UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov sobre el cilindro

Carolina Albarracín Hernández

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2021

El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov sobre el cilindro

Carolina Albarracín Hernández

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias - Matemáticas

Director:
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2021

A mi familia, en especial a Leonor mi Mamá.

Agradecimientos

Al Profesor Guillermo Rodríguez Blanco por su orientación y paciencia, a mis compañeros, profesores y amigos que me acompañaron en este proceso. Y por supuesto a Colciencias.

Resumen

En el presente trabajo, estudiamos cuestiones relacionadas al buen planteamiento local, del problema de valor inicial asociado a la ecuación diferencial parcial,

$$u_t - \partial_x(D_x^{\alpha+1}u \pm D_y^{\beta+1}u) + u^p u_x = 0, \tag{0-1}$$

donde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, en los espacios de Sobolev estandar, anisotrópicos y con pesos en $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ y en $\mathbb{T}^2$. Para dicho fin, usamos regularización parabólica, estimativas de Strichartz localizadas y de energía, junto con un argumento de compacidad, como también estimativas del conmutador y propiedades notables de la derivada de Stein. Además, probamos la existencia de cierto tipo de onda solitaria en el cilindro.

Palabras clave: EDP,Espacios de Sobolev, Buen planteamiento local .

Title

The Cauchy problem associated with a generalization of the Zakharov-Kuznetsov equation on the cylinder.

Abstract

In this work, we study questions related to the local well-posedness for the initial value problem associated to the partial differential equation,

$$u_t - \partial_x(D_x^{\alpha+1}u \pm D_y^{\beta+1}u) + u^p u_x = 0, \tag{0-2}$$

where $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ and $p \in \mathbb{Z}^+$, in the standard, anisotropic and weighted Sobolev spaces in $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ and $\mathbb{T}^2$. For this purpose, we use parabolic regularization, localized Strichartz and energy estimates, together with a compactness argument, as well as, commutator estimates and remarkable properties of the Stein derivative. In addition, we show the existence of certain type of solitary wave in the cylinder.

Keywords: PDE, Sobolev's spaces, Local well possednes

Contenido

Agradecimientos v

Resumen vii

Introducción 1

1 Preliminares 7

2 ZK generalizada en el espacio $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 26
- 2.1 Buen Planteamiento Local $H^s, s>2$ . . . 26
  - 2.1.1 Existencia y Unicidad de la Solución . . . 31
  - 2.1.2 Dependencia Continua (Aproximación Bona-Smith) . . . 35
- 2.2 Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad . . . 41
  - 2.2.1 Estimativa de Energía . . . 41
  - 2.2.2 Estimativa Strichartz Localizada . . . 43

3 ZK generalizada en espacios Anisotrópicos $H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 59
- 3.1 Buen Planteamiento Local $r_1, r_2 > 2$ . . . 59
- 3.2 Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad . . . 61
  - 3.2.1 Estimativa de Energía . . . 61

4 ZK generalizada en espacios Anisotrópicos con peso $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ 65
- 4.1 Buen Planteamiento Local . . . 65
- 4.2 Continuación Única . . . 84
- 4.3 Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad . . . 90

5 ZK generalizada en el espacio $H^s(\mathbb{T}^2)$ 96
- 5.1 Estimativa de energía . . . 96
- 5.2 Estimativa Strichartz Localizada . . . 97

6 Ondas Solitarias para la ZK generalizada en el caso $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 106

Bibliografía 116

Índice alfabético 120

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas, son ecuaciones diferenciales parciales y en este contexto, dispersión significa que las ondas de diferente longitud de onda se propagan a diferente velocidad de fase. Dichas ecuaciones son utilizadas en gran medida para modelar fenómenos que ocurren en mecánica de fluidos (ver [50]), fibra óptica (ver [1], [31]) y física del estado sólido (ver [54]), entre otras. Unas de las ecuaciones más importantes de este tipo son, la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) (ver [38]), la ecuación de Schrödinger (ver [26], [46]), la ecuación Benjamin-Ono (BO) (ver [6], [57]), la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (ver [10]), la ecuación Camassa-Holm (ver [60]), el modelo de Brinkman (ver [59]), etc; que son de gran importancia tanto en Física como en Matemática. El interés que tienen dichas ecuaciones, desde el punto de vista de las Matemáticas radica en resolver cuestiones tales como buen planteamiento local y global, existencia y estabilidad de ondas solitarias, principios de continuación única, propagación de regularidad, etc. Estos problemas han sido tratados por diferentes autores; para la ecuación KdV (ver [25], [29], [33], [34], [35]) y para la ecuación BO (ver [17], [26], [27], [63]).

En este trabajo, trataremos cuestiones tales como buen plantemiento local, existencia de ondas solitarias, principios de continuación única del problema de valor inicial (PVI) asociado a

$$u_t - \partial_x(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u) + u^p u_x = 0, \tag{0-3}$$

donde, $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}$, con $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ el toro uno-dimensional, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $D_x^{1+\alpha}$ es la $(1+\alpha)$-esima derivada homogénea en la variable x, definida vía transformada de Fourier por, $\widehat{D_x^{1+\alpha}u}(\xi,n) := |\xi|^{1+\alpha}\hat{u}(\xi,n)$ y análogamente se define $D_y^{1+\beta}$ para la variable y. Que corresponde a una generalización de la ecuación no lineal Zakharov-Kuznetzov en el cilindro.
Cuando $\alpha=\beta=p=1$ y signo mas, (0-3) corresponde a la ecuación Zakharov- Kuznetsov (ZK), que es una generalización bi-dimensional de la ecuación Korteweg de Vries (KdV) y modela un fenómeno que ocurre en Física de Plasma, vea [65], donde, formalmente dedujeron que la propagación de ondas ion-acústicas no lineales en plasma magnetizado en un espacio tri-dimensional está gobernado por la ecuación,

$$u_t + \partial_x\Delta u + uu_x = 0. \tag{0-4}$$

Para el caso bi-dimensional, Laedke y Spatschek dedujeron la ecuación (0-4) a partir de las ecuaciones hidródinamicas básicas (ver [39]). También, Lannes, Linares y Saut realizaron una justificación rigurosa de la ecuación ZK para dimensiones 2 y 3 (ver[40]). El buen planteamiento, para esta ecuación, ha

sido objeto de amplia investigación por muchos autores, entre ellos, Famiskii que adapta el método de Kenig Ponce y Vega para la ecuación KdV y en [16] probó el buen planteamiento local y global para la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \geq 1$. Biangioni y Linares en [7] usando el principio de contracción establecen, buen planteamiento global y local para la ecuación ZK modificada en $H^1(\mathbb{R}^2)$. Ya que el método de Famiskii no trabaja en el caso 3D. Linares y Saut en [47] usan la estrategia de Koch y Tzvetkov (Strichartz en tiempos cortos junto con un argumento de compacidad) para la ecuación BO, logrando así un buen planteamiento local para la ecuación ZK en $H^{\frac{3}{2}+}(\mathbb{R}^3)$. Posteriormente, Linares y Pastor en [43] y [42] establecen buen planteamiento local para la ZK y la mZK en 2D en $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > \frac{3}{4}$, aplicando el principio de contracción que empleó Kenig, Ponce y Vega para la ecuación KdV generalizada. Además, Linares, Pastor y Saut en [47], adaptan el método de Ionescu y Kenig usado para la ecuación KP-I y establecen buen planteamiento local para la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, $s > \frac{3}{2}$. En [52] Molinet y Pilod obtienen buen planteamiento local para la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ y $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 1$ y $s > \frac{1}{2}$ respectivamente. El ingrediente principal de la prueba es una estimación bilineal de Strichartz en tiempos cortos en el contexto de los espacios de Bourgain. En el caso puramente periódico, Linares y et. al. en [41] usando un método de compacidad estandar, establecen buen planteamiento local para la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{T}^2)$, $s > \frac{5}{3}$. En [62] Shippa adapta al caso periódico argumentos bilineales de [21] y usando estimativas de Strichartz bilineales en tiempos cortos, logra buen planteamiento para $s > \frac{3}{2}$. Recientemente Kinoshita y Shippa en [36]con un nuevo ingrediente, la desigualdad no lineal de tipo Loomis-Whitney logra buen planteamiento local para la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{T}^2)$, $s > 1$.

Cuando $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y signo mas, la ecuación (0-3) corresponde a la ecuación Benjamin- Ono-Zakharov-Kuznetsov, que tiene aplicaciones para la electromigración en nanoconductores delgados sobre un sustrato dieléctrico y puede ser vista como una generalización de la ecuación Benjamin-Ono en dos dimensiones y su buen planteamiento ha sido tratado en ([12] y en las referencias contenidas allí). Cuando $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta = 1$ y signo mas, la ecuación (0-3) corresponde a la ecuación BOZK generalizada,

$$u_t - D_x^{1+\alpha} u_x + u_{xyy} + u u_x = 0, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{0-5}$$

Ribaud y Vento en [19], demuestran buen planteamiento local para la ecuación (0-5) en $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > \frac{2}{1+\alpha} - \frac{3}{4}$. La prueba es basada en espacios de Burgain en tiempos cortos combinada con una nueva estimativa Strichartz y un espacio de energia modificado.

El concepto de buen planteamiento que usaremos esencialmente constará de tres aspectos: existencia de soluciones, unicidad de la solución y dependencia continua en espacios adecuados. Aunque no hay una unificación con respecto a este concepto en nuestro caso hemos usado el concepto tratado por Kato en [29], Iorio en [26] pág 263, Iorio y Nunes en [24] pág 4, Linares y Ponce en [46] pág 96, Tao en [64] pág 121 y Angulo en [58] pág 49. Existen diferentes técnicas para tratar este tipo de problemas, las mas notables son; de regularización, teoría de Kato, teoría de Bourgain- Kenig-Ponce-Vega y métodos de compacidad. En nuestro caso, usaremos regularización (ver [26] capítulo 6) y una combinación de la teoría de Bourgain-Kenig-Ponce-Vega [46] y con la de compacidad [29]. De manera mas precisa, se usa el método de estimaciones de Strichartz en tiempos cortos introducida por Koch y Tzvetkov

en [37] para la ecuación BO en $\mathbb{R}$, extendida a $\mathbb{R}^2$ por Kenig para la KP-I en [32] y posteriormente adaptada con estimativas Strichartz localizadas por Ionescu y Kenig en [23] para la KP-I de tercer y quinto orden en $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^2$. Así, mediante estimativas de energía, estimativas a priori y el teorema de Banach-Alaoglu, podremos obtener la solución de (0-3) en el sentido distribucional como límite de soluciones que son más regulares.
Además, observamos que el PVI asociado a (0-3) satisface al menos las siguientes cantidades conservadas:

$$Q(u)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} u^2dxdy \tag{0-6}$$

y

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\left(\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}u\right)^2\pm\left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2-2\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right)dxdy, \tag{0-7}$$

las cuales ayudarían a extender la solución local a una global en los espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{\frac{1+\alpha}{2},\frac{1+\beta}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Desafortunadamente, nuestros resultados locales no son tan óptimos para tal fin.
Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, se establece la notación, definiciones y resultados previos. En el capítulo 2, haciendo uso de la regularización parabólica y las ideas de Bona-Smith se prueba,

Teorema 0.1.
Sean, $0\leq\alpha,\beta\leq 1$ y $s>2$. Entonces, el problema de valor inicial (2-1) esta localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.

Además, se establece el buen planteamiento local y global del problema regularizado en espacios de Sobolev con índices negativos. Posteriormente, estimativas de energía y Strichartz localizados, junto con un argumento de compacidad nos conducen a los siguientes teoremas;

Teorema 0.2.
Sean, $\beta=0,1$, $0\leq\alpha\leq 1$ (cuando $\beta=0$, $\alpha>\frac{1}{3}$), $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $s>\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$. Entonces, existe un $T=T(\|\phi\|_{H^s})$ y una única solución del PVI (2-1), tal que $u\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ y $u,\ \partial_x u,\ \partial_y u\in L^1_T L^\infty$. Además, la aplicación $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\mapsto u\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ es continua.

Teorema 0.3.
Sean, $\alpha=\beta$, $\frac{1}{3}<\alpha\leq 1$, $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $s>(\frac{5-\alpha}{4})(\frac{7-\alpha}{4})$. Entonces, existe un $T=T(\|\phi\|_{H^s})$ y una única solución del PVI (2-1), tal que $u\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ y $u,\ \partial_x u,\ \partial_y u\in L^1_T L^\infty$. Además, la aplicación $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\mapsto u\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ es continua.

En el capitulo 3, se establece buen planteamiento local para (0-3) en espacios anisotrópicos a partir del método de regularización parabólica. Más exactamente, probamos:

Teorema 0.4.
Sean, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\phi \in H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *con* $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} < 2$ *y* $r_1, r_2 > 2$. *Entonces, existe un tiempo* $T = T\left(\|\phi\|_{r_1,r_2}, M\right) > 0$ *y una función* $u \in C\left([0,T]; H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$ *que satisface el PVI (2-1) y la aplicación dato-solución es continua.*

Al usar nuevamente el Strichartz localizado (ver capítulo 1) se logra obtener un mejor resultado de buen planteamiento local en espacios Anisotropicos de mas baja regularidad, en particular en la variable x.

Teorema 0.5.
Sean, $\beta = 0, 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, *(cuando* $\beta = 0$, $\alpha > \frac{1}{3}$*),* $\phi \in H^{r_1,r_2}$, $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$, $r_2 > \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ *tal que* $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1}+\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$. *Entonces, existe un* $T = T(\|\phi\|_{H^{r_1r_2}})$ *y una única solución* u *del PVI (2-1) tal que* $u \in C\left([0,T]; H^{r_1,r_2}\right)$ *y* u, u_x *y* $u_y \in L^1_T L^\infty$. *Además, la aplicación dato solución es continua.*

En el capítulo 4, se estudia la decaída de la solución y se establecen principios de continuación única, haciendo uso de lo obtenido en espacios anisotrópicos donde $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} < 2$ y $r_1, r_2 > 2$. Es decir, probamos:

Teorema 0.6.
Sean, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} < 2$. *Entonces,*

1. *Si* $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *con* $r_1 > max\{(\alpha+1)r, 2\}$, $r_2 > max\{(\beta+1)r, 2\}$ *y* $0 \leq r < \frac{5}{2}+\alpha$, *entonces, el PVI asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$
2. *Si* $\phi \in \widetilde{\mathcal{F}}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *con* $r_1 > (\alpha+1)r$, $r_2 > (\beta+1)r$ *y* $\frac{5}{2}+\alpha \leq r < \frac{7}{2}+\alpha$, *entonces, el PVI asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\widetilde{\mathcal{F}}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$,

Teorema 0.7.
Sean, $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1, u \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *con* $0 \leq r < \frac{5}{2}+\alpha$, $r_1 > max\{(\alpha+1)r, 2\}$, $r_2 > max\{(\beta+1)r, 2\}$. *Si para dos tiempos* $t_1 = 0 < t_2 < T$ *se tiene que* $u(t_i) \in \mathcal{F}^{r_1,r_2}_{\frac{5}{2}+\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ $i = 1, 2$, *entonces,* $\hat{u}(0, n, t) = 0$ *para todo* n.

y

Teorema 0.8.
Sean, $0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1, u \in \widetilde{\mathcal{F}}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\frac{5}{2}+\alpha \leq r < \frac{7}{2}+\alpha$, $r_1 > (\alpha+1)r+1$, $r_2 > (\beta+1)r$. *Si para tres tiempos* $t_1 = 0 < t_2 < t_3 < T$ *se tiene que* $u(t_i) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{r_1,r_2}_{\frac{7}{2}+\theta}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $i = 1, 2, 3$, *entonces,* $u \equiv 0$.

Además, haciendo uso del resultado obteniendo en espacios anisotrópicos menos regulares probamos los teoremas;

Teorema 0.9.
Sean, $\beta = 0, 1$, $0 < \alpha < 1$, *(cuando* $\beta = 0$, $\alpha > \frac{1}{3}$*),* $\langle x\rangle^\theta \phi \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\phi \in H^{r_1,r_2}$, $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$, $r_2 > \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ *y* $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1}+\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$.

1. *Si* $r_1 > max\left\{\alpha+1, \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}\right\}$ *y* $0 < \theta \leq \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}(1+\beta)}$ *, entonces, el PVI (2-1) esta bien planteado en* $\mathcal{F}_{\theta}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.

2. *Si* $r_1 > max\left\{\alpha+1, \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}\right\}$, $r_2 > (1+\beta)\theta$ *y* $\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}(1+\beta)} < \theta \leq 1$, *entonces, el PVI (2-1) esta bien planteado en* $\mathcal{F}_{\theta}^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.

En el capítulo 5, se aborda el buen planteamiento local, asociado al caso bi-periódico, más precisamente([2]), establecemos el siguiente resultado.

Teorema 0.10.
Sean, $\alpha = 1, 2, 3$, $0 < \beta \leq 1$, $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$ *y* $s > (\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}})(-\frac{\beta}{4} + \frac{3}{2})$, *tal que* $\int_{\mathbb{T}} \phi(x,y)dx = 0$ *para todo* $y \in \mathbb{T}$. *Entonces, existe un* $T = T(\|\phi\|_{H^s})$ *y una única solución del PVI (5-1), tal que* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ *y* $u,\ \partial_x u,\ \partial_y u \in L_T^1 L^\infty$. *Además, la aplicación* $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2) \mapsto u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ *es continua.*

Se finaliza este trabajo con el capítulo 6, en donde, se establece la existencia de la onda solitaria de la forma $u(x,y,t) = \Phi(x-ct)$ con $c > 0$, como consecuencia del principio de compacidad concentrada.

1 Preliminares

En este capítulo, damos a conocer la notación, las definiciones, los lemas y los teoremas fundamentales utilizados en el presente trabajo. Las demostraciones de algunos resultados ya conocidos, serán omitidas, así que, en cada caso daremos las referencias o un bosquejo de la demostración.
Dada, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\hat{f}(\xi,n)$ notará su transformada de Fourier, entendiendo que $(\xi,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, usaremos C como una constante universal,

$$\widehat{f}(\xi,n) = C\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, e^{-ix\xi}e^{-iyn}dxdy = C\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} f(x,y)\, e^{-ix\xi}e^{-iyn}dxdy$$

$$f(x,y) = C\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi,n)\, e^{ix\xi}e^{iyn}d\xi$$

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} = \left(\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$

,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |f(\xi,n)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para dos cantidades cualquiera positivas, a y b, $a \lesssim b$ significa que existe $C>0$ independiente de a y b tal que $a \leq Cb$. $a\sim b$ significa que $a\lesssim b$ y $a\gtrsim b$.

Definición 1.1.
El espacio,

$$C_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) := \{f:\mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{R} \mid f \text{ es continua y } \lim_{|x|\to\infty} f(x,y)=0\}$$

.

Definición 1.2.
El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) := \{f\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) \mid ||f||_{\alpha\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^\alpha\partial_x^\beta f(x,y)\right| < \infty,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}\}$*, se conoce como el espacio de Schwartz en* $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$.

Definición 1.3.
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *es el espacio de las distribuciones temperadas.*

Definición 1.4.
Los espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ se definen para $s\in\mathbb{R}$ como,

$$H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})=\{f\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\,:\,\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2+n^2)^s\,|\hat{f}(\xi,n)|^2\,d\xi<\infty\}$$

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=C\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2+n^2)^s\,|\hat{f}(\xi,n)|^2\,d\xi=\|f\|^2_s$$

y

$$H^{\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)=\underset{s}{\cap}H^s\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$$

Definición 1.5.
Los espacios Anisotropicos de tipo $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ se definen para $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ como,

$$H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})=\{f\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\,:\,\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^{r_1}+|n|^{r_2})^2\,|\hat{f}(\xi,n)|^2\,d\xi<\infty\}$$

$$\|f\|^2_{H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}=C\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^{r_1}+|n|^{r_2})^2\,|\hat{f}(\xi,n)|^2\,d\xi=\|f\|^2_{r_1,r_2}$$

y

$$H^{\infty,\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)=\underset{r_1,r_2}{\cap}H^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$$

Definición 1.6.
Dado un espacio de Banach X, una función medible $u:\mathbb{R}\to X$ y un exponente $p\in[1,\infty]$ se define,

$$\|u\|_{L^pX}=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\|u(t)\|_X\right)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|u\|_{L^\infty X}=esssup_{t\in\mathbb{R}}\,\|u(t)\|_X$$

También, si $I\subseteq\mathbb{R}$ y $u:I\to X$, definimos,

$$\|u\|_{L^p_IX}=\|\chi_I(t)u\|_{L^pX}$$

Para $T>0$, definimos,

$$\|u\|_{L^p_TX}=\|u\|_{L^p_{[-T,T]}X}$$

Definición 1.7.
Sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ se definen los operadores J_x^s,J_y^s y J^s vía transformada de Fourier,

$$\widehat{J_x^s g}(\xi,n) = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,n)$$
$$\widehat{J_y^s g}(\xi,n) = \left(1+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,n)$$
$$\widehat{J^s g}(\xi,n) = \left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,n).$$

Observe que,

$$\|f\|_{H^s} \sim \left\|J_y^s f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + \|J_x^s f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} := \|f\|_{X^s}$$
$$\|f\|_{H^{r_1,r_2}} \sim \|J_x^{r_1} f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + \left\|J_y^{r_2} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} := \|f\|_{X^{r_1,r_2}}$$

Definición 1.8.
Para enteros $k,j = 0,1,2,3,\cdots$ se definen los operadores Q_x^j y Q_y^k sobre $H^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$,

$$\begin{cases}\widehat{Q_x^0 g}(\xi,n) = \chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\hat{g}(\xi,n)\\ \widehat{Q_x^j g}(\xi,n) = \chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\hat{g}(\xi,n) \quad si\ j\geq 1\end{cases}$$

y

$$\begin{cases}\widehat{Q_y^0 g}(\xi,n) = \chi_{[0,1)}(|n|)\,\hat{g}(\xi,n)\\ \widehat{Q_y^k g}(\xi,n) = \chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,\hat{g}(\xi,n) \quad si\ k\geq 1.\end{cases}$$

donde,

$$\sum_{j,k\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|) + \sum_{j\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)$$
$$+\sum_{k\geq 1}\chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|) + \chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|) = 1$$

así,

$$|\hat{g}(\xi,n)|^2 = \sum_{j,k\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\hat{g}(\xi,n)|^2 + \sum_{j\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\hat{g}(\xi,n)|^2$$
$$+\sum_{k\geq 1}\chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\hat{g}(\xi,n)|^2 + \chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\hat{g}(\xi,n)|^2|\hat{g}(\xi,n)|^2$$

y

$$|\widehat{D_x^s g}(\xi,n)|^2 = |\xi|^{2s}|\hat{g}(\xi,n)|^2$$
$$= \sum_{j,k\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\xi|^{2s}|\hat{g}(\xi,n)|^2$$
$$+\sum_{j\geq 1}\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\xi|^{2s}|\hat{g}(\xi,n)|^2$$
$$+\sum_{k\geq 1}\chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\xi|^{2s}|\hat{g}(\xi,n)|^2 + \chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\xi|^{2s}|\hat{g}(\xi,n)|^2$$

Observe que,

- Si $j,k\geq 1$, $\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\xi|^{2s}\sim\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|2^j|^{2s}$
- Si $j\geq 1$, $\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\xi|^{2s}\sim\chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|2^j|^{2s}$
- Si $k\geq 1$, $\chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{\left[2^{k-1},2^k\right)}(|n|)\,|\xi|^{2s}\leq 1$ y $\chi_{[0,1)}(|\xi|)\,\chi_{[0,1)}(|n|)\,|\xi|^{2s}\leq 1$, *en las frecuencias bajas absorbe las derivadas.*

Entonces, en términos de los operadores Q_x^j y Q_y^k, se tiene la siguiente equivalencia de normas:

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\sim\sum_{k,j\geq 0}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$$

$$\|J_x^sg\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}+\left\|J_y^sg\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\sim\sum_{k\geq 0,j\geq 1}(2^j)^{2s}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}+\sum_{k\geq 1,j\geq 0}(2^k)^{2s}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$$
$$+\sum_{k,j\geq 0}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \tag{1-1}$$

Análogamente tenemos que,

$$\|J_x^sg\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}+\left\|J_y^sg\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}\sim\sum_{k\geq 0,j\geq 1}(2^j)^{2s}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}+\sum_{k\geq 1,j\geq 0}(2^k)^{2s}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})}$$
$$+\sum_{k,j\geq 0}\left\|Q_x^jQ_y^kg\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})} \tag{1-2}$$

Definición 1.9.
Los espacios anisotrópicos con peso $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$, se definen como:

$$\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})=H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\cap L^2_r(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$$

donde

$$L^2_r(\mathbb{R}\times\mathbb{T})=L^2(\langle x\rangle^r\,dxdy)$$

Definición 1.10.
El peso truncado w_N^θ, $N\in\mathbb{Z}^+$, se define como:

$$w_N^\theta(x)=\begin{cases}\langle x\rangle^\theta & si\ x<n\\ (2N)^\theta & si\ x\geq 3N,\end{cases}$$

donde, $\langle x\rangle=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $w_N^\theta\in C^\infty$ y $\partial_x w_N^\theta,\partial_x^2 w_N^\theta\lesssim 1$.

Definición 1.11.
La derivada de Stein, se define para $b \in (0,1)$ y f medible en $\mathbb{R}$ con valores complejos, como,

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.12.
Para, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se define la transformada de Hilbert $\mathcal{H}f$ por,

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

Lema 1.1 (Lema de Sobolev)**.**
Para, $s \in \mathbb{R}$,

1. *Si $s > 1$, $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ está inmerso continuamente en $C_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ y*

$$||f||_{C_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} = \sup_{x \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}} |f(x)| \leq C_s ||f||_s.$$

2. *Si $s > 1$, $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ es un Álgebra de Banach, es decir, existe $C_s > 0$ tal que*

$$||fg||_s \leq C_s ||f||_s ||g||_s.$$

.

Demostración. Se siguen las mismas ideas de [26] paginas 204-207. □

Teorema 1.1.
M_n sera $\mathbb{R}^n$ o una variedad de Riemann compacta con o sin frontera. Sean, q, r números reales $1 \leq q, r \leq \infty$ y j, m enteros $0 \leq j < m$. Entonces, existe C una constante dependiente de $m,\ n,\ j,\ q,\ r$ y a, tal que, para toda $f \in C^\infty(M_n)$, con soporte compacto en M_n (con $\int f dV = 0$, en el caso compacto sin frontera),

$$\left\| \nabla^j f \right\|_{L^p} \leq C \left\| \nabla^m f \right\|_{L^r}^a \left\| f \right\|_{L^q}^{1-a},$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}$. Para toda a en el intervalo $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$, para el cual p es no negativo y $\nabla^k f$ es la k-esima derivada covariante de f.

Demostración. Ver [5]. □

Teorema 1.2.
Sean, $f \in C_0^m(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, q, r números reales $1 \leq q, r \leq \infty$ y j, m enteros $0 \leq j < m$. Entonces, existe C una constante dependiente de $m,\ n,\ j,\ q,\ r$ y a, tal que, para toda f con $\int_0^{2\pi} f(x,y)dy = 0$,

$$\left\| \nabla^j f \right\|_{L^p} \leq C \left\| \nabla^m f \right\|_{L^r}^a \left\| f \right\|_{L^q}^{1-a},$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{j}{2} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{2}\right) + (1-a)\frac{1}{q}$. Para toda a en el intervalo $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$, para el cual p es no negativo.

Demostración. Para esta prueba se requiere de la desigualdad de Sobolev, la desigualdad de Morrey y desigualdades de interpolación.

- Si $r* > r$ definido por $\frac{1}{r*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}$, entonces,

$$\|f\|_{L^{r*}} \leq C \|\nabla f\|_{L^r}.$$

Primero veamos la desigualdad de Sobolev de primer orden, tenemos como consecuencia del Teorema fundamental del cálculo que, $|f| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x f(x_1, y)|\, dx_1$ y $|f| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |\partial_y f(x, y_1)|\, dy_1$, donde se requiere la condición, $\int_0^{2\pi} f(x,y)dy = 0$. Así,

$$\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} |f|^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} |\partial_y f(x, y_1)|\, dxdy_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} |\partial_x f(x_1, y)|\, dx_1 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

y concluimos,

$$\|f\|_{L^2} \leq \frac{1}{4}\|\partial_x f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|\partial_y f\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}\|\nabla f\|_{L^1}. \tag{1-3}$$

Ahora, si en la desigualdad (1-3) reemplazamos f por $|f|^{t-1} f$ para $t = \frac{1}{2}r* = \frac{2r}{2-r}$ por tanto $t \geq 1$ y obtenemos,

$$\|f\|_{L^{r*}}^t = \left\||f|^{t-1} f\right\|_{L^2} \leq \frac{1}{4}\left\|\nabla |f|^{t-1} f\right\|_{L^1},$$

con $r^* = 2t$. Como tenemos que $\partial_x\left(|f|^{t-1} f\right) = t\,|f|^{t-1}\partial_x f$ y $\partial_y\left(|f|^{t-1} f\right) = t\,|f|^{t-1}\partial_y f$, por lo tanto, al aplicar la desigualdad de Hölder obtenemos que,

$$\left\||f|^{t-1}\partial_x f\right\|_{L^1} \leq C\|f\|_{L^{(t-1)r'}}^{t-1}\|\partial_x f\|_{L^r} = \|f\|_{L^{r*}}^{t-1}\|\partial_x f\|_{L^r}$$

con $(t-1)r' = r*4$. Análogamente, para el término $\partial_y\left(|f|^{t-1} f\right)$, entonces, obtenemos

$$\|f\|_{L^{r*}}^t \leq C\|f\|_{L^{r*}}^{t-1}\|\nabla f\|_{L^r}$$

y así,

$$\|f\|_{L^{r*}} \leq C\|\nabla f\|_{L^r}. \tag{1-4}$$

Aplicando la desigualdad (1-4) con ∇f en vez de f, se obtiene,

$$\|\nabla f\|_{L^{r*}} \leq C\left\|\nabla^2 f\right\|_{L^r},$$

entonces, reemplazando en (1-4) se obtiene $\|f\|_{L^{r*}} \leq C\|\nabla^2 f\|_{L^r}$, donde $\frac{1}{r*} = \frac{1}{r} - 1$. Para el caso L^∞, también, podemos obtener $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla^2 f\|_{L^r}$, razonando nuevamente por el Teorema fundamental del cálculo,

$$\partial_y f(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \partial_x\partial_y f(x_1, y)\, dx_1,$$

así,

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{0}^{y}\partial_x\partial_y f(x_1,y_1)\,dx_1dy_1,$$

que por la desigualdad triangular,

$$|f|\leq\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{T}}|\partial_x\partial_y f(x_1,y_1)|\,dx_1dy_1\leq C\left\|\nabla^2 f\right\|_{L^1}.$$

- Desigualdad de Morrey, veamos que si $r>2$, entonces,

$$|f(y)-f(x)|\leq C\frac{r}{r-2}|x-y|^{1-\frac{2}{r}}\|\nabla f\|_{L^r}, \tag{1-5}$$

donde $x,y\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}$. Consecuentemente, si $1\leq q\leq\infty$ definido por $0=a(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})+\frac{1-a}{q}$ con $0\leq a<1$, entonces,

$$\|f\|_{L^\infty}\leq C\frac{r}{r-2}\|\nabla f\|_{L^r}^{a}\|f\|_{L^q}^{1-a}. \tag{1-6}$$

Tenemos que,

$$f(y)-f(x)=\int_0^1 dt\,f(x+t(y-x))\,dt=\int_0^1(y-x)\nabla f(x+t(y-x))\,dt.$$

Integrando sobre B y dividiendo por $|B|$, siendo $|B|$: la medida de Lebesgue de B,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy-f(x)&=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)-f(y)\,dy\\&=\frac{1}{|B|}\int_0^1\int_B(y-x)\nabla f(x+t(y-x))\,dydt.\end{aligned}$$

Ya que,

$$\begin{aligned}\left|\int_B(y-x)\nabla f(x+t(y-x))\,dy\right|&\leq\left(\int_B|y-x|^{r'}dy\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\int_B|\nabla f(x+t(y-x))|^r\,dy\right)^{\frac{1}{r}}\\&\leq C\rho^{1+\frac{2}{r'}}t^{-\frac{2}{r}}\|\nabla f\|_{L^r},\end{aligned}$$

donde $\rho=|x-y|$, entonces,

$$\left|\frac{1}{|B|}\int_0^1\int_B(y-x)\nabla f(x+t(y-x))\,dydt\right|\leq C\frac{r}{r-2}\rho^{1-\frac{2}{r}}\|\nabla f\|_{L^r}.$$

Tomando $x_1,x_2\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, $x_1\neq x_2$, obtenemos el primer resultado,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq C\frac{r}{r-2}|x_1-x_2|^{1-\frac{2}{r}}\|\nabla f\|_{L^r}.$$

Por otro lado, $\frac{1}{|B|}\left|\int_B f(y)\,dy\right| \leq |B|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q} \leq C\rho^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{L^q}$ utilizando la primera desigualdad, (1-5), entonces, obtenemos

$$|f(x)| \leq C\frac{r}{r-2}\rho^{1-\frac{2}{r}} \|\nabla f\|_{L^r} + C\rho^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{L^q}.$$

Si, $\rho = \|f\|_{L^q}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{-\alpha}$, se obtiene la desigualdad buscada

$$|f(x)| \leq C\frac{r}{r-2} \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a}.$$

- Usando la anterior desigualdad (1-6) podemos probar la siguiente desigualdad Gagliardo- Nirenberg de primer orden: Si, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $\frac{1}{p} = a(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}) + \frac{1-a}{q}$, entonces,

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a}.$$

Para, $r > 2$, tenemos que,

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\infty}^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}, \tag{1-7}$$

y por la desigualdad (1-6) se tiene que, $\|f\|_{\infty}^{\frac{p-q}{p}} \leq \left(C\frac{r}{r-2} \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a}\right)^{1-\frac{q}{p}}$, entonces, reemplazando en (1-7),

$$\|f\|_{L^p} \leq \left(C\frac{r}{r-2} \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a}\right)^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} \leq C \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a}.$$

Para, $r < 2$, usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad, obtenemos, (1-4)

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^{r*}}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a} \leq C \|\nabla f\|_{L^r}^{a} \|f\|_{L^q}^{1-a},$$

donde, $\frac{1}{p} = a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-a}{q}$, $\frac{1}{r*} = \frac{2-r}{2r}$.

Para, $r = 2$, se razona como en la prueba de la desigualdad (1-4), sean,

$$\|f\|_{L^{2t}}^{t} \leq \frac{1}{4}t \|f\|_{L^{(t-1)2}}^{t-1} \|\nabla f\|_{L^r}$$

y $\|f\|_{L^{(t-1)2}} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$ con $\frac{1}{2(t-1)} = \alpha\frac{1}{2t} + \frac{1-\alpha}{q}$ y $p = 2t$. Entonces,

$$\|f\|_{L^{2t}}^{t} \leq \frac{1}{4}t \|f\|_{L^p}^{(t-1)\alpha} \|f\|_{L^q}^{(t-1)(1-\alpha)} \|\nabla f\|_{L^r},$$

así,

$$\|f\|_{L^p} \leq \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{t-(t-1)\alpha}} \|f\|_{L^q}^{\frac{(t-1)(1-\alpha)}{t-(t-1)\alpha}} \|\nabla f\|_{L^r}^{\frac{1}{t-(t-1)\alpha}},$$

se puede observar que si $\frac{1}{t-(t-1)\alpha} = \frac{p-q}{p} = a$ y $\frac{(t-1)(1-\alpha)}{t-(t-1)\alpha} = \frac{q}{p} = 1-a$, se sigue el resultado.

- Desigualdad de interpolación: Sea $m \geq 1$, existe una constante C, tal que, si $0 \leq j \leq m$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfaciendo $\frac{m}{p} = \frac{j}{r} + \frac{m-1}{q}$. Entonces,

$$\left\|\partial_x^j u\right\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}} \left\|\partial_x^m u\right\|_{L^r}^{\frac{j}{m}} \tag{1-8}$$

y

$$\left\|\partial_y^j u\right\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}} \left\|\partial_y^m u\right\|_{L^r}^{\frac{j}{m}}.$$

Además, $\|\nabla^j u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^q}^{\frac{m-j}{m}} \|\nabla^m u\|_{L^r}^{\frac{j}{m}}$. Para verificar la anterior afirmación utilizaremos la siguiente desigualdad, sea $M = \mathbb{R},\ \mathbb{T}$. Si $g \in C_0^2(M)$ y $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, entonces,

$$\|g'\|_{L^p} \leq 8 \|g\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \|g''\|_{L^r}^{\frac{j}{m}} \tag{1-9}$$

y realizaremos la prueba en los siguientes tres pasos:

1. Sea, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$,

$$\|\partial_x u\|_{L^p} \leq 8 \|u\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\|\partial_y u\|_{L^p} \leq 8 \|u\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \left\|\partial_y^2 u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{2}}.$$

Para verificar esta afirmación aplicamos la desigualdad (1-9)

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,y)|^p dx \leq 8^p \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|^q dx\right)^{\frac{p}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\partial_x^2 u(x,y)\right|^r dx\right)^{\frac{p}{2r}},$$

luego integramos sobre $\mathbb{T}$ en la variable y y como $1 = \frac{p}{2q} + \frac{p}{2r}$ aplicamos la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,y)|^p dx dy &\leq 8^p \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|^q dx\right)^{\frac{p}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\partial_x^2 u(x,y)\right|^r dx\right)^{\frac{p}{2r}} dy \\ &\leq 8^p \|u\|_{L^q}^{\frac{p}{2}} \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^r}^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

Análogamente se acota el término $\partial_y u$

2. Si $m \geq 2$ y $1 \leq p, q, r \leq \infty$ con $\frac{m}{p} = \frac{1}{r} + \frac{m-1}{q}$,

$$\|\partial_x u\|_{L^p} \leq 8^{2m-3} \|u\|_{L^q}^{\frac{m-1}{m}} \left\|\partial_x^m u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}} \tag{1-10}$$

y

$$\|\partial_y u\|_{L^p} \leq 8^{2m-3} \|u\|_{L^q}^{\frac{m-1}{m}} \left\|\partial_y^m u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}}.$$

Veamos (1-10) por inducción sobre m. Supongamos como hipótesis de inducción que (1-10) vale para $m \geq 2$, sea, t con $min\{p,r\} \leq t \leq max\{p,r\}$ y $\frac{m}{t} = \frac{1}{r} + \frac{m-1}{p}$, verifiquemos el paso $m+1$, ya que, el paso base $m = 2$ se cumple por el item 1. Sea $\frac{m+1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{m}{q}$, aplicando la hipótesis de inducción a $\partial_x u$, obtenemos,

$$\left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^t} \leq 8^{2m-3} \left\|\partial_x u\right\|_{L^q}^{\frac{m-1}{m}} \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}} \tag{1-11}$$

de la condición de (1-10) y la definición de t, obtenemos, $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{t}$, así, del item 1,

$$\left\|\partial_x u\right\|_{L^p} \leq 8 \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^t}^{\frac{1}{2}} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \tag{1-12}$$

reemplazando (1-11) en (1-12), se obtiene el resultado para el paso $m+1$,

$$\left\|\partial_x u\right\|_{L^p} \leq 8^{\frac{2m-3}{2}} \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L^q}^{\frac{m-1}{m}} \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{1}{2}} \leq 8^{2m-1} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{m}{m+1}} \left\|\partial_x^m u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m+1}}.$$

3. Para probar (1-8) argumentando por inducción sobre $m \geq 2$. Para $m = 2$ el resultado se sigue del item 1. Tomamos como hipótesis de inducción (1-8), valido hasta algunos $m \geq 2$, donde, $1 \leq j \leq m-1$. Asumimos, $1 \leq j \leq m$, $\frac{m+1}{p} = \frac{j}{r} + \frac{m+1-j}{q}$ y se define t por $\frac{m}{p} = \frac{j-1}{r} + \frac{m+1-j}{t}$. Notamos que por la condición de la hipótesis de inducción y la definición de t,

$$\begin{aligned}
\frac{m+1-j}{t} = \frac{m}{m+1}\frac{m+1}{p} - \frac{j-1}{r} &= \frac{m}{m+1}\frac{m+1-j}{q} + \frac{m+1-j}{(m+1)\,r} \\
&\leq \frac{m\,(m+1-j)}{m+1} + \frac{m+1-j}{m+1} \\
&= m+1-j,
\end{aligned}$$

$t \geq 1$ ya que $q, r \geq 1$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\partial_x u$ (con j reemplazado por $j-1$), obtenemos,

$$\left\|\partial_x^j u\right\|_{L^p} \leq C \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^q}^{\frac{j-1}{m}} \left\|\partial_x u\right\|_{L^t}^{\frac{m-j+1}{m}}. \tag{1-13}$$

Notamos que, por la condición de la hipótesis de inducción y definición de t tenemos, $\frac{m+1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{m}{q}$, así de (1-10) (aplicado con m reemplazada por $m+1$),

$$\left\|\partial_x u\right\|_{L^t} \leq 8^{2m-1} \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{m}{m+1}}. \tag{1-14}$$

Reemplazando (1-14) en (1-13) obtenemos el paso $m+1$,

$$\left\|\partial_x^j u\right\|_{L^p} \leq C \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^q}^{\frac{j-1}{m}} \left(8^{2m-1} \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^r}^{\frac{1}{m}} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m-j+1}{m}} \leq \left\|\partial_x^{m+1} u\right\|_{L^r}^{\frac{j}{m+1}} \left\|u\right\|_{L^q}^{\frac{m-j+1}{m+1}}.$$

Análogamente se obtiene para el término $\partial_y^j u$.

