Modelamiento de problemas de radiación/dispersión electromagnética mediante el método de elementos finitos

Julián Andrés Ríos Casas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2020

Modelamiento de problemas de radiación/dispersión electromagnética mediante el método de elementos finitos

Julián Andrés Ríos Casas

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Matemática Aplicada

Director:
Ph.D. Mauricio A. Osorio Lema.

Co-Directora:
Ph.D. Liliana M. Camargo Mazuera.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2020

Agradecimientos

"La constancia es el complemento indispensable de todas las demás virtudes humanas."
Giuseppe Mazzini.

Dedico este trabajo especialmente a mi esposa Lorena Ordóñez, que no solo soportó con una resolución férrea las horas de ausencia en las que me hallé inmerso en este proyecto, sino que me brindó su constante apoyo y me inspiró seguridad para seguir adelante en los momentos donde el rumbo no era claro.

Agradezco enormemente a mi familia por su compañía, apoyo y comprensión incondicional. A mis amigos y compañeros más cercanos, los cuales desde su experiencia personal me han orientado e instando a ser constante cuando el progreso era apenas apreciable. Finalmente agradezco a mis asesores, especialmente a Mauricio Osorio por su colaboración, inagotable paciencia y amistad.

Resumen

En el presente trabajo se estudia el problema de radiación en una cavidad con condiciones de frontera de conductor perfecto e impedancia. Partimos de la ecuaciones de Maxwell en régimen armónico para construir una ecuación diferencial de segundo orden que, junto a las condiciones de frontera mencionadas conforman el problema fuerte. Basados en éste, construimos una formulación variacional cuyo análisis de existencia y unicidad de la solución se lleva a cabo vía alternativa de Fredholm. Posteriormente se deriva una formulación discreta usando los elementos finitos de Nédélec de primer orden, en donde la convergencia de la solución se estudia usando la teoría de operadores colectivamente compactos y finalmente, describimos con detalle la implementación de la formulación discreta usando MATLAB, llevando a cabo análisis de error en las normas $L^2(\Omega)$ y $H(curl;\Omega)$ y estudiamos el orden de convergencia.

Palabras claves: Elementos de Nédélec de primer orden, ecuaciones de Maxwell en régimen armónico, alternativa de Fredholm, teoría de operadores colectivamente compactos, análisis de error, orden de convergencia

Abstract

In this document, the cavity radiation problem under perfect conductor and impedance boundary conditions is studied. We start from time-harmonic Maxwell's equations to construct a second order differential equation that, with the afore menctioned boundary conditions, constitutes the strong problem. Based on this, we construct a variational formulation whose existence and uniqueness analysis of the solution is done via Fredholm's alternative. Later, a discrete formulation is built using the Nédélec's first order finite element, where the convergence of the solution is studied using the collectively compact operators theory and finally, we describe a detailed implementation of the discrete formulation using MATLAB, analyzing the error estimates in the norms $L^2(\Omega)$ and $H(curl;\Omega)$ and studying the convergence rate.

Keywords: Nédélec's first order finite element, time-harmonic Maxwell's equations, Fredholm's alternative, collectivelly compact operator theory, error estimates, convergence rate.

Modeling of electromagnetic radiation/scattering problems using the finite element method

Julián Andrés Ríos Casas

Thesis presented as a partial requirement to qualify for the title of:

MSc. Applied Math

Director:
Ph.D. Mauricio A. Osorio Lema.

Co-Director:
Ph.D. Liliana M. Camargo Mazuera.

National University of Colombia
Science Faculty, Mathematics School
Medellín, Colombia
2020

Contenido

1. Preliminares **3**

1. Conceptos básicos sobre electromagnetismo 4

1.1. Ecuaciones de Maxwell y régimen armónico 4

1.2. Relaciones constitutivas para medios lineales 6

1.3. Condiciones de frontera 7

1.4. Dispersión y condición de radiación 9

1.5. Problema de radiación en una cavidad 12

2. Conceptos básicos sobre análisis funcional 13

2.1. Operadores lineales y problemas variacionales 13

2.2. Espacios de Sobolev 18

2.3. Descomposición de Helmholtz 27

2.4. Transformaciones afines en dominios acotados de $\mathbb{R}^3$ 31

2. Espacios discretos **34**

1. Teoría de convergencia de elementos finitos abstractos 34

2. Nociones sobre elementos finitos 37

2.1. Malla regular y transformaciones afines en tetraedros 38

2.2. Elementos finitos 41

2.3. Conjuntos de polinomios 43

2.4. Elementos finitos *curl* conformes 47

2.4.1. Elementos de Nédélec de primer orden 52
2.5. Elementos finitos H^1 conformes 54
2.6. Espacio frontera 56

3. Formulación variacional y discreta **58**
1. Formulación variacional 58
1.1. Propiedades del espacio solución X 61
1.2. Existencia de la solución 64
1.3. Unicidad de la solución 67
2. Formulación discreta 71
2.1. Análisis de error vía compacidad colectiva 72

4. Implementación numérica **83**
1. Construcción del sistema matricial 83
2. Discretización y descripción geométrica del dominio 84
2.1. Estructura de datos 85
2.1.1. Enumeración de bordes 86
2.1.2. Orientación local y global de bordes 89
2.1.3. Elementos en la frontera 91
2.1.4. Funciones de coordenadas baricéntricas λ 95
3. Análisis algebraico 96
3.1. Matriz de rigidez A_k 98
3.2. Matriz de rigidez B_k 100
3.3. Vector de carga $\boldsymbol{b}_k$ 102
3.4. Matriz de rigidez C_k 102
3.5. Vector de carga $\boldsymbol{d}_k$ 105
4. Solución del problema 105
5. Análisis de error y orden de convergencia 109

5. Ejemplos numéricos **113**

1. Solución regular 113

2. Solución de baja regularidad 116

Conclusiones **119**

Trabajo Futuro **120**

Lista de Figuras

1.1. Interfaz S que separa dos medios diferentes. 8
1.2. Agente dispersor y frontera auxiliar Σ en dos dimensiones. 11
1.3. Geometría de una cavidad particular en $\mathbb{R}^3$. 12

2.1. Mapeo F_K. 40
2.2. Funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$. 54
2.3. Diagrama de de-Rham. 56

3.1. Geometría de los dominios Ω_p y Ω_q. 69

4.1. Aristas y vectores en el tetraedro. 89
4.2. Problema de la convención de orden. 90
4.3. Orientación global. 91
4.4. Orientación local VS. Orientación global. 93
4.5. Cálculo del vector normal exterior. 94

5.1. Análisis de convergencia para la solución regular. 115
5.2. Análisis de convergencia para la solución de baja regularidad. 117

Lista de Tablas

4.1. Construcción de las aristas. 87
4.2. Construcción de las aristas en la frontera. 92

5.1. Resultados numéricos para la solución regular. 115
5.2. Resultados numéricos para la solución de baja regularidad. 117

Introducción

La teoría de radiación de ondas electromagnéticas es una de las aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell, la cual estudia la propagación de las ondas a través del espacio y su interacción con los cuerpos presentes que en éste yacen [1].

El medio de propagación puede ser tan simple como el vacío o tan complejo como uno inhomogéneo anisotrópico, de modo que las propiedades del medio como la conductividad, permitividad y permeabilidad pueden ser descritas por funciones escalares o por tensores según su complejidad. Este hecho, sumado a las posibles asimetrías del espacio, limita significativamente la cantidad de problemas que pueden ser estudiados estrictamente de forma analítica y resulta necesario el uso de métodos numéricos para estudiar tales problemas.

El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) y el método de elementos finitos (FEM) han sido ampliamente utilizados para abordar numéricamente problemas de teoría electromagnética en general [2]. El uso de estos métodos data de los años 60's. En particular, Yee [3] propuso en 1966 un esquema en diferencias finitas para resolver un problema con condición de frontera en un medio isotrópico. Desde entonces otros métodos como el de Galerkin discontinuo, elementos de Nédélec [4], análisis isogeométrico y elementos virtuales han sido utilizados [5].

En la actualidad, existen diversos programas de software que permiten implementar elementos finitos de Nédélec de primer orden. Olm, Badia y Martín usan FEMPAR para implementar elementos finitos de Nédélec de orden arbitrario [5]. Por otro lado, Bahriawati y Carstensen usaron MATLAB para implementar los elementos finitos de Raviart-Thomas, ideados para resolver numéricamente la ecuación de Laplace. Sin embargo no se encuentra suficiente documentación sobre una implementación detallada en MATLAB de los elementos finitos de Nédélec aplicado a problemas de radiación electromagnética.

En el presente trabajo, nos proponemos desarrollar un estudio riguroso de las ecuaciones de Maxwell y una implementación detallada de los elementos finitos de Nédélec de primer orden (en MATLAB) aplicados a un problema de radiación en una cavidad. Para este fin, empezaremos por reunir todos los ingredientes disponibles en la literatura para poder estudiar las ecuaciones de Maxwell en la mencionada aplicación. Si bien los resultados son clásicos y no constituyen un avance en el estado del arte, acá pretendemos

organizarlos detalladamente, de tal manera que sea claro su uso en la formulación del problema, así como en el análisis de existencia y unicidad de la solución y el orden de convergencia alcanzado por una aproximación discreta. Primero será necesario formular el problema partiendo de las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de frontera apropiadas.

Una vez planteado el problema fuerte, listaremos las herramientas necesarias del análisis real y funcional para establecer una formulación variacional del problema, llevando a cabo un análisis de existencia y unicidad de la solución. Posteriormente construiremos una formulación discreta del problema variacional previo, estudiando la existencia y unicidad de las soluciones con su respectivo análisis de convergencia.

Una vez sustentado teóricamente el uso de elementos de Nédélec de primer orden para el problema de radiación en una cavidad, discutiremos con detalle la implementación numérica del problema llevando a cabo un análisis de error *a priori* y velocidad de convergencia. Por último, validaremos los resultados teóricos por medio de ejemplos numéricos adecuados.

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos este capítulo con un breve repaso sobre teoría electromagnética, en el cual estudiamos las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico, combinadas con las propiedades de medios homogéneos y diferentes condiciones de frontera para modelar el problema de radiación en una cavidad.

Una vez establecido el problema fuerte, proseguimos a exponer las nociones y resultados necesarios del análisis funcional para establecer una formulación débil del problema y garantizar la existencia y unicidad de la solución del mismo. Esta tarea supone principalmente estudiar espacios de Sobolev cuyos elementos tienen *curl* bien definido en el sentido distribucional y combinarlos con la teoría de descomposición de Helmholtz.

Los resultados de este capítulo son enteramente clásicos, por lo que no probaremos muchos de los teoremas que aquí enunciamos, en su lugar citaremos una fuente adecuada cuando sea necesario. La exposición de este capítulo, en orden y contenido, está inspirada en los capítulos preliminares de [6], el cual estudia con más generalidad el uso del método de elementos finitos en diversos problemas de radiación. Cerramos esta nota preliminar introduciendo las siguientes convenciones.

- Los vectores, campos y funciones vectoriales serán denotados en negrita, es decir, escribiremos $\boldsymbol{a}$ en vez de $\overrightarrow{a}$ o $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ en vez de $[L^p(\Omega)]^N$ para algún entero $N \geq 2$. Sin embargo, usaremos la notación convencional cuando resulte conveniente, cómodo o haya lugar a confusión.

- Resumiremos la frase «(método de) elementos finitos» por su acrónimo en inglés FE(M) cuando resulte conveniente hacerlo.

1. Conceptos básicos sobre electromagnetismo

Un campo electromagnético (interacción simultánea de los campos eléctrico y magnético) es creado por una distribución de cargas eléctricas estáticas y en movimiento. La densidad de carga eléctrica estática viene dada por la función escalar ρ y la que se encuentra en movimiento (corriente) está dada por la función vectorial $\boldsymbol{J}$. El campo electromagnético está descrito por las funciones vectoriales $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ las cuales dependen de la posición $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ y del tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. Las funciones $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se denominan intensidad de campo eléctrico y magnético respectivamente, mientras que $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ se llaman desplazamiento eléctrico e inducción magnética en el mismo orden.

1.1. Ecuaciones de Maxwell y régimen armónico

Las ecuaciones de Maxwell (aquí en su forma puntual) relacionan las funciones del campo eléctrico y magnético con las fuentes de carga y corriente en una región dada de $\mathbb{R}^3$ como

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{1.2}$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.4}$$

Las expresiones (1.1) y (1.3) son conocidas como las ecuaciones fundamentales de campo, mientras que las expresiones (1.2) y (1.4) son conocidas como condiciones de *divergencia*. A este sistema de ecuaciones suele añadirse la ecuación de conservación de carga, la cual viene dada por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.5}$$

Suponiendo que las funciones involucradas en el sistema de ecuaciones anterior están como mínimo en C^2, puede mostrarse que las ecuaciones fundamentales de campo y las condiciones de *divergencia* están relacionadas por medio de la conservación de carga. En efecto, si tomamos *divergencia* en (1.3) tenemos

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J},$$

dado que $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$, de la ecuación (1.5) se sigue que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

intercambiando los operadores *divergencia* y derivada concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\rho)=0,$$

como en general, $\boldsymbol{D}$ y ρ son funciones del tiempo, necesariamente $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$. Un análisis similar muestra la relación entre (1.1) y (1.4).

En otras palabras, un problema de radiación puede ser abordado por medio de sus ecuaciones de campo. Si la solución a éste es suficientemente regular, se satisfacen de forma implícita las condiciones de *divergencia*. En otro caso, toda solución a las ecuaciones de campo debe verificar las condiciones de *divergencia* como paso adicional.

Las ecuaciones de campo pueden ser difíciles de manejar debido a que dependen tanto del espacio como del tiempo. Sin embargo, suponer que las fuentes originarias del campo tienen un comportamiento específico puede simplificar la forma de sus ecuaciones.

Si las fuentes de carga que generan el campo electromagnético varían sinusoidalmente en el tiempo (con una frecuencia fija $\omega>0$), decimos que el campo es armónico y las ecuaciones de Maxwell pueden re-escribirse en función de la frecuencia y no del tiempo. A fin de ilustrar cómo, supongamos que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ y $b(\boldsymbol{x},t)$ representan respectivamente cualquier función vectorial y escalar de las ecuaciones de Maxwell y que éstas varían sinusoidalmente en el tiempo, entonces éstas pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)&=\Re(e^{-i\omega t}\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})),\\ b(\boldsymbol{x},t)&=\Re(e^{-i\omega t}\hat{b}(\boldsymbol{x})),\end{aligned}$$

donde $\Re(\,\cdot\,)$ es el operador que toma la parte real de la expresión en paréntesis y $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})$ es una función vectorial compleja dependiente solamente de la posición, al igual que la función escalar $\hat{b}(\boldsymbol{x})$. Usando la linealidad del operador *curl* y derivada, las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse de forma equivalente como

$$-i\omega\hat{\boldsymbol{B}}+\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}=0, \tag{1.6}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{D}}=\hat{\rho}, \tag{1.7}$$

$$i\omega\hat{\boldsymbol{D}}+\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{J}}, \tag{1.8}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{B}}=0, \tag{1.9}$$

análogamente, la ley de conservación queda escrita como

$$i\omega\hat{\rho}=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{J}}. \tag{1.10}$$

Bajo esta suposición y otras simplificaciones relacionadas con el medio de propagación del campo, podremos describir el problema de radiación con una ecuación diferencial en vez del cuarteto de Maxwell, como veremos más adelante.

1.2. Relaciones constitutivas para medios lineales

Existen dos relaciones constitutivas que relacionan los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, las cuales vienen asociadas al medio con el que interactúan los campos y son independientes del comportamiento de las fuentes que lo generan. Estas establecen que

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{1.12}$$

donde ε y μ representan respectivamente la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, las cuales son propiedades intrínsecas de dicho medio. Se pueden identificar tres casos: el vacío o espacio libre; medio no homogéneo isotrópico y anisotrópico. El vacío (o el espacio libre cuando los campos no son suficientemente fuertes como para generar disrupción eléctrica), se considera un medio homogéneo y tanto permitividad como permeabilidad son constantes que denotamos por ε_0 y μ_0, las cuales satisfacen que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

En un medio isotrópico no homogéneo (caso más común), permitividad y permeabilidad pueden variar con la posición pero no con la dirección de incidencia del campo, en este caso ε y μ son funciones positivas acotadas del espacio. Por último, en un medio anisotrópico no homogéneo, dichas propiedades pueden variar con la posición y adicionalmente con la dirección en que incide el campo, en este caso ε y μ representan matrices de funciones del espacio, definidas positivas de orden 3×3.

Es posible que el medio de interacción tenga la facultad de conducir corriente. En este caso, decimos que el medio es conductivo y surge una relación constitutiva adicional conocida como la *ley de Ohm*, que relaciona el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y la densidad corriente $\boldsymbol{J}$ circulante de la forma

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_a,$$

donde σ es la conductividad del medio y $\boldsymbol{J}_a$ es la densidad de corriente aplicada al medio (la fuente que origina al campo electromagnético). Si el medio es conductivo, diremos que $\sigma > 0$, en otro caso $\sigma = 0$ y el medio se denomina dieléctrico (por ejemplo el vacío). En un medio homogéneo la conductividad será constante mientras que en uno inhomogéneo isotrópico, ésta será una función no negativa del espacio no necesariamente acotada (en un conductor perfecto $\sigma = \infty$). Por último, en un medio anisotrópico σ representa una matriz de funciones del espacio, simétrica, semidefinida positiva de orden 3×3.

Definidas las relaciones constitutivas y bajo la suposición de régimen armónico, podemos re-escribir las ecuaciones de Maxwell (después de varias simplificaciones) como un

sistema de primer orden dado por

$$-i\kappa\mu_r \boldsymbol{H} + \nabla\times\boldsymbol{E} = 0, \tag{1.13}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{E}) = -\frac{1}{\kappa^2}\nabla\cdot\boldsymbol{F}, \tag{1.14}$$

$$i\kappa\varepsilon_r\boldsymbol{E} + \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{i\kappa}\boldsymbol{F}, \tag{1.15}$$

$$\nabla\cdot(\mu_r\boldsymbol{H}) = 0, \tag{1.16}$$

donde hemos usado los conceptos de permitividad y permeabilidad relativa, denotados respectivamente por ε_r, μ_r y definidos por

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right), \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Cabe anotar que $\varepsilon_r = 1$ y $\mu_r = 1$ en el vacío. Adicionalmente los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ han sido re-definidos como

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon_0^{1/2}\hat{\boldsymbol{E}}, \qquad \boldsymbol{H} = \mu_0^{1/2}\hat{\boldsymbol{H}},$$

por último, la función vectorial $\boldsymbol{F}$ y el parámetro κ (número de onda) vienen dados por

$$\boldsymbol{F} = i\kappa\mu_0^{1/2}\hat{\boldsymbol{J}}_a, \qquad \kappa = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Aquí, aunque es posible derivar esquemas numéricos para las ecuaciones (1.13) y (1.15), es usual eliminar una de las variables en (1.13) por medio de las condiciones de *divergencia*

$$\nabla\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}) - \kappa^2\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}, \tag{1.17}$$

que satisface la condición de *divergencia* (1.14).

A este punto, podemos estudiar problemas de radiación en medios que, pueden ser tan simples como el vacío o tan complejos como los anisotrópicos no homogéneos, siempre que las propiedades del medio sean continuas. Si este no es el caso, la ecuación (1.17) no puede modelar este problema por sí sola y consideraciones adicionales deberán hacerse.

1.3. Condiciones de frontera

Las ecuaciones (1.13) y (1.17) no representan una descripción completa del campo electromagnético ya que dichas ecuaciones no se satisfacen en una frontera entre diferentes medios donde permitividad o permeabilidad son discontinuas (por ejemplo la interfaz tierra - aire).

Consideremos un medio consistente de dos regiones que presentan propiedades eléctricas y magnéticas diferentes (digamos $\varepsilon_{r,1}$, $\varepsilon_{r,2}$ y $\mu_{r,1}$, $\mu_{r,2}$), separadas por una superficie S.

Supongamos que sobre toda S se puede definir un vector $\boldsymbol{\nu}$ normal unitario a ésta. Las condiciones a satisfacer por el campo eléctrico y magnético sobre S están relacionados con la continuidad de sus componentes normales y tangenciales en ésta.

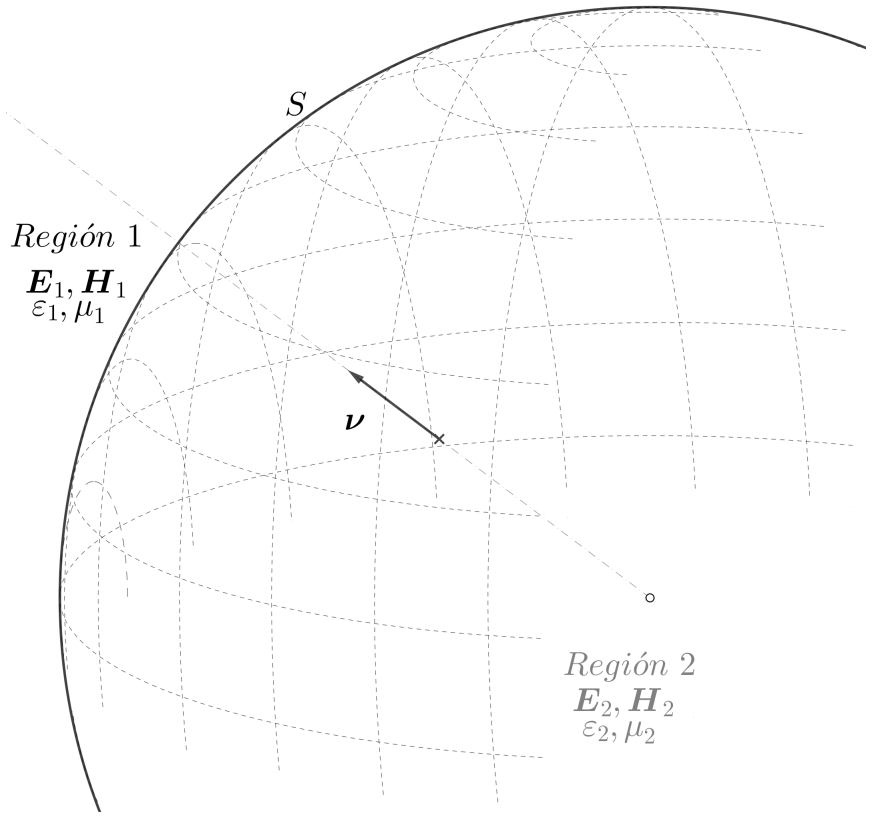

Figura 1.1: Interfaz S que separa dos medios diferentes.

Para el campo eléctrico tenemos que su componente tangencial debe ser continua a través de S o bien, que $\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{E}$ lo sea, de modo que si $\boldsymbol{E}_1$ es el valor limite del campo eléctrico cuando se acerca a S desde la región 1 y análogamente definimos $\boldsymbol{E}_2$, se sigue

$$\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \quad \text{en } S.$$

La componente normal por otro lado, es discontinua en presencia de carga superficial ρ_S sobre S

$$\boldsymbol{\nu}\cdot(\varepsilon_{r,1}\boldsymbol{E}_1 - \varepsilon_{r,2}\boldsymbol{E}_2) = \rho_S,$$

En el caso del campo magnético, la componente tangencial es discontinua en presencia de corrientes superficiales $\boldsymbol{J}_S$

$$\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S,$$

mientras que la componente normal de éste resulta ser continua en S

$$\boldsymbol{\nu}\cdot(\mu_{r,1}\boldsymbol{H}_1 - \mu_{r,2}\boldsymbol{H}_2) = 0.$$

Cabe anotar que la ausencia de carga superficial en S no garantiza continuidad de la componente normal del campo eléctrico sobre S, ya que no necesariamente $\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{r,2}$. De igual forma sucede con la componente tangencial del campo magnético y la permeabilidad relativa.

Hasta el momento, no se ha discutido la conductividad de la interfaz S. De esta propiedad se derivan dos condiciones de frontera conocidas como conductor perfecto e impedancia.

En el caso que un lado de S es un conductor perfecto ($\sigma \to \infty$), de la ley de Ohm se sigue que si la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ permanece acotada, necesariamente $\boldsymbol{E} \to 0$, es decir, en un conductor perfecto el campo eléctrico se anula.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que el lado de S en la región 2 es un conductor perfecto, en consecuencia $\boldsymbol{E}_2 = 0$ y por continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico se tiene

$$\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{E}_1 = 0.$$

El caso en que el conductor no es perfecto deriva la condición de impedancia. Supongamos sin pérdida de generalidad que el conductor está en la región 2, entonces

$$\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{H}_1 - \lambda(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{E}_1)\times\boldsymbol{\nu} = 0, \tag{1.18}$$

donde la impedancia λ es una función positiva de la posición en S.

Esta teoría no solo permite modelar problemas con medios discontinuos, sino que también es posible modelar problemas del tipo *campo-objeto*, en los cuales se busca estudiar la interacción entre el campo y un *agente dispersor*, que estará modelado como una discontinuidad en el medio. Sin embargo, una última consideración deberá hacerse para que estos problemas queden bien puestos.

1.4. Dispersión y condición de radiación

En esta sección estudiaremos primero la interacción entre el campo y un objeto (agente dispersor) acotado, conductor perfecto que ocupa un volumen D, rodeado en general por un medio no homogéneo ($\varepsilon_r \neq 0$ o $\mu_r \neq 0$), como se ilustra en la figura 1.2. El campo ocupa la zona $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, ya que la condición de conductor perfecto del objeto lo hace impenetrable. Esto lo describimos por

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \partial D := \Gamma,$$

con $\boldsymbol{\nu}$ un vector normal unitario exterior a D. Además suponemos que suficientemente lejos del cuerpo dispersor, no existe más que vacío, es decir, para algún radio r, $\varepsilon_r(\boldsymbol{x}) = 1$, $\mu_r(\boldsymbol{x}) = 1$ cuando $|\boldsymbol{x}| \geq r$.

El campo total $\boldsymbol{E}$ viene dado por

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}, \text{ en } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

donde $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ es el campo incidente (conocido), el cual es generado por una fuente de corriente descrita por una función vectorial $\boldsymbol{F}$ y satisface

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} - \kappa^2 \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{F} \quad \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

Un ejemplo típico de campo incidente es la *onda plana*, dada por

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{p} e^{i\kappa \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{d}},$$

donde $i = \sqrt{-1}$, y $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ son tales que $\boldsymbol{p} \neq 0$, $|\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{p}| = 1$, $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ y representan respectivamente los vectores de dirección de propagación y polarización de la onda. Una característica importante de la *onda plana* es que $\boldsymbol{F} = 0$.

Por otro lado $\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}$ denota el campo dispersado, el cual es desconocido y resulta de la interacción entre el campo incidente y el agente dispersor. Por esta razón, los problemas de radiación son también conocidos como de dispersión. A fin de que el campo dispersado sea determinado de forma única, éste debe satisfacer la condición de radiación de Silver-Müller dada por

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} (\nabla \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}) \times \boldsymbol{x} - i\kappa |\boldsymbol{x}| \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}_T = 0,$$

uniformemente en $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$, donde $\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}_T = (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}) \times \hat{\boldsymbol{x}}$.

El hecho de que el problema esté puesto en el infinito supone un inconveniente insalvable en el uso de métodos numéricos como los elementos finitos, ya que en principio requieren que el dominio del problema sea acotado. Una forma de evadir este inconveniente es construir una frontera artificial Σ suficientemente lejos del agente dispersor (donde suponemos que el medio es vacío) e imponer allí una condición de frontera inspirada en la condición de radiación de Silver-Müller, como se muestra

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa \boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}_T = 0 \text{ en } \Sigma, \tag{1.19}$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es un vector normal unitario exterior a Σ. En esta aproximación, el dominio ocupado por el campo electromagnético (digamos Ω), es el espacio entre Γ y Σ, en el cual se deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

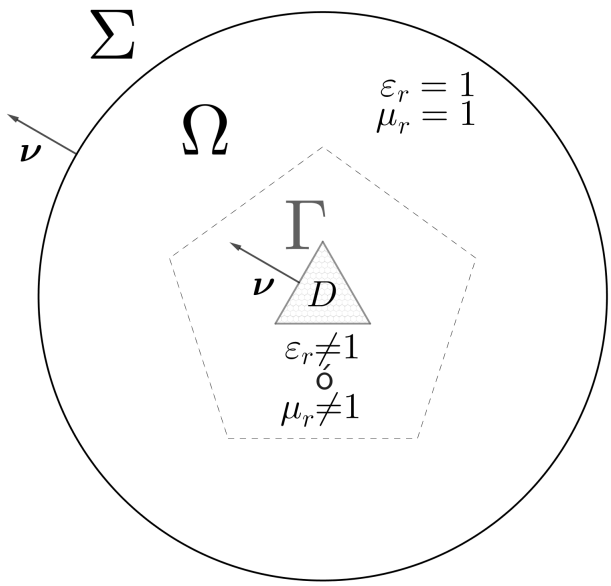

Figura 1.2: Agente dispersor y frontera auxiliar Σ en dos dimensiones.

Ahora, provisto que el campo dispersado puede expresarse como

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}},$$

de (1.19) se sigue que

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa \boldsymbol{E}_T = (\nabla \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}_T \quad \text{en } \Sigma,$$

donde $\boldsymbol{E}_T = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{E}\big|_{\Sigma}) \times \boldsymbol{\nu}$. Provisto que $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ es una función dada, la parte derecha de la igualdad puede escribirse como una función vectorial $\boldsymbol{g}$ conocida. Por otro lado, la parte izquierda de la igualdad es semejante a la condición de impedancia (1.18) para un valor de λ particular, por lo que concluimos que (1.19) es una condición de impedancia derivada de la condición de radiación de Silver-Müller y se puede re-escribir como

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{g} \quad \text{en } \Sigma,$$

donde $\boldsymbol{g}$ es una función dada.

Naturalmente, usar la frontera artificial Σ arroja resultados que difieren en alguna medida de la solución real. La calidad de la aproximación dependerá de qué tan lejos se asuma dicha frontera.

Sin embargo, esta condición es apropiada si nuestro problema consiste en estudiar la dispersión del campo en una cavidad (dominio finito), donde por fuera de esta, damos por sentado que el campo es inexistente.

1.5. Problema de radiación en una cavidad

Cerramos esta sección formulando el problema de radiación/dispersión en una cavidad (en el vacío o compuesta por un material homogéneo isotrópico) en régimen armónico. Suponga que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado con dos fronteras conexas disjuntas Γ y Σ. Nos proponemos hallar el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ correspondiente a una densidad de corriente $\boldsymbol{F}$ de baja frecuencia ($1 \leq \kappa \leq 5$ es un rango dentro de este espectro (Monk [6])), que satisface la ecuación de campo (1.17) sujeta a las condiciones de conductor perfecto en Γ y de impedancia en Σ, como se muestra

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) - \kappa^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} \quad \text{en } \Omega, \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{1.21}$$

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa\lambda \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{g} \quad \text{sobre } \Sigma, \tag{1.22}$$

donde $\boldsymbol{g}$ es una función dada y Ω es el espacio entre las fronteras Γ y Σ.

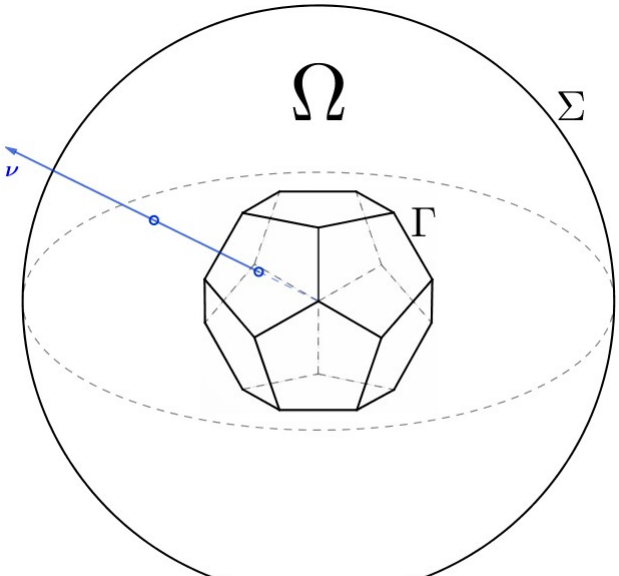

Figura 1.3: Geometría de una cavidad particular en $\mathbb{R}^3$.

El agente dispersor es el dominio encerrado por la frontera Γ, el cual se supone impenetrable por el campo. Es posible estudiar el caso en que no existe un agente dispersor en la cavidad ($\Gamma \equiv \emptyset$), con lo cual el problema se reduce a encontrar $\boldsymbol{E}$ tal que

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) - \kappa^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} \quad \text{en } \Omega, \tag{1.23}$$

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa\lambda \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{g} \quad \text{sobre } \Sigma, \tag{1.24}$$

lo cual representa un problema enteramente de radiación, donde el campo incidente $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ coincide con el campo radiado $\boldsymbol{E}$.

El camino trazado hasta aquí sugiere el rumbo a seguir. Debemos estudiar los espacios funcionales apropiados en los cuales están bien definidos los operadores diferenciales involucrados en las ecuaciones (1.20), (1.21), (1.22) y sus propiedades.

2. Conceptos básicos sobre análisis funcional

Continuamos por enunciar algunas definiciones y resultados clásicos del análisis funcional, en especial sobre problemas variacionales y espacios de Sobolev. Suponemos que ciertas nociones elementales que aquí listamos son conocidas y por ende no proveeremos mayor detalle de sus pruebas. El orden de esta exposición sigue en alguna medida el estilo de Monk [6] y su contenido fue tomado principalmente de Gatica [7], Kress [8], McLean [9] y Girault - Raviart [10].

2.1. Operadores lineales y problemas variacionales

Antes de entrar en materia, listaremos de forma resumida las definiciones y propiedades principales sobre operadores lineales y formas sesquilineales. Posteriormente discutimos las teorías de Lax-Milgram, Babuška-Brezzi y particularmente importante, la alternativa de Fredholm para el análisis de existencia y unicidad de la solución a problemas variacionales.

Sin más preámbulo, sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert dotado del producto interno $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{X}}$ y elemento nulo $\theta_{\mathcal{X}}$. Sea $\mathcal{Y}$ otro espacio de Hilbert definido de forma análoga.

Definición 1.1. *Una aplicación $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ que asigna a cada $u \in \mathcal{X}$ un $v \in \mathcal{Y}$ se llama operador (ó transformación) lineal si*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u, v \in \mathcal{X}.$$

Definición 1.2. *El operador $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$*

- *es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|A\phi\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|\phi\|_{\mathcal{X}} \quad \forall \phi \in \mathcal{X};$$

- *tiene rango o recorrido definido por*

$$R(A) = \{y \in \mathcal{Y} : \exists x \in \mathcal{X} \mid A(x) = y\};$$

- *tiene espacio nulo o* kernel *definido como*

$$N(A) = \{x \in \mathcal{X} : A(x) = 0\};$$

- *se dice continuo en* $x \in \mathcal{X}$ *si para toda sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{X}$ *que converge a* x*, se tiene que* $\{A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $A(x)$ *en* $\mathcal{Y}$*, i.e.* $\|A(x_n) - A(x)\|_{\mathcal{Y}} \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Definición 1.3. *El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de* $\mathcal{X}$ *en* $\mathcal{Y}$ *se designa por* $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*. La aplicación* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ *definida por*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \|A\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} = \sup_{x\in\mathcal{X};\ x\neq\theta_{\mathcal{X}}} \frac{\|A(x)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \sup_{x\in\mathcal{X};\ \|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|A(x)\|_{\mathcal{Y}} \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

constituye una norma sobre $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*.*

Es fácil ver que el operador A es continuo si y sólo si es acotado, en consecuencia todo operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es continuo.

Definición 1.4. *El operador* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *se dice compacto si mapea conjuntos acotados de* $\mathcal{X}$ *en otros relativamente compactos de* $\mathcal{Y}$ *(i.e. conjuntos cuya clausura es compacta).*

Este último concepto es particularmente importante, ya que no solo nos permite definir nociones más complejas como la de inyección compacta en espacios de Sobolev (como veremos más adelante), sino que es un requisito para el uso de la alternativa de Fredholm.

Definición 1.5. *El mapeo* $a : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ *se dice una forma sesquilineal si*

$$a(\alpha u + \beta v, \phi) = \alpha a(u, \phi) + \beta a(v, \phi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u, v \in \mathcal{X},\ \phi \in \mathcal{Y},$$

$$a(u, \alpha\phi + \beta\psi) = \overline{\alpha} a(u, \phi) + \overline{\beta} a(u, \psi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u \in \mathcal{X},\ \phi, \psi \in \mathcal{Y}.$$

Definición 1.6. *La forma sesquilineal* $a : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ *se dice acotada si existe una constante* $C > 0$*, independiente de* $u \in \mathcal{X}$ *y* $\phi \in \mathcal{Y}$ *tal que*

$$|a(u, \phi)| \leq C\|u\|_{\mathcal{X}}\|\phi\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{X},\ \phi \in \mathcal{Y}.$$

Definición 1.7. *La forma sesquilineal* $a : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ *se dice coerciva si existe una constante* $\alpha > 0$ *independiente de* $u \in \mathcal{X}$ *tal que*

$$|a(u, u)| \geq \alpha\|u\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{X}.$$

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{X}$ y la forma sesquilineal a en $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$, consideramos ahora el problema variacional de hallar $u \in \mathcal{X}$ tal que

$$a(u, \phi) = f(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{X}, \tag{1.25}$$

con f un funcional dado. El siguiente lema enuncia bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución a esta clase de problemas.

Lema 1.8. (Lema de Lax-Milgram.) *Sea $a : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal acotada y coerciva. Entonces para cada funcional $f \in \mathcal{X}'$ existe una única solución $u \in \mathcal{X}$ al problema variacional* (1.25)*, además*

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{\mathcal{X}'},$$

donde C y α son las constantes de acotamiento y coercividad respectivamente.

Un caso más general, en el que la forma sesquilineal a es una aplicación en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ requiere consideraciones adicionales.

