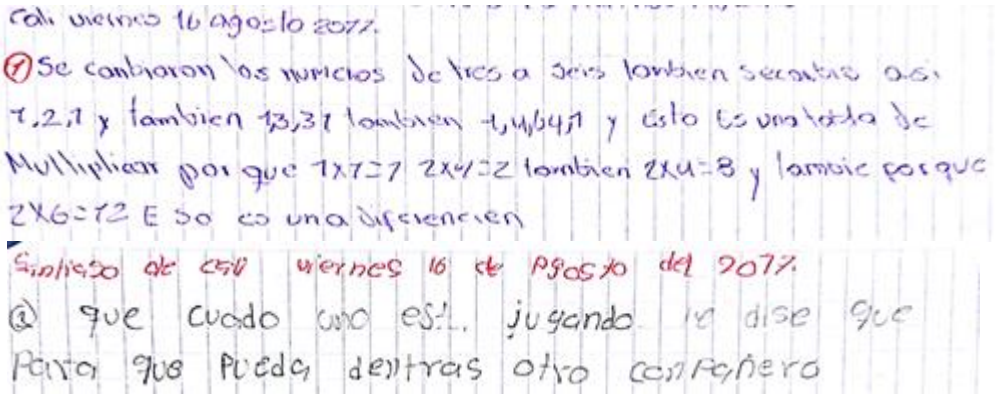
De lo anterior, podemos decir que los estudiantes se han encontrado con una situación "indeterminada" (Vasco, 2007). Sin importar el contexto, tienen la idea o noción a modo general de lo que es cambio y de lo que es variación, resumiéndolo en algo que está cambiando (que se está moviendo). Sin embargo, todavía no pueden ilustrar con precisión cómo influye este cambio en la vida cotidiana, o cómo se implica en las variables que se pueden ver en la naturaleza.

4.2 Resultados de la fase II: Diagnóstico - Actividad No.1

4.2.1 Actividad 1

- **Primeras definiciones en la pregunta No.1.**

En sus respuestas a la pregunta No. 1, sin definir un contexto específico, los estudiantes aluden al cambio cuando hay algo que pasa de un lado a otro, de un lugar a otro, lo que se puede interpretar como un "algo" que sufre algún tipo de transformación y luego es cambiado por otro o se presenta como otro. Los estudiantes colocan como ejemplos cuando deben de cambiar de ejercicio en la clase de educación física, cuando se cambia de escuela, pasando de un lugar a otro, como se ve en la figura 3.



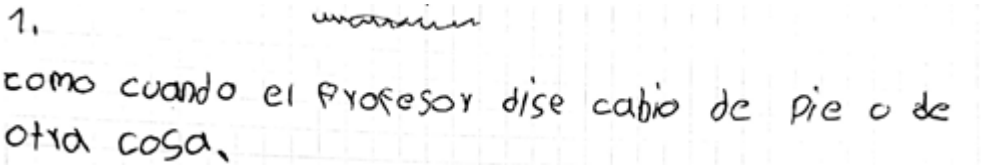


Figura 3. Respuestas de los estudiantes en la actividad 1. Pregunta 1.Fuente: propia.

- **La variación en la matemática: pregunta No. 2.**

En este punto, se indaga sobre el concepto de cambio, pero indicando qué es en el contexto de las matemáticas. La respuesta generalizada de los estudiantes fue: “cuando un número cambia a otro”, nuevamente sin indicar la generalización existente, sin expresar de manera explícita la existencia de algún patrón de formación de los números en los ejemplos que presentaron. Puede verse en la figura 4.

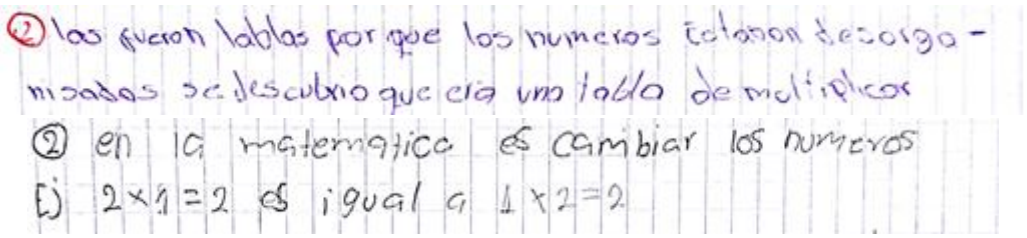


Figura 4. Respuestas de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 2. Fuente: propia.

- **Primera labor en la pregunta No. 3.**

La generalización en las respuestas fue: “Porque toca unir los números repetidos”. De alguna manera, ya en este punto los estudiantes mostraron tener una visión diferente y manifiestan la existencia de cierta regularidad; puesto que manifiestan que hay unos números que se repiten y que cuando se unen, se puede encontrar el valor en la fila siguiente. Aunque la aproximación es correcta, siguen faltando algunos detalles y aspectos por definir en estas apreciaciones, pero de alguna manera reconocen que existe cierto tipo de regularidad y que se debe observar la figura porque es allí donde se encuentra el detalle de lo que está cambiando, como se ve en la figura 5.

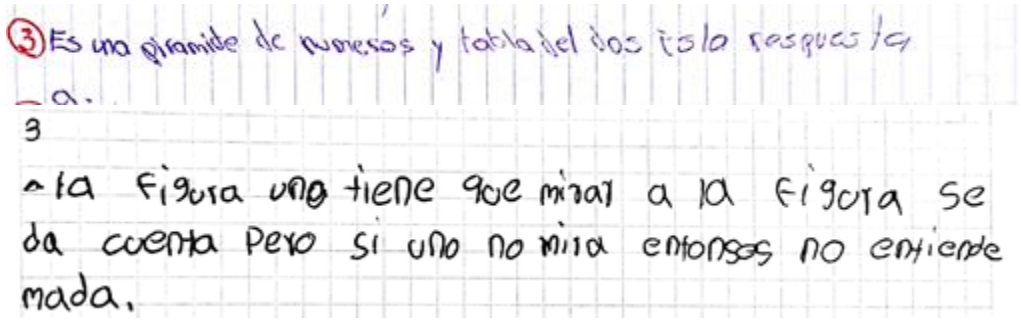


Figura 5. Respuestas de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 3.Fuente: propia.

- **Primera en la pregunta No.4.**

En esta pregunta, ya se encuentra un número de justificaciones y/o explicaciones de sus respuestas, las cuales se enuncian a continuación:

- “Porque le faltaban más bolitas”.
- “Porque se parecen (indicando que es la misma figura pero que es su base la que crece)”.
- “Porque son diferentes”.
- “Miré y me di cuenta de que era fácil porque va 2, 3, 4, 5 abajo (va contando en la base de la figura y se da cuenta que va aumentando un punto, teniendo en cuenta que en la posición no.1 ya se tienen 2 puntos en la base)”.

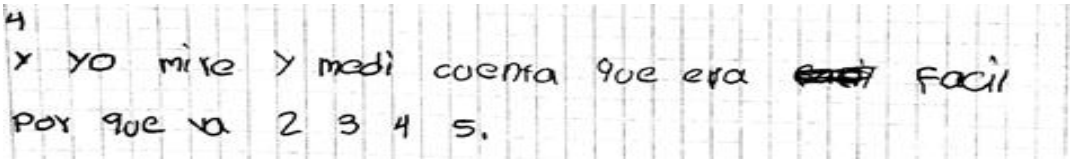


Figura 6. Respuesta de uno de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 4. Fuente: propia.

- Hace el dibujo siguiendo el patrón, pero no lo justifica. Es capaz de hacer la representación gráfica de lo que sucede, pero no lo puede hacer de manera verbal o escrita.

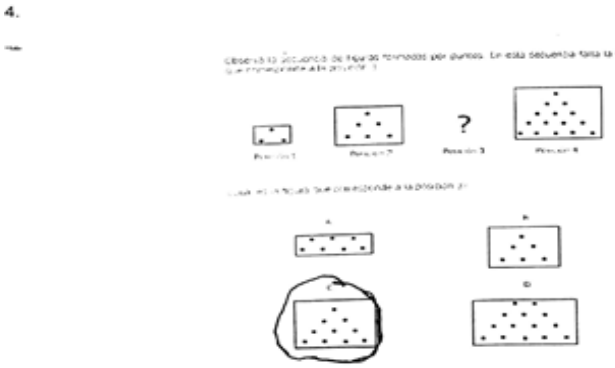


Figura 7. Intento de reconocimiento de uno de los estudiantes del patrón de la pregunta 4, actividad 1. Fuente: propia.

- Porque es el número que falta abajo (lleva la secuencia de un punto más en la base, a medida que se avanza en cada una de las figuras).
- Porque uno lo cuenta y le da (identifica que en la base crece de a 1 punto, por lo tanto, cuenta para la figura que falta cuántos puntos deberá tener), pero una vez más, solamente tienen en cuenta la base sin indicar o describir que, en la parte superior, se debe conservar el patrón también que sea el correspondiente a la figura no.1.

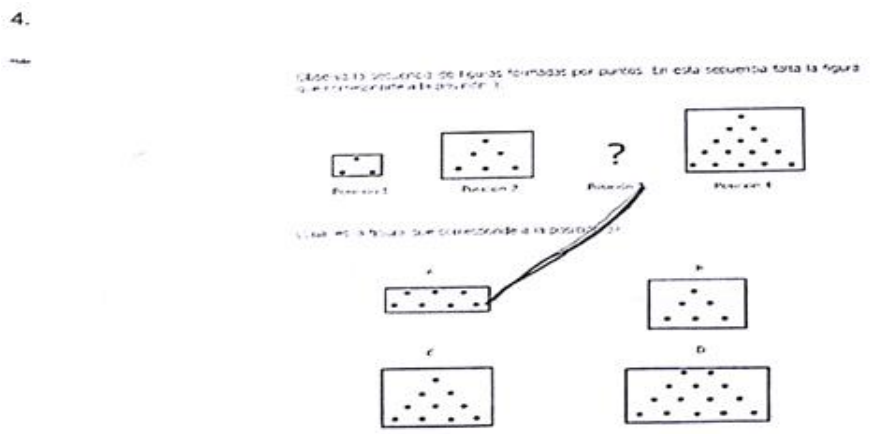


Figura 8. Respuesta de uno de los estudiantes en la actividad 1, pregunta 4. Fuente: propia.

4.2.2 Discusión general de la Fase 2

Durante esta fase, los estudiantes se enfrentaron a la primera prueba escrita en el marco de este trabajo, donde por los resultados obtenidos se puede identificar que tienen unas nociones de lo que es variación, identificando en los puntos donde había alguna serie de patrones que algo estaba sucediendo al pasar de una parte, o de una figura a otra.

En la mayoría de los casos, los niños contaron y hasta llegaron a identificar uno de los patrones que en la actividad se presentaron, presentando además el dibujo como una de sus técnicas para dar solución a este tipo de actividades, cuando en el enunciado no presentaba ninguna alternativa de solución, solamente se les pedía que hallaran la respuesta correcta entre unas alternativas presentadas. Sin embargo, se notan en ellos algunas de las dificultades que describe Vergel (2016), en especial, en preguntas como la 3 y la 4, que requieren un trabajo adicional por parte de los estudiantes para pasar de lo numérico a lo algebraico (Vergel, 2016).

4.3 Resultados de la fase III: intervención No. 1

4.3.1 El descubrimiento de las regularidades y los patrones: actividad 2

Los estudiantes reconocen las siguientes formas para descubrir en la actividad la ficha que se escogió al inicio del juego:

- Mediante el reconocimiento de los números pares (2, 4, 6, 8, 0) y los impares (1, 3, 5, 7, 9).
- Identificando las figuras pares, haciendo grupos de dos.
- Mirando bien los puntos si tienen o no un compañero.
- Porque se debe mirar de dos en dos.
- Porque se pueden hacer grupos de 2.
- Contando de 2 en 2.
- Sumando de 2 en 2.

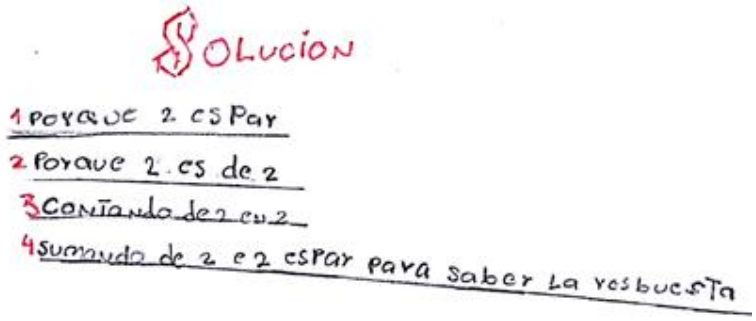


Figura 9. Respuestas de un estudiante en la actividad 2.Fuente: propia.

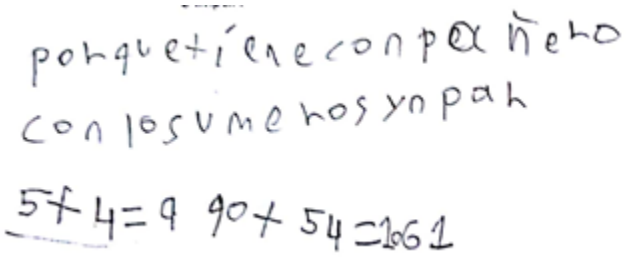


Figura 10. Respuestas de un estudiante en la actividad 2. Fuente: propia.

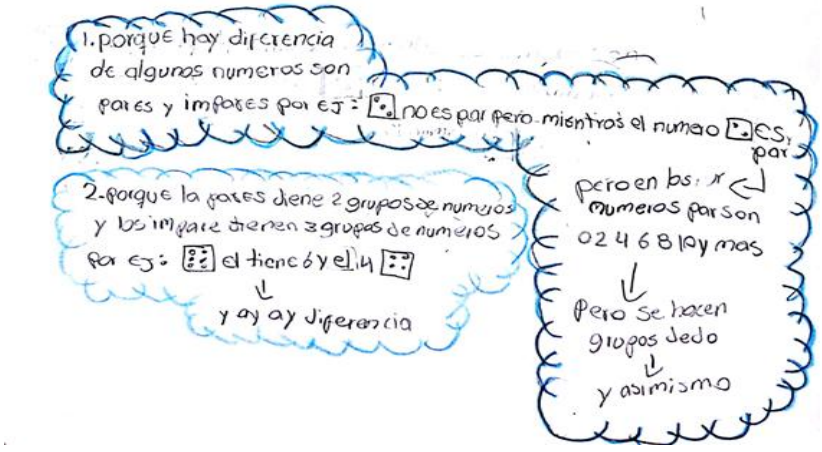


Figura 11. Respuestas de los estudiantes en la actividad 2. Fuente: propia.

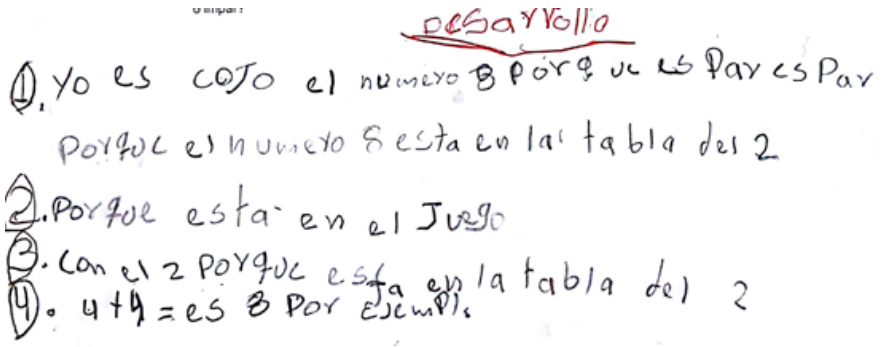


Figura 12. Respuestas de los estudiantes en la actividad 2. Fuente: propia.

Para los estudiantes ya es una regularidad que contar de 2 en 2 o formar grupos de 2, genera números pares, lo que parece significar en un principio que cumplen con parte del logro estipulado por los *Estándares* (MEN, 2006) de reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos, pero todavía les hacen falta otros aspectos como identificar que no solamente sucede con grupos de 2. No obstante, gracias a este ejercicio tuvieron identificado un punto de partida para las actividades que luego se les presentarían.