□

Lema 1.2.
Sean, $f \in C_0^\infty([a,b])$ *y* $\tilde{\phi}'(x) \neq 0$ *para cualquier* $x \in [a,b]$*. Entonces,*

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\tilde{\phi}(x)} f(x)\, dx = O\left(\lambda^{-k}\right)$$

cuando $\lambda \to \infty$*, para cualquier* $k \in \mathbb{Z}^+$

Demostración. Ver [46] □

Lema 1.3 (Van der Corput)**.**
Sean, $k \geq 2$ *,* $\varphi \in C^k(I)$ *es una función de valor real tal que* $\left|\varphi^{(k)}(x)\right| \geq \lambda > 0$*,* $\psi \in L^\infty(I)$ *y* $\psi' \in L^1(I)$*. Entonces,* $\left|\int_I e^{i\varphi(x)}\psi(x)\, dx\right| \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \left(\|\psi\|_{L^\infty} + \|\psi'\|_{L^1}\right)$

Demostración. Ver [46] □

Lema 1.4.
Sean, $h, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *y* $s > s_0 + 1 > 2$*. Entonces, existe una constante* C *tal que*

$$\|g\partial_x h\|_s \leq C\left[\|g\|_{s_0}\|h\|_{s+1} + \|g\|_s \|h\|_s\right]$$

Demostración. Se siguen las mismas ideas de [26] Corolario B.2, con el respectivo cambio de norma. □

Teorema 1.3.
Sean, $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *de valor real,* $s > 2$ *y* $r \geq 1$*. Entonces, existe una constante* C*, tal que,*

$$|(u \mid f\partial_x u)_r| \leq C\left[\|\partial_x f\|_{s-1}\|u\|_r^2 + \|\partial_x f\|_{r-1}\|u\|_s\|u\|_r\right]$$

Demostración. Se siguen las mismas ideas de [26] Teorema B.4, con el respectivo cambio de norma. □

Teorema 1.4.
Sean, $V \geq 0$ *es una función continua no decreciente y* $x(t)$ *la solución máximal de*

$$\begin{cases} \partial_t x(t) & = V(x(t)) \\ x(0) & = \beta \end{cases}$$

definida en algún intervalo $[0,T)$*. Asuma que* h *es una función continua tal que,*

$$0 \leq h(t) \leq \beta + \int_0^t V(h(t'))\, dt'$$

para todo $t \in [0,T)$*. Entonces* $h(t) \leq x(t)$ *sobre* $[0,T)$*.*

Demostración. Ver [26] □

Proposición 1.1 (Desigualdad Kato-Ponce).
Sean, $s > 0$, $1 < p < \infty$, $\Lambda = (1 - \Delta^2)^{\frac{1}{2}}$ *y* M_f *el operador de multiplicación por* f. *Entonces,*

$$\|[\Lambda^s, M_f]\, g\|_{L^p} \leq \left(\|\nabla f\|_{L^\infty} \left\|\Lambda^{s-1} g\right\|_{L^p} + \|\Lambda^s f\|_{L^p} \|g\|_{L^\infty}\right)$$

para todo f *y* g *en* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Ver [30] □

Proposición 1.2 (Kato-Ponce Versión periódica).
Sean, $s \geq 1$ *y* $f, g \in H^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. *Entonces,*

$$\left\|J_y^s (fg) - f J_y^s g\right\|_{L^2} \leq C_s \left\|J_y^s f\right\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} + \left(\|f\|_{L^\infty} + \|\partial_y f\|_{L^\infty}\right) \left\|J_y^{s-1} g\right\|_{L^2}.$$

Demostración. El Lema 9.A.1, en [23] nos dice que si, $s \geq 1$ y $f,\ g \in H^{\frac{3}{2}+}(\mathbb{T})$, entonces,

$$\|\Lambda^s (fg) - f\Lambda^s g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_s \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{T})} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\right) \left\|\Lambda^{s-1} g\right\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

donde $\Lambda^s = (1 - \partial^2)^{\frac{s}{2}}$. Aplicando esta desigualdad en el operador J_y ya que la variable y es periódica y tomando luego la norma en x tenemos que,

$$\begin{aligned}\left\|\left\|J_y^s (fg) - f J_y^s g\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_x^2} &\leq C_s \left\|\left\|J_y^s f\right\|_{L_y^2} \|g\|_{L_y^\infty}\right\|_{L_x^2} + \left\|\left(\|f\|_{L_y^\infty} + \|\partial_y f\|_{L_y^\infty}\right) \left\|J_y^{s-1} g\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_x^2} \\ &\leq C_s \|g\|_{L_{xy}^\infty} \left\|\left\|J_y^s f\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_x^2} + \left(\|f\|_{L_{xy}^\infty} + \|\partial_y f\|_{L_{xy}^\infty}\right) \left\|\left\|J_y^{s-1} g\right\|_{L_y^2}\right\|_{L_x^2}\end{aligned}$$

□

Proposición 1.3 (Versión bi-periódica).
Sean, $s \geq 1$ *y* $f, g \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}\|J^s (fg) - f J^s g\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq & C_s \|J^s f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \\ &+ \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right) \left\|J^{s-1} g\right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\end{aligned}$$

Demostración. Ver Lema 2.2 en [41] □

Teorema 1.5 (Regla de Leibniz).
Sean, $f, g \in H^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, $1 < p, p_1, p_2, q_1.q_2 \leq \infty$ $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = \frac{1}{2}$ *y* $0 < s < 1$. *Entonces,*

$$\|J_x^s (fg)\|_{L^p} \leq C \left(\|J_x^s f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty} \|J_x^s g\|_{L^p}\right) \tag{1-15}$$

$$\|J_x^s (fg)\|_{L^2} \leq C \left(\|J_x^s f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{q_1}} + \|f\|_{L^{p_2}} \|J_x^s g\|_{L^{q_2}}\right) \tag{1-16}$$

Demostración. En [33] se tiene por el Teorema A.12 que,

$$\left\|J_x^s\left(fg\right)\right\|_{L_x^p} \leq C\left(\left\|J_x^s f\right\|_{L_x^\infty}\left\|g\right\|_{L_x^p} + \left\|f\right\|_{L_x^\infty}\left\|J_x^s g\right\|_{L_x^p}\right),$$

Aplicando el anterior resultado con el operador J_x y tomando luego la norma en y tenemos que,

$$\begin{aligned}\left\|J_x^s\left(fg\right)\right\|_{L_{xy}^p} = \left\|\left\|J_x^s\left(fg\right)\right\|_{L_x^p}\right\|_{L_y^p} &\leq C\left\|\left\|J_x^s f\right\|_{L_x^\infty}\left\|g\right\|_{L_x^p}\right\|_{L_y^p} + \left\|\left\|f\right\|_{L_x^\infty}\left\|J_x^s g\right\|_{L_x^p}\right\|_{L_y^p} \\ &\leq C\left\|g\right\|_{L_{xy}^p}\left\|J_x^s f\right\|_{L_{xy}^\infty} + \left\|f\right\|_{L_{xy}^\infty}\left\|J_x^s g\right\|_{L_{xy}^p}\end{aligned}$$

con $\frac{2}{p_j} + \frac{2}{q_j} = 1$,

$$\begin{aligned}\left\|J_x^s\left(fg\right)\right\|_{L_{xy}^2} = \left\|\left\|J_x^s\left(fg\right)\right\|_{L_x^2}\right\|_{L_y^2} &\leq C\left\|\left\|J_x^s f\right\|_{L_x^{p_1}}\left\|g\right\|_{L_x^{q_1}}\right\|_{L_y^2} + \left\|\left\|f\right\|_{L_x^{p_2}}\left\|J_x^s g\right\|_{L_x^{q_2}}\right\|_{L_y^2} \\ &\leq C\left\|g\right\|_{L_{xy}^{p_1}}\left\|J_x^s f\right\|_{L_{xy}^{q_1}} + \left\|f\right\|_{L_{xy}^{p_2}}\left\|J_x^s g\right\|_{L_{xy}^{q_2}}\end{aligned}$$

□

Lema 1.5 (Lema producto periódico)**.**
Sean, $f, g \in H^\infty\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$ *y* $s > 0$*. Entonces,*

$$\left\|J_y^s\left(fg\right)\right\|_{L^2} \leq C\left(\left\|J_y^s f\right\|_{L^\infty}\left\|g\right\|_{L^2} + \left\|f\right\|_{L^\infty}\left\|J_x^s g\right\|_{L^2}\right)$$

Demostración. Es una leve modificación del Lema 4.2 en [11] □

Lema 1.6.
Para cada $0 < s < 1$*, existe una constante* C *tal que para cada* $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *satisfaciendo* $\partial_x u \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$*, tenemos,*

$$\left\|J_x^s u\right\|_{L^\infty} \leq C\left(\left\|u\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\right).$$

Demostración. Consecuencia del Lema 7 en [53] y la norma L_y^∞ □

Lema 1.7.
Sean, r_1 *y* r_2 *dos números reales positivos tales que* $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} < 2$*. Entonces,* $H^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right) \subset C_\infty\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$*, con inclusión continua.*

Demostración. Ver Lema 2.1 en [61], la prueba es análoga con el respectivo cambio de norma. □

Lema 1.8.
Si $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} < 2$ *,* $r_1, r_2 > 0$*, el espacio* $H^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$*, es un álgebra de Banach. En particular* $\left\|fg\right\|_{H^{r_1,r_2}} \leq C_{r_1,r_2}\left\|f\right\|_{H^{r_1,r_2}}\left\|g\right\|_{H^{r_1,r_2}}$

Demostración. Es análoga a la Proposición 4.3 en [8], con el respectivo cambio de norma. □

Proposición 1.4.
Dados $\psi \in L^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ *con* $\partial_x^\alpha\psi \in L^2\left(\mathbb{R}\right)$*,* $\alpha = 1, 2$ *y* $f \in H^\theta\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$*, entonces, para cualquier* $\theta \in (0,1)$

$$\left\|J_x^\theta\left(\psi f\right)\right\|_{L^2} \leq C_\theta\left\|J_x^\theta f\right\|_{L^2}$$

Demostración. Por la Proposición 2.4 en [17] tenemos,

$$\left\| \left[J_x^\theta : \psi \right] f \right\|_{L_x^2} \leq C_\theta \left\| \partial_x \psi \right\|_{H_x^1} \left\| f \right\|_{L_x^2}.$$

Tomando la norma en $L^2(\mathbb{T})$

$$\left\| \left[J_x^\theta : \psi \right] f \right\|_{L^2} \leq C_\theta \left\| \left\| \partial_x \psi \right\|_{H_x^1} \left\| f \right\|_{L_x^2} \right\|_{L_y^2} \leq C_\theta \left\| \partial_x \psi \right\|_{H_x^1} \left\| f \right\|_{L^2},$$

y así,

$$\left\| J_x^\theta (\psi f) \right\|_{L^2} \leq \left\| \left[J_x^\theta : \psi \right] f \right\|_{L^2} + \left\| \psi J_x^\theta f \right\|_{L^2} \leq C_\theta \left\| \partial_x \psi \right\|_{H_x^1} \left\| f \right\|_{L^2} + \left\| \psi \right\|_\infty \left\| J_x^\theta f \right\|_{L^2}$$

□

Lema 1.9.
Sean, a' y b' reales positivos, si $J_x = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\langle x \rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, entonces, para cualquier $\theta' \in (0,1)$

1. $\left\| J_x^{\theta' a'} \left(\langle x \rangle^{(1-\theta')b'} f \right) \right\|_{L^2} \leq C \left\| J_x^{a'} f \right\|_{L^2}^{\theta'} \left\| \langle x \rangle^{b'} f \right\|_{L^2}^{1-\theta'}$
2. $\left\| \langle x \rangle^{(1-\theta')b'} J_x^{\theta' a'} f \right\|_{L^2} \leq c \left\| J_x^{a'} f \right\|_{L^2}^{\theta'} \left\| \langle x \rangle^{b'} f \right\|_{L^2}^{1-\theta'}$

para $f \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, el resultado es valido con $w_N(x)$ en vez de $\langle x \rangle$

Demostración. La prueba es similar a la llevada a cabo en [18], Lema 1 con,

$$F(z) = e^{\left(z^2 - 1\right)} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} J_x^{az} \left(\rho^{b(1-z)} f(x, \widetilde{y}) \right) \overline{g(x, \widetilde{y})} dx d\widetilde{y}$$

$\rho(x) = \langle x \rangle$. □

Lema 1.10.
Sean, a y b reales positivos, $J_y = \left(1 - \partial_y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y $\langle x \rangle = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, con $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Entonces, para cualquier $\alpha \in (0,1)$,

$$\left\| J_y^{\alpha a} \langle x \rangle^{(1-\alpha)b} f \right\|_{L^2} \leq \left\| J_y^a f \right\|_{L^2}^{\alpha} \left\| \langle x \rangle^b f \right\|_{L^2}^{1-\alpha}. \tag{1-17}$$

Demostración. Siguiendo las ideas de [23] y [11] en el Lema 9.A.1. y Lema 4.2 respectivamente. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ y $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$ funciones suaves y periódicas con periodo 2π, ψ_1 soportada en $\cup_{m \in \mathbb{Z}} \left[2\pi m + \frac{\pi}{4}, 2\pi m + \frac{7\pi}{4} \right]$ y ψ_2 soportada en $\cup_{m \in \mathbb{Z}} \left[2\pi m - \frac{3\pi}{4}, 2\pi m + \frac{3\pi}{4} \right]$ con $1 = \psi_1 + \psi_2$ una partición de la unidad. Definimos las funciones $\tilde{f}_1(x, y) = f(x, y) \psi_1(y) 1_{[0, 2\pi]}(y)$ y $\tilde{f}_2(x, y) = f(x, y) \psi_2(y) 1_{[-\pi, \pi]}(y)$. Notaremos $\mathcal{F}_y^{\mathbb{T}}$, como los coeficientes de Fourier en y y $\mathcal{F}_y^{\mathbb{R}}$ como la transformada de Fourier en y, además,

$$\mathcal{F}_y^{\mathbb{T}}(f)(m) = \mathcal{F}_y^{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \right)(m).$$

La fórmula sumación de Poisson, implica,

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{T}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b} f\left(x,y\right) &= C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+m^2\right)^{\frac{\alpha a}{2}}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\mathcal{F}_y^{\mathbb{T}}\left(f\right)\left(m\right)e^{imx} \\ &= C\sum_{l\in\{1,2\}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+m^2\right)^{\frac{\alpha a}{2}}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\mathcal{F}_y^{\mathbb{R}}\left(\tilde{f}_l\right)\left(m\right)e^{imx} \\ &= \sum_{l\in\{1,2\}}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\left(x,y-2\pi\mu\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\|J_y^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} &\leq C\sum_{l\in\{1,2\}}\left\|\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\left(x,y-2\pi\mu\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \\ &\leq C\sum_{l\in\{1,2\}}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\left(x,y-2\pi\mu\right)\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Definimos, $E\left(\mu\right):=\left\{y|y=y'-2\pi\mu,\quad y\in\mathbb{T}\right\}$,

$$\begin{aligned} \left\|J_y^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} &\leq C\sum_{l\in\{1,2\}}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}\left\|J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\left(x,y\right)\chi_{E(\mu)}\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\sum_{l\in\{1,2\}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\left(x,y\right)\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\sum_{l\in\{1,2\}}\left\|J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Aplicando el resultado que ya se tiene en espacios no periódicos, es decir,

$$\left\|J_{\mathbb{R}}^{\alpha a}\left\langle x\right\rangle^{(1-\alpha)b}\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}\lesssim\left\|J_y^a\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^{\alpha}\left\|\left\langle x\right\rangle^b\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^{1-\alpha}$$

y observando que $\left\|J_y^a\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^{\alpha}\leq\left\|J_y^a f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^{\alpha}$, se obtiene que,

$$\left\|\left\langle x\right\rangle^b\tilde{f}_l\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}^{1-\alpha}\leq\left\|\left\langle x\right\rangle^b f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}^{1-\alpha}.$$

□

Lema 1.11.

Suponga que f es una función en $\mathbb{R}$ que tiene derivada hasta de orden $n+1$ en $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ y es tal que $f^{(j)}\left(0\right)=0$, $j=0,1,2\cdots,n$. Entonces, existe una función en $g\in L^2\left(\mathbb{R}\right)$ tal que $f=x^{n+1}g$. Además,

$$g\left(x\right)=\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^n}{n!}f^{(n+1)}\left(xt\right)dt$$

y

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| \frac{f}{x^{n+1}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_n \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Demostración. Consecuencia de la fórmula de Taylor. Ver [51] Lema 2.0.31. □

Corolario 1.1.
Sea f como en el Lema 1.11 y suponga además que, $f^{(n+1)}$ tiene derivada fraccionaria de orden α en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $g = \frac{f}{x^{n+1}}$ tiene derivada de orden α y $\|D^\alpha g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left\|D^\alpha \left(\frac{f}{x^{n+1}}\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|D^{n+1+\alpha} f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Demostración. Consecuencia del anterior Lema 1.11. Ver [51] Corolario 2.0.32. □

Teorema 1.6.
Sean, $b \in (0,1)$ y $1 \leq p < \infty$. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son funciones medibles. Entonces,

1. $\mathcal{D}^b(fg)(x) \leq \|f\|_{L^\infty} \mathcal{D}^b g(x) + |g(x)| \mathcal{D}^b f(x)$
2. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)(x)\right\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty} \left\|\mathcal{D}^b g\right\|_{L^p} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^p}$
3. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)(x)\right\|_{L^2} \leq \left\|f\mathcal{D}^b g\right\|_{L^2} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$
4. $\left\|D^b f\right\|_{L^2} = C \left\|\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$

Demostración. Ver Proposición 1 en [55] □

Lema 1.12.
Sea, $b \in (0,1)$, entonces, $\mathcal{D}^b_\xi \left(e^{it(|\xi|^\alpha \xi)}\right) \lesssim_{\alpha b} t^{\frac{b}{1+\alpha}} + t^b |\xi|^{\alpha b}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver Lema 4.1.1 en [51] □

Proposición 1.5.
Sea, $\chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi \equiv 1$ en $(-1,1)$ y el $supp\chi \subseteq [-2,2]$. Para $b \in (0,1)$ y $\theta > 0$,

$$\mathcal{D}^b\left(|\xi|^\theta \chi(\xi)\right)(\eta) \sim \begin{cases} c|\eta|^{\theta-b} + c_1, \theta \neq b & |\eta| \ll 1 \\ c(-ln|\eta|)^{\frac{1}{2}}, \theta = b & |\eta| \ll 1 \\ \frac{c}{|\eta|^{\frac{1}{2}+b}} & |\eta| \gg 1. \end{cases}$$

$\mathcal{D}^b\left(|\xi|^\theta \chi(\xi)\right)(\cdot)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, en particular se tiene que $\mathcal{D}^b\left(|\xi|^\theta \chi(\xi)\right) \in L^2(\mathbb{R})$ si y solo si $b < \theta + \frac{1}{2}$. El resultado sigue siendo valido para $\mathcal{D}^b\left(|\xi|^\theta sgn(\xi) \chi(\xi)\right)$.

Demostración. Ver [17] □

Teorema 1.7.
Sean, $p \in (1,\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen y son diferentes, entonces, para cualquier $\delta > 0$, $D^{\frac{1}{p}} f \notin L^p_{loc}(B(x_0,\delta))$, en particular $f \notin L^p_{\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$

Demostración. Ver teorema 2.0.27 en [51] □

Proposición 1.6.
Sea, $f \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$*, si* $\widehat{f}\,(0,n)=0$ *para cada* $n\in\mathbb{Z}$ *y* $0<\alpha<1$*,*

$$\left\|D_\xi^\alpha\left(sgn\,(\xi)\,\widehat{f}\right)\right\|_{L^2} \leq \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi \widehat{f}\right\|_{L^2}$$

Demostración. Se sigue de las ideas de la Proposición 2.19 en [8] y de tomar la norma L^2_y □

Proposición 1.7.
Sean, $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios de grado* m *y* n *respectivamente, con* $0<m<n$*. Para* $b\in(0,1)$*,* $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ *y* $\frac{P}{Q}\in C(\mathbb{R})$*, se tiene que,*

$$\left\|D_x^b\left(\frac{P}{Q}\phi\right)\right\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_x^b\phi\right\|_{L^2}$$

Demostración. Ver Proposición 2.12 en [8] □

Proposición 1.8.
Si $0<\gamma<\frac{1}{2}$ *y* $0<\epsilon<\gamma$*. Entonces,*

$$\mathcal{D}^{\gamma-\epsilon}(|\xi|^{\gamma-\frac{1}{2}})\in L^2(\mathbb{R})$$

Demostración. Ver proposición 2.9 en [13]. □

Lema 1.13.
Sean, $0\leq r\leq s$*,* $D_x^s f\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *y* $f\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$*. Entonces, existe una constante* $C=C(s)$ *tal que*

$$\|D_x^r f\|_{L^2} \leq C\,\|D_x^s f\|_{L^2}^{\lambda}\,\|f\|_{L^2}^{1-\lambda},$$

donde $\lambda=\frac{r}{s}$*.*

Demostración. Es consecuencia de la desigualdad de Hölder con $\lambda=\frac{1}{p}$ y $1-\lambda=\frac{1}{q}$,

$$\begin{aligned}\|D_x^r f\|_{L^2}^2 &= \sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2+n^2)^{s\lambda}|\hat{f}|^{2(\lambda+(1-\lambda))}d\xi\\ &\lesssim \left(\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2+n^2)^{s}|\hat{f}|^2 d\xi\right)^{\lambda}\left(\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}|^2 d\xi\right)^{1-\lambda}\\ &\lesssim C\,\|D_x^s f\|_{L^2}^{2\lambda}\,\|f\|_{L^2}^{2(1-\lambda)}\end{aligned}$$

□

Lema 1.14.
Sean, $D_x^{s_1}f\in L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *y* $D_x^{s_2}f\in L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$*. Entonces, para todo* $\theta\in[0,1]$*,* $D_x^s f\in L^r(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$*,*

$$\|D_x^s f\|_{L^r} \leq C_{p,q,s_2}\,\|D_x^{s_1}f\|_{L^p}^{\theta}\,\|D_x^{s_2}f\|_{L^q}^{1-\theta}$$

$s=\theta s_1+(1-\theta)\,s_2$ $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}$,

Demostración. Por el Lema 2.0.4 [51]

$$\|D_x^s f\|_{L_x^r} \leq C_{p,q,s_2} \|D_x^{s_1} f\|_{L_x^p}^{\theta} \|D_x^{s_2} f\|_{L_x^q}^{(1-\theta)}$$

Tomando la norma $L^2(\mathbb{T})$,

$$\|D_x^s f\|_{L^r} \leq C_{p,q,s_2} \left(\int_0^{2\pi} \|D_x^{s_1} f\|_{L^p}^{r\theta} \|D_x^{s_2} f\|_{L^q}^{r(1-\theta)} \, dy \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con $P' = \frac{p}{r\theta}$ y $Q' = \frac{q}{r(1-\theta)}$, se obtiene el resultado. □

Lema 1.15.
Sean, $\mathcal{H}$ la transformada de Hilbert, $p \in (1,\infty)$ y $l, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Existe $c = c(p; l; m) > 0$, tales que,

$$\left\| \partial_x^l \left[\mathcal{H}; \psi \right] \partial_x^m f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \left\| \partial_x^{m+l} \psi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Demostración. Ver Lema 3.1 en [14] □

Proposición 1.9.
Sean, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta \in [0,1]$, entonces, para cualquier $p, q \in (1,\infty)$ y para cualquier $\delta > \frac{1}{q}$ existe un $c = c(\alpha, \beta; p; q; \delta) > 0$ tal que,

$$\left\| D^\alpha \left[D^\beta; \psi \right] D^{1-(\alpha+\beta)} f \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \left\| J^\delta(\psi') \right\|_{L^q(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $J_x^\delta \partial_x \varphi(x) \in L^q(\mathbb{R})$

Demostración. Ver Proposición 3.2 en [14] □

Proposición 1.10.
Sean, $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta \in [0,1]$, entonces, para cualquier $p, q \in (1,\infty)$ y para cualquier $\delta > \frac{1}{q}$, existe $c = c(\alpha, \beta; p; q; \delta) > 0$ tal que,

$$\left\| D_x^\alpha \left[D_x^\beta; \psi \right] D_x^{1-(\alpha+\beta)} f \right\|_{L^p} \leq c \left\| J_x^\delta \partial_x \psi \right\|_{L^q} \|f\|_{L^p},$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ y $J_x^\delta \partial_x \psi(x) \in L^q(\mathbb{R})$

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 1.9 al tomar la norma L_y^p. □

Lema 1.16.
Si $h(x) = \alpha_d x^d + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ es un polinomio con coeficientes reales y $\left| \alpha_d - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ con $(a,q) = 1$, entonces, para cualquier $\delta > 0$,

$$\left| \sum_{m=1}^N e^{2\pi i h(m)} \right| \leq C_\delta N^{1+\delta} \left[q^{-1} + N^{-1} + qN^{-d} \right]^{\frac{1}{2^{d-1}}}.$$

Demostración. Ver [56] Teorema 4.3. □

Lema 1.17 (Principio de Dirichlet).
Para cualquier entero $\Lambda \geq 1$ y cualquier $r \in \mathbb{R}$, existen enteros $q \in \{1, 2, ..., \Lambda\}$ y $a \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$ tal que, $\left| r - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{(\Lambda q)}$.

Demostración. Ver [56] Teorema 4.1. □

Lema 1.18 (Formula de sumación de Poisson).
Supongamos que f, $\hat{f}$ están en L^1 y satisface la condición

$$|f(x)| + \left| \hat{f}(x) \right| \leq C (1 + |x|)^{-n-\delta}$$

para algún C, $\delta > 0$. Entonces, f y $\hat{f}$ son continuas y

$$C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(2\pi k)$$

Demostración. Ver [20] Teorema 3.1.17

□

Proposición 1.11.
Si $\eta \in (0, 1]$, entonces,

$$\| [D^\eta : f] g \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left\| \widehat{\partial_x f} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \| g \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Demostración. Ver Proposición 2.4 en [17]. □

Lema 1.19 (Principio de Compacidad- Concentrada).
Sea $\{\rho_n\}_n$ una sucesión de funciones no negativas en $L^1(\mathbb{R})$ satisfaciendo $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) = \lambda$ para todo n y algún $\lambda > 0$. Entonces, existe una $\{\rho_{n_k}\}_{k \geq 1}$ que satisface una de las siguientes tres condiciones:

1. *(Compacidad) Existen $y_k \in \mathbb{R}$ para $k = 1, 2, \cdots$ tal que $\rho_{n_k}(\cdot + y_k)$ esta concentrada, es decir para cualquier $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que, $\int_{|x - y_k| \leq R} \rho_{n_k}(x) dx \geq \lambda - \epsilon$.*

2. *(Desvanecimiento) Para cualquier $R > 0$,*

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq R} \rho_{n_k}(x) dx = 0$$

3. *(Dicotomía) Existe $\alpha \in (0, \lambda)$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$, existen $k_0 \geq 1$ y $\rho^1_{n_k}, \rho^2_{n_k} \geq 0$, tales que para $k \geq k_0$,*

$$|\rho_{n_k} - (\rho^1_{n_k} + \rho^2_{n_k})|_{L^1} \leq \epsilon,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho^1_k(x) dx - \alpha \right| \leq \epsilon, \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2_k(x) dx - (\lambda - \alpha) \right| \leq \epsilon,$$

Además, $supp\rho^1_{n_k} \cap supp\rho^2_{n_k} = \emptyset$. $dist(supp\rho^1_k, supp\rho^2_k) \to \infty$ cuando $k \to \infty$

Demostración. Ver Lema 1.1 en Lions [48] □

2 ZK generalizada en el espacio $H^s\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$

En este capítulo, trataremos el buen planteamiento del problema de valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} u_t = \partial_x\left(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u\right) - u^p u_x & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T},\ t\in\mathbb{R} \\ u\left(x,y,0\right) = \phi\left(x,y\right) & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T} \end{cases} \tag{2-1}$$

con $0\leq\alpha,\beta\leq 1,\ p\in\mathbb{Z}^+$ en los espacios de Sobolev $H^s\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$. Con esto en mente, el capítulo sera dividido en dos secciones. En la primera, usaremos la técnica de regularización parabólica con el fin de demostrar el Teorema (Teorema 0.1) y en la segunda, usaremos estimativas de energía junto con estimativas Strichartz localizadas con el fin de mejorar el resultado de buen planteamiento local obtenido en la sección anterior, para ciertos valores de los parámetros de dispersión α,β y para la no linealidad fija en $p=1$ (Teoremas 0.2 y 0.3). La razón de elegir estas técnicas radica en cierta similitud entre ellas a pesar de sus diferencias, pues las ideas de Bona-Smith [9] juega un papel fundamental en ambas.

2.1. Buen Planteamiento Local $H^s, s>2$

Iniciaremos esta sección regularizando el PVI (2-1) y estableciendo el buen planteamiento local, usando las propiedades de regularización del semigrupo y un argumento de punto fijo, posteriormente obtenemos un tiempo de existencia y una estimativa de energía de estas soluciones independiente del parámetro de regularización, el cual sera clave al tomar el limite $\mu\to 0^+$ y encontrar la solución. Consideraremos el problema regularizado,

$$\begin{cases} u_t - \partial_x\left(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u\right) + u^p u_x + \mu\Delta^2 u = 0 & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T},\ t\in\mathbb{R}, \mu>0 \\ u\left(x,y,0\right) = \phi\left(x,y\right) & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}, \end{cases} \tag{2-2}$$

donde, la solución al problema lineal asociado es:

$$\mathbb{W}_\mu\phi = e^{-tA_\mu}\phi = C\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi+yn+t\left(\xi|\xi|^{1+\alpha}\pm\xi|n|^{1+\beta}\right)\right)}e^{-\mu t\left(\xi^2+n^2\right)^2}\hat{\phi}\left(\xi,n\right)d\xi, \tag{2-3}$$

y

$$A_\mu = -\partial_x\left(D_x^{1+\alpha}\pm D_y^{1+\beta}\right)+\mu\Delta^2$$

Lema 2.1 (Regularización).
Si $\mu > 0$ y $\lambda \geq 0$, entonces, para todo $t > 0$ existe una constante C_λ tal que,

$$\|\mathbb{W}_\mu \phi\|_{H^{r+\lambda}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leq C_\lambda \left(1 + (\mu t)^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2-4}$$

Demostración. En consecuencia de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{W}_\mu \phi\|^2_{r+\lambda} &= C \sum_{\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \xi^2 + n^2\right)^{r+\lambda} \left| e^{it\left(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|n|^{1+\beta}\right)} e^{-\mu t\left(\xi^2+n^2\right)^2} \hat{\phi} \right|^2 d\xi \\
&\lesssim \sum_{\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \xi^2 + n^2\right)^{r+\lambda} e^{-\mu t\left(\xi^2+n^2\right)^2} \left|\hat{\phi}\right|^2 d\xi \\
&\lesssim \sup_{(\xi,n)} \left\{ \left(1 + \xi^2 + n^2\right)^{\lambda} e^{-\mu t\left(\xi^2+n^2\right)^2} \right\} \|\phi\|^2_r \\
&\lesssim_\lambda \left(1 + (\mu t)^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \|\phi\|^2_r .
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.
Si $\mu > 0$, $s > 1$ y $\lambda \geq 0$, entonces, para todo $t > 0$ existe una constante $C = C(\lambda, p)$ tal que,

$$\|\mathbb{W}_\mu \phi\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leq \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \tag{2-5}$$

y

$$\|\mathbb{W}_\mu (t - t') u^p u_x\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leq C \left(1 + (\mu (t - t'))^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \|u\|^{p+1}_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}. \tag{2-6}$$

Demostración. Usando el Lema 2.1 con $s = (s-1) + 1$, obtenemos la desigualdad,

$$\|\mathbb{W}_\mu (t - t') u^p u_x\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leq C_\lambda \left(1 + (\mu (t - t'))^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \|u^p u_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}.$$

Como $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ es un algebra de Banach para $s > 1$, entonces,

$$\|u^p u_x\|_{s-1} = \left\| \frac{1}{p+1} \partial_x \left(u^{p+1}\right) \right\|_{s-1} = \frac{1}{p+1} \left\|u^{p+1}\right\|_s \leq C \|u\|^{p+1}_s .$$

□

Teorema 2.1.
Si $\mu > 0$ y $s > 1$ el PVI(2-2) esta bien planteado localmente en $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

Demostración. Sea,

$$\mathbf{\Psi}(u)(t) = \mathbb{W}_\mu(t)\phi - \int_0^t \mathbb{W}_\mu (t - t') u^p u_x dt'$$

la ecuación integral equivalente al problema PVI(2-2). Para $T > 0, \mu > 0$, se define el espacio métrico completo,

$$\chi_T = \left\{ u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})) ; \|u - \mathbb{W}_\mu \phi\|_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \leq M \right\},$$

con la métrica inducida por la métrica de $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$.

1. **$\boldsymbol{\Psi}$ es una contracción**. Es decir, veamos que existe $T>0$ tal que $\boldsymbol{\Psi}:\chi_T\to\chi_T$ es una contracción. En efecto, si $u\in\chi_T$, entonces, $\|u\|_s\leq M+\|\phi\|_s$ y

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Psi}(u)(t)-\mathbb{W}_\mu\phi\|_s &\leq \int_0^t \|\mathbb{W}_\mu(t-t')\,u^p u_x\|_s\,dt' \\ &\lesssim \int_0^t \left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)\|u\|_s^{p+1}\,dt' \\ &\lesssim (M+\|\phi\|_s)^{p+1}\left(T+\frac{4}{3}\mu^{-\frac{1}{4}}T^{\frac{3}{4}}\right).\end{aligned} \tag{2-7}$$

   Ahora, sean $u_1,u_2\in\chi_T$, entonces, $\|u_1\|_s\leq M+\|\phi\|_s$, $\|u_2\|_s\leq M+\|\phi\|_s$ y

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Psi}(u_1)(t)-\boldsymbol{\Psi}(u_2)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\mathbb{W}_\mu(t-t')\,(u_1^p\partial_x u_1-u_2^p\partial_x u_2)\|_s\,dt' \\ &\lesssim \int_0^t \left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)\left\|\partial_x\left(u_1^{p+1}-u_2^{p+1}\right)\right\|_{s-1}dt' \\ &\lesssim \int_0^t \left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)\left\|u_1^{p+1}-u_2^{p+1}\right\|_s dt' \\ &\lesssim L(M+\|\phi\|_s, M+\|\phi\|_s)\,\underset{[0,T]}{sup}\|u_1-u_2\|_s\left(T+\frac{4}{3}\mu^{-\frac{1}{4}}T^{\frac{3}{4}}\right),\end{aligned} \tag{2-8}$$

   pues $u_1^{p+1}-u_2^{p+1}=(u_1-u_2)\,q(u_1,u_2)$, $q(u_1,u_2)=\sum_{j=0}^p u_1^j u_2^{p-j}$ y $L(\|u_1\|_s,\|u_2\|_s)=\sum_{j=0}^p\|u_1\|_s^j\|u_2\|_s^{p-j}$. Así que, eligiendo adecuadamente T, (2-8) y (2-7) implicarían que $\boldsymbol{\Psi}$ es contracción.

2. **Unicidad en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$**. Considere dos soluciones u_1 y u_2 en $C([0,T_\mu]:H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ con respectivos datos iniciales ϕ_1 y ϕ_2 tal que $N=\text{máx}\left\{\underset{[0,T_\mu]}{\text{sup}}\|u_1\|_s,\underset{[0,T_\mu]}{\text{sup}}\|u_2\|_s\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|u_1(t)-u_2(t)\|_s &\leq \|\mathbb{W}_\mu(t)(\phi_1-\phi_2)\|_s+\int_0^t\|\mathbb{W}_\mu(t-t')\,(u_1^p\partial_x(u_1)-u_2^p\partial_x(u_2))\|_s\,dt' \\ &\leq \|\phi_1-\phi_2\|_s+\int_0^t L(\|u_1\|_s,\|u_2\|_s)\|u_1-u_2\|_s\left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)dt' \\ &\leq \|\phi_1-\phi_2\|_s+pN^p\int_0^t\|u_1-u_2\|_s\left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)dt'.\end{aligned}$$

   Aplicando la desigualdad de Gronwall,

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_s\leq\|\phi_1-\phi_2\|_s\,e^{pN^p\int_0^t\left(1+(\mu(t-t'))^{-\frac{1}{4}}\right)dt'}\leq\|\phi_1-\phi_2\|_s\,e^{C\left(T_\mu+\frac{4}{3}\mu^{-\frac{1}{4}}T_\mu^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

3. **Dependencia continua**. Considere la sucesión $(\phi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ con $\phi_m\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $\phi_m\to\phi$ cuando $m\to\infty$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, con respectivas soluciones $u_{\mu m}\in C([0,T_m];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$

y con $T_m = T\left(\mu, s, \|\phi_m\|_s\right)$ los tiempos de existencia del problema con datos iniciales ϕ_m. Como T_m es una función continua de $\|\phi_m\|_s$, $T_m \to T_\infty$ cuando $m \to \infty$, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > N$ se cumple

$$|T\left(\|\phi_m\|_s\right) - T\left(\|\phi_\infty\|_s\right)| < \frac{T\left(\|\phi_\infty\|_s\right)}{2},$$

es decir

$$\frac{T\left(\|\phi_\infty\|_s\right)}{2} < T\left(\|\phi_m\|_s\right) < \frac{3T\left(\|\phi_\infty\|_s\right)}{2},$$

si $m > N$. Eligiendo,

$$T = min\left\{T^*, T\left(\|\phi_1\|_s\right), \cdots, T\left(\|\phi_N\|_s\right)\right\}, \tag{2-9}$$

Tenemos que, $\|u_m\|_s \leq \|\phi_m\|_s + M \leq L + M$ y $\|\phi_\infty\|_s \leq L + M$ donde $L = \sup_m \|\phi_m\|_s$. Usando los mismos argumentos del item de unicidad tenemos,

$$\|u_m(t) - u_\infty(t)\|_s \lesssim \|\phi_m - \phi_\infty\|_s. \tag{2-10}$$

□

El buen planteamiento local para $\mu > 0$, implica el siguiente resultado:

Lema 2.3.
Sean, $\mu > 0$, $s > 1$ y $u_\mu \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$ la solución del PVI (2-2). Entonces, $u_\mu \in C\left((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$

Demostración. Por el Teorema 2.1 se tiene que,

$$u_\mu(t) = \mathbb{W}_\mu(t)\,\phi - \int_0^t \mathbb{W}_\mu(t-t')\,u_\mu^p \partial_x u_\mu dt'$$

y por el Lema 2.1, $\mathbb{W}_\mu(t)\,\phi \in H^\infty$, para todo $t > 0$. Entonces, basta con acotar la parte no lineal, sea $0 < 1 + \theta < 4$, $s + \theta = s - 1 + \lambda$ y $\lambda = 1 + \theta$, entonces, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\|\mathbb{W}_\mu(t-t')\,u_\mu^p \partial_x u_\mu\right\|_{s-1+\lambda} dt' &\lesssim \int_0^t \left(1 + (\mu(t-t'))^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \left\|u_\mu^p \partial_x u_\mu\right\|_{s-1} dt' \\
&\lesssim \int_0^t \left(1 + (\mu(t-t'))^{-\frac{\lambda}{4}}\right) \|u_\mu\|_s^{p+1} dt' \\
&\lesssim \sup_{[0,T]} \|u_\mu\|_s^{p+1} \left(T + \frac{4}{4-\lambda}\mu^{-\frac{\lambda}{4}} T^{\frac{4-\lambda}{4}}\right),
\end{aligned}$$

así $u_\mu \in C\left((0,T]; H^{s+\theta}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$. Repitiendo el mismo argumento para $u_\mu \in H^{s-1+\lambda}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces, se concluye que, $u_\mu \in C\left((0,T]; H^{(s-1+\lambda)-1+\lambda}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$. Note que $s + 2\theta = (s - 1 + \lambda) - 1 + \lambda$, entonces, de manera inductiva obtenemos el resultado. □

Para obtener la existencia de la solución del problema (2-1), necesitamos de ciertos lemas previos los cuales procederemos a establecer:

Lema 2.4.
Sean, $s>2$, $\mu>0$ y $u_\mu\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ solución PVI (2-2). Entonces, existe $T_s=T(s,\|\phi_m\|_s)>0$ y $M>0$ independientes de μ, tal que $u_\mu\in C([0,T_s];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ y $\sup\limits_{[0,T_s]}\|u_\mu(t)\|_s\leq M$.

Demostración. El Lema 2.3 implica que $u_\mu\in C((0,T_\mu];H^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ para cada $\mu>0$. Así que,

$$(u_\mu\mid\partial_t u_\mu)_s+\mu(\Delta u_\mu\mid\Delta u_\mu)_s=-\left(u_\mu\mid\partial_x\left(D_x^{1+\alpha}u_\mu\pm D_y^{1+\beta}u_\mu\right)\right)_s-\left(u_\mu\mid u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_s, \quad (2\text{-}11)$$

implica,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu\|_s^2+\mu\|\Delta u_\mu\|_s^2\lesssim\|u_\mu\|_s^{p+2}.$$

Pues, el primer sumando del lado derecho de (2-11) se anula ya que el operador $\partial_x(D_x^{1+\alpha}+D_y^{1+\beta})$ es antisimétrico y el segundo sumando es acotado de la siguiente manera en virtud de la desigualdad de Kato (Teorema 1.3),

$$\left(u_\mu\mid u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\lesssim\left\|\partial_x u_\mu^p\right\|_{s-1}\|u_\mu\|_s^2\lesssim\left\|u_\mu^p\right\|_s\|u_\mu\|_s^2\lesssim\|u_\mu\|_s^{p+2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu\|_s^2\lesssim\|u_\mu\|_s^{p+2}. \quad (2\text{-}12)$$

Observe que, $\rho(t)=\|\phi\|_s^2\left(1-Cpt\|\phi\|_s^p\right)^{-\frac{2}{p}}$ es la solución de,

$$\begin{cases}\partial_t\rho(t) &= 2C\rho(t)^{\frac{p+2}{2}}\\ \rho(0) &= \|\phi\|_s^2\end{cases} \quad (2\text{-}13)$$

para $t\in[0,T^*)$ con $T^*=\left(Cp\|\phi\|_s^p\right)^{-1}$. El Teorema 1.4, junto con (2-13) y (2-12) implican que,

$$\|u_\mu\|_s^2<\rho(t). \quad (2\text{-}14)$$

para $t\in[0,T^*)$. □

Lema 2.5.
Sean, $\phi\in H^{s+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $s>2$, $\mu>0$ y $u_\mu\in C([0,T_{s+1}(\|\phi\|_s)];H^{s+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ las soluciones correspondientes definidas en el intervalo independiente de μ, $[0,T_{s+1}(\|\phi\|_s)]$ (garantizadas por el Lema 2.4). Entonces, u_μ puede ser extendida si es necesario al intervalo $[0,T_s]$ con ϕ visto como un elemento de $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$

Demostración. Como, $T_s>T_{s+1}$, la ecuación (2-11) implica que,

$$\partial_t\|u_\mu\|_{s+1}^2\leq\left|\left(u_\mu(t)\mid u_\mu^p\partial_x u_\mu(t)\right)_{s+1}\right| \quad (2\text{-}15)$$

El lado izquierdo de (2-15) es acotado usando la desigualdad de Kato (Teorema 1.3), así:

$$\begin{aligned}\left|\left(u_\mu(t) \mid u_\mu^p \partial_x\left(u_\mu(t)\right)\right)_{s+1}\right| &\lesssim \|u_\mu\|_s^p \|u_\mu\|_{s+1}^2 + \left\|\partial_x\left(u_\mu^p\right)\right\|_s \|u_\mu\|_s \|u_\mu\|_{s+1} \\ &\lesssim \|u_\mu\|_s^p \|u_\mu\|_{s+1}^2 + \|u_\mu\|_s^{p-1} \|u_\mu\|_{s+1} \|u_\mu\|_s \|u_\mu\|_{s+1} \\ &\lesssim \|u_\mu\|_s^p \|u_\mu\|_{s+1}^2,\end{aligned}$$

que junto con (2-15) y un proceso de integración implica,

$$\|u_\mu\|_{s+1}^2 \lesssim \|\phi\|_{s+1}^2 + \sup_{[0,T_{s+1}]} \|u_\mu\|_s^p \int_0^t \|u_\mu\|_{s+1}^2 \, dt'. \tag{2-16}$$

La desigualdad de Gronwall, $\|u_\mu\|_{s+1}^2 \lesssim \|\phi\|_{s+1}^2$ y un procedimiento estándar de extensión implican el resultado. □

Se establece ahora, un resultado que se utilizará para la prueba de la dependencia continua del dato inicial,

Lema 2.6.
Si $T \in (0, T_{s,\infty})$ fijo, existe un entero positivo N_s y una constante $M > 0$ tal que $T_{s,m} \geq T$ para toda $n \geq N_s$ y $\|u_{\mu,m}(t)\|_s \leq M$ para todo $t \in [0,T]$.

Demostración. De manera análoga al Lema 2.4,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\mu,m}\|_s^2 \lesssim \|u_{\mu,m}\|_s^{p+2}. \tag{2-17}$$

Así, $\|u_{\mu,m}\|_s^2 < \rho(t)$ para $t \in (0,T)$ con $0 < T < T_m^*$, $\rho(t) = \|\phi_m\|_s^2 \left(1 - Cpt\|\phi_m\|_s^p\right)^{-\frac{2}{p}}$ y $T_m^* = \left(Cp\|\phi_m\|_s^p\right)^{-1}$. □

2.1.1. Existencia y Unicidad de la Solución

En esta sección probaremos el buen planteamiento local del PVI (2-1). Con esto en mente, demostraremos que, $\lim_{\mu\to 0} u_\mu = u_0$ existe y satisface (2-1) en H^{s-3} débilmente. Posteriormente probaremos la unicidad de la solución de (2-1).

Teorema 2.2.
Si $s > 2$ y $\phi \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, existen $T > 0$ y una función $u_0 \in C_w([0,T]; H^s) \cap C_w^1([0,T]; H^{s-3})$ tal que $u_0(0) = \phi$ y u_0 satisface la ecuación diferencial débilmente, es decir,

$$\partial_t (u_0 \mid \psi)_{s-3} = \left(\partial_x\left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t) - u_0^p(t)\,\partial_x u_0(t) \mid \psi\right)_{s-3}, \tag{2-18}$$

equivalentemente,

$$(u_0 \mid \psi)_{s-3} = (\phi \mid \psi)_{s-3} + \int_0^t \left(\partial_x\left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t') - u_0^p(t')\,\partial_x u_0(t') \mid \psi\right)_{s-3} dt'$$

para todo $\psi\in H^{s-3}$ *y* $t\in[0,T]$. *Además,* $\|u_0(t)\|_s\leq\rho(t)$ *y* $u_0\in AC([0,T];H^{s-3}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ *es decir,*

$$u_0(t)=\phi+\int_0^t\partial_x\left(D_x^{1+\alpha}\pm D_y^{1+\beta}\right)u_0(t')-u_0^p(t')\,\partial_x u_0(t')\,dt'. \tag{2-19}$$

Demostración. La prueba se llevara acabo en los siguientes pasos:

1. $(u_\mu(t))_{\mu>0}$ es una red de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y uniforme en $[0,T]$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\|u_\mu-u_\gamma\|_{L^2}^2=&-\left(u_\mu-u_\gamma\mid\Delta^2(\mu u_\mu-\gamma u_\gamma)\right)_{L^2}\\&+\left(u_\mu-u_\gamma\mid\partial_xD_x^{1+\alpha}(u_\mu-u_\gamma)\pm\partial_xD_y^{1+\beta}(u_\mu-u_\gamma)\right)_{L^2}\\&-\left(u_\mu-u_\gamma\mid u_\mu^p\partial_xu_\mu-u_\gamma^p\partial_xu_\gamma\right)_{L^2}.\end{aligned} \tag{2-20}$$

   El primer sumando del lado derecho de, (2-20) es acotado por,

$$|\gamma-\mu|\left(\|u_\mu\|_2+\|u_\gamma\|_2\right)\|u_\gamma\|_2 \tag{2-21}$$

   que se obtiene al sumar el término $(u_\mu-u_\gamma\mid\Delta^2(\mu u_\gamma-\mu u_\gamma))_{L^2}$ y aplicar Cauchy- Schwartz. Como, $\underset{[0,T]}{sup}\|u_\mu\|_s\leq M$ debido al Lema 2.4, (2-21) es acotado por $2|\gamma-\mu|M^2$. El segundo sumando del lado derecho de, (2-20) resulta ser cero por la antisimetría del operador. El tercer sumando del lado derecho de, (2-20) es acotado por,

$$\frac{1}{2(p+1)}\|u_\mu-u_\gamma\|_{L^2}^2\|\partial_x\tilde{q}(u_\mu,u_\gamma)\|_{L^\infty}\leq\frac{1}{2(p+1)}\|u_\mu-u_\gamma\|_{L^2}^2\|\tilde{q}(u_\mu,u_\gamma)\|_s,$$

   donde $\tilde{q}=\sum_0^p u_\mu^ju_\gamma^{p-1-j}$. Haciendo, $M=\underset{[0,T]}{sup}\sqrt{\rho(t)}$, el Lema 2.4 y la desigualdad de Gronwall, implican,

$$\|u_\mu-u_\gamma\|_{L^2}\leq2M^2|\mu-\gamma|\,e^{\int_0^t\frac{1}{2(p+1)}M^pdt'}\lesssim|\mu-\gamma|.$$

   Ya que, $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ es completo, existe un $u_0\in C([0,T];L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ tal que,

$$\lim_{\mu\to0}\underset{[0,T]}{sup}\|u_\mu(t)-u_0(t)\|_{L^2}=0.$$

2. $(u_\mu(t))_{\mu>0}$ es una red de Cauchy débil en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y uniforme $[0,T]$. En efecto, sean $\varphi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\epsilon>0$, $\varphi_\epsilon\in\mathcal{S}$ tal que $\|\varphi-\varphi_\epsilon\|_s\leq\epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left|(u_\mu-u_\gamma\mid\varphi)_s\right|&\leq\left(\|u_\mu\|_s+\|u_\gamma\|_s\right)\|\varphi-\varphi_\epsilon\|_s+\|u_\mu-u_\gamma\|_{L^2}\|\varphi_\epsilon\|_s\\&\leq2M\epsilon+C|\mu-\gamma|,\end{aligned} \tag{2-22}$$

   que es consecuencia de sumar al lado izquierdo de (2-22) el término $(u_\mu-u_\gamma\mid\varphi_\epsilon-\varphi_\epsilon)_s$. Como $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ es reflexivo, es débilmente completo, así que, existe un $v\in C_w([0,T];H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ tal que,

$$\lim_{\mu\downarrow0}(u_\mu(t)\mid\varphi)_s=(v\mid\varphi)_s.$$

Respecto al ítem anterior, $u_0(t) = v(t)$ para todo $t \in [0,T]$, ya que, $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) = (L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))' \subset (H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))'$ y el límite débil es único. El Lema 2.4, implica que,

$$\|u_0\|_{H^s} \leq \sup_{\|\psi\|_s=1} |(u_0 \mid \psi)_s| = \sup_{\|\psi\|_s=1} \left| \left(\lim_{\mu\downarrow 0} u_\mu \mid \psi \right)_s \right| \leq \rho(t) \leq M,$$

para todo $t \in [0,T]$.

