

*Rentas contingentes con base en tablas de mortalidad  
dinámicas y tasa de interés estocástica*

DIEGO ALBERTO ACERO FIGUERO

ESTADÍSTICO

CÓDIGO: 2626212



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

BOGOTÁ, D.C.

MAYO DE 2016

*Rentas contingentes con base en tablas de mortalidad  
dinámicas y tasa de interés estocástica*

DIEGO ALBERTO ACERO FIGUEREDO

ESTADÍSTICO

CÓDIGO: 2626212

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE  
MAGISTER EN ESTADÍSTICA

DIRECTOR

JAIME ABEL HUERTAS CAMPOS, PH.D.

DOCTOR EN ESTADÍSTICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

BOGOTÁ, D.C.

MAYO DE 2016

**Título en español**

Rentas contingentes con base en tablas de mortalidad dinámicas y tasa de interés estocástica.

**Title in English**

Contingent annuities based on dynamic mortality tables and stochastic interest rate.

**Resumen:** En este documento se estudian las rentas contingentes abordando el concepto de supervivencia a partir de tablas de mortalidad dinámicas, viendo la predicción adecuada de las probabilidades de muerte como uno de los ejes centrales en la reducción del riesgo a asumir y de manera simultánea evaluando el precio de estos productos financieros con base en una tasa de interés estocástica, lo cual plantea escenarios más realistas a la práctica actuarial clásica en donde se asume tasa de interés fija sobre el tiempo.

**Abstract:** This document study the contingent annuities addressing the concept of survival from dynamic mortality tables, watching the accurate prediction of the probability of death as one of the cornerstones in reducing the risk to take, and simultaneously evaluating the price of these financial products based on a stochastic interest rate, which raises more realistic scenarios to classical actuarial practice where interest rate is assumed fixed over time.

**Palabras clave:** Rentas contingentes, tablas de mortalidad dinámicas, tasa de interés, proceso estocástico.

**Keywords:** Contingent annuities, dynamic mortality tables, interest rate, stochastic process.

# Nota de aceptación

Trabajo de tesis

“Mención ”

---

Jurado

---

Jurado

---

Director  
Jaime Abel Huertas Campos

Bogotá, D.C., Mayo 27 de 2016

---

---

# Dedicado a

---

---

A mi familia.

---

---

## Agradecimientos

---

---

Es claro que sin la instrucción de Jaime Abel Huertas, mi tutor, este trabajo no hubiera sido posible, por lo cual quiero agradecer su ayuda incondicional.

De otro lado, no es sencillo expresar agradecimientos a todos aquellos que en algún momento han aportado en mi desarrollo personal o profesional, aun así existe ese tipo de personas que siempre están presentes y en el desarrollo de esta tesis no fue la excepción. Es a esas personas a quienes quiero agradecer con mayor énfasis, a mis padres y hermanos por absolutamente todo, a Angélica González por su apoyo y paciencia, y finalmente a Sergio Martínez por su comprensión y amistad verdadera.

---

---

# Índice general

---

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Índice general</b>  | <b>I</b>   |
| <b>Índice de figuras</b>   | <b>III</b> |
| <b>Introducción</b>  | <b>IV</b>  |
| <b>1. Marco Teórico</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1. Tablas de Mortalidad . . . . .  | 1          |
| 1.1.1. Tablas de mortalidad estáticas . . . . .  | 2          |
| 1.1.2. Tablas de mortalidad dinámicas . . . . .  | 2          |
| 1.1.2.1. Métodos paramétricos estructurales . . . . .  | 3          |
| 1.1.2.2. Métodos paramétricos no estructurales . . . . .   | 4          |
| 1.1.2.3. Métodos no paramétricos . . . . .   | 5          |
| 1.1.2.4. Métodos basados en factores de reducción . . . . .  | 5          |
| 1.1.2.5. Un acercamiento mediante datos funcionales . . . . .  | 6          |
| 1.2. Tasa de interés . . . . .   | 10         |
| 1.2.1. Bonos cero cupón . . . . .  | 10         |
| 1.2.2. Principales tasas de interés . . . . .  | 11         |
| 1.2.3. Estructura a plazo de las tasas de interés . . . . .  | 13         |
| 1.2.4. Tasa de interés estocástica . . . . .   | 14         |
| 1.2.5. Principales modelos para tasa de interés estocástica . . . . .  | 15         |
| 1.2.6. Un enfoque a través del modelo unifactorial CIR . . . . .   | 17         |
| <b>2. Rentas contingentes: Adaptación propuesta</b>  | <b>20</b>  |
| 2.1. Rentas contingentes con base en tablas de mortalidad dinámicas y tasa de<br>interés estocástica . . . . . | 22         |

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>3. Aplicación empírica al caso colombiano</b> | <b>25</b> |
| <b>Conclusiones</b>                              | <b>35</b> |
| <b>Trabajo futuro</b>                            | <b>36</b> |
| <b>Código R</b>                                  | <b>37</b> |
| <b>Bibliografía</b>                              | <b>43</b> |

---

---

## Índice de figuras

---

---

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Colombia: Edad vs Log tasas de mortalidad 1970-2010. Elaboración propia, datos disponibles en <a href="http://www.lamortalidad.org">www.lamortalidad.org</a> . . . . .      | 26 |
| 3.2. Colombia: Comparación de mortalidad por género 1970-2010. Elaboración propia, datos disponibles en <a href="http://www.lamortalidad.org">www.lamortalidad.org</a> . . . . . | 27 |
| 3.3. Colombia: Tiempo calendario vs Log tasas de mortalidad masculinas 1970-2010. . . . .  | 27 |
| 3.4. Suavizado de la mortalidad masculina para unos pocos años. . . . .  | 28 |
| 3.5. Colombia mortalidad masculina: Funciones base y coeficientes pronosticados. 29  |    |
| 3.6. Colombia mortalidad masculina: Pronósticos de mortalidad 2020-2070 . . . .  | 30 |
| 3.7. Colombia TES: Tasas cero cupón a un año frecuencia mensual 2003-2016 . .  | 31 |
| 3.8. Colombia TES: Datos reales vs media empírica de 200 trayectorias simuladas  | 32 |
| 3.9. Comparación de métodos para el cálculo de anualidades . . . . .   | 33 |

---

---

## Introducción

---

---

Una renta es una sucesión de pagos o cobros periódicos de cuantía constante o variable, usualmente se hace referencia a este concepto refiriéndose a operaciones realizadas en el ámbito financiero tales como los pagos a plazos, los fondos de amortización, los dividendos sobre acciones, los pagos periódicos de las compañías aseguradoras y, en forma más general, los sueldos, mesadas pensionales y todo tipo de anualidades.

En primera instancia podría considerarse una clasificación de las rentas en términos de la certeza que hay en los tiempos de sus posibles pagos, separándolas en rentas ciertas y rentas contingentes; cuando se trata de las primeras se conocen las fechas de todos los pagos, es decir hay certidumbre en la operación, de ahí el nombre de rentas ciertas. En cambio, el pago de las rentas contingentes depende de la ocurrencia de un evento que determina si se paga o no (evento contingente), permitiendo así que no se conozca ni se fije de antemano la fecha del primer pago, la fecha del último pago, o incluso ambas, por ejemplo una pensión que reconoce beneficios pos-empleo, la cual se paga mientras el beneficiario esté vivo, de modo tal que la discontinuidad del pago depende de la muerte del individuo.

El evento contingente más comúnmente asociado a este tipo de rentas es la muerte, gracias a lo cual (a diferencia de las rentas ciertas) incorporan el elemento de supervivencia como clave en su operativa, así toda operación de rentas contingentes supone la consideración del tiempo, estando fuertemente influenciadas por el tipo de interés y las probabilidades de supervivencia, las cuales dan lugar al concepto de tablas de mortalidad. Y aunque las expresiones que detallan las rentas contingentes han sido ampliamente estudiadas, no lo ha sido tanto su variación según el tipo de interés, según las probabilidades de muerte e incluso según el tiempo calendario.

En esta tesis se estudiará precisamente la influencia de estos factores sobre las rentas contingentes abordando el concepto de supervivencia a partir de tablas de mortalidad dinámicas, viendo la predicción adecuada de las probabilidades de muerte como uno de los ejes centrales en la reducción del riesgo a asumir y de manera simultánea evaluando el precio de estos productos financieros con base en una tasa de interés estocástica, lo cual plantea escenarios más realistas a la práctica actuarial clásica en donde se asume tasa de interés fija sobre el tiempo.

La adaptación propuesta a las rentas contingentes con base en tablas de mortalidad dinámicas y tasa de interés estocástica, se muestra como una posible respuesta a ciertos contenidos de la Norma Internacional de Contabilidad 19 *Beneficios a los Empleados* (NIC 19), la cual hace parte del conjunto de Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF) conocidas por sugerencia del Consejo Técnico de la Contaduría Pública en Colombia como Normas de Información Financiera (NIF).

En Colombia de acuerdo con el artículo 3 de la Ley 1314 del 2009, las NIF son aquellas normas de contabilidad y de información financiera que corresponden al sistema compuesto por postulados, principios, limitaciones, conceptos, normas técnicas generales, normas técnicas específicas, normas técnicas especiales, normas técnicas sobre revelaciones, normas técnicas sobre registros y libros, interpretaciones y guías, que permiten identificar, medir, clasificar, reconocer, interpretar, analizar, evaluar e informar las operaciones económicas de un ente, de forma clara y completa, relevante, digna de crédito y comparable.

Con su expedición, la mencionada Ley estableció los lineamientos para la implementación de estándares internacionales de contabilidad en Colombia y se fijó el 31 de diciembre de 2014 como la fecha en la que hacia adelante se deben aplicar completamente los principios internacionales de contabilidad (contando con el periodo de transición que comenzaría el 1º de enero de 2013, para dar tiempo al país de estar listo reglamentaria y operativamente).

La NIC 19 *Beneficios a los Empleados*, que es la norma de interés para esta tesis, prescribe el tratamiento contable y la información respecto de los beneficios de los empleados a revelar por parte de los empleadores, identificando cuatro categorías de beneficios a los empleados:

- a. Beneficios a los empleados a corto plazo, tales como los siguientes (si se espera liquidarlos completamente antes de doce meses después del final de periodo anual sobre el que se informa en el que los empleados prestaron los servicios relacionados): sueldos, salarios y aportaciones a la seguridad social, permisos retribuidos anuales y permisos remunerados por enfermedad, participación en ganancias e incentivos y beneficios no monetarios (tales como atención médica, vivienda, automóviles y bienes o servicios gratuitos o subvencionados).
- b. Beneficios pos-empleo, tales como beneficios por retiro (por ejemplo pensiones y pagos únicos por retiro), seguros de vida pos-empleo y atención médica pos-empleo
- c. Otros beneficios a los empleados a largo plazo, tales como ausencias retribuidas después de largos periodos de servicio o sabáticas, jubileos u otros beneficios después de un largo tiempo de servicio, beneficios por incapacidad prolongada.
- d. Beneficios por terminación.

En la misma norma se destaca la categoría **b.** aclarando que los planes de beneficio pos-empleo se pueden clasificar como planes de aportaciones definidas o de beneficios definidos, según la esencia económica que se derive de los principales términos y condiciones contenidos en ellos. En el caso de los planes de beneficios definidos la contabilización

es compleja, puesto que se requieren suposiciones actuariales para medir la obligación contraída y el gasto, y existe la posibilidad de obtener ganancias o pérdidas actuariales. Más aún, las obligaciones se miden según una base descontada, puesto que existe la posibilidad de que sean liquidadas muchos años después de que los empleados hayan prestado los servicios relacionados. Todo esto da lugar a hipótesis actuariales sobre permanencia de los empleados, tablas de mortalidad, tasas de descuento, tablas de invalidez o morbilidad y esperanza de vida del beneficiario y es ahí donde el objetivo del presente proyecto hace sentido.

Particularmente entre los párrafos 75 a 98 de la NIC 19, se hace mención a las suposiciones actuariales que rigen sobre la misma norma y en lo que atañe a esta tesis se referencian en específico los párrafos siguientes:

### **Suposiciones actuariales: mortalidad**

- 81** Una entidad determinará sus supuestos de mortalidad por referencia a su mejor estimación de mortalidad de los partícipes del plan durante y después de su periodo de empleo.
- 82** Para estimar el costo final del beneficio una entidad tendrá en cuenta los cambios esperados en la mortalidad, por ejemplo mediante la modificación de tablas de mortalidad estándar con mejoras en las estimaciones de la mortalidad.

### **Suposiciones actuariales: tasa de descuento**

- 83** La tasa utilizada para descontar las obligaciones de beneficios pos-empleo (tanto dotadas como no dotadas) se determinará utilizando como referencia los rendimientos del mercado, al final del periodo sobre el que se informa, correspondientes a las emisiones de bonos u obligaciones empresariales de alta calidad. En los países donde no exista un mercado amplio para estos títulos, se utilizará el rendimiento (al final del periodo sobre el que se informa) de los bonos emitidos por el gobierno. La moneda y el plazo de los bonos empresariales o gubernamentales serán coherentes con la moneda y el plazo estimado de pago de las obligaciones por beneficios pos-empleo
- 84** Una de las suposiciones actuariales que tiene efectos significativos es la tasa de descuento. Esta tasa de descuento refleja el valor temporal del dinero, pero no el riesgo actuarial o de inversión. Además, la tasa de descuento no refleja el riesgo de crédito específico que asumen los acreedores de la entidad, ni tampoco refleja el riesgo de que el comportamiento de las variables en el futuro pueda diferir de las suposiciones actuariales.
- 85** La tasa de descuento reflejará el calendario estimado de los pagos de los beneficios. En la práctica, una entidad a menudo consigue esto aplicando un promedio ponderado de la tasa de descuento que refleja el calendario y el importe estimados de los pagos de beneficios y la moneda en la que los beneficios han de ser pagados.
- 86** En algunos casos, puede no existir un mercado amplio de bonos con un periodo de vencimiento suficiente para cubrir los vencimientos esperados de todos los pagos por beneficios. En estos casos, una entidad tendrá que utilizar las tasas presentes de

---

mercado, con las referencias temporales apropiadas, para descontar los pagos a corto plazo, y estimará la tasa de descuento para los vencimientos a más largo plazo, extrapolando las tasas de mercado presentes mediante la curva de rendimiento. Es improbable que el valor actual total de una obligación por beneficios definidos sea particularmente sensible a la tasa de descuento aplicada a la parte de beneficios que se pagarán con posterioridad al vencimiento de los bonos, de entidad o gubernamentales, emitidos a más largo plazo.

Las citas enunciadas plantean desafíos ante los cuales se pretende dar respuesta. Así pues, contemplando el panorama previamente descrito, resulta sensato ocuparse en primera instancia de lo relativo a las tablas de mortalidad dinámicas y de este modo dar sustento a las suposiciones actuariales sobre la mortalidad, dejando de lado el enfoque estacionario que el ajuste clásico exige y que es difícil de admitir cuando se estudia la supervivencia en un largo periodo de tiempo; por otro lado las suposiciones actuariales sobre la tasa de descuento pueden ser bien soportadas en modelos de tasa de interés estocástica permitiéndole a esta fluctuar a través del tiempo.

# CAPÍTULO 1

---

---

## Marco Teórico

---

---

### 1.1. Tablas de Mortalidad

La Ciencia Actuarial suele trabajar con datos de mortalidad poblacional y el primer paso para abordarlos siendo quizá una de las partes fundamentales en las que interviene la estadística, es la graduación de los mismos.

Haberman & Renshaw (1996) definen la graduación como los principios y métodos por los cuales un conjunto de probabilidades observadas (o brutas) es ajustado para proveer una base suavizada que permita hacer inferencias y demás cálculos prácticos. Una de las principales aplicaciones de la graduación, es la construcción de modelos de supervivencia, usualmente presentados en forma de tabla de mortalidad, las cuales se definen como una abstracción matemática que representa un modelo de comportamiento de la evolución y constante decrecimiento de un colectivo, construidas a partir de las observaciones de un colectivo real.

Según Palacios (1996) una tabla de mortalidad es una serie temporal que indica la reducción paulatina de un grupo inicial de individuos debido a los fallecimientos. Así pues, lo que realmente contiene son los individuos que sobreviven. Su estructura básica contiene las siguientes columnas,

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | $l_x$ | $d_x$ | $q_x$ | $p_x$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|

$x$ : Edad del individuo  $0 \leq x \leq w$ , con  $w$  la edad límite.

$l_x$ : Número de individuos que sobreviven a la edad  $x$ .

$d_x$ : Número de individuos que fallecen entre  $x$  y  $x + 1$ ,

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \quad (1.1)$$

$q_x$ : Tasa anual de fallecidos a la edad  $x$ ,

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (1.2)$$

$p_x$ : Tasa anual de supervivencia a la edad  $x$ ,

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \quad (1.3)$$

Vegas (1982), enuncia los posibles postulados que constituyen la base fundamental en la construcción de una tabla de mortalidad:

- **Principio de Homogeneidad:** Todos los individuos del grupo son equivalentes en lo que se refiere a mortalidad, en el sentido de que la variable edad de muerte  $X$  tiene la misma función de distribución para todos ellos.
- **Principio de Independencia:** El hecho de que un cierto individuo sobreviva o no a una determinada edad, tiene una probabilidad que no depende de la supervivencia de cualquier otro individuo del mismo grupo.
- **Principio de Estacionariedad:** La probabilidad de un individuo de no sobrevivir a una edad concreta es independiente del año de su cálculo.