4.3.2 Actividad 3

Al hacer la revisión y el análisis de las respuestas expresadas por los estudiantes, se puede indicar con respecto a las preguntas 1 y 2, que por parte de los estudiantes:

- Se tiene en cuenta una ley de formación de los números pares 2n.
- Se tiene en cuenta una ley de formación de los números impares 2n + 1.
- Se dice que los números impares son aquellos que no terminan en cifra par.
- Cuando se tiene un número de figuras para saber si es par o impar se hacen grupos de 2. Si sobran es impar y si no sobran es par.

Con respecto a las preguntas 3 y 4, donde se presentan figuras que pueden tocar y manipular con las que debían identificar si correspondían a un número par o impar de ellas, sin necesidad de contar cada una de las partes de las que estaban compuestas. En el primer caso eran figuras compuestas por cuadrados unidos y en la segunda eran bolitas de colores unidas en sus extremos, así como otras que estaban separadas.

Figura 13. Niños durante el desarrollo de la actividad 3. Fuente: propia.

Al observar y analizar las respuestas de los estudiantes se tiene que:

- Utilizan como estrategia mirar si sobran cuadritos en alguno de los extremos de la figura que se presenta.
- Mirando si quedan parejos o disparejos los lados de las figuras.
- Mirando como es el inicio y el final de la secuencia de los colores, es decir en cuales inician y en cuales terminan. Si terminan en el mismo color que inician es impar, si terminan en un color diferente al que inician entonces es par (se trabajó solamente con 2 colores)
- Mirando si tienen o no pareja.

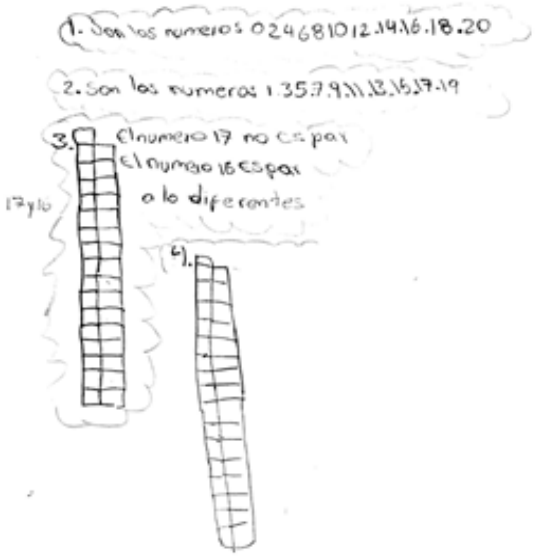


Figura 14. Respuestas de un niño en la actividad 3. Fuente: propia.

Puede verse en la figura 14 que uno de los niños alcanza uno de los logros estipulados por los *Estándares* (MEN, 2006) en tanto con el uso de un dibujo describió

cualitativamente una situación de cambio. Sin embargo, todavía no se considera que alguno de los estudiantes haya adquirido aquella “toma de conciencia” de la que Radford (2006; 2014) habla cuando se refiere a la objetivación, ese posicionamiento del conocimiento adquirido en el contexto social.

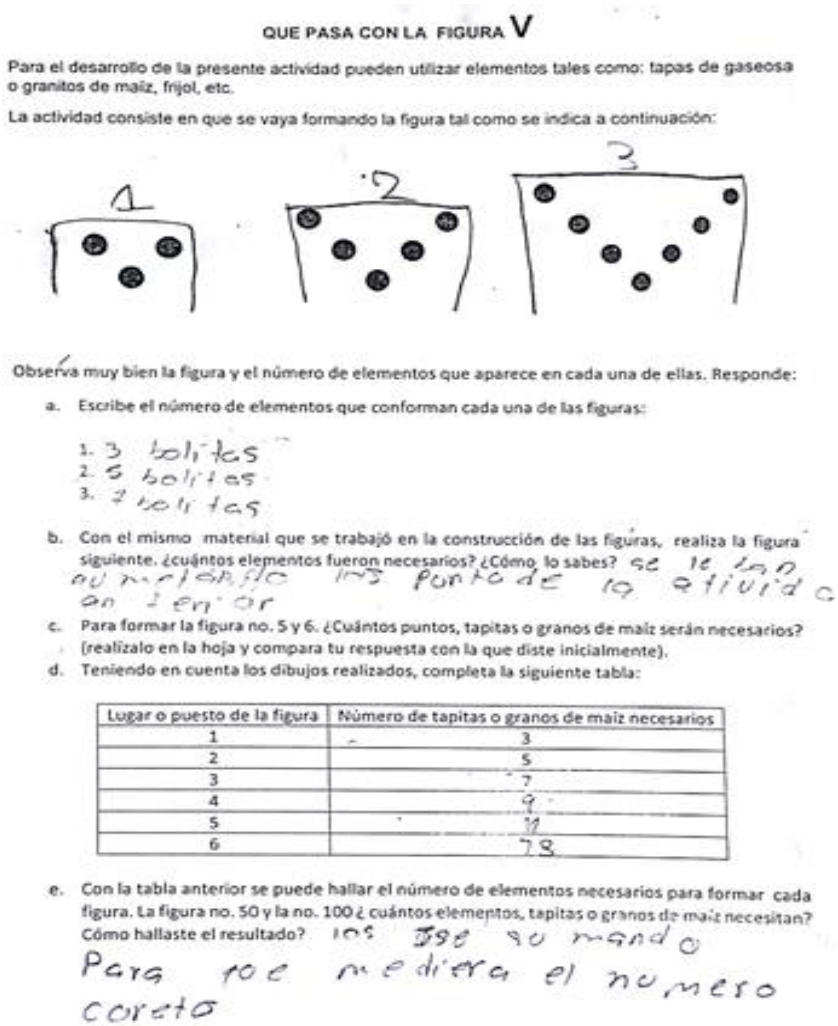
4.3.3 Actividad 4

La información extraída de lo realizado por los estudiantes se describe a continuación:

- Se van aumentando los puntos del anterior de a 2.
- Sumando se puede encontrar lo que sigue, aumentando los puntos del dibujo anterior.
- El resultado se puede obtener, contando de dos en dos.

A partir de la actividad anterior se pudo analizar que los estudiantes perciben de manera gráfica la mayor parte de la información, pero hay dificultad y se presentan dudas en el momento de describir, de escribir y puntualizar en aquello que están observando. Por ejemplo, saben que la secuencia varía de 2 en 2, pero no dejan claro que se inicia en tres, puesto que la primera figura ya tiene los primeros 3 puntos iniciales. También se puede analizar en esta parte lo importante y acertado que fue haber presentado una tabla a los estudiantes porque en su mayoría la completaron de manera correcta identificando la secuencia a seguir, que era de 2 en 2, lo que no ocurre con en el literal e, donde se pide una generalización y para las figuras que ocupan los lugares 50 y 100. Así, el porcentaje de acierto en las respuestas fue muy bajo, correspondiente solamente al 2% entre los estudiantes que contestaron este punto.

Lo mismo se pudo observar en el literal b antes de realizar la tabla, donde se pedía a los estudiantes que realizaran la figura siguiente y al comienzo les generó dificultad, pero luego tuvieron como alternativa completar la tabla y posteriormente hacer el dibujo de la figura no. 4, que era la que se estaba pidiendo realizar. Vuelve a entrar en juego la capacidad de explicar a través de gráficas o dibujos el sistema de patrones (MEN, 2006).



QUE PASA CON LA FIGURA V

Para el desarrollo de la presente actividad pueden utilizar elementos tales como: tapas de gaseosa o granitos de maíz, frijol, etc.

La actividad consiste en que se vaya formando la figura tal como se indica a continuación:

Observa muy bien la figura y el número de elementos que aparece en cada una de ellas. Responde:

a. Escribe el número de elementos que conforman cada una de las figuras:

1. 3 bolitas
2. 5 bolitas
3. 7 bolitas

b. Con el mismo material que se trabajó en la construcción de las figuras, realiza la figura siguiente. ¿cuántos elementos fueron necesarios? ¿Cómo lo sabes? se le ban aumentando los punto de la ativida an terior

c. Para formar la figura no. 5 y 6. ¿Cuántos puntos, tapitas o granos de maíz serán necesarios? (realízalo en la hoja y compara tu respuesta con la que diste inicialmente).

d. Teniendo en cuenta los dibujos realizados, completa la siguiente tabla:

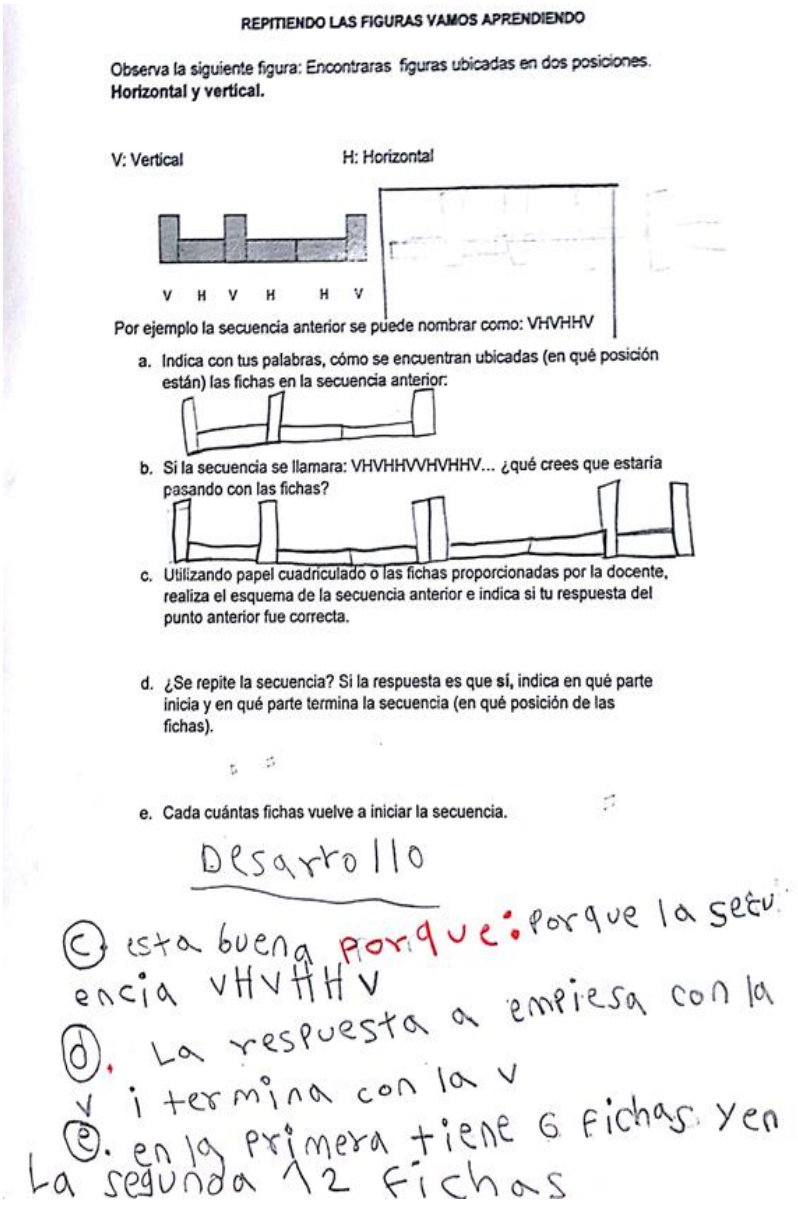
Lugar o puesto de la figura	Número de tapitas o granos de maíz necesarios
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	78

e. Con la tabla anterior se puede hallar el número de elementos necesarios para formar cada figura. La figura no. 50 y la no. 100 ¿ cuántos elementos, tapitas o granos de maíz necesitan? Cómo hallaste el resultado? los Jse su mando Para poe mediera el numero coreto

Figura 15. Respuestas de la actividad 4 de un estudiante. Fuente: propia.

4.3.4 Actividad 5

Después de analizar las respuestas escritas y proporcionadas por los estudiantes, se evidencia que reconocieron el patrón de la actividad a nivel general, identificaron las secuencias de figuras que les fueron presentadas de manera horizontal y vertical, hasta tuvieron la oportunidad de trabajar con material manipulable. Describen las situaciones, saben dónde inicia y dónde termina la secuencia, identificaron qué o cuál era el patrón que se estaba repitiendo, pero hubo dificultad en indicar el número total de pasos o de fichas cuando no tenían el material manipulable.



REPITIENDO LAS FIGURAS VAMOS APRENDIENDO

Observa la siguiente figura: Encontraras figuras ubicadas en dos posiciones. **Horizontal y vertical.**

V: Vertical H: Horizontal

V H V H H V

Por ejemplo la secuencia anterior se puede nombrar como: VHVHHV

a. Indica con tus palabras, cómo se encuentran ubicadas (en qué posición están) las fichas en la secuencia anterior:

b. Si la secuencia se llamara: VHVHHVVHVHHV... ¿qué crees que estaría pasando con las fichas?

c. Utilizando papel cuadriculado o las fichas proporcionadas por la docente, realiza el esquema de la secuencia anterior e indica si tu respuesta del punto anterior fue correcta.

d. ¿Se repite la secuencia? Si la respuesta es que **sí**, indica en qué parte inicia y en qué parte termina la secuencia (en qué posición de las fichas).

e. Cada cuántas fichas vuelve a iniciar la secuencia.

Desarrollo

c. esta buena porque: porque la secuencia VHVHHV

d. La respuesta a empiesa con la V i termina con la V

e. en la primera tiene 6 fichas y en La segunda 12 fichas

Figura 16. Respuestas de la actividad 5 de uno de los estudiantes. Fuente: propia.

4.3.5 Actividad 6

En las respuestas de los estudiantes se identifica que la mayoría llegaron a comprender durante el trabajo con las vigas lo que se debía hacer para la construcción de cada una. Para hallar la primera viga, la de 1cm de longitud, tuvieron dificultad para llegar al resultado final, donde no identificaron la respuesta correcta, puesto que se les dificultó comprender que ese valor solamente correspondía a la base del triángulo que la conformaba y que no se podían considerar las longitudes de lados diferentes a los que conforman la base dentro de la figura, tuvieron que hacer varios conteos descartando las opciones que sobrepasaban el ejemplo inicial de 6cm.

4.3.6 Actividad 7

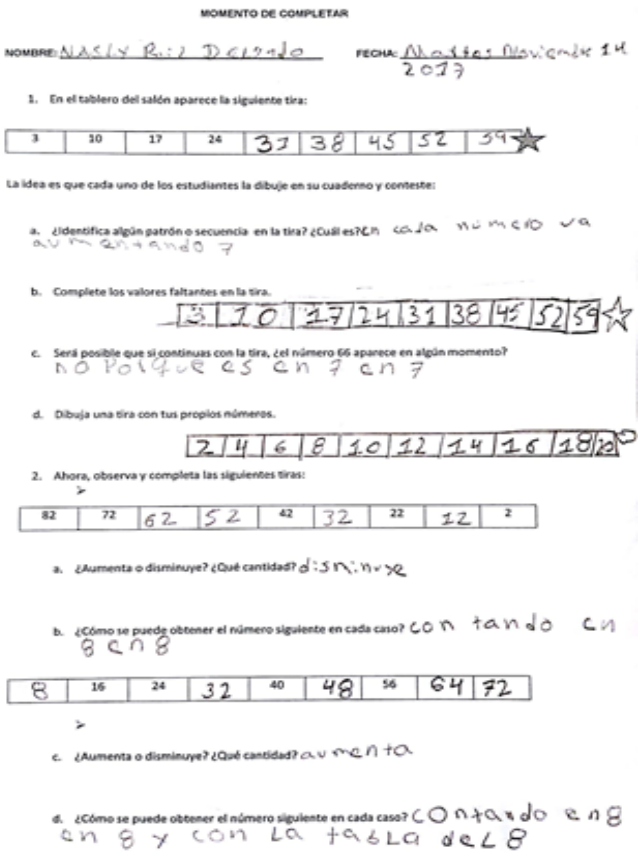
Dentro de las repuestas que dieron los estudiantes en la solución de la actividad cuando se indaga por la forma de encontrar la solución para los puntos 3 y 4, que consistían en indicar la regla de formación para cualquier cuadro, sin importar el número de cuadrados internos por los que estaba conformado, se tienen las siguientes:

- En cada lado debe haber el mismo número de cuadritos.
- Contando los cuadros
- Tiene que quedar un cuadrado del número que piden.
- Contando en la tabla y pintamos hasta el número que nos piden.
- Encontré un patrón contando los números y los cuadros.
- Los encontré con la mente y contando.
- Haciendo en cada una de las tablas la multiplicación del número por el mismo. Ej.: 1 *1, 2*2, 3*3, etc.