3. Para $u_\mu \in H^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\psi \in H^{s-3}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\mu > 0$ y $t \in [0,T]$, tenemos:

$$\begin{aligned}(u_\mu \mid \psi)_{s-3} = &(\phi \mid \psi)_{s-3} \\ &+ \int_0^t \left(\partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_\mu(t') - u_\mu^p(t')\,\partial_x u_\mu(t') - \mu\Delta^2 u_\mu \mid \psi\right)_{s-3} dt',\end{aligned}$$

que al tomar el límite cuando, $\mu \downarrow 0$ y observando que,

$$\left(\partial_x D_x^{1+\alpha} u_\mu \mid \psi\right)_{s-3} = -\left(u_\mu \mid \partial_x D_x^{1+\alpha}\psi\right)_{s-3} \to -\left(u_0 \mid \partial_x D_x^{1+\alpha}\psi\right)_{s-3} = \left(\partial_x D_x^{1+\alpha} u_0 \mid \psi\right)_{s-3}$$

y que,

$$\partial_x u_\mu^{p+1} \rightharpoonup \partial_x u_0^{p+1},$$

que se obtiene de razonar de manera análoga y usando la convergencia fuerte en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Por lo tanto,

$$(u_0 \mid \psi)_{s-3} = (\phi \mid \psi)_{s-3} + \int_0^t \left(\partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t') - u_0^p(t')\,\partial_x u_0(t') \mid \psi\right)_{s-3} dt'.$$

Derivando respecto a t esta expresión se obtiene (2-18) y que $u_0 \in C_w([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})) \cap C_w^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$. Además, como consecuencia del Teorema de Bochner-Pettis la aplicación,

$$t \longmapsto \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t) - u_0^p(t)\,\partial_x u_0(t)$$

resulta fuertemente medible y existe como integral de Bochner, por lo tanto, concluimos que, $u \in AC([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$.

□

La unicidad de la solución del PVI(2-1) es consecuencia del siguiente lema,

Lema 2.7 (Unicidad).
Sean, $T > 0$, $\phi_j \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ $j = 1,2$, $u_j : [0,T] \mapsto H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *tal que* $u_j(0) = \phi_j$ *y* $u_j \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})) \cap C_w([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})) \cap AC([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$. *Entonces,* $\|u_1 - u_2\|_{L^2} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2} e^{L(M,M)t}$ *y* $M = max\left\{ \sup_{[0,T]} \|u_1\|_s, \sup_{[0,T]} \|u_2\|_s \right\}$.

Demostración. Sea, $w = u_1 - u_2$. Teniendo en cuenta que $\left\langle \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} \right) w(t) \mid w(t) \right\rangle_s = 0$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \|w\|_{L^2}^2 &= \lim_{h\to 0} \frac{\|w(t+h)\|_{L^2}^2 - \|w(t)\|_{L^2}^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{w(t+h)-w(t)}{h} \mid w(t+h) \right\rangle_s + \left\langle \frac{w(t+h)-w(t)}{h} \mid w(t) \right\rangle_s \\
&= 2\left\langle \partial_t w(t) \mid w(t) \right\rangle_s \\
&= 2\left\langle \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} \right) w(t) - \left(u_1^p(t)\,\partial_x u_1(t) - u_2^p(t)\,\partial_x u_2(t) \right) \mid w(t) \right\rangle_s \\
&= -2\left\langle u_1^p(t)\,\partial_x u_1(t) - u_2^p(t)\,\partial_x u_2(t) \mid w(t) \right\rangle_s \\
&= -2\left(u_1^p(t)\,\partial_x u_1(t) - u_2^p(t)\,\partial_x u_2(t) \mid w(t) \right)_{L^2} \\
&\qquad + \left(u_2^p(t)\,\partial_x u_1(t) - u_2^p(t)\,\partial_x u_1(t) \mid w(t) \right)_{L^2} \\
&\leq \left(\|q(u_1,u_2)\|_s \|u_1\|_s + \|u_2\|_s^p \right) \|w\|_{L^2},
\end{aligned}$$

donde, la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad Cauchy-Schwartz y el Lema de Sobolev, siendo $q = \sum_0^p u_1^j u_2^{p-1-j}$. Ahora, si $L\left(\|u_1\|_s, \|u_2\|_s\right) = \|q(u_1,u_2)\|_s \|u_1\|_s + \|u_2\|_s^p$, la desigualdad de Gronwall conduce a la desigualdad,

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{\int_0^t L(M,M)dt'}.$$

□

Teorema 2.3.
Sean, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\phi \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *y* $s > 2$. *Entonces, existe un* $T > 0$ *y una única* $u_0 \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$ *que satisface el PVI (2-1).*

Demostración. La unicidad se tiene por el Lema 2.7 falta ver que $u_0 \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$. Sea, $\varphi \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ con $\|\varphi\|_s = 1$ y por el Lema 2.2, $\|u_0(t)\|_s \leq \rho(t)$, entonces,

$$\begin{aligned}
(\phi \mid \varphi)_s &= \lim_{t\downarrow 0} |(u_0(t) \mid \varphi)_s| = \lim_{t\downarrow 0} \; inf\, |(u_0(t) \mid \varphi)_s| \leq \lim_{t\downarrow 0} \; inf\, \|u_0(t)\|_s \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0} \; sup\, \|u_0(t)\|_s \leq \lim_{t\downarrow 0} \; sup\left(\rho(t)\right) = \|\phi\|_s .
\end{aligned} \tag{2-23}$$

Tomando el supremo en (2-23) sobre $\|\phi\|_s = 1$, se obtiene, $\lim_{t\downarrow 0} \; inf\, \|u_0(t)\|_s = \lim_{t\downarrow 0} sup\, \|u_0(t)\|_s$. Por lo tanto el límite existe y $\lim_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s = \|\phi\|_s$. Además $u_0(t) \rightharpoonup \phi$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces, $\lim_{t\downarrow 0} u_0(t) = \phi$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y así continua por derecha en cero. Ahora, tomando $t^* \in (0,T)$ y $v(t^*)$ la única solución débil de

$$\begin{cases} v_t = \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} v \pm D_y^{1+\beta} v \right) - v^p v_x & (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T},\ t \in \mathbb{R} \\ v(x,y,0) = u_0(t) & (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}, \end{cases}$$

la unicidad de la solución implica que $v(t^*) = u(t+t^*)$ y razonando como en (2-23), u resulta continua por derecha en t^*. Para probar la continuidad por izquierda de u_0 en $(0,T]$ sera consecuencia de un razonamiento análogo con $w(t,x,y) = u(t^*-t,-x,-y)$. □

2.1.2. Dependencia Continua (Aproximación Bona-Smith)

Para la prueba de la dependencia continua usamos las ideas de Bona-Smith en [9]. Los siguientes resultados permitirán establecer la dependencia continua del dato inicial.

Lema 2.8.
Sean, $\phi \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $s>2$, $\tau>0$ *y*

$$\phi^\tau = e^{\left(-\tau(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}\right)}\phi = \left(e^{\left(-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)}\hat{\phi}(\xi,n)\right)^\vee. \tag{2-24}$$

Entonces, $\lim_{\tau\downarrow 0}\|\phi^\tau-\phi\|_s = 0$ *, existe una constante* $C>0$*, tal que,*

$$\|\phi^\tau\|_{s+1} \le C\left(1+\left(\frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{2}{s}}\right)^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_s \tag{2-25}$$

y

$$\left\|\phi^\tau-\phi^\theta\right\|_{L^2}^2 \le C|\tau-\theta|\,\|\phi\|_s \tag{2-26}$$

Demostración. 1. Como,

$$\begin{aligned}\left\|e^{\left(-\tau(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}\right)}\phi-\phi\right\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+\xi^2+n^2\right)^s\left|e^{\left(-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)}-1\right|^2\left|\hat{\phi}\right|^2 d\xi\\ &\le 4\|\phi\|_s^2\end{aligned}$$

y

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\left|e^{\left(-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)}-1\right| = 0.$$

Entonces, el Teorema de convergencia dominada implica que,

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\|\phi^\tau-\phi\|_s = 0. \tag{2-27}$$

2. Ahora, la desigualdad (2-25) es consecuencia de

$$\begin{aligned}\left\|e^{\left(-\tau(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}\right)}\phi\right\|_{s+1}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+\xi^2+n^2\right)^{s+1}\left|e^{-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}}\hat{\phi}\right|^2 d\xi\\ &\le \sup_{(\xi,n)}\left(\left(1+\xi^2+n^2\right)e^{-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}}\right)\|\phi\|_s^2\\ &\le C_s\left(1+\left(\frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{2}{s}}\right)\|\phi\|_s^2.\end{aligned}$$

3. Finalmente, tenemos que (2-26) es consecuencia del Teorema del valor medio,

$$\begin{aligned}\left\|\phi^\tau-\phi^\theta\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left|e^{\left(-\tau\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)}-e^{\left(-\theta\left(1+\xi^2+n^2\right)^{\frac{s}{2}}\right)}\right|^2\left|\hat{\phi}\right|^2 d\xi\\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+\xi^2+n^2\right)^s|\tau-\theta|^2\left|\hat{\phi}\right|^2 d\xi\\ &\leq |\tau-\theta|\left\|\phi\right\|_s.\end{aligned}$$

□

Sea, $\phi_m\to\phi_\infty$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, acorde al trabajo realizado existe un $T_m=T(\|\phi_m\|_s)$ y una única $u_m\in C([0,T_m])$ que satisface el PVI (2-1) con $u(0)=\phi_m$. ϕ_m^τ es la aproximación definida en (2-24) y $u_{\mu,m}^\tau$ las correspondientes soluciones al PVI(2-2). Ya que, $\phi_m^\tau\to\phi_m$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, cuando $\tau\downarrow 0$ para todo $m=1,2,3\cdots,\infty$ por el Lema 2.6 todas estas soluciones están definidas en $[0,T]$ para m suficientemente grande y τ suficientemente pequeño y existe $M>0$, tal que, $\left\|u_{\mu,m}^\tau\right\|_s\leq M$ para todo $t\in[0,T]$.

Teorema 2.4.
Sean, $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $s>2$, ϕ_m^τ y $u_{\mu,m}^\tau$ como antes, entonces, para cada $\mu>0$ y m suficientemente grande, $(u_{\mu,m}^\tau)$ es de Cauchy y converge uniformemente sobre $[0,T]$. En particular,

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\ \sup_{[0,T]}\left\|u_{\mu,m}^\tau(t)-u_{\mu,m}(t)\right\|_s=0 \tag{2-28}$$

Demostración. Sean, τ_0 y N_0 tal que, $u_{\mu,m}^\tau(t)$ esta definida en $[0,T]$. Entonces, para todo $0<\tau\leq\tau_0$, $m\geq N_0$ y $w=u_{\mu,m}^\tau-u_{\mu,m}^\theta$ tenemos que,

$$\begin{aligned}\partial_t\|w\|_s^2 &= -2\left((u_{\mu,m}^\tau)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\tau(t)-(u_{\mu,m}^\theta)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\theta(t)\mid w(t)\right)_s \qquad (2\text{-}29)\\ &= -2\left((u_{\mu,m}^\tau)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\tau(t)-(u_{\mu,m}^\theta)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\theta(t)\mid w(t)\right)_s\\ &\qquad +2\left((u_{\mu,m}^\theta)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\tau(t)-(u_{\mu,m}^\tau)^p(t)\,\partial_x u_{\mu,m}^\tau(t)\mid w(t)\right)_s\\ &\leq \left|\left((u_{\mu,m}^\theta)^p\partial_x\left(u_{\mu,m}^\tau-u_{\mu,m}^\theta\right)\mid w(t)\right)_s|+|\left(\left((u_{\mu,m}^\tau)^p-(u_{\mu,m}^\theta)^p\right)\partial_x u_{\mu,m}^\tau\mid w(t)\right)_s\right|\\ &\leq CM^p\|w\|_s^2\\ &\qquad +\|w\|_s\left[\left\|(u_{\mu,m}^\tau)^p-(u_{\mu,m}^\theta)^p\right\|_s\left\|u_{\mu,m}^\tau\right\|_s+\left\|(u_{\mu,m}^\tau)^p-(u_{\mu,m}^\theta)^p\right\|_{s_0}\left\|u_{\mu,m}^\tau\right\|_{s+1}\right]\end{aligned}$$

El primer sumando de la última linea de la desigualdad anterior es consecuencia de la desigualdad de Kato (Teorema 1.3) y el segundo sumando es acotado, por el Lema 1.4. Para lograr acotar los últimos dos términos, observe que $\|w\|_s\left\|(u_{\mu,m}^\tau)^p-(u_{\mu,m}^\theta)^p\right\|_s\left\|u_{\mu,m}^\tau\right\|_s\leq CM^p\|w\|_s^2$, razonando como en (2-8) pero con $q(u_{\mu,m}^\tau,u_{\mu,m}^\theta)$ y para el otro sumando, en vista de las propiedades de las aproximaciones (Lema 2.8), para todo $\tau\leq\tau_0$ tenemos que, $\left\|u_{\mu,m}^\tau\right\|_{s+1}\leq C\|\phi_m\|_s\tau^{-\frac{1}{s}}$. Así, solo faltaría acotar

$\left\|(u^\tau_{\mu,m})^p - (u^\theta_{\mu,m})^p\right\|_{s_0}$. Tomando, $\lambda = \frac{s_0}{s}$ e interpolando,

$$\begin{aligned}\left\|(u^\tau_{\mu,m})^p - (u^\theta_{\mu,m})^p\right\|_{s_0} &\leq \left\|q(u^\tau_{\mu,m}, u^\theta_{\mu,m})\right\|_{s_0} \left\|u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}\right\|_{s_0} \\ &\leq C \left\|u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}\right\|^\lambda_{s_0} \left\|u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}\right\|^{1-\lambda}_{L^2} \\ &\leq C(2M^\lambda) \left\|u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}\right\|^{1-\lambda}_{L^2}.\end{aligned}$$

Para terminar faltaría estimar $\left\|u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}\right\|_{L^2}$, entonces, si $w = u^\tau_{\mu,m} - u^\theta_{\mu,m}$,

$$\begin{aligned}\partial_t \|w\|^2_{L^2} &= -2\left((u^\tau_{\mu,m})^p(t)\,\partial_x u^\tau_{\mu,m}(t) - (u^\theta_{\mu,m})^p(t)\,\partial_x u^\theta_{\mu,m}(t) \mid w(t)\right)_{L^2} \\ &\leq C\frac{1}{p+1}\left\|\partial_x q(u^\tau_{\mu,m}, u^\theta_{\mu,m})\right\|_{L^\infty} \|w\|^2_{L^2} \\ &\leq C\frac{1}{p+1} M^p \|w\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

La desigualdad de Gronwall, implica, $\|w\|^2_{L^2} \leq C\left\|\phi^\tau_m - \phi^\theta_m\right\|_{L^2}$ y por Lema 2.8 $\left\|\phi^\tau_m - \phi^\theta_m\right\|_{L^2} \leq C\tau \|\phi_m\|_s$. Así, por los resultados anteriores,

$$\partial_t \|w\|^2_s \leq C\left(\|w\|^2_s + \tau^{1-\frac{s_0+1}{s}}\right) \tag{2-30}$$

Integrando (2-30) y aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos,

$$\|w\|^2_s \leq \left\|\phi^\tau_m - \phi^\theta_m\right\|^2_s + \tau^{1-\frac{s_0+1}{s}}. \tag{2-31}$$

donde, $0 \leq \theta \leq \tau$. Así, por (2-31), obtenemos,

$$\lim_{\tau\downarrow 0} \|w\|_s = 0$$

y el resultado, sera consecuencia de tomar en $\theta = 0$ (2-31). □

Teorema 2.5.

Sean, $\phi_m \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $s > 2$ y $m = 1, 2, 3\cdots, \infty$ tal que $\phi_m \to \phi_\infty$ cuando $m \to \infty$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $u_{0,m} \in C([0,T_m]; H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ las respectivas soluciones del PVI (2-1). Entonces, dado un $T' \in (0, T_\infty)$, existe un N_0 tal que $T_m \geq T'$ para todo $m > N_0$ y

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{[0,T_\infty]} \|u_{0,m}(t) - u_{0,\infty}(t)\|_s = 0. \tag{2-32}$$

Demostración. Sean, ϕ^τ_m datos iniciales con $m = 1, 2, 3\cdots, \infty$, que satisfacen el Teorema 2.4 y $u^\tau_{\mu,m}$ las correspondientes soluciones del PVI (2-2). Sabemos que dado $T \in (0, T_\infty)$, $u^\tau_{\mu,m} \in C([0,T], H^s)$ para m suficientemente grande y τ suficientemente pequeño. Entonces, para probar (2-32), tenemos que,

$$\begin{aligned}(u_{0,m} - u_{0,\infty} \mid \varphi)_s &= \lim_{\mu\downarrow 0}\left(\left(u_{\mu,m} - u^\tau_{\mu,m} \mid \varphi\right)_s + \left(u^\tau_{\mu,m} - u^\tau_{\mu,\infty} \mid \varphi\right)_s + \left(u^\tau_{\mu.\infty} - u_{\mu,\infty} \mid \varphi\right)_s\right) \qquad (2\text{-}33) \\ &= \lim_{\mu\downarrow 0}\left(\left(u_{\mu,m} - u^\tau_{\mu,m} \mid \varphi\right)_s + \left(u^\tau_{\mu\infty} - u_{\mu,\infty} \mid \varphi\right)_s\right) + \left(u^\tau_{0,m} - u^\tau_{0,\infty} \mid \varphi\right)_s.\end{aligned}$$

Al usar la desigualdad Cauchy-Schwarz y el Teorema 2.4, implican que, dado $\epsilon>0$,

$$\left|\left(u_{\mu,m}-u^{\tau}_{\mu,m}\mid\varphi\right)_s+\left(u^{\tau}_{\mu,\infty}-u_{\mu,\infty}\mid\varphi\right)_s\right|\leq\epsilon\left\|\varphi\right\|_s,$$

así (2-33) resulta,

$$\left|\left(u_{0,m}-u_{0,\infty}\mid\varphi\right)_s\right|\leq\left(\epsilon+\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_s\right)\left\|\varphi\right\|_s. \tag{2-34}$$

Tomando el supremo sobre los $\left\|\varphi\right\|_s=1$ en (2-34),

$$\left\|u_{0,m}-u_{0,\infty}\right\|_s\leq\epsilon+\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_s, \tag{2-35}$$

e interpolando,

$$\begin{aligned}\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|^2_s&\leq\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_{2s}\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_0\\&\leq\left(\left\|u^{\tau}_{\mu,m}\right\|_{2s}+\left\|u^{\tau}_{\mu,\infty}\right\|_{2s}\right)\left\|\phi^{\tau}_{0,m}-\phi^{\tau}_{0,\infty}\right\|_0\\&\leq 2M_{2s}\left\|\phi_{0,m}-\phi_{0,\infty}\right\|_0\\&\leq 2M_{2s}\left\|\phi_{0,m}-\phi_{0,\infty}\right\|_s.\end{aligned} \tag{2-36}$$

Entonces, reemplazando (2-36) en (2-35), obtenemos el resultado,

$$\lim_{m\uparrow\infty}\sup_{[0,T]}\left\|u^{\tau}_{0,m}-u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_s=0.$$

□

Ya con el trabajo realizado en esta sección concluimos,

Demostración Teorema 0.1.

Es consecuencia del Lema 2.7 y los Teoremas 2.3, 2.5.

Observación. 2.1

Siguiendo las ideas de [15], para el caso $p=1$ se obtiene un mejor resultado local y global para el problema regularizado (2-2). No haremos una prueba detallada para no sobrecargar la lectura, pero si presentamos un bosquejo de ella que es consecuencia de:

1. El buen planteamiento local en $H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, es semejante al caso $s>1$, pero con las siguientes desigualdades, que permiten el manejo de la parte lineal y no lineal, para $0<T<1$:

$$\left\|\mathbb{W}_{\mu}(t-t')\,u(t')\partial_x u(t')\right\|^2_1\lesssim(\mu T)^{-\frac{1}{2}}\left\|uu_x\right\|_{L^1_{xy}}\lesssim(\mu T)^{-\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^2_1,$$

$$\left\|\mathbb{W}_{\mu}(t)\right\|_1\lesssim(\mu T)^{-\frac{1}{2}}\left\|uu_x\right\|_{L^1_{xy}}\lesssim(\mu T)^{-\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^2_1$$

y

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x(u^2-v^2)\right\|_{L^1_{xy}}&\leq\left\|u+v\right\|_0\left\|\partial_x(u-v)\right\|_0+\left\|u-v\right\|_0\left\|\partial_x(u+v)\right\|_0\\&\leq\left(\left\|u\right\|_1+\left\|v\right\|_1\right)\left\|u-v\right\|_1\end{aligned}$$

2. Para el buen planteamiento local con $\mu > 0$ y $-2 < s < 2$, consideramos el espacio

$$\chi_T^s = \left\{ u_\mu \in C\left([0,T] : H^s\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right) : \|u\|_{\chi_T^s} < \infty \right\}$$

donde $\|u\|_{\chi_T^s} = \underset{[0,T]}{sup} \left\{ \|u(t)\|_s + t^{\frac{s}{4}} \|u\|_{L^2} \right\}$, análogo al argumento de esta sección se utiliza el Teorema de punto fijo de Banach con las respectivas estimativas lineales y no lineales que son:

$$\|\mathbb{W}_\mu(t)\phi\|_{\chi_T^s} \leq \|\mathbb{W}_\mu(t)\phi\|_s + t^{\frac{s}{4}} \|\mathbb{W}_\mu(t)\phi\|_{L^2} \leq \left(1 + C_s\left(T^{\frac{|s|}{4}} + \mu^{-\frac{|s|}{4}}\right)\right)\|\phi\|_s$$

y

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \mathbb{W}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_{\chi_T^s} &\leq \left\|\int_0^t \mathbb{W}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_s + t^{\frac{s}{4}}\left\|\int_0^t \mathbb{W}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_{L^2} \\ &\leq \left(\left(\mu^{-\frac{(s+2)}{4}} + \mu^{-\frac{1}{2}}\right)T^{\frac{2-|s|}{4}} + \mu^{-\frac{1}{4}}T^{\frac{3}{4}}\right)\|u\|_{\chi_T^s}^2.\end{aligned}$$

3. El problema regularizado (2-2) satisface,

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \|u(t)\|_{L^2}^2 + \mu\int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2\, dt', \tag{2-37}$$

$$\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq \left(\|\partial_x\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mu}\left(\|\phi\|_{L^2}^4 + \|\phi\|_{L^2}^2\right)\right)e^{\left(\|\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon^2}\right)T} \tag{2-38}$$

y

$$\|\partial_y u\|_{L^2}^2 \leq \left(\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mu}\left(\|\phi\|_{L^2}^4 + \|\phi\|_{L^2}^2\right)\right)e^{\left(\epsilon^{-2} + \frac{1}{\mu}\left(\|\phi\|_{L^2}^4 + \|\phi\|_{L^2}^2\right)\right)T} \tag{2-39}$$

En efecto (2-37) es consecuencia de la ecuación diferencial (2-1) y la integración por partes. Para (2-38) y (2-39) aplicamos la desigualdad de Gagliardo -Nirenberg (Teorema 1.2). Sea $v = u_x$,

$$\begin{aligned}\partial_t\|v\|_{L^2}^2 + \mu\|\Delta v\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} uv\partial_x v\, dxdy \\ &\leq \|\phi\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}\|v_x\|_{L^2} \\ &\lesssim \|\phi\|_{L^2}^2\|v\|_{L^\infty}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2-40}$$

Para poder aplicar Gagliardo-Nirenberg tomamos $v(x,y) - \widetilde{v}(x)$ con $\widetilde{v}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\,dy$

$$\|v - \widetilde{v}(x)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta(v - \widetilde{v}(x))\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|v - \widetilde{v}(x)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}},$$

así,

$$\|v\|_{L^\infty} \leq \|\Delta(v - \widetilde{v}(x))\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|v - \widetilde{v}(x)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|\widetilde{v}(x)\|_{L^\infty},$$

como,

$$|\widetilde{v}(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(x,y)|\,dy \leq C\left(\|v_x\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}\right),$$

entonces,

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\,\|\Delta v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\,\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + C\left(\|v_x\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}\right). \tag{2-41}$$

Reemplazando, (2-41) en el lado derecho de (2-40),

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^2}^2\,\|v\|_{L^\infty}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2 \lesssim \|\phi\|_{L^2}^2\,\|\Delta v\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + \|\phi\|_{L^2}^2\,\|v_x\|_{L^2}^2 + \\ \|\phi\|_{L^2}^2\,\|v\|_{L^2}^2 + \|v_x\|_{L^2}^2 \\ = I + II + III + IV + V.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young, $I \lesssim \epsilon^2\,\|\phi\|_{L^2}^4\,\|\Delta v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon^2}\,\|v\|_{L^2}^2$, entonces, por $I, II, III\ y\ IV$, tenemos que,

$$\partial_t\,\|v\|_{L^2}^2 + \left(\mu - \epsilon^2\,\|\phi\|_{L^2}^4\right)\|\Delta v\|_{L^2}^2 \lesssim \left(\|\phi\|_{L^2}^2+1\right)\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \left(\|\phi\|_{L^2}^2+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\|v\|_{L^2}^2.$$

Si tomamos $\epsilon>0$ tal que, $\left(\mu-\epsilon^2\,\|\phi\|_{L^2}^4\right)>0$, entonces,

$$\partial_t\,\|v\|_{L^2}^2 \lesssim \left(\|\phi\|_{L^2}^2+1\right)\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \left(\|\phi\|_{L^2}^2+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\|v\|_{L^2}^2,$$

así,

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2}^2 &\lesssim \|\partial_x\phi\|_{L^2}^2 + \left(\|\phi\|_{L^2}^2+1\right)\int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2\,dt' + \left(\|\phi\|_{L^2}^2+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\int_0^t \|v\|_{L^2}^2\,dt' \\ &\lesssim \|\partial_x\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mu}\left(\|\phi\|_{L^2}^4+\|\phi\|_{L^2}^2\right) + \left(\|\phi\|_{L^2}^2+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\int_0^t \|v\|_{L^2}^2\,dt'.\end{aligned}$$

La desigualdad de Gronwall implica (2-38). (2-39) se obtiene análogamente.

4. El buen planteamiento global para $s>1$ con $\mu>0$, es consecuencia de acotar $\|u\|_{1+\lambda}$ con $0<\lambda<2$, utilizando la ecuación integral y la desigualdad de regularización, obtenemos,

$$\left\|e^{tA_\mu}f\right\|_{1+\lambda} \lesssim t^{-\frac{\lambda+2}{4}}\,\|f\|_1^2, \tag{2-42}$$

El lado izquierdo de (2-42) es finito en vista de, (2-37),(2-38) y (2-39) del ítem anterior.

5. El buen planteamiento global para $-2<s<1$ y $\mu>0$, es consecuencia de las estimativas

$$\|u\|_{\chi_T^s} \leq \|u\|_{\chi_{T'}^s} + \|u(T'+\cdot)\|_{\chi_{T-T'}^s}$$

$$\|u\|_{\chi_{T'}^s} < M_{T'}$$

para $T'\in(0,T)$ y $u(T'+\cdot)$ es la solución del PVI (2-2) con dato inicial $u(T')$. El segundo sumando es consecuencia del resultado en $H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ ya que,

$$\|u(T'+\cdot)\|_{\chi_{T-T'}^s} \leq \left(1+(T-T')^{\frac{|s|}{4}}\right)\underset{[0,T-T']}{sup}\|u(T'+\cdot)\|_1.$$

2.2. Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad

En esta sección, se prueban los Teoremas 0.2 y 0.3, que corresponden a un mejor resultado de buen planteamiento local del PVI (2-1) para la no linealidad $p = 1$ y los valores de los parámetros de la dispersión: $\beta = 1$ y $0 \leq \alpha \leq 1$; $\beta = 0$ y $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$; $\beta = \alpha$ y $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$.
Primero, probaremos una estimativa de energía(Lema 2.9 abajo) para soluciones suaves del PVI (2-1), que nos conduce a controlar las normas $\|u\|_{L^1_T L^\infty}$, $\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty}$ y $\|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty}$ para así poder establecer la existencia de la solución por una argumento de compacidad. Aunque el lema de inmersión de Sobolev permite controlar estas normas, el resultado de la sección anterior (Teorema 0.1) no mejora, en vez de esto, establecemos una estimativa tipo Strichartz localizada siguiendo las ideas de Kenig y Ionescu en [23] para la KP-I en el cilindro. En estas ideas las herramientas principales son la fórmula de sumación de poisson (Lema 1.18) y el Lema Van-der Corput (Lema 1.3), posteriormente una aplicación de la desigualdad Strichartz en tiempos cortos junto con la fórmula de Duhamel permiten un control de estas normas (Lema 2.10).

2.2.1. Estimativa de Energía

La siguiente estimativa es consecuencia de la desigualdad del conmutador de Kato-Ponce en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$. Recordamos que el espacio X^s fue descrito en la Definición 1.7.

Lema 2.9.
Sean, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y u solución del PVI (2-1) con $\phi \in H^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, entonces, para cualquier $s \geq 1$, tenemos que para cualquier $T \in [0, 1]$,

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{X^s} \lesssim e^{\left(\|u\|_{L^1_T L^\infty} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty} + \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty}\right)} \|\phi\|_{X^s}$$

Demostración. 1. Aplicando el operador J^s_x en la ecuación (2-1) y haciendo el producto interno en $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ con $J^s_x u$, obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x u_t J^s_x u dxdy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x \partial_x D^{1+\alpha}_x u J^s_x u dxdy \pm \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x \partial_x D^{1+\beta}_y u J^s_x u dxdy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x u u_x J^s_x u dxdy = 0.$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J^s_x u\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x \partial_x D^{1+\alpha}_x u J^s_x u dxdy \pm \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x \partial_x D^{1+\beta}_y u J^s_x u dxdy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J^s_x u u_x J^s_x u dxdy \tag{2-43}$$

La anti-simetría del operador hace que los primeros dos sumandos del lado derecho de (2-43) sean cero. Así que, (2-43) se reduce a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_x^s u\right\|_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J_x^s u u_x J_x^s u dxdy. \tag{2-44}$$

La estimativa del conmutador de Kato-Ponce (Proposición 1.1) aplicada al término del lado derecho de (2-44), implica que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_x^s u\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \frac{1}{2}\partial_x u \left(J_x^s u\right)^2 dxdy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \left(\left[J_x^s; u\right] u_x\right) J_x^s u dxdy \\ &\lesssim \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\left\|J_x^s u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\left[J_x^s; u\right] u_x\right\|_{L^2}\left\|J_x^s u\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\left\|J_x^s u\right\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

2. Procediendo análogamente como en 1., pero operamos con J_y^s en vez de J_x^s y con $J_y^s u$ en vez de $J_x^s u$, para obtener,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 = &-\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J_y^s \partial_x D_x^{1+\alpha} u J_y^s u dxdy \pm \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J_y^s \partial_x D_y^{1+\beta} u J_y^s u dxdy \\ &- \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J_y^s u u_x J_y^s u dxdy.\end{aligned} \tag{2-45}$$

La anti-simetría del operador ∂_x transforma (2-45) en:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} J_y^s u u_x J_y^s u dxdy. \tag{2-46}$$

La estimativa del conmutador de Kato-Ponce (Lema 1.2) aplicada al lado derecho de (2-46), implica que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \frac{1}{2}\partial_x u \left(J_y^s u\right)^2 dxdy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \left(\left[J_y^s; u\right] u_x\right) J_y^s u dxdy \\ &\lesssim \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\left[J_y^s; u\right] u_x\right\|_{L^2}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 \\ &+ \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2} + \left\|J_y^{s-1} u_x\right\|_{L^2}\left(\left\|u\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y u\right\|_{L^\infty}\right)\right)\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young ($p = s/s-1$ y $p' = s$),

$$\begin{aligned}\left\|J_y^{s-1} u_x\right\|_{L^2} &\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_n \left(1+n^2\right)^{s-1}\left(1+\xi^2\right)|\hat{u}|^2 d\xi \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \sum_n \left(1+n^2\right)^{\frac{s}{s-1}(s-1)}|\hat{u}|^2 + \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\lesssim \left\|J_y^s u\right\|_{L^2} + \left\|J_x^s u\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

y reemplazando obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty}\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}^2 \\ &\quad+\left(\left\|J_y^s u\right\|_{L^2}+\|J_x^s u\|_{L^2}\right)\left(\|u\|_{L^\infty}+\|\partial_y u\|_{L^\infty}\right)\left\|J_y^s u\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty}+\|u\|_{L^\infty}+\|\partial_y u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{X^s}^2 .\end{aligned}$$

Al sumar los items 1. y 2.,

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{X^s}^2 \lesssim \left(\|\partial_x u\|_{L^\infty}+\|u\|_{L^\infty}+\|\partial_y u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{X^s}^2 .$$

La desigualdad de Gronwall implica,

$$\|u\|_{X^s}^2 \lesssim \|\phi\|_{X^s}^2\, e^{\left(\|\partial_x u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}+\|u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}+\|\partial_y u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}\right)}.$$

□

2.2.2. Estimativa Strichartz Localizada

Consideremos el PVI lineal asociado a (2-1),

$$\begin{cases} u_t = \partial_x\left(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u\right) \\ u(x,y,0) = \phi(x,y), \end{cases} \tag{2-47}$$

cuya solución esta dada por,

$$\mathbb{W}_0(t)\,\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}} e^{i\left(\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}+\left(\xi|\xi|^{1+\alpha}\pm\xi|n|^{1+\beta}\right)t\right)}\hat{\phi}(\xi,n)d\xi,$$

donde $\boldsymbol{\xi}=(\xi,n)$, $\mathbf{x}=(x,y)$ y $\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}=\xi x+ny$. Establecemos una estimativa Strichartz localizada en las variables espaciales y en la variable temporal para la solución del problema lineal.

Teorema 2.6.
Sean, $\beta=0,1$, $0\le\alpha\le 1$ *y* $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. *Entonces, para* $\epsilon>0$,

$$\left\|\mathbb{W}_0(t)\,Q_y^k Q_x^j\phi\right\|_{L^2_{2^{-(j+k)}}L^\infty} \lesssim_\epsilon 2^{\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j}\left\|Q_y^k Q_x^j\phi\right\|_{L^2} \tag{2-48}$$

Demostración. Sean, $\psi_0,\psi_1:\mathbb{R}\to[0,1]$, funciones suaves, pares que están soportadas en $[-2,2]$ y $\left[-4,-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4},4\right]$ respectivamente, con $\psi_0\equiv 1$ en $[-1,1]$ y $\psi_1\equiv 1$ en $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},2\right]$, $\psi_1^j:=\psi_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ y $\psi_0^k:=\psi_0\left(\frac{n}{2^k}\right)$. Observe que, por la definición 1.8 de los operadores $Q_y^k Q_x^j$, tenemos que, $supp\ Q_x^j Q_y^k \subset supp\ \psi_1^j\psi_0^k$ y $\psi_1^j\psi_0^k\equiv 1$ en $B:=[-2^{j+1},-2^{j-1}]\times\left[-2^k,0\right]\cup[2^{j-1},2^{j+1}]\times\left[0,2^k\right]$. Entonces, $supp\ Q_x^j Q_y^k\subset B$, si definimos $a(\boldsymbol{\xi})=\widehat{\left(Q_y^k Q_x^j\phi\right)}(\boldsymbol{\xi})$, observe que,

$$\mathbb{W}_0(t)\,Q_y^k Q_x^j\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}} a(\boldsymbol{\xi})\,\psi_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\psi_0\left(\frac{n}{2^k}\right)e^{i(\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}+F(\boldsymbol{\xi})t)}d\xi$$

donde,

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \left(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|n|^{1+\beta}\right).$$

Es suficiente mostrar que,

$$\left\| \chi_{\left[0,2^{-(j+k)}\right]}(|t|) \int_{\mathbb{R}} \sum_{\mathbb{Z}} a(\boldsymbol{\xi}) \psi_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \psi_0\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i[\boldsymbol{\xi}(x(t),y(t))+F(\boldsymbol{\xi})t]} d\xi \right\|_{L^2_t} \leq C_\epsilon 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})}.$$

Por dualidad, es equivalente a probar que para cualquier $g \in L^2_t$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} g(t) \chi_{\left[0,2^{-(j+k)}\right)}(|t|) \psi_1\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \psi_0\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i[\boldsymbol{\xi}(x(t),y(t))+F(\boldsymbol{\xi})t]} dt \right\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})} \leq C_\epsilon 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j} \|g\|_{L^2_t} \tag{2-49}$$

donde $x:\left[-2^{-(j+k)},2^{-(j+k)}\right]\to\mathbb{R}$ y $y:\left[-2^{-(j+k)},2^{-(j+k)}\right]\to\mathbb{T}$ son funciones medibles. Al expandir la norma $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ en el lado izquierdo de la desigualdad (2-49), obtenemos:

$$\left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t) g(t') K_{j+k}(t,t',x,y)\, dtdt' \right| \leq C_\epsilon 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^\beta}\right)-1+2\epsilon\right)j} \|g\|^2_{L^2_t}. \tag{2-50}$$

Siendo $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$,

$$K_{j+k}(t,t',x,y) := \chi_{\left[0,2^{-(k+j)}\right]}(|t|) \chi_{\left[0,2^{-(k+j)}\right]}(|t'|) \int_{\mathbb{R}} \sum_{\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \psi_0^2\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i[(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t')))+F(\boldsymbol{\xi})(t-t')]} d\xi.$$

Para, $l \geq j+k$, definimos,

$$K^l_{j+k}(t,t',x,y) := \chi_{\left(2^{-l},2\cdot 2^{-l}\right]}(|t-t'|) K_{j+k}(t,t',x,y)$$

$t \neq t'$ y $t,t' \in \left[-2^{-(j+k)},2^{-(j+k)}\right]$, entonces por (2-50) es suficiente ver que,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \psi_0^2\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i(\boldsymbol{\xi}+F(\boldsymbol{\xi})t)} d\xi \right| \lesssim 2^{l+\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^\beta}\right)-1\right)j} \tag{2-51}$$

para $x\in\mathbb{R}$, $y\in[0,2\pi)$, $|t|\in\left[2^{-l},2\cdot 2^{-l}\right]$ y $l\geq k+j$. Si $j=0$ (2-51) se obtiene fácilmente. Sea $j>0$, para tratar la sumatoria de (2-51), se usa la fórmula de sumación de Poisson (Lema 1.18). Con este fin, observamos que, es suficiente, considerar $F(\boldsymbol{\xi}) = \xi|\xi|^{1+\alpha} + \xi|n|^{1+\beta}$ ya que el otro caso es similar. Sea,

$$A^\beta(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_0^2\left(\frac{2\pi n}{2\pi 2^k}\right) e^{i\left(\frac{2\pi n y}{2\pi}+\xi\left|\frac{2\pi n}{2\pi}\right|^{1+\beta}t\right)} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2\pi 2^k}\right) e^{i\left(\frac{\eta y}{2\pi}+\xi\left|\frac{\eta}{2\pi}\right|^{1+\beta}t\right)} e^{-i\nu\eta} d\eta$$
$$= C\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left(\eta y+\xi|\eta|^{1+\beta}t\right)} e^{-2\pi i\nu\eta} d\eta.$$

Tomamos $\beta = 1$ y calculamos $A^1(n)$, (el caso $\beta = 0$ se desarrolla en la *Observación* 2.3) recordemos que $y \in [0, 2\pi)$, $|\eta| \leq 2^{k+1}$, $|t| \leq 2^{-l+1}$ y $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$. Usando integración por partes tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)} d\eta \qquad (2\text{-}52)\\
&\quad = \int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \frac{\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)}{i\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]} \frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)}\right) d\eta\\
&\quad = \frac{-1}{i}\int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_0\psi_0'}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]} - \frac{\psi_0^2 2\xi t}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]^2}\right]\\
&\qquad \left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)}\right) d\eta.
\end{aligned}$$

Con $2\xi t \leq 42^j 2^{-k-j} \leq 42^{-k}$, $2\xi\eta t \leq 8\cdot 2^k 2^j 2^{-k-j} \leq 8$, $y \in [0, 2\pi)$ y $|\nu| > 100$, entonces para, el denominador del segundo sumando en la ultima integral en (2-52) tenemos que, $|(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t|^2 \sim |\nu|^2$, así ,

$$\left|\int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \frac{\psi_0^2 2\xi t}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]^2} e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)} d\eta\right| < C2^k\frac{2^{-k}}{|\nu|^2} = C\frac{1}{|\nu|^2}. \qquad (2\text{-}53)$$

Por otro lado para el primer sumando de la ultima integral en (2-52), seguimos usando integración por partes,

$$\begin{aligned}
&\int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_0\psi_0'}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]}\right] e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)} d\eta\\
&\quad = \frac{1}{i}\int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_0\psi_0'}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]^2}\right] \frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)}\right) d\eta\\
&\quad = \frac{-1}{i}\int_{|\eta|\leq 2\cdot 2^k} \left[\frac{2\cdot 2^{-2k}\left(\psi_0'\right)^2 + 2\cdot 2^{-2k}\psi_0\psi_0''}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]^2} - \frac{4\psi_0\psi_0' 2^{-k}\xi t}{\left[(y-2\pi\nu)+2\eta\xi t\right]^3}\right]\\
&\qquad \left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)}\right) d\eta
\end{aligned}$$

por tanto, si $|\nu| > 100$, y razonando como en (2-53),

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right)} d\eta\right| \leq \frac{C}{|\nu|^2} + \frac{C}{|\nu|^3} \leq \frac{C}{|\nu|^2}$$

Entonces, obtenemos:

$$\begin{aligned}
A^1(n) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left[(y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right]} d\eta \qquad (2\text{-}54)\\
&= \sum_{|\nu|\leq 100} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left[(y-2\pi\nu)\eta+t\xi\eta^2\right]} d\eta + O(1)
\end{aligned}$$

reemplazando en (2-51), la suma en ν queda una suma finita de integrales. Por lo tanto es suficiente obtener:

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(\xi x+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}\int_{\mathbb{R}}\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left(\eta y'+\xi\eta^2 t\right)}d\eta\right)d\xi\right|\lesssim 2^{l-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)j} \tag{2-55}$$

para $x,y'\in\mathbb{R}$ y $t\in\left[2^{-l},2^{-l+1}\right]$. Observe que,

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left[y'\eta+t\xi\eta^2\right]}d\eta=\frac{C}{|\xi t|^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi_0^2}\left(\eta_1\right)e^{-i\frac{\left[y'+\frac{\eta_1}{2^k}\right]^2}{4\xi t}}d\eta_1, \tag{2-56}$$

y $\left\|\widehat{\psi_0^2}\right\|_{L^1}<C$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left[y'\eta+t\xi\eta^2\right]}d\eta\right|\leq\frac{C}{|\xi t|^{\frac{1}{2}}}. \tag{2-57}$$

Entonces, (2-55) es equivalente a probar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|\xi t|^{\frac{1}{2}}}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(\xi x+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}d\xi\right|\lesssim 2^{l-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)j}. \tag{2-58}$$

Como $\xi\sim 2^j$, $|t|\sim 2^{-l}$, entonces, la desigualdad (2-58) es equivalente a,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(\xi x+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}d\xi\right|\lesssim 2^{(l-\alpha j)/2}. \tag{2-59}$$

La desigualdad (2-59) se sigue inmediatamente de aplicar el Lema de Vander Corput (Lema 1.3). Tomando, $\varphi(\xi)=x\xi+\xi|\xi|^{1+\alpha}t$, entonces, $|\varphi''(\xi)|=|(2+\alpha)(1+\alpha)\,sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}t|\geq 2^{j\alpha-l}$ y como $\left\|\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right\|_{\infty}<\infty$ y $\left\|\frac{d}{d\xi}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right\|_{L^1}<\infty$, se obtiene el resultado. □

Observación. 2.2

1. Note que, $2^{j\epsilon}$ del resultado se tiene ya que $1=2^{j(\epsilon-\epsilon)}$, para $\epsilon>0$, $2^{-j\epsilon}<1$ y lo absorbe la constante C_ϵ. El caso $\widehat{Q_x^jQ_y^0\phi}$ para $j>0$, se reduce a controlar una integral oscilatoria en la variable ξ como en (2-59) y el caso $\widehat{Q_x^0Q_y^k\phi}$ para $j>0$, se reduce a una sumatoria de tamaño 2^k y $2^k<2^l$, entonces en ambos casos se obtiene una estimativa de la forma (2-51).

