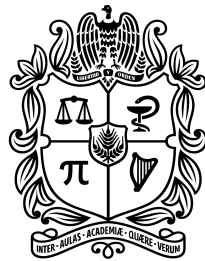
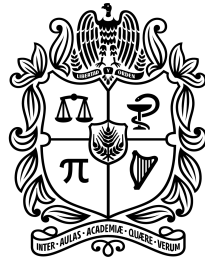

APLICACIONES DE HÉNON: LÍMITE INVERSO DE
POLINOMIOS CUADRÁTICOS



MANUEL ALBERTO PARRA DÍAZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2021

APLICACIONES DE HÉNON: LÍMITE INVERSO DE
POLINOMIOS CUADRÁTICOS



MANUEL ALBERTO PARRA DÍAZ

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al
título de:
Magíster en Ciencias – Matemáticas

Director:
Serafín Bautista Díaz

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2021

A mi familia

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento al director de este trabajo de maestría, Serafín Bautista Díaz, por la dedicación y el apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias y la vocación de líder que ha facilitado el termino de un proyecto. Gracias por la confianza depositada en mí.

Al profesor Mauro Artigiani, por su disposición en la lectura y evaluación de este trabajo, sus comentarios y correcciones fortalecieron la estructura del mismo para presentar de manera óptima los objetivos propuestos.

Le agradezco a toda la comunidad de la Universidad Nacional de Colombia, institución que me ha brindado la posibilidad de cumplir otro objetivo en mi vida, a los docentes del departamento de matemáticas que guiaron mi camino en este proceso, y al Seminario de Sistemas Dinámicos SISDIMUNAL, un espacio en el que la socialización de ideas ayudó con el desarrollo de este trabajo.

Gracias a mi familia; la paciencia y el apoyo han sido fundamentales en cada uno de los objetivos que me he propuesto. A mi hermana, a quien espero motivar para que también consiga sus metas.

A todos, muchas gracias.

Contenido

Resumen	ix
Introducción	x
1. Preliminares	1
1.1. Dinámica discreta	1
1.1.1. Hiperbolicidad	4
1.1.2. Caos	5
1.2. Otros	6
2. Polinomios cuadráticos complejos	9
2.1. Conjunto de Julia	10
2.2. Conjunto de Julia lleno	10
2.3. Ejemplos	11
2.3.1. $P_0(z) = z^2$	11
2.3.2. $P_{-2}(z) = z^2 - 2$	12
2.3.3. $P_5(z) = z^2 + 5$	13
2.4. Órbita crítica	14
2.5. Dicotomía fundamental	15
2.6. Conjunto de Mandelbrot	17
2.6.1. Componente hiperbólica C_1	17
2.6.2. Componente hiperbólica C_2	18
3. Aplicación de Hénon	21
3.1. Conjugación topológica	22
3.2. Puntos fijos de $H_{a,b}$	25
3.2.1. Clasificación de puntos fijos	26
3.3. Conjuntos no-errantes para $H_{a,b}$	31
3.3.1. Localización	31

3.4.	Dinámica de herradura	36
3.4.1.	Herradura de Smale	36
3.4.2.	Dinámica simbólica	39
3.4.3.	Herradura en $h_{a,b}$	42
3.5.	Caos	43
3.5.1.	Atractor de Hénon	44
3.6.	Límites Inversos	45
3.6.1.	Propiedades	48
3.6.2.	Ejemplo	50
3.6.3.	Polinomios reales	52
4.	Generalizaciones de la Aplicación de Hénon	55
4.1.	Aplicación de Hénon compleja	55
4.2.	Aplicaciones polynomial-like	56
4.3.	Aplicaciones Hénon-like	57
4.3.1.	Ejemplos	60
4.4.	Herraduras complejas	63
4.4.1.	Conjuntos invariantes	69
5.	Conclusiones	74
	Bibliografía	74
A.	Función de Ángulo Doble	77

Lista de símbolos

Símbolo	Referencia
1. \mathbb{C}^n	Espacio complejo n –dimensional
2. \mathbb{R}^n	Espacio real n –dimensional
3. $\bar{\mathbb{C}}$	Esfera de Riemann
4. \circ	Operador composición
5. Df	Matriz jacobiana de f
6. $d(x, y)$	Distancia de x a y
7. ∂X	Frontera de X
8. \bar{X}	Clausura de X
9. $\text{int}(X)$	Interior de X
10. $\det(A)$	Determinante de la matriz A
11. $\text{Per}(f)$	Puntos periódicos respecto a f

Lista de Figuras

2.1.	Mapeo de la función H	12
2.2.	Regiones R_1 y R_2 en forma de 8 para $P_5(z)$	13
a.	R_1	13
b.	R_2	13
2.3.	Conjunto K_c para $c = 1$ y $c = -0,8 + 0,2i$	17
2.4.	Componente hiperbólica C_1	18
2.5.	Componente hiperbólica C_2	20
2.6.	Conjunto de Mandelbrot para $P_c(z) = z^2 + c$	20
3.1.	Mapeo de la aplicación de Hénon $H_{a,b}$	22
3.2.	Partición de \mathbb{R}^2	32
3.3.	Representación de $h_{a,b}(M_1)$	33
3.4.	Representación de $h_{a,b}(M_2)$	34
3.5.	Diagrama de la dinámica de $h_{a,b}$	35
3.6.	Función h	36
3.7.	Bandas verticales y horizontales para h	38
3.8.	Bandas verticales y horizontales para h^2	38
3.9.	Localización de Λ para la herradura de Smale	39
3.10.	Atractor de Hénon	45
4.1.	Hénon-like de grado 2.	58
4.2.	Diagrama Campo f -trapping.	65
4.3.	Generalizaciones Complejas	69
4.4.	Generalizaciones Complejas	73

Resumen

En este trabajo de maestría se estudia la dinámica de la aplicación de Hénon propuesta en (Hénon, 1976) así como su generalización a funciones sobre \mathbb{C}^2 planteada en (Hubbard, 1986),(Oberste-Vorth, 2000) y (Oberste-Vorth, 1997). Se introducen conceptos tales como *límites inversos*, *herraduras complejas*, etc. que están involucrados en la relación de estas aplicaciones con la dinámica polinomial estudiada por el autor en (Parra, 2019). Por último, se interpreta la definición y caracterización de Conjuntos de Julia en la dinámica de Hénon dada en (Hubbard, 1994a) y (Hubbard, 1994b).

Palabras clave: Límite inverso, Aplicación de Hénon, Conjuntos de Julia, Polinomios cuadráticos.

Abstract

In this thesis the dynamics of the Hénon mapping, proposed in (Hénon, 1976) is studied as well as its generalization over \mathbb{C}^2 raised in (Hubbard, 1986), (Oberste-Vorth, 2000) and (Oberste-Vorth, 1997). Concepts as *inverse limits*, *complex horseshoes*, etc. are introduced which are involved in the relation between these mappings and the polynomial dynamics studied by the author in (Parra, 2019). Finally, the definition and characterization of the Julia sets in the Hénon dynamic, given in (Hubbard, 1994a) and (Hubbard, 1994b), is interpreted.

Keywords: Inverse limit, Hénon mapping, Julia sets, Quadratic polynomials.

Introducción

La teoría de sistemas dinámicos ha sido de gran importancia en los últimos años gracias a su inherente relación con las matemáticas aplicadas en otros campos como la física, la química y la economía. La investigación en ésta área se ha desarrollado en gran medida a través del uso de técnicas del análisis, la geometría diferencial y métodos numéricos. Sin embargo, algunas herramientas topológicas surgen como alternativa a varios problemas acerca de la relación entre sistemas cuya dinámica es aparentemente equivalente.

Una de éstas herramientas es la relación *topológicamente conjugados*, la cual es una relación entre pares de sistemas dinámicos que permite analizar y estudiar el comportamiento de uno en el otro. Esta relación es un concepto fuerte en el sentido de que determina completamente la dinámica de un sistema respecto a otro cuando ellos son topológicamente conjugados.

Un ejemplo de esto se ve en la dinámica polinomial cuadrática, donde la familia de polinomios $P_c(z) = z^2 + c$, con $z, c \in \mathbb{C}$ es topológicamente conjugada a cualquier polinomio cuadrático de la forma $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ sobre \mathbb{C} , el cual se presentará en el **Capítulo 1**. Este resultado es una extensión para el caso de polinomios cuadráticos sobre \mathbb{R} , y un sistema dinámico discreto estudiado por Benoit Mandelbrot cuyo conjunto de parámetros representativo lleva su nombre.

En (Milnor, 1990), Milnor presentó su estudio sobre este sistema polinomial cuadrático complejo mostrando las propiedades importantes de esta dinámica. Otros trabajos sobre polinomios cuadráticos han surgido, sin embargo el foco de nuestra atención está en la conjugación de la dinámica de polinomios cuadráticos de variable compleja con funciones definidas en \mathbb{C}^2 , y las características que se mantienen.

Por otro lado, la Aplicación de Hénon fue introducida por M. Hénon en (Hénon, 1976), motivado por brindar un ejemplo alterno y más sencillo que el dado por

Lorenz en (Lorenz, 1963) de un sistema dinámico que tiene un atractor extraño. Esta aplicación en el plano viene dada por $H_{a,b}(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$, donde a, b son parámetros reales, y genera el sistema dinámico discreto

$$\begin{cases} x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2 \\ y_{i+1} = bx_i \end{cases}$$

que exhibe aproximadamente el mismo comportamiento como en una sección de Poincaré de la ecuación diferencial de Lorenz.

En (Hubbard, 1986), Hubbard se interesó en la extensión de este sistema a \mathbb{C}^2 , problema que estudió y para el cual logró definir ciertas propiedades similares a las que presenta el sistema sobre \mathbb{R}^2 . Además, encontró una relación natural de su definición de aplicaciones de Hénon complejas y los polinomios cuadráticos.

Esto resultó interesante, ya que como fue mencionado antes, en sistemas dinámicos discretos la relación topológicamente conjugados permite una caracterización de los sistemas en cuestión, y el sistema polinomial había sido estudiado en mayor medida que el de Hénon.

Esta relación no evidente fue estudiada por R. Oberste-Vorth y J. Hubbard en (Oberste-Vorth, 2002), (Hubbard, 1994a) y (Hubbard, 1994b) utilizando la definición categórica de *límite proyectivo* sobre espacios topológicos y homeomorfismos (*límites inversos*), y en donde se ven implicados objetos representantes de la teoría de sistemas dinámicos discretos (Herraduras, dinámica simbólica, etc...) y los conjuntos de Mandelbrot y Julia, estos últimos son ejemplos clásicos de la geometría fractal.

Además, la mayoría del trabajo en aplicaciones de Hénon reales se centró en el estudio de atractores, sin embargo, en el caso complejo los atractores no poseen gran interés ya que los únicos atractores son puntos. De modo que, se abordó la dinámica de estas aplicaciones a través de sus conjuntos invariantes como en el caso polinomial. Por esto nacen las generalizaciones de Conjuntos de Julia polinomiales para aplicaciones en la familia de Hénon.

Así, en los **Capítulos 1** y **2** se presentarán los elementos necesarios de teoría de sistemas dinámicos y polinomios cuadráticos complejos que juegan el papel de preliminares dentro del trabajo y que han sido estudiados en (Parra, 2019). En el **Capítulo 3**, se revisarán algunas propiedades dinámicas de la aplicación de Hénon real y su relación con la dinámica polinomial vía límites inversos. En el **Capítulo 4**,

se generaliza la aplicación de Hénon para poder definir las herraduras complejas, las cuales generalizan la herradura de Smale y son necesarias en la extensión de la relación por límites inversos entre los polinomios cuadráticos y la aplicación de Hénon en variable compleja.

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos, así como los tópicos necesarios de otras áreas para la comprensión de los elementos que se usan en el estudio de las aplicaciones de Hénon. Como referencias de estos se puede ver (Robinson, 1998), (Devaney, 2008), (Mora, 1994) y (Munkres, 2014), también otras referencias que se mencionarán a lo largo del capítulo.

Además, se describe la dinámica polinomial cuadrática ya estudiada en (Parra, 2019) y que es el inicio teórico de este trabajo.

1.1. Dinámica discreta

Definición (Sistema dinámico (Mora, 1994)). Sean X un espacio topológico o variedad diferenciable y $h : X \rightarrow X$ una aplicación. La tripla (X, \mathbb{Z}, h) es a lo que llamaremos un sistema dinámico discreto.

El estudio de la evolución del sistema se hace mediante la iteración de la aplicación h sobre puntos $x \in X$, estas iteraciones conforman las órbitas, que dan una visión global del comportamiento del sistema sobre cada punto $x \in X$.

Definición (Órbita (Devaney, 2018)). La órbita a futuro de $x \in X$ bajo la aplicación h es la sucesión $O^+(x)$ definida por

$$O^+(x) = \{x, h(x), h^2(x), \dots\}$$

La órbita al pasado de $x \in X$ bajo la aplicación invertible h es la sucesión $O^-(x)$ definida por

$$O^-(x) = \{\dots, h^{-2}(x), h^{-1}(x), x\}$$

La órbita de $x \in X$ bajo la aplicación invertible h es la sucesión $O(x)$ definida por

$$O(x) = \{\dots, h^{-2}(x), h^{-1}(x), x, h(x), h^2(x), \dots\}$$

El caso polinomial cuadrático no permite inversa en su aplicación, por lo que llamaremos simplemente órbita a $O^+(x)$.

Definición (Relación de conjugación (Devaney, 1994)). *Dos sistemas asociados a las aplicaciones $h : X \rightarrow X$ y $f : Y \rightarrow Y$ son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $g : X \rightarrow Y$ tal que $g \circ h = f \circ g$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Definición (Conjunto invariante). *Un subconjunto $S \subset X$ se dice que es **positivamente invariante** siempre que $h(x) \in S$ para todo $x \in S$, es decir, $h(S) \subset S$. Un subconjunto $S \subset X$ se dice que es **negativamente invariante** siempre que $h^{-1}(S) \subset S$. Finalmente, un subconjunto $S \subset X$ es **invariante** siempre que $h(S) = S$.*

De igual forma que con la definición de órbita, si no se trabaja sobre sistemas invertibles, llamaremos simplemente conjunto invariante a un subconjunto $S \subset X$ que cumple $h(S) \subset S$.