Puede identificarse que los estudiantes identifican los patrones de la actividad, teniendo en cuenta que al igual que la actividad anterior, se manejan patrones utilizando figuras geométricas. Por motivos de espacio, las evidencias de la actividad se presentan en el anexo 16. Las respuestas del estudiante sirven como ejemplo de que ellos identifican y representan la situación, pero a la hora de escribir las conclusiones, presentan dificultad y también son pocos los estudiantes que, sin tener la figura inmediatamente anterior, pudieron llegar a la conclusión o a establecer una regla general de formación.

4.3.7 Actividad 8

La respuesta generalizada de la actividad fue “Se puede obtener el número que sigue: Sumando, restando o también multiplicando”. Durante el desarrollo de esta actividad, el interés de los estudiantes fue muy positivo, puesto que mostraron facilidad en el momento de trabajar con la parte de secuencias numéricas y que la clave era saber qué operación se debía desarrollar: Sumas, restas, o multiplicaciones, indicando además que era mucho más fácil que cuando las actividades incluían gráficos, cómo en las anteriores, lo cual claramente se evidencia en el resultado de cada una de las tablas.



MOMENTO DE COMPLETAR

NOMBRE: NASLY R. D. FECHA: Noviembre 14 2017

1. En el tablero del salón aparece la siguiente tira:

3	10	17	24	31	38	45	52	59

La idea es que cada uno de los estudiantes la dibuje en su cuaderno y conteste:

a. ¿Identifica algún patrón o secuencia en la tira? ¿Cuál es? En cada número va aumentando 7

b. Complete los valores faltantes en la tira.

3	10	17	24	31	38	45	52	59

c. Será posible que si continuas con la tira, ¿el número 66 aparece en algún momento? no Porque es en 7 en 7

d. Dibuja una tira con tus propios números.

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

2. Ahora, observa y completa las siguientes tiras:

82	72	62	52	42	32	22	12	2

a. ¿Aumenta o disminuye? ¿Qué cantidad? disminuye

b. ¿Cómo se puede obtener el número siguiente en cada caso? con tando en 8 en 8

8	16	24	32	40	48	56	64	72

c. ¿Aumenta o disminuye? ¿Qué cantidad? aumenta

d. ¿Cómo se puede obtener el número siguiente en cada caso? Contando en 8 en 8 y con la tabla del 8

Figura 17. Respuestas de un estudiante en la actividad 8. Fuente: propia.

Por otro lado, se evidencia la forma correcta de desarrollar la actividad, aunque en algunos momentos se percibe confusión con la misma, lo que genera una “discusión” dentro del grupo de trabajo. Finalmente, los niños logran llegar a un común acuerdo y a nivel general del curso pudieron resolver la actividad sin mayores contratiempos.

4.3.8 Actividad 9

En resumen, las justificaciones dadas por los estudiantes, a cómo encontraron las respuestas de las 3 situaciones planteadas fueron las siguientes:

- **Pregunta no.1**

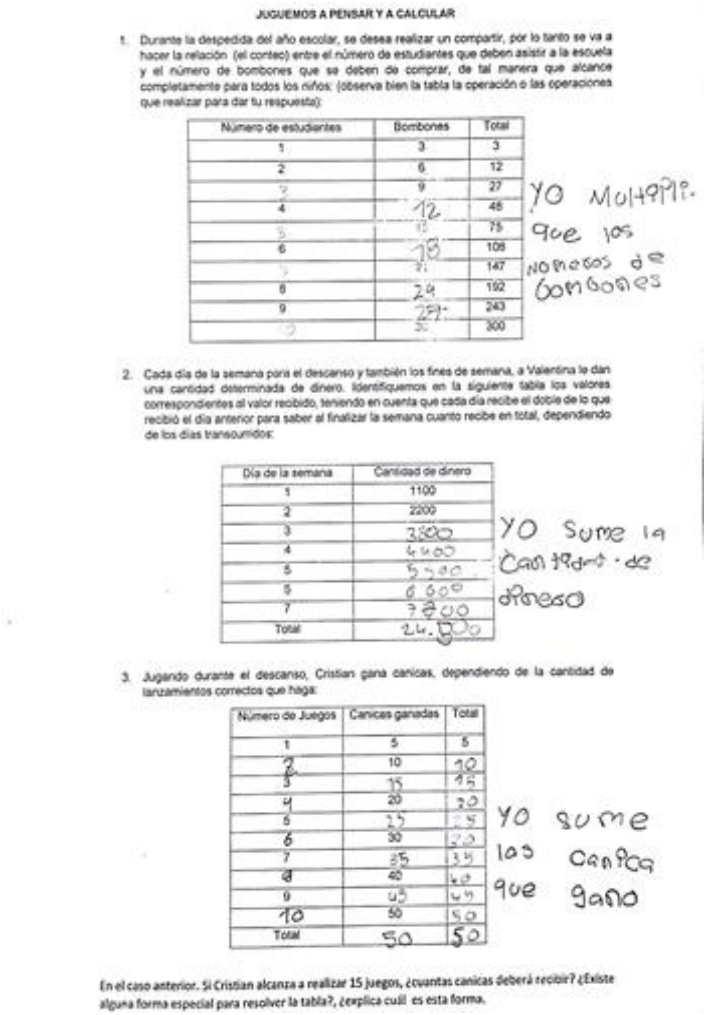
  - Multiplicando los números de bombones.
  - Sumando y multiplicando.
  - Se ponen los números como en la tabla del 3.
  - La tabla del 3 o sumando de tres en tres.

- **Pregunta no.2**

  - Sumando la cantidad de dinero.
  - Sumando y multiplicando.
  - Fui sumando los dos números de arriba a los demás.

- **Pregunta no.3**

  - Voy sumando las canicas que ganó.
  - Es como ir colocando la tabla del 5 y multiplicando.
  - Pensando y contando de 5 en 5.



JUGUEMOS A PENSAR Y A CALCULAR

1. Durante la despedida del año escolar, se desea realizar un compartir, por lo tanto se va a hacer la relación (el contec) entre el número de estudiantes que deben asistir a la escuela y el número de bombones que se deben de comprar, de tal manera que alcance completamente para todos los niños: (observa bien la tabla la operación o las operaciones que realizar para dar tu respuesta):

Número de estudiantes	Bombones	Total
1	3	3
2	6	12
3	9	27
4	12	48
5	15	75
6	18	108
7	21	147
8	24	192
9	27	243
10	30	300

YO Multiplique que los Numeros de bombones

2. Cada día de la semana para el descanso y también los fines de semana, a Valentina le dan una cantidad determinada de dinero. Identifiquemos en la siguiente tabla los valores correspondientes al valor recibido, teniendo en cuenta que cada día recibe el doble de lo que recibió el día anterior para saber al finalizar la semana cuanto recibe en total, dependiendo de los días transcurridos:

Día de la semana	Cantidad de dinero
1	1100
2	2200
3	3300
4	4400
5	5500
6	6600
7	7700
Total	24.300

YO Sume la Cantidad de dinero

3. Jugando durante el descanso, Cristian gana canicas, dependiendo de la cantidad de lanzamientos correctos que haga:

Número de Juegos	Canicas ganadas	Total
1	5	5
2	10	10
3	15	15
4	20	20
5	25	25
6	30	30
7	35	35
8	40	40
9	45	45
10	50	50
Total	50	50

YO sume los canica que gano

En el caso anterior. Si Cristian alcanza a realizar 15 juegos, ¿cuantas canicas deberá recibir? ¿Existe alguna forma especial para resolver la tabla?, ¿explica cuál es esta forma.

Figura 18. Respuestas de un estudiante en la actividad 9. Fuente: propia.

Una vez más, en esta actividad los estudiantes muestran que, en el trabajo con patrones y secuencias, de alguna manera generan mayor facilidad y entendimiento, aquellas situaciones que son numéricas y que cuentan con apoyo tabular, con respecto a aquellas que involucran el fenómeno de variación por medio de figuras. Esto se valida por el alto porcentaje de respuestas correctas durante la actividad. Por otro lado, se puede evidenciar también que descubren el patrón de la actividad, pero pocos la concluyen dando los valores totales en cada una de las tablas presentadas.

4.3.9 Actividad 10

Se observa con esta actividad que la mayoría de los estudiantes se atrevieron a relacionar el fenómeno de variación con las secuencias numéricas, indicando que el patrón numérico, es algo secreto que se encuentra dentro de una actividad, que se puede encontrar con alguna de las operaciones de suma, resta o multiplicación y que además las actividades que no involucran figuras son para ellos las más fáciles. Algunas respuestas pueden verse en el anexo 16.

4.3.10 Resultados generales de la Fase III

A partir de las actividades anteriores se pudo analizar que los estudiantes de manera gráfica perciben la mayor parte del tiempo lo que sucede, pero hay dificultad y presentan dudas en el momento de describir y puntualizar en aquello que están observando. En las secuencias de figuras que les fueron presentadas de manera horizontal y vertical, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de trabajar con material manipulable, describen las situaciones, saben dónde inicia y donde termina la secuencia, identificaron qué era lo que se estaba repitiendo, pero hubo dificultad en indicar el número total de pasos o de fichas cuando ya no se tenían este material.

A nivel general, los estudiantes identificaron que se presentaba algún tipo de patrón en las diferentes actividades, teniendo en cuenta que se trabajaron del tipo Numérico y geométrico. Los estudiantes identificaron y representaron las situaciones, pero a la hora de escribir las conclusiones, presentaron dificultad y fueron pocos también los estudiantes que, sin tener la figura inmediatamente anterior, pudieron llegar a la conclusión o regla general. Durante el desarrollo de estas actividades, el interés de los estudiantes fue bastante positivo, puesto que mostraron facilidad en el momento de trabajar con la parte de secuencias numéricas y que la clave era saber qué operación se debía desarrollar: sumas, restas, o multiplicaciones, indicando además que era mucho más fácil que aquellas actividades que incluían gráficos, lo cual claramente se evidencia a partir de los resultados obtenidos como producto de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

Por otro lado, se evidencia que en algunas de las actividades, los estudiantes identifican la forma correcta de resolverlas al momento de hablar sobre ellas y de dar las instrucciones e ideas iniciales para el inicio con el trabajo, pero al momento de desarrollar las actividades, se confunden o se pierden en algunos pasos, lo que lleva a un resultado erróneo de la misma, tal como ocurre en algunas de las tablas, donde tienen valores correctos, pero si uno de los valores está errado, el resto del trabajo también lo está, donde eso no era lo que habían expresado con palabras, antes de resolver la actividad.

Desde un vistazo cuantitativo, los resultados del grupo de estudio en las actividades pueden sintetizarse como sigue: los estudiantes de tercer grado respondieron cuatro preguntas en las actividades uno y dos (ACT 1, ACT 2), mientras que ellos dieron cuenta de cinco interrogantes en las actividades tres y cuatro (ACT 3, ACT 4). Las actividades cinco y seis (ACT 5, ACT 6) tuvieron cinco preguntas, en cambio las

actividades siete, ocho y nueve (ACT 7, ACT 8, ACT 9) estuvieron enfocadas en nueve, ocho y tres preguntas respectivamente.

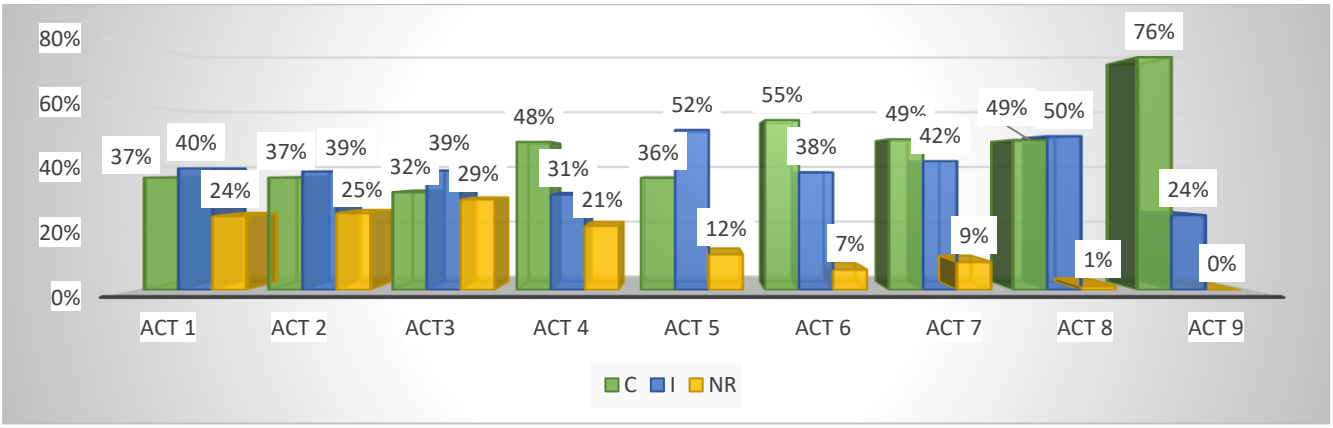


Gráfico 5. Resultados de las actividades 1 a 9 en el grupo 1. Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 5, se muestra que el mayor porcentaje de estudiantes que respondió correctamente (c) las preguntas hicieron parte de la actividad nueve (ACT 9) con 76%. A continuación, estuvieron quienes realizaron las actividades seis, siete y ocho (ACT 6, ACT 7, ACT 8) con 55, 49 y 49 puntos porcentuales respectivamente. En las actividades cuatro, uno, dos y tres (ACT 4, ACT 1, ACT 2, ACT 3) respondieron aceradamente el 48%, 37%, 37% y 32% respectivamente, mientras que el 52%, 50% 42% de estudiantes respondió incorrectamente (I) preguntas de las actividades cinco, ocho y siete (ACT 5, ACT 8, ACT 7). En seguida estuvieron los estudiantes que no acertaron en las preguntas de las actividades uno, dos, tres y seis (ACT 1, ACT 2, ACT 3, ACT 6) con 40, 39, 39 y 38 puntos porcentuales respectivamente. Finalmente, el 31% y 24% respondió incorrectamente los interrogantes en las actividades cuatro y nueve (ACT 4, ACT 9).

En el grafico 5 puede deducirse que el 46% respondieron correctamente (c), 39% incorrectamente (I) y 14% de estudiantes no respondieron las preguntas realizadas en las nueve actividades, y se observa una correlación entre la consecución de las actividades y el mejoramiento de los resultados por parte de los estudiantes, de manera que en la última prueba obtuvieron la mayoría una evaluación positiva.

Por lo tanto, se demuestra que la propuesta didáctica enfocada en las 10 primeras actividades de las Fases II y III, funciona a la hora de mejorar los logros de los estudiantes en la identificación de variables, cambios y patrones, así como en el descubrimiento propio y en grupo de los mejores métodos para hallarlos en un ejercicio dado. Sin embargo, en los resultados de la siguiente fase se demostraría si en efecto se desarrollaron totales procesos de *objetivación* en los estudiantes.