2. Para calcular $A^0(n)$ que corresponde al caso $\beta=0$ con $0\leq\alpha\leq 1$, aplicamos el Lema 1.2 con $f(\eta)=\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{it\xi n}$, $\tilde{\phi}(\eta)=(y-2\pi\nu)\eta$ y $\left|\tilde{\phi}'(\eta)\right|=y-2\pi\nu\neq 0$, ya que, $|\nu|>100$ y $y\in[0,2\pi)$, entonces, obtenemos un resultado similar a (2-54),

$$\begin{aligned}&\int\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|)}d\eta\\&=\int_0^{2^{k+1}}\left(\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{it\xi n}\right)e^{i(y-2\pi\nu)\eta}d\eta+\int_{-2^{k+1}}^0\left(\psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{-it\xi n}\right)e^{i(y-2\pi\nu)\eta}d\eta\\&=O\left(\nu^{-2}\right).\end{aligned}$$

Así, A^0 resulta una suma finita de integrales y es suficiente acotar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{i\left(\xi x+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i(\eta y'+\xi t|\eta|)} d\eta d\xi\right| \lesssim 2^{l-\alpha j}. \tag{2-60}$$

Como, $\|\psi_0^2\|_{L^1} < C$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_0^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i(\eta y'+t\xi|n|)} d\eta\right| \leq C$$

(2-60) es equivalente a verificar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{i\left(x\xi+t\xi|\xi|^{1+\alpha}\right)} d\xi\right| \lesssim 2^{l-\alpha j}. \tag{2-61}$$

La desigualdad (2-61), es consecuencia de la desigualdad (2-59) y del hecho que $\frac{1}{2}(l-\alpha j) \leq l-\alpha j$.

3. Un resultado similar al Teorema 2.6 se obtiene para, $\alpha = \beta$ con $0 < \alpha \leq 1$

$$\left\|\mathbb{W}_0(t) Q_y^k Q_x^j \phi\right\|_{L^2_{2^{-(j+k)}} L^\infty} \lesssim_\epsilon 2^{\left(-\frac{\alpha+1}{4}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\alpha-1}{4}+\epsilon\right)k} \left\|Q_y^k Q_x^j \phi\right\|_{L^2}.$$

Razonando como en la demostración del Teorema 2.6. Sea $\psi_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ función suave y par definida antes. Observe que por la definición 1.8, $supp\ Q_x^j Q_y^k \subset supp\ \psi_1^j \psi_1^k$, $\psi_1^j \psi_1^k \equiv 1$ en $B := [-2^{j+1}, -2^{j-1}] \times \left[-2^{k+1}, -2^{k-1}\right] \cup [2^{j-1}, 2^{j+1}] \times \left[2^{k-1}, 2^{k+1}\right]$ y $supp\ Q_x^j Q_y^k \subset B$. En este caso tenemos $F(\boldsymbol{\xi}) = \left(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|n|^{1+\alpha}\right)$, $\xi \sim 2^j$, $n \sim 2^k$ y $|t| \in [2^{-l}, 2\cdot 2^{-l}]$ con $l \geq j+k$. Al usar el argumento de dualidad, el kernel K_{j+k}^l, a acotar es,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \psi_1^2\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i(\boldsymbol{\xi}+F(\boldsymbol{\xi})t)} d\xi\right| \lesssim 2^{l-(\frac{\alpha+1}{2})j-(\frac{\alpha-1}{2})k} \tag{2-62}$$

Si $j,k=0$ o si $j=0$ y $k>0$ es inmediato, si $j>0$ y $k=0$ se reduce a una integral oscilatoria, por lo tanto usamos el Lema Van-der Corput. Para $j,k>0$ aplicamos al lado izquierdo de (2-62) la fórmula de sumación de Poisson y obtenemos $A^\alpha(n)$. Para calcular $A^\alpha(n)$ y obtener un resultado similar a (2-54), aplicamos integración por partes. Sea, $A := supp\psi_1\left(\frac{\eta}{2^j}\right) = \{\eta : 2^{j-1} \leq |\eta| \leq 2^{j+1}\}$, así,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^j}\right) e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)} d\eta \qquad (2\text{-}63)\\
&= \int_A \frac{\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^j}\right)}{i\left[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)|\eta|^\alpha \xi t\right]} \frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}\right) d\eta\\
&= \frac{-1}{i}\int_A \left[\frac{2\cdot 2^{-j}\psi_1\psi_1'}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)|\eta|^\alpha \xi t\right]} - \frac{\psi_1^2(1+\alpha)\,\alpha\,|\eta|^{\alpha-1}\xi t}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)|\eta|^\alpha \xi t\right]^2}\right]\\
&\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}\right) d\eta.
\end{aligned}$$

Para el segundo sumando de la última integral en (2-63) observamos que, con $(1+\alpha)\,\alpha\,|\eta|^{\alpha-1}\,\xi t \leq (2\cdot 2^j)^{\alpha-2}$, $(1+\alpha)\,|n|^{\alpha}\,\xi t \leq 2^{(\alpha-1)j} \leq 2$ y $y\in[0,2\pi)$, $|\nu|>100$, entonces, obtenemos que, $|(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t|^2 \sim |\nu|^2$. Por otro lado para el primer sumando de la última integral en (2-63), usamos nuevamente integración por partes,

$$\begin{aligned}
&\int_A \left[\frac{2\cdot 2^{-j}\psi_1\psi_1'}{[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t]}\right]\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}\right)d\eta\\
&=\frac{1}{i}\int_A\left[\frac{2\cdot 2^{-j}\psi_1\psi_1'}{[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t]^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}\right)d\eta\\
&=\frac{-1}{i}\int_A\left[\frac{2\cdot 2^{-2j}\left(\psi_1'\right)^2+2\cdot 2^{-2j}\psi_1\psi_1''}{[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t]^2}-\frac{4\psi_0\psi_0'2^{-j}\,(1+\alpha)\,\alpha\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t}{[(y-2\pi\nu)+(1+\alpha)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t]^3}\right]\\
&\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}\right)d\eta,
\end{aligned}$$

donde, $\left|2\cdot 2^{-2j}\left(\psi_1'\right)^2+2\cdot 2^{-2j}\psi_1\psi_1''\right| \lesssim 2^{-2j}$ y $\left|4\psi_0\psi_0'2^{-j}\,(1+\alpha)\,\alpha\,|\eta|^{\alpha}\,\xi t\right| \lesssim 2^{-j}2^{(\alpha-1)k}$, entonces, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^j}\right)e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+t\xi|\eta|^{1+\alpha}\right)}d\eta = O\left(\nu^{-2}\right).$$

Así, es suficiente acotar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(\xi x+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left(\eta y'+\xi t|\eta|^{1+\alpha}\right)}d\eta d\xi\right| \lesssim 2^{l-(\frac{\alpha+1}{2})j-(\frac{\alpha-1}{2})k} \tag{2-64}$$

donde, $\xi\sim 2^j$, $|t|\sim 2^{-l}$ y $\eta\sim 2^k$. El Lema Van-der Corput con $\varphi(\eta)=\eta y'+t\xi\,|n|^{1+\alpha}$ y $|\varphi''(\eta)| = |(\alpha)(1+\alpha)t\xi|\,|n|^{\alpha-1} > C_\alpha\frac{|t\xi|}{|\eta|^{1-\alpha}} > 0$, nos conduce a la desigualdad,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left(\eta y'+t\xi|n|^{1+\alpha}\right)}d\eta\right| \leq \frac{C_\alpha 2^{\frac{1-\alpha}{2}k}}{|t\xi|^{\frac{1}{2}}}, \tag{2-65}$$

así, (2-64) es equivalente a probar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|\xi t|^{\frac{1}{2}}}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(x\xi+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}d\xi\right| \leq 2^{l-(\frac{\alpha+1}{2})j}, \tag{2-66}$$

pero recordemos que $\xi\sim 2^j$ y $|t|\sim 2^{-l}$, así, (2-66) es equivalente a probar,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\left(x\xi+\xi|\xi|^{1+\alpha}t\right)}d\xi\right| \leq 2^{\frac{1}{2}l}2^{-\frac{1}{2}\alpha j}$$

y esta desigualdad es cierta aplicando el Lema Van-der Corput como en (2-59). La desigualdad (2-62) sigue siendo validad en los casos $\widehat{Q_x^0Q_y^k\phi}$, $k>0$ y $\widehat{Q_x^jQ_y^0\phi}$, $j>0$, el primero es mas inmediato, el segundo requiere una aplicación del Lema Van-der Corput en la integral oscilatoria resultante.

Lema 2.10.
Sean, $\beta = 0,\ 1, 0 \leq \alpha \leq 1, u \in C\left([0,T] : H^{\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right) \cap C^{1}\left([0,T] : H^{\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right)$ *y* $f \in C\left([0,T] : H^{\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right), T \in [0,1]$, *tal que,*

$$\partial_t u - \partial_x\left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u = \partial_x f.$$

Entonces, para cualquier $s_1 > \frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}$ *y* $s_2 > \frac{1}{2}$

$$\|u\|_{L_T^1 L^\infty} \lesssim_{s_1 s_2} T^{\frac{1}{2}}\left(\left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2} u\right\|_{L_T^\infty L^2} + \left\|J_x^{s_1} f\right\|_{L_T^1 L^2}\right) \tag{2-67}$$

Demostración. Se divide el intervalo $[0,T]$ en 2^{j+k} intervalos iguales, de tamaño $T2^{-(j+k)}$, notados por $\left[a_{j,m}, a_{j,(m+1)}\right)$, con $m = 0,1,2\cdots 2^{j+k}$. Luego,

$$\left\|Q_y^k Q_x^j u\right\|_{L_T^1 L^\infty} \leq \sum_{m=1}^{2^{j+k}} \left\|\chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)}(t)\, Q_y^k Q_x^j u\right\|_{L_T^1 L^\infty}. \tag{2-68}$$

Aplicando Cauchy-Schwarz en cada sumando de (2-68), se obtiene que:

$$\left\|\chi_{\left[a_{j,m}, a_{j,(m+1)}\right)}(t)\, Q_y^k Q_x^j u\right\|_{L_T^1 L^\infty} \lesssim \left(T2^{-(j+k)}\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\chi_{\left[a_{j,m}, a_{j,(m+1)}\right)}(t)\, Q_y^k Q_x^j u\right\|_{L_T^2 L^\infty}. \tag{2-69}$$

La fórmula de Duhamel para $t \in \left[a_{j,m}, a_{j,(m+1)}\right]$ es,

$$u(t) = W_0(t - a_{j,m})\left(u\left(a_{j,m}\right)\right) + \int_{a_{j,m}}^{t} W_0(t-s)\left(\partial_x f(s)\right) ds. \tag{2-70}$$

Usando (2-70) y posteriormente la estimación Strichartz (Teorema 2.6) en el lado derecho de (2-69), tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\left\|\chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)}(t)\, Q_y^k Q_x^j u\right\|_{L_T^2 L^\infty} \\
&\leq \left\|\chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)}(t)\, W_0(t - a_{j,m})\, Q_y^k Q_x^j u\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L_T^2 L^\infty} \\
&\qquad + \left\|\int_{a_{j,m}}^{t} \chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)}(t)\, W_0(t-s)\, Q_y^k Q_x^j \partial_x(f)\, ds\right\|_{L_T^2 L^\infty} \\
&\lesssim_\epsilon 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right) - \frac{1}{2} + \epsilon\right) j} \left\|Q_y^k Q_x^j u\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2} + \int_{a_{j,m}}^{a_{j,m+1}} 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right) - \frac{1}{2} + \epsilon\right) j} 2^j \left\|Q_y^k Q_x^j f\right\|_{L^2} \\
&\lesssim_\epsilon 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right) - \frac{1}{2} + \epsilon\right) j} \left\|Q_y^k Q_x^j u\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2} + 2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right) - \frac{1}{2} + \epsilon\right) j} 2^j \left\|\chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)} Q_y^k Q_x^j f\right\|_{L_T^1 L^2}
\end{aligned}$$

reemplazando en el lado derecho de (2-69) y luego en el lado derecho de (2-68). Entonces, el lado

derecho de (2-68) resulta,

$$
\begin{aligned}
&2^{-(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left(2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j}\left\|Q_y^kQ_x^ju\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}+2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j}2^j\left\|\chi_{\left[a_{jm},a_{j(m+1)}\right)}Q_y^kQ_x^jf\right\|_{L_T^1L^2}\right)\\
&\leq 2^{-(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j}\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left(\left\|Q_y^kQ_x^ju\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}\right)\\
&\quad+2^{-(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}\right)-\frac{1}{2}+\epsilon\right)j}2^j\left\|Q_y^kQ_x^jf\right\|_{L_T^1L^2}\\
&\leq 2^{-\epsilon(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\\
&\left(2^{-(j+k)}\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left(\left\|2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right)k}Q_y^k2^{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}+\epsilon'\right)j\right)}Q_x^ju\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}\right)+2^{(\epsilon-1)k/2}\left\|Q_y^k2^{\left(\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}+\epsilon'\right)j}Q_x^jf\right\|_{L_T^1L^2}\right).
\end{aligned}
$$

Con $2^{(\epsilon-1)k/2}\leq 1$ para $k\geq 1$ y $\epsilon<1$. Entonces,

$$
\left\|Q_y^kQ_x^ju\right\|_{L_T^1L^\infty}\leq 2^{-\epsilon(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\left(2^{-(j+k)}\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}+\left\|J_x^{s_1}f\right\|_{L_T^1L^2}\right),
$$

Sumando sobre j y sobre k obtenemos el resultado. □

Observación. 2.3

En vista de la *Observación* 2.2, obtenemos un resultado similar al Lema 2.10 para, $\alpha=\beta$ con $0<\alpha\leq 1$. Siguiendo las ideas del lema anterior usando la fórmula de Duhamel, aplicamos la respectiva desigualdad Strichartz localizadas descritas en la *Observación* 2.2, en los pequeños intervalos de tiempo de tamaño $T2^{-(j+k)}$ y obtenemos,

$$
\begin{aligned}
&\left\|Q_y^kQ_x^ju\right\|_{L_T^1L^\infty}\\
&\leq 2^{-(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left(2^{\left(-\frac{\alpha+1}{4}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\alpha-1}{4}+\epsilon\right)k}\left\|Q_y^kQ_x^ju\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}\right.\\
&\qquad\left.+2^{\left(-\frac{\alpha+1}{4}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\alpha-1}{4}+\epsilon\right)k}2^j\left\|\chi_{\left[a_{jm},a_{j(m+1)}\right)}Q_y^kQ_x^jf\right\|_{L_T^1L^2}\right)\\
&\leq 2^{-\epsilon(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\left(2^{-(j+k)}\sum_{m=1}^{2^{j+k}}\left(\left\|2^{\left(\frac{1-\alpha}{4}+\frac{1}{2}+\epsilon'\right)k}Q_y^k2^{\left(\frac{1-\alpha}{4}+\epsilon'\right)j}Q_x^ju\left(a_{j,m}\right)\right\|_{L^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+2^{\left(\frac{3\epsilon}{2}-\frac{1+\alpha}{4}\right)k}\left\|Q_y^k2^{\left(\frac{1-\alpha}{4}+\epsilon'\right)j}Q_x^jf\right\|_{L_T^1L^2}\right),
\end{aligned}
$$

donde $2^{(\frac{3\epsilon}{2}-\frac{1+\alpha}{4})k}<1$ para $k\geq 1$ y $\epsilon<\frac{1+\alpha}{6}$. Y así, podemos obtener la siguiente estimativa,

$$\left\|Q_y^kQ_x^ju\right\|_{L_T^1L^\infty}\lesssim_s 2^{-\epsilon(j+k)/2}T^{\frac{1}{2}}\left(\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\right\|_{L_T^\infty L^2}+\left\|J_x^{s_1}f\right\|_{L_T^1L^2}\right),$$

donde $s_1=\frac{1-\alpha}{4}+\frac{3\epsilon}{2}$ y $s_2=\frac{1-\alpha}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3\epsilon}{2}$,

$$\|u\|_{L_T^1L^\infty}\lesssim_s T^{\frac{1}{2}}\left(\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\right\|_{L_T^\infty L^2}+\left\|J_x^{s_1}f\right\|_{L_T^1L^2}\right) \tag{2-71}$$

En la siguiente proposición, obtenemos una estimativa clave para prueba del buen planteamiento local, ya que junto a la estimativa de energía me permite obtener un resultado similar al Lema 2.4 de la sección anterior.

Proposición 2.1.
Sean, $\beta=0,\ 1, 0\leq\alpha\leq 1$ *(cuando* $\beta=0$, $\alpha>\frac{1}{3}$*) y* u *solución del PVI (2-1) , con* $\phi\in H^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *definido en* $[0,T]$. *Sea* $\|\phi\|_{X^s}=\|J_x^s\phi\|_{L^2}+\left\|J_y^s\phi\right\|_{L^2}$, *entonces, para cualquier* $s>\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$, *existe un* $T=T(\|\phi\|_{X^s},s)$ *y una constante* $C_T(\|\phi\|_{X^s},s)$, *tal que,*

$$g(T):=\int_0^T\left(\|u\|_{L^\infty}+\|u_x\|_{L^\infty}+\|u_y\|_{L^\infty}\right)dt'\leq C_T \tag{2-72}$$

Demostración. Siguiendo la prueba de Linares, Pastor y Saut en [45] se usa el Lema 2.10 con $s_1>\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}$ y $s_2>\frac{1}{2}$ en u, $\partial_x u$ y $\partial_y u$, tomando $f=\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{2}\partial_x u^2,\frac{1}{2}\partial_y u^2$ respectivamente y obtenemos,

$$g(T)\lesssim\|\phi\|_{X^s}e^{g(T)}(1+g(T)). \tag{2-73}$$

La deducción de la desigualdad (2-73) es consecuencia de la desigualdad de Young y el Teorema 1.5 (Ver detalles en la prueba de la Proposición 3.1). Primero, se prueba que se tiene el resultado (2-72) en el intervalo $[0,1]$ con dato inicial pequeño, luego para un dato arbitrario se usa un reescalamiento de la solución, el cual satisface la ecuación (2-1): Existe $\epsilon_0>0$, tal que, $\|\phi\|_{X^s}\leq\epsilon_0$, entonces, si $g(T)\lesssim\|\phi\|_{X^s}e^{g(T)}(1+g(T))$ implica que $g(1)\leq B$. Para probar esta afirmación, sea, $F(x,\epsilon)=x-\epsilon(1+x)e^x$, observe que, $F(0,0)=0$, $F_x(0,0)=1$ y $F_y(0,0)=-1$, entonces, por el Teorema de la función implícita garantizamos que para $0<\epsilon<\epsilon_0$ existe una función $\varphi(\epsilon)$ creciente en ϵ tal que $F(\varphi(\epsilon),\epsilon)=0$. Si tomamos a $B=\varphi(\|\phi\|_{X^s})$, $\|\phi\|_{X^s}<\epsilon_0$ y $F(\varphi(\|\phi\|_{X^s}),\|\phi\|_{X^s})=0$, se puede ver que $g(0)\leq B$. Ahora, para $T\in(0,1)$ se razona por contradicción, tomando $g(T)>B$. Sea, $T_0=inf\{T\in(0,1):g(T)>B\}$ como $T_0>0$, $g(T_0)=B$, luego, existe $\{T_n\}_n$ tal que, $T_n\to T_0$ con $g(T_n)>B$. Entonces, $F(g(T_n),\|\phi\|_{X^s})>F(g(T_0),\|\phi\|_{X^s})=F(B,\|\phi\|_{X^s})=0$, así, logramos obtener que $g(T_n)>\|\phi\|_{X^s}e^{g(T_n)}(1+g(T_n))$ (lo cual es contradictorio). La continuidad de g y el anterior resultado implican que $g(1)\leq B$. Por otro lado tenemos que, si u es solución del PVI (2-1) con dato inicial ϕ, entonces $u^\lambda(x,y,t)=\lambda^{\alpha+1}u\left(\lambda x,\lambda^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}y,\lambda^{\alpha+2}t\right)$ también es solución con dato inicial $\phi^\lambda=\lambda^{\alpha+1}\phi\left(\lambda x,\lambda^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}y\right)$, con el período de y , $L=\frac{2\pi}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}}$. Ahora, como $\left\|\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^{\frac{\beta+\frac{1}{2}}{\beta+1}(\alpha+1)-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^2}$, $\left\|D_x^s\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^{s+\frac{\beta+\frac{1}{2}}{\beta+1}(\alpha+1)-\frac{1}{2}}\|D_x^s\phi\|_{L^2}$ y $\left\|D_y^s\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^{\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)s+\frac{\beta+\frac{1}{2}}{\beta+1}(\alpha+1)-\frac{1}{2}}\left\|D_y^s\phi\right\|_{L^2}$ se puede escoger $\lambda=\lambda(\|\phi\|_{X^s})$ tal que $\left\|\phi^\lambda\right\|_{X^s}<\epsilon_0$. Entonces, aplicamos la anterior conclusión a u^λ. □

Observación. 2.4

1. En vista de la *Observación* 2.3, obtenemos un resultado similar a la Proposición 2.1 para $\alpha=\beta$ con $0<\alpha\leq 1$. Para $s>(\frac{5-\alpha}{4})(\frac{1-\alpha}{4}+\frac{3}{2})$, se puede ver nuevamente que existe T y C_T, tal que,

$$g(T):=\int_0^T\left(\|u\|_{L^\infty}+\|u_x\|_{L^\infty}+\|u_y\|_{L^\infty}\right)dt'\leq C_T.$$

Aplicando desigualdad (2-71) de la *Observación* 2.3 con $s_1>\frac{1-\alpha}{4}$ y $s_2>\frac{1-\alpha}{4}+\frac{1}{2}$ en $u,\partial_x u,\partial_y u$ y tomando a $f=u^2,\partial_x u^2,\partial_y u^2$ respectivamente, entonces,

$$\begin{aligned}
&g(T):=\|u\|_{L^1_TL^\infty}+\|u_x\|_{L^1_TL^\infty}+\|u_y\|_{L^1_TL^\infty}\\
&\lesssim_s T^{\frac{1}{2}}\left(\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\right\|_{L^\infty_TL^2}+\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x u\right\|_{L^\infty_TL^2}+\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_y u\right\|_{L^\infty_TL^2}\right.\\
&\left.+\left\|J_x^{s_1}u^2\right\|_{L^1_TL^2}+\left\|J_x^{s_1}\partial_x\left(u^2\right)\right\|_{L^1_TL^2}+\left\|J_x^{s_1}\partial_y\left(u^2\right)\right\|_{L^1_TL^2}\right)
\end{aligned}$$

razonando como en la prueba de la Proposición 3.1. obtenemos la desigualdad,

$$g(T)\lesssim\|\phi\|_{X^s}e^{g(T)}\left(1+g(T)\right).$$

De manera similar se usa un argumento de continuidad para el intervalo $[0,1]$ y dato pequeño, para obtener $g(1)\lesssim C(\|\phi\|_{X^s})$. Para un dato arbitrario, tenemos que; $u^\lambda(x,y,t)=\lambda^{\alpha+1}u(\lambda x,\lambda y,\lambda^{\alpha+2}t)$ es también solución del PVI(2-1) con dato $\phi^\lambda=\lambda^{\alpha+1}\phi(\lambda x,\lambda y)$ y $\left\|\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^\alpha\|\phi\|_{L^2}$, $\left\|D_x^s\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^{s+\alpha}\|D_x^s\phi\|_{L^2}$ y $\left\|D_y^s\phi^\lambda\right\|_{L^2}=\lambda^{s+\alpha}\left\|D_y^s\phi\right\|_{L^2}$ se puede escoger $\lambda=\lambda(\|\phi\|_{X^s})$ tal que $\left\|\phi^\lambda\right\|_{X^s}<\epsilon_0$ y así aplicar el resultado a u^λ.

2. En los casos $\beta=0$ y $\beta=\alpha$ los valores que nos interesan de α son $\frac{1}{3}<\alpha\leq 1$, ya que obtenemos una mejora en el resultado de buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\frac{3}{2}\leq s<2$.

Demostración del Teorema 0.2.

1. **Existencia**. Sea, $s>\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ y el dato inicial $\phi\in X^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces, existen $\phi_k\in X^s\cap H^\infty$, tal que, $\lim_{k\to\infty}\|\phi_k-\phi\|_{X^s}=0$. Consideramos la regularización del dato inicial (mollifier) como en [9]. Sea $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$, tal que, el soporte de ρ es, $(\xi,n)\in(-1,1)\times\{-1,0,1\}$ y $\rho\equiv 1$, $(\xi,n)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\{0\}$ definimos $\phi_k:=\left(\rho\left(\frac{\cdot}{k},\frac{\cdot}{k}\right)\widehat{\phi}\right)^\vee$, observe que, por la definición dada, $\|\phi_k\|_{X^s}\leq\|\phi\|_{X^s}$. Primero demostraremos un lema asociado a unas propiedades del dato inicial,

Lema 2.11.
Sean, $s'\leq s$ *y* $m>k>1$. *Entonces,*

$$\|\phi_k-\phi_m\|_{X^{s'}}\leq\frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|_{X^s}\tag{2-74}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi_k - \phi_m\|_{X^s} = 0.$$

Demostración. *a*) Teniendo en cuenta la definición de la norma podemos ver que,

$$\left|\langle\xi\rangle^{s'}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2 \leq \frac{1}{k^{2(s-s')}}\left|\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\langle\xi\rangle^{s}\,\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2$$

y

$$\left|\langle n\rangle^{s'}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2 \leq \frac{1}{k^{2(s-s')}}\left|\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\langle n\rangle^{s}\,\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2$$

b) La segunda parte es consecuencia del siguiente limite puntual, para $m > k$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\langle\xi\rangle^{s}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2 = 0$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left|\langle n\rangle^{s}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{n}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{n}{m}\right)\right)\widehat{\phi}\,(\xi,n)\right|^2 = 0.$$

Así, el resultado se sigue del Teorema de convergencia dominada.

□

Ahora, , las cuales existen por el Teorema 0.1, así $u_k \in C\left([0,T'];H^{\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right)$, $T' > 0$. Entonces, por la Proposición 2.1, extendemos u_k a todo $[0,T]$ con $T = T\left(\|\phi\|_{X^s}, s\right)$ y existe C_T, tal que,

$$\int_0^T \left(\|u_k\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_k\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_k\|_{L^\infty}\right) dt' \leq C_T. \tag{2-75}$$

Así, la estimativa de energía (2.9) y (2-75), implican que,

$$\sup_{0<t<T} \|u_k\|_{X^s} \leq C_T. \tag{2-76}$$

Por la desigualdad de Gronwall, tenemos que,

$$\|u_k-u_m\|_0^2 \lesssim \|\phi_k-\phi_m\|_0^2\, e^{C\left(\|\partial_x u_k\|_{L_T^1L^\infty}+\|\partial_x u_m\|_{L_T^1L^\infty}\right)}. \tag{2-77}$$

Así (2-77) y (2-75) implican que,

$$\lim_{k,m\to\infty}\|u_k-u_m\|_0=0. \tag{2-78}$$

Por otro lado, de la desigualdad (2-74) y (2-76) tenemos que,

$$\sup_{[0,T]}\|u_k-u_m\|_0 \le \frac{1}{k^s}\|\phi\|_{X^s} \tag{2-79}$$

y

$$\sup_{[0,T]}\|u_k\|_{X^s} \le \|\phi\|_{X^s}. \tag{2-80}$$

Como $s'<s$, un argumento de interpolación junto con (2-79), (2-80), implican que,

$$\sup_{[0,T]}\|u_k-u_m\|_{X^{s'}} \le \sup_{[0,T]}\|u_k-u_m\|_{X^s}^{\frac{s'}{s}}\|u_k-u_m\|_0^{1-\frac{s'}{s}} \le \frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|_{X^s},$$

Así que, $(u_k)_k$ resulta ser de Cauchy en $C\left([0,T];X^{s'}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\right)$ para $s'<s$, entonces, existe, $u\in C\left([0,T];X^{s'}\right)\cap L^\infty\left([0,T];X^s\right)$ con $s'<s$ tal que $u_k\to u$ en $C\left([0,T];X^{s'}\right)$. Por (2-78), $u_k\to u$ en $C([0,T],L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ y (2-76) implica que $u_k\in L^\infty\left([0,T];X^s\right)$, entonces, por el Teorema de Banach-Alaoglu $(u_k)_k$ tiene una subsucesión que converge débilmente, así $u\in L^\infty\left([0,T];X^s\right)$. Ahora, veamos que $(u_k)_k$ es de Cauchy en $L_T^1L_{xy}^\infty$: Para acotar el término, $\int_0^T\|u_k-u_m\|_{L^\infty}dt'$, usaremos el Lema 2.10, tomando $w=u_k-u_m$ y $f=(u_k+u_m)w$. Entonces, para $s_1>\frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}$ y $s_2>\frac{1}{2}$ tenemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^T\|w\|_{L^\infty}dt' &\lesssim_{s_1s_2} T^{\frac{1}{2}}\left(\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}w\right\|_{L_T^\infty L^2}+\|J_x^{s_1}f\|_{L_T^1L^2}\right)\\ &\lesssim_{s_1s_2} T^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L_T^\infty X^{s'}}+\int_0^T\|J_x^{s_1}((u_k+u_m)w)\|_{L^2}dt'\end{aligned} \tag{2-81}$$

Para el primer sumando de la ultima linea de (2-81), tenemos que, $\|w\|_{L_T^\infty X^{s'}}\lesssim\frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|_{X^s}$ para $s>s'>\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$. Para el segundo sumando, aplicamos Teorema 1.5 y obtenemos que,

$$\int_0^T\|J_x^{s_1}((u_m+u_k)w)\|_{L^2}\lesssim\|J_x^{s_1}(u_m+u_k)\|_{L^2L_T^\infty}\|w\|_{L^\infty L_T^1}+\|u_m+u_k\|_{L^\infty L_T^1}\|J_x^{s_1}w\|_{L^2L_T^\infty}.$$

(2-75) y $\|u_k\|_{X^{s'}L_T^\infty}\le\frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|_{X^s}$, implican que,

$$\int_0^T\|J_x^{s_1}((u_m+u_k)w)\|_{L^2}\le\frac{2}{k^{s-s_1}}\|\phi\|_{X^s}+\|J_x^{s_1}w\|_{L^2}\lesssim\frac{1}{k^{s-s_1}}\|\phi\|_{X^s}.$$

Así, obtenemos que, $\int_0^T \|u_k - u_m\|_{L^\infty}\, dt' \underset{k,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Para verificar que $(\nabla u_k)_k$ es Cauchy en $L^1_T L^\infty_{xy}$, nuevamente aplicamos el Lema 2.10,

$$\int_0^T \|\partial_x w\|_{L^\infty} + \|\partial_y w\|_{L^\infty}\, dt' \lesssim \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L^\infty_T L^2} + \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_y w\right\|_{L^\infty_T L^2} \tag{2-82}$$
$$+ \|J_x^{s_1}(w\partial_x u_k + u_m\partial_x w)\|_{L^1_T L^2} + \|J_x^{s_1}(w\partial_y u_k + u_m\partial_y w)\|_{L^1_T L^2}\,.$$

Acotaremos dos de los términos, del lado derecho de (2-82), ya que los otros dos se obtienen análogamente,

$$\begin{aligned}\|J_x^{s_1}(w\partial_x u_k + u_m\partial_x w)\|_{L^1_T L^2} &\lesssim \|J_x^{s_1} w\|_{L^1_T L^\infty}\|\partial_x u_k\|_{L^\infty_T L^2} + \|w\|_{L^1_T L^\infty}\left\|J_x^{s_1+1}u_k\right\|_{L^\infty_T L^2}\\ &\lesssim \|J_x^{s_1} w\|_{L^1_T X^{s'-s_1}}\|u_k\|_{L^\infty X^{s'}} + \left\|J_x^{s'}u_k\right\|_{L^\infty_T L^2}\\ &\le \|w\|_{L^\infty_T X^{s'}}\|u_k\|_{L^\infty_T X^{s'}} + \|u_k\|_{L^\infty_T X^{s'}}\\ &\le \frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|^2_{X^s}\end{aligned}$$

y

$$\left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L^\infty_T L^2} \le \|w\|_{L^\infty_T X^{s'}} \le \frac{1}{k^{s-s'}}\|\phi\|_{X^s}\,,$$

En vista de (2-82) y (2-81), tenemos que $u, \partial_x u, \partial_y u \in L^1_T L^\infty_{xy}$. Por último para ver que $u \in C([0,T]; X^s)$, usaremos la continuidad débil u en X^s y la estimativa de energía $\underset{0<t<T}{sup}\|u\|_{X^s} \lesssim \|\phi\|_{X^s}$. Así,

$$\|\phi\|_{X^s} \le \underset{t\downarrow 0}{\text{lím inf}}\,\|u(t)\|_{X^s} \le \underset{t\downarrow 0}{\text{lím sup}}\,\|u(t)\|_{X^s} \le \|\phi\|_{X^s}\,,$$

entonces, obtenemos la continuidad a derecha en 0, para el resto de puntos se razona como en el Teorema 2.3.

2. **Unicidad.** Es suficiente verificarla en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y esta es consecuencia de la desigualdad establecida en (2-77). Sean $u_1, u_2 \in C([0,T], H^s)$ dos soluciones del PVI(2-1) que satisfacen $\partial_x u_i, \partial_y u_i \in L^1_T L^\infty_{xy}$ con $i = 1, 2$ y respectivos datos iniciales ϕ_1 y ϕ_2, por lo tanto, tenemos que,

$$\|u_1 - u_2\|_0^2 \lesssim \|\phi_1 - \phi_2\|_0^2\, e^{C\left(\|\partial_x u_1\|_{L^1_T L^\infty} + \|\partial_x u_2\|_{L^1_T L^\infty}\right)} \lesssim \|\phi_1 - \phi_2\|_0^2\,.$$

3. **Dependencia continua.** La prueba es análoga a la realizada en el Teorema 2.5 de la anterior sección, por lo tanto probaremos el ingrediente clave para la prueba de la dependencia continua.

   Sea $\phi_n \to \phi_\infty$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, acorde al trabajo realizado existe un $T_n = T(\|\phi_n\|_s)$ y una única $u_n \in C([0,T_n])$ que satisface el PVI (2-1) con $u(0) = \phi_n$. ϕ_n^τ es la aproximación definida en (2-24) y $u_{k,n}^\tau$ las correspondientes soluciones al PVI(2-1). Ya que $\phi_n^\tau \to \phi_n$ en $H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, cuando

$\tau\downarrow 0$ para todo $n=1,2,3\cdots,\infty$, todas estas soluciones están definidas en $[0,T]$, $T_n\leq T$ para n suficientemente grande y τ suficientemente pequeño y satisfacen $u^{\tau}_{k,n},\partial_x u^{\tau}_k,\partial_y u^{\tau}_{k,n}\in L^1_T L^\infty$, por lo tanto, $\left\|u^{\theta}_{k,n}\right\|_{X^s}\leq\|\phi\|_{X^s}$.

Teorema 2.7.
Sean, $\beta=0,1$, $0\leq\alpha\leq 1$ $\phi\in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ (Cuando $\beta=0$, $\alpha>\frac{1}{3}$), $s>\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$, ϕ^{τ}_n y $u^{\tau}_{k,n}$ como antes, entonces, para cada $k>0$ y n suficientemente grande, $(u^{\tau}_{k,n})$ es de Cauchy y converge uniformemente sobre $[0,T]$,

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\ \sup_{[0,T]}\left\|u^{\tau}_{k,n}(t)-u_{k,n}(t)\right\|_{X^s}=0 \tag{2-83}$$

Demostración. Sean, τ_0 y N_0 tal que $u^{\tau}_{k,n}(t)$ esta definida en $[0,T]$. Entonces, para todo $0<\tau\leq\tau_0$, $n\geq N_0$. Ahora, veamos que $(u^{\tau}_{k,n})_\tau$ es de Cauchy en $X^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}&\leq\left\|\partial_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\left\|J^s_x u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^2}\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\\&+\left\|\partial_x u^{\tau}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}+\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\left\|J^{s+1}_x u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^2}\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}&\leq\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}\left\|\partial_x u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\\&+\left(\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|J^s_x u^{\tau}_{k,n}\right\|_{L^2}+\left\|J^s_y u^{\tau}_{k,n}\right\|_{L^2}\right)\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\\&+\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\left\|J^{s+1}_y u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^2}\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\\&+\left\|J^s_y u^{\tau}_{k,n}\right\|_{L^2}\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\left\|\partial_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^2}\\&+\left(\left\|u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_y u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}+\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k.n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}\right)\end{aligned}$$

Tenemos que $\left\|J^{s+1}_x u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^2}\leq\theta^{-\frac{1}{s}}\|\phi\|_{X^s}$. Así las anteriores dos desigualdades quedan,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\|J^s_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}\\&\quad\leq\left(\left\|\partial_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}+\theta^{-\frac{1}{s}}\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\right)\|\phi\|^2_{X^s}+\left\|\partial_x u^{\tau}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|^2_{X^s}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\|J^s_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|^2_{L^2}\\&\leq\left(\theta^{-\frac{1}{s}}\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_x\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_y\left(u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\right)\|\phi\|^2_{X^s}\\&+\left(\left\|u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_x u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}+\left\|\partial_y u^{\theta}_{k,n}\right\|_{L^\infty}\right)\left\|u^{\tau}_{k,n}-u^{\theta}_{k,n}\right\|^2_{X^s}.\end{aligned}$$

Sumando las anteriores desigualdades y aplicando la desigualdad de Gronwall generalizada

$$f(t) = f(0)\, e^{\int_0^t a(\tau')d\tau'} + \int_0^t b(\tau)\, e^{\int_\tau^t a(\tau')d\tau'} d\tau$$

con

$$a(t) = \left\|u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty}$$

y

$$b(t) = \left(\theta^{-\frac{1}{s}} \left\|u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\right)\|\phi\|^2_{X^s}$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]} \left\|u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right\|^2_{X^s} \leq e^{\int_0^T \left(\left\|u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty}\right)} \left(\left\|\phi^\tau_{k,n} - \phi^\theta_{k,n}\right\|^2_{X^s}\right. \\
&\left. + \int_0^T \left(\theta^{-\frac{1}{s}} \left\|u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\right)\|\phi\|^2_{X^s}\right) dt' \\
&\lesssim \left\|\phi^\tau_{k,n} - \phi^\theta_{k,n}\right\|^2_{X^s} \\
&+ \|\phi\|^2_{X^s} \int_0^T \left(\theta^{-\frac{1}{s}} \left\|u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y\left(u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^\infty}\right) dt'.
\end{aligned}$$

Para acotar el término, $\int_0^T \theta^{-\frac{1}{s}} \left\|u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty} dt'$, usaremos el Lema 2.10, tomando $w = u^\tau_{k,n} - u^\theta_{k,n}$ y $f = \left(u^\tau_{k,n} + u^\theta_{k,n}\right) w$. Entonces, para $s_1 > \frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}$ y $s_2 > \frac{1}{2}$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|w\|_{L^\infty} dt' &\lesssim_{s_1 s_2} T^{\frac{1}{2}} \left(\left\|J^{s_1}_x J^{s_2}_y w\right\|_{L^\infty_T L^2} + \|J^{s_1}_x f\|_{L^1_T L^2}\right) \\
&\lesssim_{s_1 s_2} T^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^\infty_T X^{s'-1+\delta}} + \int_0^T \left\|J^{s_1}_x \left(\left(u^\tau_{k,n} + u^\theta_{k,n}\right) w\right)\right\|_{L^2} dt',
\end{aligned} \tag{2-84}$$

donde $0 < \delta < s - s'$. Para el primer sumando de la última linea de (2-84), tenemos que,

$$\theta^{-\frac{1}{s}} \|w\|_{X^{s'-1+\delta}} \lesssim \theta^{-\frac{1}{s}} \|w\|^{\frac{s'-1+\delta}{s}}_{X^s} \|w\|^{1-\frac{s'-1+\delta}{s}}_{L^2} \lesssim \theta^{-\frac{1}{s}} \theta^{1-\frac{s'-1+\delta}{s}} \lesssim \theta^{1-\frac{s'+\delta}{s}}$$

Para el segundo sumando, aplicamos Teorema 1.5 y obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\left\|J^{s_1}_x \left(\left(u^\tau_{k,n} + u^\theta_{k,n}\right) w\right)\right\|_{L^2 L^1_T} &\lesssim \left\|J^{s_1}_x \left(u^\tau_{k,n} + u^\theta_{k,n}\right)\right\|_{L^2 L^\infty_T} \|w\|_{L^\infty L^1_T} \\
&+ \left\|u^\tau_{k,n} + u^\theta_{k,n}\right\|_{L^\infty L^1_T} \left\|J^{s_1}_x w\right\|_{L^2 L^\infty_T} \\
&\lesssim \|\phi\|_{X^s} \|w\|_{X^{s_1} L^\infty_T} \\
&\lesssim \theta^{1-\frac{s_1}{s}}
\end{aligned}$$

Nuevamente aplicando el Lema 2.10,

$$\int_0^T \|\partial_x w\|_{L^\infty} + \|\partial_y w\|_{L^\infty}\, dt' \lesssim \left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L_T^\infty L^2} + \left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_y w\right\|_{L_T^\infty L^2} \tag{2-85}$$
$$+ \left\|J_x^{s_1}\left(w\partial_x u_{k,n}^\tau + u_{k,n}^\theta \partial_x w\right)\right\|_{L_T^1 L^2} + \left\|J_x^{s_1}\left(w\partial_y u_{k,n}^\tau + u_{k,n}^\theta \partial_y w\right)\right\|_{L_T^1 L^2}.$$

Acotaremos dos de los términos, del lado derecho de (2-85), ya que se tiene los otros dos análogamente,

$$\begin{aligned}
\left\|J_x^{s_1}\left(w\partial_x u_{k,n}^\tau + u_{k,n}^\theta \partial_x w\right)\right\|_{L^2L_T^1} &\lesssim \|J_x^{s_1} w\|_{L^\infty L_T^1}\left\|\partial_x u_{k,n}^\tau\right\|_{L^2L_T^\infty} + \|w\|_{L^\infty L_T^1}\left\|J_x^{s_1+1}u_k^\tau\right\|_{L^2L_T^\infty}\\
&\lesssim \|J_x^{s_1} w\|_{X^{s'-s_1}L_T^1}\|u_k^\tau\|_{X^{s'}} + \|w\|_{X^{s'}L_T^\infty}\left\|J_x^{s'}u_{k,n}^\tau\right\|_{L_T^\infty L^2}\\
&\lesssim \|w\|_{X^{s'}L_T^\infty}\left\|u_{k,n}^\tau\right\|_{X^{s'}L_T^\infty} + \|w\|_{X^{s'}L_T^\infty}\left\|u_{k,n}^\tau\right\|_{X^{s'}}\\
&\lesssim \|w\|_{X^{s'}L_T^\infty}\\
&\lesssim \theta^{1-\frac{s'}{s}}
\end{aligned}$$

y

$$\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L_T^\infty L^2} \le \|w\|_{L_T^\infty X^{s'}} \le \theta^{1-\frac{s'}{s}}$$

Entonces, obtenemos para $\eta\in(0,1)$ que,

$$\sup_{[0,T]}\left\|u_{k,n}^\tau - u_{k,n}^\theta\right\|_{X^s}^2 \lesssim \left\|\phi_{k,n}^\tau - \phi_{k,n}^\theta\right\|_{X^s}^2 + \theta^{1-\eta} \tag{2-86}$$

Tomando $\theta = 0$ en (2-86), obtenemos (2-83).

□

Observación. 2.5

1. La prueba del Teorema 0.3 es similar a la prueba del Teorema 0.2. Se usa un argumento de compacidad, juntando las respectivas estimativas en las *Observaciones* 2.2, 2.3 *y* 2.4 que contiene los ingredientes necesarios para la prueba.

2. El resultado anterior coincide con lo que demuestran Linares, Pastor y Saut en [44] para la ecuación ZK en el cilindro.

3. Un resultado de buen planteamiento Global, depende de un mejor resultado de buen planteamiento local; pues las cantidades conservadas (0-6) y (0-7) implican que es posible controlar la norma $\|\cdot\|_{\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}}$. Desafortunadamente, este objetivo no fue alcanzado aquí.