Definición. *Un conjunto invariante Λ por $h : X \mapsto X$ es un **Atractor** si existe un abierto U que contiene a Λ tal que $h(U) \subset U$ y*

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} h^n(U).$$

Definición. *Sean Λ un conjunto invariante y $x \in \Lambda$, entonces el conjunto*

$$W^s(x) := \{y \in X : \|h^n(x) - h^n(y)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

*es llamado el **conjunto estable** de x . Dado $\epsilon > 0$, entonces el conjunto*

$$W_\epsilon^s(x) := \{y \in X : \|h^n(x) - h^n(y)\| \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

*es llamado el **conjunto estable local** de x . De manera análoga se definen los conjuntos inestable ($W^u(x)$) e inestable local ($W_\epsilon^u(x)$) intercambiando h por h^{-1} cuando h sea invertible.*

Definición (Clasificación de puntos y órbitas para P_c). *Ciertas órbitas son importantes en la dinámica de $P_c = z^2 + c$ con $z, c \in \mathbb{C}$, estas son:*

1. **Órbitas fijas** que son conjuntos unitarios, en cada caso el punto que constituye la órbita recibe el nombre de punto fijo ($P_c(z_0) = z_0$).
2. **Órbitas periódicas** que son las órbitas de puntos periódicos ($P_c^n(z_0) = z_0$). El entero positivo n más pequeño para el que $P_c^n(z_0) = z_0$ se llama el **periodo** de la órbita.
3. **Órbitas preperiódicas o eventualmente periódicas** que no son periódicas pero $P_c^{n+j}(z_0) = P_c^j(z_0)$ para algún $j > 0$.
4. Nótese que el único punto crítico de P_c en \mathbb{C} es 0 ya que $P_c'(0) = 0$, así la **órbita crítica** es la órbita de 0 bajo P_c .

Definición (Tipos de Puntos Fijos). *Supóngase que z_0 es un punto fijo de P_c . Entonces z_0 es:*

1. **Atractor** si $0 < |P_c'(z_0)| < 1$.
2. **Superatractor** si $P_c'(z_0) = 0$.
3. **Repelente** si $|P_c'(z_0)| > 1$.
4. **Neutral** si $|P_c'(z_0)| = 1$.

*El conjunto de todos los puntos cuyas órbitas convergen a z_0 se llama la **cuenca de atracción** de z_0 .*

Teorema 1.1.1. *Si p es un punto fijo del sistema definido por la aplicación $h : X \rightarrow X$ con X variedad diferenciable y $Dh(p)$ existe con autovalores λ_i tales que $|\lambda_i| < 1$ para todo i , entonces p es atractor.*

Para la demostración véase (Kuznetsov, 2013).

1.1.1. Hiperbolicidad

Para una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, el 0 siempre es un punto fijo y luego de algún cambio de coordenadas su matriz tiene alguna de las siguientes formas

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

donde λ y σ son los autovalores de la primera matriz, ρ es el autovalor de multiplicidad algebraica dos de la segunda matriz y $\alpha \pm \beta i$ los autovalores de la tercera matriz.

Definición (Transformación lineal hiperbólica). $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **Hiperbólica** si sus autovalores tienen módulo distinto de 1.

Clasificación de puntos hiperbólicos

Sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal hiperbólica.

- Si los dos autovalores tienen módulo menor que 1, entonces 0 es un punto **atractor**.
- Si los dos autovalores tienen módulo mayor que 1, entonces 0 es un punto **repulsor**.
- Si alguno de los dos autovalores tiene módulo menor que 1 y el otro mayor que 1, entonces 0 es un punto **silla**. En este caso existen dos autoespacios asociados a los autovalores que notados por E^u y E^s para los cuales
 - Si $x \in E^s$, entonces $L^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$
 - Si $x \in E^u$, entonces $L^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow -\infty$

Teoría no lineal de hiperbolicidad

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto no vacío y $h : U \rightarrow U$ una función de clase C^r , $r \geq 0$.

Definición. Si $x \in U$ es punto fijo de h , x se llama **hiperbólico** si $Dh(x)$ es hiperbólica. Análogamente, si x es un punto periódico de periodo n , entonces x es **hiperbólico** si es un punto fijo hiperbólico de h^n .

Clasificación de puntos hiperbólicos

En este caso, un punto periódico hiperbólico de h de periodo n es **atractor**, **repulsor** o **silla** si 0 es respectivamente un punto **atractor**, **repulsor** o **silla** de $Dh^n(x)$.

1.1.2. Caos

Definición. Sea X un espacio métrico y $h : X \rightarrow X$ continua. Se dice que h posee **dependencia sensitiva bajo condiciones iniciales** si existe una constante $\beta > 0$ tal que para cualquier $p \in X$ y cualquier vecindad U de p , existe $n > 0$ y $y \in U$ tal que

$$d(h^n(p), h^n(y)) > \beta.$$

La motivación de esta definición, es que no importa que tan pequeña sea una vecindad que se elija de un punto p en el espacio, se puede encontrar un punto en ella cuyo n -ésimo iterado por h se aleja del de p por al menos β unidades. Como consecuencia, si un sistema dinámico exhibe dependencia sensitiva, los computos numéricos de órbitas con errores en la ubicación del punto inicial z_0 o en el mismo cálculo de la órbita pueden ser desbordados bajo su iteración.

Definición (Transitividad). Sea X un espacio métrico. Una función continua $h : X \rightarrow X$ es **transitiva** si, para cualquier U y V abiertos en X existe $n > 0$ tal que $h^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definición (Transitividad 2). Sea X un espacio métrico. Una función continua $h : X \rightarrow X$ es **transitiva** si existe $x_0 \in X$ tal que $O(x_0)$ es densa en X .

Las dos condiciones anteriores son utilizadas por distintos autores para definir la transitividad topológica de un sistema, en caso de tener un espacio X sin puntos aislados entonces la segunda definición implica la primera. Para la demostración véase (Silverman, 1992).

Definición (Caos 1). Sea $h : X \rightarrow X$ una función continua. Se dice que h es **caótica** en X si satisface:

1. Los puntos periódicos para h son densos en X ,
2. h es transitiva en X ,
3. h exhibe dependencia sensitiva bajo condiciones iniciales,

Teorema 1.1.2. Sea X un espacio métrico. Si $h : X \rightarrow X$ es transitiva y el conjunto de puntos periódicos es denso, entonces h tiene dependencia sensitiva bajo las condiciones iniciales.

Para la demostración véase (Banks et al., 1992).

Este resultado brinda la siguiente definición alternativa para el caos según Robert Devaney.

Definición (Caos 2). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que $F : X \rightarrow X$ es **caótica** si satisface las siguientes condiciones:

1. El conjunto puntos periódicos de h son densos en X .
2. h es transitiva en X .

El hecho que los puntos periódicos para h sean densos en X , no implica la transitividad de la función; en efecto:

Sea T la aplicación identidad, $T : X \rightarrow X$ donde $T(x) = x$. Claramente todos los puntos son periódicos de periodo 1, es decir, todos los puntos son fijos, luego T tiene un conjunto de puntos periódicos denso en X . Sin embargo, no hay ningún punto que tenga órbita densa (lo cual también caracteriza la transitividad de T). En efecto, dado $x \in X$, la órbita de x bajo T es $\{x\}$ y existe U abierto de X tal que $\{x\} \cap U = \emptyset$. Luego la órbita de x no es densa en X , es decir, T no es transitiva.

Observación: El recíproco tampoco es cierto, para este se muestra un contraejemplo en (Abellán Zapata, 2015)

1.2. Otros

Esta sección será una compilación de conceptos y resultados de distintas áreas de las matemáticas que intervendrán en el desarrollo del trabajo.

Definición. Sean X y Y espacios topológicos, la **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología cuya base es la colección \mathcal{B} de todos los conjuntos $U \times V$, donde $U \subset X$ y $V \subset Y$ son abiertos.

Definición. Sean X un espacio topológico con topología τ y $Y \subset X$, la colección

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y , llamada la **topología de subespacio**.

Teorema 1.2.1 (Tychonoff). *Un producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Definición. Sean X y Y espacios topológicos, una función $f : X \rightarrow Y$ es **propia** si las imagenes inversas de subconjuntos compactos son compactas.

El **grado** de una función propia es

$$\deg := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_p f$$

donde $q \in Y$ es regular y, $\operatorname{sgn}_p f = 1$ si f preserva orientación en una vecindad de p o $\operatorname{sgn}_p f = -1$ si f reversa orientación en una vecindad de p .

Definición. Sea E un espacio vectorial, un **cono convexo** es un subconjunto convexo de $C \subset E$ tal que $tx \in C$ para todo $t > 0$ y $x \in C$.

Definición. Un **campo de conos** \mathfrak{C} sobre una variedad diferenciable M es un subconjunto del fibrado tangente TM tal que

$$\mathfrak{C}(x) := T_x M \cap \mathfrak{C}$$

es un cono convexo en el espacio tangente a M en x , $T_x M$ para cada x .

Todas las aplicaciones mencionadas en la siguiente definición son funciones continuas entre espacios topológicos.

Definición. Dados $\pi : E \rightarrow B$, un espacio X , $I = [0, 1]$ y $i : X \rightarrow X \times I$ definida por $i(x) = (x, 0)$, se dice que π tiene la **propiedad de elevación de homotopía** respecto a X , si:

- Para cualquier homotopia $f : X \times I \rightarrow B$, y
- Para cualquier aplicación $\tilde{f}_0 : X \rightarrow E$ tal que $f_0 = f \circ i$ cumple $f_0 = \pi \circ \tilde{f}_0$,

existe una homotopia $\tilde{f} : X \times I \rightarrow E$ tal que $f = \pi \circ \tilde{f}$ y $\tilde{f}_0 = \tilde{f} \circ i$

La definición anterior se describe en el siguiente diagrama, las hipotesis hacen que el cuadrado sea conmutativo, la homotopía \tilde{f} completa la conmutatividad del diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Definición. Una **fibración** es una función continua $\pi : E \rightarrow B$ que satisface la propiedad de elevación de homotopía respecto a cualquier espacio X .

Las **fibras** son los subespacios de E que son imágenes inversas de puntos $b \in B$.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Uniformización). Sea U un subconjunto abierto y simplemente conexo de \mathbb{C} donde $U \neq \mathbb{C}$, entonces U es analíticamente isomorfo a \mathbb{D} . Más precisamente, dado $z_0 \in U$, existe una función analítica $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ inyectiva con $\phi(z_0) = 0$, tal que ϕ es único si $\phi'(z_0) = 0$.

La función ϕ se llama *función uniformizante* y se dice que ϕ brinda una uniformización de U . Más adelante se verá que también se pueden definir uniformizaciones sobre el complemento de U bajo ciertas condiciones.

Este último teorema no es un resultado sencillo, para la demostración véase (Poincaré, 1907).

Polinomios cuadráticos complejos

Como referencias en este capítulo se tendrán (Keen, 1994), (Devaney, 1994), (Devaney et al., 2010), (Parra, 2019) y (Geyer, 2016), que se mencionarán a lo largo del capítulo.

En este caso, el espacio de estados es \mathbb{C} y la aplicación de tiempo 1 está dada por

$$P_c(z) = z^2 + c,$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es fijo. La razón de restringir el estudio a polinomios de esta forma se fundamenta en el siguiente teorema.

Teorema 2.0.1. *Sea $F(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq 0$. Entonces F es topológicamente conjugada a P_c para algún $c \in \mathbb{C}$.*

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{P_c} & \mathbb{C} \end{array}$$

Demostración. Sea $h(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$. Vemos que h es continua, biyectiva y su inversa

$h^{-1}(z) = \frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$ también es continua, es decir, h es un homeomorfismo. Ahora,

$$\begin{aligned} (h \circ F)(z) &= \alpha(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) + \frac{\beta}{2} \\ &= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} \\
&= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \frac{\beta^2}{4} + \left(\alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Tomando $c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
(h \circ F)(z) &= \alpha^2 z^2 + \alpha\beta z + \frac{\beta^2}{4} + c \\
&= \left(\alpha z + \frac{\beta}{2}\right)^2 + c \\
&= P_c\left(\alpha z + \frac{\beta}{2}\right) = P_c(h(z))
\end{aligned}$$

□

2.1. Conjunto de Julia

Definición (Conjunto de Julia de P_c). Se denota por $J(P_c)$ o J_c , y es la clausura del conjunto de puntos periódicos repelentes de P_c .

Definición (Conjunto de Fatou de P_c). Se denota por $F(P_c)$ o F_c , y es el complemento sobre el espacio de estados de J_c .

Una caracterización de los puntos en el conjunto de Fatou puede verse en (Keen, 1994), en el caso polinomial cuadrático podemos considerar que en F_c están los puntos periódicos atractores juntos a su cuenca de atracción, claramente no están órbitas que escapan ni puntos periodicos repelentes.

2.2. Conjunto de Julia lleno

Definición (Conjunto de Julia lleno). El **conjunto de Julia lleno** de P_c , denotado por K_c , es el conjunto de puntos cuyas órbitas son acotadas bajo iteración de P_c .

El conjunto de Julia y el conjunto de Julia lleno están contenidos en el espacio de estados \mathbb{C} .

En (Parra, 2019) se ve que al extender P_c sobre la esfera de Riemann ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$), ∞ siempre es "un punto fijo atractor para P_c ", por lo tanto existe $R > 0$ tal que, si $|z| > R$, entonces $|(P_c^n)(z)| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. Así, como $z \notin J(P_c)$, J_c es acotado, además, la órbita de cualquier punto en J_c también es acotada. Entonces $J_c \subset K_c$.

Sin embargo, hay arbitrarios puntos cercanos a cualquier punto de J_c cuyas órbitas escapan a ∞ . Así, si tenemos un punto cuya órbita es acotada, pero arbitrariamente cercana, se tendrán órbitas de escape, entonces este punto debe estar en J_c . Luego, para polinomios cuadráticos $\partial K_c = J_c$, es decir, J_c es la frontera entre órbitas acotadas y órbitas que escapan. Para la demostración véase (Devaney, 1994), usando el concepto de familias normales de funciones.

La conclusión $\partial K_c = J_c$ es usada entonces por algunos autores como definición del Conjunto de Julia.

2.3. Ejemplos

2.3.1. $P_0(z) = z^2$

Este polinomio es el más simple de las funciones cuadráticas. Nótese que 0 y ∞ son puntos fijos superatractores para esta función. Y también

- a. $|P_0^n(z_0)| \rightarrow 0$ si $|z_0| < 1$.
- b. $|P_0^n(z_0)| \rightarrow \infty$ si $|z_0| > 1$.
- c. $|P_0^n(z_0)| = 1$ si $|z_0| = 1$.

Así, la circunferencia unitaria $\{z : |z| = 1\}$ es la frontera entre órbitas acotadas y órbitas que escapan. Por lo tanto, este es $J(P_0)$.

Las dinámicas en $J(P_0)$ son caóticas pero fáciles de ver. Si se considera la circunferencia unitaria como \mathbb{R}/\mathbb{Z} , de modo que los puntos en la circunferencia son definidos *mod* 1, entonces la órbita de cualquier punto en $J(P_0)$ se obtiene iterando la función $D(\theta) = 2\theta \text{ mod } 1$ que se expone en el **Apéndice A**.

2.3.2. $P_{-2}(z) = z^2 - 2$

Para este polinomio la órbita de 0 es eventualmente fija,

$$\{P_{-2}(0), P_{-2}^2(0), P_{-2}^3(0), P_{-2}^4(0), \dots\} = \{-2, 2, 2, 2, \dots\}$$

Y a pesar de que este polinomio sea aparentemente diferente de P_0 , hay una relación llamativa.

Considere $H(z) = z + \frac{1}{z}$ definida sobre $D = \{z : |z| \geq 1\}$, se puede comprobar fácilmente que H envía el exterior del disco abierto unitario en todo el plano, con la circunferencia unitaria evaluada de forma 2 a 1 (excepto ± 1) en el intervalo $[-2, 2]$. En efecto, H envía rayos rectos desde S^1 en trozos de hipérbolas, como se muestra con la siguiente figura.