Teorema 1.9. (Lema generalizado de Lax-Milgram) *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ espacios de Hilbert y sea a una forma sesquilineal acotada en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ con las siguientes propiedades:*

1. *(Condición* ínf$-$sup*) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{u\in\mathcal{X},\|u\|_{\mathcal{X}}=1} \sup_{v\in\mathcal{Y},\|v\|_{\mathcal{Y}}\leq 1} |a(u,v)| \geq \alpha.$$

2. *Para cada $v \in \mathcal{Y}, v \neq \theta_{\mathcal{Y}}$*

$$\sup_{u\in\mathcal{X}} |a(u,v)| > 0.$$

Entonces para cada $g \in \mathcal{Y}'$, existe una única $u \in \mathcal{X}$ tal que

$$a(u,\phi) = g(\phi) \quad \forall\phi \in \mathcal{Y},$$

además

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{\alpha}\|g\|_{\mathcal{Y}'},$$

donde C y α son respectivamente las constantes de acotamiento y condición ínf$-$sup*.*

La condición ínf$-$sup es una forma generalizada del concepto de coercividad. Una variación de ésta es usada en los problemas variacionales mixtos, donde es mejor conocida como condición de Babuška-Brezzi. Estos problemas son tales que, dados los espacios de Hilbert $\mathcal{X}, \mathcal{S}$ y las formas sesquilineales a en $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ y b en $\mathcal{X}\times\mathcal{S}$, buscamos $u \in \mathcal{X}$ y $p \in \mathcal{S}$ tal que

$$a(u,\phi) + b(\phi,p) = f(\phi) \quad \forall\phi \in \mathcal{X}, \tag{1.26}$$

$$b(u,\xi) = g(\xi) \quad \forall\xi \in \mathcal{S}. \tag{1.27}$$

con f y g funcionales dados.

El sistema de ecuaciones anterior se denomina problema variacional mixto y al igual que el problema propuesto en (1.25), ciertas condiciones deben ser garantizadas para garantizar existencia y unicidad de la solución. Que las formas sesquilineales sean acotadas implica la existencia una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |a(u,\phi)| &\leq C\|u\|_{\mathcal{X}}\|\phi\|_{\mathcal{X}} \quad \forall u,\phi \in \mathcal{X}, \\ |b(u,\xi)| &\leq C\|u\|_{\mathcal{X}}\|\xi\|_{\mathcal{S}} \quad \forall u \in \mathcal{X}, \xi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Esta teoría requiere también que la forma sesquilineal a sea coerciva pero no en todo $\mathcal{X}$. Para aclarar este hecho definamos el conjunto $\mathcal{Z}$ como

$$\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{X} \mid b(u,\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{S}\}. \tag{1.28}$$

Definición 1.10. *La forma sesquilineal a se dice $\mathcal{Z}$-coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{Z},$$

donde α es independiente de u.

Adicionalmente imponemos sobre la forma sesquilineal b la mencionada condición de Babuška-Brezzi.

Definición 1.11. *La forma sesquilineal b satisface la condición de Babuška-Brezzi si existe una constante $\beta > 0$ tal que, para todo $p \in \mathcal{S}$,*

$$\sup_{v \in \mathcal{X}} \frac{|b(v,p)|}{\|v\|_{\mathcal{X}}} \geq \beta\|p\|_{\mathcal{S}}, \tag{1.29}$$

donde β es independiente de p.

Con estas condiciones y el Lema generalizado de Lax-Milgram reunimos requisitos suficientes para garantizar existencia y unicidad de la solución del problema variacional mixto expuesto.

Teorema 1.12. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{S}$ espacios de Hilbert y sean $a : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ y $b : \mathcal{X}\times\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ formas sesquilineales acotadas que satisfacen $\mathcal{Z}$-coercividad y condición de Babuška-Brezzi respectivamente. Bajo el supuesto que $f \in \mathcal{X}'$ y $g \in \mathcal{S}'$, existe una única solución $(u,p) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X}$ al sistema de ecuaciones descrito por (1.26) y (1.27), además*

$$\|u\|_{\mathcal{X}} + \|p\|_{\mathcal{S}} \leq C(\|f\|_{\mathcal{X}'} + \|g\|_{\mathcal{S}'})$$

Cerramos esta sección discutiendo la alternativa de Fredholm, la cual provee condiciones suficientes bajo las cuales determinada ecuación en operadores tiene solución única. Claramente esta teoría no se trata de resolver un problema variacional, sin embargo la utilidad de ésta radica en que ciertos problemas variacionales, con algunos artilugios

de por medio, pueden llevarse a una ecuación en operadores donde la alternativa de Fredholm es aplicable. Desde luego, nuestro problema de estudio no es la excepción a este caso, lo cual motiva la discusión sobre esta teoría.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{F} \in \mathcal{X}$, queremos encontrar a $u \in \mathcal{X}$ que satisface la ecuación en operadores

$$(I + A)u = \mathcal{F},$$

donde I es el operador identidad y $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es lineal y acotado. Es decir, debemos proveer condiciones bajo las cuales el operador $(I+A)^{-1}$ existe y es acotado. El siguiente teorema enuncia bajo qué condiciones tal operador existe.

Teorema 1.13. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operador lineal y acotado con $\|A\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} < 1$. Entonces $I + A$ tiene una inversa acotada dada por la serie de Neumann*

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$

además

$$\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}}.$$

En nuestro contexto, este teorema es aplicable siempre que el problema de radiación sea en baja frecuencia. Los problemas de alta frecuencia requieren mas restricciones sobre el operador A.

Teorema 1.14. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert y $B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operador lineal y acotado. Suponga que $B = I + A$, donde I es el operador identidad y A es un operador compacto, entonces se da uno de los siguientes casos:*

1. *La ecuación $Bu = 0$ tiene solo solución trivial en $\mathcal{X}$. En este caso, para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{X}$, la ecuación $Bu = \mathcal{F}$ tiene solución única dependiendo continuamente de $\mathcal{F}$.*

2. *La ecuación $Bu = 0$ tiene exactamente p soluciones linealmente independientes para algún entero $p > 0$.*

Estos resultados son suficientes para estudiar la existencia y unicidad de una formulación débil de nuestro problema. Veremos en el Capítulo 2 que cada una de estas teorías tiene asociada un análogo discreto, el cual usaremos cuando nos ocupemos de la formulación discreta del problema.

2.2. Espacios de Sobolev

En este apartado recogemos apenas los elementos necesarios para definir una clase particular de espacios de Sobolev que son de nuestro interés: aquellos espacios de funciones con *curl* bien definido en sentido distribucional.

Empezamos por introducir algunos espacios de funciones estándar.

Definición 1.15. *Sea Ω un dominio abierto de $\mathbb{R}^N$ con $N = 1, 2, 3$. Definimos*

- *$C^k(\Omega)$: el conjunto de funciones k veces continuamente diferenciables en Ω;*
- *$C_0^k(\Omega)$: el conjunto de funciones en $C^k(\Omega)$ que tienen soporte compacto en Ω;*
- *$L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$: el conjunto de funciones que son p-integrables en Ω, es decir*

$$\phi \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega |\phi|^p < \infty.$$

Al conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ se le denomina como *espacio de funciones test* en Ω y es también denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, usaremos una u otra notación según sea conveniente. Partiendo de que el concepto de distribución es conocido, denotaremos al espacio de todas las distribuciones sobre Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Las funciones localmente integrables constituyen los ejemplos más simples de distribuciones, de modo que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, la distribución inducida y denotada nuevamente por u se define como

$$u(\phi) = (u, \phi) = \int_\Omega u\phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde se puede probar fácilmente que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 1.16. *Un multi-índice es una n-tupla $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ donde cada α_i es un entero no negativo. El orden de la n-tupla se define como $|\boldsymbol{\alpha}|_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función $u \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$, denotamos la derivada de orden $|\boldsymbol{\alpha}|_1$ de u como*

$$\frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} := \frac{\partial^{|\alpha|_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}\ \cdots\ \partial x_n^{\alpha_n}},$$

también denotada simplemente como $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u$.

Definición 1.17. *Sean $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\boldsymbol{\alpha}$ un multi-índice. Definimos la derivada α-ésima de la distribución ϕ como el funcional sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que satisface*

$$\left(\frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}, \psi\right) = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|_1} \left(\phi, \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}\right) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

No es difícil ver que $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, la derivada de una distribución también lo es. Definido esto, pasamos al tema principal de esta sección.

Los espacios fundamentales de Sobolev están denotados por $W^{s,p}(\Omega)$ donde $s \in \mathbb{Z}_+$ y $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Estos vienen definidos como

$$W^{s,p}(\Omega) = \{\phi \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha \phi \in L^p(\Omega) \quad \forall |\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq s\}.$$

El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ está equipado con la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ definida por

$$\|\phi\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|_1 \leq s} \int_\Omega |\partial^\alpha \phi(\boldsymbol{x})|^p \right)^{1/p},$$

la seminorma correspondiente viene dada por

$$|\phi|_{\mathrm{W}^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|_1 = s} \int_\Omega |\partial^\alpha \phi(\boldsymbol{x})|^p \right)^{1/p}.$$

En el caso particular que Ω es un dominio Lipschitz (*i.e.* que tiene frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua), los espacios $W^{s,2}(\Omega)$ se escriben también como $H^s(\Omega)$ con

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \equiv \|u\|_{W^{s,2}(\Omega)}.$$

La definición de frontera Lipschitz continua es sumamente técnica. En nuestro análisis usaremos este concepto como sinónimo de que la frontera $\partial\Omega$ tiene vector normal exterior unitario $\boldsymbol{\nu}$ bien definido casi en todas partes [11]. Así que no ahondaremos más en explicar esta noción aunque si enunciaremos algunos resultados importantes que se derivan de ésta.

Teorema 1.18. *Sea Ω un dominio acotado Lipschitz continuo en $\mathbb{R}^N$, entonces*

1. *$C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{s,p}$ para $s \in \mathbb{Z}_+$ y $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$.*
2. (Teorema de Extensión de Cálderon). *Si $s \geq 1$ y $1 < p < \infty$, entonces existe un operador extensión Π lineal y continuo de $W^{s,p}(\Omega)$ a $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ con la propiedad que*

   $$(\Pi u)|_\Omega = u \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega),$$

   además existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

   $$\|\Pi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega).$$

3. *$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega),\ s \in \mathbb{Z}_+$, con normas equivalentes.*

Del Teorema de extensión de Cálderon se sigue que si Π es un operador lineal continuo, éste es acotado y por tanto existe una constante C independiente de u tal que

$$\|\Pi u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega).$$

En el caso particular en el que $s = 1$, tenemos el siguiente resultado importante denominado como *desigualdad de Poincaré*, de la cual presentamos una versión generalizada tomada de [12].

Lema 1.19. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left|\int_{\partial\Omega} u\, dA\right|\right).$$

Decimos que $W^{s,p}(\Omega)$ se inyecta en un espacio X y escribimos $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow X$ si $W^{s,p}(\Omega)$ es un subconjunto de X y el mapeo identidad I de $W^{s,p}(\Omega)$ a X es continuo, equivalente a decir que existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|Iu\|_X \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega).$$

Teorema 1.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera Lipschitz continua y suponga que m, j son enteros no negativos y $1 \leq l \leq N$. Sea $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces las siguientes inyecciones se satisfacen:*

1. *Suponga que $mp < N$ y $N - mp < l \leq N$. Entonces*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^l), \quad p \leq q \leq lp/(N - mp).$$
2. *Suponga que $mp = N$, entonces para $1 \leq l \leq N$ y $p \leq q < \infty$ se tiene*
$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^l).$$
3. *Suponga que $mp > N \geq (m-1)p$. Entonces*
$$W^{j+m,p(\Omega)} \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

donde Ω^l representa la intersección entre Ω y un hiperplano l-dimensional.

En el caso particular en que el operador de inyección I es compacto, se tienen los siguientes resultados.

Teorema 1.21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado y sea Ω_0 cualquier subdominio de Ω (permitiendo $\Omega_0 = \Omega$). Sea Ω_0^l la intersección de Ω_0 con un hiperplano l-dimensional en $\mathbb{R}^N$. Sean j, m enteros con $m \geq 1$ y $j \geq 0$ y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$. Si $mp \leq N$, entonces*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^l) \quad 0 < N - mp < l \leq N \text{ y } 1 \leq q < lp/(N - mp),$$

de forma compacta.

El caso especial en el que $m = 1, p = 2, j = 0, l = N$ y $\Omega_0 = \Omega$, tenemos para $N = 2, 3$ que

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{0,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < 6,$$

si elegimos $q = 2$ se tiene que $H^1(\Omega)$ se inyecta de forma compacta en $L^2(\Omega)$.

Las funciones en los espacios de Sobolev definidos hasta ahora no satisfacen ninguna condición de frontera particular, definimos entonces el espacio de Sobolev cuyas funciones satisfacen la condición de frontera tipo Dirichlet como

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \text{clausura de } C_0^\infty(\Omega) \text{ en la norma } W^{s,p}(\Omega),$$

en el caso especial que $p = 2$, definimos

$$H_0^s(\Omega) = W_0^{s,2}(\Omega).$$

A fin de caracterizar con más detalle estos espacios introducimos la noción traza. Las funciones que tienen traza bien definida conforman un espacio de Sobolev de orden fraccionario así que, a fin de estudiar el concepto de traza introducimos de forma breve estos espacios y enunciamos algunas de sus propiedades.

Definición 1.22. *Sean $1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R}, s \geq 0, m \in \mathbb{Z}_+$ y suponga $s = m + \sigma$ donde $\sigma \in \mathbb{R}$ con $0 < \sigma < 1$. Entonces $W^{s,p}(\Omega)$ está definido como el espacio de distribuciones $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{y})|^p}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{N+\sigma p}} < \infty \quad \forall \boldsymbol{\alpha} : |\boldsymbol{\alpha}|_1 = m.$$

La norma asociada a este espacio es

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{y})|^p}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{N+\sigma p}} \right)^{1/p}. \tag{1.30}$$

Con esta norma, $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, separable y reflexivo para $1 < p < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$ con $s \geq 0$. Como en el caso de s entero, definimos $W_0^{s,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en la nueva norma y aún se satisface $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$. El primer resultado importante derivado de la definición anterior es el teorema de inyección compacta en espacios de orden fraccionario.

Teorema 1.23. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado. Entonces si $0 \leq t < s$ tal que $s - 3/p = t - 3/q$, se da $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,q}(\Omega)$. Además, si $0 \leq t < s < \infty$ y $p = q = 2$ la inyección es compacta.*

Procedemos ahora definiendo la traza de una función.

Definición 1.24. *Sea $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, el operador traza, denotado por γ_0 es la restricción de ϕ a la frontera, es decir*

$$\gamma_0(\phi) = \phi|_{\partial\Omega} \quad \forall \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Teorema 1.25. (Teorema de Traza.) *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado. Entonces si $1/p < s \leq 1$, el mapeo γ_0 tiene una única extensión continua cómo operador lineal de $W^{s,p}(\Omega)$ a $W^{s-1/p,p}(\partial\Omega)$. Además*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{\phi \in W^{1,p}(\Omega) \mid \gamma_0(\phi) = 0\},$$

o de forma alternativa, para $p > 1$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{\phi \in L^p(\Omega) \mid \nabla\phi \in \boldsymbol{L}^p \text{ y } \gamma_0(\phi) = 0\},$$

donde ∇ denota el operador gradiente que va de $\mathcal{D}'(\Omega)$ a $(\mathcal{D}'(\Omega))^N$ definido por

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial\phi}{\partial x_N}\right)^\top.$$

De este teorema se sigue en primer lugar que para $s = 1$ y $p = 2$, $H_0^1(\Omega)$ queda caracterizado como

$$H_0^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(\phi) = 0\},$$

cuyo espacio dual se denota como $H^{-1}(\Omega)$. Por otro lado, bajo la misma elección de valores para s y p, γ_0 tiene una única extensión continua como operador lineal desde $H^1(\Omega)$ hacia $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$.

Este último espacio es también denotado como $H^{1/2}(\partial\Omega)$ y es uno de los espacio traza más importante en nuestro análisis. La norma en este espacio es la norma dual usual, recordemos que si S es una superficie Lipschitz, entonces

$$\langle f, g\rangle_S = \int_S f\overline{g}.$$

El espacio dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ lo denotamos por $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ y la norma en éste viene dada por

$$\|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{g \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|\langle f, g\rangle|_{\partial\Omega}}{\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}},$$

donde $\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ se calcula usando la expresión (1.30) eligiendo $p = 2$ y $s = 1/2$.

Habiendo expuesto el espacio $H^1(\Omega)$ con su subespacio propio $H_0^1(\Omega)$, podemos proceder de forma similar a estudiar espacios de funciones que no requieren que todas sus derivadas estén en $L^2(\Omega)$, como también subespacios de éstos caracterizados por condiciones de frontera mucho más específicas. Para este fin procedemos por extender el concepto de derivada distribucional a los operadores *curl* y *divergencia*, haciendo énfasis en que estas definiciones surgen de forma natural en las Identidades de Green, derivadas del Teorema de divergencia de Gauss.

Definición 1.26. *El operador* curl *está definido para funciones vectoriales* $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^3$ *con* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ *y opera sobre esta función como se sigue*

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

donde las derivadas deben ser comprendidas en el sentido distribucional. Usando la definición (1.17) por componentes, definiendo un $\boldsymbol{\alpha}$ para cada caso se sigue que

$$(\nabla \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}), \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \tag{1.31}$$

lo cual puede verse como el *curl* de $\boldsymbol{u}$ en sentido distribucional. Muchas propiedades del *curl* están estrechamente ligadas al del operador *divergencia*, así que de forma paralela y sin profundizar en detalles listamos ciertas definiciones y resultados de tal operador.

Sea $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^3$, el operador *divergencia* está definido como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

procediendo de igual forma que con el *curl*, concluimos que la *divergencia* de $\boldsymbol{u}$ en sentido distribucional viene dada por

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \phi) = -(\boldsymbol{u}, \nabla \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.32}$$

además, se sigue cumpliendo que

$$\nabla \times (\nabla p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{u} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^3.$$

Como mencionamos antes, las definiciones anteriores surgen de forma natural en las Identidades de Green, las cuales finalmente caracterizarán los espacios de funciones con *curl* y *divergencia* bien definidas en sentido distribucional.

Teorema 1.27. (Teorema de Divergencia.) *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un dominio Lipschitz acotado con frontera* $\partial\Omega$ *y vector normal exterior unitario* $\boldsymbol{\nu}$*. Sea* $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial con* $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$*. Entonces*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu}.$$

De este teorema se derivan las identidades de Green al pedir que $\boldsymbol{F}$ tenga una u otra forma, por ejemplo, si elegimos $\boldsymbol{F} = \xi \boldsymbol{\psi}$ con $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$ y $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$, obtenemos la identidad

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) \xi = -\int_\Omega \boldsymbol{\psi} \cdot (\nabla \xi) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\psi}) \xi, \tag{1.33}$$

por otro lado, si elegimos $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\phi}$ con $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{\Omega})$, obtenemos la identidad

$$\int_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\phi} = \int_\Omega \boldsymbol{\psi} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\phi}, \tag{1.34}$$

Por último, enunciamos el siguiente teorema del cual haremos uso cuando estudiemos la teoría de elementos finitos de Nédélec.

Teorema 1.28. (Teorema de Stokes.) *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz acotado con vector unitario tangente $\boldsymbol{\tau}$ a ∂S. Si $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^1(\overline{S})$ y $\xi \in C^1(\overline{S})$ entonces*

$$\int_S (\nabla_S \times \boldsymbol{u}) \xi = \int_S \boldsymbol{u} \cdot \left(\vec{\nabla}_S \times \xi \right) + \int_{\partial S} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u}) \xi.$$

Sin más preámbulo, definimos el espacio de funciones $H(curl; \Omega)$ como

$$H(curl; \Omega) = \{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \mid \nabla \times \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \},$$

el cual tiene norma asociada

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(curl;\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \times \boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

Al igual que $H^1_0(\Omega)$, definimos a $H_0(curl; \Omega)$ como la clausura de $\boldsymbol{C}^\infty_0(\Omega)$ en la norma de $H(curl; \Omega)$. El siguiente lema resume una anotación hecha en (1.34).

Lema 1.29. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^3$ y sea $\boldsymbol{u} \in H(curl; \Omega)$ tal que $\forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$*

$$(\nabla \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) = 0,$$

entonces $\boldsymbol{u} \in H_0(curl; \Omega)$.

Siguiendo la cadena de razonamientos usada para caracterizar a $H^1_0(\Omega)$, definimos un operador traza similar a γ_0 para elementos en $\boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega})$, que luego extenderemos a $H(curl; \Omega)$.

Definición 1.30. *Para una función suave $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega})$, definimos respectivamente la traza tangencial y componente tangencial como*

$$\gamma_t(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}, \tag{1.35}$$

$$\gamma_T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1.36}$$

Teorema 1.31. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^3$. Entonces el mapeo γ_t puede ser extendido por continuidad a un mapeo lineal continuo desde $H(curl; \Omega)$ a $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$. Además, la identidad de Green (1.34) se satisface para cualquier $\boldsymbol{u} \in H(curl; \Omega)$ y $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$:*

$$(\nabla \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) = \langle \gamma_t(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi} \rangle_{\partial\Omega}.$$

Aquí hay qué anotar que el mapeo $\gamma_t : H(curl;\Omega) \to \boldsymbol{H}^{-1/2}(\Omega)$ no es sobreyectivo, pues para cualquier $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)$, $\gamma_t(\boldsymbol{u})$ es tangencial a $\partial\Omega$ mientras que $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ contiene elementos que no lo son, por esta razón definimos el espacio traza

$$Y(\partial\Omega) = \{\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\partial\Omega)^3 \mid \text{existe } \boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega) \text{ con } \gamma_t(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}\},$$

con norma

$$\|\boldsymbol{f}\|_{Y(\partial\Omega)} = \inf_{\boldsymbol{u}\in H(curl;\Omega),\gamma_t(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}} \|\boldsymbol{u}\|_{H(curl;\Omega)}.$$

Con esta norma, $Y(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.32. *El espacio $Y(\partial\Omega)$ es Hilbert. El mapeo $\gamma_t : H(curl;\Omega) \to Y(\partial\Omega)$ es sobreyectivo. El mapeo $\gamma_T : H(curl;\Omega) \to Y'(\partial\Omega)$ está bien definido. Para cualquier $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H(curl;\Omega)$ se cumple*

$$(\nabla\times\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\nabla\times\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \langle\gamma_t(\boldsymbol{u}), \gamma_T(\boldsymbol{v})\rangle_{\partial\Omega}, \tag{1.37}$$

la cual es una forma análoga de la identidad de Green (1.34).

Para concluir el paralelismo entre la construcción de $H_0(curl;\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 1.33. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^3$, entonces*

$$H_0(curl;\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega) \mid \gamma_t(\boldsymbol{u}) = 0\} \tag{1.38}$$

$$= \{\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega) \mid (\boldsymbol{u}, \nabla\times\boldsymbol{\phi}) = (\nabla\times\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi})\ \forall\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Omega})\}. \tag{1.39}$$

A este punto, hemos caracterizado completamente el espacio de funciones donde posiblemente se encuentra una solución a la formulación débil de nuestro problema. Sin embargo, por razones que no son obvias, expondremos de forma breve el espacio $H(div;\Omega)$, debido a la íntima relación que existe entre este y $H(curl;\Omega)$.

El espacio de funciones que tienen *divergencia* bien definida en sentido distribucional se denomina $H(div;\Omega)$ y viene dado por

$$H(div;\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\},$$

con norma asociada

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(div;\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2},$$

Para éste definimos el operador *traza normal* γ_n sobre funciones en $(\mathcal{D}(\Omega))^3$ como

$$\gamma_n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

Resumimos los resultados más importantes sobre este espacio en el siguiente teorema

Teorema 1.34. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio Lipschitz acotado, entonces*

- *El mapeo γ_n puede ser extendido por continuidad a un mapeo lineal y continuo γ_n de $H(div;\Omega)$ a $H^{-1/2}(\partial\Omega)$;*
- *La identidad de Green* (1.33) *se satisface para $\boldsymbol{u} \in H(div;\Omega)$ y $\phi \in H^1(\Omega)$, específicamente*

$$(\boldsymbol{u}, \nabla\phi) + (\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \phi) = \langle \phi, \gamma_n(\boldsymbol{u})\rangle_{\partial\Omega}.$$

Como en el caso de $H_0(curl;\Omega)$, $H_0(div,\Omega)$ se construye por medio de la clausura de $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ en la norma de $H(div;\Omega)$, espacio caracterizado por

$$H_0(div;\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in H(div;\Omega) \mid \gamma_n(\boldsymbol{u}) = 0\}.$$

Finalmente, para futura referencia introducimos el espacio de funciones vectoriales tangenciales en $L^2(\partial\Omega)$. Aunque en principio basta que Ω sea un dominio acotado con frontera $\mathcal{C}^2$ conexa $\partial\Omega$, simplemente diremos que Ω es un dominio Lipschitz con vector normal unitario exterior ν, definimos entonces dicho espacio de funciones como

$$L_t^2(\partial\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\partial\Omega) \mid \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ a.e. en } \partial\Omega\}, \tag{1.40}$$

cuya norma es la usual en $\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)$. Sobre este espacio podemos definir varios operadores superficiales, entre ellos el gradiente superficial, el cual denotamos por $\nabla_{\partial\Omega}$ y definimos usando una representación paramétrica de $\partial\Omega$. Supongamos que $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ se puede escribir como

$$\boldsymbol{x} = (x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2), x_3(u_1,u_2))^\top,$$

para algún sector superficial de $\partial\Omega$. En tal parche, $\nabla_{\partial\Omega}p \in L_t^2(\partial\Omega)$ está definida por

$$\nabla_{\partial\Omega}p = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial p}{\partial u_i}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j},$$

donde g^{ij} es la i,j-ésima entrada de la matriz G^{-1}, donde G viene definida por

$$G_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j},\ i,j = 1,2.$$

Al igual que el gradiente, se pueden definir otros operadores sobre $\partial\Omega$, como el *curl* o *divergencia*, los cuales se definirán posteriormente en caso de ser necesario.

2.3. Descomposición de Helmholtz

El resultado principal de esta sección consiste en la descomposición ortogonal de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, la cual puede lograrse al menos de dos maneras, usando los espacios cohomología normal y tangencial. Sin embargo es uno de los resultados intermedios el que más nos importa: la descomposición ortogonal de $H_0(curl;\Omega)$.

Empezamos este apartado discutiendo la teoría de descomposición ortogonal en espacios de Hilbert, posteriormente mencionamos algunas definiciones y resultados de potenciales escalares y vectoriales, que usaremos para aclarar la relación existente entre los espacios $H(div;\Omega)$ y $H(curl;\Omega)$, lo cual ilustraremos en el diagrama de de-Rham.

Teorema 1.35. (Teorema de mejor aproximación.) *Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un subespacio cerrado del Hilbert $\mathcal{X}$. Entonces para todo $x \in \mathcal{X}$ existe un único $u \in \mathcal{U}$ tal que*

$$\|x-u\|_{\mathcal{X}} = \inf_{y\in\mathcal{U}} \|x-y\|_{\mathcal{X}},$$

el cual se llama la mejor aproximación de x por elementos de $\mathcal{U}$. Además, $u \in \mathcal{U}$ está caracterizado por la relación de ortogonalidad

$$(x-u, y)_{\mathcal{X}} = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}. \tag{1.41}$$

La relación de ortogonalidad caracteriza al conjunto que denominamos complemento ortogonal.

Definición 1.36. *Dado un subconjunto $\mathcal{U}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{X}$, se define el complemento ortogonal de $\mathcal{U}$, denotado por $\mathcal{U}^\perp$ como*

$$\mathcal{U}^\perp = \{x \in \mathcal{X} \mid (x,u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}\},$$

el cual es un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$. Cabe anotar que $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \theta_{\mathcal{X}}$ siempre que $\theta_{\mathcal{X}} \in \mathcal{U}$.

Con esta definición y el teorema previo tenemos suficientes herramientas para probar el siguiente resultado.

Teorema 1.37. (Teorema de descomposición ortogonal) *Sea $\mathcal{U}$ un subespacio cerrado de un Hilbert $\mathcal{X}$, entonces:*

$$\mathcal{X} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp.$$

Observemos que $\mathcal{U}^\perp$ es también un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$, luego $x-u$ es la mejor aproximación de x por elementos de $\mathcal{U}^\perp$. Entonces si $P_{\mathcal{S}}$ es la aplicación que a cada $x \in \mathcal{X}$ le asigna su mejor aproximación por elementos de un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{X}$, se sigue que la aplicación identidad de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ puede expresarse como

$$I = P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp}.$$

Las aplicaciones $P_{\mathcal{U}} : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ y $P_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{X} \to \mathcal{U}^\perp$ se denominan *proyecciones ortogonales* sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^\perp$, por lo que el Teorema de *mejor aproximación* también recibe el nombre de *proyección ortogonal*, con el cual nos seguiremos refiriendo a éste.

Una función vectorial puede expresarse en términos de potenciales escalares y vectoriales según sea apropiado. En el restante de esta sección nos centramos en estudiar cuando esto es posible.Por ejemplo, es bien sabido que las funciones con *curl* nulo pueden ser representadas por un escalar potencial.

Teorema 1.38. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y suponga que $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^3$ y $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ en Ω, entonces para cada paralelepípedo rectangular abierto $\mathcal{O} \subset \Omega$ existe una función escalar $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ en $\mathcal{O}$.*

Nota 1.39. *Si Ω es un dominio Lipschitz simplemente conexo, tomando la unión de los paralelepípedos puede mostrarse que $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ en Ω. Si se requiere por ejemplo que, ϕ tenga promedio cero (*i.e. $(\phi, 1) = 0$*) entonces ϕ es única. Este hecho se sigue de la desigualdad de Poincaré en el Lema 1.19.*

Este teorema se extiende a los espacios de Sobolev de la siguiente manera.

Teorema 1.40. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado y simplemente conexo de $\mathbb{R}^3$ y suponga que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Entonces $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ en Ω si y sólo si existe una función $\phi \in H^1(\Omega)$, denominada potencial escalar tal que $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$ donde ϕ es única excepto por la adición de una constante.*

Para el siguiente teorema haremos una descripción detallada de un dominio general Ω, que es Lipschitz acotado y conexo cuya frontera puede estar compuesta hasta de $J+1$ componentes conexas disjuntas. Equivalente a decir que Ω es un volumen con «zonas vacías» en su interior cuyas fronteras son conexas y Lipschitz continuas. Tales zonas son subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ o bien $\Omega^\perp$, esto implica que $\Omega^\perp$ es la unión de J conjuntos acotados y un conjunto no acotado.

Listamos las secciones de frontera como $\{\partial\Omega_j\}_{j=0}^J$ donde por convención elegimos a $j = 0$ para que represente la frontera entre Ω y el conjunto no acotado de $\Omega^\perp$. A los conjuntos en $\Omega^\perp$ los listamos como $\{\partial\Omega_j^\perp\}_{j=0}^J$ donde cada $\Omega_j^\perp$ tiene frontera $\partial\Omega_j$, de modo que $\Omega_0^\perp$ representa la parte no acotada de $\Omega^\perp$.

Teorema 1.41. *Para cualquier función $\boldsymbol{u} \in H(div;\Omega)$ tal que*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad \langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}, 1\rangle_{\partial\Omega_j} = 0, \quad 0 \le j \le J,$$

existe una función $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ denominada potencial vectorial tal que

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times\boldsymbol{A} \text{ en } \Omega, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \text{ en } \Omega.$$

Ahora, asumamos que Ω no es simplemente conexo sino que existen L superficies abiertas conexas $\Sigma_l, l = 1, 2, ..., L$ llamados cortes interiores contenidos en Ω tal que para $1 \leq l \leq L$,

1. Cada Σ_l es una parte abierta de una superficie suave;
2. $\partial\Sigma_l \subset \partial\Omega$;
3. $\Sigma_l \cap \Sigma_m = \emptyset$ si $l \neq m$;
4. el conjunto $\Omega^0 = \Omega \setminus \bigcup_{l=1}^{L} \Sigma_l$ es simplemente conexo y pseudo-Lipschitz.

Por pseudo-Lipschitz nos referimos a que para cualquier punto $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ existe un entero $r_{\boldsymbol{x}}$ igual a 1 ó 2 y un número positivo ρ_0 tal que para todo ρ con $0 < \rho < \rho_0$ la intersección de Ω con la bola centrada en $\boldsymbol{x}$ de radio ρ tiene $r_{\boldsymbol{x}}$ componentes conexas, cada una siendo un dominio Lipschitz.

Procedamos haciendo la siguiente observación. Si $p \in H^1(\Omega)$ entonces $\nabla p \in H(curl; \Omega)$ ya que $\nabla p \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $\nabla \times \nabla p = 0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Si extendemos la operación a todos los elementos de $H^1(\Omega)$ concluimos que el rango del operador cae en el espacio de funciones $H(curl; \Omega)$. De la misma forma si $\boldsymbol{u} \in H(curl; \Omega)$ entonces $\nabla \times \boldsymbol{u} \in H(div; \Omega)$. Estos resultados se resumen en el siguiente diagrama de de Rham.

$$H^1(\Omega)/\mathbb{R} \xrightarrow{\nabla} H(curl; \Omega) \xrightarrow{\nabla\times} H(div; \Omega) \xrightarrow{\nabla\cdot} L^2(\Omega).$$

Un resultado similar con condición de frontera es:

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H_0(curl; \Omega) \xrightarrow{\nabla\times} H_0(div; \Omega) \xrightarrow{\nabla\cdot} L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Teorema 1.42. *Siguiendo el orden de los diagramas anteriores, el rango de un operador es subconjunto propio y cerrado del* kernel *del siguiente en la secuencia y tal subconjunto es de codimensión finita.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es que $\nabla H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado del *kernel* del operador *curl* en $H_0(curl; \Omega)$. Por el Teorema de descomposición ortogonal 1.37, podemos escribir el espacio nulo del *curl* como

$$N(curl) = \nabla H_0^1(\Omega) \oplus (\nabla H_0^1(\Omega))^{\perp}$$

con ortogonalidad en el producto interno de $H(curl; \Omega)$. Supongamos ahora que $\boldsymbol{u} \in N(curl) \subset H_0(curl; \Omega)$ y $\boldsymbol{u} \in (\nabla H_0^1(\Omega))^{\perp}$. Entonces $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ en Ω, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u} = 0$ en $\partial\Omega$ y

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla\xi = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega),$$

se infiere de la igualdad (1.32) que

$$\int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\xi = 0 \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega),$$

luego $(\nabla H_0^1(\Omega))^\perp$ queda caracterizado como

$$(\nabla H_0^1(\Omega))^\perp = \{\boldsymbol{u} \in H_0(curl;\Omega) \mid \nabla\times\boldsymbol{u} = 0, \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Este es mejor conocido como el *espacio cohomología normal* y es denotado por $K_N(\Omega)$. Un análisis similar muestra que el complemento ortogonal de $\nabla\times H_0(curl;\Omega)$ en el *kernel* de la *divergencia* está dado por el espacio cohomología tangencial K_T definido por

$$K_T(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H_0(div;\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \nabla\times\boldsymbol{v} = \text{ en } \Omega\},$$

y por el teorema anterior tenemos $\dim(K_N) < \infty$ y $\dim(K_T) < \infty$. El siguiente teorema resume los resultados obtenidos hasta ahora.

Teorema 1.43. *Si $\boldsymbol{u} \in H_0(curl;\Omega)$ es tal que $\nabla\times\boldsymbol{u} = 0$ en Ω entonces existe un único potencial escalar $p \in H_0^1(\Omega)$ y una función $\boldsymbol{f}_N \in K_N(\Omega)$ tal que*

$$\boldsymbol{u} = \nabla p + \boldsymbol{f}_N.$$

Si $\boldsymbol{v} \in H_0(div;\Omega)$ es tal que $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ en Ω entonces existe un potencial vectorial $\boldsymbol{A} \in H_0(curl;\Omega)$ y una función $\boldsymbol{f}_T \in K_T(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{f}_T.$$

El potencial vectorial es único si adicionalmente le exigimos que $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ en Ω y $\langle\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{A}, 1\rangle_{\partial\Omega_j} = 0,\ j = 0, ..., J.$

Este teorema nos lleva al resultado central de esta sección conocido como el Teorema de descomposición de Helmholtz.

Teorema 1.44. *Cada función $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ se puede descomponer como*

$$\boldsymbol{u} = \nabla p + \boldsymbol{f}_N + \nabla\times\boldsymbol{A},$$

para únicos $p \in H_0^1(\Omega), \boldsymbol{f}_N \in K_N(\Omega)$ y

$$\boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{v} \in H(curl;\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ en } \Omega,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega,\ \text{y } \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}, 1\rangle_{\Sigma_l} = 0,\ 1 \le l \le L\}.$$

Cabe anotar que existe una descomposición similar a la anterior usando $p \in H^1(\Omega), \boldsymbol{f}_T \in K_T$ y $\boldsymbol{A} \in H_0(curl;\Omega)$.

Ahora, enunciaremos algunos resultados relacionados con problemas que involucran condiciones de frontera de impedancia. En estos casos es necesario definir el subespacio de $H(curl;\Omega)$, definido como $H_{\text{imp}}(curl;\Omega)$, dado por

$$H_{\text{imp}}(curl;\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega) \mid \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu} \in L_t^2(\partial\Omega)\},$$

con norma asociada

$$\|u\|^2_{H_{\text{imp}}(curl;\Omega)} = \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu}\|_{L^2_t(\partial\Omega)}.$$

La importancia de estos comentarios será evidente una vez construyamos la formulación variacional del problema fuerte propuesto en la Sección 1.5. El primero de la cadena de resultados que enunciaremos es el siguiente.

Teorema 1.45. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^3$. Suponga que $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)\cap H(div;\Omega)$ y $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)$. Entonces $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Omega)$ y la siguiente estimación de norma se satisface:*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2}(\Omega)} \leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu}\|_{\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)}). \tag{1.42}$$

Similarmente, suponga que $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)\cap H(div;\Omega)$ y $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)$. Entonces $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{1/2}(\Omega)$ y la siguiente estimación de norma se satisface

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2}(\Omega)} \leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu}\|_{\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)}). \tag{1.43}$$

Ahora, definamos los espacios de funciones

$$W_N = \{\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)\cap H(div;\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u} \in L^2_t(\partial\Omega)\}, \tag{1.44}$$

$$W_T = \{\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)\cap H(div;\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega \text{ y } \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{u} \in L^2_t(\partial\Omega)\}, \tag{1.45}$$

sobre los cuales tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.46. *Los espacios W_N y W_T se inyectan de forma compacta en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.*

Finalmente, los siguientes resultados, conocidos también como desigualdades de Friedrichs proveen una estimación de la norma para los elementos de W_N y W_T.

Lema 1.47. *Suponga que Ω es un dominio Lipschitz acotado. Si Ω es simplemente conexo, con frontera conexa, entonces existe una constante $C > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{u} \in W_N$*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)}).$$

La misma desigualdad se satisface para W_T, reemplazando $\nabla\times\boldsymbol{u}$ por $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$.

2.4. Transformaciones afines en dominios acotados de $\mathbb{R}^3$

En la teoría de elementos finitos, a menudo es útil transformar un dominio en otro más simple o conveniente. Para este fin es necesario asegurarse que las funciones que se estudian en tales dominios tengan gradiente, *curl* o *divergencia* bien definida después de pasar por la transformación.