3 ZK generalizada en espacios Anisotrópicos $H^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$

La tercera parte de la *Observación* 2.5, sugiere que los espacios más naturales para tratar el buen planteamiento del PVI(2-1) serian los espacios de Sobolev Anisotrópicos $H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Por tal razón, trataremos esta cuestión aquí. Este capítulo esta dividido en dos secciones, en la primera sección mostraremos resultados de buen planteamiento local del problema de valor inicial (2-1) donde $0\leq\alpha,\beta\leq 1$ en los espacios de Sobolev anisotrópicos (Teorema 0.4) y en la segunda sección siguiendo las ideas de [45] se mejoran los resultados de buen planteamiento local para ciertos valores de los parámetros a saber: $\beta=1$ con $0\leq\alpha\leq 1$ y $\beta=0$ con $\frac{1}{3}<\alpha\leq 1$ (Teorema 0.5).

3.1. Buen Planteamiento Local $r_1, r_2 > 2$

Demostración. Teorema 0.4

Se procederá, de manera análoga a la prueba del resultado sobre buen planteamiento local del PVI (2-1) en el espacio $H^s\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$, $s>2$. Por tal razón, se realizara solo un bosquejo de esta prueba:

1. Se obtiene, el buen planteamiento local para el problema regularizado (2-2) en el espacio $H^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$, el cual es consecuencia de un argumento de punto fijo de Banach y las siguientes estimativas regularizantes del semigrupo, $\mathbb{W}_\mu(t)\in B\left(H^{r_1,r_2},H^{r_1+\lambda_1,r_2+\lambda_2}\right)$:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{W}_\mu(t)\,\phi\right\|_{H^{r_1+\lambda_1,r_2+\lambda_2}} &= \left\|J_x^{r_1+\lambda_1}\mathbb{W}_\mu(t)\,\phi\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{r_2+\lambda_2}\mathbb{W}_\mu(t)\,\phi\right\|_{L^2}\\ &\lesssim\left(1+(\mu t)^{\frac{\lambda_1}{4}}+(\mu t)^{\frac{\lambda_2}{4}}\right)\|\phi\|_{H^{r_1,r_2}}.\end{aligned}$$

   y

$$\left\|\mathbb{W}_\mu(t-t')\,u^p u_x\right\|_{H^{r_1,r_2}}\lesssim\left(1+(\mu t)^{\frac{\lambda_1}{4}}+(\mu t)^{\frac{\lambda_2}{4}}\right)\|u\|^{p+1}_{H^{r_1,r_2}}, \tag{3-1}$$

   donde r_1 y r_2 satisfacen la condición de álgebra de Banach en estos espacios, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}<2$.

2. Se obtienen constantes $T=T(\|\phi\|_{r_1,r_2})>0$ y M independientes de $\mu>0$, tal que,

$$\sup_{[0,T]}\|u_\mu(t)\|_{H^{r_1,r_2}}\leq M, \tag{3-2}$$

   que es consecuencia de:

$$\|u_\mu(t)\|_{H^{r_1,r_2}}\sim\|J_x^{r_1}u_\mu\|_{L^2}+\left\|J_y^{r_2}u_\mu\right\|_{L^2}$$

y de,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_x^{r_1}u_\mu\right\|_{L^2}^2+\left\|J_x^{r_1}\Delta u_\mu\right\|_{L^2}^2=\left(J_x^{r_1}u_\mu\mid J_x^{r_1}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_{L^2}, \tag{3-3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{r_2}u_\mu\right\|_{L^2}^2+\left\|J_y^{r_2}\Delta u_\mu\right\|_{L^2}^2=\left(J_y^{r_2}u_\mu\mid J_y^{r_2}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_{L^2}. \tag{3-4}$$

El lado derecho de (3-3) y (3-4) en virtud de la desigualdad de Kato (Teorema 1.3), para $r_1,r_2>2$ es acotado por,

$$\left|\left(J_x^{r_1}u_\mu\mid J_x^{r_1}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_{L^2}\right|\leq\left\|\partial_x u_\mu^p\right\|_{r_1-1}\left\|u_\mu\right\|_{r_1}^2\leq\left\|u_\mu\right\|_{r_1}^{p+2}$$

y por,

$$\left|\left(J_y^{r_2}u_\mu\mid J_y^{r_2}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_{L^2}\right|\leq\left\|J_y^{r_2-1}\partial_x u_\mu^2\right\|_{L^2}\left\|u_\mu\right\|_{r_2}^2.$$

Aplicando la desigualdad de Young con $p=2$ y $p'=2$, tenemos que,

$$\begin{aligned}\left\|J_y^{r_2-1}\partial_x u_\mu^p\right\|_{L^2}^2&\leq\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+n^2\right)^{(r_2-1)}\left(1+\xi^2\right)\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2d\xi\\&\lesssim\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+n^2\right)^{2(r_2-1)}\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2d\xi+\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathbb{Z}}\left(1+\xi^2\right)^2\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2d\xi\\&\lesssim\left\|J_y^{r_2}u_\mu^p\right\|_{L^2}^2+\left\|J_x^{r_1}u_\mu^p\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Entonces, sumando (3-3) y (3-4), obtenemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\mu\right\|_{H^{r_1,r_2}}^2\lesssim\left\|J_x^{r_1}u_\mu\right\|_{L^2}^{p+2}+\left\|J_y^{r_2}u_\mu\right\|_{L^2}^2\left(\left\|J_x^{r_1}u_\mu^p\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{r_2}u_\mu^p\right\|_{L^2}\right)\leq\left\|u_\mu\right\|_{H^{r_1,r_2}}^{p+2}.$$

Así,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\mu\right\|_{H^{r_1,r_2}}^2\lesssim\left\|u_\mu\right\|_{H^{r_1,r_2}}^{p+2}.$$

Como en el lema 2.4, existe una función $\rho\in C([0,T];[0,\infty))$, tal que,

$$\left\|u_\mu(t)\right\|_{H^{r_1,r_2}}\leq\rho(t),\ t\in[0,T].$$

Adicionalmente, la estimativa (3-2) junto con un argumento de extensión, establece que el tiempo de existencia no dependen de r_1,r_2.

3. La convergencia fuerte en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y uniforme en $[0,T]$ de $(u_\mu)_\mu$ a u_0, junto con el ítem anterior, que establece una acotación uniforme de las funciones $(u_\mu)_\mu$ en $H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, obtenemos que, $(u_\mu)_\mu$ converge débilmente en H^{r_1,r_1} a u_0. Entonces, tenemos que u_0 satisface el problema (2-1) en el sentido distribucional y $u_0\in C_w\left([0,T];H^{r_1,r_2}\right)\cap C_w^1\left([0,T];H^{r_1-3,r_2-2}\right)\cap AC\left([0,T];H^{r_1-(\alpha+2),r_2-(\beta+1)}\right)$. Para probar la dependencia continua se usa nuevamente un argumento Bona-Smith y la unicidad se tiene por lo realizado en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.

3.2. Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad

Siguiendo las ideas de buen planteamiento local en el espacio X^s pero ahora con el espacio X^{r_1,r_2} (descrito en la Definición 1.7.), se establece un mejor resultado de buen planteamiento local en los espacios anisótropicos. Iniciamos esta sección con la prueba de la estimativa de energía correspondiente al espacio X^{r_1,r_2} que nos conduce acotar las normas $\|u\|_{L^1_T L^\infty}$, $\|u_y\|_{L^1_T L^\infty}$ y $\|u_x\|_{L^1_T L^\infty}$. En particular se logra mejorar la regularidad en la variable x.

3.2.1. Estimativa de Energía

Lema 3.1.
Sean, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *y* u *solución del PVI (2-1) con* $\phi \in H^{\infty,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. *Entonces,*

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{X^{r_1,r_2}} \lesssim e^{\left(\|u\|_{L^1_T L^\infty} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty} + \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty}\right)} \|\phi\|_{X^{r_1,r_2}},$$

donde $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$, $r_2 \geq \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ *y* $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1} + \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$, *que para cualquier* $T \in [0,1]$.

Demostración. Procediendo como en el Lema 2.9 se obtiene que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{r_1}u\|_{L^2}^2 \lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty}\|J_x^{r_1}u\|_{L^2}^2 \tag{3-5}$$

y que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{r_2}u\right\|_{L^2}^2 \lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty}\left\|J_y^{r_2}u\right\|_{L^2} + \left(\|u\|_{L^\infty} + \|\partial_y u\|_{L^\infty}\right)\left\|J_y^{r_2-1}\partial_x u\right\|_{L^2}. \tag{3-6}$$

Usando la desigualdad de Young, con $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1} + \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$, entonces,

$$\begin{aligned}\left\|J_y^{r_2-1}\partial_x u\right\|_{L^2} &\lesssim \int_{\mathbb{R}}\sum_n \left(1+n^2\right)^{(r_2-1)\frac{2^{\beta+2}}{2^{\beta+1}+1-\alpha}r_2}|\widehat{u}|^2 + \left(1+\xi^2\right)^{\frac{2^{\beta+1}}{2^{\beta+1}+1-\alpha}r_1}|\widehat{u}|^2\,d\xi \\ &\leq \left\|J_y^{r_2}u\right\|_{L^2} + \|J_x^{r_1}u\|_{L^2}\end{aligned}$$

que transforma (3-6) en:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{r_2}u\right\|_{L^2}^2 \lesssim \left(\|u\|_\infty + \|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|\partial_y u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{X^{r_1 r_2}}. \tag{3-7}$$

La desigualdad de Gronwall, (3-5) y (3-7) implican el resultado. □

Proposición 3.1.
Sean, $\beta = 0$ *ó* 1, $0 \leq \alpha \leq 1$, (*cuando* $\beta = 0$, $\alpha > \frac{1}{3}$), $\phi \in H^{\infty,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ *en* $[0,T]$, $\|\phi\|_{X^{r_1,r_2}} = \|J_x^{r_1}\phi\|_{L^2} + \left\|J_y^{r_2}\phi\right\|_{L^2}$ *con* $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$, $r_2 \geq \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ *y* $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1} + \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$. *Entonces, existe un* $T = T\left(\|\phi\|_{X^{r_1,r_2}}, r_1, r_2\right)$, *tal que,*

$$g(T) := \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty} + \|u_x\|_{L^\infty} + \|u_y\|_{L^\infty}\right)dt' < C_T.$$

Demostración. Usando el resultado (2-67) del Lema 2,10 con $s_1 > \frac{1-\alpha}{2^{1+\beta}}$ y $s_2 > \frac{1}{2}$ en los términos u , $\partial_x u$ y $\partial_y u$, tomando $f = \frac{1}{2}u^2, \frac{1}{2}\partial_x u^2, \frac{1}{2}\partial_y u^2$ respectivamente, obtenemos,

$$\begin{aligned} g(T) \leq & \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2} u\right\|_{L^2} + \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_x u\right\|_{L^2} + \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_y u\right\|_{L^2} \\ & + \int_0^T \left\|J_x^{s_1} u^2\right\|_{L^2} dt' + \int_0^T \left\|J_x^{s_1}(u\partial_x u)\right\|_{L^2} dt' + \int_0^T \left\|J_x^{s_1}(u\partial_y u)\right\|_{L^2} dt'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es suficiente acotar cada sumando del lado derecho de la desigualdad anterior. Para el primer sumando, la desigualdad de Young ($p = 2$ y $p' = 2$), implica que,

$$\begin{aligned} \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2} u\right\|_{L^2} = \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1}{2}}\left(1+n^2\right)^{\frac{s_2}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{s_1}\widehat{u}\right\|_{L^2} + \left\|\left(1+n^2\right)^{s_2}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|J_x^{r_1+} u\right\|_{L^2} + \left\|J_y^{r_2+} u\right\|_{L^2} \end{aligned}$$

donde $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$ y $r_2 \geq \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$. El segundo sumando, tomando $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1} + \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$, la desigualdad de Young implica que,

$$\begin{aligned} \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_x u\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1+1}{2}}\left(1+n^2\right)^{\frac{s_2}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1+1}{2}\frac{2^{\beta+1}r_1}{2^{\beta+1}+1-\alpha}}\widehat{u}\right\|_{L^2} + \left\|\left(1+n^2\right)^{\frac{s_2}{2}\frac{2^{\beta+2}r_2}{2^{\beta+1}+1-\alpha}}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|J_x^{r_1+} u\right\|_{L^2} + \left\|J_y^{r_2+} u\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Observe que si $r_1 = r_2 = \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$, resulta $\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$ y obtenemos la estimativa correspondiente a la Proposición 2.1 del capítulo anterior. Para el tercer sumando, como $\frac{1}{s_1+1} + \frac{s_1}{s_1+1} = 1$, la desigualdad de Young, implica,

$$\begin{aligned} \left\|J_x^{s_1} J_y^{s_2}\partial_y u\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1}{2}}\left(1+n^2\right)^{\frac{s_2+1}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1+1}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} + \left\|\left(1+n^2\right)^{\frac{(s_1+1)(s_2+1)}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|J_x^{r_1+} u\right\|_{L^2} + \left\|J_y^{r_2+} u\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de producto de Leibniz (Teorema 1.5) y posteriormente la desigualdad de Hölder,

$$\int_0^T \left\|J_x^{s_1} u^2\right\|_{L^2} dt' \lesssim \int_0^T \|u\|_{L^\infty} \left\|J_x^{s_1} u\right\|_{L^2} dt' \leq \|u\|_{L_T^1 L^\infty} \left\|J_x^{s_1} u\right\|_{L_T^\infty L^2} \leq \|u\|_{L_T^1 L^\infty} \|u\|_{L_T^\infty X^{r_1,r_2}},$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\|J_x^{s_1}(u\partial_x u)\right\|_{L^2} dt' &\lesssim \int_0^T \|\partial_x u\|_{L^2} \left\|J_x^{s_1} u\right\|_{L^\infty} + \left\|J_x^{s_1}\partial_x u\right\|_{L^2} \|u\|_{L^\infty} dt' \\ &\leq \|\partial_x u\|_{L_T^\infty L^2} \left\|J_x^{s_1} u\right\|_{L_T^1 L^\infty} + \left\|J_x^{s_1}\partial_x u\right\|_{L_T^\infty L^2} \|u\|_{L_T^1 L^\infty} \\ &\leq \|u\|_{L_T^\infty X^{r_1 r_2}} \left\|J_x^{s_1} u\right\|_{L_T^1 L^\infty} + \|u\|_{L_T^\infty X^{r_1 r_2}} \|u\|_{L_T^1 L^\infty} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|J_x^{s_1}\left(u\partial_y u\right)\right\|_{L^2} dt' &\lesssim \int_0^T \left\|\partial_y u\right\|_{L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L^\infty} + \left\|J_x^{s_1}\partial_y u\right\|_{L^2}\left\|u\right\|_{L^\infty} dt' \\ &\leq \left\|\partial_y u\right\|_{L_T^\infty L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1 L^\infty} + \left\|J_x^{s_1}\partial_y u\right\|_{L_T^\infty L^2}\left\|u\right\|_{L_T^1 L^\infty} \\ &\leq \left\|u\right\|_{L_T^\infty X^{r_1 r_2}}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1 L^\infty} + \left\|u\right\|_{L_T^\infty X^{r_1 r_2}}\left\|u\right\|_{L_T^1 L^\infty}.\end{aligned}$$

Sumando todas las desigualdades y aplicando la estimativa de energía (Lema 3.1), obtenemos,

$$g\left(T\right) \lesssim \left\|\phi\right\|_{X^{r_1,r_2}} e^{g(T)}\left(1+g\left(T\right)\right).$$

Concluimos como en la Proposición 2.1, con un argumento de continuidad. □

Como se realizó en el capítulo 2 en la prueba del Teorema 0.2 en el espacio X^s, mediante el uso de un argumento tipo Bona-Smith, es necesario enunciar las respectivas propiedades del dato inicial regularizado ϕ_k. Sea $\rho \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\right)$, tal que, el soporte de ρ es, $(\xi,n) \in (-1,1)\times\{-1,0,1\}$ y $\rho \equiv 1, (\xi,n) \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\{0\}$ definimos $\phi_k := \left(\rho\left(\frac{\cdot}{k},\frac{\cdot}{k}\right)\widehat{\phi}\right)^\vee$.

Lema 3.2.
Sean, $r_1' \leq r_1$, $r_2' \leq r_2$ *y* $m > k > 1$. *Entonces,*

$$\left\|\phi_k - \phi_m\right\|_{X^{a_1,a_2}} \leq \frac{1}{k^{r_1-a_1}}\left\|J_x^{r_1}\phi\right\|_0 + \frac{1}{k^{r_2-a_2}}\left\|J_y^{r_2}\phi\right\|_0 \tag{3-8}$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\phi_k - \phi_m\right\|_{X^{r_1,r_2}} = 0.$$

Demostración. Teorema 0.5

Sean, $\phi \in X^{r_1,r_2}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$, $r_1 > \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}$, $r_2 > \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$ y $\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}r_1} + \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+2}r_2} = 1$. Regularizando el dato inicial tenemos que $\lim_{k\to\infty}\left\|\phi_k-\phi\right\|_{X^{r_1,r_2}} = 0$ y $\left\|\phi_k\right\|_{X^{r_1,r_2}} \leq \left\|\phi\right\|_{X^{r_1,r_2}}$. El Teorema 0.4 de buen planteamiento local en espacios anisotrópicos garantiza la existencia de soluciones, $u_k \in C\left(\left[0,\tau\right];H^{\infty,\infty}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right)$, $\tau > 0$, del PVI (2-1) asociadas a $\phi_k \in X^{r_1,r_2}\cap H^{\infty,\infty}$. La Proposición 3.1 nos permite extender u_k al intervalo de tiempo $[0,T]$, $T = T\left(\left\|\phi\right\|_{X^{r_1,r_2}}, r_1, r_2\right)$ y mostrar que existe C_T, tal que,

$$\int_0^T \left(\left\|u_k\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_x u_k\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y u_k\right\|_{L^\infty}\right) dt' \leq C_T. \tag{3-9}$$

La estimativa de energía (lema 3.1) y la desigualdad (3-9), implican que,

$$\sup_{0<t<T}\left\|u_k\right\|_{X^{r_1,r_2}} \leq C_T. \tag{3-10}$$

Además, (2-77) implica que,

$$\lim_{k,m\to\infty} sup_{0<t<T} \|u_k - u_m\|_0 = 0. \tag{3-11}$$

El Lema 3.2, la estimativa de energía y desigualdad (3-9), implican que,

$$sup_{[0,T]} \|u_k - u_m\|_0 \leq \frac{1}{k^{r_1}} \|J_x^{r_1}\phi\|_0 + \frac{1}{k^{r_2}} \left\|J_y^{r_2}\phi\right\|_0 \tag{3-12}$$

y

$$sup_{[0,T]} \|u_k\|_{X^{r_1,r_2}} \leq \|\phi\|_{X^{r_1,r_2}}. \tag{3-13}$$

Como $r_1' < r_1$ y $r_2' < r_2$, un argumento interpolación junto con (3-12), (3-13) implican que,

$$sup_{[0,T]} \|u_k - u_m\|_{X^{r_1',r_2'}} \leq \frac{1}{k^{r_1-r_1'}} \|J_x^{r_1}\phi\|_0 + \frac{1}{k^{r_2-r_2'}} \left\|J_y^{r_2}\phi\right\|_0$$

Entonces, tenemos que $(u_k)_k$ es una sucesión de Cauchy en $C\left([0,T];X^{r_1',r_2'}\right)$ con $r_1' < r_1$ y $r_2' < r_2$. Así existe $u \in C\left([0,T];X^{r_1',r_2'}\right) \cap L^\infty\left([0,T];X^{r_1,r_2}\right)$ tal que $u_k \to u$ en $C\left([0,T];X^{r_1',r_2'}\right)$. (3-11) garantiza que $u_k \to u$ en $C\left([0,T];L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)\right)$ y por (3-10) $u_k \in L^\infty\left([0,T];X^{r_1,r_2}\right)$, entonces, por compacidad débil $u \in L^\infty\left([0,T];X^{r_1,r_2}\right)$. La unicidad se tiene por que es suficiente con la prueba en $L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$ y la dependencia continua nuevamente se tiene como consecuencia de un argumento de Bona-Smith [9].

4 ZK generalizada en espacios Anisotrópicos con peso $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$

En el trabajo [28], Kato, T. obtiene resultados de buen planteamiento para la ecuación KdV en espacios de Sobolev con pesos, lo cual le permite concluir que el espacio de Schwartz se mantiene bajo el flujo de la KdV. De otro lado, Iorio en [25] al tratar este mismo problema para la ecuación BO obtiene que tal espacio no se mantiene bajo el flujo de la BO, sin embargo obtiene resultados interesantes referentes a la decaída de las soluciones de la ecuación BO, uno de dichos resultados notables afirma que si la solución en tres tiempos decae suficientemente, ella es cero. Estos trabajo de Iorio hechos para pesos enteros, son mejorados por Fonseca, G. y Ponce, G. en [18] y por Fonseca, G. Linares, F y Ponce, G. en [17] para pesos no enteros pero conservando la misma hipótesis de decaída de la solución en tres tiempos. Por tal razón, en este capítulo consideramos el PVI (2-1) en espacios los Anisotrópicos con peso, $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ descrito en la definición 1.9. Más precisamente, trataremos el buen planteamiento local en el espacio $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, siguiendo las ideas de Fonseca, G., Linares, F. y Ponce, G. en [17]. En la primera sección se prueba el Teorema 0.6 asociado al buen planteamiento local del PVI (2-1) en $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$; en la segunda sección, se prueban los Teoremas 0.7, 0.8 referidos a las propiedades de continuación única y en la tercera sección, se prueba el Teorema 0.9 que mejora los resultados del Teorema 0.6 para la no linealidad $p=1$ y ciertos valores de los parámetros de dispersión α y β.

4.1. Buen Planteamiento Local

Para obtener resultados de buen planteamiento en los espacios $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ es fundamental considerar la solución del problema lineal asociado a (2-1),

$$\mathbb{W}_0\phi = C\sum_{\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\left(x\xi+yn+t\left(\xi|\xi|^{1+\alpha}\pm\xi|n|^{1+\beta}\right)\right)}\hat{\phi}(\xi,n)\,d\xi = \left(F(\xi,n)\,\hat{\phi}\right)^{\vee}$$

donde $F(\xi,n)=e^{it\left(\xi|\xi|^{1+\alpha}\pm\xi|n|^{1+\beta}\right)}$ y las derivadas respecto a la primera variable de F, las cuales son dadas a continuación.

$$\partial_\xi F = (it)\,C_\alpha\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)F, \tag{4-1}$$

$$\partial_\xi^2 F = (it)\, C_\alpha \left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\right) F + (it)^2 C_\alpha \left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right)^2 F, \tag{4-2}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 F = {} & (it)\, C_\alpha \left(|\xi|^{\alpha-1}\right) F + (it)^2 C_\alpha |\xi|^\alpha sgn(\xi) \left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right) F \\ & + (it)^3 C_\alpha \left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right)^3 F,\end{aligned} \tag{4-3}$$

e inductivamente,

$$\begin{aligned}\partial_\xi^j F = {} & \sum_{k=0}^{j-1} (it)^{j-k} C_\alpha \left[\sum_{l=0}^{j-1-k} |\xi|^{(\alpha+1)(j-k-l)-k} |n|^{(\beta+1)l} \left(sgn(\xi)\right)^k F\right] \\ & + (it)^j C_\alpha |\xi|^{(\alpha+1)k} |n|^{(\beta+1)(j-k)} F,\end{aligned} \tag{4-4}$$

$j = 0, 1, 2\cdots$

Para el cálculo de las derivadas no enteras usaremos el operador $\mathcal{D}^b$ conocido como Derivada de Stein de orden b y tendremos en cuenta que $\left\|D^b f\right\|_{L^2} \sim \left\|\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$. El siguiente resultado es importante para pesos fraccionarios y nos permitirá probar la estimativa lineal en este espacio.

Lema 4.1.
Sea, $b \in (0,1)$. Entonces,

$$\mathcal{D}_\xi^b \left(e^{it\left(|\xi|^{\alpha+1}\xi \pm |\eta|^{\beta+1}\xi\right)}\right) \lesssim_{\alpha b} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b}\right),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Usando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6) y el Lema 1.12,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\xi^b \left(e^{it\left(|\xi|^{\alpha+1}\xi \pm |\eta|^{\beta+1}\xi\right)}\right) &\leq \mathcal{D}_\xi^b \left(e^{it\left(|\xi|^{\alpha+1}\xi\right)}\right) \left|e^{\pm it\left(|\eta|^{\beta+1}\xi\right)}\right| + \left\|e^{it\left(|\xi|^{\alpha+1}\xi\right)}\right\|_{L^\infty} \mathcal{D}_\xi^b \left(e^{\pm it|\eta|^{\beta+1}\xi}\right) \\ &\leq \mathcal{D}_\xi^b \left(e^{it\left(|\xi|^{\alpha+1}\xi\right)}\right) + \mathcal{D}_\xi^b \left(e^{\pm it|\eta|^{\beta+1}\xi}\right) \\ &\lesssim_{\alpha b} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b}\right).\end{aligned}$$

□

En el siguiente lema establecemos la respectiva estimativa lineal;

Lema 4.2.
Sean, $r \in [0,\infty)$ tal que $r_1 \geq (\alpha+1)\, r$ y $r_2 \geq (\beta+1)\, r$, con $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \in [0,1]$.

1. *Si $r < \frac{5}{2} + \alpha$ y $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces, $\mathbb{W}_0(t)\,\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y*

$$\left\|\mathbb{W}_0(t)\,\phi\right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} \leq P_r(t) \left\|\phi\right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}},$$

donde, $P_r(t)$ es una función continua en t.

2. *Si* $\frac{5}{2}+\alpha \leq r < \frac{7}{2}+\alpha$ *y* $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, $\mathbb{W}_0(t)\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, *si y solo si,* $\partial_\xi^j \hat{\phi}(0,n)=0$ *y* $j=0,1,\cdots,[r]-3$, *donde* $[.]$ *es la función parte entera.*

Demostración. Como,

$$\|\mathbb{W}_0(t)\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} = \|\mathbb{W}_0(t)\phi\|_{r_1,r_2} + \|x^r \mathbb{W}_0(t)\phi\|_{L^2}, \tag{4-5}$$

solo resta estimar la norma del segundo sumando del lado derecho de (4-5) para ello trataremos varios casos:

Caso $0<r<1$

$$\|x^r \mathbb{W}_0(t)\phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^2} + \left\|D_\xi^r\left(F(\xi,n)\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}$$

Por las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6) y el Lema 4.1, obtenemos,

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^r\left(F(\xi,n)\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\mathcal{D}_\xi^r\left(F(\xi,n)\hat{\phi}\right)\right\| \\
&\leq \left\|F(\xi,n)\mathcal{D}_\xi^r\left(\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^r\left(F(\xi,n)\right)\right\|_{L^2} \\
&\leq \left\|\mathcal{D}_\xi^r\left(\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\hat{\phi}\left(t^{\frac{r}{2+\alpha}} + t^r|\xi|^{(\alpha+1)r} + t^r|n|^{(\beta+1)r}\right)\right\|_{L^2} \\
&\leq P_r(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}
\end{aligned}$$

Caso $r=1,2$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_\xi\left(F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\leq \left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\partial_\xi F\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&\lesssim \|x\phi\|_{L^2} + t\left\|\left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)}\right)\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&\leq P_r(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_1^{r_1,r_2}}
\end{aligned}$$

y que,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_\xi^2\left(F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\partial_\xi F\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\partial_\xi^2 F\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&\lesssim \|x\phi\|_{L^2} + t\left\|\left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)}\right)\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2} + t\left\||\xi|^\alpha\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&\quad + t^2\left\|\left(|\xi|^{2(\alpha+1)} \pm |\xi|^{(\alpha+1)}|n|^{(\beta+1)} + |n|^{2(\beta+1)}\right)\hat{\phi}\right\|_{L^2},
\end{aligned}$$

que es consecuencia de (4-1) y (4-2) junto con la desigualdad triangular. En el cuarto sumando, es suficiente acotar $\left\||\xi|^{(\alpha+1)}|n|^{(\beta+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2}$, para ello usaremos desigualdad de Young con $p=2$ y $q=2$. Los términos del segundo sumando son consecuencia del Lema 1.9 con $a'=2\,b'=2(\alpha+1)$ (respectivamente con $a'=2\,b'=2(\beta+1)$), es decir,

$$\left\||\xi|^{(\alpha+1)}|n|^{(\beta+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} \lesssim \left\||\xi|^{2(\alpha+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||n|^{2(\beta+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} \leq \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathcal{F}_2^{r_1,r_2}} \tag{4-6}$$

y

$$\left\||\xi|^{(\alpha+1)}\,\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}\leq\left\|\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)}\,J_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}\lesssim\left\|\langle\xi\rangle^{2(\alpha+1)}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|J_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}\leq\left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathcal{F}_2^{r_1,r_2}}. \tag{4-7}$$

Caso $1<r<2$. Haciendo $r=1+b$, con $0<b<1$, las propiedades de la derivada Stein (Teorema 1.6), (4-1) y el Lema 4.1, implican que,

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^b\partial_\xi\left(F\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}&\leq\left\|D_\xi^b\left(\partial_\xi F\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(F\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi F\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(F\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(t\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)F\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^bF\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(t\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|t\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)\widehat{\phi}\mathcal{D}_\xi^bF\right\|_{L^2}\\&+\left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b\,|\xi|^{b(\alpha+1)}+t^b\,|n|^{b(\beta+1)}\right)\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&=A_1+A_2+A_3+A_4.\end{aligned}$$

Para estimar A_1, aplicamos la Proposición 1.7

$$A_1\leq\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha+1}\,\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(|n|^{\beta+1}\,\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\leq\left\|J_\xi^b\left(\langle\xi\rangle^{\alpha+1}\,\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|J_\xi^b\left(\langle n\rangle^{\beta+1}\,\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}.$$

El Lema 1.9 y el Lema 1.10 con $\theta a'=b$, $(1-\theta)\,b'=\alpha+1$, $\theta=\frac{b}{1+b}$, $a'=1+b$ y $b'=(\alpha+1)\,(1+b)$, nos permiten acotar el primer y el segundo sumando (respectivamente $(1-\theta)\,b'=\beta+1$),

$$\begin{aligned}A_1&\leq\left\|J_\xi^{1+b}\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(1+b)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|J_\xi^{1+b}\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\langle n\rangle^{(\beta+1)(1+b)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&\leq P_r\,(t)\,\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}.\end{aligned}$$

Para estimar A_2, aplicamos el Lema 4.1:

$$\begin{aligned}A_2&\leq\left\|\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b\,|\xi|^{b(\alpha+1)}+t^b\,|n|^{b(\beta+1)}\right)\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&\leq\left\|\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{(\alpha+1)(b+1)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(\beta+1)(b+1)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&+\left\||\xi|^{\alpha+1}\,|n|^{b(\beta+1)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{b(\alpha+1)}\,|n|^{\beta+1}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\\&=A_2^1+A_2^2+A_2^3+A_2^4+A_2^5.\end{aligned}$$

A_2^1, A_2^2 y A_2^3 están acotados por hipótesis. Para los términos A_2^4 y A_2^5 se aplica la desigualdad de Young con $p=1+b$ y $q=\frac{b+1}{b}$, obteniéndose,

$$A_2^4+A_2^5\lesssim\left\||\xi|^{(\alpha+1)(b+1)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(\beta+1)(b+1)}\,\widehat{\phi}\right\|_{L^2}\leq P_r\,(t)\,\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}.$$

Caso $2 < r < \frac{5}{2} + \alpha$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Sean $r = 2+b, b < \frac{1}{2}+\alpha$ y $Q_j = \partial_\xi^j F, j = 1, 2,$. Entonces, calculado $\partial_\xi^2 \left(F\hat{\phi}\right)$ y aplicando la desigualdad triangular, obtenemos,

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^b \partial_\xi^2 \left(F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|D_\xi^b \left(F\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{2}\left\|D_\xi^b\left(Q_j\partial_\xi^{2-j}\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} + \left\|\partial_\xi^2\hat{\phi}D_\xi^b F\right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{2} A_j.\end{aligned}$$

Para estimar la anterior de desigualdad bastará acotar los siguientes términos;

1. Aplicando propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6) y (4-2), obtenemos,

$$A_1 \leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right)\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right)\partial_\xi\widehat{\phi}\mathcal{D}_\xi^b F\right\|_{L^2}. \tag{4-8}$$

El primer sumando de (4-8) es acotado por,

$$\left\| D_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha+1}\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi^b\left(|n|^{\beta+1}\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2}. \tag{4-9}$$

El primer sumando de (4-9), se estima aplicando el Lema 1.9, con $\theta\tilde{a} = b$, $(1-\theta)\tilde{b} = \alpha+1$, $\theta = \frac{b}{b+1}$, $\tilde{a} = b+1$ y $\tilde{b} = (\alpha+1)(b+1)$. Para el segundo sumando, aplicamos el Lema 1.10 con $\theta\tilde{a} = b+1$, $(1-\theta)\tilde{b} = \beta+1$, $\theta = \frac{b+1}{b+2}$, $\tilde{a} = b+2$ y $\tilde{b} = (\beta+1)(b+2)$,

$$\left\|J_\xi^{b+1}\left(\partial_\xi\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(b+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|J_\xi^{b+2}\left(\widehat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+2)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2}. \tag{4-10}$$

Para el segundo término de (4-10) aplicamos nuevamente el Lema 1.9, con $\theta\tilde{a} = (\alpha+1)(b+1)$, $(1-\theta)\tilde{b} = 1$, $\theta = \frac{b+1}{b+2}$, $\tilde{a} = (\alpha+1)(b+2)$ y $\tilde{b} = b+2$. El segundo sumando de (4-8) es acotado por,

$$\begin{aligned}&\left\||\xi|^{\alpha+1}\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{b(\alpha+1)} + t^b|n|^{b(\beta+1)}\right)\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\qquad + \left\||n|^{\beta+1}\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{b(\alpha+1)} + t^b|n|^{b(\beta+1)}\right)\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4-11}$$

Solo se estimara, el primer sumando de (4-11), ya que el segundo se hace de manera similar. Además, será suficiente acotar el término $\left\||\xi|^{\alpha+1}|n|^{b(\beta+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}$, ya que, la acotación de $\left\||\xi|^{(\alpha+1)(b+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}$ y $\left\||\xi|^{\alpha+1}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}$ es consecuencia del Lema 1.9 y de que $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$. Primero, usaremos la desigualdad de Young con $p = b+1$ y $q = \frac{b+1}{b}$,

$$\left\||\xi|^{\alpha+1}|n|^{b(\beta+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2} \leq \left\||\xi|^{(\alpha+1)(b+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||n|^{(\beta+1)(b+1)}\partial_\xi\widehat{\phi}\right\|_{L^2}. \tag{4-12}$$

Para estimar el lado derecho (4-12) usaremos el Lema 1.9 y Lema 1.10 con $\theta\tilde{a} = 1$, $(1-\theta)\tilde{b} = (\alpha+1)(b+1)$, $1-\theta = \frac{b+1}{b+2}$, $\tilde{a} = b+2$ y $\tilde{b} = (\alpha+1)(b+2)$ (Respectivamente, $\tilde{b} = (\beta+1)(b+2)$),

$$\left\|\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(b+2)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|J^{b+2}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+2)}\hat{\phi}\right\|_{L^2}.$$

2. Por propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), obtenemos,

$$A_2 \leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi) F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1}\right)^2 F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} = A_2^1 + A_2^2.$$

Primero acotamos A_2^2, para esto sera suficiente la revisión de las potencias mas altas,

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{2(\alpha+1)} F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|n|^{2(\beta+1)} F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b(F)|\xi|^{2(\alpha+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{2(\alpha+1)}\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\
&\qquad + \left\|\mathcal{D}_\xi^b(F)|n|^{2(\beta+1)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi^b\left(|n|^{2(\beta+1)}\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\
&\qquad \leq B_1 + B_2 + B_3 + B_4.
\end{aligned}$$

En B_2 y B_4 usamos el Lema 1.9 y el Lema 1.10 con $\theta\dot{a} = 2(\alpha+1)$, (respectivamente, $2(\beta+1)$) $(1-\theta)\dot{b} = b, \theta = \frac{2}{2+b}$ y $\dot{a} = (2+b)(\alpha+1)$, $\dot{b} = 2+b$,

$$\left\|\langle x\rangle^{2+b}\phi\right\|_{L^2} + \left\|J_y^{(2+b)(\beta+1)}\phi\right\|_{L^2} + \left\|J_x^{(2+b)(\alpha+1)}\phi\right\|_{L^2}.$$

En B_1 y B_3 es suficiente acotar los siguientes términos,

$$\begin{aligned}
&\left\||\xi|^{2(\alpha+1)}|\xi|^{b(\alpha+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||\xi|^{2(\alpha+1)}|n|^{b(\beta+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||n|^{2(\beta+1)}|\xi|^{b(\alpha+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&+ \left\||n|^{2(\beta+1)}|n|^{b(\beta+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} \\
&:= B_1^1 + B_1^2 + B_3^1 + B_3^2.
\end{aligned}$$

B_1^1 y B_3^2 son finitos puesto que $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$. Para B_1^2 y B_3^1, aplicamos la desigualdad de Young con $p = \frac{b+2}{2}$, $q = \frac{b+2}{b}$ y obtenemos,

$$2\left\||n|^{(2+b)(\beta+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2} + 2\left\||\xi|^{(2+b)(\alpha+1)}\widehat{\phi}\right\|_{L^2}.$$

Para acotar A_2^1, usamos la función de corte $\chi(\xi) \in C_0^\infty$ tal que $\chi \equiv 1$ en $(-1,1)$ y el $supp\chi \subseteq [-2,2]$

$$\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} := C_1 + C_2. \tag{4-13}$$

Usando propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6),

$$C_1 \leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\right)\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(F\hat{\phi}\right)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\right\|_{L^2} = C_1^1 + C_1^2.$$

Para C_1^1, se define $g(\xi) = |\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)$ como tenemos que $b < \frac{1}{2} + \alpha$, entonces, por el Lema 1.5; $\left\|\mathcal{D}_\xi^b(g(\xi))\right\|_{L^2_\xi} \leq k$. Notando $\mathcal{F}^{\mathbb{T}}$, los coeficientes de Fourier en y y $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}$ la transformada de Fourier en x, tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(C_1^1\right)^2 &\leq \sum \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{D}_\xi^b(g(\xi))\,\hat{\phi}(\xi,n)\right|^2 d\xi \qquad (4\text{-}14)\\
&\leq \sum \sup_\xi \left|\hat{\phi}(\xi,n)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{D}_\xi^b(g(\xi))\right|^2 d\xi\\
&\leq k^2 \sum \left\|\mathcal{F}^{\mathbb{R}}(\mathcal{F}^{\mathbb{T}}(\phi))(\cdot,n)\right\|^2_{L^\infty_\xi}\\
&\leq k^2 \sum \left\|\mathcal{F}^{\mathbb{T}}(\phi)(\cdot,n)\right\|^2_{L^1_x}\\
&\leq k^2 \sum \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+x^2\right)^r \left|\mathcal{F}^{\mathbb{T}}(\phi)(x,n)\right|^2 dx\right)\left(\int \frac{1}{(1+x^2)^r} dx\right)\\
&\lesssim \sum \int_{\mathbb{R}} \left(1+x^2\right)^r \left|\mathcal{F}^{\mathbb{T}}(\phi)(x,n)\right|^2 dx\\
&\lesssim \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(1+x^2\right)^r |\phi(x,y)|^2 dxdy \lesssim \|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}.
\end{aligned}$$

En C_1^2, aplicamos las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), la desigualdad de Young y el Lema 1.9, así,

$$\begin{aligned}
C_1^2 &\leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b(F)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\hat{\phi}\right)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\right\|_{L^2}\\
&\leq \left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{b(\alpha+1)} + t^b|n|^{b(\beta+1)}\right)|\xi|^\alpha \hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\||\xi|^\alpha D_\xi^b\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\
&\lesssim P_r(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}. \qquad (4\text{-}15)
\end{aligned}$$

Finalmente para acotar C_2, aplicamos propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6),

$$C_2 \leq \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} + \left\||\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^b F\right\|_{L^2} := C_2^1 + C_2^2. \qquad (4\text{-}16)$$

Para acotar C_2^1 multiplicamos y dividimos por $\langle\xi\rangle^\alpha$ y aplicamos la Proposición 1.4 con $\psi = \frac{|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)}{\langle\xi\rangle^\alpha} \in L^\infty$ y $\partial_\xi\psi \cong \frac{1}{\langle x\rangle}$, $\partial_\xi^2\psi \cong \frac{1}{\langle x\rangle^2} \in L^2$. C_2^2 ya se tiene por lo realizado en B_1 y en B_3,

$$\begin{aligned}
C_2^1 + C_2^2 &\leq \left\|J_\xi^b\left(\frac{|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)}{\langle\xi\rangle^\alpha}\langle\xi\rangle^\alpha\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\
&\quad + \left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{b(\alpha+1)} + t^b|n|^{b(\beta+1)}\right)|\xi|^\alpha\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\
&\lesssim \left\|J_\xi^b\left(\langle\xi\rangle^\alpha\phi\right)\right\|_{L^2} + P(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}\\
&\lesssim P_r(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}.
\end{aligned}$$

Caso $\frac{5}{2}+\alpha\leq r<3$. Si $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $r=2+b$ con $\frac{1}{2}+\alpha<b$. Entonces, todos los términos pueden estimarse como antes (caso $2<r<\frac{5}{2}+\alpha$ y $0<\alpha<\frac{1}{2}$), excepto el término $C=\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}$, ya que no tenemos la condición del Lema 1.5 , por tal razón la hipótesis $\hat{\phi}(0,n)=0$ juega un papel importante. Ya que, $\left\|D_\xi^b f\right\|_{L^2}\leq\|f\|_{L^2}+\|\partial_\xi f\|_{L^2}$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
C&\lesssim\left\||\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\partial_\xi\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\
&\lesssim\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^\alpha\chi(\xi)\frac{\hat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^\alpha\chi(\xi)\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^\alpha\partial_\xi\chi(\xi)\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\delta_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\
&\lesssim\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\||\xi|^\alpha\chi(\xi)\|_{L^\infty_\xi}\left\|D_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\||\xi|^\alpha\chi(\xi)\|_{L^\infty_\xi}\left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\||\xi|^\alpha\partial_\xi\chi(\xi)\|_{L^\infty_\xi}\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\delta_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\
&\lesssim\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}},
\end{aligned}$$

donde δ_ξ denota la función delta Dirac con respecto ξ . Las desigualdades anteriores son validas, siempre $\hat{\phi}(0,n)=0$, para cada $n\in\mathbb{Z}$.

Caso $r=3,4$. Con $3,4\in\left[\frac{5}{2}+\alpha,\frac{7}{2}+\alpha\right)$, definimos $Q_j=\partial_\xi^j F$. Entonces, calculado $\partial_\xi^r\left(F\hat{\phi}\right)$, aplicando la desigualdad triangular y (4-4) implican que,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_\xi^r\left(F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}&\lesssim\left\|\partial_\xi^r\left(\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{r}\left\|Q_j\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2} \qquad (4\text{-}17)\\
&\lesssim\|x^r\phi\|_{L^2}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{l=0}^{j-1-k}|t|^{j-k}\left\||\xi|^{(\alpha+1)(j-k-l)-k}|n|^{(\beta+1)l}(sgn(\xi))^k\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\
&\quad+|t|^j\left\||\xi|^{(\alpha+1)k}|n|^{(\beta+1)(j-k)}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

1. A partir de la tercera derivada, como se observa en (4-3) obtenemos términos con potencia positiva y con potencia negativa. Entonces, si $(\alpha+1)(j-k-l)-k>0$, aplicando Young, $p=\frac{j}{j-l-k}$ y $q=\frac{j}{l+k}$, obtenemos,

   $$\left\||\xi|^{(\alpha+1)(j-l-k)-k}|n|^{(\beta+1)l}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}\leq\left\||\xi|^{(\alpha+1)j-k\left(\frac{j}{j-l-k}\right)}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(\beta+1)\left(\frac{j}{l+k}\right)l}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}$$

   Se concluye el resultado usando el Lema 1.9 y Lema 1.10 con $\theta=\frac{r-j}{r}$, $a=r$ y $b=r\left((\alpha+1)-\left(\frac{k}{j-l-k}\right)\right)<r(\alpha+1)$ para el primer sumando y para el segundo sumando con $\theta=\frac{r-j}{r}$ $a=r$ y $b=r\left((\beta+1)\left(\frac{j}{l+k}\frac{1}{j}\right)\right)<r(\beta+1)$.