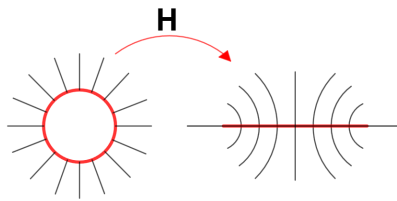


Figura 2.1: Mapeo de la función H .

Además, $P_{-2} \mid_{\mathbb{C} \setminus [-2, 2]}$ y P_0 son topológicamente conjugados en $\mathring{D} = \{z : |z| > 1\}$. En efecto, si $z \in \mathring{D}$, se ve que $H(z^2) = z^2 + \frac{1}{z^2} = (H(z))^2 - 2$ con lo que $H \circ P_0 = P_{-2} \circ H$. Así, si $z_0 \notin [-2, 2]$ entonces $P_{-2}^n(z_0) \rightarrow \infty$. Por otro lado, cualquier punto en $[-2, 2]$ tiene órbita acotada bajo P_{-2} , por lo tanto $K(P_{-2}) = [-2, 2] = J(P_{-2})$.

Aunque la función H no es inyectiva en la circunferencia unitaria, despliega la dinámica de P_0 sobre la circunferencia unitaria en la dinámica de P_{-2} sobre $[-2, 2]$. Y debido a la conjugación H , la dinámica de P_{-2} en las hipérbolas en el exterior de $[-2, 2]$ es precisamente la misma que la dinámica de P_0 en los rayos rectos en el exterior de la circunferencia unitaria.

En los dos ejemplos anteriores, se encontró $J(P_c)$ de forma explícita, siendo estos los únicos polinomios $z^2 + c$ para los cuales esto es posible. Para otros valores de c , se debe recurrir a técnicas numéricas para generar la imagen del conjunto de Julia o del conjunto de Julia lleno.

2.3.3. $P_5(z) = z^2 + 5$

Considere primero la región $R_0 = \{z : |z| \leq 5\}$. El valor crítico $P_5(0) = 5$ está en la frontera de R_0 . La imagen de R_0 es un disco de radio 25 centrado en 5. Por lo tanto R_0 está contenido en el interior de $P_5(R_0)$. Además, la órbita de cada punto en $P_5(R_0) - R_0$ tiende a ∞ y cualquier órbita que tiende a ∞ intersecta este conjunto una vez. Así, para encontrar $K(P_5)$, se buscan aquellos puntos cuyas órbitas tienen valores en $P_5(R_0) - R_0$. El complemento de este conjunto de escape es $K(P_5)$.

Sea $R_1 = \{z : P_5(z) \in R_0\}$, luego $0 \in R_1$ y 0 es la única preimagen de 5 contenida en R_0 . Todos los otros puntos en R_0 tienen exactamente dos preimágenes en R_1 . Como consecuencia, la región R_1 es una figura en forma de 8 con su interior, como se muestra en la **Figura 2.2**, los lóbulos del 8 se llaman I_0 e I_1 .

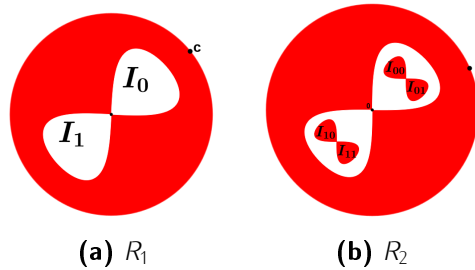


Figura 2.2: Regiones R_1 y R_2 en forma de 8 para $P_5(z)$.

Cada lóbulo es evaluado de forma inyectiva en R_0 y la región complementaria $R_0 - R_1$ es evaluada en $P_5(R_0) - R_0$, entonces cada punto fuera de R_1 tiene una órbita que diverge.

Ahora, como cada lóbulo de R_1 es enviado inyectivamente en R_0 , hay dos subconjuntos de R_1 (uno en cada lóbulo) que son homeomorfos a R_1 . Sea R_2 la unión de esos conjuntos, luego R_2 consiste de un par de ochos, I_{00} e I_{01} en I_0 ; I_{10} e I_{11} en I_1 . Entonces R_2 está en el interior de R_1 y $P_5^2 : R_2 \rightarrow R_1$.

Continuando inductivamente, $R_{n+1} = P_5^{-1}(R_n)$, donde R_{n+1} está en el interior de R_n y R_{n+1} consta exactamente de 2^n componentes, cada una homeomorfa a un ocho con su interior.

Por lo tanto, $K(P_5)$ es la intersección de los R_n y así $K(P_5)$ consta de infinitas componentes.

Teorema 2.3.1. *Toda sucesión de lóbulos de R_n se anidan en un solo punto a medida que $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Tomemos la sucesión de lóbulos de R_n determinada por $l_0, l_{00}, l_{000}, \dots$, las otras sucesiones tienen el mismo análisis. Denotemos a l_0 como l_0^1 , a l_{00} como l_0^2 , a l_{000} como l_0^3 , entonces se tiene que $l_0^N \subset \text{int}(l_0^{N-1})$ para todo número natural N . Pero además, $\text{int}A \subset A$ para todo conjunto, luego

$$l_0^N \subset l_0^{N-1}$$

Por lo tanto, la sucesión tiende a l_0^N la cual llega a ser un solo punto si $N \rightarrow \infty$. □

2.4. Órbita crítica

La órbita de un punto crítico es fundamental en el estudio de dinámicas complejas, y se tienen varios ejemplos de ello. Más adelante se demostrará que el conjunto de Julia de $P_5(z)$ es un conjunto de Cantor (**Teorema 2.4.1**), pero en el enunciado del teorema no hay nada especial acerca del valor $c = 5$ en el argumento, lo especial de este polinomio es que la órbita de 0 diverge. Con lo que para cualquier polinomio cuadrático se dan hechos similares.

Además, la convergencia de la órbita crítica caracteriza en un sentido topológico la estructura del conjunto de órbitas acotadas, que es como se definió a $K(P_c)$.

Definición (Conjunto de Cantor). *Un conjunto \mathcal{C} se dice que es de Cantor si es cerrado, totalmente desconexo y perfecto.*

Teorema 2.4.1 (La dicotomía fundamental). *Si la órbita de cero no escapa bajo iteración de P_c , es decir $0 \in K_c$, entonces K_c es conexo. Si $0 \notin K_c$, entonces K_c es un conjunto de Cantor.*

La demostración del teorema se presenta en la siguiente sección.

La importancia de este, es que nos da una caracterización del conjunto de Julia lleno, que puede ser o conexo o totalmente desconexo dependiendo de la convergencia de la órbita crítica.

Con el fin de ver el rol de la órbita crítica, se considera una órbita crítica eventualmente periódica, es decir, la órbita de 0 está en un ciclo después de algún número de iteraciones, pero 0 no es periódico. En este caso, no pueden existir ciclos de atracción o neutrales para P_c , así el conjunto de Fatou F_c es vacío y se tiene que $K(P_c) = J(P_c)$. Recuerde que este fue el caso en el ejemplo de P_{-2} , la órbita de 0 es eventualmente fija y $K(P_c) = J(P_c) = [-2, 2]$ en el eje real.

2.5. Dicotomía fundamental

Una herramienta útil en el estudio de los polinomios cuadráticos complejos es la visualización de la dinámica sobre la esfera de Riemann,

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

esto ya fue estudiado por el autor en (Parra, 2019), donde también se muestra que ∞ es un punto fijo superatractor bajo P_c .

Teorema 2.5.1. *Sean f una función analítica compleja y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto fijo super-atractor, entonces f es localmente conjugada en una vecindad U de z_0 a $z \mapsto z^n$ para algún $n \geq 2$.*

Para la demostración véase (Geyer, 2016). En este caso, el punto fijo superatractor es ∞ y $f = P_c$ tiene grado 2, luego la función es conjugada a $P_0(z) = z^2$ cerca a ∞ , específicamente

$$V_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

para $r > 1$. Y se tiene:

Teorema 2.5.2. (Teorema de Böttcher) *Sea $c \in \mathbb{C}$, entonces existe una vecindad U_c de ∞ en $\overline{\mathbb{C}}$, $r > 1$, y un isomorfismo lineal $\phi_c : U_c \rightarrow V_r$ tal que*

$$\phi_c(P_c(z)) = (\phi_c(z))^2; \forall z \in U_c$$

Para la demostración véase (Devaney, 1994) y el isomorfismo existente es la **Coordenada de Böttcher** definida por

$$\phi_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_c^n(z))^{1/2^n}$$

$$\begin{array}{ccc} U_c \subset \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{P_c} & U_c \subset \overline{\mathbb{C}} \\ \phi_c \downarrow & & \downarrow \phi_c \\ V_r & \xrightarrow{P_0} & V_r \end{array}$$

Además, se puede extender ϕ_c a todo el exterior de K_c y de esta forma:

Teorema 2.5.3. *Si la órbita de 0 es acotada bajo P_c ($c \in K_c$), entonces*

$$\phi_c : \overline{\mathbb{C}} - K(P_c) \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} - \{z : |z| \leq 1\}$$

es una uniformización.

Para la demostración véase el procedimiento para extender ϕ_c en (Devaney, 1994). Todo esto permite demostrar el **Teorema 2.4.1**:

Demostración. Si $0 \in K_c$, se tiene que para cada n , $P_c^{-n}(U)$ es un disco cerrado en la esfera de Riemann. Por lo tanto, su complemento es un subconjunto abierto, simplemente conexo de $\overline{\mathbb{C}}$. La clausura de estos subconjuntos se anidan cuando n aumenta y por eso su intersección es un conjunto cerrado y conexo. Claramente, esta intersección es K_c .

La demostración de que K_c es totalmente desconexo si $0 \notin K(P_c)$ se puede ver en (Devaney et al., 2010). \square

La dicotomía fundamental es un resultado maravilloso, nos dice que para polinomios cuadráticos existen solo dos tipos de conjuntos de Julia lleno: los que son conexos y los que son totalmente desconexos. Por lo que no hay conjuntos de Julia de 2, 10 o 120 partes disjuntas. Es más, todo esto caracterizado por la órbita crítica.

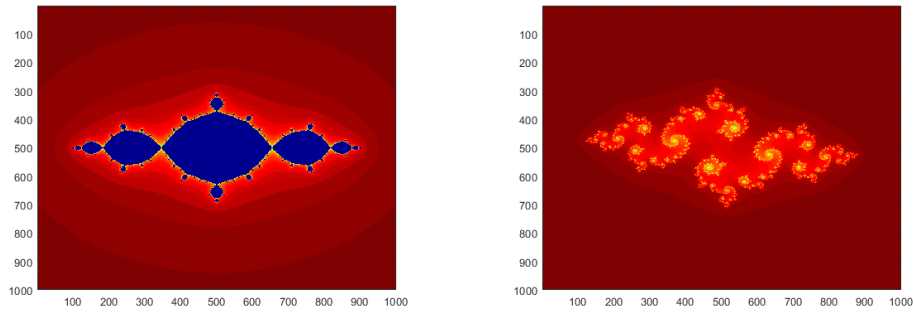


Figura 2.3: Conjunto K_c para $c = 1$ y $c = -0,8 + 0,2i$

2.6. Conjunto de Mandelbrot

Definición (Conjunto de Mandelbrot M). Dado un natural $d \geq 2$ y $P_c(z) = z^d + c$, el Conjunto de Mandelbrot generalizado está definido como

$$M_d := \{c \in \mathbb{C} : \{P_c^n(0)\}_{n=1}^{\infty} \text{ está acotada}\}$$

en el espacio de parámetros \mathbb{C} .

Se tiene cuenta que el trabajo está centrado sobre $d = 2$, es decir, $M_2 = M$. Pero las definiciones siguientes pueden extenderse.

Si P_c tiene una órbita periódica atractora de periodo n , entonces existe una vecindad U de c en \mathbb{C} para la cual, si $c' \in U$, entonces $P_{c'}$ también tiene una órbita periódica atractora de periodo n que es cercana a la de P_c . Así los puntos c de este tipo están en $\text{Int}(M)$

Definición (Componentes hiperbólicas). Algunas componentes de $\text{int}(M)$ consisten de los valores de c para los que P_c tiene una órbita periódica atractora de algún periodo. Estas se llaman **Componentes hiperbólicas**.

Se nota por C_n a la componente hiperbólica donde P_c tiene una órbita periódica atractora de período n .

2.6.1. Componente hiperbólica C_1

La componente hiperbólica C_1 donde P_c tiene un punto fijo atractor es la gran región en forma de cardioide en M . Esta región está determinada por la solución

simultánea de las ecuaciones

$$P_c(z) = z^2 + c = z$$

$$|P'_c(z)| = |2z| < 1$$

Si $|2z| = 1$, se tiene que $z = e^{i\theta}/2$ y $c = z - z^2 = \frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4}$, por lo tanto la región está acotada por la curva

$$c = \zeta(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4}$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$. Con lo que, para valores de c en esta curva, P_c tiene un punto fijo neutral z , y si $c = \zeta(\theta)$, la derivada de P_c en el punto fijo es $e^{i\theta}$.

Por lo tanto, la derivada gira alrededor de la circunferencia unitaria mientras c atraviesa la frontera del cardioide.

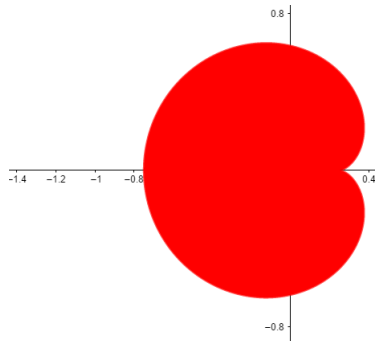


Figura 2.4: Componente hiperbólica C_1

2.6.2. Componente hiperbólica C_2

La componente hiperbólica C_2 donde P_c tiene una órbita periódica atractora de periodo 2 es la región determinada por la solución simultánea de las ecuaciones

$$P_c^2(z) = z$$

$$|(P_c^2)'_c(z)| < 1$$

Solución:

$$P_c^2(z) = P_c(P_c(z)) = P_c(z^2 + c) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2z^2c + c^2 + c.$$

Si $P_c^2(z) = z$ entonces

$$z^4 + 2z^2c + c^2 + c - z = 0,$$

que se puede ver como un polinomio cuadrático con variable c , así:

$$c^2 + (2z^2 + 1)c + z^4 - z = 0.$$

Se hallan las raíces de este polinomio, obteniendo

$$c_1 = z - z^2 \quad c_2 = -z^2 - z - 1.$$

La primer solución son los valores de c en la región C_1 (las órbitas de período uno, también son de período 2) acotada por un cardioide, como ya se demostró anteriormente. Por esto se toma en cuenta la segunda solución.