### 1.1.1. Tablas de mortalidad estáticas

Al intentar modelar el fenómeno de la supervivencia, aparece irremediamente como parámetro fundamental la edad, a la que se referirá como tiempo biológico para diferenciarle del tiempo cronológico o calendario.

Es evidente que si el estudio de la supervivencia se refiere solo al tiempo biológico es porque se admite, implícitamente, la hipótesis de estacionariedad del fenómeno. En consecuencia, si todas las consideraciones y formulaciones que se hacen vienen referidas al tiempo biológico o edad, excluyendo totalmente al tiempo cronológico, se llega a construir una tabla de mortalidad estática o de momento.

En cuanto a las tablas de mortalidad estáticas vale la pena mencionar algunas de sus representaciones vía modelos paramétricos, incluyendo estimaciones basadas en metodologías como modelos lineales generalizados (ver Haberman & Renshaw (1996) quienes ofrecen una descripción de varias aplicaciones de modelos lineales generalizados en la Ciencia Actuarial), modelos no lineales generalizados (ver Renshaw (1991) quien referencia en concreto a la graduación) y el modelo de Heligman & Pollard (1980). En el mismo sentido se menciona el enfoque no paramétrico abordado mediante técnicas de smoothing (Gavin et al. (1995)), graduación polinomial local (Fan & Gijbels (1996)) y modelos aditivos generalizados (Hastie & Tibshirani (1990)).

### 1.1.2. Tablas de mortalidad dinámicas

En su forma más general la expresión matemática del fenómeno de la supervivencia depende tanto del tiempo cronológico como del tiempo biológico, por lo cual, un estudio completo debe abarcar ambos conceptos temporales. A modo de ejemplo, es posible analizar la mortalidad años atrás e identificar tiempos en los cuales la esperanza de

vida al nacer era baja si se compara con las tendencias actuales, esto mismo sucede en casi cualquier edad que se quiera evaluar, de donde resulta sensato pensar que cada vez los individuos viven más tiempo. De ser cierta dicha afirmación, resultaría en muchas repercusiones culturales, económicas y sociales, por ejemplo, el no contemplar que un pensionado hoy puede sobrevivir más tiempo que un pensionado de hace diez años, podría provocar en el largo plazo un desbalance económico incluso de orden nacional.

En el caso de aceptar este planteamiento que combina los dos conceptos temporales, es posible obtener las llamadas tablas de mortalidad dinámicas, en estas últimas las probabilidades de muerte varían no sólo en función de la edad de las personas, sino también en función del año calendario en que se alcanza dicha edad. De esta manera, una tabla de mortalidad dinámica podría considerarse como una sucesión de varias tablas de mortalidad en donde cada tabla contendría las probabilidades de que una persona de edad  $x$  muera antes de cumplir la edad  $x+1$ , en un año calendario  $t$  establecido.

Los modelos que dirigen esfuerzos a la obtención de tablas de mortalidad dinámicas siguen una clasificación que permite identificarles de mejor manera en función de sus principales propiedades:

- **Métodos paramétricos.** Incorporan la influencia del tiempo cronológico, con opción de dos posibles tratamientos:
  1. Estimar las medidas de la mortalidad mediante una misma ley de mortalidad a lo largo de los años y considerar que la influencia del tiempo del calendario sólo afecta a los parámetros, de forma que el modelo se expresa mediante una función  $f(x, \alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ . A estos métodos se les denomina **métodos estructurales**.
  2. Incorporar el tiempo cronológico como variable  $t$ , en la función que modela la medida de mortalidad de interés  $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t)$ . A estos métodos les denomina **métodos no estructurales**.
- **Métodos no paramétricos.** Fundamentalmente descritos por un método kernel que además ahora va a depender del tiempo.
- **Métodos basados en factores de reducción.** Son modelos que tras estimar y ajustar las medidas de mortalidad, incorporan la evolución de éstas a lo largo del tiempo a través de los factores de reducción, los que a su vez son modelados.

#### 1.1.2.1. Métodos paramétricos estructurales

En esta parte del documento se hace especial mención al método desarrollado por Lee & Carter (1992) que trata de ajustar una función lineal a los logaritmos de las tasas centrales de mortalidad observadas para cada edad específica.

Es uno de los métodos más reconocidos y está siendo usado en países desarrollados que cuentan con suficiente información de mortalidad. Sea  $m_{x,t}$  la tasa central de mortalidad para la edad  $x$  y el tiempo  $t$ , el método supone que dicha tasa sigue el modelo:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t}, \quad (1.4)$$

donde  $a_x$  describe el patrón promedio de la mortalidad para cada edad,  $k_t$  describe cómo cambia el nivel de mortalidad con el año calendario  $t$ ,  $b_x$  muestra qué tan sensible es la tasa de mortalidad de la edad  $x$  a los cambios en  $k_t$ , y  $e_{x,t}$  el término de error con media 0 y varianza  $\sigma_e^2$ , refleja la influencia histórica de cada edad específica que no es capturada por el modelo. Puesto así este modelo es indeterminado, ya que dada una solución  $(a_x, b_x, k_t)$ , cualquier transformación del tipo  $(a_x, b_x/c, ck_t)$  o  $(a_x + cb_x, b_x, k_t - c)$  es también una solución bajo cualquier escalar  $c$ . Para evitar este problema y obtener una solución única, Lee & Carter (1992) incluyen condiciones que obligan a los términos  $b_x$  a sumar 1 y los términos  $k_t$  a sumar 0. El procedimiento para proyectar la mortalidad puede resumirse como sigue:

- A partir de los datos de mortalidad de diferentes periodos de tiempo se estiman  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_t$ .
- La serie  $k_t$  es pronosticada mediante modelos de series temporales.
- Tomando como punto de partida el año  $t'$ , las tasas pronosticadas para  $s = 1, 2, 3, \dots$  se calculan:

$$m_{x,t'+s} = \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x k_{t'+s}). \quad (1.5)$$

Además de hallar una estimación puntual de la tasa de mortalidad, permite la construcción de intervalos de confianza gracias a su naturaleza estocástica.

El propio Lee (2000), haciendo una referencia a su trabajo anterior, Lee & Carter (1992), presenta una modificación del método original que permite analizar las subpoblaciones masculina y femenina o cualesquiera dos poblaciones. Propone,

1. Modelar separadamente cada una de las subpoblaciones. La relación entre ambas puede analizarse a partir de las dos series de  $k_t$ .
2. Aproximar un sólo  $k_t$ , el cual dirige los cambios en todas las tasas centrales de mortalidad de cada edad para ambas subpoblaciones. Este procedimiento conduce a una sola  $k_t$  y dos series de  $a_x$  y  $b_x$ , una para hombres y otra para mujeres. La re-estimación de  $k_t$  conduce a un parámetro, variando en el tiempo, consistente con el total de muertes.

Los principios introducidos por este modelo, han sido ampliamente utilizados por la academia y por los profesionales en modelar la mortalidad estocástica dando lugar a muchas extensiones importantes del modelo Lee-Carter, entre las cuales se mencionan a Biffis & Denuit (2005), Renshaw & Haberman (2003) y Renshaw & Haberman (2006).

### 1.1.2.2. Métodos paramétricos no estructurales

En cuanto a los métodos no estructurales vale la pena mencionar el método logarítmico, claramente descrito por Benjamin & Soliman (1993), en el cual se representa la mortalidad  $q_{xt}$  en función del tiempo  $t$  y de la edad  $x$  mediante la expresión,

$$\begin{aligned} q_{xt} &= \alpha_x (\beta_x)^t, \\ \rightarrow \ln(q_{xt}) &= \ln(\alpha_x) + \ln(\beta_x)t. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En la práctica, el periodo de años para el que el decrecimiento de  $\ln(q_{xt})$  parece ser relativamente constante no es indefinido y debe ser determinado, por ejemplo, gráficamente. Los parámetros que dependen de la edad se han de estimar por algún criterio de optimización, como mínimos cuadrados. Posteriormente se pueden determinar las proyecciones de  $q_{xt}$  utilizando la ecuación con los parámetros estimados y sustituyendo  $t$  por un valor posterior al periodo de estimación. En algunos casos las probabilidades brutas son previamente suavizadas, usualmente mediante aplicación de splines.

Así mismo se destacan los modelos lineales generalizados a partir de las funciones Gompertz-Makeham, que se amplían ahora mediante la inclusión del tiempo cronológico como variable, la descripción completa y aplicación de estos modelos puede encontrarse en el artículo de Sithole et al. (2000) quienes proponen modelar la fuerza de mortalidad proyectada al tiempo  $t$  como sigue:

$$\mu_{xt} = \exp \left[ \beta_0 + \sum_{j=1}^s \beta_j L_j(x') \right] \exp \left[ \sum_{i=1}^r \left( \alpha_i + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} L_j(x') \right) t'^i \right]. \quad (1.7)$$

Sujeto a que algunos de los términos  $\gamma_{ij}$  pueden ser cero, el primer término puede interpretarse como una función Gompertz-Makeham  $GM(0; s + 1)$  correspondiente a la graduación mientras el segundo término puede ser interpretado como ajuste del efecto del año del calendario, de forma que cuando al menos uno de los  $\gamma_{ij}$  es no nulo entonces depende también de la edad,  $x'$  y  $t'$  son transformaciones de la edad y el año calendario respectivamente, de forma que los valores están en el intervalo  $[-1, 1]$  y  $L_j(x')$  son los polinomios de Legendre generados por

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_{n+1}(x) &= xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

### 1.1.2.3. Métodos no paramétricos

Felipe et al. (2001) presentan un modelo no paramétrico que ellos mismos clasifican como una técnica de análisis exploratorio de los datos, especialmente diseñada para diagnosticar el comportamiento de la mortalidad según dos dimensiones (edad, tiempo) y previa a la graduación mediante cualquier ley de mortalidad. En el modelo se combinan las ideas básicas de procesos estocásticos donde el tiempo cronológico es la escala de tiempo, mientras que la edad se trata como una covariable del proceso. Concretamente en el artículo mencionado utilizan el smoother kernel y se analiza el desarrollo de la mortalidad en dos poblaciones (española y danesa) señalando las diferencias existentes.

### 1.1.2.4. Métodos basados en factores de reducción

En base a lo ocurrido en las experiencias pasadas de mejora de la mortalidad, el CMI (Continuous Mortality Investigation Bureau del Instituto y Facultad de Actuarios de Londres, cuya responsabilidad es la construcción de tablas de mortalidad estándar para su uso en la industria de seguros de Gran Bretaña) considera imprudente no incorporar en las tablas con las que trabaja habitualmente, una medida que permita proyectarlas de

forma que se tengan en cuenta las mejoras en la mortalidad a lo largo del tiempo. Estas medidas son los factores de mejora de la mortalidad  $RF(x, t)$ .

Los modelos utilizados para representar el comportamiento de los factores de reducción que permitan estimar y predecir para futuros años, han sido recopilados en varios trabajos, Renshaw & Haberman (2000) se centran en desarrollar una metodología que permite trabajar dentro de los modelos lineales generalizados (GLM por sus siglas en inglés) para describir el método bajo el cual se modelan los  $RF(x, t)$ , mientras que en Renshaw & Haberman (2001) se adapta la metodología de Lee-Carter para poder predecir el futuro comportamiento de los factores de reducción.

Ambos métodos, el de Lee-Carter modificado y la aproximación GLM, proporcionan un modelo formal estadístico para los cambios de la mortalidad y por tanto pueden ser determinados intervalos de predicción. Sin embargo, el cálculo de los errores de predicción bajo el método de Lee-Carter aparece más complejo que bajo su equivalente GLM.

#### 1.1.2.5. Un acercamiento mediante datos funcionales

Para abordar el concepto de mortalidad dinámica esta tesis empleará el enfoque propuesto por Hyndman & Ullah (2007), una aproximación al pronóstico de mortalidad futura en edades específicas, que combina ideas del análisis funcional de datos, el suavizado no paramétrico y estadísticas robustas, ofreciendo un método aplicable a cualquier serie de tiempo observada discretamente y posiblemente con error. A partir de la mencionada metodología se obtendrán estimaciones suaves para las probabilidades de muerte, que más adelante se usarán de forma simultánea con una tasa de interés estocástica, para valorar rentas contingentes. Sin embargo, antes de detallar esta metodología, se establecen ciertas definiciones y supuestos que serán necesarios a medida que se avanza en modelar tablas de mortalidad dinámicas.

Sea  $D_t(x)$  el número de muertes de personas con edad  $x$  en el año calendario  $t$ . Se asume que  $D_t(x)$  sigue una distribución binomial de la forma:

$$D_t(x) \sim Bin(N_t(x), M_t(x)), \quad (1.9)$$

donde  $N_t(x)$  representa la población total de edad  $x$ , al 30 de Junio del año calendario  $t$ .

Se notará  $m_t(x)$  como la tasa central de mortalidad observada para una edad específica  $x$  en el año calendario  $t$ , definida como:

$$m_t(x) = \frac{D_t(x)}{N_t(x)}, \quad (1.10)$$

cuyo valor esperado es representado de la siguiente manera:

$$E(m_t(x)) = \frac{E(D_t(x))}{N_t(x)} = M_t(x), \quad (1.11)$$

mientras su varianza estimada está dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{V}(m_t(x)) = \frac{\widehat{V}(D_t(x))}{(N_t(x))^2} = (N_t(x))^{-1}m_t(x)(1 - m_t(x)). \quad (1.12)$$

La variable que será de interés para modelar es el logaritmo natural de la tasa central de mortalidad y dado que será de útil hallar una aproximación a su valor esperado y varianza estimada, vale la pena hacer referencia brevemente a las aproximaciones vía expansión de series de Taylor.

Sea  $T$  una variable aleatoria y  $g$  una función infinitamente diferenciable alrededor de un valor  $a = E(T) = \mu_t$ , la expansión de Taylor de dicha función evaluada en  $T$  es expresada por la siguiente serie:

$$\begin{aligned} g(T) &= g(E(T)) + \frac{g'(E(T))}{1!}(T - E(T)) + \frac{g''(E(T))}{2!}(T - E(T))^2 + \dots + \\ &= g(E(T)) + \frac{g'(E(T))}{1!}(T - E(T)) + R, \end{aligned} \quad (1.13)$$

desde donde se puede considerar al sumando  $R$  como un residuo, dando lugar a la aproximación de Taylor de primer orden para  $g(T)$  definida como:

$$g(T) \approx g(\mu_t) + g'(\mu_t)(T - \mu_t), \quad (1.14)$$

y por ende tomando valor esperado a ambos lados de la ecuación (1.14), una aproximación de  $E(g(T))$  sería:

$$E(g(T)) \approx g(\mu_t), \quad (1.15)$$

mientras una aproximación de  $V(g(T))$  es fácilmente deducible como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} V(g(T)) &= E([g(T) - E(g(T))]^2) \\ &\approx E([g(T) - g(\mu_t)]^2), && \text{usando (1.15)} \\ &= E([g(\mu_t) + g'(\mu_t)(T - \mu_t) - g(\mu_t)]^2), && \text{usando (1.14)} \\ &= E([g'(\mu_t)]^2[T - \mu_t]^2) \\ &= [g'(\mu_t)]^2 E([T - \mu_t]^2) \\ &= [g'(\mu_t)]^2 V(T), \end{aligned}$$

así pues,

$$V(g(T)) \approx [g'(\mu_t)]^2 V(T). \quad (1.16)$$

Si se toma la función  $g$  como  $g(x) = \ln(x)$  y la variable  $T = m_t(x)$  la tasa central de mortalidad, por lo tanto  $\mu_t = M_t(x)$ , al reemplazar los valores correspondientes en la ecuación (1.15) se obtiene que:

$$E[\ln(m_t(x))] \approx \ln(M_t(x)), \quad (1.17)$$

y reemplazando de manera análoga en la ecuación (1.16)

$$V[\ln(m_t(x))] \approx \left(\frac{1}{M_t(x)}\right)^2 V[m_t(x)] = [1 - M_t(x)](N_t(x))^{-1}(M_t(x))^{-1}, \quad (1.18)$$

de donde es posible una aproximación de la varianza estimada,

$$\widehat{V}[\ln(m_t(x))] \approx [1 - m_t(x)](N_t(x))^{-1}(m_t(x))^{-1}. \quad (1.19)$$

Con base en  $m_t(x)$  la tasa central de mortalidad observada para individuos de edad  $x$  en el año calendario  $t$ , se define la variable de interés  $y_t(x) = \ln(m_t(x))$ . Hyndman & Ullah (2007) proponen un enfoque para modelar esta variable mientras resumen su aplicación en unos pocos pasos. En lo que resta de esta sección, se detallarán brevemente cada uno de estos pasos lo cual será necesario para dar mayor claridad a la hora de incluirlo en la valoración de las rentas contingentes:

### 1. Suavizado ponderado:

Definida la variable de interés  $y_t(x) = \ln(m_t(x))$ , las observaciones estarán representadas por  $\{x_i, y_t(x_i)\}$  mientras se asume que existe una función suave subyacente  $f_t(x)$  que es observada con error en puntos discretos (y posiblemente dispersos) de  $x$  de modo que:

$$y_t(x_i) = f_t(x_i) + \sigma_t(x_i)\epsilon_{t,i}, \quad (1.20)$$

donde  $t = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, p$ , los términos de error  $\epsilon_{t,i}$  son independientes e idénticamente distribuidos (*iid*)  $\epsilon_{t,i} \sim N(0, 1)$  y el término  $\sigma_t(x_i)$  representa la cantidad de ruido con respecto a la variación de  $x_i$ .