   En el caso que $(\alpha+1)(j-k-l)-k\leq 0$, $j-l-k=1$ (las potencias negativas $\alpha-1$ y $\alpha-2$ se toma como $\alpha-1=(\alpha+1)-2$ y $\alpha-2=(\alpha+1)-3$).

   $$\left\||\xi|^{(\alpha+1)-k}|n|^{(\beta+1)l}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}=\left\||\xi|^{(\alpha+1)}\frac{1}{|\xi|^k}|n|^{(\beta+1)l}\partial_\xi^{r-j}\hat{\phi}\right\|_{L^2}. \qquad (4\text{-}18)$$

Aplicando desigualdad de Young a (4-18) con $p = \frac{k+1}{k}$ y $q = k+1$, obtenemos,

$$\left\| |\xi|^{(\alpha+1)(k+1)} |n|^{(\beta+1)l} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{1}{|\xi|^{k+1}} |n|^{(\beta+1)l} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2}. \tag{4-19}$$

Por la desigualdad de Young, en el primer sumando de (4-19) con $p = \frac{k+1+l}{k+1}$ y $q = \frac{k+1+l}{l}$,

$$\left\| |\xi|^{(\alpha+1)(k+1+l)} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)(k+1+l)} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2}. \tag{4-20}$$

Para el primer sumando de (4-20), por el Lema 1.9 con $a' = r$, $b' = (\alpha+1)(k+1+l)\frac{r}{j} = (\alpha+1)r$ y $\theta = \frac{r-j}{r}$,

$$\left\| \langle \xi \rangle^{(\alpha+1)r} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| J_\xi^r \hat{\phi} \right\|_{L^2} \leq \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_3^{r_1,r_2}}. \tag{4-21}$$

Para el segundo sumando de (4-20), con $a' = r$, $b' = (\beta+1)(k+1+l)\frac{r}{j} = (\beta+1)r$ y $\theta = \frac{r-j}{r}$,

$$\left\| \langle n \rangle^{(\beta+1)r} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| J_\xi^r \hat{\phi} \right\|_{L^2} \leq \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}. \tag{4-22}$$

Por desigualdad de Young, en el segundo sumando de (4-19) con $p = \frac{k+1+l}{k+1}$ y $q = \frac{k+1+l}{1}$,

$$\left\| \frac{1}{|\xi|^{(k+1+l)}} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)(k+1+l)} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2}. \tag{4-23}$$

El primer sumando de (4-23), se estima usando la hipótesis $\partial_\xi^{j-1} \hat{\phi}(0,n) = 0$ y el Corolario 1.1,

$$\left\| \partial_\xi^{r-j+j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} = \left\| \partial_\xi^r \hat{\phi} \right\|_{L^2}. \tag{4-24}$$

El segundo sumando de (4-23), ya fue acotado antes.

2. Finalmente usando Young con $p = \frac{j}{j-k}$ y $q = \frac{j}{k}$ en,

$$\left\| |\xi|^{(\alpha+1)k} |n|^{(\beta+1)(j-k)} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} \tag{4-25}$$

y razonando como el ítem anterior, obtenemos,

$$\left\| |\xi|^{(\alpha+1)k\frac{j}{k}} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)(j-k)\frac{j}{j-k}} \partial_\xi^{r-j} \hat{\phi} \right\|_{L^2} \leq \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}. \tag{4-26}$$

Caso $2<r<\frac{5}{2}+\alpha$ y $\frac{1}{2}<\alpha<1$. Sea $r=2+b$, con estas condiciones, si $2<r<3$ entonces $b<1<\frac{1}{2}+\alpha$, por lo tanto se siguen las mismas ideas del caso $2<r<\frac{5}{2}+\alpha$ y $0<\alpha<\frac{1}{2}$, ya que el Lema 1.5 sigue siendo valido. Si $r=3$ y $\frac{1}{2}<\alpha<1$, seguimos las mismas ideas que en el caso anterior ($r=3$) salvo en el término $\left\||\xi|^{\alpha-1}\hat{\phi}\right\|_{L^2}$, ya que, la condición $\hat{\phi}(0,n)=0$, para todo $n\in\mathbb{Z}$, no se tiene, entonces para acotar este término, usamos nuevamente la función de corte χ definida antes,

$$\begin{aligned}\left\||\xi|^{\alpha-1}\hat{\phi}\right\|_{L^2} &= \left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\right\|_{L^2_\xi}\right\|_{L^2_\eta}+\left\||\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\right\|_{L^\infty_\xi}\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_\eta}+\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\|x^r\phi\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_y}+\left\|\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}\end{aligned} \tag{4-27}$$

donde, $|\xi|^{\alpha-1}\chi\in L^2(\mathbb{R})$ ya que $\frac{1}{2}<\alpha<1$. Ahora, si $r=3+b$, $b<\alpha-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}<\alpha<1$, se siguen las mismas ideas del caso $\frac{5}{2}+\alpha<r<\frac{7}{2}+\alpha$ y $\frac{1}{2}<\alpha<1$ (ver abajo) salvo en el término A_3^1, ya que no tenemos la hipótesis $\hat{\phi}(0,n)=0$. $A_3^1=B_1+B_2$, entonces usando nuevamente la función de corte χ acotamos el término B_1,

$$\left\|D_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}\hat{\phi})\right\|_{L^2}=\left\|D_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}\chi\hat{\phi})\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\hat{\phi})\right\|_{L^2}=E_1+E_2$$

Sumando un cero y aplicando la desigualdad triangular, tenemos que,

$$E_1\lesssim\left\|D_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}\chi\left(\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}\chi\left(\hat{\phi}(0,n)\right)\right\|_{L^2}=E_1^1+E_1^2.$$

Usando que $\left\|D_\xi^b f\right\|_{L^2}\le\|f\|_{L^2}+\|\partial_\xi f\|_{L^2}$,

$$\begin{aligned}E_1^1 &\le \left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\left(\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)\right)\right\|_{L^2}+\left\|\partial_\xi(|\xi|^{\alpha-1}\chi\left(\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\||\xi|^{\alpha}\chi\left(\frac{\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\left(\frac{\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^2} \\ &+\left\||\xi|^{\alpha}\partial\xi\chi\left(\frac{\hat{\phi}(\xi,n)-\hat{\phi}(0,n)}{|\xi|}\right)\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\||\xi|^{\alpha}\chi\|_{L^2_\xi}\left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_n}+\left\|\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\right\|_{L^2_\xi}\left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_n}+\left\|\||\xi|^{\alpha}\partial_\xi\chi\|_{L^2_\xi}\left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_n} \\ &+\left\|\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\right\|_{L^2_\xi}\left\|\partial_\xi\hat{\phi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_n} \\ &\lesssim \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}\end{aligned}$$

donde, $|\xi|^{\alpha-1}\chi \in L^2(\mathbb{R})$ ya que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

$$E_1^2 \leq \left\| \left\| \hat{\phi} \right\|_{L^\infty_\xi} \left\| D^b_\xi (|\xi|^{\alpha-1}\chi) \right\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \lesssim \|x^r \phi\|_{L^2}$$

Usando la Proposición 1.8 con $\gamma = \alpha - \frac{1}{2}$ y $\epsilon = \alpha - \frac{1}{2} - b$, el término $\left\| D^b_\xi (|\xi|^{\alpha-1}\chi) \right\|_{L^2_\xi}$ es finito. Ahora para acotar el termino E_2, sea $h(\xi) = |\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)$,

$$E_2 \lesssim \left\| \left\| \mathcal{D}^b_\xi (h) \right\|_{L^\infty_\xi} \left\| \hat{\phi} \right\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} + \left\| \|h\|_{L^\infty_\xi} \left\| \mathcal{D}^b_\xi (\hat{\phi}) \right\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \lesssim \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_r}$$

donde $h, \partial_\xi h \in L^\infty(\mathbb{R})$. Como $B_2 < B_2^1 + B_2^2 + B_2^3$ sumandos definidos en (4-29) y B_2^1 ya se acoto en (4-27). Entonces bastara revisar los términos B_2^2 y B_2^3.

$$B_2^2 = \left\| D_x^{(\alpha+1)b+\alpha-1}\phi \right\|_{L^2} \leq \left\| D_x^{(\alpha+1)(3+b)}\phi \right\|_{L^2} \lesssim \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_r}.$$

Definimos la función de corte $\chi_1(\xi, n) = \chi(\xi)\chi_0(n)$, donde χ_0 es la función característica del conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$,

$$B_2^3 \lesssim \left\| |n|^{(\alpha+1)b} |\xi|^{\alpha-1} \chi_1 \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\alpha+1)b} |\xi|^{\alpha-1} (1-\chi_1) \hat{\phi} \right\|_{L^2} = L_1 + L_2,$$

$$L_1 \lesssim \left\| |n|^{(\alpha+1)b} \chi_0 \left\| |\xi|^{\alpha-1}\chi \right\|_{L^2_\xi} \left\| \hat{\phi} \right\|_{L^\infty_\xi} \right\|_{L^2_n} \lesssim \left\| \left\| \hat{\phi} \right\|_{L^\infty_\xi} \right\|_{L^2_n} \lesssim \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_r},$$

donde $|\xi|^{\alpha-1}\chi \in L^2(\mathbb{R})$ si, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

$$L_2 \lesssim \left\| \frac{(1-\chi_1)}{|\xi|} \right\|_\infty \left\| |n|^{(\alpha+1)b} |\xi|^\alpha \hat{\phi} \right\|_{L^2} \lesssim \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_r}.$$

La ultima desigualdad se concluye aplicando la desigualdad de Young con $\frac{1}{p} = \frac{b}{b+1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{b+1}$.
Caso $\frac{5}{2} + \alpha < r < \frac{7}{2} + \alpha$ y $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Sean, $r = 3+b, \alpha - \frac{1}{2} < b < 1$ y $Q_j = \partial_\xi^j F$. Entonces, calculado $\partial_\xi^3 \left(F\hat{\phi} \right)$ y aplicando la desigualdad triangular, obtenemos,

$$\begin{aligned} \left\| D^b_\xi \partial^3_\xi \left(F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} &\lesssim \left\| D^b_\xi \left(F \partial^3_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{3} \left\| D^b_\xi \left(Q_j \partial^{3-j}_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_r} + \left\| \partial^3_\xi \hat{\phi} D^b_\xi F \right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{3} A_j. \end{aligned} \tag{4-28}$$

De esta desigualdad vemos que solo resta acotar $\sum_{j=1}^3 A_j$. Para ello estimamos cada sumando. En efecto,

1. Aplicando (4-3) y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}A_3 &\leq \left\|D_\xi^b\left(\left((it)\,|\xi|^{\alpha-1}+(it)^2\,|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)\left(|\xi|^{(\alpha+1)}\pm|n|^{(\beta+1)}\right)\right.\right.\\ &\quad\left.\left.+(it)^3\left(|\xi|^{(\alpha+1)}\pm|n|^{(\beta+1)}\right)^3\right)F\hat{\phi}\right)\Big\|_{L^2}\\ &\leq \left\|D_\xi^b\left((it)\,|\xi|^{\alpha-1}\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left((it)^2\,|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)\left(|\xi|^{(\alpha+1)}\pm|n|^{(\beta+1)}\right)F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\ &\quad+\left\|D_\xi^b\left((it)^3\left(|\xi|^{(\alpha+1)}\pm|n|^{(\beta+1)}\right)^3F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\ &:=A_3^1+A_3^2+A_3^3.\end{aligned}$$

Para acotar A_3^1, aplicamos propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6),

$$A_3^1\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha-1}\,\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(F\right)|\xi|^{\alpha-1}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}:=B_1+B_2.$$

Para B_1, hacemos nuevamente uso del Lema 1.9 y el Corolario 1.1. Es decir,

$$\begin{aligned}B_1=\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha}\,\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right)\right\|_{L^2}&\lesssim\left\|\langle\xi\rangle^{\alpha(1+b)}\,\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}+\left\|J_\xi^{(b+1)}\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim\left\|\langle\xi\rangle^{\alpha(b+1)}\,\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}+\left\|\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^{b+1}\frac{\widehat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim P_r\,(t)\,\|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}},\end{aligned}$$

donde hemos acotado cada uno de los sumados de la penúltima desigualdad haciendo uso de la desigualdad de Young con $p=2$, $q=2$ y el Corolario 1.1. Observemos que,

$$\begin{aligned}B_2&\leq\left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b\,|\xi|^{(\alpha+1)b}+t^b\,|n|^{(\beta+1)b}\right)|\xi|^{\alpha-1}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim\left\||\xi|^{\alpha-1}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{(\alpha+1)b+\alpha}\,\frac{\hat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(\beta+1)b}\,|\xi|^{\alpha}\,\frac{\hat{\phi}}{|\xi|}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim\left\|J_x^{\alpha+1}\phi\right\|_{L^2}+\left\|J_x^{(\alpha+1)(b+1)}\phi\right\|_{L^2}+B_2^3.\end{aligned}\tag{4-29}$$

Los primeros dos sumandos son finitos porque $\phi\in\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$. Para estimar B_2^3, aplicamos la desigualdad de Young con $p=2$ y $q=2$, el Corolario 1.1 y el Lema 1.11.

Para acotar A_3^2, se aplican propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6),

$$A_3^2\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{2\alpha+1}\,sgn\,(\xi)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(\beta+1)}\,\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}=C_1+C_2.$$

Para C_1 usamos la función χ definida en (4-13)

$$\begin{aligned}C_1&\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{2\alpha+1}\,sgn\,(\xi)\,\chi\,(\xi)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{2\alpha+1}\,sgn\,(\xi)\,(1-\chi)\,(\xi)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\ &\leq C_1^1+C_1^2,\end{aligned}$$

C_1^1 es estimado vía las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6) y razonando como en (4-14) y (4-15) pero con $g(\xi) = |\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)\chi(\xi)$, obtenemos,

$$\begin{aligned} C_1^1 &\leq \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)\chi(\xi) \right) \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(F\hat{\phi} \right) |\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)\chi(\xi) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} + \left\| |\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)\chi(\xi) \mathcal{D}_\xi^b \left(\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b (F) |\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi} \right\|_{L^2} \\ &\leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}. \end{aligned}$$

Para acotar a C_1^2, aplicamos propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6) y seguimos las ideas de (4-16),

$$\begin{aligned} C_1^2 &\leq \left\| |\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\| |\xi|^{2\alpha+1} \hat{\phi} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) \right\|_{L^2} \\ &+ \left\| D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^{2\alpha+1} sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)}{\langle\xi\rangle^{2\alpha+1}} \langle\xi\rangle^{2\alpha+1} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\| |\xi|^{2\alpha+1} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{2\alpha+1+b(\alpha+1)} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{2\alpha+1} |n|^{(\beta+1)b} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(\langle\xi\rangle^{2\alpha+1} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}. \end{aligned}$$

El tercer sumando se acoto aplicando la desigualdad de Young con $\frac{1}{p} = \frac{b}{b+1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{b+1}$. Para C_2 usamos como en C_1 la función χ, definida en (4-13),

$$\begin{aligned} C_2 &\leq \left\| |n|^{(\beta+1)} \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)} \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)(\xi) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &:= C_2^1 + C_2^2. \end{aligned}$$

En C_2^1, como $b < \alpha + \frac{1}{2}$ aplicamos el Lema 1.5 con $g(\xi) = |\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)$ y se obtiene $\left\| |n|^{(\beta+1)} J_\xi^{1+b} \hat{\phi} \right\|_{L^2}$, este resulta acotado por el Lema 1.10 con $\theta\dot{a} = 1+b, (1-\theta)\dot{b} = \beta+1, \theta = \frac{1+b}{2+b}, \dot{a} = 2+b$ y $\dot{b} = (\beta+1)(b+2)$.

Para C_2^2 se razona como en (4-16),

$$\begin{aligned} C_2^2 &\leq \left\| |n|^{(\beta+1)} |\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| |n|^{(\beta+1)} \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| |n|^{(\beta+1)} |\xi|^\alpha \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) \hat{\phi} \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| |n|^{(\beta+1)} D_\xi^b \left(\frac{|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)}{\langle\xi\rangle^\alpha} \langle\xi\rangle^\alpha \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| |n|^{(\beta+1)} |\xi|^\alpha \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)} |\xi|^{\alpha+(\alpha+1)b} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)(1+b)} \hat{\phi} \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| |n|^{(\beta+1)} D_\xi^b \left(\langle\xi\rangle^\alpha \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En los dos primeros sumandos que acotan a C_2^2 se aplica la desigualdad de Young. El primer sumando con $p=\frac{b+1}{b}$ y $q=b+1$. El segundo con $p=\frac{b+2}{b+1}$ y $q=b+2$, como $\phi\in\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$ el tercer sumando es finito. El cuarto sumando se aplica el Lema 1.10 con $\theta\dot{a}=b,(1-\theta)\,\dot{b}=\beta+1,\theta=\frac{b}{1+b},\dot{a}=1+b$ y $\dot{b}=(\beta+1)\,(b+1)$,

$$\left\||n|^{(\beta+1)}\,D_\xi^b\left(\langle\xi\rangle^{\alpha}\,\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\leq\left\|\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+1)}\,\langle\xi\rangle^{\alpha}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|J_\xi^{b+1}\,\langle\xi\rangle^{\alpha}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}.$$

Luego, se concluye aplicando desigualdad de Young $p=\frac{b+2}{b+1},q=b+2$ para el primer sumando y el Lema 1.9 con $\theta\dot{a}=1+b,(1-\theta)\,\dot{b}=\alpha,\theta=\frac{1+b}{2+b},\dot{a}=2+b$ y $\dot{b}=\alpha\,(b+2)$ para el segundo sumando.

Para A_3^3, es suficiente tratar las potencias mas altas, por lo tanto,

$$\begin{aligned}A_3^3&\lesssim\left\|D_\xi^b\left(\left(|n|^{3(\beta+1)}+|\xi|^{3(\alpha+1)}\right)F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&\leq\left\|D_\xi^b\left(|n|^{3(\beta+1)}\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{3(\alpha+1)}\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|n|^{3(\beta+1)}\,\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\||n|^{3(\beta+1)}\,\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^bF\right\|_{L^2}\\&+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{3(\alpha+1)}\,\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\||\xi|^{3(\alpha+1)}\,\hat{\phi}\mathcal{D}_\xi^bF\right\|_{L^2}\\&=B_1+B_2+B_3+B_4.\end{aligned}$$

Se estima B_1 y B_2 ya que B_3 y B_4 se tratan análogamente. Para B_1 se aplica el Lema 1.10 con $\theta a'=b,(1-\theta)b'=3(\beta+1),\theta=\frac{b}{b+3},a'=b+3$ y $b'=(\beta+1)(b+3)$,

$$\begin{aligned}B_2&\leq\left\||n|^{3(\beta+1)}\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b\,|\xi|^{(\alpha+1)b}+t^b\,|n|^{(\beta+1)b}\right)\hat{\phi}\right\|_{L^2}\\&\leq\left\||n|^{3(\beta+1)}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{3(\beta+1)}\,|\xi|^{(\alpha+1)b}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\||n|^{(3+b)(\beta+1)}\,\hat{\phi}\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

En el segundo sumando aplicamos la desigualdad de Young, con $p=\frac{b+3}{b}$ y $q=\frac{b+3}{3}$.

2. Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}A_2&\leq\left\|D_\xi^b\left(\left(|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)+\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)^2\right)F\partial_\xi\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&\leq\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)\,F\partial_\xi\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(\left(|\xi|^{\alpha+1}\pm|n|^{\beta+1}\right)^2F\partial_\xi\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}\\&=A_2^1+A_2^2.\end{aligned}\tag{4-30}$$

Para acotar A_2^1 como $b<\alpha+\frac{1}{2}$ podemos aplicar el Lema 1.5, usamos la función χ como en casos anteriores, por ejemplo en (4-14) pero con $g\,(\xi)=|\xi|^{\alpha}\,sgn\,(\xi)\,\chi\,(\xi)$. En A_2^2, es suficiente acotar las potencias mas altas, por lo tanto, aplicando desigualdad triangular y propiedades de

la derivada de Stein (Teorema 1.6), obtenemos,

$$\begin{aligned}
A_2^2 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left(|n|^{2(\beta+1)} \pm |\xi|^{2(\alpha+1)} \right) F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(|n|^{2(\beta+1)} F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{2(\alpha+1)} F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|n|^{2(\beta+1)} \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{2(\beta+1)} \partial_\xi \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{2(\alpha+1)} \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{2(\alpha+1)} \partial_\xi \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

3. Aplicando la desigualdad triangular y propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), obtenemos,

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left(|\xi|^{(\alpha+1)} + |n|^{(\beta+1)} \right) F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{(\alpha+1)} F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(|n|^{(\beta+1)} F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| |\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^2 \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)} \partial_\xi^2 \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| |n|^{(\beta+1)} \mathcal{D}_\xi^b \left(\partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq A_1^1 + A_1^2 + A_1^3 + A_1^4.
\end{aligned}$$

Para acotar A_1^1, aplicamos el Lema 4.1 y observamos que es suficiente acotar los términos, $\left\| |\xi|^{(\alpha+1)(b+1)} \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right\|_{L^2}$ y $\left\| |\xi|^{(\alpha+1)} |n|^{b(\beta+1)} \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right\|_{L^2}$. En el primero aplicamos el Lema 1.9 con $\theta \dot{a} = 2, (1-\theta)\dot{b} = (\alpha+1)(b+1), \theta = \frac{2}{3+b}, \dot{a} = 1+b$ y $\dot{b} = (\alpha+1)(b+3)$, para el segundo se debe aplicar primero la desigualdad de Young con $p = \frac{b+1}{b}$, $q = b+1$ y se obtiene dos términos análogos al primero.

Caso $4 < r < \frac{7}{2} + \alpha$. Sean $r = 4+b$, $b < \alpha - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ y $Q_j = \partial_\xi^j F$. Entonces, calculado $\partial_\xi^4 \left(F\hat{\phi} \right)$ y aplicando la desigualdad triangular, obtenemos,

$$\begin{aligned}
\left\| D_\xi^b \partial_\xi^4 \left(F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} &\lesssim \left\| D_\xi^b \left(F \partial_\xi^4 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{4} \left\| D_\xi^b \left(Q_j \partial_\xi^{4-j} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \|\phi\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} + \left\| \partial_\xi^4 \hat{\phi} D_\xi^b F \right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{4} A_j. \qquad (4\text{-}31)
\end{aligned}$$

1. Por (4-4) y la desigualdad triangular, obtenemos,

$$\begin{aligned}
A_4 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left((it)\,|\xi|^{\alpha-2}\, sgn(\xi) + (it)^2 \left(|\xi|^{2\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\,|\xi|^{\alpha-1} \right) \right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + (it)^3\,|\xi|^{\alpha}\, sgn\,(\xi) \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^2 + (it)^4 \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^4 \right) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left((it)\,|\xi|^{\alpha-2}\, sgn(\xi) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left((it)^2 \left(|\xi|^{2\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\,|\xi|^{\alpha-1} \right) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\| D_\xi^b \left((it)^3\,|\xi|^{\alpha}\, sgn\,(\xi) \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^2 F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&\quad + \left\| D_\xi^b \left((it)^4 \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^4 F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&= A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4.
\end{aligned}$$

A continuación, estimaremos los términos A_4^j, $j = 1,2,3,4$. Para A_4^1 utilizamos la función χ definida en (4-13),

$$\begin{aligned}
A_4^1 &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha-2}\, sgn(\xi)\chi(\xi) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha-2}\, sgn(\xi)(1-\chi)(\xi) F\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\
&= B_1 + B_2
\end{aligned}$$

Las estimativas de los términos B_1 y B_2 serán consecuencia de las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), las ideas de (4-14), Corolario 1.1 y la desigualdad de Young;

$$\begin{aligned}
B_1 &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha}\, sgn(\xi)\chi(\xi) \right) \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(F\frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^{2+b} \left(\frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(\frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(F \right) \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} \\
&\leq P_r\,(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} + \left\| \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b\,|\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b\,|n|^{(\beta+1)b} \right) \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} \\
&\leq P_r\,(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B_2 &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha-2}\, sgn(\xi)(1-\chi)(\xi)\hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(F \right) |\xi|^{\alpha} (1-\chi)(\xi) \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^b \left(\langle\xi\rangle^{\alpha} \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(F \right) |\xi|^{\alpha} \hat{\phi} \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D_\xi^{b+\alpha} \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} + \left\| \langle\xi\rangle^{b+\alpha} \frac{\hat{\phi}}{\xi^2} \right\|_{L^2} + \left\| \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b\,|\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b\,|n|^{(\beta+1)b} \right) |\xi|^{\alpha} \hat{\phi} \right\|_{L^2} \\
&\leq P_r\,(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}
\end{aligned}$$

Aplicando, propiedades de la derivada de Stein (Teorema 4.1) y la desigualdad triangular, obtenemos que,

$$\begin{aligned} A_4^2 &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{2\alpha} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{2\alpha} \hat{\phi} D_\xi^b (F) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(|\eta|^{1+\beta} |\xi|^{\alpha-1} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| |\eta|^{1+\beta} |\xi|^{\alpha-1} \hat{\phi} D_\xi^b (F) \right\|_{L^2} \\ &\leq B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \end{aligned}$$

Los términos B_1 y B_2 no representan dificultad ya que son consecuencia del Lema 1.9, Lema 4.1 y de que $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$. A continuación estimamos B_3 y B_4.

$$\begin{aligned} B_3 = \left\| |\eta|^{1+\beta} D_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha-1} \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} &\leq \left\| |\eta|^{(1+\beta)(b+\frac{1}{2})} |\xi|^{\alpha-1} \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^{b+\frac{1}{2}} \left(|\xi|^\alpha \frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq B_3^1 + B_3^2 \end{aligned}$$

Para estimar los términos B_3^1 y B_3^2, haremos uso de la desigualdad de Young y el Lema 1.9;

$$B_3^1 \leq \left\| |\eta|^{(1+\beta)(b+1)} \frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{\alpha(b+1)} \frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}$$

y

$$B_3^2 \leq \left\| D_\xi^{b+\frac{1}{2}} \left(|\xi|^\alpha \frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right) \right\|_{L^2} \leq \left\| D_\xi^{b+1} \left(\frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right) \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{2\alpha(b+1)} \frac{\hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}$$

Para B_4 usamos el lema 4.1 y la desigualdad de Young,

$$B_4 \leq \left\| |\eta|^{1+\beta} |\xi|^{\alpha-1} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) \hat{\phi} \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}$$

2. Observe que los términos A_j, $j = 1,2,3$ del caso $\frac{5}{2} + \alpha < r < \frac{7}{2} + \alpha$ y $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, son similares a los correspondientes en este caso, aplicando (4-3) y la desigualdad triangular, obtenemos que,

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left((it) |\xi|^{\alpha-1} + (it)^2 |\xi|^\alpha sgn(\xi) \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (it)^3 \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^3 \right) F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| D_\xi^b \left((it) |\xi|^{\alpha-1} F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left((it)^2 |\xi|^\alpha sgn(\xi) \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right) F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| D_\xi^b \left((it)^3 \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \pm |n|^{(\beta+1)} \right)^3 F \partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &= A_3^1 + A_3^2 + A_3^3. \end{aligned}$$

Los términos A_3^2 y A_3^3 se tratan como en el caso $\frac{5}{2}+\alpha<r<\frac{7}{2}+\alpha$ y $\frac{1}{2}<\alpha<1$, estos son consecuencia de las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), las ideas de (4-14), Corolario 1.1 y la desigualdad de Young. Entonces, estimamos A_3^1,

$$A_3^1 \leq \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^\alpha \frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|} \right) \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b (F) |\xi|^\alpha \frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} = B_1 + B_2.$$

B_1 es consecuencia del Lema 1.9,

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \left\| \langle \xi \rangle^{\alpha(b+1)} \frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} + \left\| J_\xi^{b+1} \left(\frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \langle \xi \rangle^{2\alpha(b+1)} \partial_\xi \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|^2} \right\|_{L^2} + \left\| J_\xi^{b+2} \left(\partial_\xi \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} \end{aligned}$$

Para B_2 usamos el lema 4.1 y la desigualdad de Young,

$$B_2 \leq \left\| \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) |\xi|^\alpha \frac{\partial_\xi \hat{\phi}}{|\xi|} \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}}$$

3. Por (4-2) y la desigualdad triangular. obtenemos,

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi) + \left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1} \right)^2 \right) F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^\alpha sgn(\xi) F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(\left(|\xi|^{\alpha+1} \pm |n|^{\beta+1} \right)^2 F \partial_\xi^2 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &= A_2^1 + A_2^2. \end{aligned}$$

Para estimar A_2^1 se siguen las ideas de (4-14) usando la función χ y en A_2^2 es suficiente acotar las potencias mas altas, las cuales resultaran acotadas al aplicar el Lema 1.9.

4. Por (4-1), la desigualdad triangular y las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.6), obtenemos,

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \left\| D_\xi^b \left(\left(|\xi|^{(\alpha+1)} + |n|^{(\beta+1)} \right) F \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| D_\xi^b \left(|\xi|^{(\alpha+1)} F \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} + \left\| D_\xi^b \left(|n|^{(\beta+1)} F \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| |\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} + \left\| |n|^{(\beta+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \mathcal{D}_\xi^b F \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &+ \left\| |n|^{(\beta+1)} \mathcal{D}_\xi^b \left(\partial_\xi^3 \hat{\phi} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq A_1^1 + A_1^2 + A_1^3 + A_1^4. \end{aligned}$$

Los términos A_1^3,A_1^4 son estimados por el Lema 1.9 y Lema 1.10 respectivamente. A_1^1 y A_1^2 se acotan de manera similar haciendo uso nuevamente de el Lema 1.9 y el Lema 1.10;

$$\begin{aligned} A_1^1 &\leq \left\| |\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| |\xi|^{(\alpha+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{(\alpha+1)(b+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right\|_{L^2} + \left\| |\xi|^{(\alpha+1)} |n|^{(\beta+1)b} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \right\|_{L^2} \\ &\leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} \end{aligned}$$

Aplicando, Lema 4.1,

$$A_1^2 \leq \left\| |n|^{(\beta+1)} \partial_\xi^3 \hat{\phi} \left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b |\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b |n|^{(\beta+1)b} \right) \right\|_{L^2} \leq P_r(t) \left\| \hat{\phi} \right\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}},$$

usando desigualdad triangular, el segundo sumando sera consecuencia de la desigualdad de Young y los otros dos son finitos ya que $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$.

□

Teniendo en cuenta la estimativa lineal (Lema 4.2) en el espacio $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y las condiciones que se requieren para establecer el buen planteamiento local en los espacios anisotrópicos, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}<2$ y $r_1, r_2 > 2$. Obtenemos el resultado de buen planteamiento local en los espacios anisotrópicos con peso, Teorema 0.6;

Demostración. Teorema 0.6

Se prueba el item 1, ya que el otro item se prueba análogamente.

1. **Persistencia.** Sea, $\phi \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, como $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) = H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}) \cap L_r^2(\mathbb{R})$, observamos que, por la teoría establecida en la sección anterior en espacios anisótropicos, existe u solución local al PVI (2-1), en el espacio H^{r_1,r_2}, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}<2$ y $r_1, r_2 > 2$, que satisface la ecuación integral asociada a (2-1),

$$u(t) = \mathbb{W}_0(t)\phi + \int_0^t \mathbb{W}_0(t-t') u^p u_x dt'. \tag{4-32}$$

Como la norma en espacios de Sobolev con peso es, $\|u\|_{\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}} = \|u\|_{r_1,r_2} + \|u\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)}$ es suficiente probar la persistencia en $L_r^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} &\leq \|\mathbb{W}_0(t)\phi\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t \|\mathbb{W}_0(t-t') u^p u_x\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} dt' \quad (4\text{-}33) \\ &\lesssim P_r(t)\|\phi\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t P_r(t-t')\|u^p u_x\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} dt' \end{aligned}$$

El primer sumando del lado derecho de (4-33), es consecuencia de la primera parte del Lema 4.2. Para la parte no lineal,

$$\|\langle x\rangle^r u\partial_x(u^p)\|_{L^2} \leq \|\langle x\rangle^r u\|_{L^2} \|\partial_x(u^p)\|_{L^\infty} \leq \|\langle x\rangle^r u\|_{L^2} \|u\|_{r_1,r_2}^p.$$

Asi,

$$\|u(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} \lesssim P_r(t)\|\phi\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t P_r(t-t')\|\langle x\rangle^r u\|_{L^2}\|u\|_{r_1,r_2}^p dt'$$

Concluimos aplicando la desigualdad de Gronwall y $\|u\|_{r_1,r_2} < M$.

2. **Unicidad.** Para tratar la unicidad, sean $u, v \in C([0,T],\mathcal{F}_r^{r_1,r_2})$ dos soluciones del PVI (2-1) con respectivos datos iniciales ϕ_1 y ϕ_2. Por la definición de el espacio $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}$, es suficiente tratar la unicidad en el espacio L_r^2, primero observe que,

$$\partial_x\left(u^{p+1}-v^{p+1}\right) = u\partial_x u^p - v\partial_x v^p = u\partial_x u^p - v\partial_x u^p + v\partial_x u^p - v\partial_x v^p$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} &\leq P_r(t)\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t \left\|\partial_x\left(u^{p+1}-v^{p+1}\right)\right\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} dt' \\
&\leq P_r(t)\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t \|(u-v)\,\partial_x u^p\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} \\
&+ \|v\left(\partial_x u^p - \partial_x v^p\right)\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} dt' \\
&\lesssim P_r(t)\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t \|\langle x\rangle^r (u-v)\|_{L^2}\|u\|_{r_1,r_2}^p \\
&+ \|\langle x\rangle^r v\|_{L^2}\|u-v\|_{r_1,r_2}\|q(u,v)\|_{r_1,r_2} dt' \\
&\lesssim P_r(t)\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_{L^2}^t P_r(t-t')\|u-v\|_{r_1,r_2} \\
&+ \|u-v\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} dt'.
\end{aligned}$$

donde $q(u,v) = \sum_{j=0}^p u^j v^{p-j}$ y $\|u\|_{r_1,r_2}, \|v\|_{r_1,r_2} < M$, el resultado se concluye usando la desigualdad de Gronwall y el resultado de unicidad en espacios anisotrópicos.

3. **Dependencia Continua** Razonando como en el ítem anterior, con $\phi_m \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ $m = 1,2,\cdots,\infty$ tal que $\phi_m \longrightarrow \phi_\infty$ en $\mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, con respectivas soluciones $u_m \in \mathcal{F}_r^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $u_m \longrightarrow u_\infty$ en $H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}
\|u_m-u_\infty\|_{L^2\left(|x|^{2r}dxdy\right)} &\lesssim P_r(t)\|\phi_m-\phi_\infty\|_{L^2\left(|x|^{2r}dxdy\right)} \\
&+ \int_0^t P_r(t-t')\|u_m-u_\infty\|_{r_1,r_2} + \|u_m-u_\infty\|_{L^2\left(|x|^{2r}dxdy\right)} dt'
\end{aligned}$$

se concluye usando la desigualdad de Gronwall y el resultado de dependencia continua en espacios anisotropicos.

4.2. Continuación Única

Siguiendo las ideas de [17] para la ecuación generalizada de Benjamin-Ono y utilizando los resultados de buen planteamiento local obtenidos en espacios anisotrópicos con pesos, Teorema 0.6, procederemos a probar los Teoremas 0.7 y 0.8;

Demostración. Teorema 0.7

Consideramos el caso $0<\alpha<\frac{1}{2}$, introducimos el parámetro b tal que $\frac{5}{2}+\alpha=2+b,$ así $2+b<3$. Se asume sin perdida de generalidad que $t_1=0$ y u solución del PVI (2-1), puede ser representada por la fórmula de Duhamel, entonces multiplicamos por $|x|^{2+b}$, o equivalentememte vía transformada de Fourier, obtenemos,

$$\begin{aligned} D_\xi^b\partial_\xi^2\hat{u} &= D_\xi^b\partial_\xi^2\left(F(t)\,\hat{\phi}\right)+\frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b\partial_\xi^2\left(F(t-t')\,\xi\hat{u^2}\right)dt' \\ &\lesssim D_\xi^b\left(F\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)+\sum_{j=1}^{2}D_\xi^b\left((\partial_\xi^j F)\partial_\xi^{2-j}\hat{\phi}\right) \\ &\quad+\frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b\left(F\partial_\xi^2\xi\hat{u^2}\right)+\sum_{j=1}^{2}D_\xi^b\left((\partial_\xi^j F)\partial_\xi^{2-j}\xi\hat{u^2}\right)dt' \end{aligned} \tag{4-34}$$

Tomando la norma $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ en el primer sumando,

$$\begin{aligned} \left\|D_\xi^b\left(F\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\mathcal{D}_\xi^b(F)\,\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|F\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b|\xi|^{(\alpha+1)b}+t^b|n|^{(\beta+1)b}\right)\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|t^b|\xi|^{(\alpha+1)b}\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|t^b|n|^{(\beta+1)b}\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|t^b\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(b+2)}\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|t^bJ_\xi^{2+b}\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|t^b\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+2)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &\quad+\left\|t^bJ_\xi^{2+b}\hat{\phi}\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^2\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim p(t)\,\|\phi\|_{\mathcal{F}_{b+2}^{(\alpha+1)(b+2),(\beta+1)(b+2)}} \end{aligned} \tag{4-35}$$

Las desigualdades anteriores son consecuencia de los Lemas 1.9, 1.10 y la desigualdad de Young. Para el resto de sumandos, si $\phi\in\mathcal{F}_{b+2}^{r_1,r_2}$, entonces, la acotación en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ de la parte lineal de (4-34) se obtiene usando las mismas ideas de la prueba del Lema 4.2, caso $2<r<\frac{5}{2}+\alpha$ salvo para el sumando $A_2^1=\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,F\hat{\phi}\right)$, ya que, si $b=\frac{1}{2}+\alpha$ no se puede aplicar el Lema 1.5, por tanto, este término se trata aparte,

$$\begin{aligned} A_2^1 &\le \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,\chi F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,(\chi-1)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\le \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,\chi\,(F-1)\,\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,\chi\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\qquad+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left((it)\,|\xi|^\alpha\,sgn(\xi)\,(\chi-1)\,F\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &= \left\|\mathcal{D}_\xi^b(P_1)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b(P_2)\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b(P_3)\right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

$D_\xi^b(P_1)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ en vista del Lema 1.6 y $(F-1)(0,n,t)=0$; $D_\xi^b(P_3)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, puesto que, se puede acotar de manera similar a lo realizado con este término en la prueba del Lema 4.2,

entonces, podemos afirmar que, $D_\xi^b\left(x^2\widehat{W(t)\phi}-P_2\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Por hipótesis, tenemos que $\phi\in\mathcal{F}_{b+2}^{r_1,r_2}$ entonces $W(t)\phi\in\mathcal{F}_{b+2}^{r_1,r_2}$ lo que implicaría que $D_\xi^b(P_2)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, pero esto solo es posible si y solo si $\widehat{\phi}(0,n)=0$, para toda n. Para la parte no lineal, se razona como en la parte lineal, con $u(t_2)\in\mathcal{F}_{b+2}^{r_1,r_2}$ y se obtiene,

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^b\left(F\partial_\xi^2\widehat{uu_x}\right)\right\|_{L^2}\lesssim&\left\|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^2\widehat{uu_x}\right\|_{L^2}+\left\|t^b\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(b+2)}\widehat{uu_x}\right\|_{L^2}+\left\|t^bJ_\xi^{2+b}\widehat{uu_x}\right\|_{L^2}\\&+\left\|t^b\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+2)}\widehat{uu_x}\right\|_{L^2}+\left\|t^bJ_\xi^{2+b}\widehat{uu_x}\right\|_{L^2}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^2\widehat{uu_x}\right)\right\|_{L^2}\end{aligned}\tag{4-36}$$

El lado derecho de (4-36) es finito ya que,

$$\begin{aligned}\left\|\langle x\rangle^{2+b}uu_x\right\|_{L^2}\lesssim&\left\|\|\langle x\rangle u\|_{L_x^\infty}\left\|\langle x\rangle^{1+b}u_x\right\|_{L_x^2}\right\|_{L_y^2}\\\lesssim&\left(\left\|x^2u\right\|_{L^2}^2+\left\|J_x^2u\right\|_{L^2}^2\right)+\left(\left\|\langle x\rangle^{\frac{3}{2}+b}u\right\|_{L^2}^2+\left\|J_x^{3+2b}u\right\|_{L^2}^2\right)\end{aligned}$$

como consecuencia de la estimativa del conmutador de Kato-Ponce (Proposición 1.2 y 1.3) , obtenemos que,

$$\begin{aligned}\left\|J_x^{(\alpha+1)(b+2)}(uu_x)\right\|_{L^2}&=\left\|u_xJ_x^{(\alpha+1)(b+2)}u\right\|_{L^2}+\left\|[J_x^{(\alpha+1)(b+2)};u]u_x)\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|J_x^{(\alpha+1)(b+2)}u\right\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left\|J_y^{(\beta+1)(b+2)}(uu_x)\right\|_{L^2}&=\left\|u_xJ_y^{(\beta+1)(b+2)}u\right\|_{L^2}+\left\|[J_y^{(\beta+1)(b+2)};u]u_x)\right\|_{L^2}\\&\lesssim\left\|J_y^{(\beta+1)(b+2)}u\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Entonces, $D_\xi^b\left(\partial_\xi^2\widehat{u}\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ si y solo si,

$$D_\xi^b\left((it_2)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\phi}(\xi)-i\int_0^{t_2}(t-t')|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\xi\hat{u^2}dt'\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}).$$

Que,

$$D_\xi^b\left(\int_0^{t_2}(t_2-t')|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\xi\hat{u^2}dt'\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}),$$

es consecuencia de la desigualdad:

$$\begin{aligned}&\left\|D_\xi^b\left(\int_0^{t_2}(t_2-t')|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\xi\hat{u^2}dt'\right)\right\|_{L^2}\\&\qquad\leq\int_0^{t_2}(t_2-t')\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha+1}\chi(\xi)\hat{u^2}\right)\right\|_{L^2}dt'\\&\qquad\leq\int_0^{t_2}(t_2-t')\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(|\xi|^{\alpha+1}\chi(\xi)\right)\right\|_{L^\infty}\left\|\hat{u^2}\right\|_{L^2}\\&\qquad+(t_2-t')\left\||\xi|^{\alpha+1}\chi(\xi)\right\|_{L^\infty}\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\hat{u^2}\right)\right\|_{L^2}dt'.\end{aligned}$$

y de las estimativas, $\|u^2\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$ y $\left\|x^b u^2\right\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty} \left\|x^b u\right\|_{L^2}$. Por lo tanto,

$$D_\xi^b \left(\partial_\xi^2 \widehat{u} - (it_2) |\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi(\xi) \hat{\phi}(\xi)\right) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$$

y como $u(t_2) \in \mathcal{F}_{b+2}^{r_1,r_2}$ entonces $D_\xi^b \left((it_2) |\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi(\xi) \hat{\phi}(\xi)\right) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ pero esto se tiene si y solo si $\widehat{\phi}(0,n) = 0$ para toda n, que junto con la ecuación integral,

$$\hat{u}(\xi,n,t) = F(t)\hat{\phi} + i\frac{\xi}{2}\int_0^t F(t-t')\hat{u^2}dt$$

implican que $\widehat{u}(0,n,t) = 0$ para toda n y $t \in [0,T]$.
Para el caso, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, introducimos el parámetro b, tal que $\frac{5}{2} + \alpha = 3 + b$, así $b = \alpha - \frac{1}{2}$ y se razona análogamente al caso anterior, en vez de (4-34) se considera,

$$D_\xi^b \partial_\xi^3 \hat{u} = D_\xi^b \partial_\xi^3 \left(F(t)\hat{\phi}\right) + \frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b \partial_\xi^3 \left(F(t-t')\xi\hat{u^2}\right) dt' \tag{4-37}$$

.