Ahora, si $|(P_c^2)'(z)| = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} (P_c^2)'(z) &= 4z^3 + 4zc = e^{i\theta} \\ 4z(z^2 + c) &= e^{i\theta} \\ 4z(z^2 + (-z^2 - z - 1)) &= e^{i\theta} \\ 4z(-z - 1) &= e^{i\theta} \\ 4(-z^2 - z) &= e^{i\theta} \\ 4(c + 1) &= e^{i\theta} \\ c + 1 &= \frac{e^{i\theta}}{4} \end{aligned}$$

Entonces C_2 está acotada por la circunferencia $|c + 1| = \frac{1}{4}$, las fronteras de C_1 y C_2 se intersectan en un único punto, $c = -\frac{3}{4}$. Como c pasa de C_1 a C_2 a través de este punto, se dice que la familia de funciones P_c presenta una **bifurcación** que duplica el período.

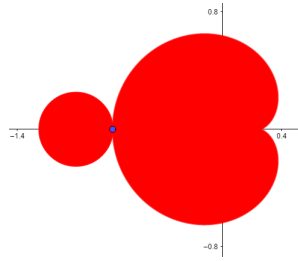


Figura 2.5: Componente hiperbólica C_2 .

En general, la familia experimenta una bifurcación de periodo q cuando el parámetro c atraviesa la frontera de C_1 , en un punto donde la derivada de P_c en el punto fijo neutral es de la forma $\exp(2\pi i \frac{p}{q})$. Y para este punto, existe una componente hiperbólica unida a C_1 la cual tiene una órbita periódica atractora de período q . El punto de unión de dos componentes hiperbólicas contiguas se llama un **punto raíz**. El período de cada componente es múltiplo del período de la componente a la que está unida.

La construcción analítica del conjunto de Mandelbrot se realiza a partir de solucionar sistemas de ecuaciones como los anteriores.

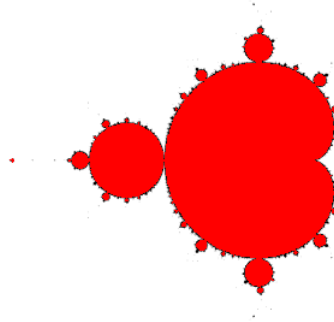


Figura 2.6: Conjunto de Mandelbrot para $P_c(z) = z^2 + c$.

Aplicación de Hénon

Como referencias en este capítulo se tendrán (Devaney, 2008), (Oberste-Vorth, 2002), (Benedicks, 1991) y (Mora, 1994), que se mencionarán a lo largo del capítulo. De igual forma que con la dinámica polinomial compleja, en este capítulo se presentará este sistema dinámico discreto real con el fin de estudiar sus propiedades dinámicas.

Definición. Sea $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$H_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Entonces la familia de todas aplicaciones $H_{a,b}$ para parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ es se llama **Aplicación de Hénon**.

Siguiendo la definición de sistema discreto dada en el **Capítulo 1**, donde se plantea la estructura (X, T, h) , en el caso de la aplicación de Hénon esta estructura se compone de

$$X = \mathbb{R}^2 \quad T = \mathbb{R}^+ \quad h = H_{a,b}$$

Los parámetros a, b de las funciones $H_{a,b}$ generalmente se consideran distintos de cero, esto debido a que

1. Si $a = 0$, tenemos una dinámica lineal poco interesante. Repelente en el eje x y atractora o expansiva en el eje y dependiendo de $|b|$.
2. Si $b = 0$, la dinámica colapsa todo el plano en el eje x por lo cual no es invertible y en el eje x esa dinámica es conjugada al sistema definido por

$$f_a(x) = 1 - ax^2,$$

luego de aquí en adelante, $a, b \neq 0$ a menos que se indique para realizar alguna observación.

La definición de $H_{a,b}$ es la composición de 3 transformaciones actuando sobre el plano

$$H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - ax^2 + y \end{pmatrix}$$

$$H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ y \end{pmatrix}$$

$$H_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Así, $H_{a,b} = H_3 \circ H_2 \circ H_1$.

Apreciación visual de $H_{a,b}$

Considere la elipse $\Gamma(t) = (\alpha \cos(t), \beta \sin(t))$ centrada en $(0, 0)$.

1. $H_1(\Gamma(t)) = (\alpha \cos(t), 1 - a\alpha^2 \cos^2(t) + \beta \sin(t))$
2. $H_2(H_1(\Gamma(t))) = (b\alpha \cos(t), 1 - a\alpha^2 \cos^2(t) + \beta \sin(t))$
3. $H_3(H_2(H_1(\Gamma(t)))) = (1 - a\alpha^2 \cos^2(t) + \beta \sin(t), b\alpha \cos(t))$

Resulta transformada en parábolas con vértice sobre el eje x en una vecindad de $(1, 0)$ abriendo a la izquierda (si $a > 1$).

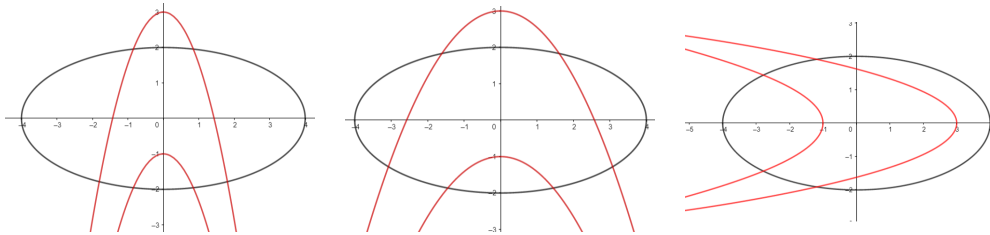


Figura 3.1: Mapeo de la aplicación de Hénon $H_{a,b}$.

3.1. Conjugación topológica

Como se apreció en el caso de polinomios cuadráticos, en algunas situaciones resulta útil asociar el sistema con otro vía la relación *topológicamente conjugados*.

Note que las funciones

$$\Phi(x, y) = (ax, \frac{a}{b}y) \text{ y } \Psi(x, y) = (-by, -bx)$$

son homeomorfismos para $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos.

Teorema 3.1.1. Sean $h_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}$ y $\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ \frac{a}{b}y \end{pmatrix}$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H_{a,b}} & \mathbb{R}^2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_{a,b}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} h_{a,b} \circ \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= h_{a,b} \begin{pmatrix} ax \\ \frac{a}{b}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - a^2x^2 + ay \\ ax \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} \\ &= \phi \circ H_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2. Sean $f_a(x) = 1 - ax^2$ y $\Pi_1(x, y) = x$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \{0\} & \xrightarrow{H_{a,0}} & \mathbb{R} \times \{0\} \\ \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \Pi_1 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f_a} & \mathbb{R} \end{array}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_a \circ \Pi_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= f_a(x) \\ &= 1 - ax^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pi_1 \begin{pmatrix} 1 - ax^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \Pi_1 \circ H_{a,0} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.3. Si $|b| > 1$, entonces $h_{a,b}^{-1}$ es topologicamente conjugado a $h_{\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b}}$

Demostración. Observe que

$$h_{a,b}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{b}(y^2 + x - a) \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{aligned}
h_{a,b}^{-1} \circ \Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= h_{a,b}^{-1} \begin{pmatrix} -by \\ -bx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -bx \\ \frac{1}{b}(b^2x^2 - by - a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -bx \\ bx^2 - y - \frac{a}{b} \end{pmatrix} \\
&= \Psi \begin{pmatrix} -x^2 + \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2} \\ x \end{pmatrix} \\
&= \Psi \circ h_{\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de los teoremas anteriores, $H_{a,b}$ es conjugada de $h_{a,b}$ y además es posible restringir los parámetros al conjunto $\{(a, b) : |b| \leq 1\}$. Además, adelante se usará $h_{a,b}$ para localizar los conjuntos no errantes de la dinámica de la aplicación de Hénon.

3.2. Puntos fijos de $H_{a,b}$

La matriz jacobiana de $H_{a,b}$ viene dada por:

$$DH_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y+1-ax^2) & \frac{\partial}{\partial y}(y+1-ax^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(bx) & \frac{\partial}{\partial y}(bx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

luego, $\det(DH_{a,b}) = -b$ y $\text{tr}(\det(DH_{a,b})) = -2ax$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los autovalores de $DH_{a,b}$ son las soluciones del polinomio

$$\lambda^2 + 2ax\lambda - b = 0$$

es decir,

$$\lambda = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$$

De manera que,

- Si $a^2x^2 + b \geq 0 \Rightarrow \lambda$ es real.
- Si $a^2x^2 + b < 0 \Rightarrow \lambda$ es complejo.

Ahora, los puntos fijos de la aplicación de Hénon son los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$H_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solucionando el sistema

$$\begin{cases} y + 1 - ax^2 = x \\ bx = y \end{cases}$$

se tiene que

$$x = \frac{b - 1 \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}$$

$$y = b \frac{b - 1 \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}$$

y como $x \in \mathbb{R}$, entonces el sistema tiene puntos fijos si $(1 - b)^2 + 4a \geq 0$, y en ese caso son:

$$p = \begin{pmatrix} \frac{b - 1 + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a} \\ b \frac{b - 1 + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \\ b \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Observación: Como $\det(DH_{a,b})$ determina si la aplicación de Hénon contrae o expande áreas, o ninguna, interesa el caso de la contracción (de lo contrario la dinámica tiende a infinito), por lo cual se considera $0 < b < 1$.

3.2.1. Clasificación de puntos fijos

Ya se vio que si $(1-b)^2 + 4a < 0$ el sistema no tiene puntos fijos, así que para $(1-b)^2 + 4a \geq 0$ nos interesa conocer qué tipo de puntos fijos tiene el sistema.

Caso $(1-b)^2 + 4a = 0$.

En este caso el sistema solo tiene el punto fijo

$$p = \begin{pmatrix} \frac{b-1}{2a} \\ b \frac{b-1}{2a} \end{pmatrix}$$

para el cual

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -a \left(\frac{b-1}{2a} \right) + \sqrt{a^2 \left(\frac{b-1}{2a} \right)^2 + b} \\ &= \frac{1-b}{2} + \sqrt{\frac{(b-1)^2}{4} + b} \\ &= \frac{1-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 - 2b + 1}{4} + \frac{4b}{4}} \\ &= \frac{1-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 1}{4}} \\ &= \frac{1-b}{2} + \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} \\ &= \frac{1-b}{2} + \frac{b+1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= -a \left(\frac{b-1}{2a} \right) - \sqrt{a^2 \left(\frac{b-1}{2a} \right)^2 + b} \\
&= \frac{1-b}{2} - \sqrt{\frac{(b-1)^2}{4} + b} \\
&= \frac{1-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2 - 2b + 1}{4} + \frac{4b}{4}} \\
&= \frac{1-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2 + 2b + 1}{4}} \\
&= \frac{1-b}{2} - \sqrt{\frac{(b+1)^2}{4}} \\
&= \frac{1-b}{2} - \frac{b+1}{2} \\
&= -b
\end{aligned}$$

Luego $|\lambda_1| = 1$ y $|\lambda_2| = |b| < 1$, entonces p es punto silla-nodo. ($b = 1$ genera que $a = 0$ que es un valor de parámetro no considerado).

Caso $a \in \left(-\frac{(1-b)^2}{4}, \frac{3(1-b)^2}{4} \right)$.

En este caso, se mostrará que p es punto atractor y q es punto de silla.

Recuerde que

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \\
q_1 &= \frac{b-1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}
\end{aligned}$$

donde $0 < b < 1$ entonces

$$\begin{aligned}
-ap_1 + \sqrt{a^2 p_1^2 + b} &> -ap_1 + \sqrt{a^2 p_1^2} \\
&= -ap_1 + |ap_1| \\
&> 0
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
2ap_1 &= b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \\
2ap_1 &> b-1
\end{aligned}$$

$$1 + 2ap_1 > b$$

Luego

$$(ap_1 + 1)^2 = a^2p_1^2 + 2ap_1 + 1 > a^2p_1^2 + b > 0$$

así que $ap_1 + 1 > \sqrt{a^2p_1^2 + b}$ y de este modo $1 > -ap_1 + \sqrt{a^2p_1^2 + b}$, es decir,

$$0 \leq -ap_1 + \sqrt{a^2p_1^2 + b} < 1 \Rightarrow |\lambda_1| < 1.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} -ap_1 - \sqrt{a^2p_1^2 + b} &< -ap_1 - \sqrt{a^2p_1^2} \\ &= -ap_1 - |ap_1| \\ &< 0 \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} 2ap_1 &= b - 1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \\ &< b - 1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4 \cdot \frac{3(1-b)^2}{4}} \\ &= b - 1 + 2(1-b) \\ &= 1 - b \\ b &< 1 - 2ap_1 \end{aligned}$$

Luego,

$$(1 - ap_1)^2 = 1 - 2ap_1 + a^2p_1^2 > a^2p_1^2 + b > 0$$

así que $1 - ap_1 > \sqrt{a^2p_1^2 + b}$ y de este modo $1 > ap_1 + \sqrt{a^2p_1^2 + b}$, es decir,

$$-1 < -ap_1 - \sqrt{a^2p_1^2 + b} < 0 \Rightarrow |\lambda_2| < 1.$$

Con esto queda demostrado que p es atractor.

Ahora,

$$\begin{aligned} 2aq_1 &= b - 1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \\ &< b - 1 \\ 1 + 2aq_1 &< b \end{aligned}$$

Luego

$$(aq_1 + 1)^2 = a^2q_1^2 + 2aq_1 + 1 < a^2q_1^2 + b$$

así que $aq_1 + 1 < \sqrt{a^2q_1^2 + b}$ y de este modo $1 < -aq_1 + \sqrt{a^2q_1^2 + b}$, es decir,

$$|\lambda_1| > 1.$$

Por otro lado,

$$0 < 2(1 - b) + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}$$

$$0 < 2 - 2b + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}$$

$$b < 1 - b + 1 + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}$$

$$b < 1 - (b - 1 - \sqrt{(1 - b)^2 + 4a})$$

$$b < 1 - 2aq_1$$

Luego

$$(1 - aq_1)^2 = a^2q_1^2 - 2aq_1 + 1 > a^2q_1^2 + b > 0$$

así que $1 - aq_1 > \sqrt{a^2q_1^2 + b}$ y de este modo $aq_1 + \sqrt{a^2q_1^2 + b} < 1$, es decir, $-1 < -aq_1 - \sqrt{a^2q_1^2 + b}$.

Además

$$\begin{aligned} -aq_1 - \sqrt{a^2q_1^2 + b} &< -aq_1 + \sqrt{a^2q_1^2} \\ &= -aq_1 - |aq_1| \\ &< 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $-1 < -aq_1 - \sqrt{a^2q_1^2 + b} < 0$, es decir

$$|\lambda_2| < 1$$

De modo que q es un punto de silla. De hecho, note que la condición $a < \frac{3(1-b)^2}{4}$ no es necesaria para la caracterización de q , esto es porque q es punto de silla para todo $a > -\frac{(1-b)^2}{4}$.

Caso $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$.