Usualmente  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  representan años de edad ( $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$ ) o denotan grupos de 5 años edad. El objetivo será predecir la variable de interés  $y_t(x)$  para las edades  $x \in [x_1, x_p]$  y los tiempos futuros  $t = n + 1, \dots, n + h$ .

Los datos no son directamente de una naturaleza funcional, pero se asume que existe una serie de tiempo funcional subyacente, la cual es observada con error en ciertos puntos discretos.

Así pues, los datos son suavizados para cada  $t$ , usando regresión splines penalizada para estimar  $f_t(x)$  en  $x \in [x_1, x_p]$  a partir de las observaciones  $\{x_i, y_t(x_i)\}$  con  $i = 1, \dots, p$ . Los pesos de la regresión splines penalizada que se usarán para estimar la curva  $f_t(x)$  en cada año  $t$ , se definen como el inverso de la varianza obtenida en (1.19) así:

$$w_t(x) = \frac{N_t(x)m_t(x)}{1 - m_t(x)}. \quad (1.21)$$

Hyndman & Ullah (2007) también agregan una restricción al método propuesto, bajo la cual se asume que  $f_t(x)$  es monótonamente creciente para  $x > c$  con algún  $c$  dado (por ejemplo 65 años). Dicha restricción permite reducir el ruido que suele existir en las curvas estimadas para altas edades, además de que resulta razonable

pensar que a una mayor edad debe existir una mayor probabilidad de morir.

## 2. Descomponer la curva ajustada vía una expansión de funciones base:

Una vez se ha ajustado una función suave  $f_t(x)$  asumida subyacente a las observaciones, se hace una descomposición de la misma usando el siguiente modelo:

$$f_t(x) = \mu(x) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x) + e_t(x), \quad (1.22)$$

donde  $\mu(x)$  es una medida de localización de  $f_t(x)$  a través de los años  $t$ ,  $\{\phi_k(x)\}$  con  $k = 1, \dots, K$  es un conjunto de funciones base ortonormales, y junto a los coeficientes  $\beta_{t,k}$  son obtenidos usando una descomposición por componentes principales para datos funcionales y  $e_t(x) \sim N(0, v(x))$  es el error del modelo el cual es asumido serialmente no-correlacionado.

Si se desea una estimación robusta de  $\mu(x)$  es posible usar la  $L_1$ -mediana de las curvas suaves estimadas  $\{\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_n(x)\}$ , dada por:

$$\hat{\mu}(x) = \operatorname{argmin}_{\theta(x)} \sum_{t=1}^n \left\| \hat{f}_t(x) - \theta(x) \right\|, \quad (1.23)$$

donde  $\|g(x)\| = (\int g^2(x) dx)^{1/2}$  denota la norma de la función  $g$ . Los datos ajustados por la mediana (o la medida de localización que haya sido implementada) son denotados por  $\hat{f}_t(x)^* = \hat{f}_t(x) - \hat{\mu}(x)$ . Hyndman & Ullah (2007) introducen y combinan dos métodos de componentes principales sobre  $\{\hat{f}_t(x)^*\}$  para lograr una forma eficiente y robusta de obtener las funciones base  $\{\phi_k(x)\}$ .

## 3. Ajustar modelos de series de tiempo univariadas para cada uno de los coeficientes $\{\beta_{t,k}\}$ , con $k = 1, \dots, K$ :

Las dinámicas del proceso son controladas por los coeficientes de series de tiempo  $\{\beta_{t,k}\}$ , los cuales son asumidos independientes entre si (esto se obtiene del uso de una descomposición por componentes principales siguiendo la propuesta descrita en el paso anterior) lo cual resulta especialmente útil, pues gracias a ello no son requeridos los modelos de series de tiempo multivariadas.

Continuando, para cada serie de coeficientes  $\{\beta_{1,k}, \dots, \beta_{n,k}\}$ , con  $k = 1, \dots, K$ , se ajusta un modelo de series de tiempo univariadas que permita obtener pronósticos de  $\beta_{t,k}$  para  $k = 1, \dots, K$  y  $t = n+1, \dots, n+h$ . Hyndman & Ullah (2007) proponen el uso de modelos ARIMA robustos, los cuales son menos sensibles ante años que presenten comportamientos atípicos como los que son debidos a guerras o epidemias.

Al considerar de forma conjunta las ecuaciones (1.20) y (1.22) como el modelo completo, son visibles tres diferentes fuentes de aleatoriedad:  $\epsilon_{t,i}$  representa la variación aleatoria de las muertes, desde la distribución respectiva que se les haya

asumido;  $e_t(x)$  representa el error residual al modelar  $f_t(x)$  usando un conjunto finito de funciones base; y también está la aleatoriedad inherente en el modelo de series de tiempo para cada  $\{\beta_{t,k}\}$  los cuales conducen los cambios dinámicos en las curvas suavizadas.

#### 4. Pronosticar $y_t(x)$ en las edades de interés para tiempos futuros:

Se asume que se cuenta con información disponible hasta el tiempo  $t = n$  y se desean estimar valores futuros de  $y_t(x)$  para  $t = n + 1, \dots, n + h$  y para todo  $x$ . Entonces, condicionando sobre los datos observados  $\psi = \{y_t(x_i); t = 1, \dots, n; i = 1, \dots, p\}$  y el conjunto de funciones  $\Phi$ , se obtiene el pronóstico  $h$ -pasos adelante de  $y_{n+h}(x)$ :

$$\hat{y}_{n,h}(x) = \hat{f}_{n,h} = \hat{E}[y_{n+h}(x)|\psi, \Phi] = \hat{\mu}(x) + \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_{n,k,h} \hat{\phi}_k(x), \quad (1.24)$$

donde  $\hat{f}_{n,h}(x)$  denota el pronóstico  $h$ -pasos adelante de  $f_{n+h}(x)$  y  $\hat{\beta}_{n,k,h}$  denota el pronóstico  $h$ -pasos adelante de  $\beta_{n+h,k}$  usando las series estimadas  $\hat{\beta}_{1,k}, \dots, \hat{\beta}_{n,k}$ .

Consecuentemente, pronósticos de  $m_t(x)$  son encontrados a través de una transformación inversa sobre los pronósticos de  $y_t(x)$ , y a través de la formulación adecuada será posible configurar rentas contingentes con base en estos valores, lo cual es el fin mismo de esta tesis.

## 1.2. Tasa de interés

El campo de estudio centrado en las tasas de interés es muy amplio y ha merecido la atención de profesionales y académicos a lo largo del tiempo, muestra de ello es la extensa bibliografía existente y que día a día avanza más alrededor del tema. En cuanto a rentas contingentes, su valoración está fuertemente ligada a un factor de descuento (y por ende a su respectivo tipo de interés), dicho factor de descuento será notado como  $D(t, T)$  y su misión será actualizar un capital futuro trayéndole a valor presente:

$$D(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right), \quad 0 \leq t < T, \quad (1.25)$$

donde  $r(s)$  es la tasa instantánea de interés, usualmente referida como fuerza de interés, tasa instantánea spot, tasa de corto plazo o brevemente short rate; de este modo,  $D(t, T)$  representa el valor en el tiempo  $t$  que es “equivalente” a una unidad monetaria pagable en el tiempo  $T$ . Más adelante se ampliará la información al respecto, por lo pronto es necesario introducir ciertas definiciones básicas concernientes al mundo de las tasas de interés.

### 1.2.1. Bonos cero cupón

Siguiendo la definición de Brigo & Mercurio (2006) un bono cero cupón de madurez  $T$ , es un contrato que garantiza el pago de una unidad monetaria en el tiempo  $T$ , sin pagos intermedios. El valor de dicho contrato en el tiempo  $t < T$  es denotado por  $P(t, T)$ ,

con  $P(T, T) = 1$  para todo  $T$ .

En otras palabras, si actualmente se está en el tiempo  $t$ , un bono cero cupón de madurez  $T$  es un contrato que establece el valor presente de una unidad monetaria que será pagada en el tiempo futuro  $T$  (el plazo al vencimiento o madurez del contrato).

### 1.2.2. Principales tasas de interés

Continuando con las definiciones a introducir, vale la pena aclarar la forma de cálculo y el significado mismo de ciertas tasas de interés. Nuevamente se citan las definiciones formales dadas por Brigo & Mercurio (2006), como siguen a continuación:

- **Tasa de interés spot continuamente compuesta:** La tasa de interés spot continuamente compuesta vigente en  $t$  para la madurez  $T$ , es denotada por  $R(t, T)$  y es la tasa constante para la cual una inversión de  $P(t, T)$  unidades monetarias en el tiempo  $t$ , acumulan de forma continua una unidad monetaria para el tiempo  $T$ . En fórmula:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}, \quad (1.26)$$

donde la fracción de años  $\tau(t, T) = T - t$ , es usualmente la diferencia de tiempo expresada en años. De este modo,  $R$  es una tasa constante que es consistente con el precio de un bono cero cupón:

$$e^{R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1. \quad (1.27)$$

A partir de lo anterior el precio de un bono puede ser expresado en términos de la tasa continuamente compuesta  $R$ :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\tau(t, T)}. \quad (1.28)$$

Una alternativa a la tasa continuamente compuesta es la tasa simple, la cual aplica cuando la acumulación de capital ocurre proporcionalmente al tiempo de inversión.

- **Tasa de interés spot simple:** La tasa de interés spot simple vigente en  $t$  para la madurez  $T$ , es denotada por  $L(t, T)$  y es la tasa constante para la cual una inversión de  $P(t, T)$  unidades monetarias en el tiempo  $t$ , logra acumular una unidad monetaria al plazo de madurez, siguiendo una acumulación que ocurre proporcionalmente al tiempo de inversión. En fórmula:

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}. \quad (1.29)$$

Del mismo modo que se expresó la última tasa:

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) = 1. \quad (1.30)$$

De modo que el precio de un bono cero cupón puede ser expresado en términos de la tasa  $L$  como:

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}. \quad (1.31)$$

Otro método de capitalización que se considera es el de la tasa anualmente compuesta, el cual se obtiene así: Si hoy se invierte una unidad monetaria a la tasa simple  $Y$ , en un año se obtendrá la cantidad  $A = 1(1 + Y)$ . Suponga que después de un año se invierte tal cantidad por un año más a la misma tasa  $Y$ , de modo que se obtendrá la cantidad  $A(1 + Y) = (1 + Y)^2$  en dos años. Si se sigue reinvertiendo por  $n$  años la cantidad final obtenida es  $(1 + Y)^n$ . Siguiendo este razonamiento se tiene:

- **Tasa de interés spot anualmente compuesta:** La tasa de interés spot anualmente compuesta vigente en  $t$  para la madurez  $T$ , es denotada por  $Y(t, T)$  y es la tasa constante para la cual una inversión de  $P(t, T)$  unidades monetarias en el tiempo  $t$ , logra acumular una unidad monetaria al plazo de madurez, reinvertiendo las cantidades obtenidas una vez al año. En fórmula:

$$Y(t, T) = \frac{1}{[P(t, T)]^{1/\tau(t, T)}} - 1. \quad (1.32)$$

Análogo a como se ha hecho anteriormente se obtiene:

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1. \quad (1.33)$$

Lo cual implica que el precio de un bono cero cupón puede ser expresado en términos de la tasa  $Y$  como:

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}}. \quad (1.34)$$

Una extensión directa del caso anualmente compuesto conduce a la siguiente definición la cual es basada en la reinversión hecha  $k$  veces por año.

- **Tasa de interés spot compuesta  $k$  veces por año:** La tasa de interés spot compuesta  $k$  veces por año vigente en  $t$  para la madurez  $T$ , es denotada por  $Y^k(t, T)$  y es la tasa constante (referida a un periodo de un año) para la cual una inversión de  $P(t, T)$  unidades monetarias en el tiempo  $t$ , logra acumular una unidad monetaria al plazo de madurez, reinvertiendo las cantidades obtenidas  $k$  veces por año:

$$Y^k(t, T) = \frac{k}{[P(t, T)]^{1/(k\tau(t, T))}} - k. \quad (1.35)$$

De donde se obtiene:

$$P(t, T) \left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{k\tau(t, T)} = 1. \quad (1.36)$$

Y por ende el precio de un bono cero cupón se reescribe:

$$P(t, T) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{k\tau(t, T)}}. \quad (1.37)$$

Por último se destaca que todas las definiciones anteriores de las tasas de interés spot, son equivalentes en intervalos infinitesimales de tiempo. De hecho, se puede demostrar fácilmente que la tasa instantánea de interés se puede obtener como un límite de todas las

diferentes tasas definidas anteriormente, es decir, para cada  $t$ :

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) \\
 &= \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) \\
 &= \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) \\
 &= \lim_{T \rightarrow t^+} Y^k(t, T) \quad \text{para cada } k.
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

### 1.2.3. Estructura a plazo de las tasas de interés

La estructura a plazo de las tasas de interés es la relación funcional que informa, para un momento y mercado específicos, las diferentes tasas de interés y el plazo de madurez al cual se refieren. Se trata entonces de una función que va del plazo a la tasa de interés respectiva. La representación gráfica en el tiempo  $t$  de dicha estructura a plazo, es conocida como la curva cero cupón, ya que las tasas de interés spot que la componen son rendimientos asociados a bonos cero cupón y de acuerdo a Brigo & Mercurio (2006) es la gráfica de la función:

$$T \rightarrow \begin{cases} L(t, T) & t < T \leq t + 1 \text{ (años)}, \\ Y(t, T) & T > t + 1 \text{ (años)}. \end{cases} \tag{1.39}$$

Esto es, un gráfico para el tiempo  $t$ , de tasas simples para cualquier madurez  $T$  menor o igual a un año y tasas anualmente compuestas para cualquier madurez  $T$  mayor a un año. Muchos autores argumentan que la forma creciente o positiva de este gráfico se puede calificar como normal, ya que a mayor plazo de madurez, el riesgo también es mayor y por ende las tasas de interés deberían reflejar una valoración creciente respecto a ese plazo.

Es posible encontrar diferentes tasas de interés asociadas a un mismo plazo y esto se debe a distintos factores, el más importante es el riesgo de insolvencia del emisor, el cual se refiere al riesgo de no pago del título valor. Los participantes del mercado de alguna forma valoran este riesgo y sólo están dispuestos a asumirlo si se les compensa a través de una mayor tasa o rendimiento. De este modo, las tasas de interés están afectadas por una prima de riesgo que depende de cada deudor y su calificación crediticia. Para evitar la incorporación del riesgo de insolvencia, en la estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés, se utilizan rendimientos de títulos de renta fija emitidos por el gobierno y de este modo se busca obtener tasas de interés libres de riesgo de insolvencia.

Desafortunadamente la estructura a plazo de las tasas de interés no es totalmente observable ya que esta necesita la relación completa tasa-plazo y en el mercado no se dispone de esta información para todos los plazos que se pueden considerar en un horizonte de tiempo determinado. Es entonces necesario deducir esta relación funcional a partir de la información disponible.

Cuando se determina la estructura a plazo en un instante determinado se ajusta dicha relación funcional a la información que proporciona en ese instante el mercado financiero, y de este modo, se estima la estructura a plazo de las tasas de interés desde una perspec-

tiva estática (sólo en ese instante del tiempo), por otra parte, se puede observar también la estructura a plazo desde una perspectiva dinámica analizando la evolución de la relación plazo-tasa a través del tiempo calendario. Estos dos enfoques dan lugar a niveles de agrupación para los modelos de la estructura a plazo de las tasas de interés, dividiéndolos en modelos estáticos y modelos dinámicos respectivamente, en estos últimos la tasa  $r(t)$  vuelve a aparecer como protagonista, ya que los modelos dinámicos de tasa de interés más conocidos consideran la tasa instantánea como la única variable de estado, tal como se verá más adelante.

#### 1.2.4. Tasa de interés estocástica

Cuando se habla de productos que dependen de una tasa de interés, la variabilidad que principalmente importa es la de las tasas de interés en si mismas, por lo tanto es necesario olvidar el enfoque determinista que obliga a la tasa a ser constante y el nuevo desafío se reduce a modelar la evolución en el tiempo de  $r(t)$  mediante un proceso estocástico, como consecuencia, el factor de descuento presentado en la ecuación (1.25) también se convertirá en un proceso estocástico. Al intentar modelar la mencionada tasa, se presenta el reto de establecer un proceso que pueda describir con precisión la actual estructura de tasas de interés, pero que también pueda modelar la dinámica en el tiempo de esta estructura. En general, los procesos estocásticos de la tasa de interés de corto plazo son markovianos, lo que equivale a decir que su comportamiento futuro depende solo de su valor actual y no de la información pasada.

Desde hace ya varios años se ha prestado atención a los modelos estocásticos de las tasas de interés al punto que existe enorme bibliografía al respecto que data de buen tiempo atrás y que ha marcado las bases para la gran cantidad de desarrollos actuales. Ejemplos de esto son dados por Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox et al. (1985), Black & Karasinski (1991), Mercurio & Moraleda (2000), sólo por mencionar algunos de los autores quienes han documentado el modo en que la tasa de interés debe seguir una dinámica otorgada por un proceso estocástico. Sin embargo, se debe ser cuidadoso a la hora de trabajar con tasas estocásticas, más aún si se considera la introducción de nuevos y diferentes conceptos (no empleados cuando se trata una tasa de interés determinística), propios de la combinación de finanzas con desarrollos complejos fundamentados en sólidas bases matemáticas y estadísticas como lo son la integración estocástica, martingalas, entre otros, usados para explicar conceptos como la ausencia de oportunidades de arbitraje o la teoría pura de las expectativas.