Sean $\hat{K}$ y K dos dominios acotados en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $F_K : \hat{K} \to K$ es una función continuamente diferenciable y biyectiva, además la matriz Jacobiana dF_K dada por

$$(dF_K)_{i,j} = \frac{\partial F_{K,i}}{\partial \hat{x}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

con $\hat{x}_j, j = 1, 2, 3$ las variables del sistema coordenado de $\hat{K}$; es tal que $\det(dF_K)$ es de un solo signo en $\hat{K}$.

Una función escalar $\hat{p} \in H^1(\hat{K})$ se transforma en otra p definida en K por

$$p \circ F_K = \hat{p}, \tag{1.46}$$

donde $\circ$ denota la composición entre funciones. Se sigue que $p \in H^1(K)$ ya que por regla de la cadena

$$\nabla p = dF_K^{-\top} \hat{\nabla} \hat{p}, \tag{1.47}$$

donde $\hat{\nabla}$ denota el gradiente respecto al sistema coordenado de $\hat{K}$. Extendemos esta convención a los operadores $\hat{\nabla}\cdot$ y $\hat{\nabla}\times$. Ahora, provisto que $\hat{\nabla}\hat{p} \in H(curl; \hat{K})$ y $\nabla p \in H(curl; K)$, resulta natural transformar toda función $\hat{\boldsymbol{u}} \in H(curl; \hat{K})$ en una $\boldsymbol{u}$ definida en K por medio de (1.48), de modo que

$$\boldsymbol{u} \circ F_K = dF_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{1.48}$$

Lema 1.48. *Suponga que $\hat{\boldsymbol{u}} \in H(curl; \hat{K})$ y que $\boldsymbol{u}$ y $\hat{\boldsymbol{u}}$ están relacionadas por* (1.48). *Entonces $\boldsymbol{u} \in H(curl; K)$ y*

$$(\nabla \times \boldsymbol{u}) \circ F_K = \frac{1}{\det(dF_K)} dF_K (\hat{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{u}}).$$

Una identidad similar puede derivarse para funciones en $H(div, K)$. Sea $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ el vector normal unitario exterior a $\hat{K}$. Entonces si $\hat{\boldsymbol{x}} \in \partial\hat{K}$ y $\boldsymbol{\nu}$ está definido por

$$\boldsymbol{\nu}(F_K(\hat{\boldsymbol{x}})) = \frac{dF_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{\nu}}}{|dF_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{\nu}}|}(\hat{\boldsymbol{x}}), \tag{1.49}$$

se sigue que $\boldsymbol{\nu}$ es normal unitario exterior a K. Análogamente, si $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es cualquier vector tangencial unitario a $\partial\hat{K}$ en $\hat{\boldsymbol{x}}$. Entonces el vector $\boldsymbol{\tau}$ dado por

$$\boldsymbol{\tau}(F_K(\hat{\boldsymbol{x}})) = \frac{dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}}{|dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}|}(\hat{\boldsymbol{x}}), \tag{1.50}$$

es tangente a ∂K en $F_K(\hat{\boldsymbol{x}})$. Por último, enunciamos como las integrales de superficie cambian bajo la transformación F_K. Si definimos Jacobiano superficial por

$$J_{\hat{\boldsymbol{\nu}}} = |\det(dF_K)|\, |dF_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{\nu}}|,$$

entonces para las funciones p y $\hat{p}$ relacionadas por (1.46), tenemos

$$\int_{\partial K} p \; dA = \int_{\partial \hat{K}} \hat{p} J_{\boldsymbol{\nu}} \; d\hat{A},$$

adicionalmente, si $\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}$ y $\phi, \hat{\phi}$ están relacionadas respectivamente por (1.48) y (1.46) tenemos

$$\int_{\partial K} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}) \phi \; dA = \text{signo}(\det(dF_K)) \int_{\partial \hat{K}} (\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}}) \hat{\phi} \; d\hat{A}. \tag{1.51}$$

De la misma forma, si las funciones $\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{u}}$ y $\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{v}}$ están relacionadas por (1.48), entonces

$$\int_{\partial K} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{v}_T \; dA = \text{signo}(\det(dF_K)) \int_{\partial \hat{K}} (\hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{\nu}}) \cdot \hat{\boldsymbol{v}}_T \; d\hat{A}. \tag{1.52}$$

Capítulo 2

Conceptos preliminares sobre espacios discretos

En este capítulo nos enfocaremos en exponer los conceptos y resultados necesarios para construir una formulación discreta del problema de cavidad expuesto en la sección 1.5.

Empezamos discutiendo los análogos discretos de las teorías de problemas variacionales de Lax-Milgram, Babuška-Brezzi y alternativa de Fredholm. Básicamente, consideramos una sucesión de subespacios finito-dimensionales que converge a un espacio de Hilbert dado, posteriormente planteamos los mismos problemas variacionales en cada uno de estos espacios, estudiamos la existencia y unicidad de la solución y finalmente, estudiamos la convergencia de la sucesión construida con estas soluciones.

Una segunda parte de ésta capítulo está enfocada en caracterizar dichos subespacios. Para este fin deberemos introducir formalmente el concepto de elemento finito, las nociones de unisolvencia y conformidad. Finalmente nos centraremos en estudiar cierta clase de FE conocidos como elementos de borde de Nédélec, los cuales están relacionados con el espacio $H(curl;\Omega)$.

Los resultados de ésta capítulo siguen siendo en su mayoría, clásicos y pueden ser encontrados en fuentes como Ciarlet [13], Chen [14], Nédélec [15] y Monk [6].

1. Teoría de convergencia de elementos finitos abstractos

El nombre de esta teoría viene del hecho de que no hace falta definir un FE particular para estudiar la convergencia del mismo. Suponemos entonces que tenemos una sucesión de subespacios finito-dimensionales denotados $\mathcal{X}_h,\ h>0$, de un espacio de Hilbert $\mathcal{X}$

de forma que, cuando $h \to 0$, $\mathcal{X}_h$ se aproxima a $\mathcal{X}$. Empezamos la sección exponiendo el análogo discreto del Lema de Lax-Milgram.

Lema 2.1. (Lema de Cea). *Sea $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal acotada y coerciva y sea $f \in \mathcal{X}'$. Entonces el problema de encontrar $u_h \in \mathcal{X}_h$ tal que*

$$a(u_h, \phi_h) = f(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in \mathcal{X}_h \tag{2.1}$$

tiene solución única. Si $u \in \mathcal{X}$ es solución de (1.25), entonces existe una constante C independiente de u y u_h y h tal que

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{X}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{X}}. \tag{2.2}$$

Procedemos con los problemas mixtos discretos. En este caso no contamos con la coercividad de la forma sesquilineal a y además, debemos introducir el subespacio $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}, h > 0$ con S un espacio de Hilbert y una forma sesquilineal acotada $b : \mathcal{X} \times \mathcal{S}$. Entonces, provistos $f \in \mathcal{X}'$ y $g \in \mathcal{S}'$, el problema mixto discreto consiste en encontrar $u_h \in \mathcal{X}_h$ y $p_h \in \mathcal{S}$ tal que

$$a(u_h, \phi_h) + b(\phi_h, p_h) = f(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in \mathcal{X}_h, \tag{2.3}$$

$$b(u_h, \xi_h) = g(\xi_h) \quad \forall \xi_h \in \mathcal{S}_h. \tag{2.4}$$

Como en el problema continuo, suponemos que $a(\cdot,\cdot)$ es uniformemente $\mathcal{Z}_h$-coerciva, donde $\mathcal{Z}_h$ es el análogo discreto del espacio $\mathcal{Z}$ definido en (1.28), tal que

$$\mathcal{Z}_h = \{u_h \in \mathcal{X}_h \mid b(u_h, \xi_h) = 0 \ \forall \xi_h \in \mathcal{S}_h\}, \tag{2.5}$$

entonces existe una constante $\alpha > 0$, independiente de h y $u_h \in \mathcal{Z}_h$ tal que

$$|a(u_h, u_h)| \geq \alpha \|u_h\|^2_{\mathcal{X}} \quad \forall u_h \in \mathcal{Z}_h, \tag{2.6}$$

Análogamente, la forma sesquilineal b debe satisfacer la condición de Babuška-Brezzi, entonces asumimos que existe una constante $\beta > 0$ independiente de h y $p_h \in \mathcal{S}_h$ tal que

$$\sup_{v_h \in \mathcal{X}_h} \frac{|b(v_h, p_h)|}{\|v_h\|_{\mathcal{X}}} \geq \beta \|p_h\|_{\mathcal{S}}, \tag{2.7}$$

Ahora, definiendo el conjunto

$$\mathcal{Z}_h(g) = \{u_h \in \mathcal{X}_h \mid b(u_h, \xi_h) = g(\xi_h) \ \forall \xi_h \in \mathcal{S}_h\},$$

podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Suponga que $a : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ y $b : \mathcal{X}\times\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ son formas sesquilineales acotadas que satisfacen respectivamente $\mathcal{Z}_h$-coercividad y la condición Babuška-Brezzi. Entonces si $\mathcal{Z}_h(g) \neq \emptyset$, existe solución única al sistema de ecuaciones descrito por* (2.3) *y* (2.4).

Nota 2.3. *Aquí cabe anotar que si $\mathcal{Z}_h(g) \neq \emptyset$ y $a(\cdot,\cdot)$ es $\mathcal{Z}_h$-coerciva, se obtiene una solución u_h única al problema mixto discreto incluso cuando p_h no esté determinado de forma única (i.e. se descarta la condición de Babuška-Brezzi sobre a).*

Ahora procedemos a enunciar dos resultados que proveen estimaciones para u_h y p_h, con los cuales obtendremos el principal resultado de convergencia en problemas mixtos.

Teorema 2.4. *Suponga que $a : \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es $\mathcal{Z}_h$-coerciva y acotada y que la forma sesquilineal $b : \mathcal{X}\times\mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es acotada. Sean $(u,p) \in \mathcal{X}\times\mathcal{S}$ solución del problema variacional dado por* (1.26), (1.27) *y sean $(u_h,p_h) \in \mathcal{X}_h\times\mathcal{S}_h$ tales que satisfacen* (2.3) *y* (2.4). *Entonces existe una constante C independiente de $(u,p), h$ y (u_h,p_h) tal que*

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{X}} \leq C\left\{\inf_{v_h\in\mathcal{Z}_h(g)}\|u-v_h\|_{\mathcal{X}} + \inf_{q_h\in\mathcal{S}_h}\|p-q_h\|_{\mathcal{S}}\right\}.$$

Lema 2.5. *Bajo las suposiciones del Teorema 2.4 y que la condición de Babuška-Brezzi dada en* (2.7) *se cumple, tenemos*

$$\|p-p_h\|_{\mathcal{S}} \leq \frac{C}{\beta}\|u-u_h\|_{\mathcal{X}} + \left(1+\frac{C}{\beta}\right)\inf_{q_h\in\mathcal{S}_h}\|p-q_h\|_{\mathcal{S}}.$$

Teorema 2.6. *Suponga que las condiciones de coercividad, tanto discreta como continuas, al igual que la condición de Babuška-Brezzi se cumplen. Entonces existe una única solución $(u,p) \in \mathcal{X}\times\mathcal{S}$ que satisfacen las ecuaciones* (1.26), (1.27) *y una única solución $(u_h,p_h) \in \mathcal{X}_h\times\mathcal{S}_h$ que a su vez satisfacen* (2.3) *y* (2.4). *También existe una constante C independiente de h, de (u_h,p_h) y (u,p) tales que*

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{X}} + \|p-p_h\|_{\mathcal{S}} \leq C\left\{\inf_{v_h\in\mathcal{X}_h}\|u-v_h\|_{\mathcal{X}} + \inf_{q_h\in\mathcal{S}_h}\|p-q_h\|_{\mathcal{S}}\right\}.$$

Cerramos esta sección discutiendo el análogo discreto de la alternativa de Fredholm. Para este fin introducimos la noción de operadores colectivamente compactos.

Definición 2.7. *Un conjunto $\mathcal{K} = \{K_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X},\ n = 0,1,2,...\}$ de operadores lineales acotados se dice colectivamente compacto si para cada conjunto acotado $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, el conjunto imagen*

$$\mathcal{K}(\mathcal{U}) = \{K_n u \mid \text{para todo } u \in \mathcal{U} \text{ y } K_n \in \mathcal{K}\}$$

es relativamente compacto.

Definición 2.8. *Los operadores $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergen puntualmente a un operador $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ si, para cada $u \in \mathcal{X}$, $K_n u \to Ku$ en $\mathcal{X}$ cuando $n \to \infty$.*

Ahora, de la definición 1.3 se sigue en particular que

$$\|(K_n - K)K\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} = \sup_{u\in\mathcal{X};\ \|u\|_{\mathcal{X}}=1} \|(K_n - K)Ku\|_{\mathcal{X}},$$

con una definición similar para $\|(K_n - K)K_n\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}$ se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.9. *Suponga $\{K_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto de operadores acotados colectivamente compactos que convergen puntualmente a un operador compacto $K : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Entonces*

$$\|K_n - K)K\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \to 0 \quad y \quad \|(K_n - K)K_n\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ahora, suponga que K es tal que para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{X}$ existe una única solución $u \in \mathcal{X}$ a la ecuación

$$(I + K)u = \mathcal{F}, \tag{2.8}$$

con $\|(I + K)^{-1}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} < \infty$. El siguiente teorema muestra que el problema discreto de encontrar $u_n \in \mathcal{X}$ tal que

$$(I + K_n)u_n = \mathcal{F}_n, \tag{2.9}$$

donde $\mathcal{F}_n \in \mathcal{X}$, tiene solución única y tiene asociado un estimado de error.

Teorema 2.10. *Sea K un operador compacto tal que $(I + K)$ tiene inverso acotado y sea $u \in \mathcal{X}$ un elemento que satisface (2.8). Suponga además que el conjunto de operadores $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ es colectivamente compacto y converge puntualmente al operador K. Entonces para todo n suficientemente grande, el operador $(I + K_n)^{-1}$ existe como mapeo de $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, es uniformemente acotado e independiente de n y es tal que (2.9) tiene solución única $u_n \in \mathcal{X}$. Además se tiene la siguiente estimación*

$$\|u - u_n\|_{\mathcal{X}} \le C(\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\|_{\mathcal{X}} + \|(K - K_n)u\|_{\mathcal{X}}).$$

El paso a seguir es caracterizar el subespacio finito-dimensional $\mathcal{X}_h$, para lo cual deberemos exponer algunos conceptos y propiedades de la teoría de elementos finitos. Parte de esta teoría es desarrollada usando transformaciones afines, por lo que deberemos traer a colación los resultados de la ultima sección en el capítulo anterior.

2. Nociones sobre elementos finitos

En esta sección estudiamos los conceptos y resultados más importantes de la teoría de elementos finitos. Empezamos por introducir formalmente el concepto de malla regular, sobre el cual aplicaremos los resultados de transformaciones afines, que usaremos posteriormente en la prueba de unisolvencia de los elementos finitos de Nédélec.

Posteriormente definiremos el concepto de elemento finito en el sentido de [13] y discutiremos los conceptos de unisolvencia, conformidad, existencia de operadores de interpolación y definiremos los elementos de borde de Nédélec sobre un espacio de funciones polinómicas especial, el cual resulta ser *curl* conforme.

Continuamos discutiendo algunos resultados sobre los espacios H^1 conformes dada la importancia que tendrán los potenciales escalares en nuestro problema y cerramos esta sección con algunas nociones sobre espacios frontera.

2.1. Malla regular y transformaciones afines en tetraedros

El concepto de malla puede ser descrito como el conjunto de subdominios en los que puede ser particionado un dominio particular, en nuestro caso asumimos que Ω es un poliedro Lipschitz que particionamos en tetraedros (ó elementos) K. La malla como conjunto se denota τ_h y los elementos en esta deben satisfacer:

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{K\in\tau_h} \overline{K}$.
- $\forall K \in \tau_h$, K es un conjunto abierto con volumen positivo.
- Si $K_i, K_j \in \tau_h$, entonces $K_i \cap K_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.
- Si $K_i, K_j \in \tau_h$ y $\overline{K}_i \cap \overline{K}_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$, entonces los tetraedros tienen en común algunos de estos tres items:
  - Un punto que es un vértice común de ambos elementos.
  - Una linea que es una arista compartida por los dos tetraedros.
  - Una superficie que es una cara común de ambos elementos.
- Cada K es un dominio Lipschitz.

A cada K se le asocian los parámetros h_K y ρ_K los cuales representan respectivamente el diámetro de la esfera más pequeña que contiene a $\overline{K}$ y el diámetro de la esfera más grande contenida en $\overline{K}$, de modo que el máximo diámetro de los elementos en τ_h está dado por $h = \max_{K\in\tau_h} h_K$.

Definición 2.11. *Definimos los parámetros σ_K y σ_h como*

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \quad y \quad \sigma_h = \max_{K\in\tau_h} \sigma_K,$$

decimos que una familia de mallas es regular si, cuando $h \to 0$ existen constantes $\sigma_{min} > 0$ y $h_0 > 0$ tales que

$$\sigma_h \geq \sigma_{min} \quad \forall h : 0 < h \leq h_0.$$

En resumen, una familia de mallas es regular si los tetraedros no se achatan durante el refinamiento (*i.e.*, conservan cierta relación entre las medidas de la base y altura del mismo). Cabe anotar que una malla tiene «menos regularidad» que otra en la medida que $\sigma_{\min} \approx 0$. Procuramos trabajar con las mallas más regulares posibles ya que usualmente aquellas con menos regularidad, tienen asociadas matrices mal condicionadas que llevan a aproximaciones pobres comparadas con las primeras.

Hasta el momento no hemos introducido de forma rigurosa el concepto de elemento finito, sin embargo podemos decir de ellos que están definidos sobre dominios simples (como los elementos de la malla τ_h) y que con estos se busca aproximar funciones definidas en tales dominios.

Naturalmente se esperan mejores aproximaciones con particiones más finas, que es lo que procuramos obtener con el refinamiento de la malla. En otras palabras, construimos una familia de mallas $\{\tau_h \mid h > 0\}$ y analizamos el error cuando h tiende a cero. Esta es conocida como la versión-h de los elementos finitos, donde se intenta obtener convergencia refinando la malla.

Posteriormente necesitaremos garantizar que en cada tetraedro de la malla, el elemento finito asociado tiene ciertas propiedades las cuales dependen de la geometría del mismo. Como cada elemento puede tener un tamaño y forma específico, resulta más práctico trabajar sobre un elemento fijo (de referencia) y «transportar» los resultados a cualquier elemento de la malla usando las transformaciones afines discutidas en el capítulo anterior.

Siguiendo esta cadena de razonamientos, definimos los dominios $\hat{K}$ y K respectivamente como el tetraedro de vértices $\hat{a}_1 = (0,0,0)^\top, \hat{a}_2 = (1,0,0)^\top, \hat{a}_3 = (0,1,0)^\top$ y $\hat{a}_4 = (0,0,1)^\top$ (de ahora en más, elemento de referencia) y K un tetraedro arbitrario de la malla. Definimos la función $F_K : \hat{K} \to K$ como

$$F_K \hat{\boldsymbol{x}} = B_K \hat{\boldsymbol{x}} + b_K = \boldsymbol{x}, \tag{2.10}$$

donde B_K es una matriz de transformación de orden 3×3 no singular (ya que K tiene volumen positivo), b_K es un vector de traslación, $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{K}$ y $\boldsymbol{x} \in K$.

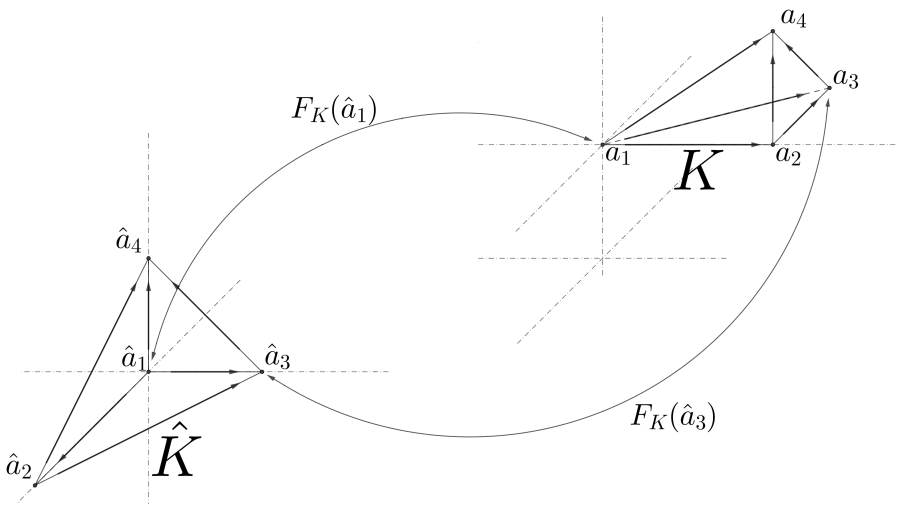

Figura 2.1: Mapeo F_K.
El mapeo afín conserva la orientación de las aristas, además de las operaciones *curl* y *divergencia*.

Es fácil ver que en efecto F_K es biyectiva y continuamente diferenciable, por lo que los resultados expuestos en el capítulo anterior son aplicables. El siguiente lema lista los resultados para la función F_K definida usando en particular que

$$dF_K = B_K.$$

Lema 2.12. *Provisto que $F_K : \hat{K} \to K$ es un mapeo continuamente diferenciable, biyectivo tenemos:*

1. *Dada una función escalar $\hat{p} \in \hat{K}$, se obtiene $p \in K$ por medio de*

$$p \circ F_K = \hat{p} \tag{2.11}$$

adicionalmente

$$(\nabla p) \circ F_K = B_K^{-\top} \hat{\nabla} \hat{p}, \tag{2.12}$$

2. *Dada una función vectorial $\hat{\boldsymbol{u}}$ definida en $\hat{K}$, obtenemos $\boldsymbol{u} \in K$ con*

$$\boldsymbol{u} \circ F_K = B_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\det(B_K)} B_K \hat{\boldsymbol{u}}, \tag{2.13}$$

además

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{1}{\det(B_K)} B_K \hat{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{2.14}$$

3. *Sean* $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_6\}$ *el conjunto de aristas que componen al tetraedro* $\hat{K}$ *y sean* $\{\hat{f}_1, ..., \hat{f}_4\}$ *las caras del mismo. Si* $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ *es un vector tangencial a cualquier arista* $\hat{e}$ *de* $\hat{K}$ *y* $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ *es el vector normal exterior a alguna de las caras* $\hat{f}$ *del mismo, entonces*

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{|B_K\hat{\boldsymbol{\tau}}|}B_K\hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{|B_K^{-\top}\hat{\boldsymbol{\nu}}|}B_K^{-\top}\hat{\boldsymbol{\nu}}, \tag{2.15}$$

con $\boldsymbol{\tau}$ *y* $\boldsymbol{\nu}$ *sus análogos para* K*.*

2.2. Elementos finitos

Los elementos finitos se construyen usando funciones polinómicas a tramos en dominios geométricos simples (tetraedros en nuestro caso). Tales funciones vienen determinadas por ciertos funcionales asociados, cuya cantidad en principio depende del grado de los polinomios, con esto definimos el elemento finito como la terna (K, P_K, Σ_K), donde

- K es un dominio geométrico simple, conocido también como elemento;
- P_K es un espacio de funciones (usualmente polinomios) en K;
- Σ_K es un conjunto de funcionales lineales en P_K, denominados grados de libertad del elemento finito.

Para que el elemento finito esté bien definido, el dominio K debe ser no degenerado (*e.g.* un tetraedro con cuatro vértices coplanares), el espacio de funciones P_K debe ser finito dimensional para que sea fácil implementarlo y finalmente, asignar un valor a cada funcional en Σ_K debe determinar de forma única una función en P_K. Esta última noción merece una definición formal.

Definición 2.13. *El elemento finito* (K, P_K, Σ_K) *se dice unisolvente si asignarle un valor a cada grado de libertad en* Σ_K *determina de forma única una función en* P_K*.*

Con la unisolvencia del elemento finito se puede construir una base para el espacio de funciones P_K. Si definimos $\Sigma_K = \{\gamma_n,\ 1 \leq n \leq m\}$ para algún $m \geq 1$, la unisolvencia requiere que P_K tenga dimensión m, con esto definimos el conjunto de funciones, $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ tal que $\phi_i \in P_K$ y

$$\gamma_n(\phi_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{2.16}$$

La unisolvencia del elemento finito implica que el conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ está bien definido y representa una base para P_K, de modo que cualquier función $p \in P_K$ puede escribirse como

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(p)\phi_i(x). \tag{2.17}$$

Cada elemento finito (K, P_K, Σ_K) tiene asociado un interpolante. Para una función u suficientemente suave, definimos el interpolante sobre K como la única función $\pi_K u \in P_K$ tal que

$$\gamma(\pi_K u - u) = 0, \quad \forall \gamma \in \Sigma_K.$$

Por ejemplo, si $u \in \mathcal{C}(K)$, entonces $\pi_K : \mathcal{C}(K) \to P_K$ se denomina operador de interpolación, el cual depende del conjunto Σ_K. Cada Σ_K da lugar a un π_K diferente. De (2.17) se sigue

$$\pi_K u(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(u)\phi_i(x).$$

El siguiente paso es usar el elemento finito «puntual» definido para construir un espacio de funciones sobre el dominio deseado. Consideramos entonces una partición de Ω (acotado) mediante una malla regular τ_h y definimos en cada subdominio un elemento finito unisolvente. Esto da lugar a una función única u_h definida a tramos sobre Ω tal que $u_h\big|_K \in P_K$, luego como mínimo, $u_h \in L^2(\Omega)$. Así que el espacio de elementos finitos puede escribirse como

$$\mathcal{S}_h = \{u_h \in L^2(\Omega) \mid u_h|_K \in P_K,\ \forall K \in \tau_h\},$$

donde cada $u_h \in \mathcal{S}_h$ está determinada de forma única por los grados de libertad

$$\Sigma = \bigcup_{K \in \tau_h} \Sigma_K,$$

Definición 2.14. *Sea Z un espacio de funciones. Decimos que el elemento finito (K, P_K, Σ_K) es Z conforme si el espacio de FE global correspondiente es un subespacio de Z.*

Observe que definir localmente un elemento finito unisolvente permite construir un espacio de funciones cuando menos $L^2(\Omega)$ conformes. Sin embargo, una elección particular de grados de libertad nos permite, además de asegurar la unisolvencia, garantizar conformidad respecto a un espacio de funciones particular.

Si buscamos conformidad respecto a $H^1(\Omega)$ por ejemplo, hace falta que $u_h \in S_h$ sea continua. El siguiente lema enuncia las condiciones necesarias para garantizar conformidad respecto a $H^1(\Omega)$, $H(div;\Omega)$ y $H(curl;\Omega)$.

Lema 2.15. *Sean K_1 y K_2 dominios Lipschitz que no se solapan entre sí, supongamos además que éstos se encuentran en una superficie Σ de medida no nula con vector normal exterior unitario $\boldsymbol{\nu}$, es decir $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 = \Sigma$. Consideremos los siguientes casos:*

1. *Suponga que $p_1 \in H^1(K_1)$ y $p_2 \in H^1(K_2)$ y definamos $p \in L^2(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$ como*

$$p = \begin{cases} p_1 & \text{en } K_1, \\ p_2 & \text{en } K_2. \end{cases}$$

Entonces si $p_1 = p_2$ *sobre* Σ, *se tiene* $p \in H^1(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$.

2. *Suponga que* $\boldsymbol{u}_1 \in H(div; K_1)$ *y* $\boldsymbol{u}_2 \in H(div; K_2)$ *y definamos* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$ *como*

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} \boldsymbol{u}_1 & \text{en } K_1, \\ \boldsymbol{u}_2 & \text{en } K_2. \end{cases}$$

Entonces si $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}$ *sobre* Σ, *se tiene* $\boldsymbol{u} \in H(div; K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$.

3. *Suponga que* $\boldsymbol{u}_1 \in H(curl; K_1)$, $\boldsymbol{u}_2 \in H(curl; K_2)$ *y sea* $\boldsymbol{u}$ *la función definida en el caso anterior. Entonces si* $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{\nu}$ *sobre* Σ, *se tiene* $\boldsymbol{u} \in H(curl; K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$.

Prueba.
Probaremos solo el tercer inciso del lema, la demostración de los primeros dos puede ser consultada en el Teorema 2.1.1 de [13] y [15] respectivamente. Probaremos que $\nabla \times \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$ y

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{u}_1 & \text{en } K_1, \\ \nabla \times \boldsymbol{u}_2 & \text{en } K_2. \end{cases}$$

Sea $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}_0^\infty(K_1 \cup \Sigma \cup K_2)$. Entonces, usando la definición de $\boldsymbol{u}$ y la identidad (1.37),

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cup \Sigma \cup K_2} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) &= \int_{K_1} \boldsymbol{u}_1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) + \int_{K_2} \boldsymbol{u}_2 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) \\ &= \int_{K_1} (\nabla \times \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{\phi} + \int_{K_2} (\nabla \times \boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{\phi} \\ &\quad + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{\nu}_2) \cdot \boldsymbol{\phi}, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\nu}_1$ es el vector normal exterior unitario a K_1 y análogamente $\boldsymbol{\nu}_2$ a K_2. Usando la definición del *curl* en sentido distribucional, la relación $\boldsymbol{\nu}_1 = -\boldsymbol{\nu}_2$ sobre Σ y la suposición de que $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{\nu}_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cup \Sigma \cup K_2} (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi} &= \int_{K_1 \cup \Sigma \cup K_2} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) \\ &= \int_{K_1} (\nabla \times \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{\phi} + \int_{K_2} (\nabla \times \boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{\phi}. \end{aligned}$$ □

2.3. Conjuntos de polinomios

Es posible obtener un espacio global de elementos finitos con propiedades especiales si definimos cuidadosamente los grados de libertad y el espacio de funciones polinómicas

asociados al FE. En esta sección se introducen algunas convenciones y se definen espacios de polinomios con propiedades especiales, como invarianza ante mapeos afines o ser factorizados bajo el Teorema de descomposición de Helmholtz. Cerramos esta sección con un resultado relacionado con la aproximación de funciones por polinomios en espacios de Sobolev.

Definimos entonces a P_k como el conjunto de polinomios de grado a lo sumo k en las variables x_1, x_2 y x_3, de modo que para un multi-índice $\boldsymbol{\alpha}$ con $|\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq k$, se tiene $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$. Decimos que $p \in P_k$ si y sólo si p se puede escribir como

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

para alguna elección de coeficientes $a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}$. Por otro lado definimos a $\tilde{P}_k$ como el conjunto de polinomios de grado exactamente k en las variables x_1, x_2, x_3 y análogamente decimos que, $\tilde{p} \in \tilde{P}_k$ si y sólo si

$$\tilde{p}(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 = k} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

En principio, los conjuntos P_k y $\tilde{P}_k$ están definidos en $\mathbb{R}^3$, sin embargo, en algún punto será necesario definir tales conjuntos no en un volumen sino en una porción de plano f ó segmento de recta e, por lo que definimos

$$P_k(e) = \{p|_e \mid p \in P_k\}, \quad P_k(f) = \{p|_f \mid p \in P_k\},$$

análogamente para $\tilde{P}_k$. Ahora, bajo la convención de que $p = 0$ es un polinomio de grado k para cualquier $k \in \mathbb{Z}_+$, los conjuntos P_k y $\tilde{P}_k$ constituyen un espacio vectorial, cuya dimensión analizamos a continuación.

En el caso de $\tilde{P}_k$, los elementos de la base son combinaciones que admiten hasta k repeticiones de las variables x_1, x_2 y x_3. Esto puede extenderse fácilmente a N variables (ó $\mathbb{R}^N$) y calcularse como

$$\dim(\tilde{P}_k) = \binom{N+k-1}{k},$$

así que en $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\dim(\tilde{P}_k) = \binom{k+2}{k} = \frac{1}{2}(k+2)(k+1).$$

El caso de P_k requiere una observación ingeniosa. En principio la base de este espacio puede expresarse como la unión de las bases de $\tilde{P}_j$ para $j = 0, 1, ..., k$, luego

$$\dim(P_k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{j+2}{j},$$

o simplemente podemos considerar todas las posibles combinaciones admitiendo hasta k repeticiones del conjunto de elementos x_1, x_2, x_3, z, donde z es un elemento por determinar. Este caso resulta ser el de $\tilde{P}_k$ con $N = 4$, luego el número de elementos en la combinación es

$$\binom{k+3}{k},$$

entonces, fijar $z = 1$ convierte los elementos de la combinación precisamente en la base de P_k en $\mathbb{R}^3$. Un argumento similar permite concluir para $\mathbb{R}^N$ que

$$\dim(P_k) = \binom{k+N}{k}.$$

Con base en los conjuntos de polinomios anteriores, definimos el conjunto de funciones vectoriales $\mathcal{S}_k$ como

$$\mathcal{S}_k = \{\boldsymbol{p} \in [\tilde{P}_k]^3 : \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = 0\},$$

el cual con la convención del polinomio cero mencionada anteriormente, resulta ser un subespacio de $[\tilde{P}_k]^3$. Notemos que si $\boldsymbol{p} \in [\tilde{P}_k]^3$ entonces $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \in \tilde{P}_{k+1}$ y cualquier elemento en este espacio puede escribirse de tal forma.

La base de $\mathcal{S}_k$ consta de los elementos en la base de $[\tilde{P}_k]^3$, excepto por aquellos tales que $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \neq 0$, los cuales resultan ser elementos de $\tilde{P}_{k+1}$, entonces

$$\dim(\mathcal{S}_k) = 3\dim(\tilde{P}_k) - \dim(\tilde{P}_{k+1}) = k(k+2).$$

Definamos ahora el espacio

$$\mathcal{R}_k := [P_{k-1}]^3 \oplus \mathcal{S}_k, \tag{2.18}$$

con dimensión

$$\dim(\mathcal{R}_k) = 3\dim(P_{k-1}) + \dim(\mathcal{S}_k) = \frac{1}{2}(k+3)(k+2)k.$$

En los siguientes tres lemas presentamos las propiedades del espacio de funciones polinomiales $\mathcal{R}_k$, las cuales hacen posible definir una clase especial de elementos finitos en él.

Lema 2.16. *El espacio $\mathcal{R}_k$ satisface la siguiente descomposición algebraica*

$$[P_k]^3 = \mathcal{R}_k \oplus \nabla\tilde{P}_{k+1}.$$

Prueba.
Probaremos este hecho suponiendo que si existe una función $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k \cap \nabla\tilde{P}_{k+1}$, esta tiene que ser idénticamente cero. Supongamos que tal función existe; partiendo de que

$\boldsymbol{u} \in \nabla \tilde{P}_{k+1}$, se tiene que $\boldsymbol{u} = \nabla p$ para algún $p \in \tilde{P}_{k+1}$. No es difícil mostrar que si $p \in \tilde{P}_{k+1}$, entonces satisface la identidad $p = (k-1)^{-1}\nabla p \cdot \boldsymbol{x}$, luego $\nabla p \cdot \boldsymbol{x} \in \tilde{P}_{k+1}$.

Ahora, provisto que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ se sigue que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x} = \nabla p \cdot \boldsymbol{x} = 0$, lo cual solo ocurre si y sólo si p es idénticamente cero, por tanto $\boldsymbol{u} = 0$ y $\mathcal{R}_k \cap \nabla \tilde{P}_{k+1} = \{0\}$. □

Lema 2.17. *Si $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ es tal que $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ entonces $\boldsymbol{u} = \nabla p$ para algún $p \in P_k$.*

Prueba.
Observe que si $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ entonces $\boldsymbol{u} \in (P_k)^3$ y en cualquier dominio acotado y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se tiene que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Como $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$, por el Teorema (1.40), $\boldsymbol{u} = \nabla p$ para algún $p \in H^1(\Omega)$.

Ahora, como $\nabla p = \boldsymbol{u} \in (P_k)^3$ entonces $p \in P_{k+1}$, el cual se puede expresar como $p = p_1 + p_2$ con $p_1 \in P_k$ y $p_2 \in \tilde{P}_{k+1}$. Usando este hecho con que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ tenemos

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x} = (\nabla p_1 + \nabla p_2)\cdot\boldsymbol{x} = 0,$$

de lo cual necesariamente $\nabla p_1 \cdot \boldsymbol{x} = 0$ y $\nabla p_2 \cdot \boldsymbol{x} = 0$. Provisto que $p_2 \in \tilde{P}_{k+1}$, se sigue que $\nabla p_2 \cdot \boldsymbol{x} = (k+1)p_2 = 0$, luego $p_2 = 0$ y $p = p_1 \in P_k$. □

Lema 2.18. *El espacio $\mathcal{R}_k$ es invariante ante la transformación* (2.13).

Prueba.
Si $\hat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{R}_k$, entonces $\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2$, donde $\hat{\boldsymbol{p}}_1 \in (P_{k-1})^3$ y $\hat{\boldsymbol{p}}_2 \in \mathcal{S}_k$. De (2.10) se sigue que

$$\hat{\boldsymbol{x}} = F_k^{-1}\boldsymbol{x} = B_k^{-1}\boldsymbol{x} - B_k^{-1}b_k,$$

con esto y la transformación (2.13) tenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{u}}(F_k^{-1}(\boldsymbol{x})) &= [B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_1 + B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_2](F_k^{-1}(\boldsymbol{x})) \\ &= [B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_1](F_k^{-1}(\boldsymbol{x})) + [B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_2](F_k^{-1}(\boldsymbol{x})).\end{aligned}$$

Dado que $\hat{\boldsymbol{p}}_2 \in (\tilde{P}_k)^3$, es claro que

$$\hat{\boldsymbol{p}}_2(F_k^{-1}\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x} - B_k^{-1}b_k) = \hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x}) + \hat{\boldsymbol{p}}_3(\boldsymbol{x}),$$

donde $\hat{\boldsymbol{p}}_3(\boldsymbol{x}) \in (P_{k-1})^3$. Entonces podemos reescribir a $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ como

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_1(F_k^{-1}(\boldsymbol{x})) + \hat{\boldsymbol{p}}_3(\boldsymbol{x})] + B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x}),$$

donde $(B_k^{-\top} \circ \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_3) \in (P_{k-1})^3$ y $B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}_k$. En efecto

$$B_k^{-\top}\hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{p}}_2(B_k^{-1}\boldsymbol{x})\cdot(B_k^{-1}\boldsymbol{x}) = 0,$$

ya que $\hat{\boldsymbol{p}}_2 \in \mathcal{S}_k$, luego $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$. □

Cerramos esta sección enunciando el siguiente resultado relacionado con la aproximación de funciones por polinomios en espacios de Sobolev, el cual se conoce también como el Teorema de Deny-Lions.