En este caso, el análisis sigue sobre p debido a la observación anterior.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} \\
 &= \frac{b-1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)}}{2\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)} \\
 &= 2 \frac{b-1 + \sqrt{4(1-b)^2}}{3(1-b)^2} \\
 &= 2 \frac{b-1 + 2(1-b)}{3(1-b)^2} \\
 &= 2 \frac{1-b}{3(1-b)^2} \\
 &= \frac{2}{3(1-b)}
 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -ap_1 + \sqrt{a^2 p_1^2 + b} \\
 &= -\frac{3(1-b)^2}{4} p_1 + \sqrt{\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)^2 p_1^2 + b} \\
 &= -\frac{3(1-b)^2}{4} \frac{2}{3(1-b)} + \sqrt{\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)^2 \left(\frac{2}{3(1-b)}\right)^2 + b} \\
 &= -\frac{1}{2}(1-b) + \frac{1}{2}(1+b) \\
 &= b
 \end{aligned}$$

Luego $|\lambda_1| < 1$. Y por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= -ap_1 - \sqrt{a^2 p_1^2 + b} \\
 &= -\frac{3(1-b)^2}{4} p_1 - \sqrt{\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)^2 p_1^2 + b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3(1-b)^2}{4} \frac{2}{3(1-b)} - \sqrt{\left(\frac{3(1-b)^2}{4}\right)^2 \left(\frac{2}{3(1-b)}\right)^2 + b} \\
&= -\frac{1}{2}(1-b) - \frac{1}{2}(1+b) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Es decir, p no es hiperbólico y los valores de λ_1 y λ_2 lo caracterizan como un *punto de bifurcación flip* (el punto fijo atractor se convierte en un punto periódico atractor de periodo 2). Luego si $\frac{3(1-b)^2}{4} < a$, el sistema tiene dos puntos periódicos atractores de periodo 2.

3.3. Conjuntos no-errantes para $H_{a,b}$

En esta sección se trabajará con la aplicación $h_{a,b}$ para la cual ya se demostró que su dinámica es equivalente a $H_{a,b}$.

Definición. Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es no-errante si para cualquier vecindad U_p de p existe $n \geq 0$ tal que $h_{a,b}^n(U_p) \cap U_p \neq \emptyset$. Se denota el conjunto de puntos no-errantes de $h_{a,b}$ como $\Omega(h_{a,b})$.

Sobre $\Omega(h_{a,b})$ se puede decir que es cerrado, invariante y contiene el conjunto de puntos periódicos del sistema.

3.3.1. Localización

La no existencia de puntos fijos para una aplicación f , no implica que $\Omega(f) = \emptyset$, sin embargo en el caso de la aplicación de Hénon se tiene:

Caso $(1-b)^2 + 4a < 0$, $-1 < b < 0$.

Considere la siguiente partición de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x, y) : x \leq -|y|\} \\
M_2 &= \{(x, y) : x \geq -|y|, y \leq 0\} \\
M_3 &= \{(x, y) : x \geq -|y|, y \geq 0\}
\end{aligned}$$

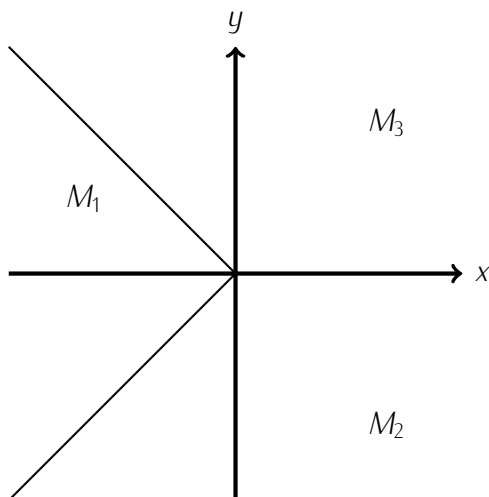


Figura 3.2: Partición de \mathbb{R}^2 .

- La frontera de M_1 y su imagen bajo $h_{a,b}$ son

$$\partial M_1 = \{(x, x) : x \leq 0\} \cup \{(x, -x) : x \leq 0\}$$

$$h_{a,b}(\partial M_1) = \{(a - x^2 + bx, x) : x \leq 0\} \cup \{(a - x^2 - bx, x) : x \leq 0\}$$

además,

$$x \leq -x$$

$$bx > -bx$$

$$a - x^2 + bx > a - x^2 - bx$$

donde $a - x^2 + bx$ es un polinomio sin raíces reales, luego $\{(a - x^2 + bx, x) : x \leq 0\}$ asemeja una sección de parábola que abre hacia la izquierda, luego

$$a - x^2 - bx < a - x^2 + bx < 0$$

Ahora, como $a < -\frac{(1-b)^2}{4}$ entonces

$$0 < \left(\frac{1-b}{2} + x\right)^2$$

$$0 < \frac{(1-b)^2}{4} + x^2 + (1-b)x$$

$$0 < x + \frac{(1-b)^2}{4} + x^2 - bx$$

$$\begin{aligned} -\frac{(1-b)^2}{4} - x^2 + bx &< x \\ a - x^2 + bx &< x \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a - x^2 - bx < a - x^2 + bx < x$$

Y, como $x \leq 0$, se tiene entonces que

$$h_{a,b}(M_1) \subset M_1$$

tal que, si $x_1 = \Pi_1 \circ h_{a,b}(x, y)$ entonces $x_1 < x$.

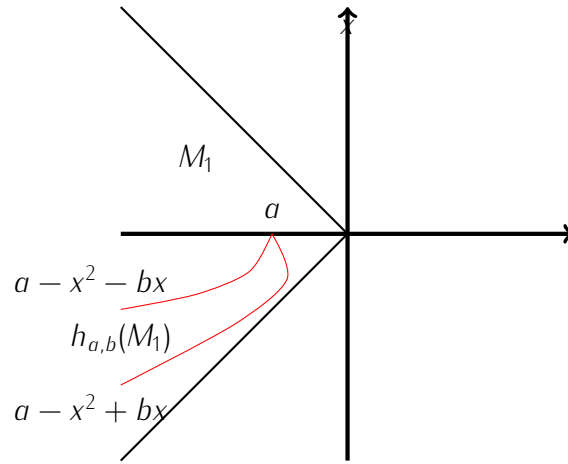


Figura 3.3: Representación de $h_{a,b}(M_1)$.

- La frontera de M_2 y su imagen bajo $h_{a,b}$ son

$$\partial M_2 = \{(x, 0) : x \geq 0\} \cup \{(x, x) : x \leq 0\}$$

$$h_{a,b}(\partial M_2) = \{(a - x^2, x) : x \geq 0\} \cup \{(a - x^2 + bx, x) : x \leq 0\}$$

Del ítem anterior se sabe que $a - x^2 + bx < x$ y además, si $x \geq 0$ entonces $bx \leq 0$ y se tiene

$$\begin{aligned} bx &< \left(x + \frac{b-1}{2}\right)^2 \\ bx &< x^2 + (b-1)x + \frac{(b-1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 bx &< x^2 + bx - x + \frac{(b-1)^2}{4} \\
 0 &< x^2 - x + \frac{(b-1)^2}{4} \\
 -\frac{(b-1)^2}{4} - x^2 &< -x \\
 a - x^2 &< -x
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$h_{a,b}(M_2) \subset \text{int}(M_1).$$

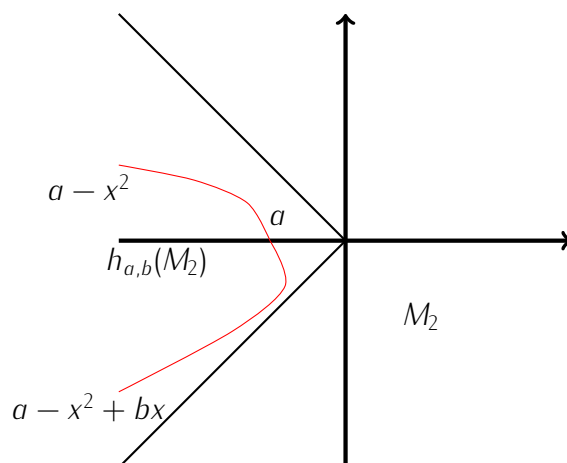


Figura 3.4: Representación de $h_{a,b}(M_2)$.

- La frontera de M_3 y su imagen bajo $h_{a,b}^{-1}$ son

$$\partial M_3 = \{(x, 0) : x \geq 0\} \cup \{(x, -x) : x \leq 0\}$$

$$h_{a,b}^{-1}(\partial M_3) = \left\{ \left(0, \frac{x-a}{b} \right) : x \geq 0 \right\} \cup \left\{ \left(-x, \frac{x^2+x-a}{b} \right) : x \leq 0 \right\}$$

En el segundo conjunto, como $x \leq 0$ entonces $h_{a,b}^{-1}(\partial M_3)$ está contenido en el semiplano $x \geq 0$.

Además, $\frac{x-a}{b} > 0$ luego el primer conjunto que compone $h_{a,b}^{-1}(\partial M_3)$ está contenido en $\text{int}(M_3)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 0 &< \left(\frac{1-b}{2} + x \right)^2 \\
 0 &< x^2 + \frac{(1-b)^2}{4} + (1-b)x \\
 0 &< +x^2 + \frac{(1-b)^2}{4} + x - bx \\
 bx &< x^2 + x + \frac{(1-b)^2}{4} \\
 bx &< x^2 + x - a \\
 x &< \frac{x^2 + x - a}{b}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$h_{a,b}^{-1}(\partial M_3) \subset \text{int}(M_3)$$

Análogamente

$$h_{a,b}^{-1}(\partial M_2) \subset \text{int}(M_3)$$

Es decir,

$$h_{a,b}^{-1}(M_2 \cup M_3) \subset \text{int}(M_3)$$

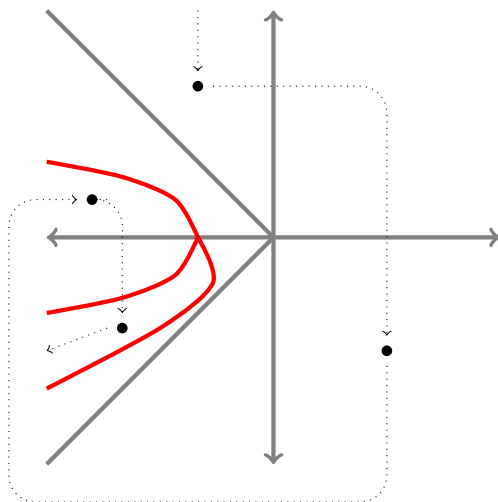


Figura 3.5: Diagrama de la dinámica de $h_{a,b}$.

Caso $(1 - b)^2 + 4a < 0$, $0 < b < 1$.

Véase (Mora, 1994).

Caso $(1 - b)^2 + 4a \geq 0$.

En este caso $\Omega(h_{a,b}) \neq \emptyset$ por la existencia de puntos fijos.

Teorema 3.3.1. *Caracterización del conjunto no-errante:*

a. Si $(1 - b)^2 + 4a < 0$, entonces $|H_{a,b}^n(x, y)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

b. Si $(1 - b)^2 + 4a \geq 0$, entonces $d(H_{a,b}^n(x, y), \Omega(H_{a,b})) \rightarrow 0$ ó $|H_{a,b}^n(x, y)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para la demostración y descripción del conjunto $\Omega(H_{a,b})$ en el caso $(1 - b)^2 + 4a \geq 0$ véase (Mora, 1994).

3.4. Dinámica de herradura

El objetivo ahora es estudiar la dinámica en conjuntos no-errantes, el concepto de *conjunto invariante tipo herradura* será la herramienta para este estudio.

3.4.1. Herradura de Smale

Sean $M \subset \mathbb{R}^2$ región abierta y $h : M \mapsto M$ un homeomorfismo. Suponga que

$$S = \{(x, y) : |x|, |y| < R\} \subset M$$

donde $R \in \mathbb{R}^+$. Considere que $h|_S$ se comporta como

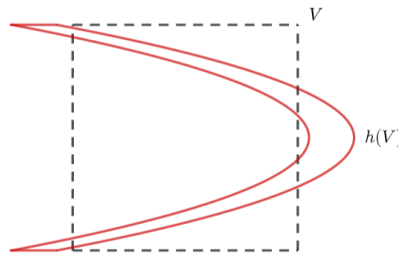


Figura 3.6: Función h .

Geoméricamente, h comprime verticalmente el cuadrado, lo expande horizontalmente y lo dobla por la mitad. ¿Cómo es topológicamente el conjunto $\{x \in S : O(x) \subset S\}$?

Definición. Sea $y = u(x)$ una función monótona para $-R \leq x \leq R$, el conjunto

$$u(x) = \{(x, u(x)) : -R \leq x \leq R\}$$

se llama **curva horizontal**.

Definición. Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos curvas horizontales. Si $-R \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq R$ entonces el conjunto

$$U = \{(x, y) : -R \leq x \leq R, u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

se llama **banda horizontal** y

$$d(U) = \max_{-R \leq x \leq R} (u_2(x) - u_1(x))$$

es el **diámetro de U** .

Análogamente se tienen **curvas verticales** y **bandas verticales**.

El comportamiento de h sobre S queda formalizado con las siguientes propiedades:

1. Sean H_0, H_1 las bandas horizontales disjuntas en S tales que $H_0 \cup H_1 = h(S) \cap S$ y V_0, V_1 las bandas verticales disjuntas en S tales que $V_0 \cup V_1 = h^{-1}(S) \cap S$, entonces V_i y H_i son homeomorfas vía h y además $h(V_i) = H_i$ para $i = 0, 1$.
2. Si H es banda horizontal en $H_0 \cup H_1$ entonces $h(H) \cap H_i = \widehat{H}_i$ es banda horizontal y $d(\widehat{H}_i) \leq b \cdot d(H_i)$ con $0 < b < 1$ e $i = 0, 1$.

Si V es banda vertical en $V_0 \cup V_1$ entonces $h^{-1}(V) \cap V_i = \widehat{V}_i$ es banda vertical y $d(\widehat{V}_i) \leq b \cdot d(V_i)$ con $0 < b < 1$ e $i = 0, 1$.

La geometría de las bandas resultantes no interfiere en la dinámica de h , por esto se pueden suponer bandas rectas.