Dadas las definiciones previas, vale la pena resaltar la relación que hay entre el factor de descuento  $D(t, T)$  y el precio del bono cero cupón  $P(t, T)$ . Pues bien, la diferencia recae en la naturaleza de cada objeto siendo respectivamente una “cantidad equivalente a una unidad monetaria” y el “valor de un contrato”. Si  $r(t)$  fuera un valor determinístico, entonces  $D(t, T)$  también lo sería y necesariamente  $D(t, T) = P(t, T)$ . En cambio si la tasa es estocástica, entonces  $D(t, T)$  es una cantidad aleatoria en el tiempo  $t$  que depende de la evolución de la tasa entre los tiempos  $t$  y  $T$ , mientras que, el precio de un bono cero cupón  $P(t, T)$  (entiéndase precio en el momento  $t$  de un contrato con pago en el tiempo  $T$ ), tiene que ser conocido y por ende determinístico en el tiempo  $t$ .

En realidad, como muestran de forma detallada Brigo & Mercurio (2006),  $P(t, T)$  puede ser visto como la expectativa de la variable aleatoria  $D(t, T)$ , bajo una particular medida de probabilidad. En efecto, la existencia de una medida neutral al riesgo implica que el precio libre de arbitraje en el momento  $t$  de una renta que paga  $H_T$  unidades monetarias en el tiempo  $T$ , está dado por:

$$E_t\{D(t, T)H_T\} = E_t\left\{e^{-\int_t^T r(s)ds}H_T\right\}, \quad (1.40)$$

donde  $E_t$  denota la esperanza condicional al tiempo  $t$  bajo esa medida. En particular el precio en el tiempo  $t$  de un bono cero cupón de madurez  $T$ , es caracterizado por el pago de una unidad monetaria al tiempo  $T$ , es decir, cuando  $H_T = 1$  se obtiene:

$$P(t, T) = E_t\{D(t, T)\} = E_t\left\{e^{-\int_t^T r(s)ds}\right\}. \quad (1.41)$$

Desde la expresión anterior es claro que cuando sea posible caracterizar la distribución de  $e^{-\int_t^T r(s)ds}$  en términos de una dinámica escogida para  $r(t)$ , condicional a la información disponible en el tiempo  $t$ , será posible calcular el precio del bono  $P(t, T)$ . Como se mostró en subsecciones anteriores, cualquiera de las principales tasas de interés se puede deducir a partir de los precios de bonos cero cupón y si a esto se agrega la relación mostrada en la ecuación (1.41), es claro que toda la estructura a plazo (curva cero cupón) está caracterizada en términos de propiedades distribucionales de  $r(t)$ . El precio  $P(t, T)$  además, se empleará para valorar las rentas contingentes, dado que representa el valor esperado del factor de descuento estocástico.

### 1.2.5. Principales modelos para tasa de interés estocástica

El supuesto económico fundamental que da origen a la tasa estocástica desarrollado por Black & Scholes (1973), es la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero considerado. En términos informales, la ausencia de arbitraje es equivalente a la imposibilidad de invertir cero unidades monetarias hoy y recibir mañana una cantidad positiva. Dicho de otra manera, dos portafolios que tienen el mismo pago en un futuro dado deben tener el mismo precio hoy. Mediante la construcción de un portafolio adecuado que tiene el mismo rendimiento instantáneo que una inversión libre de riesgo, Black y Scholes logran concluir que el rendimiento instantáneo es en efecto igual a la tasa instantánea libre de riesgo, lo cual inmediatamente los condujo a una ecuación diferencial parcial, y a través de su solución, a una fórmula para valorar productos financieros.

El argumento básico de Black y Scholes fue empleado por Vasicek (1977) desarrollando un modelo para la evolución de la estructura a plazo de las tasas de interés y en la misma forma ha sido usado subsecuentemente por múltiples autores, dando lugar a una gran variedad de modelos. Hoy en día existen principalmente dos tipos de modelos dinámicos para tasas de interés, los modelos de equilibrio y los de no-arbitraje. Los primeros definen un proceso para la tasa instantánea spot a partir de ciertas relaciones con variables económicas, el problema de estos modelos es que muchas veces no se ajustan a la actual estructura a plazo de las tasas de interés. Sin embargo, este problema se soluciona en gran medida cuando se trabaja con modelos multifactoriales. Los modelos de no-arbitraje son desarrollados a fin de ajustarse perfectamente a la actual estructura de tasas. La

desventaja que generalmente tienen es que algunos son intratables analíticamente, y otros tienen una dinámica demasiado marcada de acuerdo a la actual estructura de tasas, lo que disminuye el margen de volatilidades que aceptan los modelos.

Como se mencionó anteriormente, los modelos de tasa de interés estocástica más conocidos consideran la tasa instantánea como la única variable de estado (unifactoriales), y en general pueden resumirse en un proceso de difusión de la forma:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \tag{1.42}$$

donde  $\mu(t, r(t))$  es la tendencia instantánea esperada de los cambios en la variable de estado  $r(t)$ ,  $\sigma(t, r(t))$  es el coeficiente de difusión o de volatilidad de los cambios de la variable  $r(t)$  y  $W(t)$  es el proceso estocástico de Wiener correspondiente a  $r(t)$ .

Siguiendo esa misma estructura es posible presentar los modelos de tasa instantánea de interés más conocidos y algunas de sus propiedades más relevantes en la siguiente tabla de resumen, donde V, CIR, D, EV, HW, BK, MM, CIR++, EVV corresponden respectivamente al modelo Vasicek (1977), el modelo Cox et al. (1985), el modelo Dothan (1978), el modelo exponencial Vasicek, el modelo Hull & White (1990), el modelo Black & Karasinski (1991), el modelo Mercurio & Moraleda (2000), el modelo CIR++ y el modelo Extendido Exponencial Vasicek.  $Si^*$  significa que la tasa es positiva bajo condiciones adecuadas para la función determinística  $\varphi$ ;  $N$ ,  $LN$ ,  $NC\chi^2$ ,  $SNC\chi^2$  y  $SLN$  denotan respectivamente las distribuciones normal, lognormal,  $\chi^2$  no central,  $\chi^2$  no central trasladada y lognormal trasladada:

| Modelo | Dinámicas   |
|--------|---|
| V      | $dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$   |
| CIR    | $dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$   |
| D      | $dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$  |
| EV     | $dr(t) = r(t)[\eta - a \ln(r(t))]dt + \sigma r(t)dW(t)$   |
| HW     | $dr(t) = k[\theta(t) - r(t)]dt + \sigma dW(t)$  |
| BK     | $dr(t) = r(t)[\eta(t) - a \ln(r(t))]dt + \sigma r(t)dW(t)$  |
| MM     | $dr(t) = r(t) \left[ \eta(t) - \left( \lambda - \frac{\gamma}{1+\gamma(t)} \right) \ln(r(t)) \right] dt + \sigma r(t)dW(t)$ |
| CIR++  | $r(t) = x(t) + \varphi(t), dx(t) = k[\theta - x(t)]dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)$   |
| EVV    | $r(t) = x(t) + \varphi(t), dx(t) = x(t)[\eta - a \ln(x(t))]dt + \sigma x(t)dW(t)$   |

| Modelo | $r > 0$ | $r \sim$    |
|--------|---------|-------------|
| V      | No      | $N$         |
| CIR    | Si      | $NC\chi^2$  |
| D      | Si      | $LN$        |
| EV     | Si      | $LN$        |
| HW     | No      | $N$         |
| BK     | Si      | $LN$        |
| MM     | Si      | $LN$        |
| CIR++  | Si*     | $SNC\chi^2$ |
| EVV    | Si*     | $SLN$       |

Todos los modelos descritos anteriormente tienen dos limitaciones: incluyen solamente un factor, o una fuente de incertidumbre, y no dan completa libertad para escoger la estructura de volatilidad. Los modelos multifactoriales eliminan estas limitaciones, aunque en contraparte tienen un mayor costo computacional. De otro lado, propuestas como las de Vasicek (1977), Dothan (1978) y Cox et al. (1985) son modelos de la estructura a plazo endógenos, haciendo referencia con esto a que la actual estructura a plazo de las tasas de interés es un output en lugar de un input del modelo.

### 1.2.6. Un enfoque a través del modelo unifactorial CIR

Este trabajo centra su atención en uno de los más empleados modelos dinámicos de la estructura a plazo, el modelo CIR propuesto por Cox et al. (1985). El éxito del modelo CIR se debe principalmente a que permite la posibilidad de valorar analíticamente bonos y opciones (otros modelos como el Vasicek (1977) también comparten esta deseable característica). Sin embargo, como se indicó anteriormente este modelo hace parte de aquellos que proporcionan una estructura a plazo endógena, dado que la estructura a plazo inicial de las tasas de interés no coincide necesariamente con la observada en el mercado, sin importar cómo se escojan los parámetros del modelo.

Por otra parte, el bajo número de parámetros del modelo (al ser unifactorial) evita una calibración satisfactoria a los datos de mercado, por ello es bastante probable que la curva cero cupón sea mal reproducida, e incluso algunas formas típicas, como la de una curva de rendimiento invertida, no siempre pueden ser reproducidas por este tipo de modelos. Dichas falencias usualmente se superan incluyendo más factores de riesgo al modelo (más variables de estado), dando lugar a la extensión de los modelos multifactoriales.

La razón de tomar el modelo CIR como la elección a implementar, se explica en que este permite el cálculo del factor de descuento en una forma analítica cerrada (un valor esperado que es igual a la valoración del precio en  $t$  de un bono cero cupón con madurez  $T$ ). Existen otros modelos tanto unifactoriales como multifactoriales que también permiten formas analíticas cerradas, sin embargo, se escoge sólo uno de ellos dado que el objeto de este trabajo no es discutir la diferencias entre dichas posibilidades sino la integración de una tasa estocástica y tablas de mortalidad cambiantes en el tiempo.

El modelo desarrollado para la tasa instantánea de interés por Cox et al. (1985), introduce el término de una “raíz cuadrada” en el coeficiente de difusión de la dinámica propuesta por Vasicek (1977). El modelo resultante ha sido ampliamente utilizado por muchos años debido a su tratabilidad analítica y al hecho de que, contrario al modelo Vasicek (1977), puede conservar la tasa instantánea de interés siempre positiva lo cual se apega mucho más a la realidad de la misma. El proceso correspondiente sigue la forma:

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (1.43)$$

donde  $r_0$ ,  $k$ ,  $\theta$  y  $\sigma$  son constantes positivas y  $W(t)$  es el proceso estocástico de Wiener correspondiente a  $r(t)$ . La condición

$$2k\theta > \sigma^2,$$

debe ser impuesta para asegurar que  $r$  permanece positiva bajo el proceso descrito.

El proceso  $r(t)$  sigue una distribución chi-cuadrado no central bajo la siguiente función de densidad:

$$\begin{aligned} p_{r(t)}(x) &= c_t p_{\chi^2(v, \lambda_t)}(c_t x), \\ c_t &= \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-kt))}, \\ v &= 4k\theta/\sigma^2, \\ \lambda_t &= c_t r_0 \exp(-kt), \end{aligned} \tag{1.44}$$

donde la variable  $\chi^2(\cdot, v, \lambda)$  que sigue una función de distribución chi cuadrado no central con  $v$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $\lambda$ , tiene la función de densidad:

$$\begin{aligned} p_{\chi^2(v, \lambda)}(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2} (\lambda/2)^i}{i!} p_{\Gamma(i+v/2, 1/2)}(z), \\ p_{\Gamma(i+v/2, 1/2)}(z) &= \frac{(1/2)^{i+v/2}}{\Gamma(i+v/2)} z^{i-1+v/2} e^{-z/2} = p_{\chi^2(v+2i)}(z), \end{aligned} \tag{1.45}$$

con  $p_{\chi^2(v+2i)}(z)$  denotando la densidad de una distribución chi cuadrado central con  $v+2i$  grados de libertad.

La media y la varianza de  $r(t)$  condicional sobre  $\mathcal{F}_s$  son dadas por:

$$\begin{aligned} E\{r(t)|\mathcal{F}_s\} &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-k(t-s)}\right), \\ Var\{r(t)|\mathcal{F}_s\} &= r(s) \frac{\sigma^2}{k} \left(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}\right) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-k(t-s)}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.46}$$

El precio en el tiempo  $t$  de un bono cero-cupón con madurez  $T$  es:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \tag{1.47}$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left[ \frac{2h \exp\{(k+h)(T-t)/2\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2}, \\ B(t, T) &= \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}, \\ h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Como consecuencia de la representación del modelo CIR, la tasa instantánea  $r(t)$  presenta reversión a la media, ya que la tasa esperada tiende hacia el valor  $\theta$  cuando  $t$  va hacia el infinito. El hecho de que  $\theta$  se pueda considerar como el valor asintótico de la tasa media esperada, podría también deducirse de la dinámica que describe la ecuación (1.43) notando de hecho, que el drift del proceso ( $k[\theta - r(t)]$ ) es positivo cuando la tasa está por debajo de  $\theta$  y negativo en otro caso, de modo que la tasa  $r$  es empujada en cada momento, para estar más cerca del nivel medio  $\theta$ .

---

El hecho de lograr una forma analítica cerrada para el cálculo del precio de bonos cero cupón  $P(t, T)$ , resulta ideal para el fin mismo de valorar una renta contingente, tal como se verá en la siguiente sección.

## CAPÍTULO 2

---

---

### Rentas contingentes: Adaptación propuesta

---

---

Como se mencionó en la introducción de este escrito, una renta es una sucesión de pagos o cobros periódicos (diarios, mensuales, anuales, etc...) de cuantía constante o variable. Las rentas pueden clasificarse en rentas ciertas y rentas contingentes; En estas últimas, la sucesión de pagos depende de la ocurrencia de un evento que determina si se paga o no (evento contingente), por ejemplo una pensión que reconoce beneficios pos-empleo, la cual se paga mientras el beneficiario rentista esté vivo.

Tal como en el ejemplo anterior, el evento contingente más comúnmente asociado a este tipo de rentas es la muerte, por lo cual incorporan el elemento de supervivencia como clave en su operativa. Así, toda operación de rentas contingentes supone la consideración del valor del dinero en el tiempo y de las probabilidades de supervivencia, dando lugar respectivamente a una tasa de interés asociada y al concepto de tablas de mortalidad.

Antes de continuar y para dar mayor claridad a los temas tratados en este capítulo, primero es necesario introducir ciertos conceptos que serán de gran utilidad:

*Valor Presente Financiero (VPF):* Es la valoración en el tiempo presente de una serie de pagos económicos futuros, se proyecta en el tiempo el valor de cada uno de esos pagos y posteriormente se descuentan (se traen a valor presente). Debido a que el dinero tiene valor en el tiempo, a cada uno de estos pagos se les asocia algún tipo de interés.

*Valor Presente Actuarial (VPA):* Es la valoración en el tiempo presente de una serie de pagos económicos futuros, en la cual además de reconocer que el dinero tiene valor en el tiempo, se considera la posibilidad de que cada pago se realice, es decir, a cada pago se le asocia la probabilidad de ocurrencia.

*Anualidad vitalicia:* Es un tipo de renta contingente, una serie de pagos realizados de forma continua o en intervalos iguales (comúnmente años, semestres, etc...), y que seguirá siendo efectiva mientras que el rentista sobreviva.

Del mismo modo, se mencionan otros aspectos de rentas contingentes a tener en cuenta:

- Una renta contingente puede ser temporal, es decir, limitada a un período determinado de años, o puede ser pagable por toda la vida del rentista (anualidad vitalicia).
- Los intervalos de pago pueden comenzar inmediatamente o, como alternativa, la anualidad puede ser diferida y empezar a pagarse en un futuro.
- El pago puede ser hecho al comienzo de los intervalos de pago (anualidad anticipada/annuity due) o al final de los mismos intervalos (anualidad vencida/annuity immediate).

Ahora bien, es interesante empezar por preguntarse cuál es la importancia de las rentas contingentes y por qué son un tema llamativo para muchos investigadores y profesionales. Resulta, que su correcta valoración es muy relevante para muchas empresas e incluso más allá para cualquier país, debido al papel que estas juegan en las operaciones diarias de los seguros y planes pensionales. A continuación se mencionan tan sólo algunas de sus aplicaciones en ese ámbito:

- Los seguros de vida suelen ser comprados mediante una anualidad de pagos o primas, en lugar de solamente un pago o prima única.
- El monto de dinero que una aseguradora pagará al momento de una reclamación, puede ser convertido a través de una opción de liquidación en alguna forma de renta contingente para el beneficiario.
- Algunos tipos de seguros de vida llevan este concepto aún más lejos y en vez de pagar una gran suma total al momento de muerte del asegurado, proporcionan planes de ingresos a los beneficiarios. Así por ejemplo, puede configurarse un plan de ingresos mensuales a nombre del cónyuge de un asegurado, dando lugar a una nueva renta contingente.
- La estimación de los recursos que se deben tener para pagar a las personas que ya están pensionadas y las que están por adquirir ese derecho en los próximos años, depende del valor presente actuarial de rentas contingentes que representan las mesadas pensionales.
- El uso de rentas contingentes, como se mencionó en la introducción de este documento, es una posible respuesta a ciertos contenidos de la Norma Internacional de Contabilidad 19 *Beneficios a los Empleados* (NIC 19), la cual hace parte del conjunto de Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF) aplicables en Colombia desde hace unos pocos años.