4.4 Resultados de la fase IV. Intervención No. 2

- **Actividad 1**

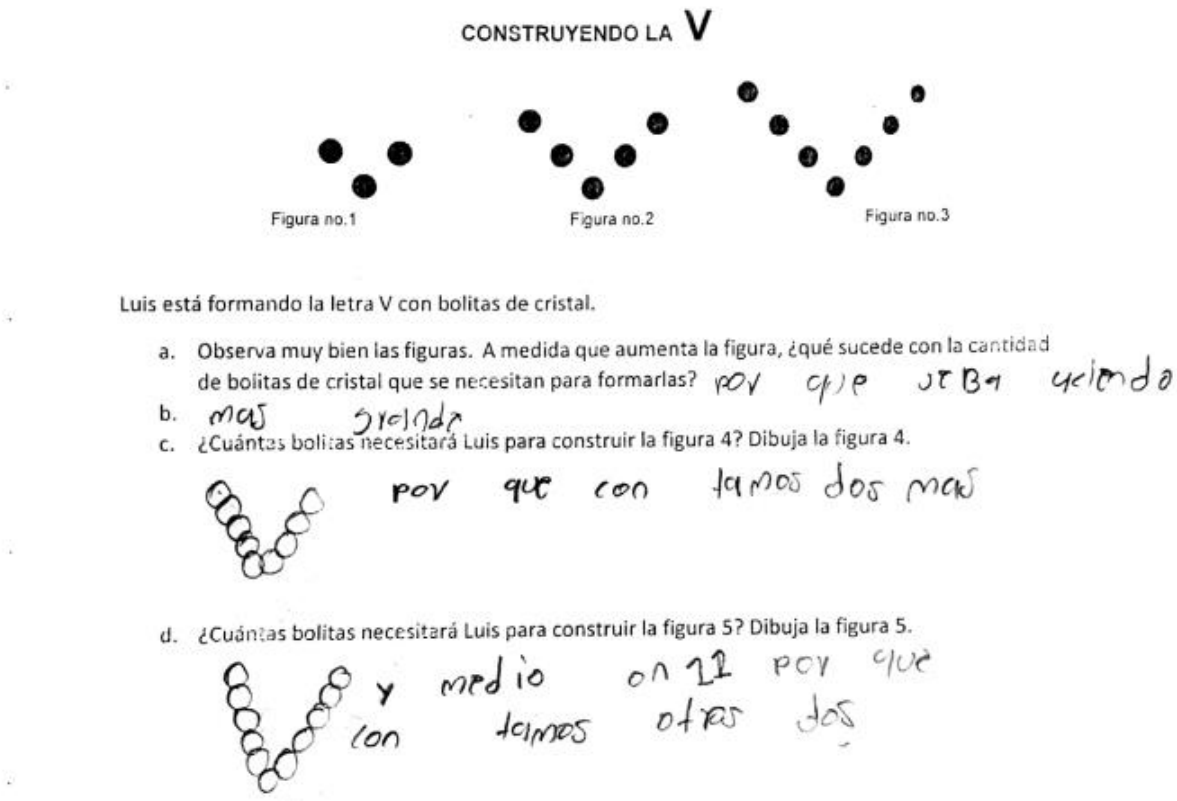


Figura 19. Resultados de estudiante en la actividad 1 de la Fase IV. Fuente: propia.

De manera general, como se ve en la figura 18, las respuestas presentadas por los estudiantes a manera de justificación para indicar sus resultados y explicar cómo se podía obtener alguna de las figuras (por ejemplo, la no. 4. Literal a) después de la no.3 son las siguientes:

- Las figuras siguientes se pueden obtener, contando de 2 en 2.
- Se deben de tener en cuenta las 3 primeras bolitas y a partir de ellas seguir contando de a 2.
- A cada una de las figuras irle sumando 2 bolitas más.
- La figura siguiente se obtiene sumando de 2 en 2.

Para saber cuántas bolitas se necesitarán para construir la figura no.5 (literal b)

- Sumando 2 bolitas a la figura no. 4.
- Porque se suman 2 bolitas más.
- Sumando de 2 en 2.

Para saber cuántas bolitas se necesitarán para construir la figura no.10 (literal c)

- Se aumenta de 2 en 2.
- Se cuenta hasta la figura no. 9 y se cuentan 2 más.
- Porque se suman 2 más.
- Todas nos dieron sumando de 2 en 2.

Para saber cuántas bolitas se necesitarán para construir la figura no.20, sin hacer el dibujo (literal d).

- Contando de 2 en 2.
- sumando de 2 en 2 desde la figura no. 10 hasta la figura no. 20.
- Contando con los dedos de 2 en 2.

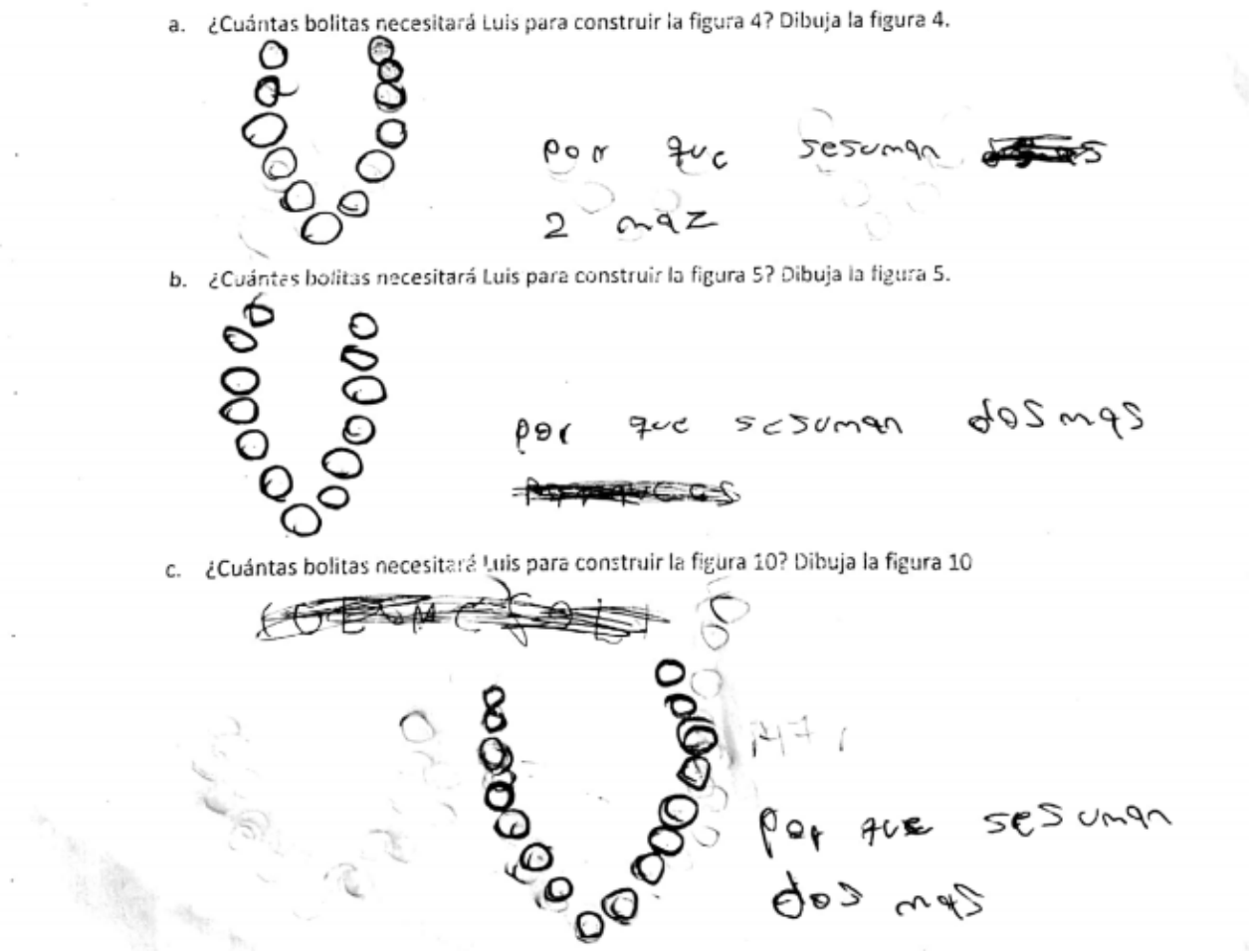


Figura 20. Resultados de estudiante en la actividad 1 de la Fase IV. Fuente: propia.

A partir de la actividad anterior y como lo evidencian las figuras 19 y 20, se puede observar que la mayoría de los estudiantes comprenden la dinámica de la actividad, identifican el patrón o regla de formación de la misma, con una característica importante y es que a pesar de que esta actividad es a partir de una secuenciación de figuras. Los estudiantes tuvieron una buena compresión de la misma, indicando lo que sucedía de una figura a otra y en algunos casos acertaron, indicando que se debían de tener en cuenta como punto de partida las tres primeras bolitas que correspondían a la figura no.1. Además, para encontrar cualquier figura siempre recurrieron al dibujo, teniendo como guía una de las figuras ya conocidas.

Para los literales a, c, d, se puede observar que los estudiantes lo pudieron resolver sin dificultad, teniendo en cuenta que se debía encontrar la secuencia siguiente a partir de una figura compuesta por bolitas, encontrando el patrón a seguir. No obstante, al momento de trabajar el literal e, consistente en una tabla donde se debía explicar lo que sucedía a medida que se pasa de una figura a otra, indicaban que se debía de sumar 2 bolitas en cada figura siguiente, y al completar la tabla lo hacen de manera incorrecta.

Como es claro en los ejemplos mostrados en el anexo 17, se evidencia que la actividad planteada a los estudiantes, presenta la exigencia de nuevos elementos dentro del campo del pensamiento variacional, los cuales precisan identificar, lo cual no les permitió llegar a los elementos conceptuales implícitos, que después de hacer las transformaciones necesarias, los llevara a la solución de la misma, en algunos casos los estudiantes no justificaron su respuesta y en otros se manifestaron respuestas erróneas tales como:

- “La figura 20 nos da 41 bolitas y estamos cerca de 43, seguimos contando y es la figura no. 23”.
- “Hay que poner en un lado 10 bolitas y en el otro también, para que la letra V quede bien nivelada”.

- **Actividad 2**

En esta actividad se dieron las indicaciones correspondientes y los estudiantes inicialmente mostraron comprensión frente al trabajo a realizar, pero cuando se evaluaron las actividades, los resultados no fueron favorables debido a lo siguiente:

- Los estudiantes hicieron representaciones gráficas para responder, pero no tuvieron en cuenta que en la secuencia las figuras se encontraban unidas, por lo tanto, los resultados fueron incorrectos puesto que contaban dos veces el lado en común que presentaban las figuras de la secuencia gráfica, por lo tanto, se puede indicar una vez más que en esta serie de actividades los estudiantes siguen presentando dificultades.
- Manifiestan que para encontrar el resultado se puede ir contando de 6 en 6, cómo si las figuras estuvieran separadas.
- Multiplicando el número de casitas por 6.

Como puede observarse en la figura 20, los estudiantes asocian el tipo de actividades con patrones y generalizaciones, identificando que existe algún tipo de regularidad, pero descuidan otros elementos que, en la actividad, marcan la diferencia y generan cambios en el resultado, llevándolos por un camino equivocado.

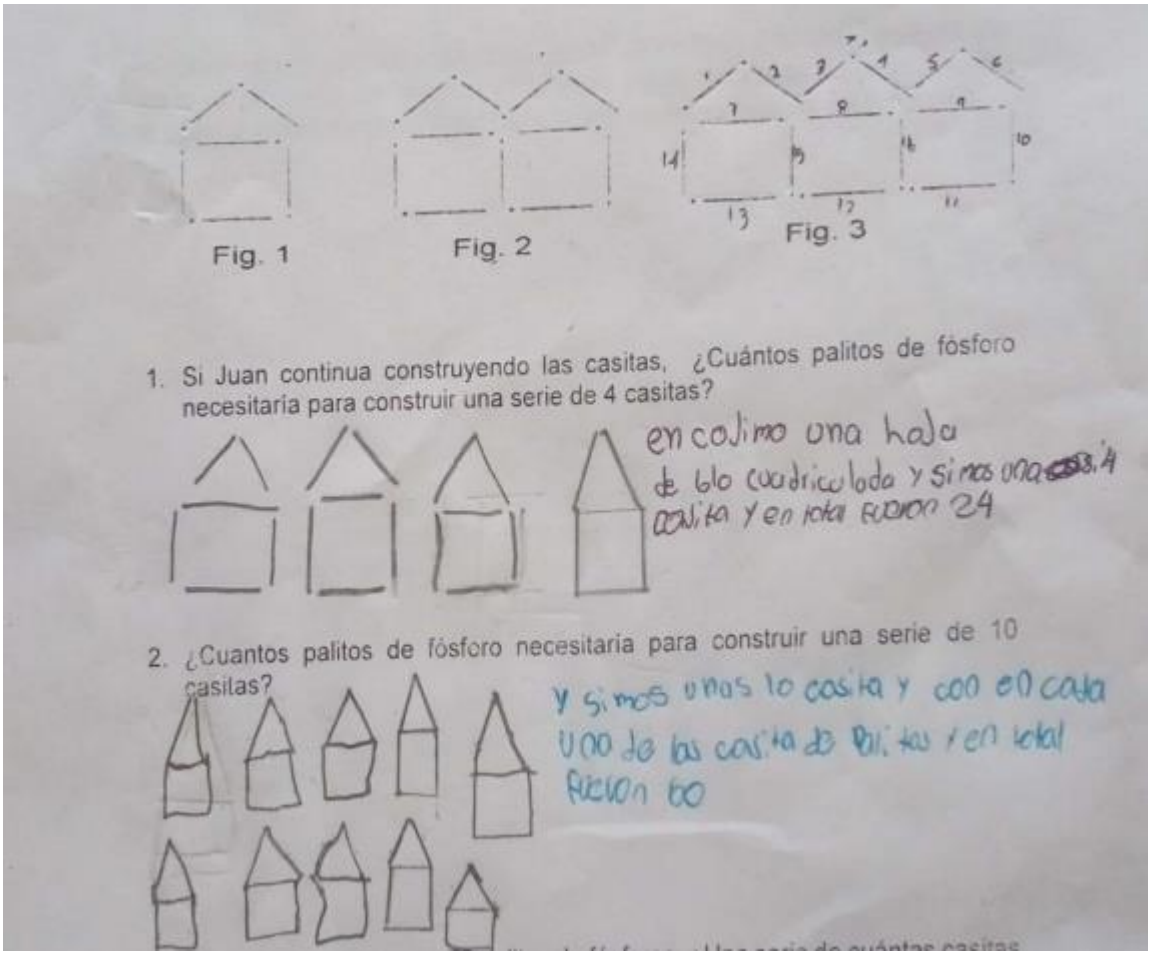


Figura 21. Resultados de un estudiante durante la actividad 2. Fuente: propia.

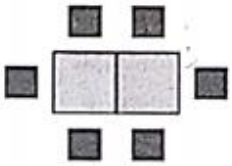
- **Actividad 3**

En esta actividad los resultados son mejores que en las anteriores, puesto que varios de los grupos acertaron en las respuestas, comprendiendo la situación, aunque otra parte de los grupos siguieron cometiendo el error de separar los elementos de las figuras de la secuencia. La mayoría de los grupos recurrieron a la estrategia del dibujo para resolver la situación, además se resalta que en esta actividad también se aplicó a algunos de los grupos la actividad de simplificación, donde la esencia de la actividad era la misma, pero se encontraban otros elementos tales como las tablas. Pero en esta oportunidad, como las figuras estaban unidas, los resultados fueron acordes a esta situación, la cual ya se ha manifestado que genera algún tipo de dificultad en los estudiantes, porque como se había indicado anteriormente, en las actividades donde se habían presentado tablas para encontrar la solución, hasta el momento de esta segunda parte de actividades, los resultados favorecían el tipo de actividad para el aprendizaje de los estudiantes.

El ejemplo de las respuestas dadas por los niños se encuentra en el anexo 19. A pesar de que los resultados mejoran con respecto a las actividades 1 y 2, los aciertos

continúan siendo bajos de acuerdo con la dinámica de las actividades. El recurso dibujo continúa siendo importante para los estudiantes al momento de expresar sus resultados y el detalle que se involucra una situación problema dentro de la actividad, sigue siendo motivo de dificultad a la hora de resolver y llegar a una conclusión o generalización, como se ve en la figura 22.

Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:



1. Luego llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? ¿Cómo organizará las mesas, para atender a los clientes? **Explica tu respuesta:**

R11= Para atenderlos ay que sumar 2 mesas mas para completar las mesas de las personas

2. Si llegarán **20** amigos, ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? **Explica tu respuesta:**

R11= en total necesitaría 5 mesas para 20 amigos en cada mesa porque: cada persona ba en cuatro sillas que trae una mesa 4 cada uno se sienta en una mesa haci son veinte en cada silla mesa trae 4 sillas.

Figura 22. Respuestas de un estudiante en la actividad 3 de la Fase IV. Fuente: propia.

- **Actividad 4**

Esta actividad fue trabajada por todos los estudiantes, los cuales no manifestaron en ningún momento no poder resolver la actividad y pasar a trabajar la actividad de simplificación. Por el contrario, 5 de los grupos trabajaron posteriormente la actividad de extensión, en la cual 4 de los 5 grupos que la trabajaron mostraron resultados positivos. Entre las respuestas dadas por los estudiantes como justificación a sus respuestas se tienen las siguientes:

- Para encontrar la respuesta, toca completar el dibujo, para saber cuántas barras se necesitan.
- Completando los vagones del tren se puede obtener el Número de barras que se necesitan para formarlos.
- Contando los triángulos hasta 10 y luego contando las barras que los conforman.
- Estas respuestas son similares también para la actividad de extensión donde tal como se indicó anteriormente fue trabajada por 5 grupos, donde de éstos 4 tuvieron un acercamiento a la respuesta, pero siempre utilizando el recurso del dibujo antes de encontrar alguna regla de formación.