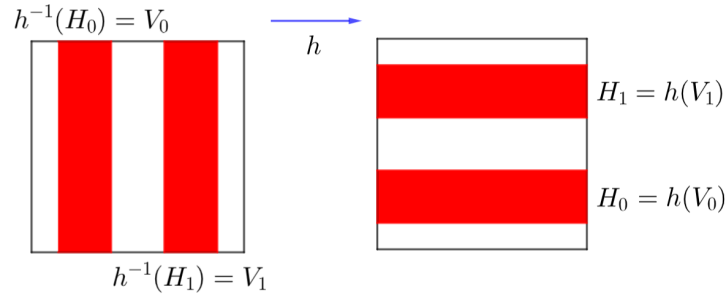


Figura 3.7: Bandas verticales y horizontales para h

Además, para la siguiente iteración h^2 se tiene

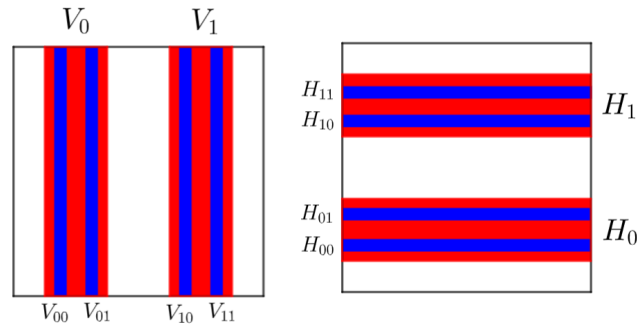


Figura 3.8: Bandas verticales y horizontales para h^2

$$h^2(S) \cap h(S) \cap S = H_{00} \cup H_{01} \cup H_{10} \cup H_{11}$$

$$h^{-2}(S) \cap h^{-1}(S) \cap S = V_{00} \cup V_{01} \cup V_{10} \cup V_{11}$$

Así,

$$h^2(S) \cap h(S) \cap S = \bigcup_{i,j=0}^1 H_{ij}$$

$$h^{-2}(S) \cap h^{-1}(S) \cap S = \bigcup_{i,j=0}^1 V_{ij}$$

e inductivamente

$$h^n(S) \cap \dots \cap h(S) \cap S = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 H_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

$$h^{-n}(S) \cap \dots \cap h^{-1}(S) \cap S = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 V_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

De este modo, el conjunto $\{x \in S : O(x) \subset S\}$ que está compuesto por los puntos que permanecen en S bajo iteraciones de h puede verse como

$$\Lambda = \{x \in S : O(x) \subset S\} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h^k(S) = \left(\bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 H_{i_1 i_2 \dots i_n} \right) \cap \left(\bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 V_{i_1 i_2 \dots i_n} \right)$$

donde $h^0 = id$. Este conjunto es invariante por su definición y su localización está dada por la topología de las bandas pues $\Lambda \subset h^{-1}(S) \cap S \cap h(S)$ formado por cuatro cuadrados en S , más aún $\Lambda \subset h^{-2}(S) \cap h^{-1}(S) \cap S \cap h(S) \cap h^2(S)$ formado por 16 cuadrados más pequeños encajados en los anteriores. Por lo tanto, Λ resulta ser un **conjunto de Cantor**.

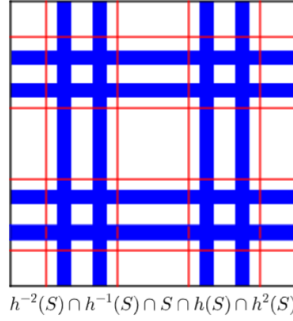


Figura 3.9: Localización de Λ para la herradura de Smale

3.4.2. Dinámica simbólica

Considere el espacio de bi-sucesiones con entradas 0 y 1

$$\Sigma_2 = \{\omega = (\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \overline{\omega_0} \omega_1 \omega_2 \dots) : \omega_k \in \{0, 1\}\}$$

y la métrica definida sobre Σ_2

$$d_2(\omega, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\omega_k - \theta_k|}{2^{|k|}}$$

entonces (Σ_2, d_2) es un espacio métrico. Además, sea

$$\sigma_2 : \Sigma_2 \mapsto \Sigma_2$$

$$\omega \mapsto (\cdots \omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\overline{\omega_1}\omega_2 \cdots)$$

llamada **función shift**, entonces σ_2 es un homeomorfismo y el sistema $(\Sigma_2, \mathbb{Z}, \sigma_2)$ se denomina **dinámica simbólica**.

Por otro lado, defínase la función f de Λ de la herradura en Σ_2 como sigue

$$\begin{aligned} f : \Lambda &\mapsto \Sigma_2 \\ x &\mapsto \omega \end{aligned}$$

$$\text{donde } \omega_k = \begin{cases} 0 & \text{si } h^k(x) \in V_0, \\ 1 & \text{si } h^k(x) \in V_1 \end{cases}$$

Propiedades

1. $|Per(\sigma_2)| = 2^n$

Si $\sigma_2^n(\omega) = \omega$ para algún $n \geq 0$ entonces $\sigma^n(\omega_i) = \omega_{i+n} = \omega_i$, es decir, un punto periódico está determinado por sus n primeras entradas para las cuales hay 2^n posibilidades.

2. $\overline{Per(\sigma_2)} = \Sigma_2$

Sean $\epsilon > 0$, $\omega \in \Sigma_2$ y $N > 0$ tal que $2^{N-1} < \epsilon$. Defínase $\theta \in \Sigma_2$ tal que

$$\theta_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } |i| \leq N, \\ \omega_{i-n} & \text{si } i > N, \\ \omega_{i+n} & \text{si } i < -N, \end{cases}$$

donde $n = 2N + 1$. Entonces θ es un punto periódico de periodo N y

$$\begin{aligned} d_2(\omega, \theta) &= \sum_{|i| \geq 0} \frac{|\omega_i - \theta_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{|i| > N} \frac{|\omega_i - \theta_i|}{2^{|i|}} \\ &< \sum_{|i| > N} \frac{1}{2^{|i|}} \\ &= 2 \sum_{i > N} \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{2^{N-1}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

3. $\exists \omega \in \Sigma_2$ tal que $\overline{O(\omega)} = \Sigma_2$

Sea

$$\omega^+ = \overbrace{01}^{1 \text{ elemento}} \overbrace{00 \ 01 \ 10 \ 11}^{2 \text{ elementos}} \overbrace{000 \ 001 \ \dots \ 111}^{3 \text{ elementos}} \overbrace{0000 \ 0001 \ \dots \ 1111}^{4 \text{ elementos}} \dots$$

la sucesión construida concatenando 01 y todas las combinaciones de dos, tres, cuatro, etc. elementos de $\{0, 1\}$. Ahora definase $\omega \in \Sigma_2$ tal que

$$\omega_i = \omega_{|i|}^+$$

para todo i .

Si $\theta \in \Sigma_2$ y $\epsilon > 0$ sea N tal que $2^{N-1} < \epsilon$, entonces la cadena

$$\{\theta_{-N} \dots \theta_{-1} \theta_0 \theta_1 \dots \theta_N\}$$

está en alguna posición de la sucesión ω , de modo que, si se itera ω bajo σ_2 suficientemente para que $\sigma_2^n(\omega_i) = \theta_i$ para $|i| \leq N$, entonces $d(\theta, \sigma_2^n(\omega)) < \epsilon$.

Observación: Las propiedades anteriores demuestran que la dinámica de σ_2 es caótica y dado el siguiente teorema, la dinámica de la herradura de Smale también es caótica en su conjunto invariante.

Teorema 3.4.1. *La función f es una conjugación topológica entre la dinámica h sobre el conjunto invariante tipo herradura Λ y la dinámica simbólica, es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{h} & \Lambda \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & \Sigma_2 \end{array}$$

3.4.3. Herradura en $h_{a,b}$

Considere el cuadrado

$$S = \{(x, y) : |x|, |y| < R\} \subset M$$

donde $R = \frac{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2}$. Su frontera es la unión de los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, R) : -R \leq x \leq R\}, & S_2 &= \{(x, -R) : -R \leq x \leq R\}, \\ S_3 &= \{(R, y) : -R \leq y \leq R\}, & S_4 &= \{(-R, y) : -R \leq y \leq R\} \end{aligned}$$

y bajo la aplicación de $h_{a,b}(S_i) = \partial_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \{(a-x^2+bR, x) : -R \leq x \leq R\}, & \partial_2 &= \{(a-x^2-bR, x) : -R \leq x \leq R\}, \\ \partial_3 &= \{(a-R^2+by, R) : -R \leq y \leq R\}, & \partial_4 &= \{(a-R^2+by, -R) : -R \leq y \leq R\} \end{aligned}$$

Note que $a-x^2-bR < a-x^2+bR$ y son parábolas simétricas respecto al eje x , luego el vértice está dado para $x = 0$ y $h_{a,b}|_S$ tendrá dinámica de herradura si $a-bR > R$, así

$$\begin{aligned} R &< \frac{a}{1+b} \\ \frac{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2} &< \frac{a}{1+b} \\ (1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} &< \frac{2a}{1+b} \\ \sqrt{(1+b)^2 + 4a} &< \frac{2a}{1+b} - (1+b) \\ (1+b)^2 + 4a &< (1+b)^2 \left(\frac{2a}{(1+b)^2} - 1 \right)^2 \\ 4a &< (1+b)^2 \left[\left(\frac{2a}{(1+b)^2} - 1 \right)^2 - 1 \right] \\ 4a &< (1+b)^2 \frac{4a}{(1+b)^2} \left[\frac{a}{(1+b)^2} - 1 \right] \\ 4a &< 4a \left[\frac{a}{(1+b)^2} - 1 \right] \\ 1 &< \frac{a}{(1+b)^2} - 1 \end{aligned}$$

$$2 < \frac{a}{(1+b)^2}$$

$$2(1+b)^2 < a$$

Es decir, lo anterior muestra que $h_{a,b}$ es topológicamente conjugada a la dinámica de σ_2 sobre un conjunto de Cantor cuando $a > 2(1+b)^2$. De hecho, esta cota puede mejorarse.

Teorema 3.4.2. *Si*

$$a > \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) (1+b)^2.$$

entonces $h_{a,b}$ es topológicamente conjugada a σ_2 . Esto es, existe un homeomorfismo $\gamma : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{h_{a,b}} & \Lambda \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & \Sigma_2 \end{array}$$

conmuta.

Para la demostración véase (Devaney and Nitecki, 1979).

3.5. Caos

Definición. *Sea $x \in X$ y $O(x)$ su órbita bajo la aplicación h , se define el **omega-límite** o **ω -límite** de x como*

$$\omega(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\{h^k(x) : k \geq n\}}$$

La dinámica definida por una aplicación $h : X \mapsto X$ está concentrada en su conjunto no-errante en el sentido que para todo $x \in X$ su conjunto omega-límite es tal que $\omega(x) \subset \Omega(h)$. Así que para entender la dinámica global se debe estudiar el conjunto $\Omega(h)$ y la dinámica local $h|_{\Omega(h)}$. El concepto de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales permite identificar las órbitas a más de un error de medida.

Por otro lado, si $\Omega(h) \neq X$ la geometría del conjunto no-errante puede ser muy complicada en algunas regiones (C. de Cantor) o muy simple en otras (O. periódica). En las regiones donde es simple la dinámica no debe llamarse caótica, pero resulta útil detectar las regiones donde si puede describirse como caótica, para esto se tiene justamente el concepto de dinámica caótica.

Sin embargo, el caos puede no ser percibido, luego h es **visiblemente caótico** en un subconjunto invariante compacto de $\Omega(h)$ si es caótico y el conjunto de órbitas caóticas en $W^s(x)$ tiene medida de Lebesgue positiva.

Definición. Un conjunto Atractor Λ por $h : X \mapsto X$ es un **atractor extraño** si $h|_{\Lambda}$ es visiblemente caótica.

3.5.1. Atractor de Hénon

Hasta este punto ya se tiene que $h_{a,b}|_{\Omega(h_{a,b})}$ es caótica para $a > 2(1+b)^2$ debido a su relación con la dinámica simbólica. El siguiente teorema asegura la existencia de atractores extraños para ciertos parámetros de a y b .

Teorema 3.5.1. $\Lambda = \overline{W^u(p)}$ es un atractor extraño para $a \approx 2$ y $b \approx 0$.

Para la demostración véase Benedicks (1991).

Caso $a=1.4$ $b=0.3$

Estos son los valores de parámetros que escogió Hénon en su artículo para describir el comportamiento caótico de la aplicación y hallar su atractor extraño. Definió una región de atracción acotada por el cuadrilátero con vértices

$$A = (-1,852, 1,96) \quad B = (1,848, 0,621)$$

$$C = (1,743, -0,653) \quad D = (-1,484, -2,333)$$

y numéricamente encontró bajo iteración el siguiente atractor

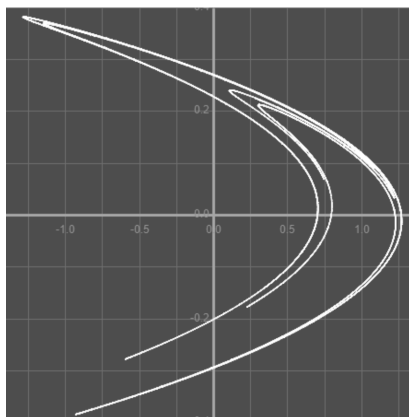


Figura 3.10: Atractor de Hénon

3.6. Límites Inversos

En este capítulo se presentarán los límites inversos o proyectivos los cuales son la herramienta principal en la relación entre polinomios cuadráticos y la aplicación de Hénon. Este es un concepto categórico el cual puede ser revisado en la categoría **Top** a partir de espacios topológicos y funciones continuas, específicamente en este trabajo usaremos espacios métricos debido a las dinámicas estudiadas.

Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. El **límite inverso** de (X, f) es el espacio

$$\widehat{X} = \left\{ (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X \mid f(x_i) = x_{i-1}, i \in \mathbb{N} \right\}$$

con la topología subespacio.

Así, los puntos en el límite inverso de (X, f) son puntos $x_0 \in X$ ligados a su *historia*, es decir, su evolución vía la iteración de f . De este modo, \widehat{X} es un espacio de sucesiones de imágenes inversas bajo f .

Además, la función

$$\widehat{d}((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \right\}$$

es una métrica sobre \widehat{X} .

Ejemplo 1:

Considere (\mathbb{R}, d) para $d(x, y) = |x - y|$ y la función continua $f(x) = x$ sobre \mathbb{R} . Entonces:

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= \left\{ (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X \mid f(x_i) = x_{i-1}, i \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{R} \mid x_i = x_{i-1}, i \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ (x_0, x_0, x_0, \dots) \mid x_0 \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

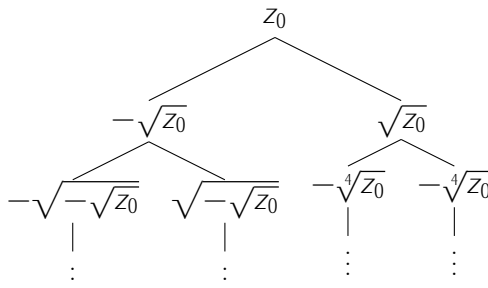
$$\begin{aligned}\widehat{d}((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) &= \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \right\} \\ &= \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{|x_i - y_i|}{i+1} \right\} \\ &= \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{|x_0 - y_0|}{i+1} \right\} \\ &= |x_0 - y_0|\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Considere (\mathbb{C}, d) para $d(z, w) = |z - w|$ y la función continua $P_0(z) = z^2$ sobre \mathbb{C} . Entonces:

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= \left\{ (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X \mid f(x_i) = x_{i-1}, i \in \mathbb{N} \right\} \\ \widehat{\mathbb{C}} &= \left\{ (z_0, z_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} \mid z_i^2 = z_{i-1}, i \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ (z_0, \pm\sqrt{z_0}, \pm\sqrt{\pm\sqrt{z_0}}, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} \mid i \in \mathbb{N} \right\}\end{aligned}$$

Una forma de visualizar los puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ dado P_0 se presenta en el siguiente diagrama:



Teorema 3.6.1. Si (X, d) es un espacio métrico entonces, $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es un espacio métrico.