Dicho esto y revelada su importancia, es clara la motivación por proponer una adaptación a las rentas contingentes que permita su valoración de manera más acertada, por lo tanto, a lo largo de la sección posterior se detallará dicha propuesta. Se empieza por abordar el concepto de supervivencia a partir de tablas de mortalidad dinámicas, vistas bajo un enfoque novedoso que recoge nociones del análisis de datos funcionales y se muestra como una generalización robusta del modelo de Lee-Carter, ampliamente utilizado en pronósticos de mortalidad. Continuando con la propuesta se procederá a modelar la

dinámica de la tasa de interés bajo el modelo de Cox, Ingersoll y Ross -Cox et al. (1985)- uno de los más documentados procesos de difusión unifactoriales, que permite capturar la naturaleza estocástica de la variable de interés, mientras conserva tratabilidad analítica al proporcionar una forma de cálculo cerrada para ciertas cantidades financieras. Al finalizar este capítulo se formula una adaptación de las rentas contingentes, que comprende de manera simultánea la dinámica de la mortalidad a través del tiempo calendario y la naturaleza estocástica del factor de descuento presente en anualidades contingentes.

## 2.1. Rentas contingentes con base en tablas de mortalidad dinámicas y tasa de interés estocástica

Sin pérdida de generalidad, y pudiendo tomar cualquier tipo de anualidad para continuar, los temas de esta sección se abordarán haciendo especial énfasis en una anualidad vitalicia anticipada.

Tomando la definición formal de Bowers et al. (1997), una anualidad vitalicia anticipada es una renta contingente que paga una unidad monetaria al inicio de cada año mientras sobreviva el rentista de edad inicial  $x$ . Al considerar una tasa de interés constante y una mortalidad dinámica en el tiempo calendario, el valor financiero en  $t$  de esos pagos futuros, es denotado por:

$$Y = \sum_{j=0}^{K(x,t)} v(t, t+j), \quad (2.1)$$

donde  $K(x, t)$  es la variable aleatoria que representa el tiempo futuro de vida en años enteros de una persona que tiene edad  $x$  en el año calendario  $t$ , mientras que el factor de descuento  $v(t, t+j)$  es el valor equivalente en  $t$  a una unidad monetaria pagable al momento  $t+j$  descontando a un interés constante.

Ahora bien, si además de los años futuros de vida dominados por el tiempo calendario, se incluye un factor de descuento estocástico que evoluciona sobre el mismo tiempo calendario, entonces el valor financiero en  $t$  de una anualidad vitalicia anticipada toma la siguiente forma:

$$Y^* = \sum_{j=0}^{K(x,t)} E_t \left[ e^{-\int_t^{t+j} r(s)ds} \right] = \sum_{j=0}^{K(x,t)} E_t [D(t, t+j)] = \sum_{j=0}^{K(x,t)} P(t, t+j), \quad (2.2)$$

donde  $D(t, t+j)$  es el factor de descuento con tasa de interés estocástica definido en (1.25), el cual representa el valor en el tiempo  $t$  que es “equivalente” a una unidad monetaria pagable en el tiempo  $t+j$ .

$P(t, t+j) = E_t [D(t, t+j)]$  es el precio en  $t$  de un bono cero cupón con madurez en  $t+j$ , cuyo valor, como se expuso en (1.41), depende de la dinámica escogida para  $r(t)$  condicional a la información disponible hasta el tiempo  $t$ .

La dinámica utilizada para la tasa instantánea de interés es la correspondiente al modelo CIR, en efecto, si se toma  $T = t + j$  y se reemplaza correspondientemente en las ecuaciones (1.47) y (1.48), se obtiene que:

$$P(t, t + j) = A(t, t + j)e^{-B(t, t + j)r(t)}, \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, t + j) &= \left[ \frac{2h \exp\{(k + h)j/2\}}{2h + (k + h)(\exp\{jh\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2}, \\ B(t, t + j) &= \frac{2(\exp\{jh\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{jh\} - 1)}, \\ h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

De este modo es claro que bajo un modelo CIR, el precio  $P(t, t + j)$  presenta una forma analítica cerrada y su estimación dependerá únicamente de: El valor que toma la tasa  $r(t)$ , los parámetros estimados para  $\theta$ ,  $k$ ,  $\sigma$  con base en la información disponible al momento  $t$ , y la distancia de tiempo existente entre  $t$  y  $t + j$ .

Finalmente, ya que los pagos futuros se realizarán tantos años como determine la variable aleatoria  $K(x, t)$ , es necesario introducir las probabilidades de supervivencia para lograr una valoración actuarial en  $t$  de dichos pagos. Es decir, se asocia la muerte como evento contingente considerando que los pagos serán efectivos si el acreedor permanece con vida y por ende, la probabilidad de que un pago suceda es la misma probabilidad de que el acreedor esté con vida al momento de pago correspondiente. Así pues, la valoración actuarial en  $t$  se obtiene calculando el valor presente contingente de dichos pagos, el cual está representado por el valor esperado de la cantidad  $Y^*$  bajo la distribución de  $K(x, t)$ , siendo usualmente notado como  $\ddot{a}_{x,t}$  y referido como la prima única neta de una anualidad vitalicia anticipada evaluada para una persona de edad  $x$  en el año  $t$  (prima sin considerar gastos incurridos por la compañía aseguradora):

$$\ddot{a}_{x,t} = E(Y^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k P(t, t + j) {}_k p_{x,t} q_{x+k,t+k}, \quad (2.5)$$

donde

- $P(t, t + j)$  corresponde a la ecuación (2.3).
- ${}_k p_{x,t}$  representa la probabilidad de sobrevivir  $k$  años para alguien que tiene la edad  $x$  en el año calendario  $t$ , definida por:

$${}_k p_{x,t} = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j,t+j} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

- $q_{x,t}$  denota la probabilidad de que un individuo con edad  $x$  en el año calendario  $t$ , muera entre  $t$  y  $t + 1$ ; de modo que la correspondiente probabilidad de sobrevivir un año es definida por  $p_{x,t} = 1 - q_{x,t}$ . Obtener valores para  $q_{x,t}$  es posible por medio de transformaciones realizadas a la tasa central de mortalidad  $m_t(x)$ , cuyas estimaciones se obtendrán a partir del modelo expuesto en secciones previas para

$y_t(x) = \ln(m_t(x))$ , obtenido como la combinación de las ecuaciones (1.20) y (1.22) así:

$$y_t(x_i) = \mu(x_i) + \sum_{k=1}^K \beta_{t,k} \phi_k(x_i) + e_t(x_i) + \sigma_t(x_i) \epsilon_{t,i}, \quad (2.7)$$

donde  $i = 1, \dots, p$  y  $t = 1, \dots, n$ . Usualmente  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  representan años de edad ( $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$ ) o denotan grupos de 5 años edad.

Los términos de error  $\epsilon_{t,i} \sim N(0, 1)$  y se asumen *iid*.

$\sigma_t(x_i)$  representa la cantidad de ruido con respecto a la variación de  $x_i$ .

$\mu(x_i)$  es una medida de localización de las funciones que suavizan las observaciones de  $y_t(x_i)$  a través de los años  $t$ .

$\{\phi_k(x_i)\}$  con  $k = 1, \dots, K$  es un conjunto de funciones base ortonormales, y junto a los coeficientes  $\beta_{t,k}$  son obtenidos usando una descomposición por componentes principales para datos funcionales.

$e_t(x_i) \sim N(0, v(x_i))$  es un término de error asumido serialmente no-correlacionado.

El interés entonces será valorar rentas contingentes tal como se muestra en la ecuación (2.5), para lo cual es necesario calcular  $P(t, t + j)$ , así como predecir la variable  $y_t(x)$  y por ende las probabilidades de mortalidad  $q_{x,t}$  para las edades  $x \in [x_1, x_p]$  y los tiempos futuros  $t = n + 1, \dots, n + h$ . Para esto se seguirá una serie de pasos enunciados bajo el siguiente esquema:

1. **Suavizado de la mortalidad:** Siguiendo la ecuación (1.20), estimar funciones suavizadas  $f_t(x)$  usando un método de suavizado no paramétrico aplicado a las observaciones  $y_t(x)$  para cada año  $t$ .
2. **Descomposición vía expansión de funciones base:** Siguiendo la ecuación (1.22), estimar  $\mu(x)$  como una medida de localización de las funciones  $\hat{f}_t(x)$  a través de los años y obtener estimaciones para  $\{\beta_{t,k}\}$  y  $\phi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, K$  usando una descomposición de componentes principales de  $[\hat{f}_t(x) - \hat{\mu}(x)]$ .
3. **Series de tiempo:** Ajustar modelos de series de tiempo univariadas para cada  $\beta_{t,k}$ ,  $k = 1, \dots, K$ .
4. **Pronósticos:** Pronosticar los coeficientes  $\beta_{t,k}$ ,  $k = 1, \dots, K$  para  $t = n + 1, \dots, n + h$ , a partir de ellos y considerando la ecuación (2.7) es posible obtener también pronósticos para  $y_t(x) = \ln(m_t(x))$ , lo cual da lugar a obtener estimaciones suavizadas y pronósticos para  $q_{x,t}$  vía una transformación realizada sobre el logaritmo de la tasa central de mortalidad.
5. **Tasa de interés estocástica:** Modelar la tasa de interés vía el proceso de difusión propuesto por Cox et al. (1985) obteniendo los parámetros estimados que permitan el cálculo del precio  $P(t, t + j)$  expuesto en la ecuación (2.3). Como se mencionó anteriormente este precio corresponde al valor esperado del factor de descuento estocástico, condicional a la información disponible al tiempo  $t$ .
6. **Adaptación a las rentas contingentes:** Combinar las probabilidades de muerte dinámicas en el tiempo calendario  $q_{x,t}$  y el valor esperado condicional del factor de descuento estocástico  $P(t, t + j)$ , de forma simultánea en la formulación de rentas contingentes. La ecuación (2.5) permite hacerlo de manera puntual con una anualidad vitalicia anticipada evaluada para una persona de edad  $x$  en el año  $t$  y de manera análoga es extensible a cualquier tipo de renta cuyo evento contingente sea la muerte.

---



---

## Aplicación empírica al caso colombiano

---



---

Al igual que en una gran cantidad de países, en Colombia ha sido evidente la disminución de la mortalidad a través del paso de los años. En el caso particular de las rentas vitalicias contingentes, resulta esencial conocer los verdaderos niveles de la mortalidad, por ejemplo, para considerar el impacto de una mayor longevidad en el cálculo de pensiones. De manera simultánea, es interesante analizar la evolución en el tiempo de las tasas de interés que son empleadas para calcular dichas rentas vitalicias. Una alternativa para tener en cuenta los cambios en los patrones de mortalidad es el uso de tablas dinámicas, mientras que la evolución de las tasas puede ser capturada por un proceso estocástico, por lo cual el enfoque propuesto en esta tesis resulta totalmente apropiado al caso.

En lo que resta de esta sección se aplicarán secuencialmente los pasos propuestos para la adaptación de rentas contingentes con base en tablas de mortalidad dinámicas y tasa de interés estocástica, llegando a la valoración de una anualidad vitalicia anticipada evaluada para una persona de edad  $x$  en el año  $t$ , siguiendo la forma establecida en la ecuación (2.5):

$$\ddot{a}_{x,t} = E(Y^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k P(t, t+j) {}_k p_{x,t} q_{x+k,t+k}.$$

En la práctica el término  $\infty$  de la primera sumatoria se reemplaza por un valor  $w-x$ , en donde  $w$  representa la máxima edad posible para un individuo en la población estudiada; En el caso de aplicación correspondiente a los datos colombianos se usará  $w = 100$  años de edad.

Tras considerar el modelo completo expuesto en la ecuación (2.7), se siguen los pasos citados al término de la sección anterior y el detalle de sus resultados se muestra a continuación:

1. **Suavizado de la mortalidad:** Para analizar la mortalidad se usan los datos de población y muertes correspondientes a Colombia, obtenidos de *Latin American Human Mortality Database* disponible en [www.lamortalidad.org](http://www.lamortalidad.org), un proyecto cuyos autores Urdinola & Queiroz (datos descargados el 23 de Noviembre de 2015) difunden con el fin de proporcionar información detallada de la mortalidad humana, para los investigadores, estudiantes, responsables políticos y al público general.

Los datos permiten calcular tasas de mortalidad anuales entre 1970 y 2010 para grupos de 5 años de edad (0,5,10,...), necesarias para desarrollar el modelo. La información corresponde a estadísticas de orden nacional que si bien no coinciden con los datos de la población de rentistas ni asegurados, si permite exponer la disminución de la mortalidad en Colombia a través del tiempo calendario y su estructura resulta apropiada para fines de la aplicación. Sin embargo, se aclara de manera muy enfática que estos no son los datos con los que suele calcularse el valor de una renta contingente vitalicia, dado que la mortalidad a nivel nacional difiere de manera importante a la mortalidad en rentistas (pensionados) y/o asegurados. De este modo la utilidad en la aplicación mostrada, más allá de las magnitudes mismas, estará en mostrar las tendencias de mortalidad y servirá como prueba de implementación a la metodología propuesta.

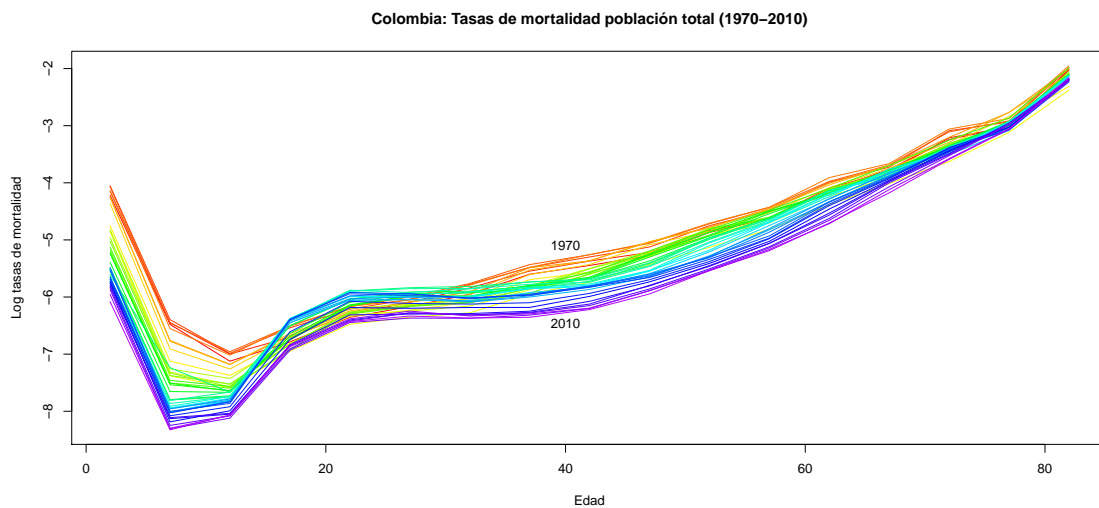


FIGURA 3.1. Colombia: Edad vs Log tasas de mortalidad 1970-2010. Elaboración propia, datos disponibles en [www.lamortalidad.org](http://www.lamortalidad.org).

De la figura 3.1 es claro que la mortalidad en Colombia ha ido disminuyendo a través del tiempo para la mayoría de las edades contempladas. En este gráfico cada línea representa un año que se muestra en una escala de color, donde el año más antiguo (1970) es mostrado por color rojo seguido de años consecutivos representados por el naranja, amarillo, verde, azul y con el año más reciente (2010) pintado en violeta. Bajo esta escala de colores se hace evidente la tendencia que ha llevado la mortalidad en Colombia disminuyendo acorde pasan los años.