Teorema 2.19. *Suponga que K es un dominio Lipschitz y $k \geq 0$ un entero. Entonces existe una constante C tal que*

1. *si $p \in H^s(K)$ para algún s con $0 \leq s \leq k+1$ entonces*

$$\inf_{\phi \in P_k} \|p + \phi\|_{H^s(K)} \leq C|p|_{H^s(K)}; \tag{2.19}$$

2. *si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^s(K)$ para $0 \leq s \leq k+1$ entonces*

$$\inf_{\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{P}_k} \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{H}^s(K)} \leq C|\boldsymbol{v}|_{H^s(K)}; \tag{2.20}$$

3. *si $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^s(K)$ y $\nabla \times \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^s(K)$ para $0 \leq s \leq k$ entonces*

$$\inf_{\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{P}_{k-1}} (\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{H}^s(K)} + \|\nabla \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\phi})\|_{\boldsymbol{H}^s(K)}) \leq C(|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^s(K)} + |\nabla \times \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^s(K)} + |\nabla \times \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}^{[s]}(K)}); \tag{2.21}$$

donde $[s]$ es la parte entera de s y C es independiente de p o $\boldsymbol{v}$, pero función de K y s.

La prueba de este teorema requiere mostrar que el espacio dual de P_k es finito-dimensional. La prueba de este teorema puede consultarse con detalle en [6].

2.4. Elementos finitos *curl* conformes

Habiendo definido el espacio de funciones polinómicas $\mathcal{R}_k$, procedemos a definir una clase especial de grados de libertad que nos permitirán construir un elemento finito además de unisolvente, $H(curl; \Omega)$ conforme. En esta sección aplicaremos los resultados de transformaciones afines para mostrar que tales grados de libertad no dependen estrictamente de las dimensiones del elemento K. Por último enunciaremos bajo qué condiciones se garantiza la existencia de un interpolador con su respectiva estimación de error.

Sean $\{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_6\}$ y $\{\hat{f}_1, ..., \hat{f}_4\}$ las aristas y caras que componen a $\hat{K}$ respectivamente. Definimos sobre cada uno de estos items y sobre $\hat{K}$ mismo los funcionales

$$M_{\hat{e}}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \left\{ \int_{\hat{e}} (\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) \hat{q},\ \forall \hat{q} \in P_{k-1}(\hat{e}) \right\}, \tag{2.22}$$

$$M_{\hat{f}}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \left\{ \frac{1}{\text{área}(\hat{f})} \int_{\hat{f}} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}},\ \forall \hat{\boldsymbol{q}} \in [P_{k-2}(\hat{f})]^3 : \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} = 0 \right\}, \tag{2.23}$$

$$M_{\hat{K}}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}},\ \forall \hat{\boldsymbol{q}} \in [P_{k-3}(\hat{K})]^3 \right\}, \tag{2.24}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ y $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ los vectores tangenciales a $\hat{e}$ y normal exterior unitario a $\hat{f}$ respectivamente. Luego $\Sigma_{\hat{K}} = M_{\hat{e}} \cup M_{\hat{f}} \cup M_{\hat{K}}$. El siguiente resultado hace uso de los Lemas (2.12) y (2.18) para mostrar que los grados de libertad anteriores son invariantes bajo la transformación de $\hat{K}$ a K.

Lema 2.20. *Sean* $\{e_1, ..., e_6\}, \{f_1, ..., f_4\}, \boldsymbol{\tau}$ *y* $\boldsymbol{\nu}$ *los conjuntos y vectores de* K *análogos a los de* $\hat{K}$ *y sea* B_K *la matriz de transformación del mapeo afín* (2.10)*. Suponga que* $\det(B_K) > 0$ *y que* $\boldsymbol{\tau}$ *y* $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ *están relacionados por* (2.15)*, entonces los funcionales*

$$M_e(\boldsymbol{u}) = \left\{ \int_e (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) q,\ \forall q \in P_{k-1}(e) \right\}, \tag{2.25}$$

$$M_f(\boldsymbol{u}) = \left\{ \frac{1}{\textit{área}(f)} \int_f \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q},\ \forall \boldsymbol{q} = B_K \hat{\boldsymbol{q}},\ \hat{\boldsymbol{q}} \in [P_{k-2}(\hat{f})]^3 : \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}} = 0 \right\}, \tag{2.26}$$

$$M_K(\boldsymbol{u}) = \left\{ \int_K \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q},\ \forall \boldsymbol{q} = \frac{1}{\det(B_K)} B_K \hat{\boldsymbol{q}},\ \hat{\boldsymbol{q}} \in [P_{k-3}(\hat{K})]^3 \right\}, \tag{2.27}$$

son idénticos a los definidos para el elemento de referencia $\hat{K}$*,* i.e. $\Sigma_{\hat{K}} = \Sigma_K$*.*

Prueba.
Usando el cambio de variables (2.13), tenemos

$$\int_K \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q} = \int_{\hat{K}} (B_K^{-\top} \hat{\boldsymbol{u}}) \cdot (B_k \hat{\boldsymbol{q}}) = \int_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}}.$$

Ahora consideramos los grados de libertad (2.26). Usando el cambio de variables (2.13) podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{área}(\hat{f})} \int_{\hat{f}} \hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{q}} =& \frac{1}{\text{área}(\hat{f})} \int_f (B_K^{\top} \boldsymbol{u}) \cdot (B_K^{-1} \boldsymbol{q}) \frac{\text{área}(\hat{f})}{\text{área}(f)} \\ =& \frac{1}{\text{área}(f)} \int_f \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{q}. \end{aligned}$$

Para probar el resultado deseado para los grados de libertad (2.25), usamos (2.15) para mostrar que, dado (2.13) es usado,

$$\int_e (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau})q = \int_e (B_K^{-\top})\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}\hat{q}\frac{long(e)}{long(\hat{e})} = \int_e \hat{\boldsymbol{u}}\cdot(B_K^{-1}\boldsymbol{\tau})\hat{q}\frac{long(e)}{long(\hat{e})}.$$

Ahora $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/long(e)$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los extremos de $\boldsymbol{e}$. Por tanto

$$B_K^{-1}\boldsymbol{\tau} = \frac{(\hat{\boldsymbol{a}}-\hat{\boldsymbol{b}})}{long(\hat{e})}\frac{long(\hat{e})}{long(e)}.$$

Por tanto

$$\int_e (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau})q = \int_{\hat{e}} (\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{q}. \quad \square$$

La *curl* conformidad se sigue del Lema 2.15, basta probar que a través de la cara que separa dos elementos en la malla τ_h, la traza tangencial es continua. Dado que los grados de libertad del tipo (2.25) y (2.26) coinciden a través de la cara y bordes en común entre elementos, entonces éstos se anulan para una diferencia de funciones definidas en cada elemento.

Lema 2.21. *Si $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ es tal que los grados de libertad del tipo* (2.26) *se anulan en una cara dada f y además, los grados de libertad del tipo* (2.25) *se anulan en cada borde de f, entonces $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\nu} = 0$ en f.*

Prueba.
Por el Lema 2.20, podemos probar este hecho en el elemento de referencia. Además, podemos asumir que $\hat{f}$ es la cara de $\hat{K}$ en el plano $\hat{x}_3 = 0$. Entonces la componente tangencial de $\boldsymbol{u}$ es

$$\hat{\boldsymbol{u}}_T = (\hat{u}_1(\hat{x}_1,\hat{x}_2), \hat{u}_2(\hat{x}_1,\hat{x}_2), 0)^\top$$

y por el Teorema de Stokes (en el plano) 1.28, para cada $\hat{q} \in P_{k-1}(\hat{f})$,

$$\int_{\hat{f}} (\hat{\nabla}_{\hat{f}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_T)\hat{q} = \int_{\hat{f}} \hat{\boldsymbol{u}}_T\cdot(\overrightarrow{\hat{\nabla}}_{\hat{f}}\times\hat{q}) + \int_{\hat{f}} (\hat{\boldsymbol{u}}_T\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{q}.$$

Ya que $\hat{q} \in P_{k-1}(\hat{f})$ tenemos $\overrightarrow{\hat{\nabla}}_{\hat{f}}\times\hat{q} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^2$, entonces el hecho de que los grados de libertad del tipo (2.25))y (2.26) se anulen sobre $\hat{f}$ y $\partial\hat{f}$, implica que $\hat{\nabla}_{\hat{f}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_T = 0$ sobre $\hat{f}$. Entonces, ya que $\hat{\boldsymbol{u}}_T \in \mathcal{R}k(\hat{f})$ (análogo en dos dimensiones), el análogo del Lema 2.17 en dos dimensiones muestra que $\hat{\boldsymbol{u}}_T = \hat{\nabla}_{\hat{f}}\hat{p}$ para algún $\hat{p} \in P_k$, donde $\hat{\nabla}_{\hat{f}}$ es el gradiente superficial sobre $\hat{f}$. Pero para cada $\hat{q} \in P_{k-1}(e)$, usando los grados de libertad nulos del tipo (2.25) en cada borde e, tenemos

$$\int_{\hat{e}} (\hat{\boldsymbol{u}}_T\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{q} = \int_{\hat{e}} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{s}}\hat{q} = 0.$$

Eligiendo $q = \partial\hat{p}/\partial s$ muestra que $q = \partial\hat{p}/\partial\hat{s}$ en cada borde $\hat{e}$ de $\hat{f}$ y podemos elegir $\hat{p} = 0$ en $\partial\hat{f}$. Entonces usando la geometría de $\hat{f}$ vemos que, $\hat{p} = \hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)r$ para algún $r \in P_{k-3}(\hat{f})$, luego, la integración por partes muestra que, para un vector tangencial fijo $\hat{\boldsymbol{\tau}}$,

$$\int_{\hat{f}} (\hat{\nabla}_{\hat{f}}\hat{p}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\hat{q} = -\int_{\hat{f}} \hat{p}(\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\nabla}_{\hat{f}}\hat{q}).$$

Ahora elegimos a $\hat{q}$ de modo que $\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\nabla}_{\hat{f}}\hat{q} = r$ y ya que $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es constante, podemos asumir que $\hat{q} \in P_{k-1}(\hat{f})$. Por tanto, usando los grados de libertad sobre la cara

$$\int_{\hat{f}} \hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)r^2 = 0,$$

concluimos entonces que $r = 0$. $\square$

Ya que el número de grados de libertad y la dimensión de $\mathcal{R}_k$ es el mismo, el siguiente resultado prueba la unisolvencia del elemento finito.

Lema 2.22. *Suponga que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ es tal que los grados de libertad* (2.25)*,* (2.26) *y* (2.27) *se anulan, entonces $\boldsymbol{u} = 0$.*

Prueba.
Primero mapeamos al elemento de referencia, donde todos los grados de libertad también se anulan. Por el lema previo sabemos que, $\hat{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{\nu}} = 0$ sobre $\partial\hat{K}$. Entonces por (1.37) junto con los grados nulos en (2.27) mostramos que

$$\int_{\hat{K}} (\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\hat{\boldsymbol{q}} = \int_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{u}}\cdot(\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad \forall\hat{\boldsymbol{q}} \in (P_{k-2})^3. \tag{2.28}$$

Usando de nuevo el Teorema de Stokes 1.28, en cada cara $\hat{f}$ de $\hat{K}$ junto con los grados de libertad nulos (2.26) muestra que

$$\int_{\hat{f}} \hat{\nabla}_{\hat{f}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_T\hat{q} = \int_{\hat{f}} \boldsymbol{u}_T\cdot\overrightarrow{\hat{\nabla}}_{\hat{f}}\times q = 0 \quad \forall\hat{q} \in P_{k-1}(f).$$

Ya que $\hat{\nabla}_{\hat{f}}\times\hat{\boldsymbol{u}}_T = (\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\hat{\boldsymbol{\nu}} = 0$ sobre $\hat{f}$ y por tanto sobre $\partial\hat{K}$. Ahora, como $\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}} \in (P_{k-1})^3$, sabemos que

$$\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{x}_1\psi_1, \hat{x}_2\psi_2, \hat{x}_3\psi_3)^\top,$$

donde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top \in (P_{k-1})^3$ y así, eligiendo $\boldsymbol{q} = \psi$ en (2.28) mostramos que $\hat{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{u}} = 0$ en $\hat{K}$. Por el Lema 2.17, $\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\nabla}\hat{p}$ para algún $\hat{p} \in P_k$. Pero el hecho de que $\hat{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{\nu}} = 0$ sobre $\partial\hat{K}$ implica que podemos tomar $p = 0$ sobre $\partial\hat{K}$ y así

$$\hat{p} = \hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3(1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3)\hat{r} \quad \text{para algún } \hat{r} \in P_{k-4}.$$

El hecho de que los grados de libertad en (2.27) se anulen implica que $\hat{p} = 0$. $\square$

Los resultados de los Lemas 2.21 y 2.22 conforman la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.23. *El elemento finito* $(K, \mathcal{R}_k, \Sigma_K)$ *con* $\Sigma_K = M_e \cup M_f \cup M_K$ *es unisolvente y* $H(curl; \Omega)$ *conforme.*

Como resultado de este teorema, el espacio de elementos finitos global en la malla τ_h puede ser caracterizado como

$$V_h = \{\boldsymbol{u} \in H(curl; \Omega) \mid \boldsymbol{u}|_K \in \mathcal{R}_k \quad \forall K \in \tau_h\}. \tag{2.29}$$

Ahora, asumiendo que $\boldsymbol{u}$ es suficientemente suave, podemos definir un interpolante «puntual» denotado por $\boldsymbol{r}_K\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}_k$ con $K \in \tau_h$, caracterizado por

$$M_e(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_K\boldsymbol{u}) = M_f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_K\boldsymbol{u}) = M_K(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_K\boldsymbol{u}) = 0,$$

con esto, se sigue que el interpolante global $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u} \in V_h$ viene dado por

$$\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u}|_K = \boldsymbol{r}_K\boldsymbol{u} \quad \forall K \in \tau_h.$$

Sin embargo, debido a los grados de libertad tipo (2.25), el interpolante no está definido para una función general en $H(curl; \Omega)$ [6]. El siguiente lema enuncia la mejor caracterización de funciones para las cuales el interpolante está bien definido.

Lema 2.24. *Suponga que existen constantes* $\delta > 0$ *y* $p > 2$ *tales que* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{1/2+\delta}(K)$ *y* $\nabla\times\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(K)$ *para cada* $K \in \tau_h$. *Entonces* $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u}$ *está bien definido y acotado.*

La prueba de este hecho puede encontrarse en [16], aunque [6] también ofrece una versión simplificada de la prueba. Bajo estas suposiciones, el interpolante tiene varias propiedades interesantes, entre ellas se encuentra el vínculo que existe entre éste y el interpolante análogo asociado a los elementos finitos $H(div, \Omega)$ conformes, los cuales no mencionamos en este trabajo. Por otro lado, podemos proveer una cota de error para $\boldsymbol{r}_h$.

Teorema 2.25. *Sea* τ_h *una malla regular en* Ω. *Entonces*

1. *Si* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ *y* $\nabla\times\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ *para* $1/2 + \delta \leq s \leq k$ *con* $\delta > 0$ *se tiene*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\times(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u})\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq Ch^s(\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)}). \tag{2.30}$$

2. *Si* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{1/2+\delta}(K),\ 0 < \delta \leq 1/2$ *y* $\nabla \times \boldsymbol{u}\big|_K \in \mathcal{D}_k$ *entonces*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(K)} \leq C(h_K^{1/2+\delta} \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2}\delta(\Omega)} + h_K \|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}). \tag{2.31}$$

donde el espacio $\mathcal{D}_k$ *viene dado por*

$$\mathcal{D}_k = P_{k-1} \oplus \tilde{P}_{k-1}\boldsymbol{x}, \tag{2.32}$$

el cual es un espacio análogo a $\mathcal{R}_k$*, construido para definir elementos finitos* $H(div; \Omega)$ *conformes.*

La prueba de este hecho es muy técnica y requiere un resultado adicional sobre como las normas de Sobolev de funciones *curl* conformes cambian con los mapeos afines. Esta prueba puede encontrarse en diversas fuentes, incluyendo el paper original de Nédélec, sin embargo citamos el trabajo de Chen [17] en esta prueba particular.

2.4.1. Elementos de Nédélec de primer orden

Consideremos el espacio de funciones polinómicas lineales ($k = 1$) dado por

$$\mathcal{R}_1 = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}, \quad \text{dónde } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^3\}, \tag{2.33}$$

donde las seis componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ pueden determinarse a partir de los grados de libertad dados (2.25), razón por la cual éstos también son conocidos como elementos de borde de Nédélec, ya que sus grados de libertad dependen de las aristas del tetraedro.

Ahora, consideremos dos de los vértices del elemento K (digamos v_i y v_j), los cuales comprenden una de las aristas (digamos e_{ij}) del tetraedro. A cada vértice podemos asociarle una función de coordenadas baricéntricas λ definida en K, la cual es lineal y satisface que $\lambda_i(v_j) = 1$ si $i = j$ y cero en otro caso.

Es fácil ver que sobre e_{ij}, la función $\boldsymbol{\phi}_{ij}$ definida por

$$\boldsymbol{\phi}_{ij} := \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i, \tag{2.34}$$

es un elemento de $\mathcal{R}_1$. Para ver esto, debemos mostrar primero que $\mathcal{R}_1$ en efecto, está caracterizado por (2.33). Recordemos que $\mathcal{R}_1 = [P_0]^3 \oplus \mathcal{S}_1$, con $\mathcal{S}_1 = \{\boldsymbol{p} \in [\tilde{P}_1]^3 : \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = 0\}$. Sea $\boldsymbol{p}$ la función vectorial dada por

$$\boldsymbol{p}(x, y, z) := \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{bmatrix},$$

donde a_i, b_i, c_i con $1 \leq i \leq 3$, son coeficientes arbitrarios en $\mathbb{C}^3$. Cómo $\boldsymbol{p} \in \mathcal{S}_1$, entonces $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} = 0$, esto es

$$a_1x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + (b_1 + a_2)xy + (c_1 + a_3)xz + (c_2 + b_3)yz = 0,$$

lo anterior sólo se da si $a_1 = b_2 = c_3 = 0$ y $a_2 = -b_1, a_3 = -c_1$ y $b_3 = -c_2$, con lo cual $\boldsymbol{p}$ adopta la forma

$$\boldsymbol{p}(x, y, z) = \begin{bmatrix} b_1y + c_1z \\ -b_1x + c_2z \\ -c_1x - c_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ -b_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

haciendo $[-c_2,\ c_1, -b_1]^\top = \boldsymbol{b}$, se tiene que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$. Ahora, tomando $\boldsymbol{a} \in [P_0]^3$ arbitrario, cualquier elemento de $\mathcal{R}_1$ puede expresarse como $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$ y así (2.33) queda verificado.

Ahora, supongamos que $\lambda_p = a_px + b_py + c_pz + d_p$ con $p = i$ o j y $1 \leq i, j \leq 4$, donde a_p, b_p, c_p y d_p son coeficientes fijos en $\mathbb{C}^3$. Se sigue de (2.34) que

$$\boldsymbol{\phi}_{ij} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} (a_ix + b_iy + c_iz + d_i) - \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} (a_jx + b_jy + c_jz + d_j),$$

lo cual es equivalente a

$$\boldsymbol{\phi}_{ij} = \begin{bmatrix} a_jd_i - a_id_j \\ b_jd_i - b_id_j \\ c_jd_i - c_id_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_jb_i - a_ib_j)y + (a_jc_i - a_ic_j)z \\ (b_ja_i - b_ia_j)x + (b_jc_i - b_ic_j)z \\ (c_ja_i - c_ia_j)x + (c_jb_i - a_ib_j)y \end{bmatrix}.$$

Reorganizando la expresión anterior, puede verse que ésta tiene la forma de (2.33) y por tanto $\boldsymbol{\phi}_{ij} \in \mathcal{R}_1$. Incluso, puede probarse que las seis funciones asociadas a cada borde de K conforman una base para $\mathcal{R}_1$ y tienen la propiedad que

$$\int_{e_{ij}} \boldsymbol{\phi}_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1.$$

Cabe también resaltar que

$$\nabla \times \boldsymbol{\phi}_{ij} = 2\nabla\lambda_i \times \nabla\lambda_j, \tag{2.35}$$

como que, en cada $K \in \tau_h$, se da $\nabla \cdot (\boldsymbol{\phi}_{ij}|_K) = 0$. Este hecho no implica que $\boldsymbol{\phi}_{ij}$ sea solenoidal en todo Ω provisto que, su componente normal no es continua a través de las

caras entre elementos y existe una contribución singular a la *divergencia* en las caras de la malla.

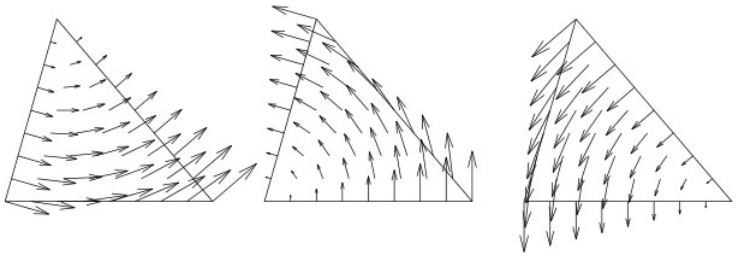

Figura 2.2: Ilustración de las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$ en dos dimensiones (figura tomada de [18]).

2.5. Elementos finitos H^1 conformes

Retomamos nuestra discusión sobre conformidad definiendo un nuevo conjunto de grados de libertad, que nos llevará a definir un elemento finito $H^1(\Omega)$ conforme. La importancia de estos elementos está relacionada con el potencial escalar presente en la descomposición de Helmholtz, como veremos más adelante.

Definición 2.26. (Espacio de elementos finitos escalar). *En un tetraedro general K definimos la terna (K, P_k, Σ_K) donde los grados de libertad pueden clasificarse en cuatro clases diferentes, dependiendo de los vértices, aristas, caras y el volumen mismo del elemento K, estos están definidos por*

1. *grados de libertad de los vértices: Sean $\boldsymbol{a}_i,\ 1 \leq i \leq 4$ los vértices de K, entonces*

$$M_v(p) = \{p(\boldsymbol{a}_i), \quad 1 \leq i \leq 4\}, \tag{2.36}$$

2. *grados de libertad de las aristas:*

$$M_e(p) = \left\{ \frac{1}{long(e)} \int_e pq \quad \forall q \in P_{k-2}(e),\ \textit{para todas las aristas } e \right\}, \tag{2.37}$$

3. *grados de libertad de las caras:*

$$M_f(p) = \left\{ \frac{1}{área(f)} \int_f pq \quad \forall q \in P_{k-3}(f),\ \textit{para todas las caras } f \right\}, \tag{2.38}$$

4. *grados de libertad del volumen:*

$$M_K(p) = \left\{ \frac{1}{vol(K)} \int_K pq \quad \forall q \in P_{k-4} \right\}. \tag{2.39}$$

Entonces $\Sigma_K = M_v(p) \cup M_e(p) \cup M_f(p) \cup M_K(p)$.

Es fácil ver que el número de grados de libertad coincide con la dimensión de P_k. Un análisis similar al de los elementos *curl* conformes nos lleva al siguiente resultado.

Lema 2.27. *El elemento finito* (K, P_k, Σ_K) *es unisolvente y* $H^1(\Omega)$ *conforme.*

La prueba de este hecho puede consultarse en [6]. El espacio de elementos finitos global queda caracterizado como

$$U_h = \{p_h \in H^1(\Omega) \mid p_h|_K \in P_k \quad \forall K \in \tau_h\}, \tag{2.40}$$

espacio estándar para polinomios continuos a tramos de grado k.

De forma análoga al caso anterior, para cualquier $p \in H^{3/2+\delta}(K), \delta > 0$, podemos definir el operador de interpolación π_K pidiendo que

$$M_v(p - \pi_K p) = M_e(p - \pi_K p) = M_f(p - \pi_K p) = M_K(p - \pi_K p) = 0.$$

Vía interpoladores locales, podemos definir el operador de interpolación global $\pi_h : H^{3/2+\delta}(\Omega) \to U_h, \delta > 0$ por

$$(\pi_h p)|_K = \pi_K p \text{ para todo } K \in \tau_h. \tag{2.41}$$

El siguiente teorema provee una cota de error para el interpolante. Una prueba de este puede ser encontrada en [13].

Teorema 2.28. *Sea* τ_h *una malla regular de* Ω. *Entonces existe una constante* C *independiente de* h *y* p *tal que*

$$\|p - \pi_h p\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{s-1} \|p\|_{H^s(\Omega)}, \quad \frac{3}{2} \leq s \leq k + 1.$$

Cerramos esta discusión enunciando el resultado principal de esta sección, el cual relaciona los espacios U_h y V_h previamente definidos.

Teorema 2.29. *Suponga que* U_h *y* V_h *son los espacios definidos respectivamente en* (2.29) *y* (2.40). *Entonces* $\nabla U_h \subset V_h$ *y si* p *es suficientemente regular para que* $\pi_h p$ *y* $\boldsymbol{r}_h \nabla p$ *estén bien definidos (e.g.* $p \in H^{3/2+\delta}(\Omega), \delta > 0$*), se tiene*

$$\nabla \pi_h p = \boldsymbol{r}_h \nabla p.$$

La prueba de este hecho puede encontrarse en [15]. Como mencionamos antes, al igual que U_h y V_h, existen espacios $H(div; \Omega)$ y $L^2(\Omega)$ conformes denotados respectivamente

por W_h y Z_h, con operadores asociados $\boldsymbol{w}_h$ y $P_{0,h}$ en el mismo orden. El siguiente diagrama ilustra la forma en la que estos espacios están relacionados.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(\mathrm{curl};\Omega) & \xrightarrow{\nabla\times} & H(\mathrm{div};\Omega) & \xrightarrow{\nabla\cdot} & L^2(\Omega) \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
U & & V & & W & & \\
\pi_h \downarrow & & \boldsymbol{r}_h \downarrow & & \boldsymbol{w}_h \downarrow & & P_{0,h} \downarrow \\
U_h & \xrightarrow{\nabla} & V_h & \xrightarrow{\nabla\times} & W_h & \xrightarrow{\nabla\cdot} & Z_h.
\end{array}$$

Figura 2.3: Diagrama de de-Rham (figura tomada de [6]).

donde

$$\begin{aligned}
U &= H^{3/2+\delta}(\Omega), \\
V &= \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1/2+\delta}(\Omega) \mid \nabla\times\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1/2+\delta}(\Omega)\}, \\
W &= \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^{1/2+\delta}(\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{w} \in L^2(\Omega)\},
\end{aligned}$$

con $\delta > 0$.

2.6. Espacio frontera

Una malla de tetraedros τ_h de Ω induce una malla triangular sobre $\partial\Omega$ en el sentido que las caras de los elementos en τ_h que yacen en $\partial\Omega$, cubren la frontera. Si τ_h es regular, entonces la malla en $\partial\Omega$ también lo es.

Denotemos la malla inducida por τ_h en $\partial\Omega$ como $\tau_h(\partial\Omega)$. Entonces para una función suficientemente suave $\boldsymbol{u}$, necesitaremos estimar en la frontera

$$\|\gamma_T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u})\|_{L_t^2(\partial\Omega)} = \|(\boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u})|_{\partial\Omega})\times\boldsymbol{\nu}\|_{L_t^2(\partial\Omega)}, \tag{2.42}$$

donde γ_T es el operador traza definido en (1.36).

Lema 2.30. *Suponga que* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ *y* $\nabla\times\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ *para algún* $1/2 < s \leq k$, *entonces*

$$\|\gamma_T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u})\|_{L_t^2(\partial\Omega)} \leq Ch^{s-1/2}(\|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)}).$$

La prueba de este hecho puede encontrarse en el Capítulo de [6]. Con frecuencia, necesitaremos asumir que sobre las fronteras donde la condición de impedancia es aplicada

(Σ), la malla tiene regularidad adicional. Para una cara dada f en $\tau_h(\partial\Omega)$, definimos el diámetro de f, denotado por h_f como el diámetro del circulo más grande contenido en f.

Definición 2.31. *Una malla $\tau_h, h > 0$ se dice cuasi-uniforme en una frontera Σ si existen constantes $\tau > 0$ y $h_0 > 0$ independientes de h tales que*

$$\tau h \leq h_f \quad \forall f \in \tau_h(\Sigma) \text{ y } 0 < h \leq h_0.$$

Esta restricción supone descartar la posibilidad de trabajar con mallas adaptativas, es decir, permitir que en ciertos puntos de la malla existan tetraedros más pequeños que en el resto. Sin embargo esta condición es la restricción más ligera que se puede imponer sobre Σ para garantizar convergencia.

La suposición de cuasi-uniformidad nos permite probar la así denominada *estimación inversa.*

Lema 2.32. *Suponga que $\tau_h(\Sigma), h > 0$ es una malla regular cuasi-uniforme sobre Σ. Sea p_h un polinomio de grado k a tramos en $\tau_h(\Sigma)$. Entonces para cualquier δ tal que $0 < \delta < 1/2$ existe una constante C tal que*

$$\|p_h\|_{H^\delta(\Sigma)} \leq Ch^{-\delta}\|p_h\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Nota 2.33. *Observe que este lema prueba que los polinomios definidos a tramos están en $H^\delta(\Sigma)$ dado $0 \leq \delta < 1/2$. Por supuesto, aplicando la estimación en cada componente de la función vectorial de polinomios a tramos, vemos que la cuasi-uniformidad implica una desigualdad inversa para tal función. En particular,*

$$\|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{H}^\delta(\Sigma)} \leq Ch^{-\delta}\|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},$$

cuando $\boldsymbol{u}_h \in V_h$.

La prueba de este hecho puede consultarse en [19]. Cerramos este capítulo con una última anotación. Si $\boldsymbol{u}_h \in V_h$ es una función correspondiente a un elemento de borde de Nédélec, entonces $\gamma_t(\boldsymbol{u}_h) \in H(div;\Sigma)$ donde

$$H(div;\Sigma) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Sigma) \mid \nabla_\Sigma\cdot\boldsymbol{u} \in L^2(\Sigma), \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ a.e. } \Sigma\}.$$

Similarmente $\gamma_T(\boldsymbol{u}_h) \in H(curl;\Sigma)$, donde

$$H(curl;\Sigma) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Sigma) \mid \nabla_\Sigma\times\boldsymbol{u} \in L^2(\Sigma), \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ a.e. } \Sigma\}.$$

Capítulo 3

Formulación variacional y discreta del problema de cavidad

En este capítulo usaremos los resultados de análisis funcional expuestos en el primer capítulo para construir una formulación variacional del problema de radiación enunciado en la Sección (1.5). Usaremos las diferentes teorías sobre problemas variacionales estudiadas y veremos bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia y unicidad de la solución al problema.

Posteriormente, derivaremos de nuestra formulación variacional una discreta, cuyo análisis de existencia y unicidad sigue un proceso similar al de su análoga continua. El orden y contenido de este capítulo fue tomado en su gran mayoría de Monk [6], quien a su vez sigue múltiples fuentes literarias, de las cuales mencionamos algunas aquí.

1. Formulación variacional

Retomamos nuestro problema fuerte suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un dominio acotado con dos fronteras conexas disjuntas Γ y Σ. Nos proponemos hallar el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ correspondiente a una densidad de corriente $\boldsymbol{F}$ de baja frecuencia que satisface la ecuación de campo (1.17), sujeta a las condiciones de conductor perfecto sobre Γ y de impedancia sobre Σ, cómo se muestra a continuación

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) - \kappa^2 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} \quad \text{en } \Omega, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{3.2}$$

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{\nu} - i\kappa\lambda \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{g} \quad \text{sobre } \Sigma, \tag{3.3}$$

donde $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones conocidas. Partiendo de la ecuación de campo (3.1), seguimos el método de Galerkin continuo [13], tomando el producto escalar con el complejo

conjugado de una función vectorial $\boldsymbol{\phi}$ suficientemente regular e integramos sobre Ω para obtener

$$\int_\Omega \nabla\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}} - \kappa^2\int_\Omega(\varepsilon_r\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}} = \int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}. \tag{3.4}$$

Esta expresión queda bien definida si el espacio de funciones donde buscamos la solución es $H(curl;\Omega)$ o un subespacio de este con las mismas propiedades, luego podemos usar la identidad (1.37) sobre el término con doble *curl* para obtener

$$\int_\Omega \nabla\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}} = \int_\Omega(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}} + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T,$$

reemplazando en (3.4) se tiene

$$\int_\Omega(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}} + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T - \kappa^2\int_\Omega(\varepsilon_r\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}} = \int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}. \tag{3.5}$$

Ahora, como $\partial\Omega = \Gamma\cup\Sigma$ y $\Gamma\cap\Sigma = \emptyset$ se sigue que

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T = \int_\Gamma\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T + \int_\Sigma\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T.$$

Dado que la expresión $\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})$ es desconocida sobre Γ, podemos pedir que la componente tangencial de $\boldsymbol{\phi}$ sea nula en este sector de frontera, es decir

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}_T = (\boldsymbol{\nu}\times\overline{\boldsymbol{\phi}}|_\Gamma)\times\boldsymbol{\nu} = 0,$$

o simplemente pedimos que $\boldsymbol{\nu}\times\overline{\boldsymbol{\phi}} = 0$ sobre Γ. Por otro lado, la condición de impedancia nos lleva a que

$$\boldsymbol{\nu}\times(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}) = -(i\kappa\lambda\boldsymbol{E}_T + \boldsymbol{g}) \quad \text{sobre } \Sigma,$$

luego, (3.5) puede reescribirse como

$$\int_\Omega\big[(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}} - \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{E})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}\,\big] - i\kappa\int_\Sigma(\lambda\boldsymbol{E}_T)\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T = \int_\Omega\boldsymbol{F}\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}} + \int_\Sigma\boldsymbol{g}\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}}_T. \tag{3.6}$$

A fin de que las integrales en (3.6) tengan sentido, definimos el espacio $X\subset H(curl;\Omega)$ como

$$X := \{\boldsymbol{u}\in H(curl;\Omega)\mid \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma \text{ y } \boldsymbol{u}_T\in\boldsymbol{L}^2(\Sigma) \text{ sobre } \Sigma\}. \tag{3.7}$$

Denotando el producto interno usual en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{L}^2(\Sigma)$ por

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_\Omega = \int_\Omega\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}, \quad \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_\Sigma = \int_\Sigma\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}},$$

establecemos la formulación variacional del problema de cavidad como: *Dados* $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *y* $\boldsymbol{g} \in L_t^2(\Sigma)$*, debemos hallar* $\boldsymbol{E} \in X$ *tal que*

$$(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}, \nabla\times\boldsymbol{\phi})_\Omega - \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\phi})_\Omega - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{E}_T, \boldsymbol{\phi}_T\rangle_\Sigma = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi})_\Omega + \langle\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle_\Sigma, \quad \forall\boldsymbol{\phi} \in X, \quad (3.8)$$

donde cabe anotar que sobre el lado izquierdo de la ecuación, puede definirse la forma sesquilineal $a : X \times X \to \mathbb{C}$ como

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{u}, \nabla\times\boldsymbol{v})_\Omega - \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_\Omega - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{u}_T, \boldsymbol{v}_T\rangle_\Sigma, \quad \forall\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X. \quad (3.9)$$

Ahora, nos proponemos estudiar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional puesto en (3.8).

Es fácil ver que la forma sesquilineal a definida en (3.9) no es coerciva, por lo que la teoría de Lax-Milgram es inaplicable. Por otro lado, analizar el problema desde la teoría de Babuška-Brezzi implica construir una nueva formulación variacional partiendo del problema fuerte, por lo cual, optaremos por transformar la expresión (3.8) en una ecuación de operadores y aplicar la alternativa de Fredholm. Naturalmente, varias suposiciones sobre los parámetros ε_r, μ_r y el dominio Ω deberán hacerse a fin de garantizar la existencia y unicidad del problema.

Observe que considerar que la solución cae enteramente en el *kernel* del operador *curl* cambia drásticamente la estructura de la formulación (3.8). Esta idea puede simplificar el análisis de la solución si consideramos que el espacio puede dividirse en funciones que yacen dentro y fuera del *kernel* del operador, para lo cual usaremos el Teorema de descomposición de Helmholtz.

Ahora, enunciaremos las condiciones bajo las cuales podemos garantizar existencia y unicidad de la solución a nuestro problema variacional usando la alternativa de Fredholm.

Suponemos que Ω es un poliedro Lipschitz, con frontera $\partial\Omega$ consistente de dos componentes conexas disjuntas Γ y Σ. Además, suponemos que Ω puede ser descompuesto en P subdominios denotados $\Omega_p,\ p = 1, ..., P$ tales que

1. $\overline{\Omega} = \bigcup_{p=1}^{P} \overline{\Omega}_p$;
2. $\Omega_p \cap \Omega_q = \emptyset$, si $p \neq q$;
3. Ω_p es conexo y tiene frontera Lipschitz continua para cada $p = 1, ..., P$;
4. la función μ_r es continua a tramos y constante en cada subdominio;
5. la función ε_r es continua a tramos y tiene las siguientes propiedades:

- la restricción de ε_r a Ω_p es una función en $H^3(\Omega_p)$;
- existe una constante $c > 0$ tal que para cada $p = 1, ..., P$ se da $\Im(\varepsilon_r) \geq c$ en Ω_p ó $\Im(\varepsilon_r) = 0$ en Ω_p.

Detrás de la suposición que $\varepsilon_r\big|_{\Omega_p} \in H^3(\Omega_p)$, está el hecho de que por el Teorema de inyección de Sobolev 1.20, $\varepsilon_r \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_p)$. Este requisito de regularidad sobre ε_r lo usaremos con el Teorema de extensión de Cálderon en la prueba de unicidad de la solución, mientras que, la suposición hecha sobre μ_r tiene como fin simplificar esta prueba.

Por último, sobre λ supondremos que es una función real estrictamente positiva sobre Σ con $\lambda \in L^\infty(\Sigma)$.

1.1. Propiedades del espacio solución X

En primer lugar, veremos que el espacio X está bien definido y que dotado con un producto interno conveniente, es un espacio de Hilbert.

Teorema 3.1. *El espacio X definido en (3.7), dotado con el producto interno*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_X = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\nabla \times \boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{v}) + \langle \boldsymbol{u}_T, \boldsymbol{v}_T \rangle$$

es un espacio de Hilbert. Además, el espacio $\mathcal{X}$, definido por

$$\mathcal{X} := \{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}|_\Omega \text{ para algún } \boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})\},$$

con D el dominio exterior a Γ visto desde Ω, es denso en X.

Nota 3.2. *La norma inducida por el producto interno de X, denotada $\|\cdot\|_X$ está definida por*

$$\|\boldsymbol{u}\|_X^2 := \|\boldsymbol{u}\|_{H(curl;\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{u}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)}^2.$$

Prueba.
Mostraremos solo la primera parte del teorema. La segunda parte usa la densidad de $\boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ en $H(curl;\Omega)$ y su prueba puede consultarse en el Teorema 4.1 de [6].
El espacio X está bien definido ya que para cualquier función $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)$, la traza $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}$ tiene sentido como función en $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\Sigma)$, por lo tanto $\boldsymbol{u}_T$ está definida.