Demostración. Teorema 0.8

Consideramos el caso $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e introducimos el parámetro b tal que $\frac{7}{2} + \alpha = 3 + b$ y $3 + b < 4$. Como u solución del PVI (2-1) puede ser representada por la fórmula de Duhamel, multiplicamos por $|x|^{3+b}$ o equivalentememte vía transformada de Fourier, obtenemos,

$$\begin{aligned} D_\xi^b \partial_\xi^3 \hat{u} &= D_\xi^b \partial_\xi^3 \left(F(t)\hat{\phi}\right) + \frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b \partial_\xi^3 \left(F(t-t')\xi\hat{u^2}\right) dt' \qquad (4\text{-}38) \\ &\lesssim D_\xi^b \left(F\partial_\xi^3\hat{\phi}\right) + \sum_{j=1}^3 D_\xi^b \left(\partial_\xi^j F \partial_\xi^{3-j}\hat{\phi}\right) \\ &+ \frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b \left(F\partial_\xi^3 \xi\hat{u^2}\right) + \sum_{j=1}^3 D_\xi^b \left(\partial_\xi^j F \partial_\xi^{3-j}\xi\hat{u^2}\right) dt' \end{aligned}$$

Tomando la norma $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ en el primer sumando,

$$\begin{aligned} \left\|D_\xi^b \left(F\partial_\xi^3\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\|\mathcal{D}_\xi^b(F)\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|F\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^3\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{(\alpha+1)b} + t^b|n|^{(\beta+1)b}\right)\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^3\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|t^b|\xi|^{(\alpha+1)b}\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|t^b|n|^{(\beta+1)b}\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^3\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^3\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|t^b\langle\xi\rangle^{(\alpha+1)(b+3)}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|J_\xi^{3+b}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|t^b\langle n\rangle^{(\beta+1)(b+3)}\partial_\xi^2\hat{\phi}\right\|_{L^2} \\ &+ \left\|J_\xi^{3+b}\hat{\phi}\right\|_{L^2} + \left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\partial_\xi^3\hat{\phi}\right)\right\|_{L^2} \\ &\lesssim p(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_{b+3}^{(\alpha+1)(b+3),(\beta+1)(b+3)}} \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores son consecuencia de los Lemas 1.9, 1.10 y la desigualdad de Young. Para el resto de sumandos, si $\phi\in\widetilde{\mathcal{F}}_{b+3}^{r_1,r_2}$, entonces, la acotación en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ de la parte lineal de (4-38) se obtiene usando las mismas ideas de la prueba del Lema 4.2, en el caso $3<r<\frac{7}{2}+\alpha$, salvo en los términos que tienen la función signo, puesto que si $b=\frac{1}{2}+\alpha$ no se cumplen la condición del Lema 1.5, que permite la acotación de estos términos. Con este fin procederemos de la siguiente manera, en la parte lineal al calcular la tercera derivada como en (4-28), se puede ver en el sumando A_2 el término $|\xi|^\alpha sgn(\xi)F\partial_\xi\widehat{\phi}$ y en el sumando A_3 el término $|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)F\widehat{\phi}$, que reescribiremos haciendo uso de la función χ definida en $(4-13)$, así:

$$|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)F\widehat{\phi}=|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi F\widehat{\phi}+|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)(1-\chi)F\widehat{\phi}\quad=C_1+C_2.$$

Como, $D_\xi^bC_2\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, solo resta estimar C_1.

$$\begin{aligned}|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi F\widehat{\phi}&=|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi\widehat{\phi}+|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi(F-1)\widehat{\phi}\\&=G_1+G_2.\end{aligned}$$

Como, $D_\xi^bG_2\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces reescribimos el término G_1 así,

$$\begin{aligned}|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi\widehat{\phi}(\xi,n)&=|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi\widehat{\phi}(0,n)+|\xi|^\alpha|n|^\beta sgn(\xi)\chi\left(\widehat{\phi}(\xi,n)-\widehat{\phi}(0,n)\right)\\&=H_1+H_2.\end{aligned}$$

por el Teorema del valor medio, $D_\xi^bH_2\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ y $\widehat{\phi}(0,n)=0$, entonces G_1 es acotado. Ahora, para el término $|\xi|^\alpha sgn(\xi)F\partial_\xi\widehat{\phi}$, se utiliza nuevamente la función χ

$$|\xi|^\alpha sgn(\xi)F\partial_\xi\widehat{\phi}=|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)F\partial_\xi\widehat{\phi}+|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi)F\partial_\xi\widehat{\phi}=M_1+M_2$$

como en (4-30) del Lema 4.2 en el caso $\frac{5}{2}+\alpha\leq r<\frac{7}{2}+\alpha$, tenemos que $D_\xi^b(M_2)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Si reescribimos M_1,

$$M_1=|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}+|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)(F-1)\partial_\xi\widehat{\phi}=M_1^1+M_1^2.$$

Como $D_\xi^b(M_1^2)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, reescribimos M_1^1,

$$M_1^1=|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(0,n)+|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\left(\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi,n)-\partial_\xi\widehat{\phi}(0,n)\right)=L_1+L_2.$$

$D_\xi^b(L_2)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, entonces, $D_\xi^b\left(\widehat{x^3W(t)}\phi-|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(0,n)\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. De manera análoga a la parte lineal, se obtiene la parte no lineal con $u(t_2)\in\widetilde{\mathcal{F}}_{3+b}^{r_1,r_2}$. Entonces, $D_\xi^b\left(\partial_\xi^3\widehat{u}\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ si y solo si

$$D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\left(it\partial_\xi\hat{\phi}(0,n)-i\int_0^{t_2}(t-t')\partial_\xi\left(\xi\widehat{u^2}(0,n,t')\right)dt'\right)\right)\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}).$$

Para reescribir el siguiente término:

$$t_2\partial_\xi\hat{\phi}\left(0,n\right)-\int_0^{t_2} i\left(t_2-t'\right)\partial_\xi\left(\xi\widehat{u^2}\left(0,n,t'\right)\right)dt', \tag{4-39}$$

observemos que, para todo $n\in\mathbb{Z}$,

$$\partial_\xi\hat{\phi}\left(0,n\right)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} -ix\phi e^{-iny}dxdy \tag{4-40}$$

y que

$$\partial_\xi\left(\xi\widehat{u^2}\right)\left(0,n,t\right)=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\partial_x u^2 e^{-iny}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u^2e^{-iny}dxdy=\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdy. \tag{4-41}$$

La ultima igualdad de (4-41), se tiene ya que,

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xu_te^{-iny}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\partial_x(D_x^{1+\alpha}\pm D_y^{1+\beta}+u^2)e^{-iny}dxdy. \tag{4-42}$$

Ahora, reemplazando (4-40) y (4-41) en (4-39), obtenemos,

$$-it_2\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\phi e^{-iny}dxdy-i\int_0^{t_2}\left(t_2-t'\right)\left(\frac{d}{dt'}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdy\right)dt'. \tag{4-43}$$

Realizando integración por partes en el segundo sumando de (4-43), se transforma en:

$$\begin{aligned}&-it_2\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\phi e^{-iny}dxdy-\left(i\left(t_2-t'\right)\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdy\right)\Big|_{t'=0}^{t'=t_2}\\&+i\int_0^{t_2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdydt'.\end{aligned}$$

que al evaluarla en $t'=0$ y $t'=t_2$, transforma a (4-39) en,

$$i\int_0^{t_2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdydt'.$$

Como por hipótesis $u\left(t_2\right)\in\widetilde{\mathcal{F}}_{3+b}^{r_1,r_2}$, entonces, se debe tener que

$$\mathcal{D}_\xi^b\left(\left|\xi\right|^\alpha sgn\left(\xi\right)\chi\left(\xi\right)\int_0^{t_2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdydt'\right)\in L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}\right)$$

pero por el Lema 1.5 es necesario que $\int_0^{t_2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xue^{-iny}dxdydt'=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y en particular para $n=0$. Definimos ahora la aplicación continua $G\left(t\right)=\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xudxdydt'$, donde $G(0)=0$, entonces por Teorema de Rolle existe $\tau_1\in\left(0,t_2\right)$ tal que,

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xu\left(x,y,\tau_1\right)dxdy=0$$

Análogamente, como $u(t_3)\in\widetilde{\mathcal{F}}_b^{r_1,r_2}$ existe $\tau_2\in(t_2,t_3)$ tal que,

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xu(x,y,\tau_2)\,dxdy=0$$

(4-42) en $n=0$ y la respectiva cantidad conservada, nos conduce a,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xudxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u^2dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\phi^2dxdy.$$

Así,

$$\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} xudxdy=\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x\phi dxdy+t\left\|\phi\right\|_0^2.$$

Es decir el tiempo de evolución del primer momento de una solución no nula, es una función estrictamente creciente, se sigue que $\|\phi\|_0=0$ y por tanto $u\equiv 0$.
Para el caso, $\frac{1}{2}<\alpha<1$, introducimos el parámetro b tal que $\frac{7}{2}+\alpha=4+b,$ así $b=\alpha-\frac{1}{2}$ y se razona análogamente al caso anterior, en vez de (4-38) se toma,

$$D_\xi^b\partial_\xi^4\hat{u}=D_\xi^b\partial_\xi^4\left(F(t)\,\hat{\phi}\right)+\frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^b\partial_\xi^4\left(F(t-t')\,\xi\hat{u^2}\right)dt' \tag{4-44}$$

4.3. Buen Planteamiento Local para espacios de baja regularidad

En esta sección obtenemos un mejor resultado de buen planteamiento local para el PVI (2-1) en el espacio $H^{r_1,r_2}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})\cap L^2(w^2dxdy)$, donde $\beta=0$, $\frac{1}{3}<\alpha<1$ y $\beta=1$, $0<\alpha<1$. Puesto que en el capítulo 3 se mejoro el resultado de buen planteamiento local para el PVI (2-1) en los espacios anisotrópicos para la dispersión $\beta=0$, $\frac{1}{3}<\alpha\leq 1$ y $\beta=1$, $0\leq\alpha\leq 1$ (Teorema 0.5). Entonces, siguiendo las ideas de [17] y [12], procederemos a probar la propiedad de persistencia para estas dispersiones en espacio de pesos.

Demostración. Teorema 0.9

1. Se definen los pesos truncados

$$w_N^\theta(x):=\begin{cases}\langle x\rangle^\theta & si\ x\leq N\\ (2N)^\theta & si\ x\geq 3N,\end{cases}$$

donde, w_N^θ es suave y $\partial_x w_N^\theta, \partial_x^2 w_N^\theta \lesssim 1$. Aplicamos w_N^θ a la ecuación (2-1), se toma producto interno con $w_N^\theta u$ y obtenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u w_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u dxdy \pm \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u w_N^\theta \partial_x D_y^{1+\beta} u dxdy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u w_N^\theta u u_x dxdy \\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Para acotar I, usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y reescribimos el factor $w_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}w_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u &= -\left[D_x^\alpha, w_N^\theta\right] D_x \partial_x u + D_x^\alpha\left(w_N^\theta D_x \partial_x u\right) \\ &= -\left[D_x^\alpha, w_N^\theta\right] D_x \partial_x u - D_x^\alpha\left(\partial_x w_N^\theta D_x u\right) + D_x^\alpha \partial_x\left(w_N^\theta D_x u\right) \\ &= -\left[D_x^\alpha, w_N^\theta\right] D_x \partial_x u - D_x^\alpha\left(\partial_x w_N^\theta D_x u\right) - D_x^\alpha \partial_x\left(\left[D_x, w_N^\theta\right] u\right) \\ &\quad + D_x^{\alpha+1}\partial_x\left(w_N^\theta u\right) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.\end{aligned}$$

A_1 y A_2 se acotan usando Proposición 1.10, así,

$$\|A_1\|_{L^2} = \left\|\left[D_x^\alpha, w_N^\theta\right] D_x \partial_x u\right\|_{L^2} \leq \left\|J_x^\delta \partial_x w_N^\theta\right\|_{L^q} \left\|D_x^\alpha \partial_x u\right\|_{L^2} \lesssim \left\|D_x^{\alpha+1} u\right\|_{L^2}$$

y

$$\begin{aligned}\|A_2\|_{L^2} = \left\|D_x^\alpha\left(\partial_x w_N^\theta D_x u\right)\right\|_{L^2} &\leq \left\|\left[D_x^\alpha, \partial_x w_N^\theta\right] D_x u\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x w_N^\theta D_x^{\alpha+1} u\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|J_x^\delta \partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^q} \left\|D_x^\alpha u\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x w_N^\theta\right\|_{L^\infty} \left\|D_x^{\alpha+1} u\right\|_{L^2} \\ &\lesssim \left\|D_x^{\alpha+1} u\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Para A_3 tenemos que,

$$\left[D_x, w_N^\theta\right] u = \mathcal{H}\left(\partial_x w_N^\theta\right) - \left[\mathcal{H}, w_N^\theta\right] \partial_x u. \tag{4-45}$$

Entonces, al reemplazar la equivalencia (4-45) y al aplicar los Lemas 1.15, 1.14 y la Proposición 1.10 tenemos que,

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^\alpha\partial_x\left[D_x,w_N^\theta\right]u\right\|_{L^2} &= \left\|D_x^\alpha\partial_x\mathcal{H}\left(\partial_x w_N^\theta u\right)-D_x^\alpha\partial_x\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}\\
&\leq \left\|D_x^{\alpha+1}\left(\partial_x w_N^\theta u\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_x^\alpha\partial_x\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}\\
&\leq \left\|D_x^\alpha D_x\left(\partial_x w_N^\theta u\right)\right\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}^{\alpha}\left\|\partial_x\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}^{1-\alpha}\\
&\leq \left\|D_x^\alpha\left(\partial_x^2 w_N^\theta u\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_x^\alpha\left(\partial_x w_N^\theta\partial_x u\right)\right\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}\\
&+\left\|\partial_x\left[\mathcal{H},w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}\\
&\leq \left\|D_x^\alpha\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\left\|D_x^\alpha u\right\|_{L^2}+\left\|\left[D_x^\alpha,\partial_x w_N^\theta\right]\partial_x u\right\|_{L^2}\\
&+\left\|\partial_x w_N^\theta D_x^\alpha\partial_x u\right\|_{L^2}+\left\|\partial_x^3 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\\
&\lesssim \left\|D_x^\alpha\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{\infty}\|u\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\left\|D_x^\alpha u\right\|_{L^2}+\left\|J_x^\delta\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^q}\left\|D_x^\alpha u\right\|_{L^2}\\
&+\left\|\partial_x w_N^\theta\right\|_{\infty}\left\|D_x^\alpha\partial_x u\right\|_{L^2}+\left\|\partial_x^3 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}+\left\|\partial_x^2 w_N^\theta\right\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\\
&\lesssim \left\|D_x^{\alpha+1}u\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

A_4 no es necesario acotar pues:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u D_x^{\alpha+1}\partial_x\left(w_N^\theta u\right)dxdy=0.$$

Así, la desigualdad de Cauchy- Schwarz, implica que, $|I|\leq C\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}\|u\|_{r_1,r_2}$, donde $r_1>max\left\{\alpha+1,\frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}\right\}$. Para acotar II tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u w_N^\theta\partial_x D_y^{1+\beta}u dxdy &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\left(w_N^\theta\right)^2 u\partial_x D_y^{1+\beta}u dxdy\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\left(w_N^\theta\right)^2\partial_x\left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2 dxdy\\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\partial_x\left(w_N^\theta\right)^2\left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2 dxdy.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad $\left|\partial_x w_N^{2\theta}\right|\lesssim w_N^{2\theta-1}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\partial_x\left(w_N^\theta\right)^2\left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2 dxdy &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^{2\theta-1}\left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2 dxdy\\
&= \left\|w_N^{\theta-\frac{1}{2}}D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right\|_{L^2}^2\\
&\leq \left\|w_N^{\theta-\frac{1}{2}}J_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Al aplicar el Lema 1.10 con $\theta' a=\frac{1+\beta}{2}, a=(1+\beta)\theta, \theta'=\frac{1}{2\theta}, b=\theta$ y la desigualdad de Young, obtenemos,

$$\left\|w_N^{\theta-\frac{1}{2}}J_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right\|_{L^2}^2\leq\left(\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{(1+\beta)\theta}u\right\|_{L^2}\right)^2\lesssim\left(\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2+\left\|J_y^{\left(\frac{3(2^{1+\beta}+1-\alpha)}{2^{2+\beta}}\right)^+}u\right\|_{L^2}^2\right).$$

Entonces, podemos concluir que $|II| \leq \left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 + \|u\|_{r_1,r_2}^2$, donde $r_2 > \frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}}$. Para acotar III,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta u w_N^\theta u \partial_x u dxdy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \left(w_N^\theta\right)^2 u^2 \partial_x u dxdy \leq \|\partial_x u\|_{L^\infty} \left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 . \tag{4-46}$$

Entonces, $|III| \leq \|\partial_x u\|_{L^\infty} \left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2$ luego por I, II, III y por Teorema 0.5 tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 &\leq \left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 (1 + \|\partial_x u\|_{L^\infty}) + \|u\|_{r_1,r_2} \\ &\leq \left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 (1 + \|\partial_x u\|_{L^\infty}) + M\end{aligned}$$

usando el Lema de Gronwall [22] tenemos,

$$\begin{aligned}\left\|w_N^\theta u\right\|_{L^2}^2 &\lesssim \left\|w_N^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + tM + \int_0^t e^{\int_0^{t'}\left(1+\|\partial_x u\|_{L^\infty}\right)d\tau}\left(\left\|w_N^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + t'M\right)dt' \\ &\lesssim \left\|w_N^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + tM + \int_0^t e^{ct'}\left(\left\|w_N^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + t'M\right)dt'\end{aligned}$$

con $N \to \infty$ y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\left\|\langle x\rangle^\theta u\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|\langle x\rangle^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + h(t) \quad 0 \leq t \leq T,$$

siendo, $h(t)$ una función continua, tal que, $h(t) \to 0$, cuando, $t \to 0$, entonces $u \in L^\infty([0,T]; L^2(\langle x\rangle^\theta dxdy))$. Además, con este resultado se puede obtener que, la aplicación $t \mapsto \left\|\langle x\rangle^\theta u(t)\right\|_{L^2}^2$ es continua ya que,

$$\begin{aligned}\left|\left\|w_N^\theta u(t)\right\|_{L^2}^2 - \left\|w_N^\theta u(t')\right\|_{L^2}^2\right| &\leq |t-t'| + \int_t^{t'} e^\tau\left(\left\|w_N^\theta \phi\right\|_{L^2}^2 + \tau M\right)d\tau \\ &\leq C|t-t'|\end{aligned}$$

del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\left|\left\|\langle x\rangle^\theta u(t)\right\|_{L^2}^2 - \left\|\langle x\rangle^\theta u(t')\right\|_{L^2}^2\right| \leq C|t-t'| . \tag{4-47}$$

En vista de que la aplicación $t \to \langle x\rangle^\theta u(t)$ es débilmente continua en $L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}; \langle x\rangle^\theta dxdy\right)$ y (4-47), entonces la aplicación $t \to \langle x\rangle^\theta u(t)$ resulta continua en $L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{T}; \langle x\rangle^\theta dxdy\right)$.

La dependencia continua es consecuencia de un argumento del tipo Bona-Smith, como el usado en secciones anteriores.

2. La segunda parte se obtiene de manera similar a 1, donde, $r_1 > max\left\{\alpha+1, \frac{2^{\beta+1}+1-\alpha}{2^{\beta+1}}\right\}$, $r_2 > (1+\beta)\theta$ y $\frac{3(2^{\beta+1}+1-\alpha)}{2^{\beta+2}(1+\beta)} < \theta \leq 1$.

Observación. 4.2

1. Para verificar la persistencia en el caso $r = 1+\theta$, se razona como en el caso anterior,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_N^\theta xu\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta x\partial_x D_x^{1+\alpha}udxdy \pm \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta x\partial_x D_y^{1+\beta}udxdy\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta xuu_x dxdy\\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Como $III \le \|\partial_x u\|_{L^\infty}\left\|w_N^\theta xu\right\|_{L^2}^2$, entonces resta ver I y II. Reescribiendo, I y II, tenemos que,

$$I = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta D_x^{1+\alpha}\partial_x(xu)dxdy - (2+\alpha)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta D_x^{1+\alpha}udxdy = A + B$$

$$II = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta \partial_x D_y^{1+\beta}(xu)dxdy - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} w_N^\theta xuw_N^\theta D_y^{1+\beta}udxdy = C + D$$

Es suficiente ver B y D, ya que A y C se tratan como en el caso $r = \theta$.

$$D \le \left\|w_N^\theta xu\right\|_{L^2}\left\|w_N^\theta D_y^{1+\beta}u\right\|_{L^2}$$

Ya que, $\left\|w_N^\theta D_y^{1+\beta}u\right\|_{L^2} \le \left\|w_N^\theta J_y^{1+\beta}u\right\|_{L^2}$. Entonces, una aplicación del Lema 1.10 y de la desigualdad de Young, implican que,

$$\left\|w_N^\theta J_y^{1+\beta}u\right\|_{L^2} \lesssim \left\|J_y^{(1+\beta)(1+\theta)}u\right\|_{L^2} + \left\|w_N^{1+\theta}u\right\|_{L^2}$$

En B aplicando la desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$B \le \left\|w_N^\theta D_x^{1+\alpha}u\right\|_{L^2}\left\|w_N^\theta xu\right\|_{L^2}.$$

Observe que,

$$w_N^\theta D_x^{1+\alpha}u = [D_x^\alpha, w_N^\theta]D_x^{1-\alpha}D_x^\alpha u + D_x^\alpha w_N^\theta D_x u = B_1 + B_2,$$

B_1 es finito en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, en vista de la Proposición 1.10. Para B_2, observe que,

$$D_x^\alpha w_N^\theta \partial_x \mathcal{H}u = D_x^\alpha\partial_x(w_N^\theta\mathcal{H}u) - D_x^\alpha\partial_x w_N^\theta\mathcal{H}u = B_2^1 + B_2^2$$

Entonces, para acotar B_2^2 en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, tenemos que,

$$\left\|J_x^\alpha(\partial_x w_N^\theta\mathcal{H}u)\right\|_{L^2} \le \left\|[J_x^\alpha,\partial_x w_N^\theta]\mathcal{H}u)\right\|_{L^2} + \left\|\partial_x w_N^\theta J_x^\alpha\mathcal{H}u\right\|_{L^2} \le \|u\|_{L^2} + \|J_x^\alpha u\|_{L^2}$$

y para acotar B_2^1 observe que,

$$D_x^\alpha\partial_x(w_N^\theta\mathcal{H}u) = D_x^\alpha\mathcal{H}\partial_x(w_N^\theta u) + D_x^\alpha\partial_x[w_N^\theta,\mathcal{H}]u.$$

Entonces, B_2^1 resulta acotado ya que,

$$\left\|D_x^{\alpha}\mathcal{H}\partial_x(w_N^{\theta}u)\right\|_{L^2} \leq \left\|J_x^{1+\alpha}(w_N^{\theta}u)\right\|_{L^2}$$

y

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{\alpha}\partial_x[w_N^{\theta},\mathcal{H}]u\right\|_{L^2} &\leq \left\|D_x\partial_x[w_N^{\theta},\mathcal{H}]u\right\|_{L^2}^{\alpha}\left\|\partial_x[w_N^{\theta},\mathcal{H}]u\right\|_{L^2}^{1-\alpha}\\ &\leq \left\|\partial_x^2 w_N^{\theta}\right\|_{L^\infty}^{\alpha}\|u\|_{L^2}^{\alpha}\left\|\partial_x w_N^{\theta}\right\|_{L^2}^{1-\alpha}\|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \leq \|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

2. Para verificar la persistencia en el caso $r = 2+\theta$ (o $r > 2$), tomamos la ecuación integral asociada al PVI(2-1) y la estimativa lineal (Lema 4.2), como en el Teorema 0.6 pero con $r_1 > r(\alpha+1),\ r_2 > r(\beta+1)$,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} &\leq \|\mathbb{W}_0(t)\,\phi\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t \|\mathbb{W}_0(t-t')\,uu_x\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)}\,dt'\\ &\leq P_r(t)\,\|\phi\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} + \int_0^t P_r(t-t')\,\|uu_x\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)}\,dt'\end{aligned}$$

y como $\|uu_x\|_{L^2(\langle x\rangle^r dxdy)} \leq \|\langle x\rangle^r u\|_{L^2}\|\partial_x u\|_{L^\infty}$. Entonces, obtenemos el resultado usando la desigualdad de Gronwall y $u_x \in L_T^1 L_{xy}^\infty$.

3. Usando la ecuación integral asociada al PVI(2-1), para los casos; $\beta = 1$ con $0 < \alpha < 1$ y $\beta = 0$ con $\frac{1}{3} < \alpha < 1$. Obtenemos principios de continuación única como en los teoremas 0.7 y 0.8.

5 ZK generalizada en el espacio $H^s\left(\mathbb{T}^2\right)$

En este capítulo trataremos el siguiente problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} \right) u + u u_x = & 0 \\ u\left(0\right) = \phi & \phi \in \mathbb{T}^2 \end{cases} \tag{5-1}$$

con $\alpha = 1, 2, 3$ y $0 < \beta \leq 1$. Demostraremos el Teorema 0.10 que corresponde a una mejora al buen planteamiento local del PVI (5-1) en $H^s(\mathbb{T}^2)$, $s > 2$, como consecuencia de un argumento de compacidad. Para los casos en que α es impar seguimos las ideas de [23] donde se establece el buen planteamiento local en la ecuación KP-I de tercer y quinto orden en el espacio bi-periódico y para α par se siguen las ideas de [11] para la ecuación BO bi-periódica. A diferencia del capítulo 2 la estimativa de Strichartz requiere adicionalmente del Lema de H. Weyl (Lema 1.16) para poder acotar las sumatorias de exponenciales. El resto del resultado se sigue de manera similar a la sección 2.2. Iniciamos el capítulo probando la estimativa de energía que motiva la acotación de las normas $\|u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)}$, $\|\partial_x u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)}$ y $\|\partial_y u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)}$.

5.1. Estimativa de energía

Lema 5.1.
Sean, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y u solución del PVI (2-1) con $\phi \in H^\infty\left(\mathbb{T}^2\right)$, entonces, para cualquier $s \geq 1$, tenemos que para cualquier $T \in [0,1]$,

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} \lesssim e^{\left(\|u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\partial_x u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\partial_y u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)} \right)} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{T}^2)}$$

Demostración. Aplicamos el operador J^s a la ecuación en (5-1) y multiplicamos por $J^s u$,

$$\int_{\mathbb{T}^2} J^s u_t J^s u dx dy - \int_{\mathbb{T}^2} J^s \partial_x D_x^{1+\alpha} u J^s u dx dy \pm \int_{\mathbb{T}^2} J^s \partial_x D_y^{1+\beta} u J^s u dx dy$$

$$+ \int_{\mathbb{T}^2} J^s u u_x J^s u dx dy = 0.$$

Al integrar por partes y como consecuencia de la estimativa del conmutador (Lema 1.3) obtenemos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|J^s u\|_{L^2}^2 \lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2} + \left(\|u\|_{L^\infty} + \|\nabla u\|_{L^\infty} \right) \left\| J^{s-1} \partial_x u \right\|_{L^2}.$$

Concluimos el resultado usando la desigualdad de Gronwall. □

5.2. Estimativa Strichartz Localizada

Sea $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$, tal que $\int_{\mathbb{T}} \phi(x,y)dx = 0$ para todo $y \in \mathbb{T}$, entonces, $\{W_0(t)\}_t$ el grupo asociado a la parte lineal de la ecuación, quedaría definido como,

$$\begin{aligned} W_0(t)\,\phi &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\mathbf{m})\, e^{i\left[(\mathbf{mx})+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)t\right]} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(0,n)\, e^{iny} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\mathbf{m})\, e^{i\left[(\mathbf{mx})+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)t\right]}, \end{aligned}$$

donde, $\mathbf{m} = (m,n)$, $\mathbf{x} = (x,y)$ y $\mathbf{mx} = mx + ny$,

Lema 5.2.
Sean, $\alpha = 1,2,3$, $0 < \beta \leq 1$ *y* $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$. *Entonces, para* $\epsilon > 0$,

$$\left\|W_0(.)\, Q_y^k Q_x^j \phi\right\|_{L^2_{2^{-(k+j)}} L^\infty(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\epsilon 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{4}+\epsilon\right)k} \left\|Q_y^k Q_x^j \phi\right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$$

Demostración. Sea, $\psi_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función suave y par, con soporte en $\left\{r \mid |r| \in \left[\frac{1}{4},4\right]\right\}$ tal que, $\psi_1 \equiv 1$ en $\left\{r \mid |r| \in \left[\frac{1}{2},2\right]\right\}$, $\psi_1^j := \psi_1\left(\frac{m}{2^j}\right)$ y $\psi_1^k := \psi_1\left(\frac{n}{2^k}\right)$. Observe que, $\psi_1^j\psi_1^k \equiv 1$ en $B := [-2^{j+1},-2^{j-1}] \times \left[-2^{k+1},-2^{k-1}\right] \cup [2^{j-1},2^{j+1}] \times \left[2^{k-1},2^{k+1}\right]$, entonces, por la definición de $Q_x^j Q_y^k$ tenemos que, para $j,k > 0$ $supp\ Q_x^j Q_y^k \subset B$. Por lo tanto,

$$W_0(t)\, Q_y^k Q_x^j \phi = \sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(\mathbf{m})\, \psi_1\left(\frac{m}{2^j}\right) \psi_1\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i\left[(\mathbf{mx})+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)t\right]},$$

donde, $a(\mathbf{m}) = \left(Q_y^k Q_x^j \phi\right)^\wedge(\mathbf{m})$ y $\mathbf{m} := (m,n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$. Así, es suficiente mostrar,

$$\begin{aligned} \left\| \chi_{\left[0,2^{-(k+j)}\right]}(|t|) \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} a(\mathbf{m})\, \psi_1\left(\frac{m}{2^j}\right) \psi_1\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i\left[(\mathbf{m}(x(t),y(t)))+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)t\right]} \right\|_{L^2_t} \\ \leq C_\epsilon 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{4}+\epsilon\right)k} \|a\|_{l^2(\mathbb{Z}^2)} \end{aligned}$$

Por dualidad, es equivalente a probar que para cualquier $g \in L^2_t$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \chi_{\left[0,2^{-(k+j)}\right]}(|t|)\, \psi_1\left(\frac{m}{2^j}\right) \psi_1\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i\left[(\mathbf{m}(x(t),y(t)))+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)t\right]} dt' \right\|_{L^2(\mathbb{Z}^2)} \\ \leq C_\epsilon 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{4}+\epsilon\right)k} \|g\|_{L^2_t} \end{aligned}$$

donde $x, y : \left[-2^{-(j+k)}, 2^{-(j+k)}\right] \to \mathbb{T}$ son funciones medibles. Al expandir la norma L^2 en el lado izquierdo obtenemos,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(t)\, g(t')\, K_{j+k}(t,t',x,y)\, dtdt' \right| \leq C_\epsilon 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+1}}+2\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{2}+2\epsilon\right)k} \|g\|^2_{L^2_t}$$

con

$$K_{j+k}(t,t',x,y) := \chi_{\left[0,2^{-(j+k)}\right]}(|t|)\,\chi_{\left[0,2^{-(j+k)}\right]}(|t'|) \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)\psi_1^2\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i\left[(\mathbf{m}(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t')))+m\left(|m|^{1+\alpha}\pm|n|^{1+\beta}\right)(t-t')\right]}.$$

Para $l \geq j+k$, definimos

$$K_{j+k}^{l}(t,t',x,y) := \chi_{\left[2^{-l},2\cdot 2^{-l}\right]}(|t-t'|)\,K_{j+k}(t,t',x,y)$$

para $t \neq t', t, t' \in \left[-2^{-(j+k)}, 2^{-(j+k)}\right]$. Para resumir, es suficiente mostrar,

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right) e^{i\left[mx+tm|m|^{1+\alpha}\right]}\psi_1^2\left(\frac{n}{2^k}\right) e^{i\left[ny\pm tm|n|^{1+\beta}\right]}\right| \lesssim 2^l 2^{\left(-\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}+2\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{2}+2\epsilon\right)k}, \quad \text{(5-2)}$$

para $x, y \in [0,2\pi)$ y $|t| \in \left[2^{-l}, 2^{-l}2\right]$. Sean $j,k > 0$, usando sumación de Poisson en el lado izquierdo de (5-2), obtenemos,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^*} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right) e^{i\left[mx+tm|m|^{1+\alpha}\right]}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left[(y-2\pi\nu)\eta\pm tm|\eta|^{1+\beta}\right]}d\eta\right).$$

Para resolver la integral anterior usamos integración por partes, considerando $(y-2\pi\nu)\,\eta + tm\,|\eta|^{1+\beta}$, ya que, para el caso $(y-2\pi\nu)\,\eta - tm\,|\eta|^{1+\beta}$ se mantiene el mismo razonamiento. Sea $A := supp\psi_1\left(\frac{\eta}{2^k}\right) = \left\{\eta : 2^{k-1} \leq |\eta| \leq 2^{k+1}\right\}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}d\eta \\
&= \int_A \frac{\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)}{i\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]}\frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}\right)d\eta \\
&= \frac{-1}{i}\int_A \left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_1\psi_1'}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]} - \frac{\psi_1^2(1+\beta)\,\beta\,|\eta|^{\beta-1}\,mt}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]^2}\right] \\
&\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}\right)d\eta.
\end{aligned}$$

Para la segunda integral previa tenemos que; $(1+\beta)\,\beta\,|\eta|^{\beta-1}\,mt \leq 6\left(2\cdot 2^k\right)^{\beta-1}2^j 2^{-(j+k)} \leq C2^{-2k+\beta}$, $|(1+\beta)\,|n|^{\beta}\,mt| \leq C2^{k\beta}2^j 2^{-(j+k)} \leq C2^{(\beta-1)k}$ y $y \in [0,2\pi)$, $|\nu| > 100$. Entonces, $\left|(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right|^2 \sim |\nu|^2$, así,

$$\left|\int_A \frac{\psi_1^2(1+\beta)\beta|\eta|^{\beta-1}mt}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)sgn(\eta)|\eta|^{\beta}mt\right]^2}e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}d\eta\right| < C2^k\frac{2^{-2k+\beta}}{|\nu|^2} = C\frac{1}{|\nu|^2}$$

Por otro lado para el primer término de la anterior integral, usamos nuevamente integración por partes,

$$\begin{aligned}
&\int_A \left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_1\psi_1'}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn\,(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]}\right]\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}\right)d\eta\\
&=\frac{1}{i}\int_A\left[\frac{2\cdot 2^{-k}\psi_1\psi_1'}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn\,(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]^2}\right]\frac{d}{d\eta}\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}\right)d\eta\\
&=\frac{-1}{i}\int_A\left[\frac{2\cdot 2^{-2k}\left(\psi_1'\right)^2+2\cdot 2^{-2k}\psi_1\psi_1''}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn\,(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{4\psi_1\psi_1'2^{-k}\,(1+\beta)\,\beta\,|\eta|^{\beta-1}\,mt}{\left[(y-2\pi\nu)+(1+\beta)\,sgn\,(\eta)\,|\eta|^{\beta}\,mt\right]^3}\right]\left(e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}\right)d\eta.
\end{aligned}$$

Por tanto, si $|\nu|>100$, $\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left((y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}d\eta\right|\leq\frac{C}{|\nu|^2}+\frac{C}{|\nu|^3}\leq\frac{C}{|\nu|^2}$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left[(y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right]}d\eta\\
&=\sum_{|\nu|\leq 100}\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left[(y-2\pi\nu)\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right]}d\eta+O\left(1\right),
\end{aligned}$$

donde $|t|\in\left[2^{-l},2^{-l+1}\right]$, $m\sim 2^j$ y $1\leq 1+\beta\leq 2$. Ya que tenemos finitas sumas, es suficiente verificar que:

$$\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)e^{i\left[mx+tm|m|^{1+\alpha}\right]}\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left[y'\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right]}d\eta\right|\lesssim 2^l 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+1}}+2\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{2}\right)k},$$

El lema de Van-der corput (Lema 1.3) con $\varphi(\eta)=y'\eta+tm\,|\eta|^{1+\beta}$, $\varphi''(\eta)=\beta(1+\beta)tm\,|\eta|^{\beta-1}$ nos conduce a la siguiente estimativa de la integral oscilatoria,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right)e^{i\left(y'\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)}d\eta\right|\lesssim\frac{2^{\frac{1-\beta}{2}k}}{|mt|^{\frac{1}{2}}}.$$

Así que, es suficiente ver que,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{1-\beta}{2}k}}{(mt)^{\frac{1}{2}}}\psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)e^{i\left[mx+tm^{2+\alpha}\right]}\right|\lesssim 2^l 2^{\left(-\frac{1}{2^{1+\alpha}}+2\epsilon\right)j+\left(-\frac{\beta}{2}\right)k},\tag{5-3}$$

observe que, (5-3) es equivalente a probar que,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2^j}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)e^{i\left[mx+tm^{2+\alpha}\right]}\right|\lesssim 2^{\frac{l-(k+j)}{2}}2^{\left(-\frac{1}{2^{1+\alpha}}+1+2\epsilon\right)j}, \tag{5-4}$$

donde, $l\geq k+j$. Para probar (5-4) usamos la fórmula de sumación por partes,

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m b_m=\sum_{N=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}a_m\right)\left(b_N-b_{N+1}\right)$$

para las sucesiones $(a_m)(b_m)$ con soporte compacto. Sea, $a_m=e^{i\left(mx+tm^{2+\alpha}\right)}$, $b_m=\left(\frac{2^j}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)$, $N\in[2^{j-1},2^{j+1}]$ y $|b_N-b_{N+1}|\leq 2^{-j}$, entonces,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2^j}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)e^{i\left[mx+tm^{2+\alpha}\right]}\right|&\leq\left|\sum_{N=2^{j-1}}^{2^{j+1}}\left(\sum_{m=1}^{N}e^{i\left(mx+tm^{2+\alpha}\right)}\right)\left(b_N-b_{N+1}\right)\right|\\&\leq 2^{-j}\sum_{N=2^{j-1}}^{2^{j+1}}\left|\sum_{m=1}^{N}a_m\right|\lesssim\left|\sum_{m=1}^{N}a_m\right|\end{aligned} \tag{5-5}$$

En vista de (5-4), es suficiente probar que,

$$\left|\sum_{m=1}^{N}a_m\right|\lesssim 2^{\left(-\frac{1}{2^{1+\alpha}}+1+2\epsilon\right)j}. \tag{5-6}$$

Para verificar (5-6) seguimos la prueba del Teorema 9.3.1 en [23], usando el Lema de H. Weyl (Lema 1.16). Sea, $\alpha=1$ (los casos $\alpha=2,3$ se desarrollan en la Observación 5.1), entonces, en el Lema 1.16 de H. Weyl, tomamos $h\left(m\right)=\frac{t}{2\pi}m^3+\frac{x}{2\pi}m$, fijamos $\Lambda=2^{2j+5}$ y aplicamos el principio de Dirichlet (Lema 1.17) para $r=\frac{t}{2\pi}$ y obtenemos:

$$\left|\frac{t}{2\pi}-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{1}{2^{2j+5}q}$$

para algún entero $q\in\{1,2,\cdots,2^{2j+5}\}$ y $a\in\mathbb{Z}$, $(a,q)=1$. Ya que, $\frac{|t|}{2\pi}\sim 2^{-l}$, $l\in[j+k,j+k+2]$ y j suficientemente grande, el denominador q esta en el intervalo $[2^j,2^{2j+5}]$ (La restricción $l\leq j+k+2$ garantiza $\frac{a}{q}\neq\frac{0}{1}$). Entonces, por el Lema de Weyl tomando $\delta=2\epsilon$ y obtenemos que,

$$\left|\sum_{m=1}^{N}e^{i\left(mx+tm^3\right)}\right|\leq C_\epsilon(2^j)^{1+2\epsilon}\left(\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2^j}+\frac{2^{2j+5}}{2^{3j}}\right)^{\frac{1}{4}}\lesssim_\epsilon 2^{\left(\frac{3}{4}+2\epsilon\right)j}$$

□

Observación. 5.1

1. Cuando $\alpha = 3$, nos queda $h(m) = \frac{t}{2\pi}m^5 + \frac{x}{2\pi}m$, fijamos $\Lambda = 2^{4j}$ y aplicamos el principio de Dirichlet (Lema 1.17) para $r = \frac{t}{2\pi}$, entonces, $\left|\frac{t}{2\pi} - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{2^{4j}q}$, para algún entero $q \in \{1, 2, \cdots, 2^{4j}\}$ y $a \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$. Ya que, $\frac{|t|}{2\pi} \sim 2^{-l}$, $l \in [j + k, 3(j + k)]$ y j suficientemente grande, el denominador q esta en el intervalo $2^j \leq q \leq 2^{4j}$. Entonces, por el Lema de Weyl,

$$\left|\sum_{m=1}^{N} e^{i\left(mx+tm^5\right)}\right| \leq C_\epsilon (2^j)^{1+2\epsilon}\left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} + \frac{2^{4j}}{2^{5j}}\right)^{\frac{1}{16}} \lesssim C2^{\left(\frac{15}{16}+2\epsilon\right)j}.$$

2. Caso $\alpha = 2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right) e^{i\left(mx+tsgn(m)m^4\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left(y'\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)} d\eta \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right) e^{i\left(mx+tm^4\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left(y'\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)} d\eta \\
&\quad + \sum_{m=-1}^{-\infty} \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right) e^{i\left(mx-tm^4\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi_1^2\left(\frac{\eta}{2^k}\right) e^{i\left(y'\eta+tm|\eta|^{1+\beta}\right)} d\eta,
\end{aligned}$$

acotaremos la primera suma puesto que la otra suma es tratada similarmente, con el respectivo cambio de variable $m = -m$. En este caso $h(m) = \frac{t}{2\pi}m^4 + \frac{x}{2\pi}m$, fijamos $\Lambda = 2^{3j}$ y aplicamos el principio de Dirichlet (Lema 1.17) para $r = \frac{t}{2\pi}$, entonces, $\left|\frac{t}{2\pi} - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{2^{3j}q}$, para algún entero $q \in \{1, 2, \cdots, 2^{3j}\}$ y $a \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$. Ya que, $\frac{|t|}{2\pi} \sim 2^{-l}$, $l \in [j + k, \frac{5}{2}(j + k)]$ y el denominador q esta en el intervalo $2^j \leq q \leq 2^{3j}$. Entonces, por el Lema de Weyl,

$$\left|\sum_{m=1}^{N} e^{i\left(mx+tm^4\right)}\right| \leq C_\epsilon (2^j)^{1+2\epsilon}\left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} + \frac{2^{3j}}{2^{4j}}\right)^{\frac{1}{8}} \lesssim 2^{\left(\frac{7}{8}+2\epsilon\right)j}.$$

3. Para la desigualdad (5-2), en el caso $\widehat{Q_x^j Q_y^0 \phi}$ con $j > 0$, se debe usar la fórmula de sumación por partes con $a_m = e^{i\left(mx+tm^{2+\alpha}\right)}$ y $b_m = \psi_1^2\left(\frac{m}{2^j}\right)$, junto con el lema de H. Weyl, así,

$$\left\|W_0(.)\, Q_y^0 Q_x^j \phi\right\|_{L^2_{2^{-j}} L^\infty(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\epsilon 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j} \left\|Q_y^0 Q_x^j \phi\right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

El caso $\widehat{Q_x^0 Q_y^k \phi}$ con $k \geq 0$, no se contempla ya que, $\hat{\phi}(0, n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, implica que, $\hat{u}(0, n, t) = 0, n \in \mathbb{Z}$.