La mayoría de los estudiantes según los resultados llegaron a comprender, durante el trabajo con las vigas, lo que se debía hacer para la construcción de cada una. Para hallar la primera viga, la de 1 cm de longitud, tuvieron un poco de dificultad puesto que debieron primero que todo considerar las longitudes de lados diferentes a los que conforman la base dentro de la figura; tuvieron que hacer varios conteos descartando las opciones que sobrepasaban el ejemplo inicial de 6 cm, y manifestaron y expresaron dificultad en el momento inicial de tener una figura que solamente media 1cm.

4.4.1 Resultados generales de la Fase IV

En este grupo de actividades aplicadas, presentaron una característica especial y diferente con respecto al grupo anterior, puesto que basó en la resolución de problemas no rutinarios, donde el objetivo fundamental consistía en el trabajo con patrones tanto numéricos como geométricos, pero, además, se tenían otra serie de actividades llamadas Simplificación y Extensión. Las primeras para dar más herramientas a los estudiantes en caso de no poder resolver la actividad inicial y la de extensión para aquellos estudiantes que mostraron mayor habilidad al momento de trabajar y terminar su actividad inicial, o que manifestaron con sus palabras y razonamientos una comprensión acertada para el desarrollo de la misma.

Aspecto muy importante a tener en cuenta fue que el trabajo de los estudiantes en esta parte presentó mayor dificultad, lo cual se puede concluir a partir del hecho que algunas de las actividades que en esta fase se trabajaron, ya se habían trabajado en la fase de implementación I (Figuras en V y Trencito divertido) pero sin el contexto de una situación problema, dejando como evidencia que para los estudiantes la competencia de resolución de problemas continúa siendo uno de los elementos y/o competencias fuertes a seguir trabajando dentro de área de las matemáticas. Esto se observa teniendo en cuenta que los resultados correctos de la primera fase fueron más altos con relación a la segunda, donde los estudiantes necesitaron mayor participación de la docente. Esta difícil panorámica se sintetiza en el gráfico 6.

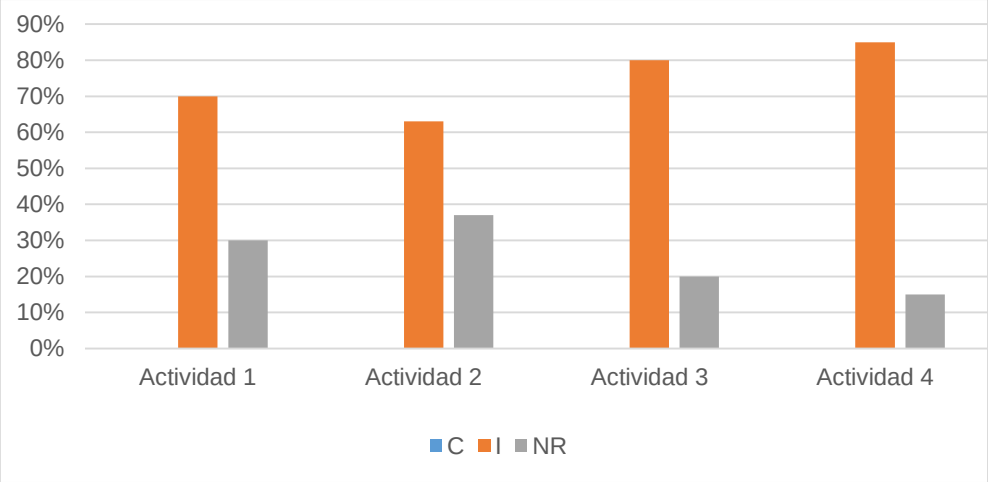
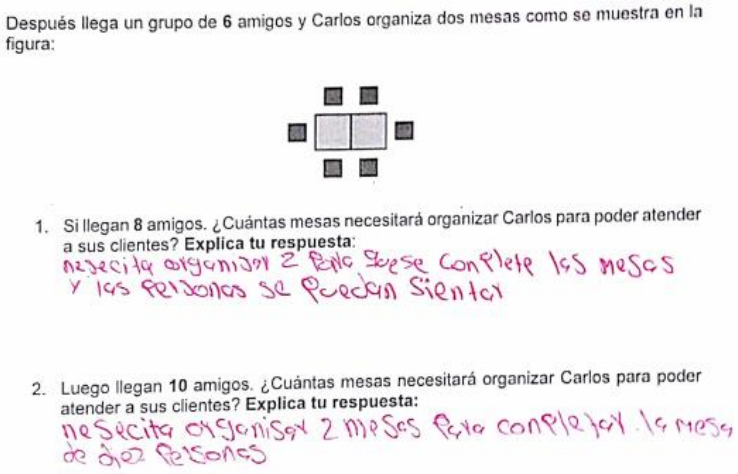


Gráfico 6. Porcentaje de estudiantes que respondieron la prueba final. Fuente: propia.

Los patrones numéricos son de alguna manera identificables para los estudiantes, pero al momento del trabajo con aquellos que son del tipo geométricos, se requirió la aplicación de diferentes elementos conceptuales, los cuales, desde el desarrollo de la actividad, permiten evidenciar que se requiere mayor aplicabilidad por parte de ellos. En la actividad sus dificultades para resolver aumentaron, presentando resultados menores que cuando los patrones eran solamente del tipo numérico, como se ve en la figura 23.


Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:

1. Si llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos para poder atender a sus clientes? **Explica tu respuesta**:
necesita organizar 2 para que se complete las mesas y las personas se puedan sentar

2. Luego llegan **10** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos para poder atender a sus clientes? **Explica tu respuesta:**
necesita organizar 2 mesas para completar las mesas de diez personas

Figura 23. Resultados de un estudiante durante la Fase IV. Fuente: propia.

Se hace énfasis, además, en que el trabajo con tablas es algo que ayuda mucho al desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes. Así pues, la importancia y la necesidad de saber el tipo de tareas que se deben aplicar (Kieran, 2007), queda ampliamente demostrado en este trabajo, al manifestar los resultados obtenidos en cada una de las 4 fases.

Por otro lado, para los estudiantes identificar la generalización en las diferentes actividades se hizo complejo: hallaban la secuencia o el patrón, pero al pedirles que hicieran una generalización que se cumpliera para cualquier tipo de actividad

relacionada con la pregunta en cuestión, consideraban generalmente que la única alternativa de solución era haciendo la representación gráfica o conteos en el caso de secuencias, lo que se podía volver complejo cuando lo que se pedía por ejemplo estaba relacionado con la figura que ocupa el lugar Número 50 de un patrón geométrico o un valor grande en alguna de las secuencias numéricas con apoyo tabular.

Con relación a la metodología, se puede indicar que en el momento del diseño de las actividades, se debe ser muy cuidadoso y que además su escritura debe ser tan clara, de tal manera que no generen algún tipo de ambigüedad para los estudiantes que las resuelven, porque si bien el trabajo dentro del campo del pensamiento variacional, junto a la resolución de problemas no es el fuerte de nuestros estudiantes, si se deben escribir esas actividades de manera acorde a su edad, nivel educativo, contexto en el cual se desenvuelve, y de la claridad conceptual que permitan realizar el trabajo. Un aspecto a resaltar fue la implementación de las situaciones problema asociadas a la inicial (simplificación y extensión), las cuales permitieron un acercamiento diferente por parte de los estudiantes, dependiendo que tanta proximidad se tuviera con la actividad inicialmente planteada.

Para finalizar, a futuro se piensa que una adecuada propuesta de trabajo debe de estar enfocada en la parte del trabajo con patrones y variación, pero haciendo el énfasis puntualmente en la resolución de problemas o la relación de la resolución de problemas con el desarrollo del pensamiento variacional, permitiendo abordar dos problemáticas de gran importancia dentro del campo de las matemáticas y que a su vez se ha demostrado desde diferentes estudios, que no solamente son objetos de estudio, sino que siguen generando a los estudiantes y no solo en la I. E. Donald Rodrigo Tafur, sino a nivel general, lo cual se puede evidenciar en los diferentes estudios e investigaciones que a nivel nacional e internacional se han desarrollado.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

En este capítulo se exponen las conclusiones obtenidas con los procesos de trabajo con las secuencias numéricas y con la generalización de patrones (numéricos y geométricos), como una alternativa dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje en las matemáticas, para el desarrollo del pensamiento variacional en el grado 3º, en los estudiantes de la I.E. Donald Rodrigo Tafur, sede Antonio Nariño.

A partir de los resultados obtenidos durante las diferentes intervenciones, se evidenció que el trabajo realizado por los estudiantes, es muy cercano con las teorías que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de este trabajo, que permiten relacionar ese quehacer natural y cotidiano cuando se les enfrenta a situaciones que involucran pensamiento variacional; que además exigen a los docentes el planteamiento de diferentes alternativas de trabajo contextualizadas en la vida real y enfocadas en un mismo objetivo, que permitan a los estudiantes un análisis y posterior avance, dependiendo del ritmo con el que aborden las actividades inicialmente planteadas, donde a su vez se reflejen los procesos que siguen y de ser necesario poder guiarlos dentro de ese trabajo en el campo del pensamiento variacional.

En el desarrollo del aplicativo por parte de los estudiantes, basado en la resolución de problemas no rutinarios, se evidenció que se debe realizar un trabajo con situaciones guiadas, sus resultados son positivos, puesto que se conjugan los saberes previos, específicamente, se resaltan los resultados del trabajo con patrones y secuencias para que los niños los identifiquen. El trabajo con estas actividades, dejó claro que los estudiantes son capaces de generalizar patrones y a partir de allí enfocar el trabajo a potenciar el desarrollo del pensamiento variacional con el grupo de estudio. Es decir, es posible potencializar el desarrollo del pensamiento variacional si los problemas que los niños deben solucionar son del tipo de no rutinarios, y que además los estudiantes tengan acceso a algún tipo de material que puedan manipular, puesto que esto les permite vivir la realidad de lo que están trabajando y no es algo que solamente se queda para resolver plano en el papel.

Por otro lado, la implementación de la secuencia permitió que los estudiantes lograran dar un significado a las variables que intervinieron en las situaciones planteadas, como también a las relaciones existentes entre ellas, lo que a su vez daba lugar a la observación de ciertas regularidades que generaba el trabajo con diferentes patrones, logrando un acercamiento al pensamiento variacional mediante el proceso de generalización, dejando en evidencia que es imperativo el construir competencias relacionadas a la resolución de problemas desde los primeros grados de la básica primaria.

5.2 Recomendaciones

Dentro de esta propuesta didáctica, se recomienda que a los niños se les debe introducir al pensamiento variacional antes de tercer grado, con situaciones problema acordes y actividades de abordaje en el campo de los patrones y del pensamiento variacional cortas y sencillas, no con la intención de llegar al desarrollo de algún tipo de

pensamiento, sino que se constituya para ellos en una regularidad el trabajo con este tipo de situaciones.

Con respecto al tipo de tareas que se deben manejar, las actividades deben de contener patrones y secuencias a manera de situaciones problema. Otros investigadores pueden centrar sus pesquisas en la implicación de este tipo de problemas en el aula de clase de matemáticas antes de grado tercero. De ser así, tanto el lenguaje como la presentación misma de la actividad deben ser lo suficientemente claros para que sea de fácil comprensión y acceso al estudiante, al que en estas etapas aún no se le ha sido introducido el pensamiento variacional.

Queda por investigar más a fondo la implicación de problemas no rutinarios fuera del aula de clase; es decir, cómo repercuten en la vida cotidiana de los niños la aplicación de las actividades sobre resolución de problemas más allá de las respuestas correctas o incorrectas que puedan contestar en una prueba escrita. Está en consideración de futuros investigadores, también, el diseño de nuevos problemas y ejercicios en los que prime la resolución de problemas no rutinarios.

6. Referencias

Acosta, D., Jiménez, I. y Villar, B. (2015). Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria. Trabajo para optar al título de especialista en enseñanza de la matemática. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Agudelo-Valderrama, C. & Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE - *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital.* Informe final del Proyecto PROMICE - Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP: Bogotá. Grupo pensamiento matemático (PEMA), universidad de sucre Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Amaya, T., Chaucanes, A., Escorcia, J., Medrano, A., López, A., & Therán, E. (2009). Estrategias para potenciar el pensamiento variacional.

Amézquita, N., Murillo, J. (2007). El laboratorio de matemáticas como mediador en el estudio de la función lineal en la escuela, Universidad del Valle, Colombia

Batanero C., Godino, J., & Font V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros, Universidad de Granada.

Belloch, C. (2012) Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el aprendizaje. Material docente [on-line]. Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Universidad de Valencia. Disponible en http://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA1.pdf

Bonilla-Castro, E., & Rodríguez, P. (1997). Cap. 2. Métodos cuantitativos y cualitativos. *La investigación en ciencias sociales: Más allá del dilema de los métodos*, 41-57.

Butto, C. & Rojano, T. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo Educación Matemática,* Santillana. Distrito Federal, México, pp. 55-86

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica.

Cisterna Cabrera, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria, 14*, 1: pp. 61-71.

Díaz, M. V., & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Elementos de una teoría cultural de la objetivación 1 Relime, Número Especial, 2006, pp. 103-129. Luis Radford

García, G., Serrano, C., & Salamanca, J. (2000). Estudio del pensamiento Variacional

en la educación básica primaria.

Gascón, J. Evolución de la didáctica de las Matemáticas como disciplina Científica. EN: Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 18, Nº 52, 1998. 1 - 33 pp.

Godino, J. Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de la Matemática. EN: Cuadrante. Vol. 2, Nº 1. 1993. 9 - 22 pp.

Godino, J., Batanero C. (Marcador De Posición 1) & Font V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros, Universidad de Granada.

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno.

Joshua, S.; Dupin, J.; Introducción a la Didáctica de las ciencias y las matemáticas. Traducción y adaptación del francés de Castrillón, G. Santiago de Cali, Universidad del Valle, IEP. Grupo de Educación Matemática, 1998.1-19 pp.

Maury, E., Palmezano, G. y Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, *10*, 1, pp. 7-16

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Molina, J. G., & Sánchez, M. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada.

Molina, M. (2006). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria, p. 135-156

Morris, K. El Pensamiento Matemático De La antigüedad a Nuestros Días I. 1991. 340p.

OCDE (2012). Resultados Pruebas Pisa 2012: Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben. Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Paladinez, D. F. (2018) Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en Problemas. Tesis para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Manizales, 2018.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking Sémiotique, Culture et Pensée Mathématique*, 103. Revista Perspectivas educativas Ibagué, Colombia. Vol. 6 enero – diciembre de 2013

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7 (2), 132- 150.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

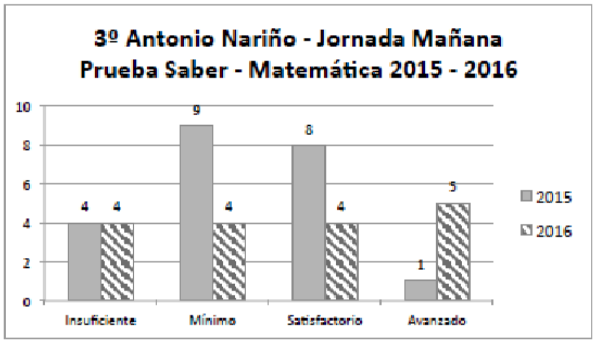
Rivera, E. y Sánchez, L. (2012) Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos. Trabajo de grado para optar al título de licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas. Universidad del Valle, Cali.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9).

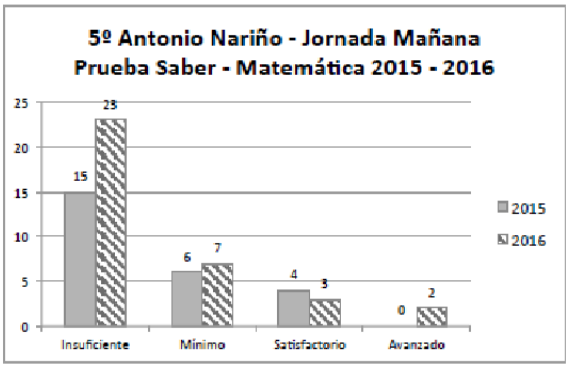
Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia: UD editorial.

Anexos

ANEXO 1: Comparativo pruebas saber 2015-2016, I.E.T.I. Donald Rodrigo Tafur, sede Antonio Nariño. Grado 3º y 5º.