Aunque en la mayoría de las edades contempladas es visible una tendencia a la disminución de la mortalidad, en edades de los 15 a los 35 años pareciera que la mortalidad no ha decrecido con el paso del tiempo, de hecho en algún momento pareciera que la mortalidad hubiese llevado una tendencia de aumento en este rango de edades. La explicación más cercana a este hecho reside en el conflicto armado colombiano y el gran número de vidas perdidas en el intervalo de 1980 a más allá del año 2000 producto de la lucha contra grupos al margen de la ley, cuyas batallas han sido combatidas por individuos con edades entre los 15 y 35 años. Este fenómeno afecta principalmente a la población masculina, tal como se ve en la figura 3.2, por ello y siguiendo los enfoques clásicos que dividen a la población según su género para llevar a cabo este tipo de estudios, en adelante se continuará analizando únicamente

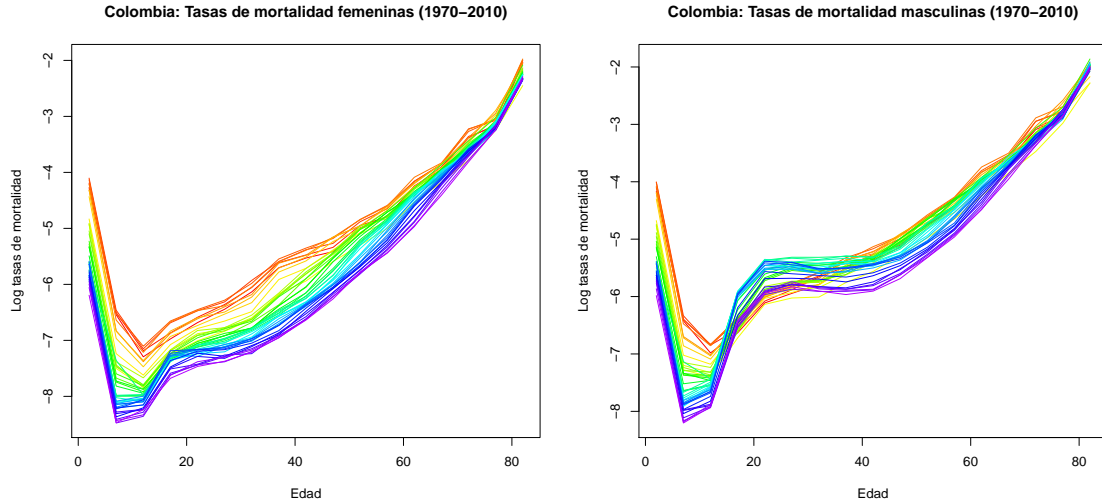


FIGURA 3.2. Colombia: Comparación de mortalidad por género 1970-2010. Elaboración propia, datos disponibles en [www.lamortalidad.org](http://www.lamortalidad.org).

la población masculina (pudiendo aplicarse a cualquier subpoblación sin pérdida de generalidad).

Si al tomar únicamente la población masculina se analiza por separado cada grupo de edad a través del tiempo, tal como se muestra en la figura 3.3 (allí cada línea representa un grupo de edad), es posible reafirmar la tendencia decreciente para la mayoría de las edades, así como el comportamiento extrañamente creciente de la mortalidad para hombres en edades de 15 a 35 años en el periodo de 1980 a más allá del año 2000.

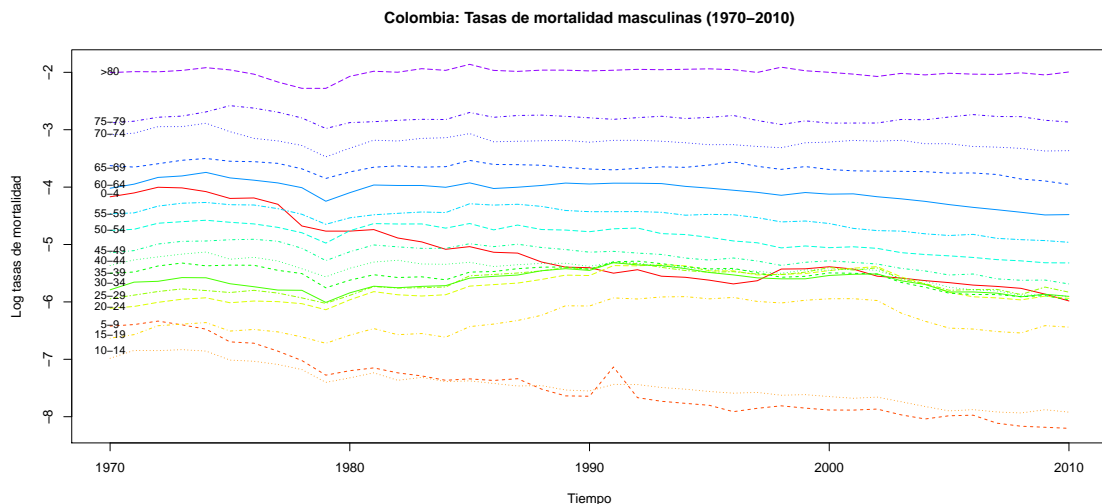


FIGURA 3.3. Colombia: Tiempo calendario vs Log tasas de mortalidad masculinas 1970-2010.

Se procede entonces a estimar funciones suaves  $f_t(x)$  usando un método de suavizado no paramétrico aplicado a  $y_t(x) = \ln(m_t(x))$  para cada año  $t$ . El método empleado para obtener estas funciones suaves es una regresión splines penalizada cuyos detalles

se configuran de acuerdo a lo mostrado en secciones anteriores de este documento. Adicionalmente se impone una restricción bajo la cual se asume que la mortalidad es monótonamente creciente para edades  $x > 70$  años, lo cual como se explicó con anterioridad, permite reducir el ruido que suele existir para la mortalidad observada en altas edades y además sigue el principio lógico de que a mayor edad, mayor debe ser la probabilidad de morir.

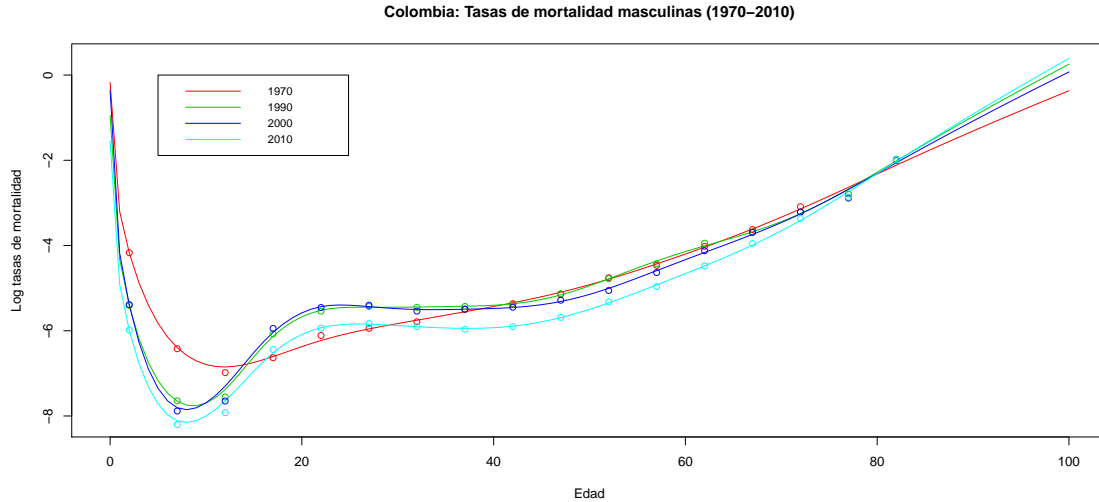


FIGURA 3.4. Suavizado de la mortalidad masculina para unos pocos años.

La figura 3.4 permite observar las funciones suaves obtenidas para ciertos años del rango observado. Los puntos representan la mortalidad observada para cada grupo de edad, mientras la línea sólida muestra una función suave sobre todo el rango de edades visto de manera continua. Las funciones suaves conservan el comportamiento original dictado por la mortalidad observada, al punto que es visible como la mortalidad de un hombre con edad entre los 15 y 35 años tuvo una fuerte alza entre las fechas de 1990 y 2000, volviendo poco a poco a tomar una tendencia a la baja reflejada por la curva del 2010.

2. **Descomposición vía expansión de funciones base:** Una vez se han obtenido las funciones suaves del paso anterior, se hace una descomposición de las mismas vía componentes principales para datos funcionales, lo cual equivale a seguir la ecuación (1.22). En este paso también se hace uso de un parámetro de robustez, el cual sirve para descartar años de información que correspondan a outliers (como guerras o epidemias). Se descartan años que no cumplan cierto criterio en función del mencionado parámetro, tal como se explica en la sección 3.3 de Hyndman & Ullah (2007), lo cual provoca para esta aplicación que se les de un menor peso a los años 1978, 1979 y 1991, los cuales presentan una mortalidad atípica ya sea muy alta o muy baja para ciertas edades.

Para el caso de la mortalidad masculina en Colombia, se selecciona el número de funciones base que minimiza el error de pronóstico cuadrado medio integrado, criterio propuesto en la sección 4.2 de Hyndman & Ullah (2007), obteniendo una descomposición en  $K = 3$  funciones base ortonormales, que recogen un 97.1 % de la variación (el porcentaje de variación explicado por cada función base es respectivamente 75.2 %, 18.4 % y 3.5 %).

En la figura 3.5, primer recuadro en la parte superior izquierda se muestra la estimación de  $\mu(x)$  representando el comportamiento medio de la mortalidad entre 1970 y 2010, como una medida de localización de las funciones suaves  $f_t(x)$ . Así mismo en la parte superior de esta figura también son mostradas las tres funciones base obtenidas, las cuales aparentemente están modelando las tasas de mortalidad de individuos en diferentes rangos de edad; la primera función base modela la mortalidad principalmente en las edades iniciales incluida la adolescencia (0 a 17 años de edad) y también tiene un efecto medio sobre edades de 40 a 80 años, la segunda función base modela la mortalidad sobre edades de 17 a 60 años y la tercera función base modela la mortalidad de los adultos mayores (edades superiores a los 80 años).

Este paso también da lugar a la obtención de los coeficientes  $\{\beta_{t,k}\}$   $k = 1, \dots, 3$  los cuales serán de gran utilidad para los pasos posteriores.

3. **Series de tiempo:** Se ajustan modelos de series de tiempo univariadas para cada  $\beta_{t,k}$ ,  $k = 1, \dots, 3$ . Son empleadas metodologías propias de los modelos ARIMA obteniendo los siguientes resultados:

- $\beta_{t,1}$  se ajusta mediante un modelo ARIMA(0,1,0) con media no nula. El coeficiente estimado para el drift de este modelo es  $-0.1665$ .
- $\beta_{t,2}$  se ajusta mediante un modelo ARIMA(0,2,1). El coeficiente estimado para el componente de media móvil en este modelo es  $-0.8087$ .
- $\beta_{t,3}$  se ajusta mediante un modelo ARIMA(1,0,0) con media nula. El coeficiente estimado para el componente autorregresivo en este modelo es  $0.7368$ .

4. **Pronósticos:** Se realizan pronósticos con un horizonte de hasta 60 años, empezando por los coeficientes  $\beta_{t,k}$ ,  $k = 1, \dots, 3$  para  $t = n + 1, \dots, n + 60$ .

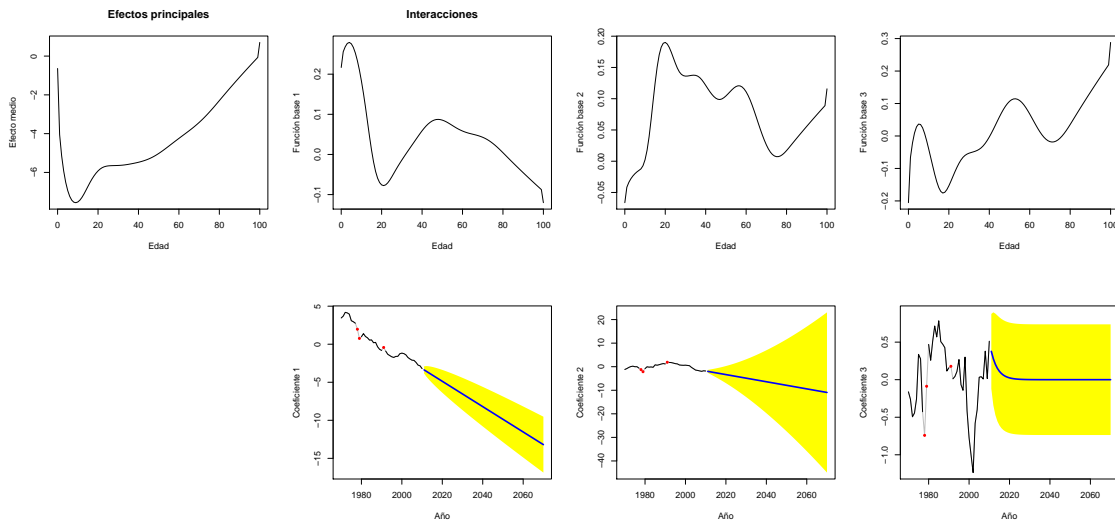


FIGURA 3.5. Colombia mortalidad masculina: Funciones base y coeficientes pronosticados.

En la parte inferior de la figura 3.5 se muestran los resultados tras la aplicación de los pasos 3 y 4. Allí los pronósticos de los coeficientes  $\beta_{t,k}$  indican la dinámica futura en la mortalidad de las edades modeladas por su correspondiente función base. Así pues, al analizar la primera función base junto a su correspondiente coeficiente  $\beta_{t,1}$  se espera con el pasar de los años una reducción marcada en la mortalidad masculina

de la primera infancia y adolescencia. Analizando  $\beta_{t,2}$  junto a la segunda función base, se espera una reducción leve en la mortalidad masculina de edades entre 17 a 60 años, con una varianza estimada que aumenta a medida que pasa el tiempo lo cual inevitablemente ampliaría los intervalos de predicción a largo plazo para estas mismas edades. Finalmente, para los hombres de edades mayores a 80 años se espera una muy leve reducción de la mortalidad en el corto plazo, hasta llegar a un nivel en donde se mantendría un comportamiento estable de manera casi continua.

Con los pronósticos de  $\beta_{t,k}$  es posible obtener también pronósticos para  $f_t(x)$  y por ende para  $y_t(x) = \ln(m_t(x))$ , el logaritmo de la tasa central de mortalidad. En la figura 3.6 se muestran dichos pronósticos de mortalidad masculina para años entre el 2020 y 2070 (líneas punteadas), así como la función que representa de manera suave la mortalidad observada en el año 2010 (línea sólida); Es claro que el método prevé una reducción de la mortalidad a futuro en la mayoría de las edades contempladas, con una dinámica marcada por la combinación de los coeficientes pronosticados y las funciones base estimadas, tal como se explicó anteriormente.

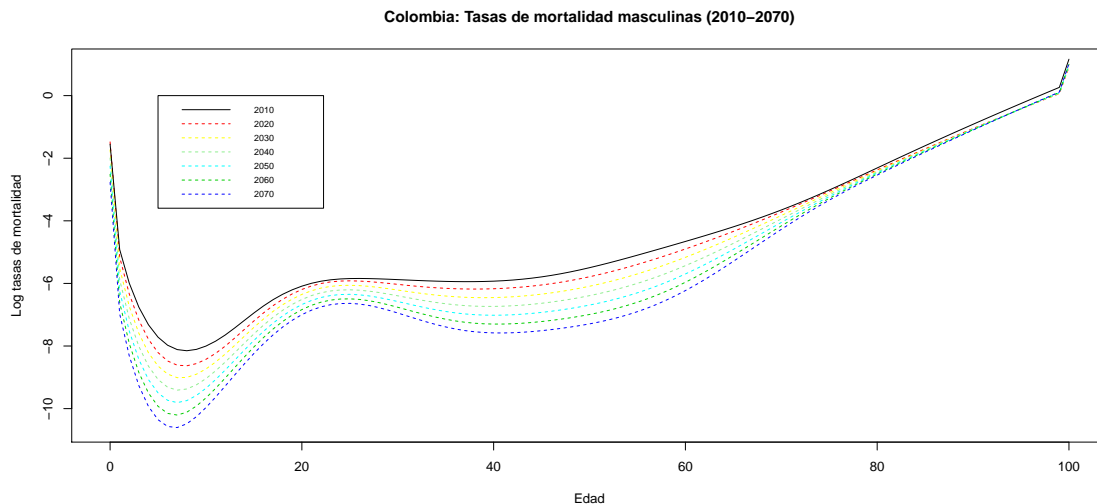


FIGURA 3.6. Colombia mortalidad masculina: Pronósticos de mortalidad 2020-2070

Para finalizar este paso, se obtienen estimaciones suavizadas y pronósticos para  $q_{x,t}$  vía una transformación realizada sobre los pronósticos de  $\ln(m_t(x))$ . Así pues, tras los pasos hasta ahora aplicados, el resultado parcial es un conjunto de varias tablas de mortalidad, cada una correspondiente a un año calendario, las cuales se convierten en uno de los elementos principales para la valoración final propuesta a las rentas contingentes.

5. **Tasa de interés estocástica:** La tasa instantánea  $r(t)$  es clave en todos los modelos de tasa de interés estocástica, sin embargo, esta no puede ser directamente observada y por ello debe considerarse algún proxy de esta que permita el desarrollo mismo de los modelos. La tasa diaria overnight no es usualmente considerada un buen proxy para la tasa instantánea, porque los motivos y necesidades de quienes invierten a un día son muy diferentes de aquellos que invierten dinero por un mes o más. Además, efectos de microestructura como operaciones programadas semanalmente pueden crear picos sistemáticos en los datos crudos que de alguna forma tendrían que ser suavizados. Para resolver estos problemas muchos autores seleccionan una tasa de

plazo ligeramente mayor: tasa a siete días, tasas a un mes, tres meses e incluso hasta anuales son consideradas buenos proxies, desde que ellas sean lo suficientemente líquidas en el mercado.

Para la aplicación al caso colombiano, se modelará la tasa instantánea de interés vía el proceso de difusión CIR propuesto por Cox et al. (1985), usando las tasas de los bonos cero cupón con madurez a un año, medidas en frecuencia mensual entre Enero de 2003 y Abril del 2016, tomadas de la información disponible del Banco de la República en [www.banrep.gov.co/es/tes](http://www.banrep.gov.co/es/tes).