Ver que X es un espacio de Hilbert implica probar que es completo. Entonces para cualquier $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X$, se tiene que $\langle \boldsymbol{u}_T, \boldsymbol{v}_T \rangle = \langle \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{v} \rangle$, podemos usar $\|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)}$ en lugar de la norma correspondiente a $\boldsymbol{u}_T$ en $\|\cdot\|_X$. Ahora suponga que tenemos una sucesión de Cauchy $\{\boldsymbol{u}_n\}_n$ en X, la cual a su vez es una sucesión en $H(curl;\Omega)$ y $\{\nu \times \boldsymbol{u}_n\}_n$ es una sucesión en $\boldsymbol{L}^2(\Sigma)$, de modo que existen funciones $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)$ y $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(\Sigma)$ tales que $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{v}$. Por otro lado, en $\boldsymbol{H}^{-1/2}(\Sigma)$ se tiene $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}$ ya que el operador traza es continuo en $H(curl;\Omega)$. Por lo tanto $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ y X es

completo. □

En el siguiente teorema caracterizamos aquellos elementos en X que yacen en el *kernel* del operador *curl* y tienen componente tangencial nula. Para este fin traeremos a colación el espacio $L_t^2(\partial\Omega)$ definida en (1.40), sobre el cual definimos el concepto de gradiente superficial.

Teorema 3.3. *Suponga que Ω es un dominio Lipschitz simplemente conexo y su frontera consta de dos secciones conexas disjuntas Γ y Σ. Adicionalmente suponga que $\boldsymbol{u} \in X$ es tal que $\boldsymbol{u}_T = 0$ sobre Σ y $\nabla\times\boldsymbol{u} = 0$ en Ω. Entonces existe un potencial escalar $p \in S$ tal que $\boldsymbol{u} = \nabla p$, donde S es el siguiente espacio*

$$S := \{p \in H^1(\Omega) \mid p = 0 \text{ sobre } \Gamma \text{ y } p \text{ es constante sobre } \Sigma\}. \tag{3.10}$$

Prueba.
Por el Teorema 1.40 sabemos que $\boldsymbol{u} = \nabla p$, para algún $p \in H^1(\Omega)$. La condición de conductor perfecto implica que sobre $\partial\Omega$ se da $\boldsymbol{u}_T = (\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{\nu} = 0$. Pero $\boldsymbol{u}_T = (\nabla p)_T = \nabla_\xi p$, donde $\nabla_\xi p$ es el gradiente superficial en $\xi = \Gamma$ ó Σ, entonces p es constante sobre cada componente de la frontera y podemos elegir (particularmente sobre Γ) que este sea cero. □

En el siguiente lema probamos que ∇S es un subespacio cerrado de X y por tanto, podemos usar el Teorema de descomposición ortogonal para dividir a X.

Lema 3.4. *(Descomposición de Helmholtz) El espacio ∇S es un subespacio cerrado de X y podemos escribir*

$$X = X_0 \oplus \nabla S, \tag{3.11}$$

donde

$$X_0 = \{\boldsymbol{u} \in X \mid (\varepsilon_r\boldsymbol{u}, \nabla\xi) = 0 \quad \forall \xi \in S\}, \tag{3.12}$$

Nota 3.5. *La ecuación* (3.11) *es equivalente a la expresión clásica del Teorema de descomposición de Helmholtz. Por el lema anterior, cualquier función $\boldsymbol{u} \in X$ puede expresarse de forma única como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \nabla p$ para algún $\boldsymbol{u}_0 \in X_0$ y $p \in S$. De la definición de X_0, se sigue que si $\xi \in H_0^1(\Omega)$, entonces*

$$(\nabla\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0), \xi) = -(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0, \nabla\xi) = 0,$$

de modo que $\nabla\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0) = 0$, luego $\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0 \in H(div, \Omega)$ y su traza normal $\boldsymbol{\nu}\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0)$ está bien definida. Ahora, eligiendo $\xi \in S$ tal que $\xi = 1$ sobre Σ, vemos que $\langle\boldsymbol{\nu}\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0), 1\rangle_{\partial\Omega} = 0$. Provisto entonces que la divergencia *se anula en Ω, tenemos*

$$0 = (\nabla\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0), 1) = \langle\boldsymbol{\nu}\cdot(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_0), 1\rangle_{\partial\Omega},$$

concluimos que $\langle \boldsymbol{\nu} \cdot (\varepsilon_r \boldsymbol{u}_0), \rangle_\Gamma = 0$ *y por tanto, por el Teorema 1.41, existe una función vectorial* $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *tal que* $\varepsilon_r \boldsymbol{u}_0 = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$*, luego*

$$\boldsymbol{u} = \varepsilon_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\psi} + \nabla p,$$

la cual se reduce a la descomposición clásica de Helmholtz del Teorema 1.44 cuando $\varepsilon_r = 1$.

Prueba.
Esta demostración es idéntica a la del Teorema 4.2 de [20]. El espacio ∇S es cerrado en X ya que S lo es en $H^1(\Omega)$. Veamos que la descomposición de X tiene sentido. Sea $b : X \times X \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal definida por

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\nabla \times \boldsymbol{u}, \nabla \times \boldsymbol{v}) + (\varepsilon_r \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \langle \boldsymbol{u}_T, \boldsymbol{v}_T \rangle, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X.$$

Ya que ε_r tiene componente real acotada y estrictamente positiva, la forma sesquilineal b es coerciva y acotada. Luego, por el lema de Lax-Milgram existe una única función $P\boldsymbol{u} \in \nabla S$ tal que

$$b(P\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\varepsilon_r \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \nabla S.$$

Se sigue que P es un operador acotado que va de X a ∇S y obviamente se da $P\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ si $\boldsymbol{u} \in \nabla S$, luego P es una proyección. Por lo tanto podemos escribir cualquier función $\boldsymbol{u} \in X$ como $\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{u} + (I - P)\boldsymbol{u}$. Pero $(I - P)\boldsymbol{u} \in X_0$ ya que para cualquier $\xi \in S$

$$(\varepsilon_r (I - P)\boldsymbol{u}, \nabla \xi) = b((I - P)\boldsymbol{u}, \nabla \xi) = 0. \qquad \square$$

El siguiente resultado es vital para el uso de la alternativa de Fredholm.

Teorema 3.6. *Bajo las suposiciones del análisis sobre* $\varepsilon_r, \mu_r, \lambda$ *y* Ω*, el espacio* X_0 *se inyecta de forma compacta en* $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

La prueba de este hecho puede consultarse en la Proposición 2.28 de [21]. Por último, enunciamos la así denominada desigualdad de Friedrichs, con la cual probamos que en efecto todas las funciones de X en el *kernel* del operador *curl* se encuentran en ∇S, excepto por $\boldsymbol{u} = 0$.

Lema 3.7. *Suponga que* Ω *es un dominio Lipschitz acotado y simplemente conexo, con frontera* $\partial\Omega$ *que consta de dos sectores conexos disjuntos* Γ *y* Σ*. Adicionalmente, suponga que* ε_r *satisface todas las condiciones discutidas. Entonces existe una constante* C *tal que para cada* $\boldsymbol{u} \in X_0$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)})$$

El espíritu de esta prueba es el mismo que la del Corolario 3.51 de [6], el cual básicamente requiere verificar que si $\boldsymbol{u} \in X_0$ y

$$\|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} = 0,$$

entonces $\boldsymbol{u} = 0$.
Como en principio $\boldsymbol{u} \in X$ (ya que $X_0 \subset X$) con $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ en Ω y $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u} = 0$ sobre Σ, por el Teorema 3.3, $\boldsymbol{u} = \nabla p$ para algún $p \in S$, sin embargo, como $\boldsymbol{u} \in X_0$, entonces $\boldsymbol{u} \in (\nabla S) \cap (\nabla S)^{\perp}$ y por tanto $\boldsymbol{u} = 0$.

Por último, enunciamos un par de resultados relacionados con la formulación discreta del problema, los cuales retomaremos más adelante en este capítulo.

Lema 3.8. *Suponga que $\boldsymbol{u} \in X$ y el interpolante de los elementos finitos* curl *conformes $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u}$ está bien definido. Entonces $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u} \in X$.*

Nota 3.9. *Esto implica que es suficiente definir los grados de libertad asociados con los bordes y caras sobre Γ a cero a fin de construir funciones de elementos finitos en X. Por tanto podemos definir*

$$X_h = \{\boldsymbol{u}_h \in H(curl;\Omega) \mid \boldsymbol{u}_h\big|_K \in \mathcal{R}_k,\ \forall K \in \tau_h, \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

y para una función suficientemente suave en $\boldsymbol{u} \in X$, sabemos que $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u} \in X_h$ por lo que la estimación de error del Teorema 2.25 se satisface para interpolaciones en X también.

Prueba.
Sea f una cara de la malla sobre Γ. Los grados de libertad (Monk (5.36) y (2.26) asociados con f solo dependen de las componentes tangenciales en $\boldsymbol{u}$ sobre f, las cuales se anulan. Por tanto todos los grados de libertad asociados con f se anulan y por el Lema 2.21, $\boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u} = 0$ sobre f.□

El siguiente Lema establece una estimación de error para el interpolante. Este resultado se sigue del Teorema 2.25 y el Lema 2.30.

Lema 3.10. *Suponga que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ y $\nabla \times \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega)$ para algún $1/2 < s \leq k$ entonces*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_h\boldsymbol{u}\|_X \leq Ch^{s-1/2}(\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)} + \|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)}).$$

La prueba de este hecho se sigue de los resultados enunciados en el Lema 2.30 y el Teorema 2.25.

1.2. Existencia de la solución

Partimos de que cualquier elemento $\boldsymbol{E} \in X$ se puede representar de forma única como $\boldsymbol{E}_0 + \nabla p$ para algún $\boldsymbol{E}_0 \in X_0$ y $p \in S$. Haciendo los reemplazos pertinentes en (3.8) y

usando que $\nabla\times\nabla p = 0$ y $(\nabla p)\times\boldsymbol{\nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$, tenemos

$$(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_0, \nabla\times\boldsymbol{\phi}) - \kappa^2(\varepsilon_r(\boldsymbol{E}_0+\nabla p), \boldsymbol{\phi}) - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{E}_{0,T}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle, \quad \forall\boldsymbol{\phi}\in X. \quad (3.13)$$

Si elegimos $\boldsymbol{\phi} = \nabla\xi$ para algún $\xi \in S$, del hecho que $\nabla\xi \in H_0(curl;\Omega)$ se sigue que $\gamma_t(\nabla\xi) = 0$ y en consecuencia

$$(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_0, \nabla\times(\nabla\xi)) = 0, \quad \langle\lambda\boldsymbol{E}_{0,T}, (\nabla\xi)_T\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{g}, (\nabla\xi)_T\rangle = 0,$$

por último, de la ortogonalidad entre X_0 y ∇S se infiere que $(\varepsilon_r\boldsymbol{E}_0, \nabla\xi) = 0$, luego $p \in S$ satisface

$$-\kappa^2(\varepsilon_r\nabla p, \nabla\xi) = (\boldsymbol{F}, \nabla\xi) \quad \forall\xi\in S, \quad (3.14)$$

El cual es un problema variacional con solución única, provistas la suposiciones hechas sobre ε y Ω. Como consecuencia de esto, se deriva una cota para ∇p.

Lema 3.11. *Supongamos $\kappa > 0$ y que Ω, ε_r satisfacen las suposiciones hechas sobre estos. Entonces existe una única solución $p \in S$ a (3.14) y hay una constante C independiente de $\boldsymbol{F}$ tal que*

$$\|\nabla p\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \le C\|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \quad (3.15)$$

La prueba de este lema es una aplicación del Lema de Lax-Milgram. Sobre el lado izquierdo se puede definir una forma sesquilineal $b : S\times S \to \mathbb{C}$ que resulta ser acotada ya que ε_r lo es (de lo que se sigue (3.15)). Por otro lado, eligiendo $\xi = p$ y tomando en cuenta que $\Re(\varepsilon_r)$ es uniformemente positiva, se prueba la coercividad de b.

Este lema prueba que buscar $\boldsymbol{E} \in X$ ó $\boldsymbol{E}_0 \in X_0$ es equivalente, por lo que nos centramos en estudiar el problema de encontrar $\boldsymbol{E}_0 \in X_0$ tal que

$$(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_0, \nabla\times\boldsymbol{\phi}) - \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{\phi}) - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{E}_{0,T}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}) + \langle\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle + \kappa^2(\varepsilon_r\nabla p, \boldsymbol{\phi}), \quad \forall\boldsymbol{\phi}\in X_0, \quad (3.16)$$

donde la restricción de las funciones test a X_0 está justificada por el hecho de que $X_0 \subset X$.

Ahora, buscamos llevar la expresión (3.16) a una ecuación de operadores, donde usaremos las propiedades de compacidad del espacio X_0 para probar que el operador involucrado es compacto. El espacio natural para poner tal ecuación es X_0, sin embargo, nuestro espacio de elementos finitos no es un subespacio de X_0 sino de X (como veremos más adelante), por lo que trabajaremos en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Empecemos entonces por definir la forma sesquilineal $a_+ : X\times X \to \mathbb{C}$ como

$$a_+(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{u}, \nabla\times\boldsymbol{v}) + \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{u}_T, \boldsymbol{v}_T\rangle, \quad \forall\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in X. \quad (3.17)$$

Lema 3.12. *La forma sesquilineal a_+ es coerciva y existe una constante $\alpha > 0$, dependiente de $\mu_r, \varepsilon_r, \lambda$ y κ pero independiente de $\boldsymbol{u}$ tal que*

$$|a_+(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})| \geq \alpha \|\boldsymbol{u}\|_X^2, \quad \forall \boldsymbol{u} \in X.$$

La prueba de este hecho es de carácter algebraico y usa la desigualdad aritmética-geométrica media. Puede ser consultada en el Lema 4.10 de [6].

El lado izquierdo de la expresión (3.16) puede escribirse como

$$a_+(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{\phi}) - 2\kappa^2(\varepsilon_r \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{\phi}), \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_0.$$

Definamos a $K : \boldsymbol{L}^2(\Omega) \to \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ como el mapeo tal que si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, entonces $K\boldsymbol{f} \in X_0 \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ es tal que

$$a_+(K\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) = -2\kappa^2 \int_\Omega \varepsilon_r \boldsymbol{f} \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_0, \tag{3.18}$$

de modo que, el lado izquierdo de la expresión (3.16) puede escribirse como

$$a_+((I + K)\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{\phi}), \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_0.$$

Teorema 3.13. *El operador K es un mapeo compacto y acotado de $\boldsymbol{L}^2(\Omega) \to \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, además*

$$\|K\boldsymbol{f}\|_X \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \tag{3.19}$$

Prueba.
Empezamos por mostrar que K está bien definido demostrando que la forma sesquilineal a_+ satisface las condiciones de Lax-Milgram. La coercividad fue establecida en el Lema 3.12, basta mostrar que a_+ es acotada. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que ε_r, μ_r y λ son acotadas, tenemos

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq C \left(\|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \|\nabla \times \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} \|\boldsymbol{v}_T\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} \right),$$

donde C depende de κ y las cotas superiores e inferiores de μ_r, ε_r y λ, luego

$$|a_+(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq C\|\boldsymbol{u}\|_X \|\boldsymbol{v}\|_X,$$

por tanto $K\boldsymbol{f}$ está bien definido y $\|K\boldsymbol{f}\|_X \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$.

Veamos ahora que K es compacto. Suponga que $\{\boldsymbol{f}_n\}_n$ es una sucesión acotada en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. La desigualdad anterior muestra que $\{K\boldsymbol{f}_n\}_n$ es acotada en X_0 y del Teorema 3.6, se sigue que existe una subsucesión que converge fuertemente en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, luego K es compacto. □

Para completar la igualdad en (3.16), definimos el vector $\boldsymbol{\psi} \in X_0 \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ tal que

$$a_+(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_T \rangle + \kappa^2(\varepsilon_r \nabla p, \boldsymbol{\phi}), \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_0, \tag{3.20}$$

el cual, aplicando el Lema de Lax-Milgram, sabemos que $\boldsymbol{\psi}$ existe y está bien definido, además

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_X \leq C(\|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)}), \tag{3.21}$$

con lo cual (3.16) puede escribirse de forma alternativa como

$$a_+((I + K)\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{\phi}) = a_+(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_0.$$

Ahora, usando la sesquilinealidad de a_+ se constituye una ecuación de operadores del tipo Fredholm

$$(I + K)\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{\psi}, \tag{3.22}$$

así que el problema (3.16) se reduce a encontrar un $\boldsymbol{E}_0 \in X_0$ que resuelve la ecuación (3.22). Como K es compacto, la alternativa de Fredholm es aplicable y esta garantiza la existencia de una o varias soluciones a (3.8). En el caso de solución única, anticipamos una estimación de su norma como

$$\|\boldsymbol{E}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\psi}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \tag{3.23}$$

1.3. Unicidad de la solución

El análisis de unicidad de la solución de (3.22), parte de la existencia de varias soluciones del mismo y prueba que todas estas deben ser iguales entre sí. Para este fin, suponemos que uno de estos dos casos (o ambos) se dan:

- la parte imaginaria de ε_r es estrictamente positiva en algún subdominio abierto de Ω;
- la frontera Σ es no vacía.

Supongamos que $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2 \in X$ son soluciones de (3.22) y definamos $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 \in X$. De la linealidad del sistema se infiere que $\boldsymbol{Z}$ debe satisfacer el problema homogéneo

$$(\mu_r^{-1}\nabla \times \boldsymbol{Z}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) - \kappa^2(\varepsilon_r \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\phi}) - i\kappa\langle \lambda \boldsymbol{Z}_T, \boldsymbol{\phi}_T \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in X. \tag{3.24}$$

Para probar unicidad es suficiente ver que $\boldsymbol{Z} = 0$ es la única solución del problema homogéneo anterior. En el siguiente teorema probamos este resultado.

Teorema 3.14. *Bajo las condiciones impuestas sobre los parámetros $\mu_r, \varepsilon_r, \lambda$, el dominio Ω y la frontera Σ, existe a lo más una solución $\boldsymbol{E}$ del problema* (3.8).

La prueba consta de dos partes. En la primera, usando las suposiciones sobre ε_r y Σ, se muestra que la solución es única, ya sea en el subdominio abierto de Ω en el que $\Im(\varepsilon_r) > 0$ o sobre Σ. Posteriormente usamos el resultado de *continuación única* de [22] para mostrar la unicidad de la solución en el resto del dominio.

El resultado de *continuación única* no se sigue fácilmente de la formulación variacional de las ecuaciones de Maxwell, en su lugar, deberemos usar un resultado de *desigualdades diferenciales* de [22].

Lema 3.15. *Sea Ω_1 un dominio conexo de $\mathbb{R}^3$ y suponga que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega_1)$ donde $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ es una función real que satisface*

$$|\Delta \boldsymbol{v}| \leq C \sum_{q=1}^{3} (|v_q| + |\nabla v_q|) \text{ a.e. en } \Omega_1,$$

donde C es una constante real positiva. Si $\boldsymbol{v}$ se anula en toda una vecindad de un punto $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega_1$, entonces $\boldsymbol{v}$ es idénticamente cero en Ω_1.

La prueba de este lema puede consultarse en el Lema 8.5 de [22]. Con este resultado, enunciamos el siguiente teorema cuya prueba sigue de cerca la demostración del Teorema 9.3 de [22].

Teorema 3.16. *(Continuación única). Suponga que Ω_0 es un subdominio abierto y conexo de Ω. Suponga que las funciones $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H(curl; \Omega_0)$ satisfacen en Ω_0*

$$i\kappa\varepsilon_r \boldsymbol{u} + \nabla \times \boldsymbol{v} = 0,$$
$$i\kappa\mu_r \boldsymbol{v} - \nabla \times \boldsymbol{u} = 0,$$

y además, $\boldsymbol{u}$ es nula en una bola de radio estrictamente positivo contenida en Ω_0. Suponga también que ε_r es una función real y continuamente diferenciable en Ω_0, mientras que μ_r es real y constante en el mismo dominio. Entonces $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} = 0$ en Ω_0.

Prueba.
Usando el hecho de que $\nabla \times \boldsymbol{v} = -i\kappa\varepsilon_r \boldsymbol{u}$, tenemos

$$\nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{v}) - \kappa^2 \mu_r \boldsymbol{v} = 0 \text{ en } \Omega_0.$$

Dado que μ_r es constante en Ω_0, tomando *divergencia* en la ecuación anterior nos lleva a que $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ en Ω_0. Sin embargo como

$$\nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{v}) = \varepsilon_r^{-1} (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v}) + (\nabla \varepsilon_r^{-1}) \times (\nabla \times \boldsymbol{v}),$$

y además

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} = -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}),$$

tenemos

$$\Delta \boldsymbol{v} = \varepsilon_r(\nabla \varepsilon_r^{-1}) \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) - \kappa^2 \mu_r \boldsymbol{v}.$$

Luego $\Delta \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega_0)$. Ahora, por los resultados de *regularidad elíptica interior* enunciados en el Teorema 2.7 de Leis [23], tenemos que para cualquier Ω_1 compactamente contenido Ω_0, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega_1)$. Con esto, podemos aplicar el Lema 3.15 a las partes real e imaginaria de $\boldsymbol{v}$ y concluir que $v = 0$ en Ω_0. □

Prueba del Teorema 3.14. Considere la solución $\boldsymbol{Z} \in X$ de (3.24). Tomemos ahora $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{Z}$ y tomemos la parte imaginaria de la ecuación resultante para mostrar que

$$\kappa^2(\Im(\varepsilon_r)\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}) + \kappa\langle \lambda \boldsymbol{Z}_T, \boldsymbol{Z}_T \rangle = 0. \tag{3.25}$$

Ya que λ es real y positiva, esto implica que $\boldsymbol{Z}_T = 0$ sobre Σ y $\boldsymbol{Z} = 0$ en algún subdominio de Ω donde $\Im(\varepsilon_r)$ es estrictamente positiva.
Supongamos primero que $\Im(\varepsilon_r) > 0$ en algún subdominio $\Omega_p \subset \Omega$. Si $\Omega_p = \Omega$ la prueba está lista. Si no, entonces solo podemos concluir que $\boldsymbol{Z} = 0$ en todos los subdominios tales que $\Im(\varepsilon_r \neq 0)$. Sea Ω_p un subdominio en el que hemos probado que $\boldsymbol{Z} = 0$ y Ω_q el subdominio en que $\Im(\varepsilon_r) = 0$, que además comparte una frontera con Ω_p tal que puede construirse un conjunto abierto compuesto por partes de los dos dominios, como se muestra.

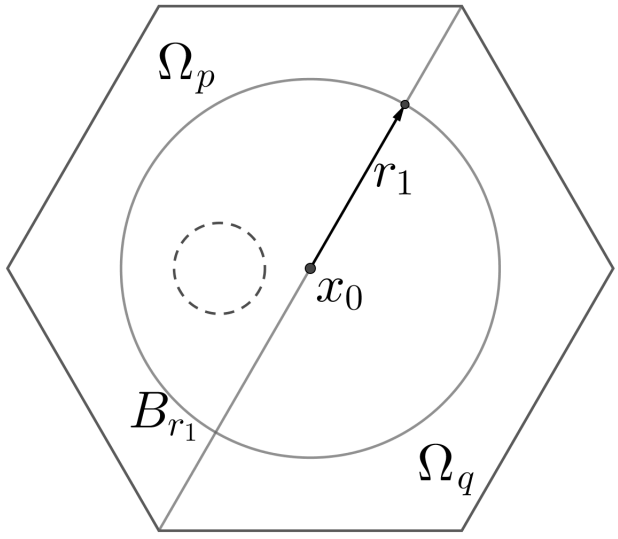

Figura 3.1: Geometría de los dominios Ω_p y Ω_q.
La bola $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ está centrada en $\boldsymbol{x}_0$ en la frontera común entre Ω_p y Ω_q. La solución $\boldsymbol{Z}$ es cero en Ω_p y por tanto, dentro de una bola más pequeña contenida en $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$.

Este par de dominios tiene las siguientes propiedades:

- $\overline{\Omega}_p \cap \overline{\Omega}_q$ es una superficie Lipschitz con interior no vacío.
- ε_r es real en Ω_q y continuamente diferenciable en este.

Ahora, extendemos ε_r en Ω_q a través de la frontera $\overline{\Omega}_p \cap \overline{\Omega}_q$ hacia Ω_p de tal forma que la función extendida $\tilde{\varepsilon}_r$ es continuamente diferenciable (lo cual es posible por el Teorema de extensión de Cálderon 1.18 ya que suponemos que $\varepsilon_r \in H^3(\Omega_q)$). También μ_r restringida a Ω_q es trivialmente extendida como una constante para obtener $\tilde{\mu}_r$ definida en $\Omega_p \cup \Omega_q$.

Sea $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ una bola de radio suficientemente pequeño r_1 centrada en el punto $\boldsymbol{x}_0$ en $\overline{\Omega}_p \cap \overline{\Omega}_q$ tal que $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0) \subset \overline{\Omega}_p \cap \overline{\Omega}_q$ y $\tilde{\varepsilon}_r > 0$ en $\Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ (ver la figura 3.1).

Ya que $\boldsymbol{Z}$ se anula en $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0) \cap \Omega_p$, en particular es nula dentro de una bola contenida en este conjunto. Por lo tanto, ya que $\tilde{\varepsilon}_r$ y $\tilde{\mu}_r$ son reales, concluimos por el resultado de *continuación única* en el Teorema 3.16 que $\boldsymbol{Z} = 0$ en $\Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ y por tanto en $\Omega_p \cup \Omega_q$. Podemos continuar de esta forma saltando de subdominio en subdominio hasta que todos los subdominios en los que ε_r es real hayan sido cubiertos y así concluimos que $\boldsymbol{Z} = 0$ en Ω.

Si ε_r es real en todo Ω, debemos invocar la suposición de que Σ es no vacía. Usando (3.25), sabemos que $\boldsymbol{Z}_T = 0$ sobre Σ. Sea Ω_q el subdominio tal que $\overline{\Omega}_q \cap \Sigma$ contiene un subdominio no trivial de Σ tal que ε_r es continuamente diferenciable en Ω_q. Como hicimos antes, podemos extender a ε_r en Ω_q a una función $\tilde{\varepsilon}_r$ definida en $\mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{\varepsilon}_r$ es continuamente diferenciable. Ya que ε_r es positiva en Ω_q, podemos escoger una bola $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ centrada en el punto $\boldsymbol{x}_0$ en $\overline{\Omega}_q \cap \Sigma$ tal que $\tilde{\varepsilon}_r$ es positiva en $\Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ y $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0) \cap \Omega \subset \Omega_q$. Ahora, si extendemos a $\boldsymbol{Z}$ por cero de Ω_q a $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0) \setminus \overline{\Omega}_q$, tenemos que

$$\int_{\Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)} \tilde{\mu}_r^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{Z}) \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{\phi}}) - \kappa^2 \tilde{\varepsilon}_r(\boldsymbol{Z} \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}}) = 0, \ \forall \boldsymbol{\phi} \in H_0(curl; \Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)),$$

de forma que $\boldsymbol{Z}$ es la solución débil de la ecuación de Maxwell y además, $B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0) \setminus \overline{\Omega}_q$. Por tanto, de nuevo por el resultado de *continuación única* del Teorema 3.16, $\boldsymbol{Z}$ se anula en $\Omega_q \cup B_{r_1}(\boldsymbol{x}_0)$ y por ende, en $\Omega_p \cup \Omega_q$. Ahora podemos proceder como antes y mostrar que $\boldsymbol{Z} = 0$ en Ω saltando a través de las fronteras entre los subdominios en los que ε_r es diferenciable. □.

Ahora, podemos resumir los resultados de existencia y unicidad de la solución a (3.8) en el siguiente teorema.

Teorema 3.17. *Bajo las condiciones impuestas sobre los parámetros $\mu_r, \varepsilon_r, \lambda$, el dominio Ω y la frontera Σ, el problema* (3.8) *posee una solución $\boldsymbol{E} \in X$ y esta es única para*

cada valor de $\kappa > 0$. Además, existe una constante $C > 0$ independiente de $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{g}$, pero dependiente de κ tal que

$$\|\boldsymbol{E}\|_X \leq C \left(\|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} \right).$$

Prueba.
De acuerdo al Lema 3.4, podemos escribir $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \nabla p$ para algún $\boldsymbol{E}_0 \in X_0$ y $p \in S$. Además, como p está determinada de forma única y el estimado (3.15) se cumple. Por el Teorema 3.14, una hipotética solución de (3.8) es única, la alternativa de Fredholm garantiza la existencia de esta y se satisface (3.23). Ya que $\boldsymbol{\psi} \in X_0$ y $(I + K)\boldsymbol{E}_0 \in X_0$, se sigue que $\boldsymbol{E}_0 = -K\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{\psi} \in X_0$, usando (3.23) se tiene

$$\|\boldsymbol{E}_0\|_X \leq \|K\boldsymbol{E}_0\|_X + \|\boldsymbol{\psi}\|_X \leq C \left(\|\boldsymbol{E}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_X \right) \leq C\|\boldsymbol{\psi}\|_X,$$

y usando (3.21)

$$\|\boldsymbol{E}\|_X \leq C \left(\|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} \right). \qquad \square$$

2. Formulación discreta

Ahora discutiremos el método de elementos finitos para discretizar la formulación de (3.8). Suponemos que el problema, bajo las suposiciones hechas sobre $\varepsilon_r, \mu_r, \lambda$ de la sección anterior, tiene solución única ya sea por que

- $\Sigma \neq \emptyset$ y λ es estrictamente positiva, o
- $\Im(\varepsilon_r)$ es estrictamente positiva definida en una bola contenida en Ω, o
- $\Im(\varepsilon_r) = 0$ y $\lambda = 0$ pero κ no es un módulo de resonancia en Ω.

En cualquiera de los casos, sabemos que (3.8) tiene solución única dependiendo continuamente de los parámetros $\varepsilon_r, \mu_r, \lambda$ y por tanto, es apropiado para ser discretizado por FE.

En esta sección usaremos los elementos finitos conformes definidos en las Secciones 2.4 y 2.5 del capítulo anterior para discretizar los espacios X y S y producir una aproximación de las ecuaciones de Maxwell puestas en un dominio acotado.

Empezamos suponiendo que Ω está cubierto por una malla regular de tetraedros τ_h, cuasi-uniforme sobre Σ, en la que usaremos los elementos de borde *curl* conformes

definidos en la Sección 2.4 y el subespacio finito-dimensional de X definido en la Nota 3.9 nuevamente, dado por

$$X_h := \{\boldsymbol{u}_h \in H(curl;\Omega) \mid \boldsymbol{u}_h|_K \in \mathcal{R}_k \ \forall K \in \tau_h \text{ y } \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}.$$

Asumimos que la malla es consistente con los coeficientes μ_r y ε_r en el sentido que las discontinuidades de éstos coinciden con uniones de caras entre elementos y que satisfacen todas las condiciones impuestas en la sección anterior. Con esto introducimos la formulación discreta:

Dados $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *y* $\boldsymbol{g} \in L_t^2(\Sigma)$*, buscamos aproximar la solución* $E \in X$ *de* (3.8) *encontrando* $E_h \in X_h$ *tal que*

$$(\mu_r^{-1} \times \boldsymbol{E}_h, \nabla \times \boldsymbol{\phi}_h) - \kappa^2(\varepsilon_r \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - i\kappa\langle \lambda \boldsymbol{E}_{h,T}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}_h) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in X_h. \quad (3.26)$$

Como en el caso continuo, debemos construir una versión discreta de la descomposición de Helmholtz para X_h, aplicarla en (3.26) y llevar la expresión resultante a una ecuación de operadores. Posteriormente, usaremos la teoría de operadores colectivamente compactos para probar convergencia.

2.1. Análisis de error vía compacidad colectiva

Empezamos por desarrollar una versión discreta de la descomposición de Helmholtz para X_h. De las propiedades escalares de los elementos finitos H^1 conformes expuestos en la Sección 2.5 y el Teorema 2.29 sabemos que si

$$S_h := \{p \in U_h \mid p = 0 \text{ en } \Gamma, p \text{ es constante sobre } \Sigma\}, \quad (3.27)$$

entonces $S_h \subset S$ y $\nabla S_h \subset V_h$. De hecho $\nabla S_h \subset X_h$, pues cualquier $p_h \in S_h$ es constante sobre $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$ y por ende su gradiente superficial es nulo, luego $\nabla p_h|_\Gamma \times \boldsymbol{\nu} = 0$. Con esto construimos la descomposición discreta de Helmholtz como

$$X_h = X_{0,h} \oplus \nabla S_h,$$

donde

$$X_{0,h} := \{\boldsymbol{u}_h \in X_h \mid (\varepsilon_r \boldsymbol{u}_h, \nabla \xi_h) = 0, \quad \forall \xi_h \in S_h\}.$$

Observe que aquí si $\boldsymbol{u}_h \in X_{0,h}$, no se da necesariamente que $\nabla \cdot (\varepsilon_r \boldsymbol{u}_h) = 0$, de modo que $X_{0,h} \not\subset X_0$. Sin embargo, se sigue conservando la ortogonalidad entre los elementos de $X_{0,h}$ y el gradiente de aquellos en S_h.

Cualquier elemento $\boldsymbol{E}_h \in X_{0,h}$ puede expresarse de forma única como

$$\boldsymbol{E}_h = \boldsymbol{E}_{0,h} + \nabla p_h \quad \text{para algún } \boldsymbol{E}_{0,h} \in X_{0,h} \text{ y } p_h \in S_h.$$

Haciendo los reemplazos pertinentes en (3.26) con $\phi_h = \nabla\xi_h$ para algún $\xi_h \in S_h$ y usando la definición de $X_{0,h}$, se deriva el análogo discreto de (3.14):

$$-\kappa^2(\varepsilon_r\nabla p_h, \nabla\xi_h) = (\boldsymbol{F}, \nabla\xi_h), \quad \forall\xi_h \in S_h. \tag{3.28}$$

Dado que ε_r tiene parte real positiva, el Lema de Lax-Milgram es aplicable y por tanto (3.28) tiene solución única. Luego el Lema de Cea provee una estimación de error cuasi-óptimo y con esto queda probado el siguiente lema.

Lema 3.18. *Suponga que $p \in S$ satisface* (3.14)*. Entonces existe una única solución $p_h \in S_h$ de* (3.28) *y*

$$\|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{\xi_h \in S_h} \|p - \xi_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

De hecho, si $p \in S$ es solución de (3.13) tal que $p \in H^s(\Omega)$, $\frac{3}{2} + \delta \leq s \leq k+1$, tenemos por el Teorema 2.28 que

$$\|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1}\|p\|_{H^s(\Omega)}.$$

Con el resultado anterior, nuestro problema se reduce a encontrar $\boldsymbol{E}_{0,h} \in X_{0,h}$ tal que

$$(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_{0,h}, \nabla\times\boldsymbol{\phi}_h) - \kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{E}_{0,h}, \boldsymbol{\phi}_h) - i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{E}_{0,h,T}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}_h) + \langle\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle + \kappa^2(\varepsilon_r\nabla p_h, \boldsymbol{\phi}_h), \tag{3.29}$$

para toda $\phi_h \in X_{0,h}$. Siguiendo la cadena de ideas del problema continuo en (3.16), retomamos la forma sesquilineal a_+ definida en (3.17) y definimos el operador $K_h : \boldsymbol{L}^2(\Omega) \to \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ de tal forma que para cualquier $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $K_h\boldsymbol{f} \in X_{0,h} \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ satisfaga

$$a_+(K_h\boldsymbol{f}, \phi_h) = -2\kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}_h), \quad \forall\boldsymbol{\phi} \in X_{0,h}. \tag{3.30}$$

Por otro lado definimos la función $\boldsymbol{\psi}_h \in X_{0,h} \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ de modo que

$$a_+(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\phi}_h) + \langle\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle + \kappa^2(\varepsilon_r\nabla p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \quad \forall\boldsymbol{\phi}_h \in X_{0,h}. \tag{3.31}$$

Dado que la forma sesquilineal a_+ es acotada y coerciva, por el Lema de Lax-Milgram se sigue que K_h y $\boldsymbol{\psi}_h$ están bien definidas. Dado esto, el problema discreto (3.29) ahora consiste en encontrar $\boldsymbol{E}_{0,h} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ tal que

$$(I + K_h)\boldsymbol{E}_{0,h} = \boldsymbol{\psi}_h. \tag{3.32}$$

con esto, es posible aplicar la teoría de operadores colectivamente compactos y probar que $\|\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{E}_{0,h}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \to 0$ cuando $h \to 0$. Empezamos por verificar que $K_h\boldsymbol{f}$ converge a $K\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, para este fin es necesario ver primero que los espacios de elementos finitos son densos en la forma apropiada.

Lema 3.19. *El espacio X_h es denso en X, en el sentido que para cualquier $\boldsymbol{u} \in X$*

$$\lim_{h\to 0} \inf_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_X = 0.$$

Similarmente S_h es denso en S.

Prueba.
Ya que el espacio $\mathcal{X}$ definido en el Teorema 3.1 es denso en X, podemos aproximar cualquier $\boldsymbol{u} \in X$ con precisión arbitraria a una función suave $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}$. Ésta a su vez puede ser aproximada con cualquier grado de precisión por su interpolante en X_h si h es tomada suficientemente suave (véase el Lema 3.10).
Similarmente, escribiendo $p \in S$ como $p = p_0 + p_1$, donde $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ y p_1 es una función suave, tomando el valor constante de p sobre Σ y que se anule sobre Γ y entonces, usando la densidad de C_0^∞ en $H_0^1(\Omega)$, podemos verificar la densidad de $S \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ en S. Entonces la estimación de error en el Teorema 2.28 provee el resultado deseado. □

Teorema 3.20. *Dada una función $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, tenemos $\|(K - K_h)\boldsymbol{f}\|_X \to 0$ cuando $h \to 0$. Además si $\boldsymbol{f} \in X_0$,*

$$\|(K - K_h)\boldsymbol{f}\|_X \leq C \inf_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \|K\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}_h\|_X.$$

Prueba.
Dado una función $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, buscamos $K\boldsymbol{f} \in X$ y $q \in S$ tales que

$$a_+(K\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) + (\varepsilon_r \boldsymbol{\phi}, \nabla q) = -(\kappa^2 + 1)(\varepsilon_r \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in X, \tag{3.33}$$

$$(\varepsilon_r K\boldsymbol{f}, \nabla \xi) = 0 \qquad \forall \xi \in S. \tag{3.34}$$

Para ver que este problema está bien puesto, deberemos usar la teoría de Babuška-Brezzi estudiada en el *Capítulo 1*. En el Lema 3.12 se probó la coercividad de a_+ en X. Además, $\nabla S \subset X$, por tanto es fácil verificar la condición $\text{ínf} - \text{sup}$ tomando $\boldsymbol{\phi} = \nabla q$, esto es

$$|(\varepsilon_r \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla q)| = |((\varepsilon_r \nabla q) \cdot \nabla q)| \geq C\|\nabla q\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \geq C\|q\|^2_{H^1(\Omega)},$$

donde hemos usado la desigualdad de Poincaré (Lema 1.19) para acotar la norma de q en $H^1(\Omega)$ en términos de la seminorma. Por tanto (3.33) tiene solución única, la cual concuerda con la definición previa de $K\boldsymbol{f}$ en (3.18), como podemos ver si seleccionamos $\boldsymbol{\phi} \in X_0$ en (3.33).