Grado 3º	MATEMÁTICA 2015	MATEMÁTICA 2016
Insuficiente	4	4
Mínimo	9	4
Satisfactorio	8	4
Avanzado	1	5



Grado 5º	MATEMÁTICA 2015	MATEMÁTICA 2016
Insuficiente	15	23
Mínimo	6	7
Satisfactorio	4	3
Avanzado	0	2

Anexo 2.Modelo de Actividad No. 1.

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÀTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.1

NOMBRE: _____ FECHA: _____

ENCUESTA A ESTUDIANTES

(Actividad no. 1)

Grado: **Fecha:**

Nombre:

DIAGNÒSTICO-VARIACIÓN

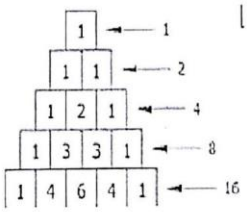
Querido estudiante, para el desarrollo de la presente actividad vas a pensar en unas palabras o términos que muy seguramente has utilizado en algunas de tus clases o en tu vida cotidiana. Los términos que se van a tratar son: **La variación y El cambio.**

Ahora piensa:

1. ¿Qué te imaginas cuando te mencionan la palabra cambio o variación? ¿Qué te imaginas cuando te mencionan que algo está cambiando o que está variando?

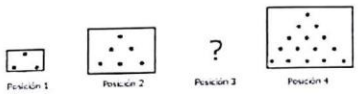
2. ¿En el área de matemáticas puedes dar tres ejemplos de cuando algo cambia? Indica lo que cambió por qué sucedió o que hizo que se presentara el cambio.

3. Observa y analiza la siguiente figura:

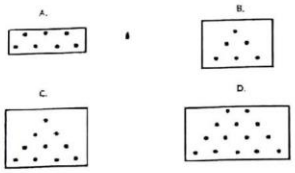


a. ¿Qué observas en la figura anterior?
b. ¿Qué sucede con los valores en cada una de las filas? Explica

Observa la secuencia de figuras formadas por puntos. En esta secuencia falta la figura que corresponde a la posición 3.



¿Cuál es la figura que corresponde a la posición 3?



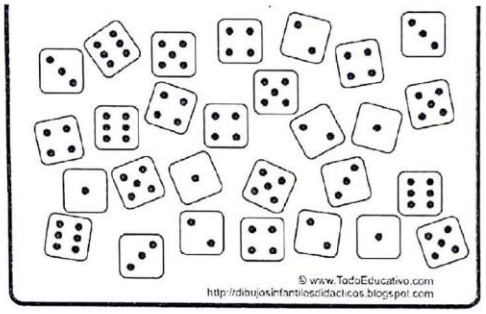
Anexo 3. Modelo de Actividad No. 2.

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.2

NOMBRE: _____ FECHA: _____

NÚMEROS PARES E IMPARES

Cristian trajo un nuevo juego al salón e invito a jugar a sus compañeros. El juego es para hacerlo en parejas y cada uno debe de decidir que fichas va a escoger. PAR O IMPAR, posteriormente se exponen las fichas y gana quien haya tomado la mayor cantidad de manera acertada en el menor tiempo posible.



Después del juego, los dos participantes responden:

1. ¿Por qué escogió las fichas pares o las impares?
2. ¿Cómo sabias que la ficha escogida, correspondia a tu elección en el juego?
3. Indica otra manera con la que se podría hacer la elección de manera correcta
4. Si los números son más grandes, por ejemplo los que se pueden formar con dos de las fichas seleccionadas (bien sea sumándolas o formando un número de dos cifras con ellas. Por ejemplo 5 + 4 = 9 ó 54 que se forma con las mismas dos fichas) ¿Cómo harías para seleccionarlo y decir que es par o impar?

Anexo 4. Modelo de Actividad No. 3

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.3

NOMBRE: _____ FECHA: _____

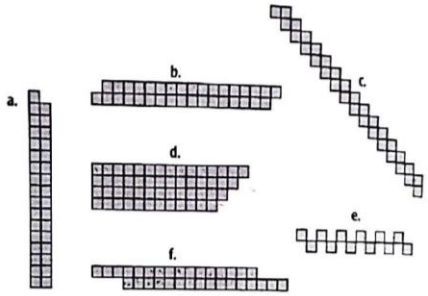
NÚMEROS PARES E IMPARES

1. ¿Cuáles son los números pares?

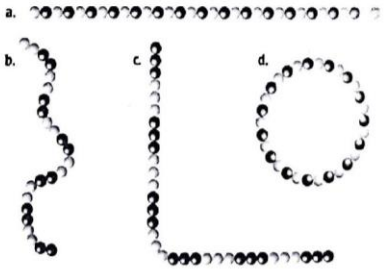
2. ¿Cuáles son los números impares?

3. Sin necesidad de contarlas, si tienes un número par o impar de figuras ¿cómo las puedes identificar?

4. Para cada uno de los siguientes casos, **indica sin contarlas**, cuál de las figuras tiene un número par o impar de cuadros. Justifica tu respuesta:



5. Nuevamente sin contar los círculos, indica si la secuencia tiene un número par o impar de elementos. Justifica tu respuesta:



Anexo 5. Modelo de Actividad No. 4

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.4

NOMBRE: _____ FECHA: _____

QUE PASA CON LA FIGURA V

Para el desarrollo de la presente actividad pueden utilizar elementos tales como: tapas de gaseosa o granitos de maíz, frijol, etc.

La actividad consiste en que se vaya formando la figura tal como se indica a continuación:

Observa muy bien la figura y el número de elementos que aparece en cada una de ellas. Responde:

a. Escribe el número de elementos que conforman cada una de las figuras:

   1.
   2.
   3.

b. Con el mismo material que se trabajó en la construcción de las figuras, realiza la figura siguiente. ¿cuántos elementos fueron necesarios? ¿Cómo lo sabes?

c. Para formar la figura no. 5 y 6. ¿Cuántos puntos, tapitas o granos de maíz serán necesarios? (realízalo en la hoja y compara tu respuesta con la que diste inicialmente).

d. Teniendo en cuenta los dibujos realizados, completa la siguiente tabla:

Lugar o puesto de la figura	Número de tapitas o granos de maíz necesarios
1	3
2	5
3	7
4	
5	
6	

e. Con la tabla anterior se puede hallar el número de elementos necesarios para formar cada figura. La figura no. 50 y la no. 100 ¿ cuántos elementos, tapitas o granos de maíz necesitan? Cómo hallaste el resultado?

Anexo 6. Modelo de Actividad No. 5.

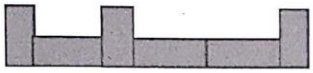
UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÀTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.5

NOMBRE: _____ FECHA: _____

REPITIENDO LAS FIGURAS VAMOS APRENDIENDO

Observa la siguiente figura: Encontraras figuras ubicadas en dos posiciones. **Horizontal y vertical.**

V: Vertical H: Horizontal



V H V H H V

Por ejemplo la secuencia anterior se puede nombrar como: VHVHHV

a. Indica con tus palabras, cómo se encuentran ubicadas (en qué posición están) las fichas en la secuencia anterior:

b. Si la secuencia se llamara: VHVHHVVHVHHV... ¿qué crees que estaría pasando con las fichas?

c. Utilizando papel cuadriculado o las fichas proporcionadas por la docente, realiza el esquema de la secuencia anterior e indica si tu respuesta del punto anterior fue correcta.

d. ¿Se repite la secuencia? Si la respuesta es que **sí,** indica en qué parte inicia y en qué parte termina la secuencia (en qué posición de las fichas).

e. Cada cuántas fichas vuelve a iniciar la secuencia.

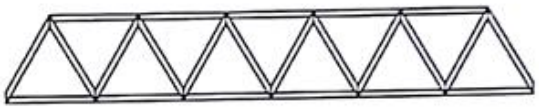
Anexo 7. Modelo de Actividad No. 6

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.6

NOMBRE: _____ FECHA: _____

APRENDIENDO CONSTRUYENDO

El siguiente juego consiste en formar una estructura lo suficientemente larga que se pueda utilizar en el puente o túnel más largo de Colombia, pero los diseñadores están preocupados porque no saben cuántas varillas de hierro se necesitan. **Ayudémosle a construir**, comprando solamente el material que se necesita. Las estructuras que se necesitan para el puente tienen la siguiente forma y se dice que tiene una longitud (largo) de **6cm.**



1. ¿Por qué se dice que la viga tiene una longitud de 6 cm, cómo se obtiene este valor?
2. Realiza el dibujo para una viga que solamente tiene 1cm de longitud. ¿De cuántas barras está compuesta?
3. Teniendo en cuenta la información anterior, completa entonces la siguiente tabla:

Dibujo de la viga	Longitud de la viga	Número de barras
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	

4. ¿Existe algún patrón?. Coincide tu respuesta del punto no.1 con la última figura de la tabla anterior? Si o no. Justifica tu respuesta:
5. Explica cómo se puede encontrar el número de varillas necesarias para fabricar las vigas de la longitud deseada. Por ejemplo si se quiere una viga de 10 cm de longitud, ¿cuantas barras se necesitan?, Y si es una viga de 20 cm y otra de 50 cm de longitud ¿cuantas varillas se necesitan? ¿Existe algún patrón? Justifica tu respuesta.

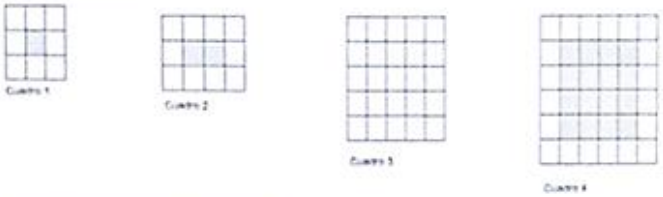
Anexo 8. Modelo de Actividad No. 7

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°
ACTIVIDAD NO 7

NOMBRE: _____ FECHA: _____

PENSEMOS PATRONES - DESCUBRIENDO VOY APRENDIENDO

1. Observa las siguientes figuras. Mira lo que sucede en cada uno de los cuadros



Describe que sucede en cada caso:

a. Cuadro 1:

b. Cuadro 2:

c. Cuadro 3:

d. Cuadro 4:

e. Cuadro 5:

f. Cuadro 7:

2. Dibuja o recorta una cuadrícula, representando los cuadros 5 y 7.

3. ¿Encontró algún patrón para formar los cuadros? Escríbelo o explica como se puede encontrar cualquier cuadro.

4. ¿Encuentras alguna relación entre los cuadros y las tablas de multiplicar?. Explícalo

Anexo 9. Modelo de Actividad No. 8

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO. 8

MOMENTO DE COMPLETAR

NOMBRE: _____ FECHA: _____

1. En el tablero del salón aparece la siguiente tira:

3	10	17	24					☆

La idea es que cada uno de los estudiantes la dibuje en su cuaderno y conteste:

a. ¿Identifica algún patrón o secuencia en la tira? ¿Cuál es?

b. Complete los valores faltantes en la tira.

c. Será posible que si continuas con la tira, ¿el número 66 aparece en algún momento?

d. Dibuja una tira con tus propios números.

2. Ahora, observa y completa las siguientes tiras:

82	72			42		22		2

a. ¿Aumenta o disminuye? ¿Qué cantidad?

b. ¿Cómo se puede obtener el número siguiente en cada caso?

	16	24		40		56		

c. ¿Aumenta o disminuye? ¿Qué cantidad?

d. ¿Cómo se puede obtener el número siguiente en cada caso?

Anexo 10. Modelo de Actividad No. 9

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO. 9

NOMBRE: _____ FECHA: _____

JUGUEMOS A PENSAR Y A CALCULAR

1. Durante la despedida del año escolar, se desea realizar un compartir, por lo tanto se va a hacer la relación (el conteo) entre el número de estudiantes que deben asistir a la escuela y el número de bombones que se deben de comprar, de tal manera que alcance completamente para todos los niños: (observa bien la tabla la operación o las operaciones que realizar para dar tu respuesta):

Número de estudiantes	Bombones	Total
1	3	3
2	6	12
	9	27
4		48
	15	75
6		108
	21	147
8		192
9		243
	30	300

2. Cada día de la semana para el descanso y también los fines de semana, a Valentina le dan una cantidad determinada de dinero. Identifiquemos en la siguiente tabla los valores correspondientes al valor recibido, teniendo en cuenta que cada día recibe el doble de lo que recibió el día anterior para saber al finalizar la semana cuanto recibe en total, dependiendo de los días transcurridos:

Día de la semana	Cantidad de dinero
1	1100
2	2200
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

3. Jugando durante el descanso, Cristian gana canicas, dependiendo de la cantidad de lanzamientos correctos que haga:

Número de Juegos	Canicas ganadas	Total
1	5	5
	10	
3		
	20	
5		
	30	
7		
	40	
9		
	50	
Total		

En el caso anterior. Si Cristian alcanza a realizar 15 juegos, ¿cuantas canicas deberá recibir? ¿Existe alguna forma especial para resolver la tabla?, ¿explica cuál es esta forma.

Anexo 11. Modelo de Actividad No. 10

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO. 10

NOMBRE: _____ FECHA: _____

MOMENTO DE CONCLUIR

1. ¿Qué se puedes concluir después de realizar las diferentes actividades?

2. ¿Encontraste alguna relación o algo similar en las actividades?

3. Unas actividades involucraban el trabajo con figuras, otras con cálculos. ¿Cuáles te parecieron más difíciles de resolver y por qué?

4. Teniendo en cuenta el punto anterior. ¿Cuáles actividades te parecieron más fáciles de resolver y por qué?

5. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es un patrón?

6. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es una secuencia?

7. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es variación?

8. Después de realizar las diferentes actividades, ¿puedes describir cómo se puede dar el cambio o la variación?

9. ¿Qué tan fáciles o difíciles te parecieron las actividades? Explica

10. ¿Qué consideras aprendiste después de todas las actividades?

Anexo 12. Modelo de la Actividad No. 1 de la Fase IV

Anexo 12a.

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.1

NOMBRES: _____

CONSTRUYENDO LA V

Figura no.1 Figura no.2 Figura no.3

Luis está formando la letra V con bolitas de cristal. En la figura 1 usa 3 bolitas, en la figura 2 usa 5 bolitas y en la figura 3 usa 7 bolitas.

a. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 4? Dibuja la figura 4.

b. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 5? Dibuja la figura 5.

c. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 10? Dibuja la figura 10

d. Ahora vas a escribir un mensaje en el que le expliques a un compañero qué debe hacer para encontrar el número de bolitas de cristal que se necesitan para formar la letra V de la figura 20 sin necesidad de dibujarla.

Anexo 12b

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.1

NOMBRES: _____

Simplificación

CONSTRUYENDO LA V

Figura no.1 Figura no.2 Figura no.3

Luis está formando la letra V con bolitas de cristal.

a. Observa muy bien las figuras. A medida que aumenta la figura, ¿qué sucede con la cantidad de bolitas de cristal que se necesitan para formarlas?

b.

c. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 4? Dibuja la figura 4.

d. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 5? Dibuja la figura 5.

e. Completa la siguiente tabla:

Figura	Número de bolas
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Anexo 12.c

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMATICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.1

NOMBRES: _____

Extensión

CONSTRUYENDO LA V

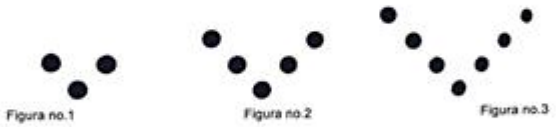


Figura no.1 Figura no.2 Figura no.3

a. Si Luis tiene 47 bolitas, ¿puede formar una letra V como las de la figura?

b. Ahora vas a escribir un mensaje en el que le expliques a un compañero qué debe hacer para encontrar el número de bolitas de cristal que se necesitan para formar la letra V de cualquier figura.

Anexo 13. Modelo de Actividad No. 2 de la Fase IV

Anexo 13a

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.2

NOMBRES: _____

Juan construye una serie de casitas con palitos de fósforos. Primero construye una casita como se muestra en la figura 1. Después añade otra casita, como se muestra en la figura 2. Posteriormente añade otra casita, como se muestra en la figura 3.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Si Juan continua construyendo las casitas, ¿Cuántos palitos de fósforo necesitaría para construir una serie de 4 casitas?

2. ¿Cuantos palitos de fósforo necesitaría para construir una serie de 10 casitas?