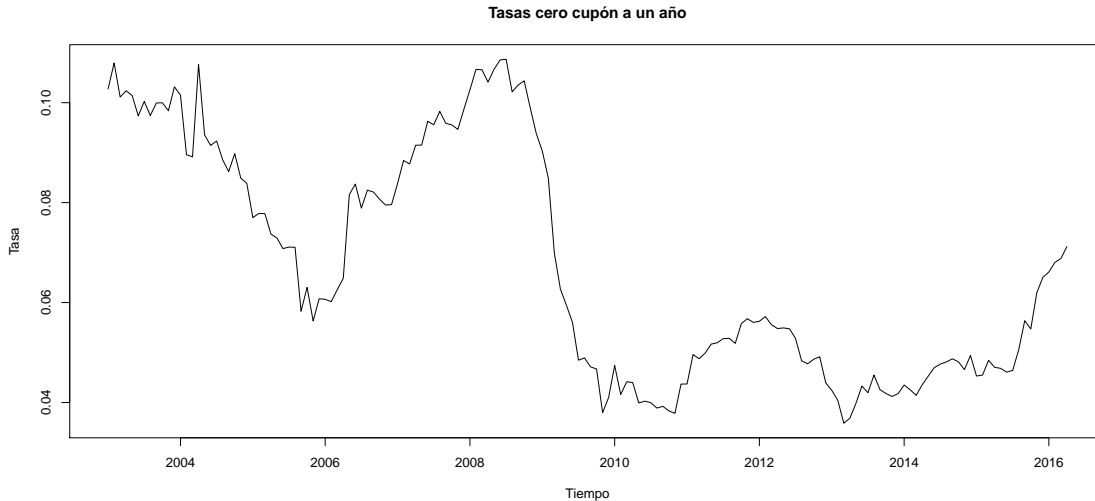


FIGURA 3.7. Colombia TES: Tasas cero cupón a un año frecuencia mensual 2003-2016

Las tasas de los TES a plazo de 1 año, figura 3.7, son extraídas de la curva cero cupón de los títulos de deuda pública, emitidos en pesos, que calcula el Banco de la República mediante la metodología de Nelson y Siegel (1987). Para este cálculo se utiliza la información de las operaciones negociadas y registradas en los sistemas de negociación que administra el Banco de la República (SEN: Sistema Electrónico de Negociación del Banco de la República) y la Bolsa de Valores de Colombia (MEC: Mercado Electrónico de Colombia).

Como se mencionó en secciones anteriores, existen diferentes modelos tanto unifactoriales como multifactoriales que permiten el cálculo de la función de descuento en una forma analítica cerrada, así por ejemplo, en el trabajo de Arango et al. (2013) publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República en la cual se modeló la tasa de interés a largo plazo para descontar el pasivo pensional colombiano, se utilizó como uno de los posibles enfoques el modelo unifactorial propuesto por Vasicek (1977) el cual tiene forma gaussiana pero presenta probabilidad no nula para la realización de tasas con valores negativos, mientras que en este trabajo es utilizado el modelo CIR propuesto por Cox et al. (1985) que aunque no toma forma gaussiana, permite bajo ciertas restricciones asegurar realizaciones estrictamente positivas para la tasa de interés, lo cual se apega mucho más a la realidad de las mismas.

Al aplicar el modelo CIR a los datos enunciados, son estimados los parámetros que permiten el cálculo del valor esperado condicional del factor de descuento estocástico, tal como fue descrito en la ecuación (2.3). Los parámetros estimados bajo esta

dinámica estocástica son  $\hat{k} = 0.2913$ ,  $\hat{\theta} = 0.0591$  y  $\hat{\sigma} = 0.0546$ . El parámetro estimado  $\hat{\theta}$  puede ser visto como el valor asintótico de la tasa media esperada, de este modo se puede decir que la tasa esperada en un futuro a muy largo plazo es del 5,9%. Esto también se muestra en la figura 3.8 en la cual se incluyen la media muestral de la solución al modelo CIR bajo 200 trayectorias simuladas con los parámetros estimados, además de sus bandas de confianza empíricas al 95 % y las tasas de interés realmente observadas.

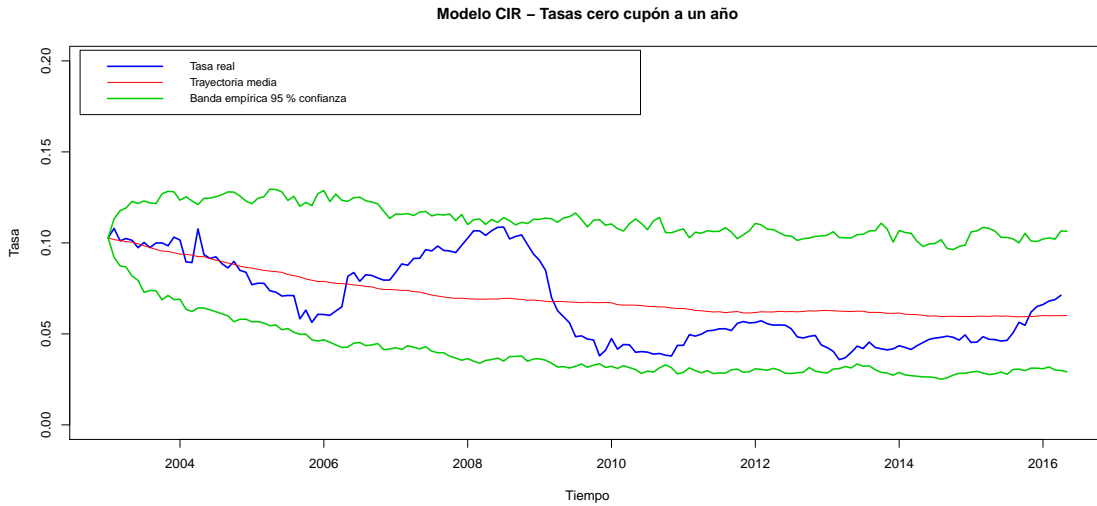


FIGURA 3.8. Colombia TES: Datos reales vs media empírica de 200 trayectorias simuladas

6. **Adaptación a las rentas contingentes:** El último paso consiste en combinar las probabilidades de muerte  $q_{x,t}$  con el valor esperado condicional del factor de descuento estocástico  $P(t, t + j)$  de forma simultánea en la formulación de rentas contingentes. Como un caso particular mostrado en esta aplicación se obtiene la valoración de una anualidad vitalicia anticipada, evaluada para una persona de edad  $x$  en el año  $t$ , para lo cual basta con fijar el valor de 100 años como la máxima edad en la población analizada y reemplazar en la ecuación (2.5) los valores correspondientes a las estimaciones ya obtenidas, así:

$$\ddot{a}_{x,t} = E(Y^*) = \sum_{k=0}^{100-x} \sum_{j=0}^k P(t, t + j) {}_k p_{x,t} q_{x+k,t+k}, \quad (3.1)$$

donde las probabilidades  $q_{x+k,t+k}$  y  ${}_k p_{x,t}$  corresponden a las tablas de mortalidad dinámicas resultantes en el paso 4 previamente ejecutado y

$$P(t, t + j) = A(t, t + j) e^{-B(t,t+j)r(t)},$$

$$A(t, t + j) = \left[ \frac{2h \exp\{(0.2913 + h)j/2\}}{2h + (0.2913 + h)(\exp\{jh\} - 1)} \right]^{11.54}, \quad (3.2)$$

$$B(t, t + j) = \frac{2(\exp\{jh\} - 1)}{2h + (0.2913 + h)(\exp\{jh\} - 1)},$$

$$h = \sqrt{0.2913^2 + 2 * 0.0546^2}.$$

Siguiendo las ecuaciones (3.1) y (3.2) se calcula  $\ddot{a}_{65,t}$  con  $t = 2003, 2004, \dots, 2016$  (una anualidad vitalicia anticipada evaluada para una persona que tiene 65 años de edad en el año calendario  $t$ ), y los resultados se muestran mediante la línea azul de la figura 3.9, mientras se comparan con otros métodos de cálculo para la misma anualidad. Así pues, la línea gris de dicha figura representa el valor de la anualidad calculado bajo el enfoque clásico, en el cual se tiene una tasa de interés constante y una única tabla de mortalidad estática (en este caso se usó 5,9% como tasa constante ya que este es el valor esperado de la tasa a largo plazo, mientras que la tabla de mortalidad estática corresponde a la obtenida para el año 2003), es claro que con este método se obtiene un valor de  $\ddot{a}_{65,t}$  constante sobre el tiempo. La línea verde representa el valor de la anualidad calculado bajo un enfoque que considera la naturaleza estocástica de la tasa de interés, pero mantiene la tabla de mortalidad estática obtenida para el año 2003, en este caso es notable la influencia de una tasa de interés que ya no es fija sobre el tiempo. La línea naranja representa el valor de la anualidad calculado con una tasa de interés constante (igual a 5.9%), pero en adición considerando mortalidad dinámica en el tiempo calendario, lo cual conduce a una tendencia creciente para el valor de  $\ddot{a}_{65,t}$ . Finalmente la línea azul representa el valor de la anualidad calculado bajo el método propuesto en esta tesis, es evidente que bajo este enfoque la valoración llega a depender simultáneamente de la tasa de interés y de las probabilidades dinámicas, por eso en tiempos para los cuales la tasa es alta, se obtiene un precio bajo de  $\ddot{a}_{65,t}$  (a mayor tasa menor precio y viceversa - efecto de la tasa estocástica) y adicionalmente  $\ddot{a}_{65,t}$  también presenta una tendencia creciente gracias a mayores probabilidades de supervivencia a medida que pasa el tiempo calendario (efecto de la mortalidad dinámica).

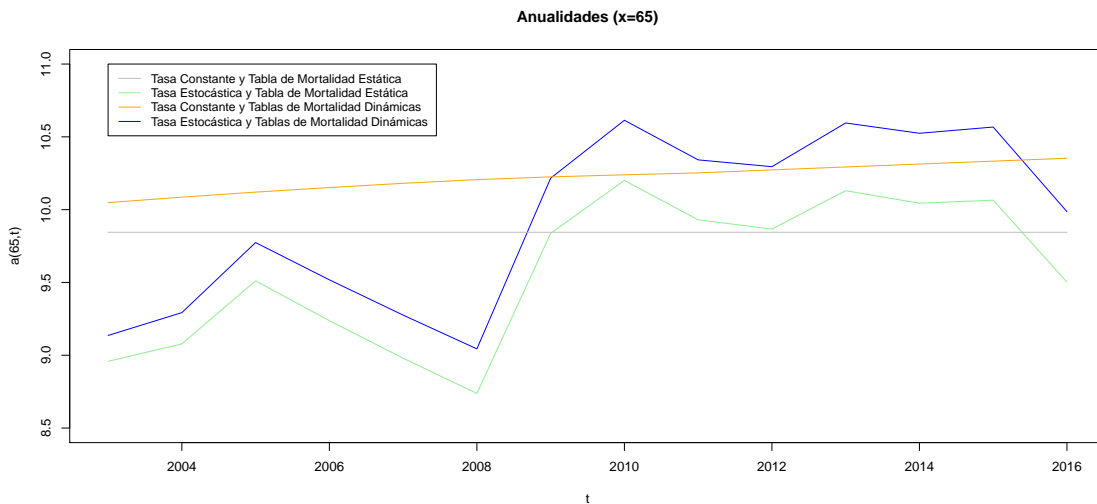


FIGURA 3.9. Comparación de métodos para el cálculo de anualidades

Las diferencias arrojadas por los distintos métodos de cálculo pueden resultar en grandes cantidades de dinero, por ejemplo si se usa  $\ddot{a}_{65,t}$  para estimar la cantidad que debe pagar cada individuo que quiera pensionarse a los 65 años de edad en el año  $t$ . Como se evidenció, la tasa de interés suele tener largos periodos de tendencias a la baja o a la alza y no es sencillo conocer el punto de quiebre ni anticipar grandes cambios de la misma, lo cual puede aumentar la magnitud de las mencionadas

---

diferencias entre los métodos de cálculo, para evitar esto es recomendable hacer seguimiento continuo a la evolución de las tasas. De otro lado teniendo en cuenta las tendencias de mortalidad en Colombia, es claro que un enfoque que no considere esta dinámica en el tiempo va a tender a subestimar las cantidades necesarias para cubrir pagos futuros. Es por todo lo anterior que el método propuesto resulta acoplado a las necesidades actuales en valoración de rentas contingentes.

---

---

## Conclusiones

---

---

- La valoración de rentas contingentes efectivamente es sensible a cambios en las tasas de interés o en las dinámicas de mortalidad, y una vez existe evidencia de que dichos cambios se han dado o serán posibles, vale la pena introducir estos factores e intentar modelarlos a través del tiempo, especialmente para evitar los riesgos asociados con la subestimación de pagos futuros en una renta contingente.
- La adaptación propuesta en esta tesis, se muestra como una posible alternativa a la valoración actual en Colombia de rentas contingentes, para aquellos casos en los cuales no se está teniendo en cuenta la dinámica de las tasas de interés y/o el cambio de la mortalidad a través del tiempo calendario.
- La mortalidad en Colombia muestra una tendencia bastante marcada a medida que pasa el tiempo, si bien en el caso masculino tal tendencia se ha visto afectada por el conflicto armado, se puede decir en términos generales que ha existido una disminución en los índices de mortalidad y se espera que esta tendencia se mantenga en los años futuros.
- La tasa de interés nominal de los TES a un año en Colombia para un futuro asintótico, se ubica alrededor del 5.9%, esta conclusión coincide con la enmarcada por estudios previos realizados por el Banco de la República. Sin embargo, el dinamismo de las tasas de interés requiere que estas sean monitoreadas de manera continua para prever cualquier cambio estructural de las mismas.

---

---

## Trabajo futuro

---

---

En el desarrollo de esta tesis se contemplaron diversas alternativas que dieran respuesta a la valoración de una renta contingente con base en tasa de interés estocástica y tablas de mortalidad dinámicas, entre dichas alternativas es posible reconocer algunas que si bien implican mayor complejidad, también dan respuesta a otros temas de interés estadístico, es por eso que en esta sección se invita al lector a contemplar posibles extensiones del trabajo ya realizado las cuales se convierten en opciones de trabajo futuro:

- Modelar la tasa de interés a través de un modelo unifactorial (tal como se hace en esta tesis) puede ser suficiente, sin embargo tal como indican Arango et al. (2013), la sencillez misma del modelo al depender únicamente de una fuente de riesgo (un único factor), lo hace poco flexible resultando en una curva de rendimientos con poca curvatura y con correlación perfecta entre las tasas de interés a lo largo de la estructura a plazo, esto puede ser mejorado a través de un modelo multifactorial y dependiendo de la dinámica a emplear puede llegarse también a una forma analítica cerrada para calcular el precio en  $t$  de un bono cero cupón con madurez  $T$ . Aunque cualquiera de estos modelos tiene un mayor costo computacional, su calidad de ajuste respecto a las tasas observadas en el mercado, es considerablemente mejor a la de los modelos unifactoriales motivo por el cual, resulta interesante considerar una adaptación futura que contemple mejoras en este sentido para modelar la tasa de interés.
- Del mismo modo en que se deja de un lado la idea de una ley de mortalidad estática e invariable en el tiempo, vale la pena apartarse de supuestos como el de la independencia entre individuos y contemplar la relación que existe, por ejemplo en una versión futura, desde un enfoque geoestadístico que permita estimar la estructura de dependencia en datos de mortalidad.