Similarmente, el operador K_h puede ser definido como la solución del problema discreto mixto de encontrar $K_h\boldsymbol{f} \in X_h$ y $q_h \in S_h$ tales que

$$a_+(K_h\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}_h) + (\varepsilon_r \boldsymbol{\phi}_h, \nabla q_h) = -(\kappa^2 + 1)(\varepsilon_r \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}_h) \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in X_h,$$

$$(\varepsilon_r K_h\boldsymbol{f}, \nabla \xi_h) = 0 \qquad \forall \xi \in S_h.$$

Usando de nuevo la coercividad de a_+ y $\nabla S_h \subset X_h$, el argumento expuesto anteriormente verifica las condiciones de Babuška-Brezzi para este problema. Eligiendo $\boldsymbol{\phi}_h \in X_{0,h}$ mostramos que el problema se reduce a la definición previa de K_h dada en (3.30).

Luego, usando el Teorema 2.6, debemos estimar

$$\|(K-K_h)\boldsymbol{f}\|_X + \|\nabla(q-q_h)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C\left\{\inf_{\boldsymbol{\chi}_h\in X_h}\|K\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\chi}_h\|_X + \inf_{\xi_h\in S_h}\|\nabla(q-\xi_h)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\right\}. \quad (3.35)$$

Pero, por el Lema 3.19, S_h es denso en S y X_h es denso en X cuando $h \to 0$. Por tanto, la parte derecha de la ecuación converge a cero cuando h decrece, con lo cual queda probada la convergencia puntual.

Ahora, si $\boldsymbol{f} \in X_0$, eligiendo $\boldsymbol{\phi} = \nabla q$ en (3.33) y usando $K\boldsymbol{f} \in X_0$, obtenemos que $(\varepsilon_r \nabla q, \nabla q) = 0$ y en consecuencia $q = 0$. La estimación se sigue entonces de (3.35). □.

El siguiente lema provee una estimación para $\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_X$.

Lema 3.21. *Sean $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\psi}_h$ respectivamente las funciones definidas para* (3.20) *y* (3.31). *Entonces*

$$\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\|_X \leq C\left(\inf_{\boldsymbol{v}_h\in X_h}\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{v}_h\|_X + \inf_{\xi_h\in S_h}\|\nabla(p-\xi_h)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\right),$$

donde $p \in S$ satisface (3.14).

Prueba.
Escribimos la definición de $\boldsymbol{\psi}$ como el problema mixto de encontrar $\boldsymbol{\psi} \in X$ y $\gamma \in S$ tal que

$$\begin{aligned} a_+(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\phi}_h) + (\varepsilon_r\boldsymbol{\phi}_h, \nabla\gamma) &= (\boldsymbol{F},\boldsymbol{\phi}) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_T\rangle + \kappa^2(\varepsilon_r\nabla p, \boldsymbol{\phi}) && \forall \boldsymbol{\phi} \in X, \\ (\varepsilon_r\boldsymbol{\psi}, \nabla\xi) &= 0 && \forall \xi \in S. \end{aligned}$$

Seleccionando $\boldsymbol{\phi} = \nabla\gamma$ y usando la definición de p, vemos que el lado derecho se anula, de modo que $(\varepsilon_r\nabla\gamma, \nabla\gamma) = 0$ y así $r = 0$.

Ahora, definimos una nueva función $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h \in X_h$ y $\gamma_h \in S_h$ que satisface

$$\begin{aligned} a_+(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h,\boldsymbol{\phi}_h) + (\varepsilon_r\boldsymbol{\phi}_h, \nabla\gamma_h) &= (\boldsymbol{F},\boldsymbol{\phi}_h) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle + \kappa^2(\varepsilon_r\nabla p, \boldsymbol{\phi}_h) && \forall \boldsymbol{\phi}_h \in X_h, \\ (\varepsilon_r\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h, \nabla\xi_h) &= 0 && \forall \xi_h \in S_h. \end{aligned}$$

Exactamente el mismo argumento, eligiendo $\boldsymbol{\phi}_h = \nabla\gamma_h$, mostramos que $\gamma_h = 0$. Llevando a cabo el análisis del problema mixto justo como en la prueba del teorema anterior, se muestra que

$$\|\boldsymbol{\psi} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h\|_X \leq C \inf_{\boldsymbol{\chi}_h \in X_h} \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\chi}_h\|_X.$$

Pero $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h \in X_{0,h}$ satisface

$$a_+(\tilde{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{\phi}_h) = (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}_h) + \langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\phi}_{h,T} \rangle + \kappa^2(\varepsilon_r \nabla p, \boldsymbol{\phi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in X_{0,h},$$

aquí, restando (3.31) a esta ecuación proporciona

$$a_+(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = \kappa^2(\varepsilon_r \nabla(p - p_h), \phi_h),$$

seleccionando $\boldsymbol{\phi}_h = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h$ mostramos que

$$\begin{aligned} C\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h, \boldsymbol{\psi}_h\|_X^2 \leq |a_+(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h)| &= |\kappa^2(\varepsilon_r \nabla(p - p_h), \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h)| \\ &\leq C\|\nabla(p - p_h)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h\|_X. \end{aligned}$$

Entonces la desigualdad triangular implica que $\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_X \leq \|\boldsymbol{\psi} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h\|_X + \|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h - \boldsymbol{\psi}_h\|_X$, y el estimado se sigue del de $\|\nabla(p - p_h)\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ en el Lema 3.18. □

Sea Λ un conjunto contable de mallas cuyo único punto de acumulación es cero, de modo que $\Lambda = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $h_n \to 0$ cuando $n \to 0$. Ésta es una sucesión decreciente de mallas, sobre la cual debemos probar que el conjunto de operadores $\{K_h\}_{h\in\Lambda}$ es colectivamente compacto. Esto se sigue de forma inmediata si probamos que el espacio de elementos finitos tiene la así denominada *propiedad de compacidad discreta.*

Definición 3.22. *Decimos que $X_{0,h},\ h \in \Lambda$, tiene propiedad de compacidad discreta si para cada sucesión $\{\boldsymbol{u}_h\}_{h\in\Lambda}$ tal que*

- *$\boldsymbol{u}_h \in X_{0,h}$ para cada $h \in \Lambda$;*
- *existe una constante C independiente de $\boldsymbol{u}_h$ y $h \in \Lambda$ tal que $\|\boldsymbol{u}_h\|_X \leq C$,*

entonces existe una subsucesión, aún denotada $\{\boldsymbol{u}_h\}_{n=1}^{\infty}$ y una función $\boldsymbol{u} \in X_0$ tal que

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \text{ fuertemente en } \boldsymbol{L}^2(\Omega) \text{ cuando } h \to 0 \text{ en } \Lambda.$$

Suponiendo de momento que $X_{0.h}$ tiene la propiedad de compacidad discreta, se puede probar la compacidad colectiva de los operadores $\{K_h\}_{h\in\Lambda}$.

Teorema 3.23. *Si $X_{0,h},\ h \in \Lambda$ tiene la propiedad de compacidad discreta entonces $\{K_h\}_{h\in\Lambda}$ es colectivamente compacto como conjunto de mapeos de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.*

Prueba.
Sea U un dominio acotado en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Necesitamos mostrar que $\mathcal{K}(U)$ es relativamente compacto en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Sea $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(U)$ una sucesión. Entonces para cada n existe un $h_n \in \Lambda$ y $\boldsymbol{u}_n \in U$ es tal que $\boldsymbol{w}_n = K_{h_n}(\boldsymbol{u}_n)$. Por tanto $\boldsymbol{w}_n \in X_{0,h_n}$ y $\|\boldsymbol{w}_n\|_X \leq C\|\boldsymbol{u}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C_1$. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (de otra forma, estaríamos en un espacio finito-dimensional y la convergencia de $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$ estaría garantizada). Pero $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$ está exactamente como en la definición de compacidad discreta y por lo tanto, la existencia de una sub-sucesión convergente está garantizada. □

Ahora debemos probar que en efecto, $X_{0,h}$ posee la propiedad de compacidad discreta. La prueba de este hecho consta de dos partes, el primer paso es probar tal propiedad para $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. Posteriormente usamos este resultado con un argumento adicional para extender la prueba a parámetros generales.

Para la prueba anterior, necesitamos un resultado adicional sobre la regularidad de las funciones en X y X_h. Este resultado establece que si los «*curls*» de las funciones $\boldsymbol{u} \in X$ y $\boldsymbol{u}_h \in X_h$ concuerdan en Ω y sus componentes tangenciales coinciden sobre la frontera, entonces $\boldsymbol{u}$ posee regularidad extra.

Lema 3.24. *Suponga que Ω es un poliedro Lipschitz acotado y simplemente conexo con frontera $\partial\Omega$, que consiste en dos secciones conexas disjuntas Σ y Γ. Sea τ_h una malla regular que es cuasi-uniforme sobre Σ. Sea $\boldsymbol{u}_h \in X_{0,h}$ y suponga que $\boldsymbol{u} \in X_0$ satisface*

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{u} &= \nabla\times\boldsymbol{u}_h \quad \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}_h \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Entonces existe $\delta > 0$ con $\delta \leq 1/2$ tal que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$, para $0 \leq s < \delta$ y

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2+s}(\Omega)} \leq C(\|\nabla\times\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Sigma)}).$$

La prueba de este lema trae a colación varios conceptos y resultados que no hemos mencionado en este trabajo, sin embargo ésta puede consultarse en la demostración del Lema 3.3 en el artículo de Hsiao, Monk y Nigam [24]. Con este resultado procedemos con la primera fase de la prueba de compacidad discreta de $X_{0,h}$.

Teorema 3.25. *Suponga $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ y $\{\tau_h\}_{h\in\Lambda}$ es regular y satisface sobre Σ la «desigualdad inversa» mencionada en la Sección 2.6. Entonces $X_{0,h}$ posee la propiedad de compacidad discreta.*

Prueba.
Sea $\boldsymbol{w}_n \in X_{0,h_n}, n = 1, 2, ...$ y suponga que $h_n \to 0$ y $\|\boldsymbol{w}_{h_n}\|_X \leq C < \infty$, para todo n. Sea $p^n \in S$ tal que $(\nabla p^n, \nabla\xi) = (\boldsymbol{w}_n, \nabla\xi)$ para todo $\xi \in S$. Entonces, sea

$\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{w}_n - \nabla p^n$. Claramente, $\boldsymbol{w}^n$ satisface

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{w}^n \text{ y } \nabla\cdot\boldsymbol{w}^n = 0 \quad & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{w}_n \quad & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ya que $\boldsymbol{w}^n \in X_0$ y $\|\boldsymbol{w}^n\|_X < C$. Entonces, por el resultado de *compacidad continua* del Teorema 3.6, existe una subsucesión, aún denotada por $\{\boldsymbol{w}^{n\infty}_{n=1}\}$, y una función $\boldsymbol{w} \in X_0$ tal que $\boldsymbol{w}^n \to \boldsymbol{w}$ fuertemente en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Por el lema anterior, $\boldsymbol{w}^n \in \boldsymbol{H}^{1/2+s}(\Omega), s > 0$, y $\nabla\times\boldsymbol{w}^n = \nabla\times\boldsymbol{w}_n \in W_h$, sabemos por el Teorema 2.25 que el interpolante $\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n$ está bien definido. Usando el hecho de que $\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{w}_n$, el interpolante de ∇p^n está bien definido y así, usando el diagrama de conmutación de la Gráfica 2.3, tenemos que $\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n = \boldsymbol{w}_n - \nabla\pi_{h_n}p^n$. Por tanto, usando el hecho de que $\boldsymbol{w} \in X_0$ y $\boldsymbol{w}_n \in X_{0,h_n}$, tenemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n)\cdot(\overline{\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n}) \\ &= \int_\Omega (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n)\cdot(\overline{\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n}) + \int_\Omega (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n)\cdot(\overline{\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n-\boldsymbol{w}_n}) \\ &= \int_\Omega (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n)\cdot(\overline{\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n}) + \int_\Omega (\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n)\cdot(\overline{-\nabla\pi_{h_n}p^n}) \\ &\leq \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por tanto $\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$. Pero

$$\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{w}^n-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.$$

Ahora expandimos el segundo término y usamos la estimación de error (2.31) para obtener

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}^n-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} &= \sum_{K\in\tau_h}\|\boldsymbol{w}^n-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|^2_{\boldsymbol{L}^2(K)} \\ &\leq \sum_{K\in\tau_h} C(h_K^{1/2+s}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{H}^{1/2+s}(K)} + h_K\|\nabla\times\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(K)})^2. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad triangular, tenemos

$$\|\boldsymbol{w}^n-\boldsymbol{r}_{h_n}\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}(\Omega)} \leq C(h_n^{1/2+s}\|\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{H}^{1/2+s}(\Omega)} + h_n\|\nabla\times\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}).$$

Pero, por el lema anterior

$$\|\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{H}^{1/2+s}(\Omega)} \leq C(\|\nabla\times\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{H}^s(\Sigma)}).$$

Usando la suposición de frontera cuasi-uniforme, la estimación inversa para espacios de orden fraccionario del Lema 2.32 y la nota asociada 2.33, tenemos

$$\|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{H}^s(\Sigma)} \leq Ch_n^{-s}\|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)}.$$

Por tanto

$$\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}^n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + Ch_n^{1/2}\|\boldsymbol{w}_n\|_X.$$

El primer término de la derecha converge a cero por construcción y el segundo porque $h_n \to 0$ y $\|\boldsymbol{w}_n\|_X \leq C$ cuando $n \to \infty$. Por tanto $\boldsymbol{w}_n \to \boldsymbol{w}$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. □

Finalizamos la prueba mostrando la propiedad de compacidad discreta de $X_{0,h}$ para un ε_r general.

Teorema 3.26. *Sea Ω un dominio Lipschitz acotado, simplemente conexo con frontera $\partial\Omega$ consistente de dos componentes Σ y Γ. Bajo las suposiciones sobre el parámetro ε_r y que la malla es regular y cuasi-uniforme sobre Σ. Entonces $\{X_{0,h}\}_{h\in\Lambda}$ tiene la propiedad de compacidad discreta.*

Prueba.
Usamos de nuevo la notación del Teorema 3.6, donde la dependencia de ε_r queda denotada en el super-índice. Sea

$$X_{0,h}^{(\varepsilon)} = \{\boldsymbol{u}_h \in X_h \mid (\varepsilon\boldsymbol{u}_h, \nabla\xi_n) = 0 \ \forall\xi_h \in S_h\}$$

para $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon = \varepsilon_r$. La descomposición de Helmholtz con respecto al producto interno usual de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ está dada por

$$X_h = X_{0,h}^{(1)} \oplus \nabla S_h. \tag{3.36}$$

Usando la forma bilineal $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2_{\varepsilon_r}}(\Omega) = (\varepsilon_r\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, tenemos la descomposición de Helmholtz

$$X_h = X_{0,h}^{(\varepsilon_r)} \oplus \nabla S_h,$$

donde $\boldsymbol{u}_h \in X_{0,h}^{\varepsilon_r}$ si y solo si $\boldsymbol{u}_h \in X_h$ y $(\varepsilon_r\boldsymbol{u}_h, \nabla\xi_h) = 0$ para todo $\xi_h \in S_h$. Ahora suponga que tenemos una sucesión $\{\boldsymbol{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\boldsymbol{w}_n \in X_{0,h}^{(\varepsilon_r)}$ para cada n, $\|\boldsymbol{w}_n\|_X \leq C\ \forall n$ y $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Usando la descomposición (3.36) tenemos

$$\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}_n^{(1,0)} + \nabla p_n^{(1)},$$

donde $\boldsymbol{w}_n^{(1,0)} \in X_{0,h_n}^{(1)}$, $p_n^{(1)} \in S_{h_n}$ y $\|\boldsymbol{w}_n^{(1,0)}\|_X \leq C\|\boldsymbol{w}_n\|_X$, de modo que existe una subsucesión convergente (usando el Teorema 3.25) tal que $\{\boldsymbol{w}_n^{(1,0)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ a $\boldsymbol{w}^{(1,0)} \in X_0^{(1)}$. Ahora sea

$$\boldsymbol{w}^{(1,0)} = \boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} + \nabla p^{(\varepsilon_r)},$$

donde $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} \in X_0^{\varepsilon_r}$ y $p^{(\varepsilon_r)} \in S$.

Ahora mostraremos que $\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)}$ en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ cuando $n \to \infty$. Usando la ortogonalidad de $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)}$ y $\boldsymbol{w}_n$ a los gradientes en S_{h_n}, tenemos

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_r(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n), (\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n)) \\
&= (\varepsilon_r(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n), (\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n^{(1,0)} - \nabla p_n^{(1)})) \\
&= (\varepsilon_r(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n), (\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n^{(1,0)} + \nabla \xi_n))
\end{aligned}$$

para todo $\xi_n \in S_{h_n}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \\
&\leq C\|\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n^{(1,0)} + \nabla \xi_n\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_r,0)} - \boldsymbol{w}_n^{(1,0)} + \nabla p^{(\varepsilon_r)}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla(\xi_n - p^{(\varepsilon_r)})\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}) \\
&= C(\|\boldsymbol{w}^{(1,0)} - \boldsymbol{w}_n^{(1,0)}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla(\xi_n - p^{(\varepsilon_r)})\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho converge a cero por la convergencia de $\{\boldsymbol{w}_n^{(1,0)}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\boldsymbol{w}^{(1,0)}$ y el segundo término por densidad de S_{h_n} en S cuando $n \to \infty$. □

Con los resultados de compacidad discreta a la mano, podemos probar el siguiente teorema, el cual garantiza que las ecuaciones de Maxwell en baja frecuencia están bien aproximados por elementos de borde. Éste es mejor conocido como la versión discreta de la desigualdad de Friedrichs del Teorema 3.7.

Lema 3.27. *Bajo las suposiciones del Teorema 3.26, existe una constante positiva independiente de $h \in \Lambda$ tal que si $\boldsymbol{u}_h \in X_{0,h}$, para $h \in \Lambda$ suficientemente pequeño entonces*

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla \times \boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)})$$

Prueba.
Ya que $\nabla \times \boldsymbol{u}_h = 0$ en Ω y $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_h = 0$ en $\partial\Omega$ implica que $\boldsymbol{u}_h = \nabla p_h$ para algún $p \in S_h$. Por tanto $\boldsymbol{u}_h = 0$, sabemos que esta estimación se da para cualquier $h > 0$, pero con C función de h.

La prueba de que C es independiente de h se da por contradicción. Supongamos que el resultado no se da. Entonces existe una sucesión de diámetros de malla $h_n \in \Lambda, n = 1, 2, ...$ y funciones $\boldsymbol{u}_{h_n} \in X_{0,h_n}$, tal que $\|\boldsymbol{u}_{h_n}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 1$ y $\|\nabla \times \boldsymbol{u}_{h_n}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_{h_n}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} \leq 1/n$. Pero por la compacidad discreta, una subsucesión, aún denotada por $\{\boldsymbol{u}_{h_n}\}_{n=1}^{\infty}$, converge en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ a una función $\boldsymbol{u} \in X_0$. Claramente, $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 1$, pero

$$\|\nabla \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Sigma)} = 0.$$

Ya que $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ en $\Omega, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u} = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $\boldsymbol{u} \in X_0$, sabemos que $\boldsymbol{u} = 0$, lo cual es una contradicción y así la prueba está completa. □

Dado que la propiedad de compacidad discreta de $X_{0,h}$ implica la compacidad colectiva de $\{K_n\}_{h\in\Lambda}$, se sigue del Teorema 2.10 que el problema (3.26) tiene solución única y la convergencia se da en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Teorema 3.28. *Sea τ_h una malla regular de Ω y cuasi-uniforme sobre Σ. Entonces bajo la suposiciones hechas para los parámetros $\varepsilon_r, \mu_r, \lambda$ y para $h \in \Lambda$ suficientemente pequeña, $(I+K_h)^{-1}$ existe y es uniformemente acotada como mapeo de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ en $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, por tanto* (3.32) *tiene solución única $\boldsymbol{E}_{0,h} \in X_{0,h}$. Además, se tiene*

$$\|\boldsymbol{E}_{0,h} - \boldsymbol{E}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C(\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|(K - K_h)\boldsymbol{E}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}).$$

Ahora, dadas las propiedades especiales del elemento finito, podemos probar nuestro deseado teorema de convergencia en X.

Teorema 3.29. *Bajo las suposiciones del Teorema 3.28, y dado que $h \in \Lambda$ es suficientemente pequeño, la discretización en elementos finitos de la ecuación de Maxwell dada por* (3.26) *tiene solución única $\boldsymbol{E}_h \in X_h$. Además*

$$\|\boldsymbol{E}_h - \boldsymbol{E}\|_X \leq C\left(\inf_{\boldsymbol{\phi}_h\in X_h}\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_X + \inf_{\boldsymbol{v}_h\in X_h}\|K\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{v}_h\|_X + \inf_{\xi_h\in S_h}\|p - \xi_h\|_{H^1(\Omega)}\right),$$

donde $\boldsymbol{E}_0 \in X$ y $p \in S$ satisfacen respectivamente a (3.16) *y* (3.14).

Prueba.
Como $\boldsymbol{E}_h = \boldsymbol{E}_{0,h} + \nabla p_h$, sabemos por el teorema anterior que $\boldsymbol{E}_{0,h} \in X_{0,h}$ existe. En adición, el Lema 3.18 muestra que p_h converge cuasi-óptimamente. Pero, usando las ecuaciones para $\boldsymbol{E}_{0,h} \in X_{0,h}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{E}_h - \boldsymbol{E}\|_X \\
&\leq \|\boldsymbol{E}_{0,h} - \boldsymbol{E}_0\|_X + \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|K_h\boldsymbol{E}_{0,h} - K\boldsymbol{E}_0\|_X + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_X + \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|K_h(\boldsymbol{E}_{0,h} - \boldsymbol{E}_0)\|_X + \|(K_h - K)\boldsymbol{E}_0\|_X + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_X + \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

La continuidad uniforme de K_h implica

$$\|K_h(\boldsymbol{E}_{0,h} - \boldsymbol{E}_0)\|_X \leq C\|\boldsymbol{E}_{0,h} - \boldsymbol{E}_0\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

lo cual podemos estimar por el teorema previo. □

El siguiente corolario enuncia de forma más precisa el orden de convergencia esperado y se sigue de la combinación de estimaciones puntuales del Teorema 3.20 y los Lemas 3.18 y 3.21. En [24] puede apreciarse más claramente la cadena de razonamientos que llevan al mismo resultado.

Definición 3.30. *Para algún $s \geq 0$, definimos el espacio*

$$H^s(curl;\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega) \mid \nabla\times\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(\Omega),\ \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^s(f) \text{ para cada cara } f \text{ de } \Sigma\},$$

con norma

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{H^s(curl;\Omega)} := \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{H}^s(\Omega)} + \sum_{f\in\Sigma} \|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{H}^s(f)}.$$

Corolario 3.31. *Si $\boldsymbol{\psi}, K\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{E} \in H^s(curl;\Omega)$ para algún $s > 1/2$, entonces*

$$\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|_X \leq Ch^{\text{mín}(s,k)}.$$

Capítulo 4

Implementación numérica

Este capítulo está dedicado a la implementación numérica en MATLAB de la formulación discreta (3.26), usando los elementos de borde de Nédélec. Parte del material de este capítulo está basado en las notas de clase del seminario de elementos finitos de Nédélec [25], donde se estudiaron algunos aspectos de la implementación del problema variacional: *Hallar* $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)$ *tal que*

$$\int_{\Omega}(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\phi}) = \omega^2\int_{\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\phi}, \quad \forall\boldsymbol{\phi}\in H(curl;\Omega),$$

con $\omega \in \mathbb{R}$. La aplicación de elementos finitos $H(curl;\Omega)$ conformes a las ecuaciones de Maxwell está ampliamente documentada. En [14], Chen expone los aspectos principales de los elementos de Nédélec, proporcionando ideas sobre la construcción y enumeración de los bordes en una malla general. Por otro lado, el grupo de Olm - Badia - Martín en [5] han recogido los resultados necesarios para implementar los elementos de Nédélec de orden arbitrario usando *FEMPAR*.

Sin embargo, a diferencia de la implementación de los elementos de Raviart-Thomas para la ecuación de Laplace [26], la implementación en MATLAB del problema de radiación en una cavidad no se encuentra suficientemente detallada en la literatura. Por lo cual es el objetivo del presente trabajo presentar una implementación detallada de los elementos de borde de Nédélec para el problema propuesto en el caso que la frontera $\Gamma \equiv \emptyset$, lo cual representa una contribución al campo de la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell y el uso de las bases de Nédélec.

1. Construcción del sistema matricial

La implementación numérica está basada en la resolución de un sistema de ecuaciones, derivado de la formulación discreta. Esto se logra usando el hecho de que la igualdad

en (3.26) se satisface para toda $\boldsymbol{\phi}_h \in X_h$, en particular para aquellas funciones en la base de X_h.

Sea $\boldsymbol{E}_h \in X_h$ solución de la formulación discreta (3.26). Tal función puede expresarse en términos de las funciones bases como

$$\boldsymbol{E}_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i, \tag{4.1}$$

donde n representa la dimensión de X_h, de modo que (4.1) puede expresarse por medio de un sistema de ecuaciones como

$$A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}. \tag{4.2}$$

El orden del sistema depende de la dimensión de X_h, la cual a su vez depende de qué tan fina sea la malla que definamos sobre el espacio X. En teoría, debemos considerar una sucesión de mallas cada vez más finas para garantizar la convergencia de la solución numérica. En la implementación, solo consideraremos un conjunto finito de mallas que nos permita apreciar la convergencia de la solución.

En resumen, nuestra implementación consiste en resolver de forma cíclica un sistema matricial cada vez de mayor orden y verificar la tendencia de la solución. Empezamos por discretizar el dominio acotado Lipschitz Ω con frontera poligonal $\partial\Omega = \Gamma \cup \Sigma$ (con $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$) usando la malla regular τ_h en Ω y cuasi-uniforme sobre Σ.

Dado que $X_h = \text{gen}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, ..., \boldsymbol{\phi}_n)$, usando (3.26) en su forma integral y (4.1), tenemos lo siguiente para $\boldsymbol{\phi}_h = \boldsymbol{\phi}_j$ con algún j entre 1 y n:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Omega (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{\phi}_j}) - \kappa^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Omega (\varepsilon_r \boldsymbol{\phi}_i) \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}_j} - \mathrm{i}\kappa \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Sigma (\lambda \boldsymbol{\phi}_{i,T}) \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}_{j,T}} = \int_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}_j} + \int_\Sigma \boldsymbol{g} \cdot \overline{\boldsymbol{\phi}_{j,T}}. \tag{4.3}$$

Repitiendo lo anterior para cada j y reordenando construimos un sistema de ecuaciones de la forma

$$(A - \kappa^2 B - \mathrm{i}\kappa C)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}, \tag{4.4}$$

donde la entrada (i, j) de cada matriz y vector, viene dada respectivamente por cada una de las integrales anteriores. La solución del sistema consiste en hallar $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, ..., \alpha_n]^\top$.

2. Discretización y descripción geométrica del dominio

Para particionar el dominio Ω usamos el software *gmsh*, que permite discretizar áreas o volúmenes que puedan expresarse como una unión de figuras geométricas simples, las

cuales pueden ser elaboradas por separado y ensambladas por el usuario en la interfaz del software. Con *gmsh* podemos refinar la malla inicial, obtener una gráfica de ésta y exportar sus datos en archivos legibles por otros programas, con información sobre la malla. En nuestro caso usamos MATLAB para leer la cantidad de elementos, número de nodos y tipos de frontera entre otros, en forma de arreglos matriciales.

Estas operaciones vienen pre-programadas en el software, de modo que la cantidad de elementos en las triangulaciones y refinaciones vienen determinadas por el mismo.

En nuestro caso, la primera triangulación y las refinaciones realizadas sobre la misma componen el conjunto de mallas sobre el cual realizaremos el análisis de convergencia.

2.1. Estructura de datos

La malla τ_h consta de un conjunto cerrado de tetraedros $K = \text{conv}\{p, q, r, s\}$ de volumen positivo con vértices p, q, r y s (llamados también nodos) diferentes para cada K, de forma que $\cup K = \overline{\Omega}$. Cualquier intersección no vacía de dos tetraedros diferentes de τ_h es igual a un nodo $\{p\}$, una arista (ó borde) compuesta por los vértices $\{p, q\}$ o una cara (triángulo) compuesta por los nodos $\{p, q, r\}$, el cual es común en ambos tetraedros.

A fin de lograr una exposición organizada, clasificaremos los vértices, aristas, triángulos y tetraedros en los conjuntos $\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente. Ahora, como es posible distinguir los vértices que están en el interior de Ω y los que están en $\partial\Omega$, definimos

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_{\partial\Omega}, \tag{4.5}$$

de igual manera con $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{T}$, asumiendo por convención que $\mathcal{T}_{\partial\Omega}$ está compuesto por los tetraedros que tienen al menos una cara en la frontera.

Después de triangular o refinar con *gmsh*, exportamos la información en un archivo que nombramos `malla`, el cual cargamos con MATLAB para obtener los siguientes datos:

```
malla = load_gmsh(malla);
coord = malla.POS(:,1:3);
 elem = malla.TETS(:,1:4);
 elef = malla.TRIANGLES(:,1:3);
 nver = malla.nbNod;
  nel = malla.nbTets;
  nef = size(elef,1);
```

donde `load_gmsh` es una rutina previamente diseñada cuyo propósito es cargar los datos exportados por *gmsh*. Estos datos están estructurados de la siguiente manera. Los parámetros `nver`, `nel` y `nef` son números que denotan la cantidad de vértices, tetraedros y triángulos en la frontera respectivamente, es decir

$$\texttt{nver} = \text{card}(\mathcal{N}),\ \texttt{nel} = \text{card}(\mathcal{T}),\ \texttt{nef} = \text{card}(\mathcal{F}_{\partial\Omega}). \tag{4.6}$$

Los parámetros `coord`, `elem` y `elef` son matrices, cuya descripción requiere un breve análisis sobre los conjuntos definidos anteriormente.

El conjunto de nodos $\mathcal{N}$ puede ser descrito por extensión como $\{v_1, ..., v_n\}$, donde $n =$ `nver` y cada v_i tiene coordenadas rectangulares (x_i, y_i, z_i).

La matriz `coord` es un arreglo de orden `nver`$\times 3$ en cuyas filas se almacenan las coordenadas de los elementos de $\mathcal{N}$, es decir, su i-ésima fila contiene las coordenadas del nodo v_i.

El conjunto de tetraedros $\mathcal{T}$ puede ser descrito por extensión como $\{K_1, ..., K_m\}$, donde $m =$ `nel` y cada K_i es el casco convexo compuesto por los vértices v_p, v_q, v_r y v_s.

La matriz `elem` es un arreglo de orden `nel`$\times 4$ en cuyas filas se almacenan los números de los nodos cuyo casco convexo componen a los elementos de $\mathcal{T}$. En otras palabras, acorde a la explicación anterior, la fila i-ésima de la matriz `elem` contiene los sub-índices p, q, r y s, asociados a los nodos v_p, v_q, v_r y v_s que componen al tetraedro K_i.

Aquí debe anotarse que los sub-índices p, q, r y s son números diferentes entre sí, que toman valores enteros en el rango $[1,$ `nel`$]$ y no siguen un orden específico.

De forma análoga, la matriz `elef` es un arreglo de orden `nef`$\times 3$ en cuyas filas se almacenan los números de los nodos cuyo casco convexo componen a los elementos de $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$.

Los datos proporcionados por *gmsh* no constituyen por sí solos los conjuntos $\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ o $\mathcal{T}$, pero proveen suficiente información para construirlos. En nuestro análisis, es importante identificar a los elementos entre sí, para lo cual debemos establecer una enumeración global de los mismos.

Observe que la enumeración de nodos o tetraedros se da de forma natural con las matrices `coord` y `elem`, lo cual caracteriza a los conjuntos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{T}$ en el sentido que, podemos listar sus elementos. Sin embargo un análisis más complejo deberá llevarse a cabo para enumerar de alguna forma a los elementos de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$.

2.1.1. Construcción del conjunto $\mathcal{E}$ y descripción alternativa de $\mathcal{T}$

La construcción del conjunto $\mathcal{E}$ es de vital importancia, ya que los elementos de Nédélec están definidos sobre los bordes de la triangulación. Empezamos por notar que la matriz `elem`, de alguna forma, provee una descripción del conjunto $\mathcal{T}$ en términos de los vértices. Otra alternativa sería describir tal conjunto en términos de las aristas que componen a cada tetraedro, pero no disponemos del conjunto de aristas de la triangulación.

Sea $1 \leq i \leq nel$. Supongamos entonces que el elemento K_i está compuesto por los vértices v_p, v_q, v_r y v_s. Las aristas que componen a K_i son el casco convexo compuesto por todos los posibles pares de vértices, donde consideramos que el par $\{v_p, v_q\}$ es

equivalente a $\{v_q, v_p\}$ y así sucesivamente. La Tabla 4.1 ilustra la definición de las aristas en términos de los vértices que las comprenden.

e_a	e_b	e_c	e_d	e_e	e_f
v_p	v_p	v_p	v_q	v_q	v_r
v_q	v_r	v_s	v_r	v_s	v_s

Tabla 4.1: Construcción de las aristas.
Los términos $e_a, ..., e_f$ representan las aristas y los sub-índices $a, ..., f$, alguna enumeración para estas.

Aquí debemos hacer una anotación importante. Partiendo de que `elem(i,:) = p q r s`, la arista e_a, que es la primera en la lista de aristas que componen a K_i, está comprendida entre los elementos de la primera y segunda columna de `elem(i,:)` exactamente en este mismo orden. Observe que aquí hemos definido de forma arbitraria qué par de vértices componen a e_a y también el orden del mismo (*i.e*, elegimos $\{v_p, v_q\}$ en vez de $\{v_q, v_p\}$). Asumiremos esta forma de componer las aristas como una convención de aquí en más, ya que resulta fácil de implementar. Más adelante veremos que esta convención de orden puede causarnos problemas y estudiaremos la forma de resolverlos.

La Tabla 4.1 puede implementarse en un arreglo transpuesto así

```
[elem(i,[1 2]); elem(i,[1 3]); elem(i,[1 4]);...
 elem(i,[2 3]); elem(i,[2 4]); elem(i,[3 4])];
```

Si por cada fila de `elem` construimos un arreglo como el anterior y los concatenamos todos, formaremos un arreglo de orden $6*$`nel`$\times 2$ dónde quedarán almacenados todos los bordes de la triangulación, incluyendo repeticiones ya que, algunos tetraedros de la triangulación pueden compartir entre sí incluso todos sus bordes.

La forma en que llevamos a cabo la concatenación nos puede servir posteriormente para la descripción de $\mathcal{T}$ en términos de sus bordes. Una forma de hacerlo es concatenar primero las aristas comprendidas entre la primera y segunda columna de `elem`, bajo estas podemos agregar las aristas comprendidas entre las columnas 1 y 3 y así sucesivamente, es decir:

```
[elem(:,[1 2]); elem(:,[1 3]); elem(:,[1 4]);...
 elem(:,[2 3]); elem(:,[2 4]); elem(:,[3 4])];
```

Suprimir las repeticiones en este arreglo constituye una descripción del conjunto $\mathcal{E}$, cuyos elementos vienen enumerados de forma natural por las filas del arreglo, esto es

```
aristas = [elem(:,[1 2]); elem(:,[1 3]); elem(:,[1 4]);...
           elem(:,[2 3]); elem(:,[2 4]); elem(:,[3 4])];
Aristas = unique(sort(aristas,2),'rows');
   nlad = size(Aristas,1);
```

donde

$$\texttt{nlad} = \text{card}(\mathcal{E}).$$

De lo anterior, tenemos

$$\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$$

donde $n = \texttt{nlad}$ y e_i se define a partir de los vértices en la i-ésima fila de la matriz `Aristas`, cuyo orden resulta ser $\texttt{nlad} \times 2$.

Hasta ahora sabemos cuales nodos componen la arista e_i, pero aún no sabemos qué aristas componen al tetraedro K_i. Para lograr la descripción alternativa de $\mathcal{T}$ reescribimos la rutina anterior así:

```
1. aristas = [elem(:,[1 2]); elem(:,[1 3]); elem(:,[1 4]);...
              elem(:,[2 3]); elem(:,[2 4]); elem(:,[3 4])];
2. [Aristas,~,lados] = unique(sort(aristas,2),'rows');
3.   Lados = reshape(lados,nel,6);
4.    nlad = size(Aristas,1);
```

En la línea 2. de la rutina se realizan dos operaciones. La primera consiste en tomar la matriz `aristas`, eliminar las filas repetidas y llamar al arreglo resultante `Aristas`. En la segunda definimos el vector indexante `lados` de longitud $6*\texttt{nel}$, el cual aprovecha la estructura del comando `unique` de MATLAB para enumerar la matriz `aristas`, teniendo en cuenta de las repeticiones, *i.e*, le asigna a las filas repetidas un mismo número.

En la línea 3. aprovechamos la enumeración de `aristas` para construir un arreglo análogo a `elem`, que nos permita describir a $\mathcal{T}$ en términos de sus bordes. Aquí entra en juego la forma en que concatenamos la primera matriz.

Como $1 \leq i \leq \texttt{nel}$, entonces las filas $\{i, \texttt{nel}+i, 2*\texttt{nel}+i, ..., 5*\texttt{nel}+i\}$ de `aristas`, contienen respectivamente los bordes comprendidos por los pares de nodos `elem(i,:[1,2])`, `elem(i,:[1,3])`, `elem(i,:[1,4])`,...,`elem(i,:[3,4])`, las cuales conforman el tetraedro K_i. De la misma manera, las entradas $\{i, \texttt{nel}+i, ..., 5*\texttt{nel}+i\}$ del vector `lados` contienen el número de cada uno de estos bordes. En otras palabras, podemos formar un vector con dichas entradas para describir a K_i en términos de sus bordes.