3. Juan tiene exactamente 76 palitos de fósforos. ¿Una serie de cuántas casitas podría construir exactamente con esta cantidad?

Anexo 13b

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.2

NOMBRES: _____

SIMPLIFICACIÒN

Juan construye una serie de casitas con palitos de fósforos. Primero construye una casita como se muestra en la figura 1. Después añade otra casita, como se muestra en la figura 2. Posteriormente añade otra casita, como se muestra en la figura 3.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Si Juan continua construyendo las casitas, ¿Cuántos palitos de fósforo necesitaría para construir una serie de 4 casitas? Dibuja la serie de casitas.

2. ¿Cuantos palitos de fósforo necesitaría Juan para construir una serie de 5 casitas? Dibuja la serie de casitas.

3. ¿Cuantos palitos de fósforo necesitaría Juan para construir una serie de 6 casitas? Dibuja la serie de casitas.

4. Completa la siguiente tabla:

Casitas en la serie	Cantidad de palitos de fósforo
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Anexo 13c

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÀTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.2

NOMBRES: _____

EXTENSIÒN

Juan construye una serie de casitas con palitos de fósforos. Primero construye una casita como se muestra en la figura 1. Después añade otra casita, como se muestra en la figura 2. Posteriormente añade otra casita, como se muestra en la figura 3.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

El papá de Juan le pide que le explique cómo haría para encontrar la cantidad de palitos de fósforos que necesita para construir cualquier serie de casitas. **Ayúdale a Juan a escribir la explicación.**

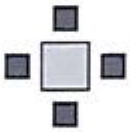
Anexo 14. Modelo de Actividad No. 3 de la Fase IV

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.3

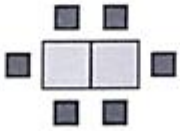
NOMBRES: _____

"CARLOS TRABAJANDO EN LA PANADERIA SANIN"

Carlos trabaja como **mesero** en la panadería Sanín del barrio Antonio Nariño. Tiene que organizar las mesas de acuerdo con los clientes que llegan. Primero llega un grupo de **4** amigos y Carlos los organiza en una mesa como se muestra en la figura:



Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:



1. Luego llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? ¿Cómo organizará las mesas, para atender a los clientes? **Explica tu respuesta:**

2. Si llegarán **20** amigos, ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? **Explica tu respuesta:**

3. Si llegan **42** amigos ¿podría Carlos organizarlos a todos juntos sin que quede ninguno de pie si sólo tiene 17 mesas? **Explica tu respuesta:**

Anexo 14a

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.3

NOMBRES: _____

SIMPLIFICACIÒN

"CARLOS TRABAJANDO EN LA PANADERIA SANIN"

Carlos trabaja como **mesero** en la panaderia Sanín del barrio Antonio Nariño. Tiene que organizar las mesas en la panadería de acuerdo con los clientes que llegan. Primero llega un grupo de **4** amigos y Carlos organiza una mesa como se muestra en la figura:

Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:

1. Si llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos para poder atender a sus clientes? **Explica tu respuesta:**

2. Luego llegan **10** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos para poder atender a sus clientes? **Explica tu respuesta:**

3. Ayudémosle a Carlos completando la siguiente tabla, a saber cuántas mesas necesita organizar dependiendo del número de personas que lleguen a la panadería, ¿cuántas mesas necesitará para cualquier ocasión?, por ejemplo si llegan 50 personas, ¿cuántas mesas necesita organizar Carlos? **Explica tu respuesta y cómo llenaste la tabla:**

Número de personas	Número de mesas
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	
26	
30	

Anexo 14b

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3ª.
ACTIVIDAD NO.3

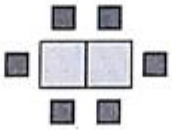
NOMBRES:

EXTENSIÒN

"CARLOS TRABAJANDO EN LA PANADERIA SANIN"

Carlos trabaja como **mesero** en la panadería Sanín del barrio Antonio Nariño. Tiene que organizar las mesas en el restaurante de acuerdo con los clientes que llegan. Primero llega un grupo de **4** amigos y Carlos organiza una mesa como se muestra en la figura:

Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:



1. Se va a celebrar en la panadería el cumpleaños de Brenda. De manera general, **¿Cómo puede saber Carlos cuántas mesas debe acomodar, dependiendo del número de personas que lleguen? Explica tu respuesta:**

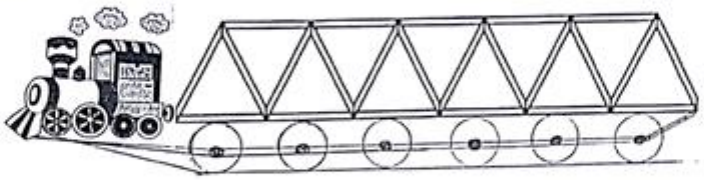
Anexo 15. Modelo de Actividad No. 4 de la Fase IV

UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.4

NOMBRES: _____

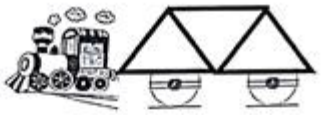
EL TRENCITO DIVERTIDO

Se desea construir un tren. Para ello se deben unir los vagones a la cabina, tal como se muestra en la siguiente figura, donde hay un tren que tiene 6 vagones:

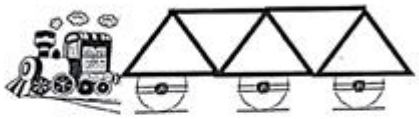


Si se sabe que:

1 vagón está compuesto por 3 barras



2 vagones están compuesto por 7 barras



3 vagones están compuesto por 11 barras

. Cómo puedo saber ¿cuántas barras se necesitan para formar un tren con 10 vagones? **Explica tu respuesta**

Anexo 15a

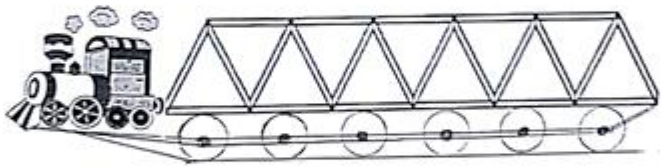
UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÁTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.4

NOMBRES: _____

Simplificación

EL TRENCITO DIVERTIDO

Se desea construir un tren. Para ello se deben unir los vagones a la cabina, tal como se muestra en la figura, donde se puede observar un tren que tiene 6 vagones:



1. A partir de la figura anterior, **completar la siguiente tabla**

NÚMERO DE VAGONES DEL TREN	NÚMERO DE BARRAS
1	
2	
4	
6	
10	
12	

Explica cómo se encontró el número de barras necesarias en la tabla anterior:

2. Después de realizar la anterior tabla anterior, indica ¿cuántas barras se necesitan para construir los 20 vagones de un tren? **Explica tu respuesta:**

Anexo 15b

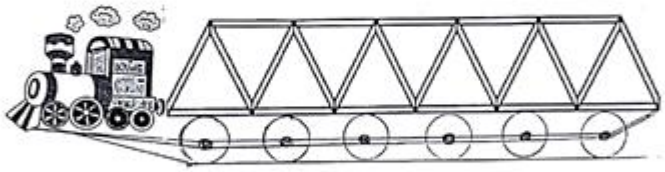
UNIDAD DIDACTICA: PENSAMIENTO VARIACIONAL
MATEMÀTICAS: 3°.
ACTIVIDAD NO.4

NOMBRES: _____

Extensión

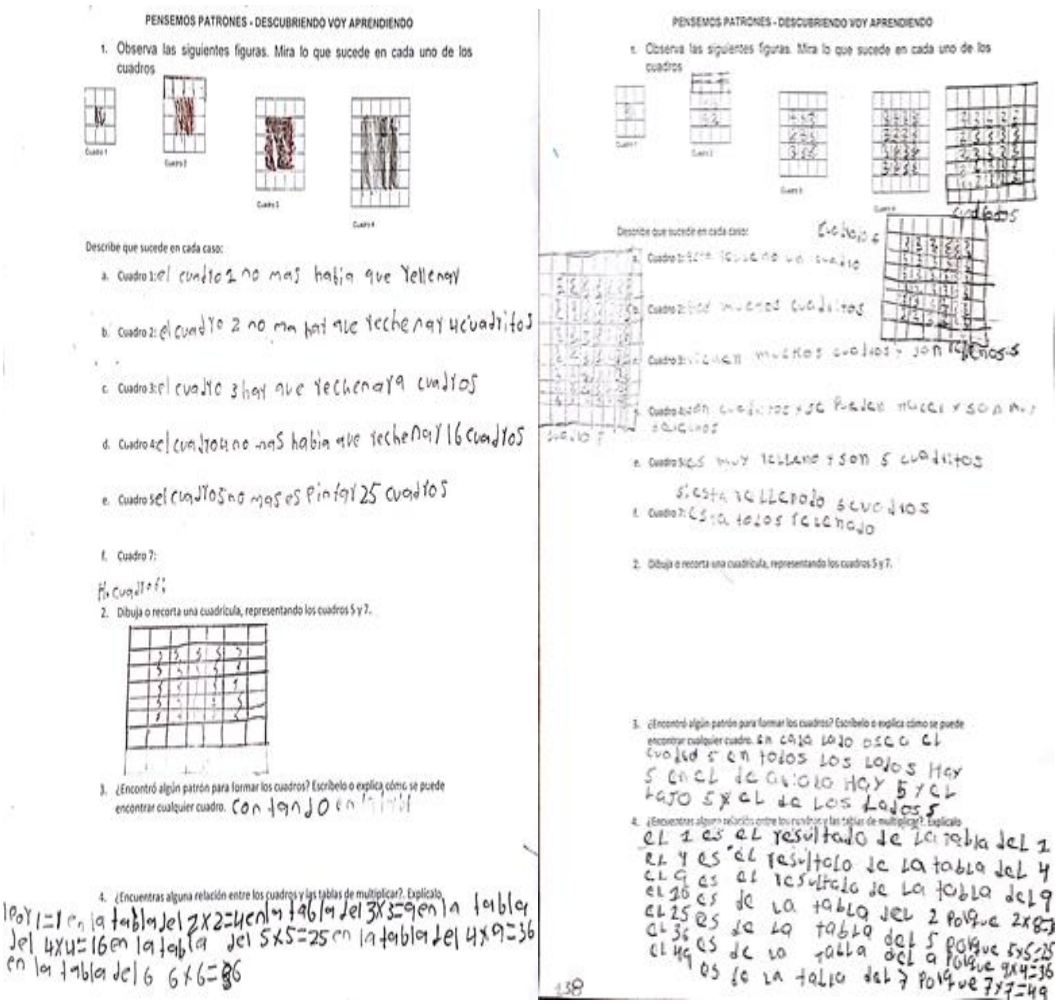
EL TRENCITO DIVERTIDO

Se desea construir un tren donde sus vagones miden 6 cm de longitud (largo). tal como se muestra en la figura y para ello se deben unir los vagones de la siguiente forma:



1. Si se sabe que el tren de 1 vagón está compuesto por 3 barras, el de 2 vagones está compuesto por 7 barras, el de 3 vagones está compuesto por 11 barras. ¿Cómo puedo saber cuántas barras se necesitan para formar un tren de cualquier número de vagones? **Explica tu respuesta**

Anexo 16. Evidencias de la actividad 7 de la Fase III



PENSEMOS PATRONES - DESCUBRIENDO VOY APRENDIENDO

1. Observa las siguientes figuras. Mira lo que sucede en cada uno de los cuadros

Describe que sucede en cada caso:

a. Cuadro 1: el cuadro 1 no mas habia que rellenar

b. Cuadro 2: el cuadro 2 no ma hay que rechenar 4 cuadritos

c. Cuadro 3: el cuadro 3 hay que rechenar 9 cuadros

d. Cuadro 4: el cuadro 4 no mas habia que rechenar 16 cuadros

e. Cuadro 5: el cuadro 5 no mas es pintar 25 cuadros

f. Cuadro 7:

2. Dibuja o recorta una cuadrícula, representando los cuadros 5 y 7.

3. ¿Encontró algún patrón para formar los cuadros? Escríbelo o explica cómo se puede encontrar cualquier cuadro. contando en la tabla

4. ¿Encuentras alguna relación entre los cuadros y las tablas de multiplicar?. Explícalo

1 por 1=1 en la tabla del 2x2=4 en la tabla del 3x3=9 en la tabla del 4x4=16 en la tabla del 5x5=25 en la tabla del 4x9=36 en la tabla del 6 6x6=36

PENSEMOS PATRONES - DESCUBRIENDO VOY APRENDIENDO

1. Observa las siguientes figuras. Mira lo que sucede en cada uno de los cuadros

Describe que sucede en cada caso:

a. Cuadro 1: esta relleno un cuadro

b. Cuadro 2: hay muchos cuadritos

c. Cuadro 3: tienen muchos cuadros y son rellenos

d. Cuadro 4: son cuadritos y se pueden hacer y son muy rellenos

e. Cuadro 5: es muy relleno y son 5 cuadritos

f. Cuadro 7: si esta rellenado 6 cuadros esta todos relenado

2. Dibuja o recorta una cuadrícula, representando los cuadros 5 y 7.

3. ¿Encontró algún patrón para formar los cuadros? Escríbelo o explica cómo se puede encontrar cualquier cuadro. en cada lado o sea el cuadro 5 en todos los lados hay 5 en el de arriba hay 5 y el lado 5 y el de los lados 5

4. ¿Encuentras alguna relación entre los cuadros y las tablas de multiplicar?. Explícalo

el 1 es el resultado de la tabla del 1
el 4 es el resultado de la tabla del 4
el 9 es el resultado de la tabla del 9
el 16 es de la tabla del 2 porque 2x8=16
el 25 es de la tabla del 5 porque 5x5=25
el 36 es de la tabla del 9 porque 9x4=36
el 49 es de la tabla del 7 porque 7x7=49

Anexo 17. Evidencias de las respuestas en la actividad 10 de la Fase III

MOMENTO DE CONCLUIR

1. ¿Qué se puedes concluir después de realizar las diferentes actividades?
Porque eran Faciles

2. ¿Encontraste alguna relación o algo similar en las actividades?
Que en la no se podia contar ni en la 2

3. Unas actividades involucraban el trabajo con figuras, otras con cálculos. ¿Cuáles te parecieron más difíciles de resolver y por qué? en la primera porque uno no tenia que contar

4. Teniendo en cuenta el punto anterior. ¿Cuáles actividades te parecieron más fáciles de resolver y por qué? por que uno tenia que multiplicar para saberla responder

5. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es un patrón?
un pantron lo un cuentra multiplicando

6. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es una secuencia?
donde se suma

7. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es variación?
Porque hay que contar de 1 e 2 o de 3 en 3

8. Después de realizar las diferentes actividades, ¿puedes describir cómo se puede dar el cambio o la variación? Sumado Restando multiplicando

9. ¿Qué tan fáciles o difíciles te parecieron las actividades? Explica no estaban Fasiles porque habia que leer

10. ¿Qué consideras aprendiste después de todas las actividades? Que habia que leer para poder responder

MOMENTO DE CONCLUIR

1. ¿Qué se puedes concluir después de realizar las diferentes actividades?
bien y estubieron muy bacanas y me gustaron mucho

2. ¿Encontraste alguna relación o algo similar en las actividades?
si encontre que uno habia que saberse las tabla

3. Unas actividades involucraban el trabajo con figuras, otras con cálculos. ¿Cuáles te parecieron más difíciles de resolver y por qué? las de calculo porque habia qu calcular y me fuidan cuenta

4. Teniendo en cuenta el punto anterior. ¿Cuáles actividades te parecieron más fáciles de resolver y por qué? los calculos porque habia que calcular y estaba muy dificil

5. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es un patrón?
un patron es como una clave

6. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es una secuencia?
una secuencia es que no hay que contar