Lema 5.3.
Sean, $\alpha = 1, 2, 3$, $0 < \beta \leq 1$, $u \in C([0, T]; H^\infty(\mathbb{T}^2)) \cap C^1([0, T]; H^\infty(\mathbb{T}^2))$ *y* $f \in C([0, T]; H^\infty(\mathbb{T}^2))$, $T \in [0, 1]$ *tal que,*

$$\partial_t u - \partial_x\left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u = \partial_x f.$$

Entonces, para cualquier $s_1 > \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}}$ $s_2 > -\frac{\beta}{4} + \frac{1}{2}$

$$\|u\|_{L_T^1 L^\infty(\mathbb{T}^2)} \lesssim_{s_1 s_2} T^{\frac{1}{2}} \left(\left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} u \right\|_{L_T^\infty L^2(\mathbb{T}^2)} + \|J_x^{s_1} f\|_{L_T^1 L^2(\mathbb{T}^2)} \right). \tag{5-7}$$

Demostración. Este lema es análogo al Lema 2.10 y se prueba similarmente aplicando el respectivo Strichartz localizado, en pequeños intervalos de tiempo de tamaño $T2^{-(j+k)}$, es decir:

$$\left\| Q_y^k Q_x^j u \right\|_{L_T^1 L^\infty} \leq \sum_{m=1}^{2^{j+k}} \left\| \chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)}(t)\, Q_y^k Q_x^j u \right\|_{L_T^1 L^\infty}. \tag{5-8}$$

Usando la formula de Duhamel y aplicando el respectivo Strichartz, obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\left\| Q_y^k Q_x^j u \right\|_{L_T^1 L^\infty} \leq 2^{-(j+k)/2} T^{\frac{1}{2}} \\
&\sum_{m=1}^{2^{j+k}} \Big(2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j + \left(-\frac{\beta}{4}+\epsilon\right)k} \left\| Q_y^k Q_x^j u\left(a_{j,m}\right) \right\|_{L^2} \\
&\qquad\qquad + 2^{\left(-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon\right)j + \left(-\frac{\beta}{4}+\epsilon\right)k} 2^j \left\| \chi_{\left[a_{jm}, a_{j(m+1)}\right)} Q_y^k Q_x^j f \right\|_{L_T^1 L^2} \Big) \\
&\leq 2^{-\epsilon\frac{(j+k)}{2}} T^{\frac{1}{2}} \Bigg(2^{-(j+k)} \sum_{m=1}^{2^{j+k}} \Big(\left\| 2^{\left(-\frac{\beta}{4}+\frac{1}{2}+\epsilon'\right)k} Q_y^k 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon'\right)j} Q_x^j u\left(a_{j,m}\right) \right\|_{L^2} \Big) \\
&\qquad\qquad + 2^{\left(\frac{3\epsilon}{2}-\frac{2+\beta}{4}\right)k} \left\| Q_y^k 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\epsilon'\right)j} Q_x^j f \right\|_{L_T^1 L^2} \Bigg)
\end{aligned}$$

donde $2^{\left(\frac{3\epsilon}{2}-\frac{2+\beta}{4}\right)k} < 1$ si $k \geq 1$ y $\epsilon < \frac{2+\beta}{6}$. Para $s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}} + \frac{3\epsilon}{2}$ y $s_2 = -\frac{\beta}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3\epsilon}{2}$ tenemos que,

$$\left\| Q_y^k Q_x^j u \right\|_{L_T^1 L^\infty} \lesssim_{s_1, s_2} 2^{-\epsilon\frac{(j+k)}{2}} T^{\frac{1}{2}} \left(\left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} u \right\|_{L_T^\infty L^2} + \|J_x^{s_1} f\|_{L_T^1 L^2} \right).$$

□

Proposición 5.1.
Sean, $\alpha = 1, 2, 3$, $0 < \beta \leq 1$, u *solución del PVI (5-1) con* $\phi \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$. *Para cualquier,* $s > (\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}})(\frac{-\beta}{4} + \frac{3}{2})$, *entonces, existen* $T = T(\|\phi\|_s, s)$ *y* $C_T(\|\phi\|_s, s)$ *tal que,*

$$g(T) := \int_0^T \left(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|u_x\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|u_y\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \right) dt' \leq C_T$$

Demostración. Aplicando el Lema 5.3 con $s_1 > \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}}$ y $s_2 > -\frac{\beta}{4} + \frac{1}{2}$ en u, $\partial_x u$, $\partial_y u$ y tomando a $f = u^2, \partial_x u^2, \partial_y u^2$ respectivamente, entonces, tenemos que,

$$\begin{aligned}
&g(T) := \|u\|_{L_T^1 L^\infty} + \|u_x\|_{L_T^1 L^\infty} + \|u_y\|_{L_T^1 L^\infty} \\
&\lesssim_s T^{\frac{1}{2}} \Big(\left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} u \right\|_{L_T^\infty L^2} + \left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} \partial_x u \right\|_{L_T^\infty L^2} + \left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} \partial_y u \right\|_{L_T^\infty L^2} \\
&+ \left\| J_x^{s_1} u^2 \right\|_{L_T^1 L^2} + \left\| J_x^{s_1} \partial_x \left(u^2\right) \right\|_{L_T^1 L^2} + \left\| J_x^{s_1} \partial_y \left(u^2\right) \right\|_{L_T^1 L^2} \Big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es suficiente acotar cada sumando del lado derecho de la desigualdad anterior. Los tres primeros sumandos anteriores se pueden acotar por la desigualdad de Young con $p = \frac{s_2+1}{s_2}$ y $q = s_2+1$; $p = \frac{s_1+1}{s_1}$ y $q = s_1+1$; $p = q = 2$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x u\right\|_{L^2} &\lesssim \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\left(1+m^2\right)^{s_1+1}\left(1+n^2\right)^{s_2}|\widehat{u}|^2\\ &\lesssim \left\|\left(1+m^2\right)^{\frac{(s_1+1)(s_2+1)}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2}+\left\|\left(1+n^2\right)^{\frac{s_2+1}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left\|J_x^{(s_2+1)(s_1+1)}u\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{s_2+1}u\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \|u\|_s\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_y u\right\|_{L^2} &\lesssim \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\left(1+m^2\right)^{s_1}\left(1+n^2\right)^{s_2+1}|\widehat{u}|^2\\ &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s_1+1}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2}+\left\|\left(1+n^2\right)^{\frac{(s_1+1)(s_2+1)}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left\|J_x^{s_1+1}u\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{(s_2+1)(s_1+1)}u\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \|u\|_s\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\right\|_{L^2}=\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\left(1+n^2\right)^{s_1}\left(1+n^2\right)^{s_2}|\widehat{u}|^2 &\lesssim \left\|\left(1+\xi^2\right)^{s_1}\widehat{u}\right\|_{L^2}+\left\|\left(1+n^2\right)^{s_2}\widehat{u}\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \left\|J_x^{2s_1}u\right\|_{L^2}+\left\|J_y^{2s_2}u\right\|_{L^2}\\ &\lesssim \|u\|_s\end{aligned}$$

donde, $s > (\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{\alpha+2}})(\frac{-\beta}{4}+\frac{3}{2})$. Los últimos tres sumandos se acotan, aplicando la regla del producto de Leibniz versión periódica (Lema 1.5) y posteriormente aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\int_0^T\left\|J_x^{s_1}u^2\right\|_{L^2}dt' \lesssim \int_0^T\|u\|_{L^\infty}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L^2}dt' \le \|u\|_{L_T^1L^\infty}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^\infty L^2} \le \|u\|_{L_T^1L^\infty}\|u\|_{L_T^\infty H^s}\,,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\left\|J_x^{s_1}\left(u\partial_x u\right)\right\|_{L^2}dt' &\lesssim \int_0^T\|\partial_x u\|_{L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L^\infty}+\left\|J_x^{s_1}\partial_x u\right\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}dt'\\ &\le \|\partial_x u\|_{L_T^\infty L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1L^\infty}+\left\|J_x^{s_1}\partial_x u\right\|_{L_T^\infty L^2}\|u\|_{L_T^1L^\infty}\\ &\le \|u\|_{L_T^\infty H^s}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1L^\infty}+\|u\|_{L_T^\infty H^s}\|u\|_{L_T^1L^\infty}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^T\left\|J_x^{s_1}\left(u\partial_y u\right)\right\|_{L^2}dt' &\lesssim \int_0^T\|\partial_y u\|_{L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L^\infty}+\left\|J_x^{s_1}\partial_y u\right\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}dt'\\ &\le \|\partial_y u\|_{L_T^\infty L^2}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1L^\infty}+\left\|J_x^{s_1}\partial_y u\right\|_{L_T^\infty L^2}\|u\|_{L_T^1L^\infty}\\ &\le \|u\|_{L_T^\infty H^s}\left\|J_x^{s_1}u\right\|_{L_T^1L^\infty}+\|u\|_{L_T^\infty H^s}\|u\|_{L_T^1L^\infty}\,.\end{aligned}$$

Sumando todos los términos anteriores y usando la estimativa de energía obtenemos la desigualdad,

$$g(T) \lesssim \|\phi\|_s e^{g(T)} (1 + g(T)).$$

El resultado es consecuencia de un argumento de continuidad, ya realizado anteriormente. □

Observación. 5.2

Usando regularización parabólica podemos probar que, el PVI (5-1) con $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$ esta localmente bien planteada para dato en $H^s(\mathbb{T}^2)$, $s > 2$. Para ello, consideramos el PVI regularizado:

$$\begin{cases} u_t - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} u \pm D_y^{1+\beta} u \right) + u^p u_x + \mu \Delta^2 u = 0 & (x,y) \in \mathbb{T}^2,\ t \in \mathbb{R}, \mu > 0 \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) & (x,y) \in \mathbb{T}^2. \end{cases} \tag{5-9}$$

Demostración. Teorema 0.10

Sea $s > (\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+2}})(-\frac{\beta}{4} + \frac{3}{2})$, $\phi \in H^s(\mathbb{T}^2)$, se considera por densidad, $\phi_\gamma \in H^\infty(\mathbb{T}^2) \cap H^s(\mathbb{T}^2)$ tal que $\lim_{\gamma\to\infty} \|\phi_\gamma - \phi\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} = 0$ y $\|\phi_\gamma\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} \leq C \|\phi\|_{H^s(\mathbb{T}^2)}$. Sean $\{u_\gamma\}$ soluciones asociadas al dato inicial $\{\phi_\gamma\}$ tal que $u_\gamma \in C([0,T']; H^\infty(\mathbb{T}^2))$, $T' > 0$ garantizadas por la *Observación. 5.2*. Por la Proposición 5.1 extendemos u_γ a todo $[0,T]$, $T = T(\|\phi\|_{H^s}, s)$ y existe, una constante C_T tal que,

$$\int_0^T \left(\|u_\gamma\|_{L^\infty} + \|\partial_x u_\gamma\|_{L^\infty} + \|\partial_y u_\gamma\|_{L^\infty} \right) dt \leq C_T. \tag{5-10}$$

Se deduce de la estimativa de energia (Lema 5.1) y la desigualdad anterior (5-10) que,

$$\sup_{0<t<T} \|u_\gamma\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} \leq C_T. \tag{5-11}$$

Al usar la desigualdad de Gronwall y (5-10), tenemos que,

$$\lim_{\gamma,\mu\to\infty} \sup_{0<t<T} \|u_\gamma - u_\mu\|_0 = 0. \tag{5-12}$$

Un argumento de interpolación junto con (5-11) y (5-12), implican que existe $u \in C([0,T]; H^{s_1}(\mathbb{T}^2)) \cap L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$ con $s_1 < s$, tal que $u_\gamma \to u$ en $C([0,T]; H^{s_1}(\mathbb{T}^2))$. Por (5-12), $u_\gamma \to u$ en $C([0,T]; L^2(\mathbb{T}^2))$,) y por (5-11), $u_\gamma \in L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$, entonces, por compacidad débil $u \in L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{T}^2))$. La unicidad de u se sigue de la unicidad en $L^2(\mathbb{T}^2)$, razonando como en (5-12) es decir, $\sup_{[0,T]} \|u_1 - u_2\|_0 \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_0$. La dependencia continua se sigue por el argumento estándar de Bona-Smith [9].

Observación. 5.2

Siguiendo las ideas de [15] como en la *Observación* 2.1 para el caso $p = 1$, es posible obtener un mejor resultado de buen planteamiento local y global para el problema regularizado (5-9)

1. Para el buen planteamiento local para $\mu > 0$ y $-2 < s < 2$, consideramos

$$\chi_T^s = \left\{ u_\mu \in C\left([0,T]\,; H^s\left(\mathbb{T}\times\mathbb{T}\right)\right) : \|u\|_{\chi_T^s} < \infty \right\}$$

con $\|u\|_{\chi_T^s} = \underset{[0,T]}{sup} \left\{ \|u\left(t\right)\|_s + t^{\frac{s}{4}} \|u\|_{L^2} \right\}$ análogo al argumento del capítulo 1 se utiliza el Teorema de punto fijo de Banach con las respectivas estimativas lineales y no lineales análogas a la *Observación* 2.1.

2. El problema regularizado (5-9) satisface,

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \|u\left(t\right)\|_{L^2}^2 + \mu \int_0^t \|\Delta u\|_{L^2}^2 \, dt', \tag{5-13}$$

$$\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_x \phi\|_{L^2}^2 \, e^{\epsilon^2 T} \tag{5-14}$$

y

$$\|\partial_y u\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_y \phi\|_{L^2}^2 \, e^{\left(\epsilon^{-2}+\epsilon^{-\frac{4}{3}}\right)T} \tag{5-15}$$

para obtener (5-14) y (5-15) aplicamos la desigualdad de Gagliardo -Nirenberg (Teorema 1.1) para superficies compactas con la condición $\hat{u}(0,0) = 0$ y así con estos ingredientes establecer el buen planteamiento global para $s > -2$

6 Ondas Solitarias para la ZK generalizada en el caso $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

En los anteriores capítulos tratamos asuntos relacionados con el buen planteamiento del PVI asociado a la ecuación (0-1), sin embargo, en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales otras características tales como: blow up, existencia y estabilidad de ondas solitarias, son también de interés. En este capítulo, nos dedicaremos a mostrar la existencia de cierto tipo de onda solitaria, que es solución de la ecuación diferencial (0-1), de la forma $u(x,y,t) = \Phi(x-ct)$, donde $c > 0$, es la velocidad de la onda y $\xi = x - ct$ es la variable característica; esta solución, se denomina solución de onda viajera y satisface $\lim_{\xi\to\pm\infty} \Phi^{(n)}(\xi) = 0$. La importancia de este tipo de ondas esta en que pueden sufrir interacciones y viajar largas distancias sin presentar cambios en su forma. Para establecer la existencia y estabilidad de una solución de onda solitaria, se debe demostrar que la solución de onda solitaria es un minimizador restringido local de un funcional Hamiltoniano asociado a (0-1). Existen métodos que proveen no solo la existencia y estabilidad de la onda solitaria sino que dan mas información sobre estas estructuras como por ejemplo los métodos locales de Benjamin, Weinstein y Grillakis et al. (ver capítulos 6 y 7 en [58]). Un método alternativo mas práctico que no se basa en el análisis local es el de Cazenave y Lions(método de compacidad concentrada [49], [48]). Para realizar este trabajo seguimos el artículo de Albert (ver [3]) donde se expone el método de compacidad concentrada. Para soluciones de (0-1), de la forma $u\left(x,y,t\right) = \Phi\left(x-ct\right)$ de tipo onda solitaria transversal, donde $\Phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$, entonces la ecuación (0-1) con $0 \leq \alpha \leq 1$ se transforma en,

$$-c\Phi_x + \partial_x D_x^{1+\alpha}\Phi \pm \partial_x D_y^{1+\beta}\Phi - \frac{1}{p+1}\partial_x\Phi^{p+1} = -c\Phi_x + \partial_x D_x^{1+\alpha}\Phi - \frac{1}{p+1}\partial_x\Phi^{p+1} = 0, \tag{6-1}$$

que integrando con respecto a x se transforma en,

$$-c\Phi + D_x^{1+\alpha}\Phi - \frac{1}{p+1}\Phi^{p+1} = 0. \tag{6-2}$$

Las cantidades conservadas (0-6) y (0-7) del flujo asociado a (0-1), implican que $Q(\Phi) = \bar{Q}(\Phi) = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\Phi^2 dx$ y que $I(\Phi) = \bar{I}(\Phi) = \pi\int_{\mathbb{R}}\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\Phi\right)^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\Phi^{p+2}dx$, de lo que se deduce que, (6-2) es equivalente a

$$c\bar{Q}'\left(\Phi\right) = \bar{I}'\left(\Phi\right). \tag{6-3}$$

Para hallar una solución de (6-3), consideramos el problema;

$$I_q = inf\left\{\bar{I}\left(\varphi\right) : \varphi \in G_q\right\}, \tag{6-4}$$

donde

$$G_q := \left\{\varphi \in H^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\mathbb{R}\right); \bar{Q}\left(\varphi\right) = q\right\}, \tag{6-5}$$

para $q > 0$. Dicho conjunto se denomina, conjunto de minimizadores. Para resolver este problema de minimización del Hamiltomiano ($\bar{I}$) con la restricción del momentun ($\bar{Q}$) se usara el principio de compacidad concentrada de Lions (Lema 1.19) y las ideas de [58], [4], [8], las cuales son validas para $p < 2(1+\alpha)$ que nos conducirán a que $G_q \neq \emptyset$.
Una sucesión $\{\varphi_n\}_n$ es una sucesión minimizante para I_q, si $\bar{Q}(\varphi_n) = q$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} \bar{I}\left(\varphi_n\right) = I_q$. Para cada sucesión minimizante, se define $\mathfrak{Q}_n : [0,\infty) \to [0,q]$, por;

$$\mathfrak{Q}_n\left(r\right) = 2\pi sup_{a\in\mathbb{R}} \int_{a-r}^{a+r} \varphi_n^2 dx.$$

$\{\mathfrak{Q}_n\}_n$ es una sucesión de funciones crecientes y acotadas uniformemente, por lo tanto por el principio de selección de Helly, existe una subsucesión que nuevamente notamos $\{\mathfrak{Q}_n\}_n$ que converge puntualmente a una sucesión acotada $\mathfrak{Q} : [0,\infty) \to [0,q]$. Sea $\nu =: \underset{r\to\infty}{Lim}\mathfrak{Q}\left(r\right)$, entonces, $0 \leq \nu \leq q$. Se verificaran las tres posibilidades; $\nu = q$ (compacidad), $\nu = 0$ (desvanecimiento), $0 < \nu < q$ (dicotomia), que por el principio de compacidad concentrada se debe satisfacer una de estas. Iniciaremos mostrando que I_q es acotado,

Lema 6.1.
Sean, $0 \leq \alpha \leq 1$ *y* $q > 0$. *Entonces,* $-\infty < I_q < 0$.

Demostración. Sea $\varphi \in H^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\mathbb{R}\right)$ es una función positiva tal que $\bar{Q}\left(\varphi\right) = q$. Para $\theta > 0$, definimos,

$$\varphi_\theta\left(x\right) = \theta^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\theta x\right).$$

Entonces,

$$\bar{Q}\left(\varphi_\theta\right) = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\left(\varphi_\theta\right)^2 dx = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\left(\theta^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\theta x\right)\right)^2 dx = \bar{Q}\left(\varphi\right) = q$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{I}\left(\varphi_\theta\right) &= \pi\int_{\mathbb{R}}\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_\theta\right)^2 - \frac{2}{\left(p+2\right)\left(p+1\right)}\varphi_\theta^{p+2}dx \\
&= \pi\int_{\mathbb{R}}\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\left(\theta^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\theta x\right)\right)\right)^2 - \frac{2}{\left(p+2\right)\left(p+1\right)}\left(\theta^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\theta x\right)\right)^{p+2}dx \\
&= \pi\theta^{1+\alpha}\left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi\right\|_0^2 - \frac{2\pi\theta^{\frac{p}{2}}}{\left(p+2\right)\left(p+1\right)}\left\|\varphi\right\|_{L^{p+2}}^{p+2},
\end{aligned}$$

luego $\bar{I}(\varphi_\theta)<0$ para $\theta<\left(\frac{4}{(p+2)(p+1)}\frac{\|\varphi\|_{L^{p+2}}^{p+2}}{\left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi\right\|_0^2}\right)^{\frac{2}{2(1+\alpha)-p}}$, en particular $I_q<0$. Que, $-\infty<I_q$ es consecuencia de,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\bar{I}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\bar{I}(\varphi)+2\bar{Q}(\varphi)-2\bar{Q}(\varphi)&=\|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}}-\frac{2}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}-2q\\&\geq-\frac{2}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}-2q\\&\geq-\frac{2}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^{p+2}-2q\end{aligned}$$

□

El siguiente lema muestra que las sucesiones minimizantes son acotadas;

Lema 6.2.
Sea $0\leq\alpha\leq1$. *Si*
$\{\varphi_n\}_n$ *es una sucesión minimizante para* I_q, *existen constantes* $B>0$ *y* $\delta>0$ *tal que,*

1. $\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}\leq B$
2. $\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}>\delta$ *para n grande*

Demostración. Usando una desigualdad de tipo Gagliardo- Nirenberg (Ver Teorema 2.2 en [4]). Tenemos que,

$$\begin{aligned}\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2&\leq\left(\bar{I}(\varphi_n)+\bar{Q}(\varphi_n)+\frac{2\pi}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}\right)\\&\leq\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2+C_{p,\alpha}\|\varphi_n\|_0^{\frac{(p+2)\alpha+2}{1+\alpha}}\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^{\frac{p}{1+\alpha}}\\&\leq\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2+\frac{p}{2(\alpha+1)}\|\varphi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2+C_{\alpha,p}\frac{2(\alpha+1)-p}{2(\alpha+1)}\|\varphi_n\|_0^{\frac{(p+2)2\alpha+4}{2(\alpha+1)-p}},\end{aligned}$$

donde $p<2(\alpha+1)$. La existencia de la cota B se tiene, ya que $\|\varphi_n\|_0=(\frac{q}{2\pi})^2$. Para verificar la segunda parte razonamos por contradicción, sea $\lim_{n\to\infty} inf\,\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}\leq0$,

$$\begin{aligned}I_q=\lim_{n\to\infty}\bar{I}(\varphi_n)&=\lim_{n\to\infty}\left(\pi\left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_n\right\|_0^2-\frac{2\pi}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}\right)\\&\geq\lim_{n\to\infty}sup\left(-\frac{2\pi}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}\right)\\&\geq-\lim_{n\to\infty}inf\left(\frac{2\pi}{(p+2)(p+1)}\|\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2}\right)\\&\geq0.\end{aligned}$$

Pero por el Lema 6.1, $I_q<0$. □

El siguiente lema técnico se usará para probar que el caso de desvanecimiento no ocurre.

Lema 6.3.
Sean, $0 \leq \alpha \leq 1$, B *y* γ *números reales positivos. Entonces, existe* $\eta = \eta(B, \gamma)$ *tal que si* $\|f\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq B$ *y* $\|f\|_{L^{p+2}} > \gamma$, *entonces, se tiene,*

$$\sup_{c\in\mathbb{R}} 2\pi \int_{c-1}^{c+1} |f|^{p+2}\, dx > \eta$$

Demostración. Tenemos que,

$$2\pi \sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f^2 + \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} f\right)^2 dx = \|f\|^2_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq B^2 = \frac{B^2}{\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}}} \|f\|^{p+2}_{L^{p+2}} = 2\pi \sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{B^2}{\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}}} f^{p+2} dx.$$

Existe un i_0 para el cual, $\int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} f^2 + \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} f\right)^2 dx \leq \int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} \frac{B^2}{\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}}} f^{p+2} dx$ y como $\alpha + 1 \geq 1$, $\|f\|_{L^{p+2}} < C\|f\|_{\frac{\alpha+1}{2}}$,
entonces,

$$\begin{aligned}\left(\int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} f^{p+2} dx\right)^{\frac{1}{p+2}} &\leq C\left(\int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} f^2 + \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} f\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{CB}{\|f\|^{\frac{p+2}{2}}_{L^{p+2}}} \left(\int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} f^{p+2} dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Así,

$$\eta = \left(\frac{\gamma^{p+2}}{C^2 B^2}\right)^{\frac{p+2}{p}} \leq \int_{i_0-\frac{1}{2}}^{i_0+\frac{1}{2}} f^{p+2} dx \leq \sup_{c\in\mathbb{R}} \int_{c-\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}} f^{p+2} dx.$$

□

Propiedad de sub-aditividad de I_q,

Lema 6.4.
$I_{q_1+q_2} < I_{q_1} + I_{q_2}$, *siempre que,* $q_1, q_2 > 0$.

Demostración. Sea $\theta > 1$, $\varphi_\theta = \theta^2 \varphi(x)$ entonces,

$$\bar{Q}(\varphi_\theta) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} (\varphi_\theta)^2 dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \theta^2 (\varphi(x))^2 dx = \theta^2 \bar{Q}(\varphi) \tag{6-6}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{I}(\varphi_\theta) &= \pi \int_{\mathbb{R}} \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi_\theta\right)^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)} (\varphi_\theta)^{p+2} dx \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}} \theta^2 \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi\right)^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)} \theta^{p+2} (\varphi)^{p+2} dx \\ &\leq \theta^{p+2} \bar{I}(\varphi)\end{aligned} \tag{6-7}$$

El Lema 6.1 junto con las desigualdades (6-6), (6-7) implican que,

$$I_{\theta^2 q} = inf\left\{\bar{I}\left(\varphi_\theta\right) \mid \bar{Q}\left(\varphi_\theta\right) = \theta^2 q\right\} \leq inf\left\{\theta^{p+2}\bar{I}\left(\varphi\right) \mid \bar{Q}\left(\varphi\right) = q\right\} \leq \theta^{p+2} I_q \leq \theta^2 I_q,$$

que a su vez, implica que,

$$I_{q_1+q_2} = I_{q_1\left(1+\frac{q_2}{q_1}\right)} < \left(1+\frac{q_2}{q_1}\right) I_{q_1} < I_{q_1} + \frac{q_2}{q_1} I_{q_1 \frac{q_2}{q_2}} < I_{q_1} + I_{q_2},$$

para $q_1, q_2 > 0$. □

El siguiente resultado describe el comportamiento de la sucesión minimizante para $0 < \nu < q$,

Lema 6.5.
Sean, $0 \leq \alpha \leq 1$ y φ_n sucesión minimizante. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ y dos sucesiones de funciones $\{g_N, g_{N+1}, \cdots\}$ y $\{h_N, h_{N+1}, \cdots\}$ en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$, tal que para cada $n \geq N$,

1. $\left|\bar{Q}(g_n) - \nu\right| < \epsilon,$
2. $\left|\bar{Q}(h_n) - (q-\nu))\right| < \epsilon,$
3. $\left|\bar{I}(\varphi_n) - (\bar{I}(g_n) + \bar{I}(h_n))\right| < \epsilon.$

Demostración. Sean, $\rho(x), \eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que,

1. $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \equiv 1$ en $[-1,1]$ y $supp\, \rho \subset [-2,2]$
2. $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ en $\mathbb{R} - [-2,2]$ y $supp\, \eta \subset \mathbb{R} - [-1,1]$
   $\eta^2 + \rho^2 = 1$ en $\mathbb{R}$, $\eta_r(x) = \eta\left(\frac{x}{r}\right)$ y $\rho_r(x) = \rho\left(\frac{x}{r}\right)$.

Como,

$$\mathfrak{Q}(r) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Q}_n(r) = \lim_{n\to\infty} \sup_{c\in\mathbb{R}} 2\pi \int_{c-r}^{c+r} \varphi^2 dx$$

tenemos que para $\epsilon_1 > 0$ y r suficientemente grande,

$$\nu - \epsilon_1 < \mathfrak{Q}(r) \leq \mathfrak{Q}(2r) \leq \nu.$$

Fijando r suficientemente grande, existe un N tal que para todo $n > N$,

$$\nu - \epsilon_1 < \mathfrak{Q}_n(r) \leq \mathfrak{Q}_n(2r) \leq \nu + \epsilon_1$$

Ahora para cada $n \geq N$, se puede elegir $(c_n)_n$ tal que,

$$\nu - \epsilon_1 < 2\pi \int_{c_n-r}^{c_n+r} \varphi^2 dx \leq 2\pi \int_{c_n-2r}^{c_n+2r} \varphi^2 dx \leq \nu + \epsilon_1.$$

Se define,

$$g_n(x) = \rho_r(x - c_n)\varphi_n(x) = (\rho_{r,n}\varphi_n)(x)$$

y

$$h_n(x) = \eta_r(x - c_n)\varphi_n(x) = (\eta_{r,n}\varphi_n)(x).$$

Para demostrar la primera parte tenemos,

$$\bar{Q}(g_n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} (\rho_{r,n}\varphi_n)^2(x)\,dx \leq 2\pi \int_{c_n-r}^{c_n+r} \varphi_n^2 dx \leq \mathfrak{Q}_n(2r) \leq \nu + \epsilon_1.$$

Para la segunda parte,

$$\begin{aligned}
\bar{Q}(h_n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} (\eta_{r,n}\varphi_n)^2(x)\,dx &\leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} \eta_{r,n}^2\varphi_n^2 dx \\
&\leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \rho_{r,n}^2\right)\varphi_n^2 dx \\
&\leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} (\varphi_n)^2(x)\,dx - 2\pi \int_{c_n-r}^{c_n+r} \varphi_n^2 dx \\
&\leq q - (\nu - \epsilon_1).
\end{aligned}$$

Para la tercera parte, teniendo en cuenta que, $D_x^{\frac{\alpha+1}{2}}(\rho_{r,n}\varphi_n) = [D_x^{\frac{\alpha+1}{2}}, \rho_{r,n}]\varphi_n + \rho_{r,n}D_x^{\frac{\alpha+1}{2}}\varphi_n$ y la Proposición 1.11, obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\left|\bar{I}(\varphi_n) - \left(\bar{I}(g_n) + \bar{I}(h_n)\right)\right| \\
&\quad\leq \pi \left| \int_{\mathbb{R}} \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_n\right)^2 - \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho_{r,n}\varphi_n)\right)^2 - \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(\eta_{r,n}\varphi_n)\right)^2 dx \right| \\
&\qquad + \frac{2\pi}{(p+1)(p+2)} \int_{\mathbb{R}} \left| -(\varphi_n)^{p+2} + (\rho_{r,n}\varphi_n)^{p+2} + (\eta_{r,n}\varphi_n)^{p+2} \right| dx \\
&\quad\lesssim \int_{\mathbb{R}} \left| \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_n\right)^2 - \left(\rho_{r,n}D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_n\right)^2 - \left(\eta_{r,n}D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\varphi_n\right)^2 \right| dx \\
&\qquad + \left(\frac{q}{r} \left\| \widehat{\partial_x \rho} \right\|_{L^1}^2 + \frac{q}{r} \left\| \widehat{\partial_x \rho} \right\|_{L^1}^2 \right) \\
&\qquad + \frac{1}{(p+1)(p+2)} \int_{\mathbb{R}} \left| \left(1 - (\rho_{r,n})^{p+2} - (\eta_{r,n})^{p+2}\right)(\varphi_n)^{p+2} \right| dx \\
&\quad= I + II + III.
\end{aligned}$$

El término I, es cero ya que $1 - (\rho^2 + \eta^2) = 0$, el término II queda acotado por $O(\frac{1}{r})$ y para el término III, observemos que $supp\ (1 - (\rho^{p+2} + \eta^{p+2})) \subseteq [c_n - 2r, c_n + 2r] - [c_n - r, c_n + r] = \Omega$. $supp\ \widetilde{\rho_{r,n}} = \Omega$, es tal que $1 - \left(\rho_{r,n}^{p+2} + \eta_{r,n}^{p+2}\right) \leq \widetilde{\rho_{r,n}} \leq 1$

$$\begin{aligned}
III \leq \|\widetilde{\rho_{r,n}}\varphi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \lesssim \left\| D^{\frac{1+\alpha}{2}}(\widetilde{\rho_{r,n}}\varphi_n) \right\|_0^{\frac{p}{1+\alpha}} \|\widetilde{\rho_{r,n}}\varphi_n\|_0^{\frac{2+(p+2)\alpha}{\alpha+1}} &\lesssim \left(\int_{c_n-2r}^{c_n+2r} \varphi_n^2 dx - \int_{c_n-r}^{c_n+r} \varphi_n^2 \right)^{\frac{2+(p+2)\alpha}{\alpha+1}} \\
&\leq \left((\nu + \epsilon_1) - (\nu - \epsilon_1)\right)^{\frac{2+(p+2)\alpha}{\alpha+1}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia del Lema 6.5, la dicotomía no ocurre:

Corolario 6.1.
Para cada sucesión minimizante φ_n, tenemos que $\nu = q$.

Demostración. Si $0 < \nu < q$, por la observación en el Corolario 2.7 en [3] y el Lema 6.5 se sigue que existe N y subsucesiones $(g_{n_k})_{k\geq N}$ y $(h_{n_k})_{k\geq N}$ de (g_n) y (h_n), tal que, $\bar{I}(h_{n_k}) \geq I_{q-\nu} - \frac{1}{k}$, $\bar{I}(g_{n_k}) \geq I_\nu - \frac{1}{k}$ y $\bar{I}(\varphi_{n_k}) \geq \bar{I}(g_{n_k}) + \bar{I}(h_{n_k}) - \frac{1}{k}$,

$$\bar{I}(\varphi_{n_k}) \geq I_\nu + I_{q-\nu} - \frac{3}{k}$$

Al tomar el límite cuando $k \to \infty$, $I_q \geq I_\nu + I_{q-\nu}$, lo que contradice el Lema 6.4. □

Ahora, probamos que, el caso de desvanecimiento no ocurre,

Lema 6.6.
Para cada sucesión minimizante φ_n, tenemos $\nu > 0$

Demostración. Del Lema 6.3, existe un $\eta > 0$ y una sucesión $(c_n)_n$ en $\mathbb{R}$, tal que,

$$2\pi \int_{c_n-\frac{1}{2}}^{c_n+\frac{1}{2}} |\varphi_n|^{p+2}\, dx \geq \eta \text{ para todo } n.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
\eta \leq 2\pi \int_{c_n-\frac{1}{2}}^{c_n+\frac{1}{2}} |\varphi_n|^{p+2}\, dx &\leq \|\varphi_n\|_{L^\infty}^p \int_{c_n-\frac{1}{2}}^{c_n+\frac{1}{2}} 2\pi\, |\varphi_n|^2\, dx \\
&\leq \|\varphi_n\|_{\frac{1}{2}}^p\, 2\pi \int_{c_n-\frac{1}{2}}^{c_n+\frac{1}{2}} |\varphi_n|^2\, dx \\
&\leq B^p 2\pi \int_{c_n-\frac{1}{2}}^{c_n+\frac{1}{2}} |\varphi_n|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\eta}{B^p} \leq \mathfrak{Q}_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Tomando n suficientemente grande tenemos que,

$$0 < \mathfrak{Q}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \nu.$$

□

Ahora, se puede probar el resultado principal, el caso de compacidad y esta dado por el siguiente lema,

Lema 6.7.
Sean, $0 \leq \alpha \leq 1$ *y* $\nu = q$. *Entonces, existe una sucesión* $\{c_n\}$, *tal que,*

1. *Para todo* $z < q$, *existe* $r = r(z)$, *tal que*

$$2\pi \int_{c_n - r}^{c_n + r} \varphi_n^2 dx > z,$$

para n suficientemente grande.

2. *La sucesión* $\{\tilde{\varphi_n}\}$ *definida por* $\tilde{\varphi_n}(x) = \varphi_n(x - c_n)$, *tiene una subsucesión convergente en* $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$ *a una función* $\varphi \in G_q$. *En particular el conjunto* G_q *no es vació.*

Demostración. 1. Ya que,

$$q = \nu = \lim_{r \to \infty} \mathfrak{Q}(r) = \lim_{r \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sup_{c \in \mathbb{R}} 2\pi \int_{c-r}^{c+r} \varphi_n^2 dx$$

existe un r_0 tal que para n suficientemente grande,

$$\sup_{c \in \mathbb{R}} 2\pi \int_{c-r_0}^{c+r_0} \varphi_n^2 dx > \frac{q}{2}$$

Para estos n´s se puede encontrar un c_n, tal que,

$$2\pi \int_{c_n - r_0}^{c_n + r_0} \varphi_n^2 dx > \frac{q}{2}.$$

Sea z, tal que, $\frac{q}{2} < z < q$, como $\nu = q$, existen $r_0(z)$ y $N(z)$ suficientemente grande, tal que, si $n > N(z)$

$$2\pi \int_{c_n(z) - r_0(z)}^{c_n(z) + r_0(z)} \varphi_n^2 dx > z, \text{ para algún } c_n(z).$$

Como $\bar{Q}(\varphi_n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2 dx = q$, entonces,

$$[c_n(z) - r_0(z), c_n(z) + r_0(z)] \cap [c_n - r_0, c_n + r_0] \neq \emptyset$$

tomando $r = r(z) = 2r_0(z) + r_0$ podemos garantizar que,

$[c_n(z) - r_0(z), c_n(z) + r_0(z)] \subset [c_n - r, c_n + r]$ y así se obtiene el resultado.

2. De la primera parte se tiene que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un r_k, tal que, para n grande,

$$2\pi \int_{c_n - r_k}^{c_n + r_k} \varphi_n^2 dx > q - \frac{1}{k}.$$

Sea $\widetilde{\varphi}_n = \varphi(\cdot - c_n)$, entonces,

$$2\pi \int_{-r_k}^{r_k} \widetilde{\varphi}_n^2 dx > q - \frac{1}{k},$$

del Lema 6.2 $\{\widetilde{\varphi}_n\}_n$ es una sucesión acotada en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$ y como $H^{\frac{1+\alpha}{2}} \hookrightarrow L^2_{loc}$ de manera compacta, existe una a subsucesión de $\{\widetilde{\varphi}_n\}_n$ que notaremos de la misma forma, que converge a una función φ fuertemente en la norma $L^2_{[-r,r]}$, tal que,

$$2\pi \int_{-r_k}^{r_k} \varphi^2 dx \geq q - \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que para todo n, $\bar{Q}(\varphi_n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2 dx = q$, entonces, $2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx = q$. Para la convergencia en L^{p+2},

$$\|\widetilde{\varphi}_n - \varphi\|_{L^{p+2}} \leq \left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} (\widetilde{\varphi}_n - \varphi) \right\|_0^{\gamma} \|\widetilde{\varphi}_n - \varphi\|_0^{1-\gamma} \leq C \|\widetilde{\varphi}_n - \varphi\|_0^{1-\gamma}.$$

Como tenemos la convergencia débil de $\widetilde{\varphi}_n$ a φ en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$ y

$$\|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \lim_{n\to\infty} inf \|\widetilde{\varphi}_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}},$$

entonces,

$$\bar{I}(\varphi) \leq \lim_{n\to\infty} \bar{I}(\widetilde{\varphi}_n) = I_q$$

de donde, $\bar{I}(\varphi) = I_q$, así $\lim_{n\to\infty} \bar{I}(\widetilde{\varphi}_n) = \bar{I}(\varphi)$, entonces, $\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{\varphi}_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}} = \|\varphi\|_{\frac{1+\alpha}{2}}$ y se obtiene que $\widetilde{\varphi}_n$ converge a φ en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R})$.

□

Teorema 6.1.
Para $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, existen ondas solitarias de la forma $u(x, y, t) = \Phi(x - ct)$, donde Φ satisface la ecuación (6-2).

Demostración. Es consecuencia del Lema 1.19 de compacidad concentrada, el Corolario 6.1 y los Lemas 6.7, 6.6. □

Problemas Abiertos

Los problemas que aparecieron durante el estudio y no pudieron ser resueltos son; El Buen planteamiento Global del PVI (2-1) en espacios $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$. El buen planteamiento local del PVI (2-1) en espacios $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ de regularidades mas bajas, para los casos de α y β estudiados pero con $p \in \mathbb{Z}^+$. El buen planteamiento local del PVI (2-1) en espacios $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ de regularidades mas bajas, con los parámetros α y β variando de manera independiente y $p \in \mathbb{Z}^+$. El buen planteamiento local del PVI (2-1) en espacios $H^s(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ sin fijar un parámetro y en el capítulo de ondas solitarias queda por establecer la estabilidad de la onda solitaria.

Bibliografía

[1] G. P. Agrawal. *Fiber-optic communication systems*, volume 222. John Wiley & Sons, 2012.

[2] C. Albarracin and G. Rodriguez-Blanco. *The IVP for a certain dispersion generalized ZK equation in bi-periodic spaces*, 2021.

[3] J. P. Albert. *Concentration compactness and the stability of solitary-wave solutions to nonlocal equations. Contemporary Mathematics*, 221:1–30, 1999.

[4] J. Angulo, J. Bona, F. Linares, and M. Scialom. *Scaling, stability and singularities for nonlinear, dispersive wave equations: the critical case. Nonlinearity*, 15(3):759, 2002.

[5] T. Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations*, volume 252. Springer Science & Business Media, 1982.

[6] T. B. Benjamin. *Internal waves of permanent form in fluids of great depth. Journal of Fluid Mechanics*, 29(3):559–592, 1967.

[7] H. A. Biagioni and F. Linares. *Well-posedness Results for the Modified Zakharov-Kuznetsov Equation*, pages 181–189. Birkhäuser Basel, Basel, 2003.

[8] J. F. Bolaños Méndez et al. *El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación ZK-BBM*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá.

[9] J. L. Bona and R. Smith. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 278(1287):555–601, 1975.

[10] J. L. Bona and N. Tzvetkov. *Sharp well-posedness results for the BBM equation. Discrete Contin. Dyn. Syst*, 23(1241-1252):7, 2009.

[11] E. Bustamante, J. J. Urrea, and J. Mejía. *Periodic Cauchy problem for one two-dimensional generalization of the Benjamin–Ono equation in Sobolev spaces of low regularity. Nonlinear Analysis*, 188:50–69, 2019.

[12] A. Cunha and A. Pastor. *The IVP for the Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equation in low regularity Sobolev spaces. Journal of Differential Equations*, 261(3):2041–2067, 2016.

[13] A. Cunha and A. Pastor. *Persistence properties for the dispersion generalized BO-ZK equation in weighted anisotropic Sobolev spaces*. *Journal of Differential Equations*, 274:1067–1114, 2021.

[14] L. Dawson, H. McGahagan, and G. Ponce. *On the decay properties of solutions to a class of Schrödinger equations*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(6):2081–2090, 2008.

[15] O. Duque. *Sobre una versión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono generalizada*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2014.

[16] A. V. Faminskii. *The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 31(6):1070–1081, 1995.

[17] G. Fonseca, F. Linares, and G. Ponce. *The IVP for the dispersion generalized Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces*. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 30, pages 763–790. Elsevier, 2013.

[18] G. Fonseca and G. Ponce. *The IVP for the Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces*. *Journal of Functional Analysis*, 260(2):436 – 459, 2011.

[19] S. V. Francis Ribaud. *Local and global well-posedness results for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 37(1):449–483, 2017.

[20] L. Grafakos. *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.

[21] A. Grünrock and S. Herr. *The Fourier restriction norm method for the Zakharov-Kuznetsov equation*. *arXiv preprint arXiv:1302.2034*, 2013.

[22] E. Hille. *Methods in classical and functional analysis*. 1972.

[23] A. D. Ionescu and C. E. Kenig. *Local and global well-posedness of periodic KP-I equations*. *Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations. Ann. Math. Stud*, 163:181–211, 2009.

[24] J. R. J. Iorio and W. V. L. Nunes. *Introducao as equacoes de evolucao nao lineares*. Cnpq/Impa, Rio de Janeiro, 1991.

[25] R. J. Iório. *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces*. In *Functional-analytic methods for partial differential equations*, pages 104–121. Springer, 1990.

[26] I. J. Iorio Jr, R. J. Iorio Jr, and V. de Magalhães Iorio. *Fourier analysis and partial differential equations*, volume 70. Cambridge University Press, 2001.

[27] R. José Iório, Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*. *Communications in partial differential equations*, 11(10):1031–1081, 1986.

[28] T. Kato. *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*. *Spectral theory and differential equations*, pages 25–70, 1975.

[29] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. Studies in applied mathematics*, 8:93–128, 1983.

[30] T. Kato and G. Ponce. *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7):891–907, 1988.

[31] G. Keiser. *Optical fiber communications*. Wiley Online Library, 2003.

[32] C. E. Kenig. *On the local and global well-posedness theory for the KP-I equation*. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 21, pages 827–838. Elsevier, 2004.

[33] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Well-posedness and scattering results for the generalized korteweg-de vries equation via the contraction principle. Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(4):527–620, 1993.

[34] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *A bilinear estimate with applications to the KdV equation. Journal of the American Mathematical Society*, 9(2):573–603, 1996.

[35] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *On the unique continuation of solutions to the generalized KdV equation. Mathematical Research Letters*, 10(5/6):833–846, 2003.

[36] S. Kinoshita and R. Schippa. *Loomis-Whitney-type inequalities and low regularity well-posedness of the periodic Zakharov-Kuznetsov equation. Journal of Functional Analysis*, 280(6):108904, 2021.

[37] H. Koch and N. Tzvetkov. *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^s(\mathbb{R})$. *International Mathematics Research Notices*, 2003(26):1449–1464, 2003.

[38] D. Korteweg and G. de Vries. *On the change of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave. Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1835.

[39] E. W. Laedke and K.-H. Spatschek. *Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields. The Physics of Fluids*, 25(6):985–989, 1982.

[40] D. Lannes, F. Linares, and J.-C. Saut. *The Cauchy problem for the Euler–Poisson system and derivation of the Zakharov–Kuznetsov equation*. In *Studies in phase space analysis with applications to PDEs*, pages 181–213. Springer, 2013.

[41] F. Linares, M. Panthee, T. Robert, and N. Tzvetkov. *On the periodic Zakharov-Kuznetsov equation. arXiv preprint arXiv:1809.02027*, 2018.

[42] F. Linares and A. Pastor. *Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation. SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41(4):1323–1339, 2009.

[43] F. Linares and A. Pastor. *local and global well-posedness for the 2d generalized zakharov-kuznetsov equation. Journal of Functional Analysis*, 260 (4):1060–1085, 2010.

[44] F. Linares and A. Pastor. *Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equation*. *Journal of Functional Analysis*, 260(4):1060–1085, 2011.

[45] F. Linares, A. Pastor, and J.-C. Saut. *Well-posedness for the ZK equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton*. *Communications in Partial Differential Equations*, 35(9):1674–1689, 2010.

[46] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer, 2014.

[47] F. Linares and J.-C. Saut. *The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation*. RN, 1:2, 2009.

[48] P.-L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2*. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 1, pages 223–283. Elsevier, 1984.

[49] P.-L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*. *Revista matemática iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.

[50] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, volume 2. Oxford University Press on Demand, 1996.

[51] J. d. C. Lizarazo Osorio et al. *El problema de Cauchy de la clase de ecuaciones de dispersión generalizada de Benjamin-Ono bidimensionales*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá.

[52] L. Molinet and D. Pilod. *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov–Kuznetsov equation and applications*. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 32(2):347–371, 2015.

[53] L. Molinet, J.-C. Saut, and N. Tzvetkov. *Global well-posedness for the KP-I equation on the background of a non-localized solution*. *Communications in mathematical physics*, 272(3):775–810, 2007.

[54] A. Moliton. *Solid-State physics for electronics*. John Wiley & Sons, 2013.

[55] J. Nahas and G. Ponce. *On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation*. *Communications in Partial Differential Equations*, 34(10):1208–1227, 2009.

[56] M. B. Nathanson. *Additive Number Theory The Classical Bases*, volume 164. Springer Science & Business Media, 2013.

[57] H. Ono. *Algebraic solitary waves in stratified fluids*. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(4):1082–1091, 1975.

[58] J. A. Pava. *Nonlinear dispersive equations: existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions*. Number 156. American Mathematical Soc., 2009.

[59] Y. Qin and P. Kaloni. *Steady convection in a porous medium based upon the Brinkman model*. *IMA journal of applied mathematics*, 48(1):85–95, 1992.

[60] G. Rodríguez-Blanco. *On the Cauchy problem for the Camassa-Holm equation*. *Nonlinear Anal.*, 46:309–327, 2001.

[61] F. Sánchez Salazar et al. *El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.

[62] R. Schippa. *On the Cauchy problem for higher dimensional Benjamin-Ono and Zakharov-Kuznetsov equations*. *arXiv preprint arXiv:*1903.02027, 2019.

[63] T. Tao. *Global well-posedness of the Benjamin–Ono equation in* $H^1(\mathbb{R})$. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(01):27–49, 2004.

[64] T. Tao. *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*. Number 106. American Mathematical Soc., 2006.

[65] V. Zakharov and E. kuznetsov. *On three dimensional soliton*. *Sov.Phys-JETP Anal.*, 39(2):285–286, 1974.

Índice alfabético

Buen planeamiento local
    Strichartz Localizada, 43
Buen planteamiento local, 26
    Aproximación Bona-Smith , 35
    Buen Planteamiento local en espacios con regularidad mas baja, 41
    Buen planteamiento local, $s > 2$, 26
    Estimativas de energía, 41
    Indices Negativos, 38

Espacios Anisotrópicos, 59
    Buen planteamiento local H^{r_1,r_2}, 61
    Buen planteamiento local $r_1, r_2 > 2$, 59
Espacios anisotrópicos con peso, 65
Espacios anisotrópicos con pesos
    Buen planteamiento local en espacios con peso con regularidad mas baja, 90
    Continuación única, 84
Espacios Bi-periódico, 96
    Strichartz Localizada, 97
    Índices negativos en espacio Bi-periódico, 104

Ondas Solitarias, 106
    Existencia y estabilidad de ondas solitarias, 113