Esto lo extendemos al resto de tetraedros subdividiendo el vector `lados` en 6 subvectores de longitud `nel`, formando un nuevo arreglo de orden $\texttt{nel} \times 6$, al cual denominamos `Lados`, que como la matriz `elem`, describe al conjunto $\mathcal{T}$ en términos de sus bordes.

2.1.2. Orientación local y global de bordes

En esta sección, retomamos al elemento K_i compuesto por los vértices $\{v_p, v_q, v_r, v_s\}$ y por las aristas $\{e_a, e_b, ..., e_f\}$, definidas según la convención ilustrada en la Tabla 4.1.

Bajo esta convención, podemos asociar a cada borde de K_i un vector tangente unitario. En el caso de e_a, podríamos definir a $\boldsymbol{t}_a$ como el vector que va del nodo v_p hacia el nodo v_q, y así sucesivamente según la convención de orden.

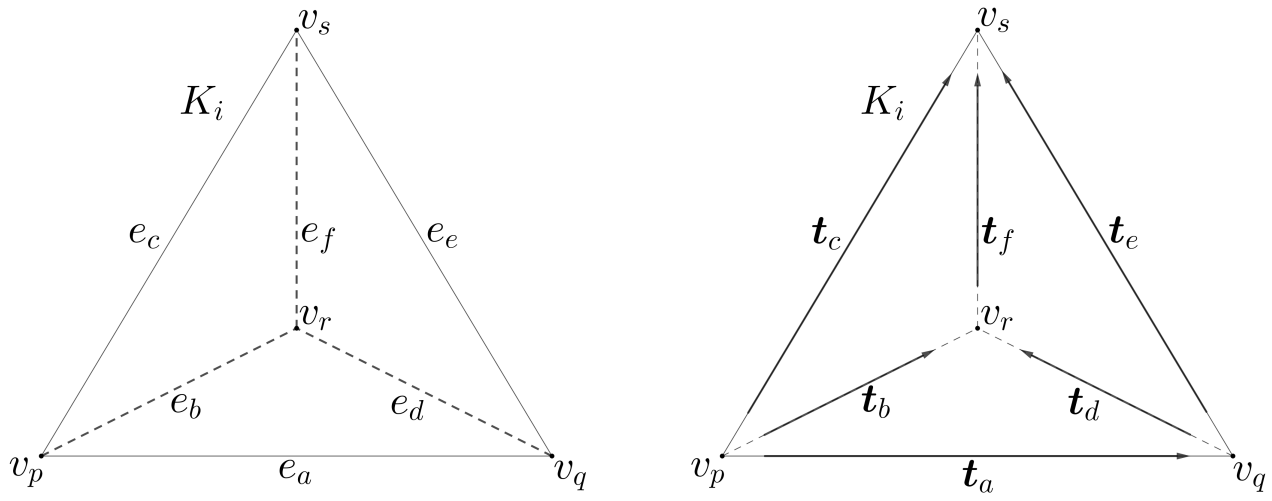

Figura 4.1: Aristas y vectores en el tetraedro.
En esta figura se ilustra la convención de orden en la orientación de las aristas, dada por los vectores $\boldsymbol{t}$.

Aquí, la orientación de los vectores viene derivada de nuestra convención de orden y a tal orientación la denominamos como local, ya que se construye elemento a elemento.

Basados en la orientación local, podemos definir el conjunto de funciones $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{R}_1$ y su *curl*, en términos de las funciones de coordenadas baricéntricas λ asociadas a los vértices $\{v_p, v_q, v_r, v_s\}$, esto es:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_a &= \lambda_p \nabla\lambda_q - \lambda_q \nabla\lambda_p, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_a &= 2\nabla\lambda_p \times \nabla\lambda_q,\\
\boldsymbol{\phi}_b &= \lambda_p \nabla\lambda_r - \lambda_r \nabla\lambda_p, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_b &= 2\nabla\lambda_p \times \nabla\lambda_r,\\
\boldsymbol{\phi}_c &= \lambda_p \nabla\lambda_s - \lambda_s \nabla\lambda_p, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_c &= 2\nabla\lambda_p \times \nabla\lambda_s,\\
\boldsymbol{\phi}_d &= \lambda_q \nabla\lambda_r - \lambda_r \nabla\lambda_q, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_d &= 2\nabla\lambda_q \times \nabla\lambda_r,\\
\boldsymbol{\phi}_e &= \lambda_q \nabla\lambda_s - \lambda_s \nabla\lambda_q, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_e &= 2\nabla\lambda_q \times \nabla\lambda_s,\\
\boldsymbol{\phi}_f &= \lambda_r \nabla\lambda_s - \lambda_s \nabla\lambda_r, & \nabla\times\boldsymbol{\phi}_f &= 2\nabla\lambda_r \times \nabla\lambda_s.
\end{aligned}
$$

Naturalmente la orientación local se puede extender a todos los bordes de la triangulación y así, definir sobre cada uno una función de forma. Es importante tener en cuenta el orden establecido para los vértices, pues de haber definido a e_a como la arista comprendida entre $\{v_q, v_p\}$, tendríamos que $\boldsymbol{\phi}_a$ sería de signo contrario. Esto representa un problema ya que las funciones de borde deben estar definidas de forma única a lo largo de toda la triangulación. Por ejemplo, dado `elem(i,:) = p q r s`, es posible que algún elemento adyacente K_j esté dado por `elem(j,:) = q p r t`, con t el sub-índice de algún vértice v_t. En este escenario, nuestra convención no nos permite definir de forma única a las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$, como puede verse en la Figura 4.2.

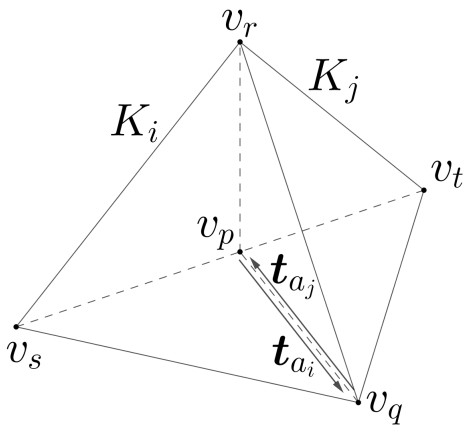

Figura 4.2: Problema de la convención de orden.
En esta figura se aprecia la ambigüedad asociada a nuestra convención de orden a la hora de orientar las aristas del tetraedro.

En este caso, la función $\boldsymbol{\phi}_a$ asociado al borde e_a que está comprendido entre los vértices v_p y v_q (ó viceversa), queda definida de una u otra forma dependiendo del elemento desde que se le defina, es decir:

$$\boldsymbol{\phi}_{a_i} = \lambda_p \nabla\lambda_q - \lambda_q \nabla\lambda_p = -\boldsymbol{\phi}_{a_j},$$

Ahora, dado que el problema solo es cuestión de signos, este puede ser resuelto fácilmente adoptando otra convención que denominaremos como orientación global de bordes.

Como *gmsh* provee una enumeración global de los vértices en la triangulación, diremos que los vectores tangenciales a cada arista parten del menor al mayor vértice en enumeración, así que si suponemos para nuestros elementos K_i y K_j que $p < q < r < s < t$, obtendremos la orientación que puede verse en la Figura 4.3

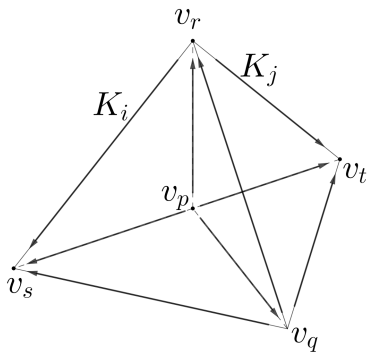

Figura 4.3: Orientación global.

Adaptamos esta convención a la implementación de la siguiente forma, si $q < p$, entonces multiplicaremos por -1 a las funciones $\boldsymbol{\phi}_a$ y $\nabla\times\boldsymbol{\phi}_a$, en caso contrario, por uno. De modo que, la corrección consiste en construir por cada elemento un vector de seis entradas con 1 y -1 según corresponda. Esto lo implementamos como

```
signos = sign(elem(i,[2 3 4 3 4 4]) - elem(i,[1 1 1 2 2 3]));
```

Ahora, si definimos las matrices

$$T := [\boldsymbol{t}_a,\, \boldsymbol{t}_b \cdots,\, \boldsymbol{t}_f],\ \Phi := [\boldsymbol{\phi}_a,\, \boldsymbol{\phi}_b,\, \cdots \boldsymbol{\phi}_f],\ \nabla\times\Phi := [\nabla\times\boldsymbol{\phi}_a,\, \nabla\times\boldsymbol{\phi}_b,\, \cdots,\, \nabla\times\boldsymbol{\phi}_f], \quad (4.7)$$

con $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\phi}$ y $\nabla\times\boldsymbol{\phi}$ vectores columna. Podemos corregir la orientación de las funciones y los vectores usando `signos` para construir la matriz diagonal `Ms`, implementada como

```
Ms = diag(signos);
```

a la cual en lo sucesivo denotaremos como Υ. Luego, las matrices

$$\hat{T} = T\Upsilon, \quad \hat{\Phi} = \Phi\Upsilon, \quad \nabla\times\hat{\Phi} = [\nabla\times\Phi]\Upsilon,$$

definen de forma única la orientación, las funciones de forma y el *curl*, para cualquier elemento K_i independientemente desde el elemento que se les estudie.

2.1.3. Elementos en la frontera

En la sección anterior, a pesar de haber construido los arreglos necesarios para estudiar cualquier elemento de la triangulación, las expresiones

$$\int_\Sigma (\lambda\boldsymbol{\phi}_{i,T})\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}_{j,T}} \quad \text{y} \quad \int_\Sigma \boldsymbol{g}\cdot\overline{\boldsymbol{\phi}_{j,T}},$$

hacen que sea necesario encontrar una forma de identificar las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$ que están en la frontera. Esto, como en el caso anterior requiere un análisis sobre todos los elementos de $\mathcal{F}$, en el cual es necesario determinar el vector normal exterior a cada uno de los elementos e identificar a qué tetraedro pertenecen según la enumeración dada por $\mathcal{K}$.

Procederemos entonces como en el caso anterior, donde la matriz `elef` hará las veces de `elem` y definiremos a `ladof` como una matriz análoga a `lados`.

Recordemos que la matriz `elef` contiene en cada fila los vértices que componen las caras de los tetraedros en la frontera. Supongamos que para algún $1 \leq i \leq$ `nef`, tenemos `elef(i,:)` = `x y z`, con x, y, z los sub-índices de los vértices v_x, v_y, v_z. Bajo nuestra convención de orden, definimos las aristas e_α, e_β y e_γ cómo

e_α	e_β	e_γ
v_x	v_x	v_y
v_y	v_z	v_z

Tabla 4.2: Construcción de las aristas en la frontera.

Ahora, como en principio el conjunto $\mathcal{E}$ está construido, nuestro propósito es identificar a $\mathcal{E}_{\partial\Omega}$, de la siguiente manera

```
1.  aristaf = [elef(:,[1 2]); elef(:,[1 3]); elef(:,[2 3])];
2. [Aristaf,~,ia] = unique(sort(aristaf,2),'rows');
3. [~,~,ib] = intersect(Aristaf,Aristas,'rows');
4.    ladof = ib(ia);
5.    Ladof = reshape(ladof,nef,3);
6.     nlaf = size(Aristaf,1);
```

donde básicamente, hemos realizado un proceso similar al de la sección anterior, solo que en este caso la matriz de aristas en la frontera, que denominamos `Aristaf`, debe ser comparada con la matriz `Aristas`, la cual induce una enumeración de todos los bordes. La operación en la fila `4.` es la que enumera las aristas en la frontera según el arreglo `Aristas` y finalmente `Ladof` es una representación alternativa de los triángulos en la frontera en términos de sus aristas.

Hasta el momento, podemos describir los triángulos en la frontera en términos de sus vértices y bordes, sin embargo, desconocemos a qué tetraedro pertenece cada cara. La importancia de saber esto será evidente cuando nos ocupemos del análisis algebraico del problema.

Con el fin de identificar a qué elemento pertenece cada cara en la frontera, construimos todas las caras posibles partiendo de la matriz `elem` y comparamos, usando el comando `intersect` como lo describimos a continuación

```
1.     indexr = zeros(nef,1);
2.      Caras = [elem(:,[1 2 3]); elem(:,[1 2 4]);...
                 elem(:,[1 3 4]); elem(:,[2 3 4])];
3.        ind = repmat(1:nel,1,4)';
4.  [~,ia,ib] = intersect(sort(elef,2),sort(Caras,2),'rows','stable');
5. indexr(ia) = ind(ib);
```

donde `indexr` (*index-row*) es un vector indicador de orden `nef`$\times 1$, cuya i-ésima entrada contiene el número del tetraedro según $\mathcal{K}$, al que pertenece el triángulo formado por los vértices en la i-ésima fila de `elef`. En otras palabras, `elem(indexr,:)` es una submatriz de `elem`, en la cual se listan los vértices que componen a los tetraedros que tienen al menos una cara en la frontera.

Como en el caso anterior, definimos los vectores tangenciales a e_α, e_β y e_γ según la convención de orden y corregimos el problema de ambigüedad creando esta vez un vector de 1 y -1 de tres entradas que denominamos `signof`

```
signof = sign(elef(:,[2 3 3]) - elef(:,[1 1 2]));
Mf = diag(signof)
```

donde nos seguiremos refiriendo a `Mf` por Υ_Σ.

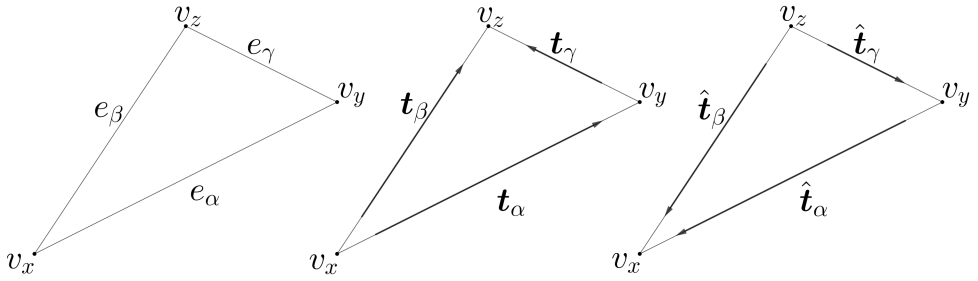

Figura 4.4: Orientación local vs Orientación global (con $x > y > z$).
El primer elemento ilustra las aristas comprendidas entre los vértices v_x, v_y y v_z. El segundo ilustra la definición de los vectores tangenciales $\boldsymbol{t}_\alpha, \boldsymbol{t}_\beta$ y $\boldsymbol{t}_\gamma$ según la convención de orden y el último elemento, ilustra la corrección de orientación bajo la suposición de que $x > y > z$.

Ahora nos ocuparemos del vector normal a los elementos de la frontera. Para este fin necesitaremos el cuarto vértice que, en conjunto con los tres vértices provistos por

`elef(i,:)` conforman el tetraedro asociado a esta cara en la frontera, en otras palabras, necesitamos los vértices provistos por `elem(indexr(i),:)`.

Supongamos entonces que `elem(indexr(i),:) = w x y z`, donde w corresponde al subíndice de nuestro cuarto vértice, cómo se ilustra en la Figura 4.5.

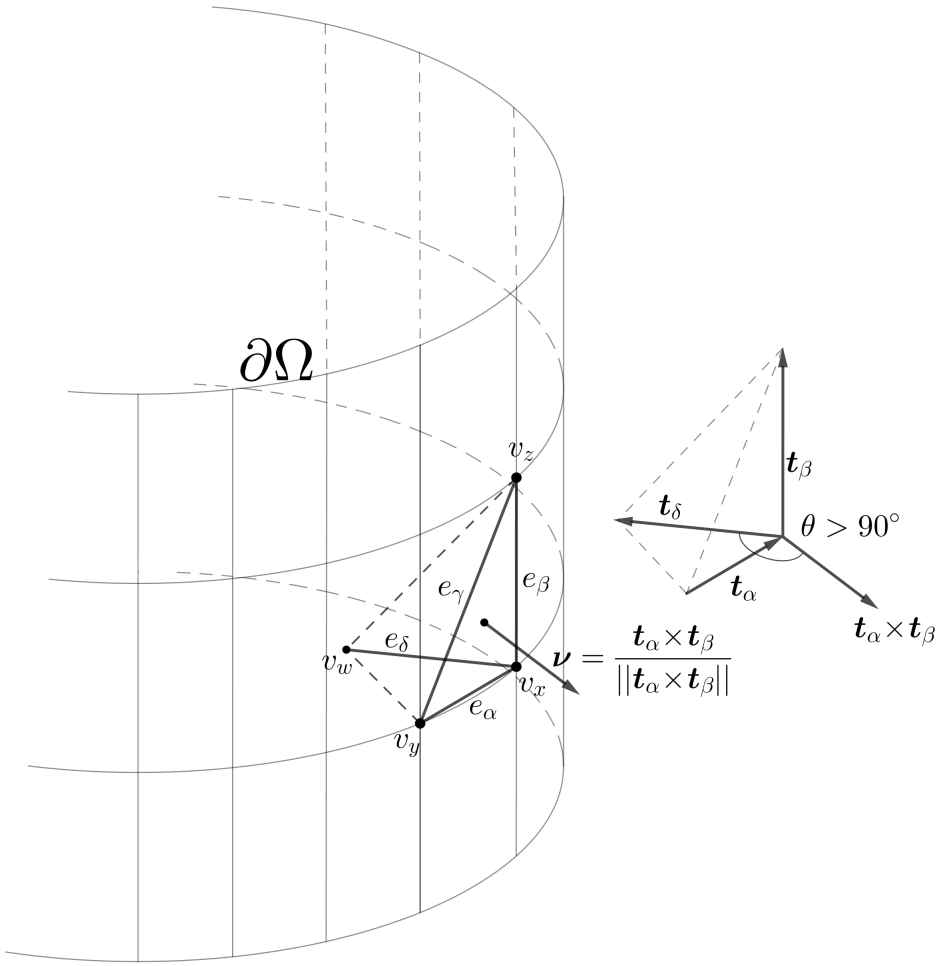

Figura 4.5: Cálculo del vector normal exterior $\boldsymbol{\nu}$ usando el vértice interior v_w.

Como en principio no sabemos si los vectores $\boldsymbol{t}_\alpha$ y $\boldsymbol{t}_\beta$ están dispuestos en un orden dextrógiro o levógiro, desconocemos si su producto vectorial da como resultado un vector normal exterior o interior a la frontera. Este problema se resuelve fácilmente verificando que el resultado de $\boldsymbol{t}_\alpha \times \boldsymbol{t}_\beta$ siempre forme un ángulo superior a 90° con el vector $\boldsymbol{t}_\delta$ o simplemente $(\boldsymbol{t}_\alpha \times \boldsymbol{t}_\beta) \cdot \boldsymbol{t}_\delta < 0$. Si este no es el caso, basta multiplicar por -1 el resultado. Esto lo implementamos de la siguiente manera

```
1.  s = setdiff( elem(indexr(i),:),elef(i,:) );
```

```
2.  Z = coord(elef(i,[2 3 3]),:) - coord(elef(i,[1 1 2]),:);
3.  x = coord(s,:) - coord(elef(i,1),:);
4.  n = cross(Z(1,:),Z(2,:));
5. if sign(dot(n,x)) == -1
      n =  n/norm(n);
      else
      n = -n/norm(n);
6. end
```

Para futura referencia, definiremos las siguientes matrices

$$\Phi_\Sigma := [\boldsymbol{\phi}_\alpha\ \boldsymbol{\phi}_\beta\ \boldsymbol{\phi}_\gamma],\ \eta := [\boldsymbol{\nu}\ \boldsymbol{\nu}\ \boldsymbol{\nu}],$$

dónde $\boldsymbol{\phi}_\alpha$ es la función de forma asociada a la arista e_α y así sucesivamente, respetando nuestra convención de orden. Con esto podemos definir la matriz de componentes tangenciales $\Phi_{\Sigma,T}$ como

$$\Phi_{\Sigma,T} = (\eta \times \Phi_\Sigma) \times \eta,$$

donde la operación $\times$ debe entenderse como el producto vectorial entre cada columna de las matrices. Ahora, corrigiendo el problema asociado a la convención de orden, se sigue que $\hat{\Phi}_\Sigma = \Phi_\Sigma \Upsilon_\Sigma$, luego

$$\hat{\Phi}_{\Sigma,T} = (\eta \times \Phi_\Sigma \Upsilon_\Sigma) \times \eta.$$

2.1.4. Funciones de coordenadas baricéntricas λ

Como las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$ están definidas en términos de las funciones λ, para implementar éstas últimas debemos retomar al elemento K_i compuesto por los vértices $\{v_p, v_q, v_r, v_s\}$, donde el vértice v_p tiene coordenadas (x_p, y_p, z_p), almacenadas en la p-ésima fila de la matriz `coord`. Sobre tal vértice podemos definir la función $\lambda_p(x, y, z) = a_p x + b_p y + c_p z + d_p$, donde $\{a_p, b_p, c_p, d_p\}$ son constantes por determinar, las cuales deben satisfacer $\lambda_p(x_p, y_p, z_p) = 1$ y $\lambda_p = 0$ cuando se evalúa en las coordenadas de cualquier otro vértice. Extendiendo esta condición a los demás vértices de K_i, establecemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p & 1 \\ x_q & y_q & z_q & 1 \\ x_r & y_r & z_r & 1 \\ x_s & y_s & z_s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p & a_q & a_r & a_s \\ b_p & b_q & b_r & b_s \\ c_p & c_q & c_r & c_s \\ d_p & d_q & d_r & d_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde la primera matriz al lado izquierdo de la expresión se denomina matriz de coordenadas aumentada, la cual es invertible ya que la triangulación está compuesta por

elementos no degenerados; lo que implica que el sistema siempre tiene solución, es decir,

$$\begin{bmatrix} a_p & a_q & a_r & a_s \\ b_p & b_q & b_r & b_s \\ c_p & c_q & c_r & c_s \\ d_p & d_q & d_r & d_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p & 1 \\ x_q & y_q & z_q & 1 \\ x_r & y_r & z_r & 1 \\ x_s & y_s & z_s & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Cada elemento de $\mathcal{T}$ tiene asociada una matriz de constantes como la anterior. En la implementación, a dicha matriz la llamamos matriz de coeficientes, `coef`. Su submatriz `coef`$(1:3,:)$ representa los gradientes de las funciones $\lambda_p, \lambda_q, \lambda_r$ y λ_s, asociadas a los vértices con el mismo sub-índice. Con esto tenemos elementos suficientes para implementar las funciones $\boldsymbol{\phi}$ y $\nabla\times\boldsymbol{\phi}$.

Una ventaja implícita en la construcción anterior es que la matriz de coordenadas aumentada también nos permite hallar el volumen del tetraedro pre-multiplicando por 1/6 el determinante en valor absoluto de tal matriz. Lo anterior queda implementado así

```
1. coef = inv([coord(elem(i,:),:) ones(4,1)]);
2.  vol = (1/6)*abs(det([coord(elem(i,:),:) ones(4,1)]));
```

3. Análisis algebraico

En esta sección retomamos nuestro problema, cuya forma matricial es

$$(A - \kappa^2 B - \mathrm{i}\kappa C)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d},$$

dónde las matrices A, B y el vector $\boldsymbol{b}$ involucran integrales de volumen, mientras que C y $\boldsymbol{d}$ están definidas en términos de integrales de superficie. Empecemos por considerar la entrada (i,j) de la matriz A, la cual denotaremos como A_{ij} e i,j son enteros en el conjunto $\{1,...,$`nlad`$\}$, los cuales representan el sub-índice de alguna arista en la triangulación, esto es:

$$A_{ij} = \int_\Omega (\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_i)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_j}). \tag{4.8}$$

Recordemos que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K\in\tau_h} \overline{K},$$

luego (4.8) es equivalente a

$$A_{ij} = \sum_{K\in\tau_h} \int_K (\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_i)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_j}).$$

En resumen, cada entrada de A está compuesta por una sumatoria sobre todos los elemento de τ_h, implicando que la matriz misma puede expresarse a su vez como una suma de otras `nel` matrices diferentes. Diremos entonces que

$$A = \sum_{k=1}^{\texttt{nel}} A_k, \tag{4.9}$$

donde

$$A_k = \begin{bmatrix} \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_1)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_1}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_2)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_1}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_n)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_1}) \\ \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_1)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_2}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_2)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_2}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_n)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_1)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_n}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_2)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_n}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_n)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_n}) \end{bmatrix}$$

y $n =$ `nlad`. Ahora, como el volumen de integración está restringido al elemento K_k, muchas de las entradas en la matriz anterior serán nulas de acuerdo a la definición de las funciones $\boldsymbol{\phi}$. Si suponemos que las aristas que componen a K_k son $e_a, e_b, ..., e_f$, con funciones asociadas $\boldsymbol{\phi}_a, \boldsymbol{\phi}_b, ..., \boldsymbol{\phi}_f$, entonces la sub-matriz $A_k([a, b, ..., f]\times[a, b, ..., f])$ dada por

$$\begin{bmatrix} \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_a)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_a}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_b)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_a}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_f)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_a}) \\ \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_a)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_b}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_b)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_b}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_f)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_b}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_a)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_f}) & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_b)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_f}) & \cdots & \int_{K_k}(\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\phi}_f)\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{\phi}_f}) \end{bmatrix},$$

contendrá las únicas entradas no nulas de A_k.

En resumen, A_k es una matriz no densa de orden $\texttt{nlad}\times\texttt{nlad}$, cuyo tamaño puede incrementarse drásticamente con las refinaciones de la malla, manteniendo únicamente 36 entradas no nulas. Dicho esto, resulta más fácil construir la matriz Ak operando solo sobre las entradas dadas por $\texttt{lados}(\texttt{k},:)\times\texttt{lados}(\texttt{k},:)$, que operar sobre todas sus entradas. Así que por simplicidad, re-asignaremos el nombre de A_k a la sub-matriz de entradas no nulas de si misma y ensamblamos la matriz A como se sigue

```
1.     A = sparse(nlad,nlad);
2. for k = 1:nel
3.   row = repmat(lados(k,:)',6,1);
4.   col = reshape( repmat(lados(k,:),6,1) ,36,1);
5.   val = reshape(Ak,36,1);
6.     A = A + sparse(row,col,val,nlad,nlad);
7. end
```

Observe que las entradas de la matriz A se van llenando máximo de a 36 por ciclo, lo cual logramos sumando matrices de orden `nlad`×`nlad`, así que a fin de optimizar el uso de memoria debemos usar el comando `sparse`. Los vectores definidos en las líneas `3.`, `4.` y `5.` constituyen el argumento necesario para construir una matriz `sparse` en cada ciclo con las entradas de A_k. Básicamente los vectores `row` y `col` indican las coordenadas en que deben re-ubicarse las entradas de la matriz A_k, las cuales están almacenadas en una sola columna en el vector `val`.

Ahora, haciendo uso de la notación introducida en (4.7), la matriz A_k queda determinada por

$$A_k = \int_{K_k} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\Phi})^\top (\nabla \times \overline{\hat{\Phi}}).$$

De la misma forma procedemos con el resto de matrices y vectores. Los arreglos A_k, B_k y C_k son conocidos como matrices de rigidez, mientras que $\boldsymbol{b}_k$ y $\boldsymbol{d}_k$ como vectores de carga. Para su implementación usaremos las herramientas desarrolladas en el análisis geométrico del problema.

3.1. Matriz de rigidez A_k

Para implementar la matriz de rigidez A_k debemos caracterizar la expresión:

$$\int_{K_k} (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{\phi}_j}).$$

Como las funciones $\boldsymbol{\phi}$ están compuestas por polinomios reales de grado 1, su *curl* es constante y en consecuencia

$$\int_{K_k} (\mu_r^{-1} \nabla \times \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{\phi}_j}) = (\nabla \times \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}_j) \int_{K_k} \mu_r^{-1}.$$

La integral en la expresión anterior puede estimarse con una cuadratura Gaussiana de cuatro puntos (o cuadrática) [27], para obtener

$$\int_{K_k} \mu_r^{-1} \approx \frac{|K_k|}{4} \sum_{m=1}^{4} \mu_r^{-1}(p_m),$$

donde $|K_k|$ representa el volumen del elemento K_k y los puntos $p_1, ..., p_4$ se obtienen por medio de

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \\ x_s & y_s & z_s \end{bmatrix},$$

donde α y β son constantes fijas y la matriz compuesta por estas entradas la denominamos `Bcuad`. Además, recordemos que el elemento K_k está compuesto por los vértices v_p, v_q, v_r y v_s, cuyas coordenadas son (x_p, y_p, z_p) y algo similar se tiene para cada elemento. Luego, A_k puede expresarse como

$$A_k \approx \left[\frac{|K_k|}{4} \sum_{m=1}^{4} \mu_r^{-1}(p_m)\right] (\nabla \times \hat{\Phi})^\top (\nabla \times \hat{\Phi}).$$

o en su forma expandida,

$$A_k \approx \left[\frac{|K_k|}{4} \sum_{m=1}^{4} \mu_r^{-1}(p_m)\right] \Upsilon^\top (\nabla \times \Phi)^\top (\nabla \times \Phi) \Upsilon,$$

Las líneas necesarias para implementar la submatriz A_k y posteriormente ensamblar la matriz A son:

```
1.     A = sparse(nlad,nlad);
2. for k = 1:nel
3.    Ms = diag(signos(k,:));
4.   vol = (1/6)*abs(det([coord(elem(k,:),:) ones(4,1)]));
5.  coef = inv([coord(elem(k,:),:) ones(4,1)]);
6.     P = Bcuad*coord(elem(k,:),:);
7.  curl = 2*cross(coef(1:3,[1 1 1 2 2 3]),coef(1:3,[2 3 4 3 4 4]));
8.    Ak = (vol(k)/4)*Ms'*(curl'*curl)*Ms*sum(mur(P).^(-1),1);
9.   row = repmat(lados(k,:)',6,1);
10.  col = reshape( repmat(lados(k,:),6,1) ,36,1);
11.  val = reshape(Ak,36,1);
12.    A = A + sparse(row,col,val,nlad,nlad);
13.  end
```

donde `P` representa la matriz con los puntos de la cuadratura, `mur` la permitividad relativa μ_r y `curl` la matriz $\nabla \times \Phi$.

3.2. Matriz de rigidez B_k

Como en el caso anterior, tenemos que

$$B_k = \int_{K_k} \varepsilon_r \hat{\Phi}^\top \hat{\Phi}, \tag{4.10}$$

donde nuevamente, hemos usado el hecho de que las funciones $\boldsymbol{\phi}$ están compuestas por polinomios reales y por tanto su complejo conjugado devuelve exactamente las mismas funciones.

Usando de nuevo la cuadratura para aproximar las integrales de la matriz, tenemos que la entrada (i, j) es de la forma

$$\int_{K_k} (\varepsilon_r \boldsymbol{\phi}_i) \cdot \boldsymbol{\phi}_j \approx \frac{|K_k|}{4} \sum_{m=1}^{4} (\varepsilon_r \boldsymbol{\phi}_i) \cdot \boldsymbol{\phi}_j(p_m).$$

Entonces, como cada término de B_k puede expresarse como una suma de cuatro términos, se sigue que B_k puede expresarse como la suma de cuatro matrices, es decir:

$$B_k \approx \frac{|K_k|}{4} \Upsilon^\top \left(\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_r \Phi^\top \Phi(p_m) \right) \Upsilon,$$

donde $\Phi(p_m)$ significa que los elementos de la matriz deben evaluarse en el punto p_m. Ahora nos proponemos estudiar la forma de las cuatro matrices mencionadas. Partiendo de la definición de $\boldsymbol{\phi}_a(p_1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_a(p_1) &= \lambda_p(p_1)\nabla\lambda_q - \lambda_q(p_1)\nabla\lambda_p \\ &= \lambda_p(\alpha v_1 + \beta(v_2 + v_3 + v_4))\nabla\lambda_q - \lambda_q(\alpha v_1 + \beta(v_2 + v_3 + v_4))\nabla\lambda_p \\ &= \alpha\nabla\lambda_q - \beta\nabla\lambda_p. \end{aligned}$$

Agrupando los resultados para todas las funciones concluimos lo siguiente

$$\Phi(p_1) = \begin{bmatrix} \nabla\lambda_p & \nabla\lambda_q & \nabla\lambda_r & \nabla\lambda_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta & -\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta & \beta \end{bmatrix},$$

dónde la matriz de constantes α y β la denominamos B_a, en el mismo orden de ideas,

para $\Phi(p_2), \Phi(p_3)$ y $\Phi(p_4)$ se definen las matrices

$$B_b = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\beta & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix}, \; B_c = \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\beta & -\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}.$$

En la implementación, denotamos a $\Phi(p_1), \Phi(p_2), \Phi(p_3)$ y $\Phi(p_4)$ por `Bka`, `Bkb`, `Bkc` y `Bkd`, respectivamente. Partiendo de que el volumen de K, las matrices y vectores `coef`, `Ms`, `P`, `row` y `col` ya han sido implementados, la construcción de B_k y el ensamble de B se implementan como

```
1.     B = sparse(nlad,nlad);
2. for k = 1:nel
3.   Bka = coef(1:3,:)*Ba;   Bkb = coef(1:3,:)*Bb;
4.   Bkc = coef(1:3,:)*Bc;   Bkd = coef(1:3,:)*Bd;
5.    Bk = vol/4*Ms'*( epr(P(1,:),K)*(Bka'*Bka) + ...
                       epr(P(2,:),K)*(Bkb'*Bkb) + ...
                       epr(P(3,:),K)*(Bkc'*Bkc) + ...
                       epr(P(4,:),K)*(Bkd'*Bkd) )*Ms;
6.   val = reshape(Bk,36,1);
7.     B = B + sparse(row,col,val,nlad,nlad);
8. end
```

Nota 4.1. *Hemos usado en este caso una cuadratura cuadrática ya que las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}$ son polinomios lineales y aunque no lo hemos mencionado, esta implementación está orientada al caso en el que la permitividad es constante. En otro caso, una cuadratura de mayor orden deberá utilizarse y deberán re-definirse las matrices que denominamos* `Bcuad`, `Ba`, `Bb`, `Bc` *y* `Bd`. *En [27] se listan cuadraturas de orden superior con orden de convergencia hasta de $O(h^5)$.*

3.3. Vector de carga $\boldsymbol{b}_k$

En este caso, $\boldsymbol{b}_k$ es un vector de seis entradas tal que

$$\boldsymbol{b}_k^\top = \int_{K_k} \boldsymbol{F}\hat{\Phi}.$$

Usando la cuadratura usual para aproximar la expresión anterior tenemos

$$\boldsymbol{b}_k^\top \approx \frac{|K_k|}{4} \sum_{m=1}^{4} \boldsymbol{F}\hat{\Phi}(p_m),$$

o bien, podemos re-escribir como

$$\boldsymbol{b}_k \approx \frac{|K_k|}{4} \Upsilon^\top \left(\sum_{m=1}^{4} \boldsymbol{F}\Phi(p_m) \right)^\top.$$

Partiendo de que el volumen de K, las matrices y vectores `Bka`, `Bkb`, `Bkc`, `Bkd`, `Ms` y `P` se encuentran implementados, la construcción de $\boldsymbol{b}_k$ y el ensamble $\boldsymbol{b}$ se implementan como

```
1.     b = sparse(nlad,1);
2. for k = 1:nel
3.    bk = vol/4*Ms'*(F(P(1,:))*Bka + ...
                      F(P(2,:))*Bkb + ...
                      F(P(3,:))*Bkc + ...
                      F(P(4,:))*Bkd)';
4.     b = b + sparse(lados(k,:),ones(6,1),bk,nlad,1);
5. end
```

donde `F` representa a la función $\boldsymbol{F}$.

3.4. Matriz de rigidez C_k

Para la implementación de esta matriz vamos a usar las rutinas construidas en la Sección 2.1.3. Supondremos que el k-ésimo elemento (con $1 \leq k \leq$ `nef`) en la frontera está denotado por Δ_k, compuesto por los vértices v_x, v_y, v_z y las aristas e_α, e_β y e_γ. Supondremos además que las funciones de forma asociadas a tales aristas son respectivamente $\boldsymbol{\phi}_\alpha, \boldsymbol{\phi}_\beta$ y $\boldsymbol{\phi}_\gamma$, las cuales están definidas respetando nuestra convención de orden.

Ahora nos proponemos implementar la matriz C_k, dada por

$$C_k = \int_{\Delta_k} \lambda \hat{\Phi}_{\Sigma,T}^\top \hat{\Phi}_{\Sigma,T}.$$

Dado que esta es una integral de superficie y no de volumen, la cuadratura Gaussiana de cuatro puntos deja de ser aplicable y debemos hallar otra forma de aproximar la expresión anterior. En su libro de elementos finitos, Zienkiewicz [27] expone varias técnicas de integración numérica en superficies triangulares, de las cuales usaremos la aproximación de tres puntos (ver Sección 9.10 de [27])

$$C_k \approx \frac{|\Delta_k|}{3} \sum_{n=1}^{3} \lambda \hat{\Phi}_{\Sigma,T}^{\top} \hat{\Phi}_{\Sigma,T}(p_n),$$

donde $|\Delta_k|$ representa el área del triángulo y en este caso, p_1, p_2 y p_3 son los puntos de cuadratura, los cuales se calculan así

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma \end{bmatrix}.$$

Aquí, las filas de la segunda matriz en la expresión anterior corresponden a las coordenadas de los vértices $(v_\alpha, v_\beta, z_\gamma)$. La matriz con 0 y 1 la denominamos en la implementación como `Ccuad`. De lo anterior se sigue que

$$\Phi_\Sigma(p_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \nabla\lambda_\alpha & \nabla\lambda_\beta & \nabla\lambda_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dónde la matriz con 0, 1 y -1 en sus entradas la denominamos C_a, en el mismo orden de ideas, para $\Phi_\Sigma(p_2)$ y $\Phi_\Sigma(p_3)$ se definen las matrices

$$C_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así pues, C_k puede expresarse de forma extendida como

$$C_k \approx \frac{|\Delta_k|}{3} \sum_{n=1}^{3} \lambda [(\eta \times \Phi_\Sigma(p_n) \Upsilon_\Sigma) \times \eta]^{\top} [(\eta \times \Phi_\Sigma(p_n) \Upsilon_\Sigma) \times \eta].$$

Al igual que hicimos con B_k, denotamos a $\Phi_\Sigma(p_1), \Phi_\Sigma(p_2)$ y $\Phi_\Sigma(p_3)$ como `Cka`, `Ckb` y `Ckc` respectivamente. Suponiendo que los vectores `n`, `indexr` y la matriz `Mf` ya fueron implementadas, la construcción de C_k y el ensamble de C se implementan así

```
1.        C = sparse(nlad,nlad);
2.    for k = 1:nef
3.     area = norm(n)/2;
4. [~,~,ib] = intersect(elef(k,:),elem(indexr(k),:),'stable');
5.     coef = inv([coord(elem(indexr(k),:),:) ones(4,1)]);
6.        p = Ccuad*coord(elef(k,:),:);
7.       nu = repmat(n,3,1);
8.      Cka = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Ca*Mf),nu');
9.      Ckb = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Cb*Mf),nu');
10.     Ckc = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Cc*Mf),nu');
11.      Ck = area/3*( lambda(p(1,:))*(Cka'*Cka) + ...
                       lambda(p(2,:))*(Ckb'*Ckb) + ...
                       lambda(p(3,:))*(Ckc'*Ckc) );
12.     row = repmat(ladof(k,:)',3,1);
13.     col = reshape( repmat(ladof(k,:),3,1) ,9,1);
14.     val = reshape(Ck,9,1);
15.       C = C + sparse(row,col,val,nlad,nlad);
end
```

A continuación hacemos algunas aclaraciones sobre la rutina anterior. En la linea `6.` hemos denominado a `p` como la matriz que contiene los puntos de cuadratura, mientras que en la `3.` hemos calculado el área de Δ_k como un medio de la norma del vector normal, o más precisamente, un medio del producto vectorial de dos de los vectores que componen a Δ_k.