Demostración. Ya que (X, d) es un espacio métrico, X es no vacío y por definición \widehat{X} es no vacío. Sean $x = (x_0, x_1, \dots)$, $y = (y_0, y_1, \dots)$, $z = (z_0, z_1, \dots) \in \widehat{X}$ entonces $x_i, y_i, z_i \in X$ para todo $i \in \mathbb{N}$, así que como d es una métrica sobre X :

- $\forall x_i, y_i \in X$

$$\begin{aligned} d(x_i, y_i) \geq 0 &\Rightarrow \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \geq 0 \\ &\Rightarrow \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \right\} \geq 0 \\ &\Rightarrow \widehat{d}(x, y) \geq 0 \end{aligned}$$

- $\forall x_i, y_i \in X$

$$\begin{aligned} x_i = y_i &\Leftrightarrow d(x_i, y_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \widehat{d}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

- $\forall x_i, y_i \in X$

$$\widehat{d}(x, y) = \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{i \geq 0} \left\{ \frac{d(y_i, x_i)}{i+1} \right\} \\
&= \widehat{d}(y, x)
\end{aligned}$$

- $\forall x_i, y_i, z_i \in X$

$$\begin{aligned}
d(x_i, z_i) &\leq d(x_i, y_i) + d(y_i, z_i) \\
\frac{d(x_i, z_i)}{i+1} &\leq \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} + \frac{d(y_i, z_i)}{i+1} \\
\sup_{i \geq 0} \frac{d(x_i, z_i)}{i+1} &\leq \sup_{i \geq 0} \left(\frac{d(x_i, y_i)}{i+1} + \frac{d(y_i, z_i)}{i+1} \right) \\
\widehat{d}(x, z) &\leq \sup_{i \geq 0} \frac{d(x_i, y_i)}{i+1} + \sup_{i \geq 0} \frac{d(y_i, z_i)}{i+1} \\
\widehat{d}(x, z) &\leq \widehat{d}(x, y) + \widehat{d}(y, z)
\end{aligned}$$

□

3.6.1. Propiedades

Las siguientes propiedades se recopilan de (Oberste-Vorth, 2002):

- Si X es compacto, entonces $\prod_{n=0}^{\infty} X$ es compacto.
- Si X es Haudorff compacto, entonces \widehat{X} es Haudorff compacto.
- Si X es Haudorff compacto no vacío, entonces \widehat{X} es Haudorff compacto no vacío.
- Si f no es sobreyectiva, \widehat{X} puede ser vacío.
- Si f es biyectiva, para cada $x_0 \in X$ existe un único punto en \widehat{X} tal que x_0 sea su primer coordenada.
- Si f es sobreyectiva pero no inyectiva, pueden haber varios puntos en \widehat{X} con la primer coordenada igual.

Una de las propiedades de los límites inversos que fundamenta su uso en sistemas dinámicos es:

Sean X un espacio topológico, $f : X \rightarrow X$ una función continua y \widehat{X} el límite inverso definido por (X, f) , defínase

$$\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$$

tal que $\widehat{f}(x_0, x_1, \dots) = (f(x_0), f(x_1), \dots) = (f(x_0), x_0, x_1, \dots)$.

Teorema 3.6.2. *La función \widehat{f} es inyectiva y, si f es inyectiva entonces existe un homeomorfismo entre \widehat{X} y X , y \widehat{f} es topológicamente conjugada a f vía este homeomorfismo.*

Demostración. Sean $x = (x_0, x_1, \dots), y = (y_0, y_1, \dots) \in \widehat{X}$ tal que

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}(y),$$

entonces

$$(f(x_0), x_0, x_1, \dots) = (f(y_0), y_0, y_1, \dots)$$

esto es, $f(x_0) = f(y_0)$ y $x_i = y_i$ para todo $i \geq 0$. Por lo tanto, $x = y$ y la función \widehat{f} es inyectiva.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \pi : \widehat{X} &\rightarrow X \\ (x_0, x_1, \dots) &\rightarrow x_0 \end{aligned}$$

es una función continua por definición de la topología producto y además,

$$\begin{aligned} (f \circ \pi)(x_0, x_1, \dots) &= f(\pi(x_0, x_1, \dots)) \\ &= f(x_0) \\ &= \pi(f(x_0), x_0, x_1, \dots) \\ &= (\pi \circ \widehat{f})(x_0, x_1, \dots) \end{aligned}$$

□

Así, \widehat{X} y \widehat{f} resulta ser una forma de relacionar aplicaciones no inyectivas e inyectivas, de hecho, una forma de relacionar las dinámicas definidas por estas. Como es el caso de los polinomios cuadráticos y la aplicación de Hénon para ciertos valores de parámetros.

3.6.2. Ejemplo

Un ejemplo de la relación que existe entre un sistema dinámico y el límite inverso se ve en la dinámica simbólica. Considere (Σ_2, σ_2) del Capítulo anterior y

$$\Sigma_1 = \{\omega = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots) : \omega_k \in \{0, 1\}\}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \Sigma_1 &\mapsto \Sigma_1 \\ \omega &\mapsto (\omega_1 \omega_2 \cdots) \end{aligned}$$

El espacio de sucesiones con entradas 0, 1 y la función **shift de olvido**.

En este caso, σ_2 es un homeomorfismo pero σ_1 no es inyectiva luego los sistemas no pueden ser topológicamente conjugados. Sin embargo, defina $\widehat{\Sigma}_1$ y $\widehat{\sigma}_1$, un elemento en el límite inverso tiene la forma

$$\left(\left(\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \cdots \right)$$

De este modo, todo punto en $\widehat{\Sigma}_1$ está determinado por la primer columna y primer fila. Y la función $\widehat{\sigma}_1$ actúa como

$$\widehat{\sigma}_1 \left(\left(\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \cdots \right) = \left(\left(\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \cdots \right)$$

Teorema 3.6.3. $\widehat{\sigma}_1$ y σ_2 son topológicamente conjugadas.

Demostración. Defínase $g : \widehat{\Sigma}_1 \longrightarrow \Sigma_2$ por

$$g \left(\left(\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \cdots \right) = (\cdots \omega_{-2}, \omega_{-1}, \overline{\omega_0} \omega_1 \omega_2 \cdots)$$

Entonces

$$\begin{aligned}(g \circ \widehat{\sigma}_1)(\omega) &= (\cdots \omega_{-2}, \omega_{-1}, \overline{\omega_0} \omega_1 \omega_2 \cdots) \\ &= \sigma_2(\cdots \omega_{-2}, \overline{\omega_{-1}}, \omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots) \\ &= (\sigma_2 \circ g)(\omega)\end{aligned}$$

además, g es biyectiva pues los puntos de $\widehat{\Sigma}_1$ están completamente determinados por su primer columna y su primer fila. Finalmente, la continuidad se tiene dado que g es una isometría entre los espacios dotando a $\widehat{\Sigma}_1$ de la métrica d_2 . \square

Teorema 3.6.4. Si $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ son topológicamente conjugadas vía un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Entonces, \widehat{f} y \widehat{g} son topológicamente conjugadas.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} H : \widehat{X} &\rightarrow \widehat{Y} \\ (x_0, x_1, \dots) &\rightarrow (h(x_0), h(x_1), \dots) \end{aligned}$$

Como h es un homeomorfismo entre X y Y , H es un homeomorfismo entre \widehat{X} y \widehat{Y} dada su definición. Además,

$$\begin{aligned} H \circ \widehat{f}(x_0, x_1, \dots) &= H(f(x_0), x_0, x_1, \dots) \\ &= (h(f(x_0)), h(x_0), h(x_1), \dots) \\ &= (g(h(x_0)), h(x_0), h(x_1), \dots) \\ &= \widehat{g}(h(x_0), h(x_1), \dots) \\ &= \widehat{g} \circ H(x_0, x_1, \dots) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{X} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \widehat{Y} & \xrightarrow{\widehat{g}} & \widehat{Y} \end{array}$$

\square

3.6.3. Polinomios reales

En el caso real, los polinomios cuadráticos también están relacionados a la familia $P_c(x) = x^2 + c$ vía conjugación topológica donde $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.6.5. Si $c < -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ entonces P_c es topológicamente conjugada a σ_1 sobre un conjunto de Cantor.

Demostración. En (Devaney, 2008) se puede ver que la aplicación $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ es conjugada a σ_1 vía un homeomorfismo S sobre el conjunto invariante de F_μ (Un conjunto de Cantor) si $\mu > 2 + \sqrt{5}$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{F_\mu} & \Lambda \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & \Sigma_1 \end{array}$$

Además, cualquier polinomio de la forma $q(x) = ax^2 + bx + c$ es conjugado a P_c para $c = ad + b - b^2$ vía $\varphi(x) = ax + b$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F_\mu} & \mathbb{R} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{P_c} & \mathbb{R} \end{array}$$

Luego $F_\mu(x) = \mu x - \mu x^2$ es conjugada a P_c para $c = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4}$. Teniendo en cuenta la transitividad de la relación *topológicamente conjugado*, P_c es topológicamente conjugada a σ_1 sobre Λ cuando

$$\begin{aligned} \mu &> 2 + \sqrt{5} \\ \mu - 1 &> 1 + \sqrt{5} \\ (\mu - 1)^2 &> (1 + \sqrt{5})^2 \\ \mu^2 - 2\mu + 1 &> (1 + \sqrt{5})^2 \\ \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4} &> \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} \\ \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu}{2} &> \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -c &> \frac{(1 + \sqrt{5})^2 - 1}{4} \\
 c &< - \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1}{4} \right) \\
 c &< -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

□

Además, en el Capítulo anterior se mostró como $h_{a,b}$ es conjugada de σ_2 sobre un conjunto de Cantor para $a > \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)(1+b)^2$. Por lo tanto es natural preguntarse la relación que existe entre estas dos dinámicas, además de la generalización natural que representa la aplicación de Hénon de los polinomios cuadráticos.

Note que en el **Teorema 3.6.3**, se muestra la conjugación topológica entre las dinámicas $\hat{\sigma}_1$ y σ_2 , donde $\hat{\sigma}_1$ contiene la información de la dinámica σ_1 . Es decir, implícitamente el límite proyectivo relaciona dinámicas inyectivas con no inyectivas, y bajo esta motivación se procede a definir este espacio para la familia P_c . Sean

$$\hat{\mathbb{R}} = \left\{ (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{R} \mid x_{i-1} = P_c(x_i) \right\}$$

y $\hat{P}_c : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{P}_c(x_0, x_1, \dots) = (P_c(x_0), x_0, x_1, \dots)$$

Teorema 3.6.6. \hat{P}_c es topológicamente conjugada a $h_{a,b}$ para ciertos parámetros.

Demostración. Como P_c es topológicamente conjugada a σ_1 para $c < -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ (**Teorema 3.6.5**), entonces \hat{P}_c es topológicamente conjugada a $\hat{\sigma}_1$ (**Teorema 3.6.4**). Luego, por el **Teorema 3.6.3**, $\hat{\sigma}_1$ es topológicamente conjugada de σ_2 y dada la transitividad de la conjugación topológica junto al **Teorema 3.4.2**, se obtiene que \hat{P}_c es topológicamente conjugada de $h_{a,b}$ para $a > \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)(1+b)^2$. □

Con esto, los límites inversos son una herramienta para evidenciar la relación dinámica de la aplicación de Hénon y los polinomios cuadráticos en variables real.

El caso de polinomios cuadráticos complejos ha sido estudiado enfocándose en los conjuntos que caracterizan su dinámica (C. de Julia y Mandelbrot), la dicotomía fundamental aclara que los conjuntos de Julia son conjuntos de Cantor si los parámetros están fuera del Conjunto de Mandelbrot. Es decir, el **Teorema 3.6.6** sugiere que \widehat{P}_c sea topológicamente conjugada de $h_{a,b}$ sobre conjuntos de Julia. Con este fin, se estudia la generalización compleja de las aplicaciones de Hénon.

Generalizaciones de la Aplicación de Hénon

Como referencias en este capítulo se tendrán (Oberste-Vorth, 2005), (Aybar et al., 2013) y (Geyer, 2016), que se mencionarán a lo largo del capítulo.

El **Teorema 3.6.6** evidencia la relación de la dinámica polinomial y las aplicaciones de Hénon en el caso real para ciertos parámetros utilizando la dinámica simbólica como un 'puente' entre éstas. En el caso complejo la relación no es tan clara, la dificultad yace en definir los parámetros en los cuales están ubicadas las herraduras (los puentes entre el caso polinomial y la aplicación de Hénon).

En el caso complejo, el trabajo se centrará en definir cuando y para qué parámetros las aplicaciones de Hénon tienen dinámica del tipo herradura. Por lo tanto, en este capítulo se llega a una generalización compleja de las aplicaciones de Hénon que permite evidenciar las condiciones para tener la dinámica tipo herradura en ciertos parámetros.

Además, esta construcción permitirá presentar una caracterización análoga a la dicotomía fundamental.

4.1. Aplicación de Hénon compleja

Recuerde que la aplicación de Hénon es una familia de funciones definidas de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$h_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Luego la aplicación de Hénon compleja es una familia de funciones $F_{a,c} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definidas por

$$F_{a,c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{pmatrix}$$

donde $a, c \in \mathbb{C}$ son parámetros.

Esta aplicación es invertible, y de hecho su inversa está dada por

$$F_{a,c}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{a}(y^2 + c - x) \end{pmatrix}$$

Además, tiene jacobiano constante a .

Observación: En el caso de los polinomios cuadráticos de una variable, la extensión a variable compleja ha sido de mucha utilidad aún cuando el objeto inicial fueron polinomios reales. La extensión a variable compleja de la aplicación de Hénon pretende enriquecer los resultados sobre la dinámica de esta familia de funciones.

Durante el estudio de polinomios cuadráticos, la herramienta más importante para la caracterización de sus conjuntos invariantes fue la función dada en el **Teorema 2.4.1**, es por esto que funciones análogas a esta serán presentadas en el siguiente capítulo para la caracterización de los conjuntos invariantes de la aplicación de Hénon compleja.

Definición (Aplicación de Hénon generalizada). *Sea p un polinomio de variable compleja de grado $d \geq 2$, entonces la aplicación $H_{p,a} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por*

$$H_{p,a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$$

con $a \neq 0$, se llama **aplicación de Hénon generalizada de grado d** .

4.2. Aplicaciones polynomial-like

Aunque no son el foco de este trabajo, las aplicaciones polynomial-like definidas por Douady y Hubbard en (Douady, 1985) son la motivación de la teoría presentada en este capítulo.

Si $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado d y $U = D_R$ es el disco de radio R , para R suficientemente grande el conjunto $U' = P^{-1}(U)$ es relativamente compacto en U , homeomorfo al disco y la función $P : U' \rightarrow U$ es analítica y propia de grado

d. Luego,

Definición (Aplicación polynomial-like). *Una aplicación polynomial-like de grado d es una tripla (U', U, f) donde U' y U son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} isomorfos a discos, U' relativamente compacto en U , $f : U' \rightarrow U$ \mathbb{C} -analítica y propia de grado d .*

Esta definición pretende extender la dinámica polinomial a una familia más grande, la cual sea una generalización natural, es decir, todo polinomio sea un polynomial-like.