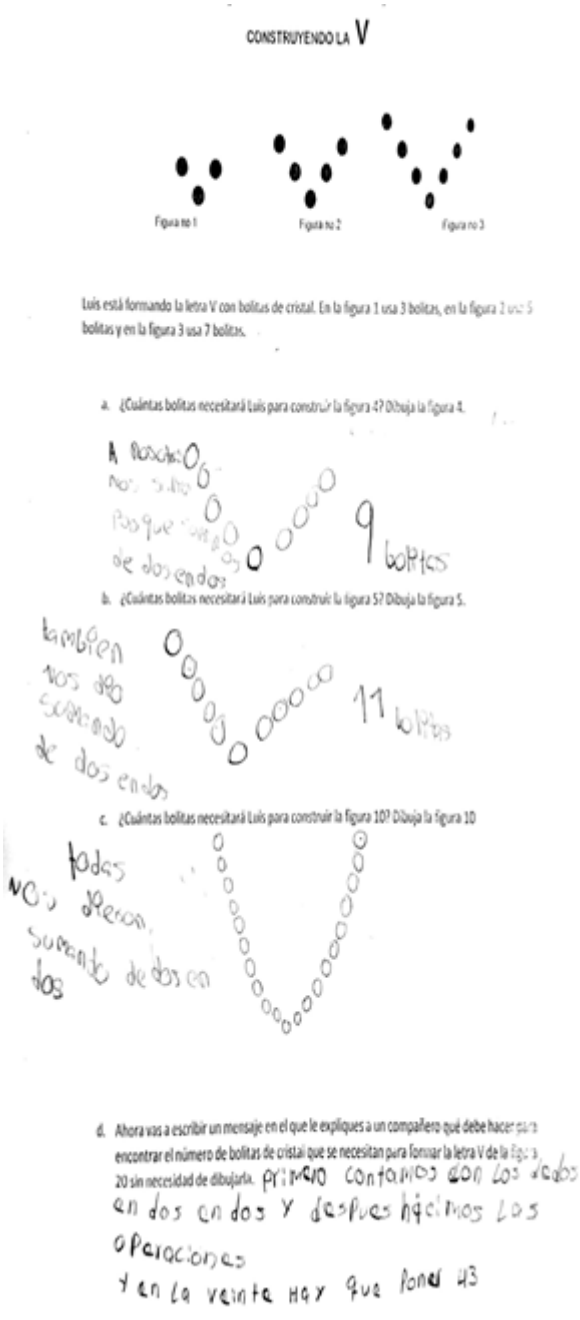
7. Después de realizar las diferentes actividades, puedes describir ¿Qué es variación?
una variacion es que es intercambiar una cosa o objeto

8. Después de realizar las diferentes actividades, ¿puedes describir cómo se puede dar el cambio o la variación? puesto descarbiando

9. ¿Qué tan fáciles o difíciles te parecieron las actividades? Explica
no me parecieron ni facil ni dificil porque lo entendi

10. ¿Qué consideras aprendiste después de todas las actividades?
aprendi que era un patron y una variacion

Anexo 18. Evidencias de la actividad 1 de la Fase IV



CONSTRUYENDO LA V

Figura no 1 Figura no 2 Figura no 3

Luis está formando la letra V con bolitas de cristal. En la figura 1 usa 3 bolitas, en la figura 2 usa 5 bolitas y en la figura 3 usa 7 bolitas.

a. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 4? Dibuja la figura 4.

A nosotros nos sumo porque sumamos de dos en dos

9 bolitas

b. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 5? Dibuja la figura 5.

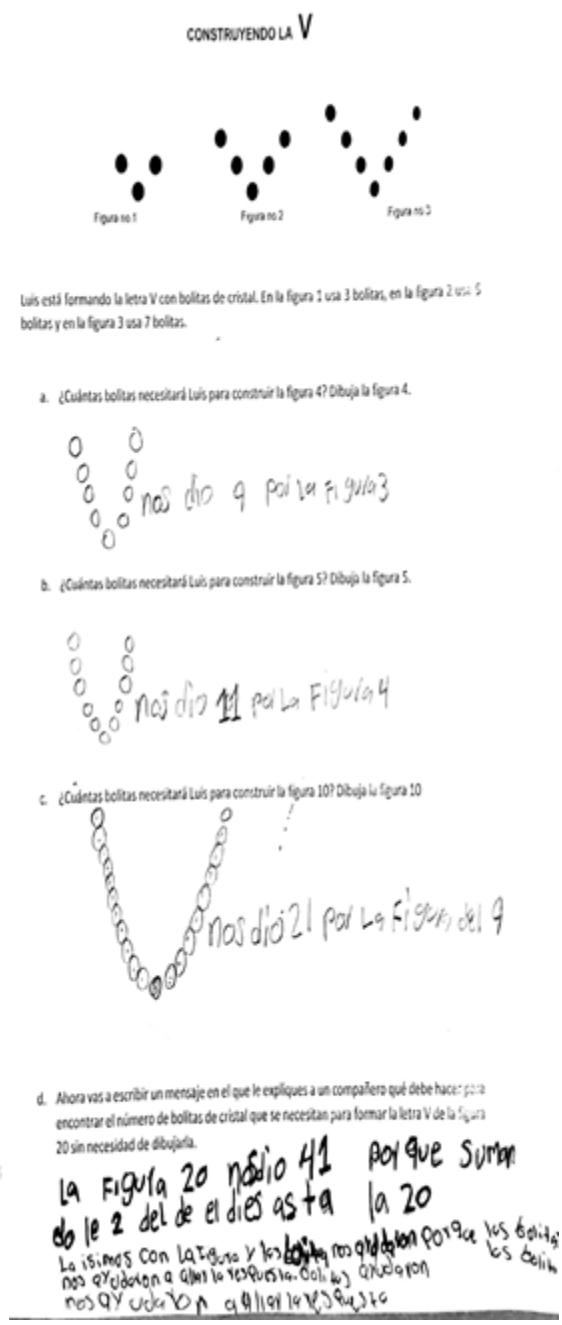
tambien nos dio sumando de dos en dos

11 bolitas

c. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 10? Dibuja la figura 10

todas nos dieron sumando de dos en dos

d. Ahora vas a escribir un mensaje en el que le expliques a un compañero qué debe hacer para encontrar el número de bolitas de cristal que se necesitan para formar la letra V de la figura 20 sin necesidad de dibujarla. primero contamos con los dedos en dos en dos y despues hacimos las operaciones y en la veinte hay que poner 43



CONSTRUYENDO LA V

Figura no 1 Figura no 2 Figura no 3

Luis está formando la letra V con bolitas de cristal. En la figura 1 usa 3 bolitas, en la figura 2 usa 5 bolitas y en la figura 3 usa 7 bolitas.

a. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 4? Dibuja la figura 4.

nos dio 9 por la figura 3

b. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 5? Dibuja la figura 5.

nos dio 11 por la Figura 4

c. ¿Cuántas bolitas necesitará Luis para construir la figura 10? Dibuja la figura 10

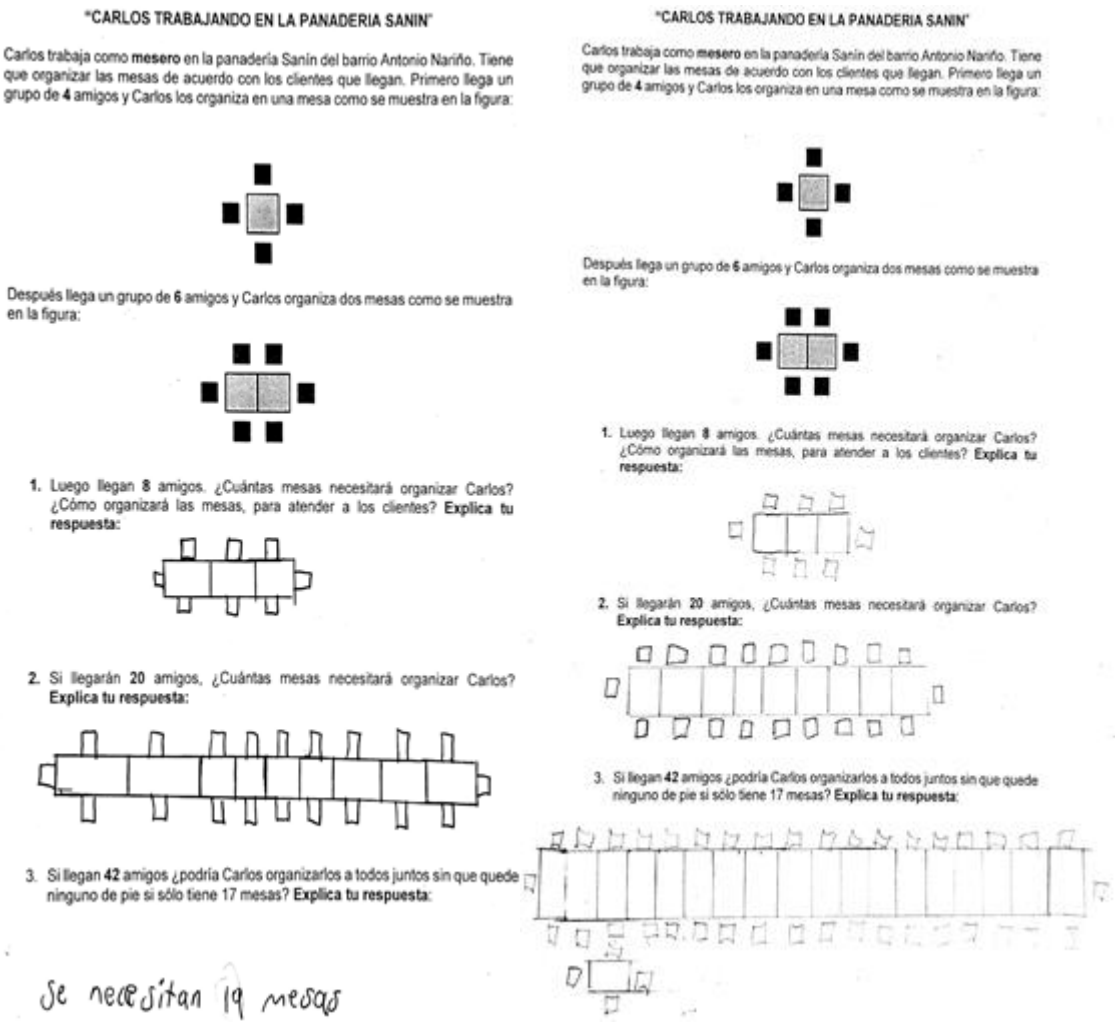
nos dio 21 por la Figura del 9

d. Ahora vas a escribir un mensaje en el que le expliques a un compañero qué debe hacer para encontrar el número de bolitas de cristal que se necesitan para formar la letra V de la figura 20 sin necesidad de dibujarla.

La Figura 20 nos dio 41 porque sumando le 2 del de el dies asta la 20

La isimos con la figura y las bolitas nos ayudaron porque las bolitas nos ayudaron a allar la respuesta. Bolitas ayudaron nos ayudaron a allar la respuesta

Anexo 19. Ejemplo de las respuestas de un estudiante en la actividad 3 de la Fase IV



"CARLOS TRABAJANDO EN LA PANADERIA SANIN"

Carlos trabaja como **mesero** en la panadería Sanín del barrio Antonio Nariño. Tiene que organizar las mesas de acuerdo con los clientes que llegan. Primero llega un grupo de **4** amigos y Carlos los organiza en una mesa como se muestra en la figura:

Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:

1. Luego llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? ¿Cómo organizará las mesas, para atender a los clientes? **Explica tu respuesta:**

2. Si llegarán **20** amigos, ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? **Explica tu respuesta:**

3. Si llegan **42** amigos ¿podría Carlos organizarlos a todos juntos sin que quede ninguno de pie si sólo tiene 17 mesas? **Explica tu respuesta:**

Se necesitan 19 mesas

"CARLOS TRABAJANDO EN LA PANADERIA SANIN"

Carlos trabaja como **mesero** en la panadería Sanín del barrio Antonio Nariño. Tiene que organizar las mesas de acuerdo con los clientes que llegan. Primero llega un grupo de **4** amigos y Carlos los organiza en una mesa como se muestra en la figura:

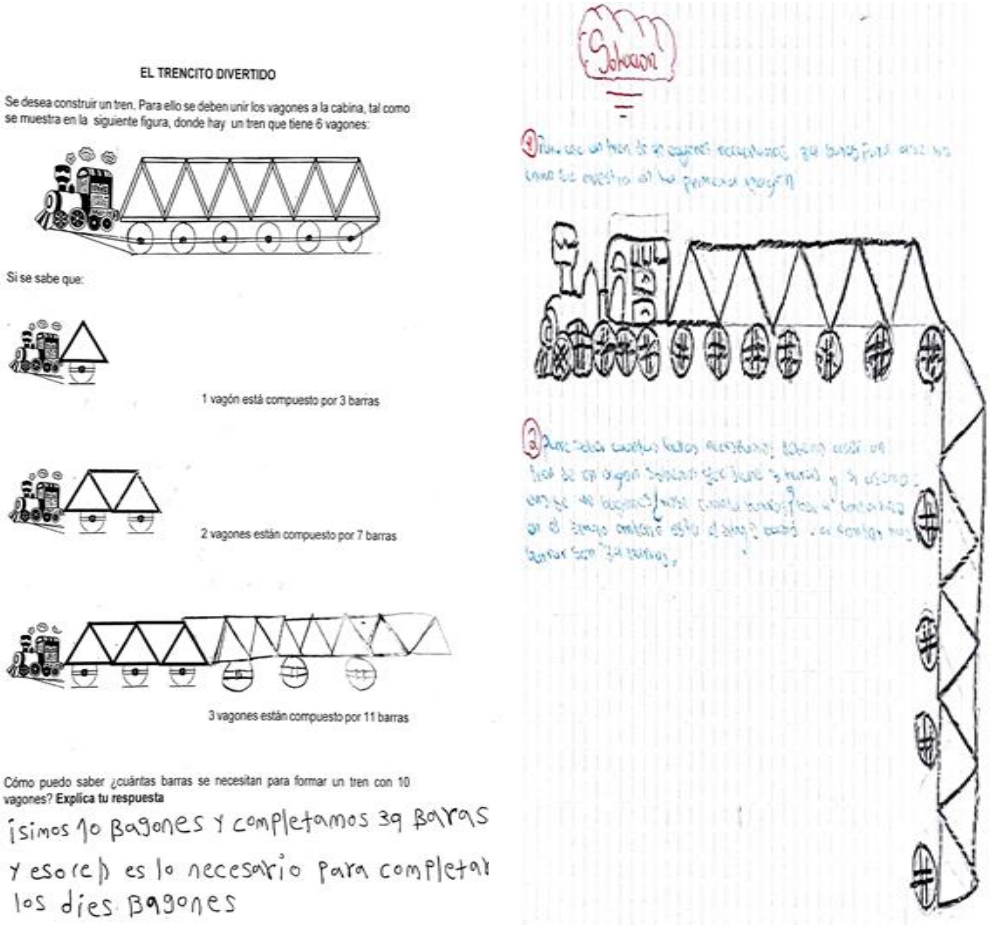
Después llega un grupo de **6** amigos y Carlos organiza dos mesas como se muestra en la figura:

1. Luego llegan **8** amigos. ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? ¿Cómo organizará las mesas, para atender a los clientes? **Explica tu respuesta:**

2. Si llegarán **20** amigos, ¿Cuántas mesas necesitará organizar Carlos? **Explica tu respuesta:**

3. Si llegan **42** amigos ¿podría Carlos organizarlos a todos juntos sin que quede ninguno de pie si sólo tiene 17 mesas? **Explica tu respuesta:**

Anexo 20. Respuestas de los estudiantes en la actividad 4 de la Fase IV



EL TRENCITO DIVERTIDO

Se desea construir un tren. Para ello se deben unir los vagones a la cabina, tal como se muestra en la siguiente figura, donde hay un tren que tiene 6 vagones:

Si se sabe que:

1 vagón está compuesto por 3 barras

2 vagones están compuesto por 7 barras

3 vagones están compuesto por 11 barras

Cómo puedo saber ¿cuántas barras se necesitan para formar un tren con 10 vagones? **Explica tu respuesta**

¡Simos 10 bagones y completamos 39 barras y eso es lo necesario para completar los dies bagones

Solución

Extensión

EL TRENCITO DIVERTIDO

Se desea construir un tren donde sus vagones miden 6 cm de longitud (largo), tal como se muestra en la figura y para ello se deben unir los vagones de la siguiente forma:

1. Si se sabe que el tren de 1 vagón está compuesto por 3 barras, el de 2 vagones está compuesto por 7 barras, el de 3 vagones está compuesto por 11 barras. ¿Cómo puedo saber cuántas barras se necesitan para formar un tren de cualquier número de vagones? **Explica tu respuesta**

Para sabe cuantas barras necesitamos, debemos hacer un bagon de un tren sabemos que tiene 3 Barras y si sabemos que un tren de 10 Bagones ¿no se cuantas Barras hay? Boy ha contarlas en el dibujo anterior esta el dibujo de un tren hay 10 Bagones a contar las Barras del tren son 39 Barras.