La linea `4.` requiere una explicación más detallada. Por suposición, tenemos que

$$\texttt{elef(k,:)} = \alpha\ \beta\ \gamma,$$

por otro lado, `indexr` nos indica a qué elemento pertenece la cara Δ_k, luego $\texttt{elem(indexr(k),:)}$ contiene en sus cuatro vértices, los tres que componen a Δ_k, pero no necesariamente los lista en el mismo orden, en otras palabras, es posible que $\texttt{elem(indexr(k),:)} = \delta\ \gamma\ \beta\ \alpha$.

Ahora, dado que la matriz `coef` está construida con base en $\texttt{elem(indexr(k),:)}$, es necesario extraer una sub-matriz de `coef` y permutarla para que el orden de sus elementos coincida con los de $\texttt{elef(k,:)}$ y pueda construirse la matriz C.

Para este fin construimos el vector ib en la linea `4.`, que básicamente compara las columnas de $\texttt{elem(indexr(k),:)}$ y $\texttt{elef(k,:)}$. Este vector es tal que

$$\texttt{elem(indexr(k),ib) = elef(k,:)},$$

de modo que $\texttt{coef(:,ib)}$ es la sub-matriz que buscábamos. Por último, `nu` representa la matriz η, que contiene en cada columna las componentes del vector normal exterior unitario a Δ_k.

La Nota 4.1 aplica en este caso con la función λ. En [27] se listan cuadraturas de superficie de orden superior.

3.5. Vector de carga $\boldsymbol{d}_k$

Para la implementación de $\boldsymbol{d}_k$ usaremos parte de lo implementado en C_k. Se tiene entonces que

$$\boldsymbol{d}_k^\top = \int_{\Delta_k} \boldsymbol{g}\hat{\Phi}_{\Sigma,T},$$

expresión que podemos aproximar usando la cuadratura de tres puntos usada en la implementación de C_k, esto es

$$\boldsymbol{d}_k \approx \frac{\Delta_k}{3}\sum_{n=1}^{3}(\boldsymbol{g}(\eta\times\Phi_\Sigma(p_n)\Upsilon_\Sigma)\times\eta)^\top.$$

Partiendo de que las matrices `Cka`, `Ckb`, `Ckc` y `p` están implementadas, la construcción de $\boldsymbol{d}_k$ y el ensamble de $\boldsymbol{d}$ quedan implementadas así

```
1.     d = sparse(nlad,1);
2. for k = 1:nef
3.    dk = area/3*( g(p(1,:),K,n)*Cka + ...
                    g(p(2,:),K,n)*Ckb + ...
                    g(p(3,:),K,n)*Ckc ).';
4.     d = d + sparse(ladof(k,:),ones(3,1),dk,nlad,1);
5. end
```

donde `g` representa la función $\boldsymbol{g}$.

4. Solución del problema

La solución del problema consiste en resolver el sistema de ecuaciones dado por

$$(A - \kappa^2 B - i\kappa C)\boldsymbol{\alpha} = b + d. \tag{4.11}$$

La implementación completa de la solución es:

```
%% Análisis Geométrico

1.        K = 1;
```

```
2.  malla = load_gmsh(malla);
3.  coord = malla.POS(:,1:3);
4.   elem = malla.TETS(:,1:4);
5.   elef = malla.TRIANGLES(:,1:3);
6.   nver = malla.nbNod;
7.    nel = malla.nbTets;
8.    nef = size(elef,1);

9.   Aristas = [elem(:,[1 2]); elem(:,[1 3]); elem(:,[1 4]);...
                elem(:,[2 3]); elem(:,[2 4]); elem(:,[3 4])];
10. [Aristas,~,lados] = unique(sort(Aristas,2),'rows');
11.    lados = reshape(lados,nel,6);
12.     nlad = size(Aristas,1);

13.  Aristaf = [elef(:,[1 2]); elef(:,[1 3]); elef(:,[2 3])];
14. [Aristaf,~,ia] = unique(sort(Aristaf,2),'rows');
15. [~,~,ib] = intersect(Aristaf,Aristas,'rows');
16.    ladof = ib(ia);
17.    ladof = reshape(ladof,nef,3);
18.     nlaf = size(Aristaf,1);

19.   indexr = zeros(nef,1);
20.    Caras = [elem(:,[1 2 3]); elem(:,[1 2 4]);...
                elem(:,[1 3 4]); elem(:,[2 3 4])];
21.        ind = repmat(1:nel,1,4)';
22.  [~,ia,ib] = intersect(sort(elef,2),sort(Caras,2),'rows','stable');
23. indexr(ia) = ind(ib);

24.  signos = sign(elem(:,[2 3 4 3 4 4]) - elem(:,[1 1 1 2 2 3]));
25.  signof = sign(elef(:,[2 3 3]) - elef(:,[1 1 2]));


%% Análisis Algebraico

26. Ccuad = 1/2*[ 1  1  0  ;
                  0  1  1  ;
                  1  0  1 ];

27.    Ca = 1/2*[ -1  0  0  ;
                   1  0  0  ;
                   0  1  1 ];

28.    Cb = 1/2*[ -1 -1  0  ;
```

```
                  0  0 -1  ;
                  0  0  1 ];

29.    Cc = 1/2*[  0 -1  0  ;
                   1  0 -1  ;
                   0  1  0 ];

30.    aa = 0.58541020;
31.    bb = 0.13819660;

32. Bcuad = [ aa   bb   bb   bb  ;
              bb   aa   bb   bb  ;
              bb   bb   aa   bb  ;
              bb   bb   bb   aa ];

33.    Ba = [ -bb  -bb  -bb    0    0    0  ;
               aa    0    0  -bb  -bb    0  ;
                0   aa    0   bb    0  -bb  ;
                0    0   aa    0   bb   bb ];

34.    Bb = [ -aa  -bb  -bb    0    0    0  ;
               bb    0    0  -bb  -bb    0  ;
                0   bb    0   aa    0  -bb  ;
                0    0   bb    0   aa   bb ];

35.    Bc = [ -bb  -aa  -bb    0    0    0  ;
               bb    0    0  -aa  -bb    0  ;
                0   bb    0   bb    0  -bb  ;
                0    0   bb    0   bb   aa ];

36.    Bd = [ -bb  -bb  -aa    0    0    0  ;
               bb    0    0  -bb  -aa    0  ;
                0   bb    0   bb    0  -aa  ;
                0    0   bb    0   bb   bb ];

37.   A = sparse(nlad,nlad);
38.   B = sparse(nlad,nlad);
39.   C = sparse(nlad,nlad);
40.   b = sparse(nlad,1);
41.   d = sparse(nlad,1);

42. for k = 1:nel
```

```
43.  if k <= nef
44.    s = setdiff( elem(indexr(k),:),elef(k,:) );
45.    Z = coord(elef(k,[2 3 3]),:) - coord(elef(k,[1 1 2]),:);
46.    x = coord(s,:) - coord(elef(k,1),:);
47.   Mf = diag(signof(k,:));
48.    p = Ccuad*coord(elef(k,:),:);
49.    n = cross(Z(1,:),Z(2,:));
50. area = norm(n)/2;
51. [~,~,ib] = intersect(elef(k,:),elem(indexr(k),:),'stable');
52  coef = inv([coord(elem(indexr(k),:),:) ones(4,1)]);

53. if sign(dot(n,x)) == -1
       n =  n/norm(n);
   else
       n = -n/norm(n);
54. end

55.   nu = repmat(n,3,1);

56.  Cka = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Ca*Mf),nu');
57.  Ckb = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Cb*Mf),nu');
58.  Ckc = cross(cross(nu',coef(1:3,ib)*Cc*Mf),nu');

59.   Ck = (area/3)*( lambda(p(1,:))*(Cka'*Cka) + ...
                      lambda(p(2,:))*(Ckb'*Ckb) + ...
                      lambda(p(3,:))*(Ckc'*Ckc) );

60.   dk = (area/3)*( g(p(1,:),K,n)*Cka + ...
                      g(p(2,:),K,n)*Ckb + ...
                      g(p(3,:),K,n)*Ckc ).';

61.  row = repmat(ladof(k,:)',3,1);
62.  col = reshape( repmat(ladof(k,:),3,1) ,9,1);
63.  val = reshape(Ck,9,1);
64.    C = C + sparse(row,col,val,nlad,nlad);
65.    d = d + sparse(ladof(k,:),ones(3,1),dk,nlad,1);
66. end

67.   Ms = diag(signos(k,:));
68.  vol = (1/6)*abs(det([coord(elem(k,:),:) ones(4,1)]));
69. coef = inv([coord(elem(k,:),:) ones(4,1)]);
70.    P = Bcuad*coord(elem(k,:),:);
```

```
71. curl = 2*cross(coef(1:3,[1 1 1 2 2 3]),coef(1:3,[2 3 4 3 4 4]));

72.   Ak = vol/4*Ms'*(curl'*curl)*Ms*sum(mur(P).^(-1),1);

73.  Bka = coef(1:3,:)*Ba;   Bkb = coef(1:3,:)*Bb;
74.  Bkc = coef(1:3,:)*Bc;   Bkd = coef(1:3,:)*Bd;

75.   Bk = vol/4*Ms'*( epr(P(1,:),K)*(Bka'*Bka) + ...
                       epr(P(2,:),K)*(Bkb'*Bkb) + ...
                       epr(P(3,:),K)*(Bkc'*Bkc) + ...
                       epr(P(4,:),K)*(Bkd'*Bkd) )*Ms;

76.   bk = vol/4*Ms'*(F(P(1,:))*Bka + ...
                      F(P(2,:))*Bkb + ...
                      F(P(3,:))*Bkc + ...
                      F(P(4,:))*Bkd)';

77.  row = repmat(lados(k,:)',6,1);
78.  col = reshape( repmat(lados(k,:),6,1) ,36,1);
79.  val = reshape(Ak,36,1);

80.    A = A + sparse(row,col,val,nlad,nlad);

81.  val = reshape(Bk,36,1);
82.    B = B + sparse(row,col,val,nlad,nlad);

83.    b = b + sparse(lados(k,:),ones(6,1),bk,nlad,1);
84. end


%% Solución del problema

85.     D = A - K^2*B - 1i*K*C;
86. Alpha = D\(b + d);
```

donde `Alpha` representa el vector $\boldsymbol{\alpha}$.

5. Análisis de error y orden de convergencia

En esta sección llevamos a cabo un análisis de error *a priori*, donde suponemos que la solución exacta del problema es conocida. El análisis consiste en estimar la diferencia

entre las soluciones exacta $\boldsymbol{E}$ y aproximada $\boldsymbol{E}_h$ asociada a una malla τ_h, en las normas $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y $H(curl;\Omega)$.

Por convención, denotaremos el error en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ por $\varepsilon_{_L}$, el cual viene dado por

$$\varepsilon_{_L} = \|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega \|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|^2} = \sqrt{\sum_{K\in\tau_h} \int_K \|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|^2}.$$

La integral dentro de la raíz puede ser aproximada usando la cuadratura Gaussiana de cuatro puntos, esto es

$$\int_K \|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|^2 \approx \frac{|K|}{4} \sum_{m=1}^{4} \|(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h)(p_m)\|^2,$$

la cual es una expresión que hemos implementado anteriormente. Consideremos de nuevo el k-ésimo elemento de la triangulación con $1 \leq k \leq$ `nel`, cuyas aristas vienen dadas por `lados(k,:)`, las cuales suponemos son $e_a, e_b, ..., e_f$. Naturalmente a estas aristas vienen asociadas las funciones de forma $\boldsymbol{\phi}_a, \boldsymbol{\phi}_b, ..., \boldsymbol{\phi}_f$ y a su vez, los coeficientes $\alpha_a, \alpha_b, ..., \alpha_f$, los cuales vienen dados por `Alpha(lados(k,:))` y son tales que:

$$\boldsymbol{E}_h\Big|_{K_k} = \sum_{i=a}^{f} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i,$$

matricialmente, lo anterior es equivalente a

$$\hat{\Phi}\text{diag}([\alpha_a, ..., \alpha_f]).$$

Partiendo de que el volumen de K y las matrices, `coef`, `Ms`, `P`, `Bka`, `Bkb`, `Bkc` y `Bkd` están implementadas, el error en norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ lo implementamos como

```
1. Error_L = 0;
2.   for k = 1:nel
3.      Ea = sum(Bka*Ms*diag(Alpha(lados(k,:))),2);
4.      Eb = sum(Bkb*Ms*diag(Alpha(lados(k,:))),2);
5.      Ec = sum(Bkc*Ms*diag(Alpha(lados(k,:))),2);
6.      Ed = sum(Bkd*Ms*diag(Alpha(lados(k,:))),2);
7. Error_L = Error_L + vol/4*( norm(Ea - U(P(1,:),K).')^2 + ...
                               norm(Eb - U(P(2,:),K).')^2 + ...
                               norm(Ec - U(P(3,:),K).')^2 + ...
                               norm(Ed - U(P(4,:),K).')^2 );
8.   end
9. Error_L = sqrt(Error_L);
```

donde `U` representa la solución exacta $\boldsymbol{E}$ y `Error_L` a $\varepsilon_{_L}$. De forma análoga, definimos a $\varepsilon_{_H}$ como el error en la norma $H(curl;\Omega)$, el cual viene dado por:

$$\varepsilon_{_H} = \|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|_{H(curl;\Omega)} = \sqrt{\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \|\nabla\times\boldsymbol{E} - \nabla\times\boldsymbol{E}_h\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}},$$

o equivalentemente,

$$\varepsilon_{_H} = \sqrt{\varepsilon^2_{_L} + \sum_{K\in\tau_h}\int_K \|\nabla\times\boldsymbol{E} - \nabla\times\boldsymbol{E}_h\|^2}.$$

Bajo las mismas suposiciones del caso anterior, el error en norma $H(curl;\Omega)$ lo implementamos así

```
1. Error_H = 0;
2.   for k = 1:nel
3.    Curl = sum(curl{k}*diag(Alpha(lados(k,:))),2);
4. Error_H = Error_H + vol/4*( norm(Curl - curlU(P{k}(1,:)).')^2 + ...
                               norm(Curl - curlU(P{k}(2,:)).')^2 + ...
                               norm(Curl - curlU(P{k}(3,:)).')^2 + ...
                               norm(Curl - curlU(P{k}(4,:)).')^2 );
5. end
6. Error_H = sqrt(Error_L^2 + Error_H);
```

donde `curlU` representa a $\nabla\times\boldsymbol{E}$ y `Error_H` a $\varepsilon_{_H}$.

El análisis de orden de convergencia es un indicador de que las soluciones aproximadas se acercan cada vez más a la solución exacta cuando usamos triangulaciones cada vez más finas. Este análisis requiere que la implementación previa, tanto del problema como del análisis de error, se lleve a cabo sobre un conjunto finito de mallas, las cuales son más finas a medida que aumenta la cantidad de elementos.

El error en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ está acotado por una constante $C > 0$, es decir:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \approx Ch^{\alpha},$$

donde h es el máximo de los diámetros de los elementos de la triangulación y α, en este caso es una constante que indica el orden de convergencia del método. De modo que para dos radios h_1 y h_2 con $h_1 > h_2$ tenemos que

$$\frac{\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{h_2}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}}{\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{h_1}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}} \approx \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\alpha}.$$

Denotando a $\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ como $\varepsilon_{_{L,h}}$, concluimos que

$$\alpha \approx \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{_{L,h_2}}}{\varepsilon_{_{L,h_1}}}\right)}{\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}.$$

Análogamente, concluimos para $\varepsilon_{H,h}$

$$\beta \approx \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{H},h_2}}{\varepsilon_{\mathrm{H},h_1}}\right)}{\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)},$$

dónde β es el orden de convergencia asociado a la norma $H(curl;\Omega)$. Para implementar el análisis de orden de convergencia asumiremos que disponemos de un conjunto de mallas creadas en *gmsh*, las cuales se cargan de forma automática en MATLAB y cuya cantidad denominaremos como `#mallas`. En las siguiente lineas implementamos el análisis de de orden de convergencia

```
1.   mallas = #mallas;
2   Error_L = zeros(mallas,1);
3.  Error_H = zeros(mallas,1);
4.       hh = zeros(mallas,1);
5.   for kk = 1: #mallas}
6.      aux = coord(aristas(:,1),:) - coord(aristas(:,2),:);
7.   hh(kk) = max(sqrt( sum(aux.*aux,2) ));
8.  Orden_L = log(Error_L(2:end)./Error_L(1:end-1))./log(hh(2:end)./hh(1:end-1));
9.  Orden_H = log(Error_H(2:end)./Error_H(1:end-1))./log(hh(2:end)./hh(1:end-1));
10.  end
```

donde los parámetros `Error_L` y `Error_H`, calculados en la implementación del análisis de error deben almacenarse ahora en vectores.

Nota 4.2. *Sobre la implementación se pueden hacer las siguientes observaciones.*

- *Como se puede ver, el código no contempla la existencia de la frontera* Γ. *En el caso que* $\Gamma \neq \emptyset$, *los elementos de la matriz* `elef` *deben ser discriminados. Sobre los elementos con condición de impedancia, se construyen la matriz de rigidez* C_k *y el vector* $\boldsymbol{d}_k$. *Sobre aquellos con condición de conductor perfecto, debe verificarse que la solución del problema satisfaga* $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}_h = 0$, *donde* $\boldsymbol{\nu}$ *es el vector normal unitario exterior a* Γ *y se implementa idénticamente al vector asociado a* Σ.

- *La implementación de las integrales es arbitraria. De ser necesario, cuadraturas de orden superior pueden ser utilizadas, sin embargo matrices análogas a* `Ba`, `Bb`, `Bc`, `Bd`, `Ca`, `Cb` *y* `Cc` *deberán ser calculadas e implementadas.*

Capítulo 5

Ejemplos numéricos

Este capítulo está dedicado a exponer algunos resultados numéricos de la implementación realizada en el Capítulo 4 para el problema de radiación descrito por

$$(\mu_r^{-1}\times\boldsymbol{E}_h,\nabla\times\boldsymbol{\phi}_h)-\kappa^2(\varepsilon_r\boldsymbol{E}_h,\boldsymbol{\phi}_h)-i\kappa\langle\lambda\boldsymbol{E}_{h,T},\boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle = (\boldsymbol{F},\boldsymbol{\phi}_h)+\langle\boldsymbol{g},\boldsymbol{\phi}_{h,T}\rangle \quad \forall\boldsymbol{\phi}_h\in X_h,$$

en una cavidad unitaria dada por $\Omega := [0,1]^3$, en ausencia de agentes dispersores ($\Gamma = \emptyset$). Estudiaremos el caso en que el campo incidente es una onda plana (función regular) y uno en el que dicho campo está representado por una función paramétrica de baja regularidad. En ambos casos, la solución exacta coincide con el campo incidente ya que no existe campo dispersado, por lo que llevamos a cabo un análisis de error *a priori* con su respectivo orden de convergencia.

En todos los casos supondremos que los parámetros ε_r, μ_r y λ son constantes unitarias (funciones continuas), esto implica naturalmente que la conductividad del medio es nula y supondremos que la frecuencia del campo ω es fija y tal que $\kappa = 1$.

1. Solución regular

En este caso, suponemos que el campo incidente viene dado por una onda plana, es decir

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{p}e^{i\kappa\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}},$$

donde $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d} = 0$, con $\boldsymbol{p} = (1/10)[0,-5,1]^\top$, $\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{d}}/\|\hat{\boldsymbol{d}}\|$ y $\hat{\boldsymbol{d}} = [11,1,5]^\top$. Partiendo de que la solución coincide con el campo incidente, la función $\boldsymbol{g}$ asociada a la condición de impedancia sobre Σ viene dada por

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{\nu} - i\kappa\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}_T,$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal exterior a la frontera Σ, que resulta ser la superficie del cubo. La forma del campo incidente permite hacer varias simplificaciones que resultan especialmente útiles en la implementación de éstas. Por ejemplo, tomando el *curl* del campo se tiene

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = i(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}},$$
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}},$$

de (3.1) se sigue que

$$\boldsymbol{F} = -[\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p}]e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}}.$$

Usando la identidad vectorial $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, de la expresión anterior se tiene que

$$\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}\|\boldsymbol{d}\|^2 = -\boldsymbol{p},$$

con lo cual se constata que $\boldsymbol{F} = 0$, como se había mencionado en el Capítulo 1. Por otro lado, un análisis similar nos lleva a que

$$\boldsymbol{g} = [(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\nu})\times\boldsymbol{p}]\times\boldsymbol{\nu}e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d}}.$$

Ahora, dado que $\boldsymbol{E}\in C^\infty(\Omega)$, se espera que el orden de convergencia en la norma de X sea aproximadamente de $O(h)$. Para ilustrar este hecho, retomamos el Corolario 3.31 y la definición de las normas en $X, H(curl;\Omega)$ y $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, de modo que para algún $s\geq 1/2$ se tiene

$$\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_h\|_{H(curl;\Omega)} \leq \|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_h\|_X \leq Ch^{\text{mín}(s,k)},$$

luego, basta analizar el orden de convergencia en la norma $L^2(\Omega)$ en vez de la norma en X. Estudiamos también el orden de convergencia en la norma $H(curl,\Omega)$ para mostrar que en efecto, deben esperarse los mismos resultados en X a parte de mostrar que los elementos de primer orden no solo aproximan bien la solución exacta sino su *curl* también.

En la siguiente tabla se consignan los resultados, donde τ_h denota la malla analizada, card($\mathcal{K}$) como la cantidad de ésta, h el radio de la misma, $\varepsilon_{_{L,h}}$ como el error en la norma $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y α como el orden de convergencia en dicha norma. De la misma forma, $\varepsilon_{_{H,h}}$ y β representan respectivamente el error en la norma $H(curl;\Omega)$ y el orden de convergencia asociado.

τ_h	card($\mathcal{K}$)	h	$\varepsilon_{L,h}$	$\varepsilon_{H,h}$	α	β
1	24	1.0000	0.0590	0.0901	–	–
2	219	0.6850	0.0465	0.0620	0.6257	0.9901
3	793	0.4134	0.0289	0.0379	0.9446	0.9711
4	1559	0.3429	0.0232	0.0315	1.1627	1.0011
5	33004	0.1183	0.0077	0.0105	1.0358	1.0323
6	146854	0.0745	0.0046	0.0063	1.1166	1.1063
7	511583	0.0475	0.0030	0.0041	0.9459	0.9419

Tabla 5.1: Resultados numéricos para la solución regular.

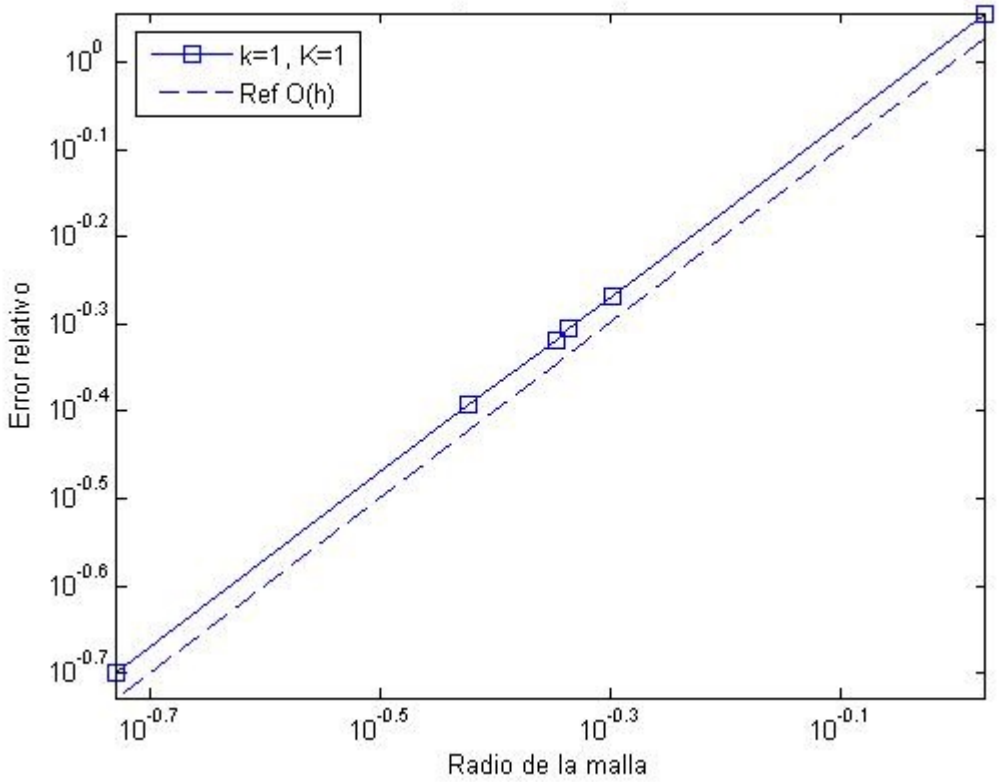

Figura 5.1: Análisis de convergencia para la solución regular. Comparación en escala logarítmica del orden de convergencia en norma $L^2(\Omega)$ obtenido contra el esperado.

2. Solución de baja regularidad

En este caso, suponemos que el campo incidente viene dado por una función paramétrica $\boldsymbol{u}$ dada por

$$\boldsymbol{u} := \left[\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, 0\right],$$

donde $S(r,\theta,z) := r^{\frac{2n}{3}} sin(\frac{2n}{3}\theta)$ es una función escalar en coordenadas cilíndricas con $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, la función $\boldsymbol{u}$ claramente tiene un comportamiento singular a lo largo del eje z por lo que $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, sin embargo es fácil ver $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ y además $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$, luego $\boldsymbol{u} \in H(curl;\Omega)$. En [5], [28] y [29] este tipo de problema está bien estudiado.

Este caso es particularmente especial no solo por la baja regularidad de la solución sino porque la estructura de la función pone a prueba en varios sentidos la implementación de la formulación discreta del problema. En primera instancia, $\boldsymbol{u}$ es enteramente real, mientras que la implementación está basada en una función compleja donde no se tomó en consideración que alguna de sus componentes fuera nula. En segundo lugar y quizás el hecho más relevante, es que $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$, sin embargo, la matriz de rigidez asociada A es no nula y sigue estando presente en el sistema matricial.

De éste último hecho, algunas simplificaciones pueden hacerse, por ejemplo de (3.1) y (3.3) se sigue que las funciones $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{g}$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\boldsymbol{u} \text{ en } \Omega \\ \boldsymbol{g} &= -i\boldsymbol{u}_T \text{ en } \Sigma, \end{aligned}$$

sin embargo, otras complicaciones surgen de la estructura de $\boldsymbol{u}$. En coordenadas rectangulares, la función $\boldsymbol{u}$ queda descrita por

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \frac{2n}{3}\sqrt{x^2+y^2}^{\frac{2n}{3}-1}\left[\sin\left[\left(\frac{2n}{3}-1\right)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right], \cos\left[\left(\frac{2n}{3}-1\right)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right], 0\right].$$

Aunque resulta favorable implementar la función $\boldsymbol{u}$ de ésta forma (ya que *gmsh* provee las coordenadas de los nodos en el sistema rectangular), esta expresión nos permite ver que incluso para $n \geq 1$, especial cuidado debe tenerse con los vértices sobre el eje z, ya que el argumento de la tangente inversa no está definido para ninguno de éstos.

En [28] está bien estudiada la regularidad de $\boldsymbol{u}$. De esta se espera que el orden de convergencia sea mín$\{\frac{2n}{3}, k\}$, en nuestro caso $k = 1$ por lo que se espera que para $n = 1$, el orden de convergencia sea del orden de $O(h^{0,67})$. En la siguiente tabla se consignan los resultados siguiendo el estilo del ejemplo anterior.

τ_h	card($\mathcal{K}$)	h	$\varepsilon_{L,h}$	$\varepsilon_{H,h}$	α	β
1	24	1.0000	0.1523	0.1569	–	–
2	219	0.6850	0.1110	0.1123	0.8354	0.8850
3	793	0.4134	0.0821	0.0828	0.5983	0.6035
4	1559	0.3429	0.0706	0.0709	0.8044	0.8264
5	33004	0.1183	0.0373	0.0375	0.5991	0.5992
6	146854	0.0745	0.0272	0.0273	0.6510	0.6525
7	511583	0.0475	0.0161	0.0162	0.6549	0.6544

Tabla 5.2: Resultados numéricos para la solución de baja regularidad.

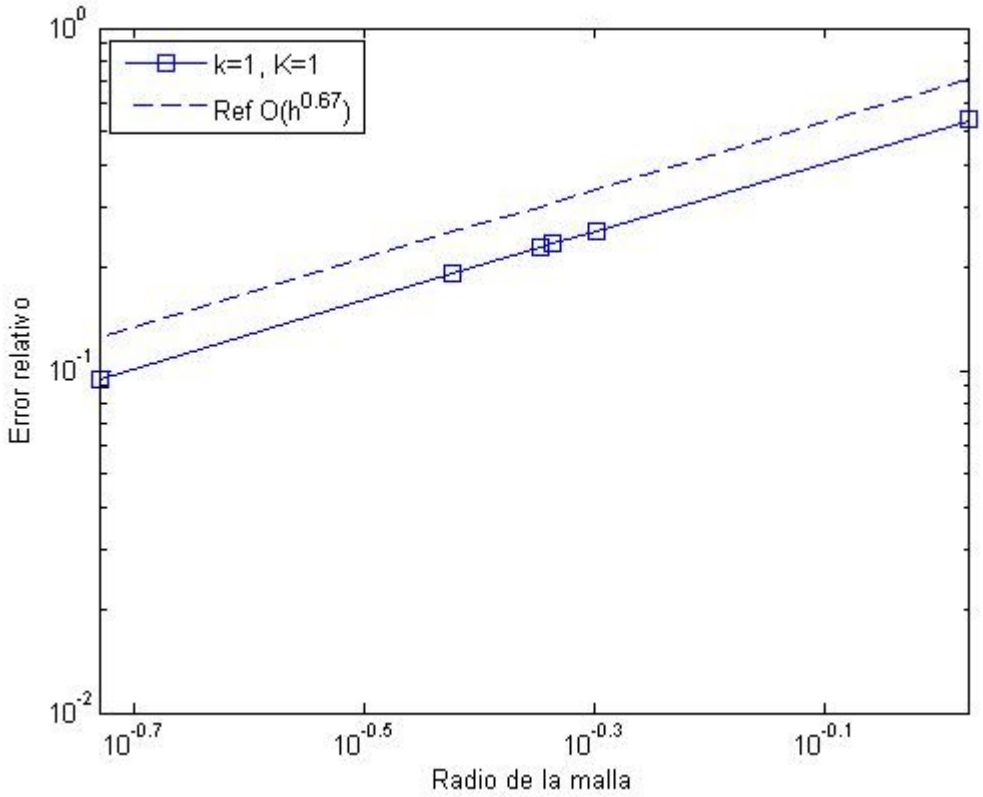

Figura 5.2: Análisis de convergencia para la solución de baja regularidad. Comparación en escala logarítmica del orden de convergencia en norma L^2 obtenido contra el esperado

Conclusiones

- El análisis de existencia y unicidad de la solución al problema de radiación propuesto requiere tanto de la definición de múltiples espacios de Sobolev, como también diversas teorías de problemas variacionales. Sin embargo se destacan como conceptos fundamentales del análisis la descomposición de Helmholtz y la alternativa de Fredholm.

- Análogamente, para el análisis de convergencia del problema discreto es indispensable la combinación de la teoría de operadores colectivamente compactos con el concepto de propiedad de compacidad discreta, sin trivializar el uso de otras herramientas como el Lema de Cea o la teoría de problemas mixtos.

- El método de elementos finitos de Nédélec es apropiado para abordar numéricamente el problema de radiación en cavidades por su *curl* conformidad y la continuidad de las componentes tangenciales entre elementos, que no solo permite resolver problemas en medios no homogéneos, sino que evita el surgimiento de soluciones indeseadas (*spurious solutions*) asociadas a los elementos nodales.

- El análisis de existencia y unicidad de la solución del problema propuesto puede ser abordado haciendo uso de formulaciones mixtas. Boffi, Brezzi y Gastaldi han abordado esta alternativa en [30], [31] y [32].

- La implementación de la formulación discreta puede aproximar bien la solución exacta incluso ante soluciones que no son enteramente complejas, irrotacionales y de baja regularidad, naturalmente, a costa de velocidad en la convergencia.

Trabajo futuro

- El algoritmo de implementación requiere un uso considerable de memoria, lo cual se debe en mayormente a que el problema está planteado en tres dimensiones. Usar métodos de relajación como el esquema del gradiente biconjugado permitiría al algoritmo hacer un uso de memoria más razonable.
- El hecho de que las matrices de rigidez sean no densas puede hacer que el problema no esté bien condicionado. Usar el método ILU para pre-condicionar las matrices de rigidez puede mejorar la calidad de los resultados.
- La velocidad de convergencia del método desde el punto de vista teórico puede ser mejorada haciendo uso de otra familia de elementos de borde propuesta por Nédélec en [4]. Monk expone con detalle ciertos aspectos de ésta clase de elementos en el Capítulo 8 de [6].
- El algoritmo es susceptible de ser modificado para que haga mayor uso de memoria y disminuya considerablemente la cantidad de operaciones y por ende, el tiempo de simulación o viceversa. Un estudio detallado de cantidad de operaciones versus memoria utilizada puede llevar la implementación del problema a un punto entre ambos extremos, donde la implementación sea óptima en cuanto al uso de recursos.

Bibliografía

[1] N. Matthew and O. Sadiku, "Elementos de electromagnetismo," *España, Crítica*, 2003.

[2] W. Cai, "Numerical methods for Maxwell's equations in inhomogeneous media with material interfaces," *Journal of Computational Mathematics*, pp. 156–167, 2004.

[3] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on antennas and propagation*, vol. 14, no. 3, pp. 302–307, 1966.

[4] J. C. Nédélec, "A new family of mixed finite elements in Rˆ3," *Numerische Mathematik*, vol. 50, no. 1, pp. 57–81, 1986.

[5] M. Olm, S. Badia, and A. Martín, "On a general implementation of h- and p-adaptive curl-conforming finite elements," *Advances in Engineering Software*, vol. 132, pp. 74–91, 06 2019.

[6] P. Monk *et al.*, *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, 2003.

[7] G. Gatica, *Introducción al análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Reverté.

[8] R. Kress, *Linear integral equations*. Applied Mathematical Sciences 82, Springer New York, 2 ed., 1999.

[9] W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, 1 ed., 2000.

[10] V. Girault and P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier - Stokes equations: theory and algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer - Verlag, 1986.

[11] J. Necas, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques," 1967.

[12] S. Brenner and R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 1994.

[13] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, vol. 4. North - Holland, 1978.

[14] L. Chen, "Finite element methods for Maxwell equations," *Lecture Notes*, 2016.

[15] J. C. Nédélec, "Mixed finite elements in r^3," *Numerische Mathematik*, vol. 35, no. 3, pp. 315–341, 1980.

[16] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault, "Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 21, no. 9, pp. 823–864, 1998.

[17] Z. Chen, Q. Du, and J. Zou, "Finite element methods with matching and nonmatching meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 37, no. 5, pp. 1542–1570, 2000.

[18] P. Jacobsson, "Nédélec elements for computational electromagnetics," 2007.

[19] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu, "The analysis of multigrid algorithms with nonnested spaces or noninherited quadratic forms," *Mathematics of Computation*, vol. 56, no. 193, pp. 1–34, 1991.

[20] A. Kirsch and P. Monk, "A finite element/spectral method for approximating the time-harmonic Maxwell system in R^3," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 55, no. 5, pp. 1324–1344, 1995.

[21] S. Caorsi, P. Fernandes, and M. Raffetto, "On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 38, no. 2, pp. 580–607, 2000.

[22] D. Colton and R. Kress, "Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory,"

[23] R. Leis, "Initial boundary value problems in mathematical physics," *Tubner*, 1986.

[24] G. Hsiao, P. Monk, and N. Nigam, "Error analysis of a finite element - Integral equation scheme for approximating the time - harmonic Maxwell system," *SIAM journal on numerical analysis*, vol. 40, no. 1, pp. 198–219, 2002.

[25] B. López Rodríguez and M. Osorio, "Seminario sobre elementos finitos," *Lecture Notes*, 2018.

[26] C. Bahriawati and C. Carstensen, "Three MATLAB implementations of the lowest-order Raviart - Thomas MFEM with a posteriori error control," *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, vol. 5, no. 4, pp. 333–361, 2005.

[27] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The finite element method: solid mechanics*, vol. 2. Butterworth - Heinemann, 2000.

[28] S. Nicaise, "Edge elements on anisotropic meshes and approximation of the Maxwell equations," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 39, no. 3, pp. 784–816, 2001.

[29] L. Camargo, B. López-Rodrıguez, M. Osorio, and M. Solano, "An HDG method for Maxwell's equations in heterogeneous media,"

[30] D. Boffi, "A note on the de-Rham complex and a discrete compactness property," *Applied mathematics letters*, vol. 14, no. 1, pp. 33–38, 2001.

[31] D. Boffi, F. Brezzi, and L. Gastaldi, "On the convergence of eigenvalues for mixed formulations," *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, vol. 25, no. 1-2, pp. 131–154, 1997.

[32] D. Boffi, F. Brezzi, and L. Gastaldi, "On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form," *Mathematics of computation*, vol. 69, no. 229, pp. 121–140, 2000.