# APÉNDICE

---

---

## Código R

---

---

```
library(demography)
library("openxlsx")
library(reshape2)
library(yuima)
library(Ecdat)
library(Sim.DiffProc)

#####
##### mortalidad dinamica en el tiempo
#####

## CARGA DE DATOS

deaths <- read.xlsx("Colombia Deaths 1970-2010.xlsx", sheet = 1, startRow = 1, colNames = TRUE)
deaths <- melt(deaths, id=c("year","gender"))
deaths <- dcast(deaths,year+variable~gender)
names(deaths)<-c("year","age","female","male","total")
deaths <- deaths[order(deaths$year,deaths$age),]

p_female <- read.xlsx("Colombia Population estimates 1970-2010 publicado web.xlsx", sheet = 3,
startRow = 1, colNames = TRUE)
p_male <- read.xlsx("Colombia Population estimates 1970-2010 publicado web.xlsx", sheet = 2,
startRow = 1, colNames = TRUE)
p_total <- read.xlsx("Colombia Population estimates 1970-2010 publicado web.xlsx", sheet = 1,
startRow = 1, colNames = TRUE)
p_female <- melt(p_female, id=c("year"))
p_male <- melt(p_male, id=c("year"))
p_total <- melt(p_total, id=c("year"))
names(p_female) <- c("year","age","female")
names(p_male) <- c("year","age","male")
names(p_total) <- c("year","age","total")
population <- merge(p_female,p_male,by=c("year","age"),all.x=TRUE)
population <- merge(population,p_total,by=c("year","age"),all.x=TRUE)
population <- population[order(population$year,population$age),]

mortality <- deaths[,c("female","male","total")]/population[,c("female","male","total")]
mortality <- cbind(deaths[,c("year","age")],mortality)

write.table(population, file=paste0(getwd(),"/COL Poblacion 1970-2010.txt"), sep="\t")
write.table(mortality, file=paste0(getwd(),"/COL Mortalidad 1970-2010.txt"), sep="\t")

##### objeto demogdata
### estructura por rangos de edad:

col.mort<-read.demogdata("COL Mortalidad 1970-2010.txt","COL Poblacion 1970-2010.txt",
type="mortality", label="Colombia",skip=0)
```

```

rownames(col.mort$rate$female)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")
rownames(col.mort$rate$male)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")
rownames(col.mort$rate$total)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")
rownames(col.mort$pop$female)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")
rownames(col.mort$pop$male)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")
rownames(col.mort$pop$total)<- c("0-4", "5-9", "10-14", "15-19", "20-24", "25-29", "30-34", "35-39",
"40-44", "45-49", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "70-74", "75-79", ">80")

col.mort$age <- c(2,7,12,17,22,27,32,37,42,47,52,57,62,67,72,77,82)

# Graficos de las tasas centrales de mortalidad

plot(col.mort,series="total")
text(rep(40,2),log(col.mort$rate[[3]])[9,c(1,41)]+c(0.35,-0.25),c("1970", "2010"))

par(mfrow=c(1,2))
plot(col.mort,series="female")
plot(col.mort,series="male")

plot(col.mort,series="male",plot.type="time",xlim=c(1970,2010),lty=1:17,transform=TRUE, xlab="time")
text(rep(1970,17),log(col.mort$rate[[2]])[,2],rownames(col.mort$rate$total),cex=0.8)

# Graficos con unos pocos anos
#plot(col.mort,series="male",
# years=c(1970,1980,1997,2000,2010),type="b",cex=0.6,col=1:5,pch=c(1,15,22,2,8),
# main="Colombia: Mortalidad colombiana",lty=1:5)
#legend(5,-2,legend=paste(c(1970,1980,1990,2000,2010)),col=1:5,pch=c(1,15,22,2,8),cex=0.8)

# Smoothing
colombia.sm <- smooth.demogdata(col.mort,obs.var="empirical",age.grid=seq(0,110),b=70,k=11)

i=c(1970,1990,2000,2010)
plot(colombia.sm,series="male",years=i,col=2:5,max.age=100)
points(col.mort,series="male",years=i,pch=1,col=2:5,max.age=100)
legend(5,0,legend=paste(c(1970,1990,2000,2010)),col=2:5,lty=1,cex=0.8)

# Ajuste de modelo hasta 2010 (modelo funcional para datos demograficos).
colombia.corto <- extract.years(colombia.sm,1970:2010)
colombia.corto <- extract.ages(colombia.corto,0:100,combine.upper = TRUE)
# margin.table(isfe(colombia.corto,series="male", N=25,max.order=7, h=1:14,max.age=100,
method="M",fmethod = "arima",lambda=3),1)
## En este caso un k=3 minimiza el ISFE.
colombia.fit <- fdm(colombia.corto,series="male",order=3,lambda=2,max.age=100,method="M")

colombia.fcast <- forecast(colombia.fit,h=60,method="arima",level=90,adjust=FALSE)

## Modelos ARIMA ajustados a los coeficientes beta
models(colombia.fcast)

## funciones base ajustadas y prediccion de coeficientes
plot(colombia.fcast,plot.type="component")

## Pronostico puntual para ciertos anos
plot(colombia.fcast,series="male",lty=2,years=seq(2010,2070,10),max.age=100,
col=c(2,7,"lightgreen",5,3,4))
lines(colombia.corto,series="male",years=c(2010),col="black")
legend(5,0,legend=seq(2010,2070,10),cex=0.7,col=c(1,2,7,"lightgreen",5,3,4),lty=c(1,rep(2,6)))

## 60 anos de pronosticos de Tablas de mortalidad para la poblacion masculina
lifet<-lifetable(colombia.fcast,series="male",max.age=100)
plot(lifetable(colombia.fcast,ages=seq(65,100),max.age=100))

## Tablas de mortalidad dinamicas de los 40 anos observados para la poblacion masculina

```

```

prelifet<-lifetable(colombia.corto,series="male",max.age=100)

## Probabilidades de muerte qx pasadas y pronosticadas en un mismo conjunto de datos
qx<-cbind(prelifet$qx,lifet$qx)

#####
##### tasa de interes
#####
# Lectura de datos:
# Para estimar el modelo se toman las tasas de los bonos cero cupon con madurez a un ano,
medidas en frecuencia mensual entre Enero de 2003 y Abril del 2016.
# (ojala pueda tomarse con menor madurez para hacer un mejor proxy de la tasa instantanea,
ej: tasa con madurez a un mes)
# Fuente: SEN y MEC, con calculos Banco de la Republica.
Tomado de la pagina del Banco de la republica http://www.banrep.gov.co/es/tes
#
# "Las tasas de los TES a plazos de 1, 5 y 10 anos son extraidas de la curva cero cupon
de los titulos de deuda publica,
# denominados en moneda en pesos y en UVRs, que calcula el Banco de la Republica mediante la
metodologia de Nelson y Siegel (1987).
# Para este calculo se utiliza la informacion de las operaciones negociadas y registradas
en los sistemas de negociacion
# que administra el Banco de la Republica (SEN: Sistema Electronico de Negociacion del
Banco de la Republica)
# y la Bolsa de Valores de Colombia (MEC: Mercado Electronico de Colombia)."
```

TESmes <- read.xlsx("TesPesos.xlsx", sheet = 3, startRow = 1, colNames = TRUE)

```

tes <- TESmes[, "1_ano"]
X<-ts(tes,frequency=12,start=c(2003,01))
plot(X,main="Tasas cero cupon a un ano")

#####
#####
##### Modelo CIR #####
#####
#####

## ESTIMACION por cuasi maxima verosimilitud

modCIR<-setModel(drift = "k*(theta - x)", diffusion = "sigma * sqrt(x)", solve.variable = c("x"))
yuimaCIR <- setYuima(data = setData(X), model = modCIR)

##forma de estimar sigma en un modelo CIR
sigma0<-sqrt ( mean ((X [2: length (X)] -
X [1:( length (X ) -1)])^2)/X [1:( length (X ) -1]] ) / deltat (X)
## valor inicial para theta
theta0<-mean(X)

param.init <- list(k = 0.5,theta = theta0, sigma=sigma0)

# Opcional poner lower and upper para identificar la region de busqueda del optimizador
# En este caso se pone una cota inferior (lower), ya que k, theta y sigma deben ser
positivos en un modelo CIR
low.par <- list(k = 0.0001,theta = 0.0001, sigma=0.0001)
mleCIR <- qmle(yuimaCIR, start = param.init, lower = low.par,method="L-BFGS-B")

summary(mleCIR) ## si (2k*theta)>(sigma^2) se garantizan tasas siempre positivas

## CIR Model: con los parametros estimados se simulan 200 de trayectorias para
obtener bandas empiricas del 95% de confianza

N <- length(X)
sim <- snssde1d(drift=expression( 0.29134675*(0.05912608-x) ),
diffusion=expression( 0.05467553*sqrt(x) ),
```

```

M=200,t0=time(X)[1],T=time(X)[N],Dt=deltat(X),x0=X[1],N)
plot(sim,plot.type="single",type="n",ylim=c(0,0.2),main="Modelo CIR - Tasas cero cupon a un ano")
lines(X,col=4,lwd=2)
lines(time(sim),mean(sim),col=2,lwd=1)
lines(time(sim),bconfint(sim,level=0.95)[,1],col=3,lwd=1.9)
lines(time(sim),bconfint(sim,level=0.95)[,2],col=3,lwd=1.9)
legend("topleft",c("real data","mean path",paste("bound of", 95,"% confidence")),inset = .01,
col=c(4,2,3),
lwd=c(2,1,1.9),cex=0.8)

k<-coef(mleCIR)[2]
theta<-coef(mleCIR)[3]
sigma<-coef(mleCIR)[1]

#####
#####
#####
## adaptacion simultanea tablas de mortalidad dinamicas y tasa de interes estocastica

k<-unname(k)
theta<-unname(theta)
sigma<-unname(sigma)
h<-sqrt(k^2+(2*sigma^2))

## la funcion P devuelve el precio en el ano t de un bono cero cupon de madurez t+j
# (es decir, el precio en t de un bono que paga una unidad monetaria en el ano t+j)
# y para su construccion primero deben tenerse ciertas funciones A,B y r
A<- function(j) { ((2*h*exp((k+h)*j/2))/(2*h+((k+h)*(exp(j*h)-1))))^(2*k*theta/(sigma^2)) }
B<- function(j) { (2*(exp(j*h)-1))/(2*h+((k+h)*(exp(j*h)-1))) }
r<- function(t) { ifelse(t==2016,window(X, start=c(t, 4), end=c(t, 4)),
window(X, start=c(t, 6), end=c(t, 6))) }
P<- function(t,j) { (A(j))* (exp(-B(j)*r(t)))}

## La funcion q(x,t) devuelve la prob de que alguien de edad x en el ano t,
  muera antes de cumplir la edad x+1
q<-function(x,t) { qx[rownames(qx)==x,colnames(qx)==t] }

## La funcion p(x,t) devuelve el valor de la prob de que alguien de edad x en el ano t,
  sobreviva a la edad x+1
p<-function(x,t) { 1-q(x,t) }

## la funcion kp(k,x,t) devuelve el valor de kPx,t
kp<-function(k,x,t)
{
prob<-1
for (j in 0:(k-1)){
prob[j+1]<-p(x+j,t+j)
}
ifelse(k==0,1,prod(prob))
}

## la funcion kptfijo(k,x,tfijo) devuelve el valor de kPx segun las probabilidades
  de una sola tabla de mortalidad
## correspondiente a la tabla estatica del ano tfijo
kptfijo<-function(k,x,tfijo)
{
prob<-1
for (j in 0:(k-1)){
prob[j+1]<-p(x+j,tfijo)
}
ifelse(k==0,1,prod(prob))
}

## la funcion a(x,t) devuelve la valoracion de una anualidad vitalicia anticipada,
## con tasa de interes estocastica y mortalidad dinamica en el tiempo
## evaluada para una persona de edad x en el ano t.
a<-function(x,t)

```

```

{
a<-0
for(k in 0:(100-x)){
for (j in 0:k){
a<-a+(P(t,j)*kp(k,x,t)*q(x+k,t+k))
}
}
a
}

## la funcion aED(x,t) tambien devuelve la valoracion de una anualidad vitalicia anticipada,
## con tasa de interes Estocastica (E) y mortalidad Dinamica (D) en el tiempo
## evaluada para una persona de edad x en el ano t. - aED(x,t) es mas optima que a(x,t) -
aED<-function(x,t)
{
aED<-0
for (k in 0:(100-x)){
aED<-aED+(P(t,k)*kp(k,x,t))
}
aED
}

## la funcion aCD(x,t) devuelve la valoracion de una anualidad vitalicia anticipada,
## con tasa de interes CONSTANTE (C) y mortalidad Dinamica (D) en el tiempo
## evaluada para una persona de edad x en el ano t... se usa como tasa fija i=theta
aCD<-function(x,t)
{
aCD<-0
for (k in 0:(100-x)){
aCD<-aCD+((1/((1+theta)^k))*kp(k,x,t))
}
aCD
}

## la funcion aEC(x,t) devuelve la valoracion de una anualidad vitalicia anticipada,
## con tasa de interes Estocastica (E) y ley de mortalidad CONSTANTE (C) en el
tiempo a partir de un ano tfijo=2003
## evaluada para una persona de edad x en el ano t.
aEC<-function(x,t)
{
aEC<-0
for (k in 0:(100-x)){
aEC<-aEC+(P(t,k)*kptfijo(k,x,2003))
}
aEC
}

## la funcion aCC(x,t) devuelve la valoracion de una anualidad vitalicia anticipada,
## con tasa de interes CONSTANTE (C) y ley de mortalidad CONSTANTE (C) en el tiempo
a partir de un ano tfijo=2003
## evaluada para una persona de edad x en el ano t... se usa como tasa fija i=theta
aCC<-function(x,t)
{
aCC<-0
for (k in 0:(100-x)){
aCC<-aCC+((1/((1+theta)^k))*kptfijo(k,x,2003))
}
aCC
}

####
# vector de anualidades para distintos anos: para alguna edad fija mayor a 45,
con tasa Estocastica (E) y mortalidad Dinamica (D)
anualidadED<-function(edad){
val<-0
for (j in 0:13){
val[j+1]<-aED(edad,2003+j)
}
val
}

```

```
# vector de anualidades para distintos anos: para alguna edad fija mayor a 45,
con tasa CONSTANTE (C) y mortalidad Dinamica (D)
anualidadCD<-function(edad){
  val<-0
  for (j in 0:13){
    val[j+1]<-aCD(edad,2003+j)
  }
  val
}

# vector de anualidades para distintos anos: para alguna edad fija mayor a 45,
con tasa Estocastica (E) y mortalidad CONSTANTE (C) en el tiempo a partir de un ano tfijo=2003
anualidadEC<-function(edad){
  val<-0
  for (j in 0:13){
    val[j+1]<-aEC(edad,2003+j)
  }
  val
}

# vector de anualidades para distintos anos: para alguna edad fija mayor a 45,
con tasa CONSTANTE (C) y mortalidad CONSTANTE (C) en el tiempo a partir de un ano tfijo=2003
anualidadCC<-function(edad){
  val<-0
  for (j in 0:13){
    val[j+1]<-aCC(edad,2003+j)
  }
  val
}

# comparacion del calculo de anualidades por distintos metodos
plot(2003:2016,anualidadED(65),type="l",col=4,ylim=c(8.5,11),ylab="a(65,t)",
     xlab="t",main="Anualidades (x=65)")
lines(2003:2016,anualidadCD(65),col="orange")
lines(2003:2016,anualidadEC(65),col="lightgreen")
lines(2003:2016,anualidadCC(65),col="gray")
legend(2003,11,cex=0.9,lty=1,col=c("gray","lightgreen","orange",4)
      ,legend=c("Tasa Constante y Tabla de Mortalidad Estatica"
               ,"Tasa Estocastica y Tabla de Mortalidad Estatica"
               ,"Tasa Constante y Tablas de Mortalidad Dinamicas"
               ,"Tasa Estocastica y Tablas de Mortalidad Dinamicas"))
```

---

---

## Bibliografía

---

---

- Arango, L., Cabrera, W., Gomez, E. & Mendoza, J. (2013). Tasa de interés de largo plazo, interés técnico y pasivo pensional, *Borradores de Economía. Banco de la República* (796).
- Benjamin, B. & Soliman, A. (1993). *Mortality on the Move*, Actuarial Education Service, Oxford.
- Biffis, E. & Denuit, M. (2005). Lee-carter goes risk neutral: an application to italian annuity market, *Actuarial Research Report* **166**.
- Black, F. & Karasinski, P. (1991). Bond and option pricing when short rates are lognormal, *Financial Analysts Journal* **47**: 52–59.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**: 637–654.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. & Nesbitt, C. (1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models, Theory and Practice*, Springer-Verlag, Germany.
- Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**: 385–407.
- Dothan, L. (1978). On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics* **6**: 59–69.
- Fan, J. & Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and its Applications*, Chapman and Hall, London.
- Felipe, A., Guillen, M. & Nielsen, J. (2001). Longevity studies based on kernel hazard estimation, *Insurance: Mathematics and Economics* **28**: 191–204.
- Gavin, J., Haberman, S. & Verrall, R. (1995). Graduation by kernel and adaptive kernel methods with a boundary correction, *Transactions. Society of Actuaries* **XLVII**: 173–209.
- Haberman, S. & Renshaw, A. (1996). Generalized linear models and actuarial science, *The Statistician* **45**(4): 407–436.
- Hastie, T. J. & Tibshirani, R. (1990). *Generalized Additive Models*, Chapman and Hall, London.
- Heligman, L. & Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality, *Journal of the Institute of Actuaries* **107**: 49–80.
- Hull, J. & White, A. (1990). Valuing derivative securities using the explicit finite difference method, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **25**: 87–100.
- Hyndman, R. J. & Ullah, M. S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach, *Computational Statistics & Data Analysis* **51**: 4942–4956.
- Lee, R. (2000). The lee-carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal* pp. 80–91.
- Lee, R. & Carter, L. (1992). Modelling and forecasting u.s. mortality, *Journal of the American Statistical Association* **87**(419): 659–671.
- Mercurio, F. & Moraleda, J. (2000). An analytically tractable interest rate model with humped volatility, *European Journal of Operational Research* **120**: 205–214.
- Palacios, H. (1996). *Introducción al Cálculo Actuarial*, Mapfre, Madrid.

- 
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2000). Modelling for mortality reduction factors, *Actuarial Research Report* **127**.
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2001). On the forecasting of mortality reduction factors, *Actuarial Research Report* **135**.
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2003). Lee-carter mortality forecasting with agespecific enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics* **33**(2): 255–272.
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors, *Insurance: Mathematics and Economics* **38**(3): 556–570.
- Renshaw, E. (1991). Actuarial graduation practice and generalised linear and non-linear models, *Journal of the Institute of Actuaries* **118**(II): 295–312.
- Sithole, T., Haberman, S. & Verrall, R. J. (2000). An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants' and life office pensioners' data, *Insurance: Mathematics and Economics* **27**(4): 285–312.
- Urdinola, B. P. & Queiroz, B. L. (datos descargados el 23 de Noviembre de 2015). Latin american human mortality database.  
**URL:** [www.lamortalidad.org](http://www.lamortalidad.org)
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics* **5**: 177–188.
- Vegas, A. (1982). *Estadística, Aplicaciones Económicas y Actuariales*, Piramide, Madrid.