Además, como en el caso polinomial, se pueden definir los conjuntos invariantes del sistema: Si $f : U' \rightarrow U$ es una aplicación polynomial-like de grado d , entonces se nota como

$$K_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U')$$

el conjunto de $z \in U'$ tal que $f^n(z)$ está definido y pertenece a U' para todo $n \in \mathbb{N}$. Este conjunto es un subconjunto compacto de U' el cual se llama **Conjunto de Julia completo** de f . El **conjunto de Julia** J_f de f es la frontera de K_f .

La definición de K_f es natural cuando se ve la construcción de la coordenada de Böttcher extendiendola a partir de pre-imagenes sobre el dominio inicial. Se tiene además el análogo de la dicotomía fundamental sobre aplicaciones polynomial-like:

Teorema 4.2.1. *El conjunto K_f es conexo si y solo si todos los puntos críticos de f pertenecen a K_f . Si ningún punto crítico pertenece a K_f entonces K_f es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Análoga a la demostración de la dicotomía fundamental para polinomios cuadráticos complejos. \square

4.3. Aplicaciones Hénon-like

La siguiente figura exhibe la idea de qué es una aplicación Hénon-like de grado dos en \mathbb{R}^2 :

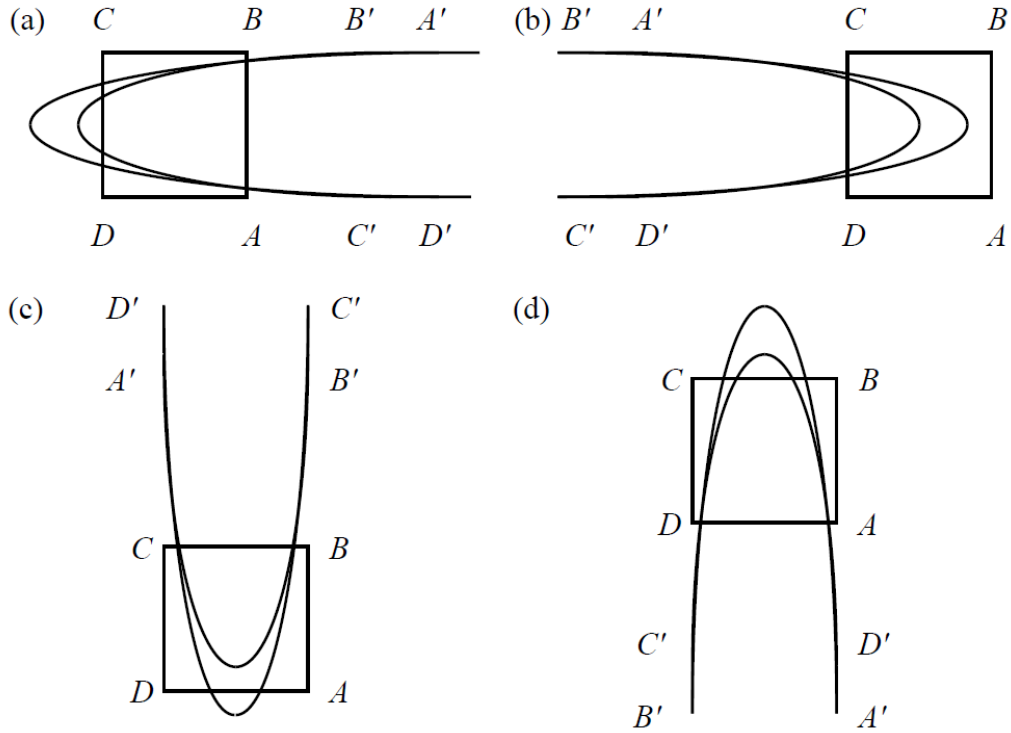


Figura 4.1: Hénon-like de grado 2.

En los cuatro casos la aplicación mapea A en A' , B en B' , C en C' y D en D' , por lo que los comportamientos de (a) y (b) son distintos a los comportamientos de (c) y (d), esto debe especificarse en la definición de estas aplicaciones.

De aquí en adelante, d será un entero arbitrario fijo y mayor que uno. Las funciones $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ serán las proyecciones respecto a cada coordenada.

Definición. Sean $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ discos, entonces al producto $D_1 \times D_2$ lo notamos por B y se llama **bidisco**.

Los **cortes horizontales** y **cortes verticales** del bidisco B se definen por

$$H_y = D_1 \times \{y\} \quad V_x = \{x\} \times D_2$$

para todo $y \in D_2$ y todo $x \in D_1$, respectivamente.

La **frontera horizontal** y **frontera vertical** del bidisco B son

$$\partial B_H = \bar{D}_1 \times \partial \bar{D}_2 \quad \partial B_V = \partial \bar{D}_1 \times \bar{D}_2$$

Además, si $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ se denota por $F^{-1} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ a su inversa donde esta tenga sentido y se pueden definir las siguientes funciones

Definición.

$$F_{1,y} = \pi_1 \circ F \circ I_y : D_1 \rightarrow \mathbb{C} \quad F_{1,y}^{-1} = \pi_1 \circ F^{-1} \circ I_y : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F_{2,x} = \pi_2 \circ F \circ I^x : D_2 \rightarrow \mathbb{C} \quad F_{2,x}^{-1} = \pi_2 \circ F^{-1} \circ I^x : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

donde

$$I_y : D_1 \rightarrow \bar{B} \\ x \rightarrow (x, y)$$

$$I^x : D_2 \rightarrow \bar{B} \\ y \rightarrow (x, y)$$

Los siguientes diagramas exhiben la definición anterior

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{F_{1,y}} & \mathbb{C} \\ I_y \downarrow & & \uparrow \pi_1 \\ \bar{B} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{F_{2,x}} & \mathbb{C} \\ I^x \downarrow & & \uparrow \pi_2 \\ \bar{B} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Definición (Aplicación Hénon-like). $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una **aplicación Hénon-like de grado d** si existe una función $G : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

1. F y G son continuas e inyectivas sobre \bar{B} y analíticas sobre B .
2. $F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$ siendo Id la identidad, donde cada una tenga sentido.
3. Para todo $x \in D_1$ y todo $y \in D_2$, o bien se tiene que:
 - a) $F_{1,y}$ y $F_{2,x}^{-1}$ son aplicaciones polynomial-like de grado d , o,
 - b) $F_{2,x}$ y $F_{1,y}^{-1}$ son aplicaciones polynomial-like de grado d .

Dependiendo de el item que cumpla, la aplicación F será horizontal o vertical, respectivamente.

Note que si F es una aplicación Hénon-like que cumple 3.a) en la definición anterior, entonces F^{-1} cumple 3.b). De aquí en adelante, se consideran F horizontales.

La condición 3. de la definición es equivalente a que una aplicación F cumpla que, o bien,

$$F(\partial B_V) \cap \bar{B} = \emptyset \quad \wedge \quad F^{-1}(\partial B_H) \cap \bar{B} = \emptyset$$

o,

$$F^{-1}(\partial B_V) \cap \bar{B} = \emptyset \quad \wedge \quad F(\partial B_H) \cap \bar{B} = \emptyset$$

Como el concepto de aplicaciones Hénon-like pretende capturar la topología de las aplicaciones de Hénon, es natural que las aplicaciones de Hénon sean aplicaciones Hénon-like en algún dominio. Así,

Teorema 4.3.1. *Para toda aplicación de Hénon F de grado d existe una constante $R > 0$ tal que*

$$F : \bar{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

es una aplicación Hénon-like de grado d . Aquí, \bar{D}_R^2 es el bidisco generado por la clausura del disco de radio R .

Demostración. La demostración se basa en el hecho que todos los polinomios son polynomial-like del mismo grado sobre discos con radio suficientemente grande.

En efecto, si $G = F_{a,c}^{-1}$ entonces se tienen la primera y segunda condición de la definición, y con estas condiciones $F_{1,y}$ (y $F_{2,x}^{-1}$) ó $F_{2,x}$ (y $F_{1,y}^{-1}$) resultan ser polinomios, cumpliendo la tercera condición de la definición. \square

4.3.1. Ejemplos

1. Para $F_{a,c}$ la aplicación de Hénon de grado 2, la cota inferior del radio R es

$$R > \frac{1}{2}(1 + |a| + \sqrt{(1 + |a|)^2 + 4|c|})$$

entonces,

$$F_{a,c} : \bar{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

es una aplicación Hénon-like horizontal de grado 2 pues,

$$F(\partial B_V) \cap \bar{B} = \emptyset \quad \wedge \quad F^{-1}(\partial B_H) \cap \bar{B} = \emptyset.$$

2. Para aplicaciones de Henon generalizadas de grado d del tipo

$$G_{a,c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^d + c - ay \\ x \end{pmatrix}$$

con $a \neq 0$ y $d > 2$, la cota inferior de R resulta de resolver la desigualdad

$$R^d - (1 + |a|)R - 4|c| > 0.$$

Análogos a los conjuntos invariantes de aplicación de Hénon, se tienen para aplicaciones Hénon-like los siguientes análogos:

$$K_+ := \{ z \in B \mid F^n(z) \in B; \forall n > 0 \}$$

$$K_- := \{ z \in B \mid F^{-n}(z) \in B; \forall n > 0 \}$$

$$J_{\pm} := \partial K_{\pm} \quad K := K_+ \cap K_- \quad J := J_+ \cap J_-$$

Con todo esto, finalmente, se captura la dinámica de las aplicaciones de Hénon dentro de la noción de Hénon-like.

Sobre la dinámica de las aplicaciones Hénon-like se sabe que:

Teorema 4.3.2. *Para todo d , todas las aplicaciones Hénon-like de grado d tienen el mismo número de ciclos periódicos, contados con multiplicidad, como un polinomio de grado d .*

Demostración. Sea $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una aplicación Hénon-like de grado d , con funciones coordenadas $f_1 = \pi_1 \circ F$ y $f_2 = \pi_2 \circ F$. Se puede asumir que F es horizontal y considerar la familia de aplicaciones $F_{\epsilon} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$, para $0 < \epsilon < 1$, definidas por

$$F_{\epsilon}(x, y) = (f_1(x, y), \epsilon f_2(x, y)).$$

Cada una de las aplicaciones F_{ϵ} tiene el mismo número de ciclos periódicos, lo anterior gracias a que la clase aplicaciones Hénon-like de grado d es estable bajo pequeñas perturbaciones (Oberste-Vorth, 2005). Como $\epsilon \rightarrow 0$, los ciclos periódicos convergen al plano $\mathbb{C} \times \{0\}$.

Así, podemos considerar la aplicación sobre este plano inducida por la aplicación límite $x \rightarrow f_1(x, 0)$. Por definición, esta aplicación es polynomial-like de grado d sobre $H_0 = \{x \mid (x, 0) \in B\}$ y además, equivalente casi-conformemente a un polinomio de grado d y todos los polinomios de grado d tienen el mismo número de ciclos periódicos. \square

De hecho, toda aplicación Hénon-like de grado d :

- Tiene d puntos fijos.
- El número de ciclos periodicos de periodo primo p es $\frac{d(d^{p-1} - 1)}{p}$.
- Si el periodo es $n \geq 4$ con n no primo, el número de ciclos se halla de la suma, sobre todos los m que dividen a n , del número de puntos de periodo m igual a d^m

Con esto, una aplicación Hénon-like de grado dos:

- tiene dos puntos fijos.
- El número de ciclos periodicos de periodo primo p es $\frac{2(2^{p-1} - 1)}{p}$.

Periodo	Ciclos
1	2
2	1
3	2
4	3
5	6
6	9

Periodo	Ciclos
7	18
8	30
9	56
10	99
11	186
12	335

Tabla 4.1: Ciclos periodicos de Hénon-like de grado dos.

La construcción de la clase de aplicaciones Hénon-like teniendo en su topología la dinámica de las aplicaciones de Hénon, sugiere la relación de conjunción topológica entre estas, algo que es falso:

Sea F es una aplicación de Hénon con $a = 1$ y dos puntos periodicos de periodo k , para los cuales la linealización de F^k tiene autovalores conjugados complejos de módulo 1.

Aplicaciones de este tipo existen, puede verse en (Aybar et al., 2013) que existen parámetros a, b para los cuales la aplicación de Hénon real tiene autovalores complejos conjugados de modulo 1 para $k = 1$ y $k = 2$.

Luego elija

$$R > 1 + \sqrt{1 + |c|}$$

y sea $H : \overline{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ con valores pequeños en \overline{D}_R^2 y anulándose en los dos puntos periodicos, luego

$$F + H : \overline{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

es un Hénon-like con estos puntos siendo aún periódicos pero uno atractor y el otro repulsor.

4.4. Herraduras complejas

Como ya se vio, la herradura de Smale juega un papel importante en el estudio del comportamiento de la aplicación de Hénon de variable real, en la extensión a variable compleja se pretende también generalizar el concepto de la herradura para caracterizar la dinámica de las aplicaciones Hénon-like.

Debilitando las condiciones de las definiciones dadas en el capítulo anterior se obtienen las aplicaciones quasi-Hénon-like, así: En vez de pedir que B sea un bidisco, este puede ser un disco encajado, si $D \subset \mathbb{C}$ es el disco unitario asuma que existe un encaje $\varphi : \overline{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ analítico en D^2 y tal que $B = \varphi(D^2)$, $\overline{B} = \varphi(\overline{D}^2)$.

Sean

$$\begin{aligned} \partial B_H &= \varphi(\overline{D} \times \partial \overline{D}) & \partial B_V &= \varphi(\partial \overline{D} \times \overline{D}) \\ H_y &= \varphi(D \times \{y\}) & V_x &= \varphi(\{y\} \times D) \end{aligned}$$

y considere $F : \overline{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ inyectiva y continua sobre \overline{B} y analítica sobre B tal que,

$$F(\overline{B}) \cap \partial B_H = \emptyset \quad \wedge \quad \overline{B} \cap F(\partial B_V) = \emptyset$$

o,

$$F(\overline{B}) \cap \partial B_V = \emptyset \quad \wedge \quad \overline{B} \cap F(\partial B_H) = \emptyset$$

así,

Lema 4.4.1. *Para todo $y \in D$, $\pi_1 \circ \varphi^{-1} : F(H_y) \cap B \rightarrow D$ es propia.*

Con el anterior lema, todo esta configurado para debilitar la definición de aplicaciones Hénon-like como sigue:

Definición (Aplicación quasi-Hénon-like). $F : \overline{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una **aplicación quasi-Hénon-like de grado d** si existe $G : \overline{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

1. F y G son continuas e inyectivas sobre \bar{B} y analíticas sobre B .
2. $F \circ G = Id$ y $G \circ F = Id$ siendo Id la identidad, donde cada una tenga sentido. En este cambio se nota a G por F^{-1} .
3. O bien se tiene que:

$$a) F(\bar{B}) \cap \partial B_H = \emptyset \quad \wedge \quad \bar{B} \cap F(\partial B_V) = \emptyset, o,$$

$$b) F(\bar{B}) \cap \partial B_V = \emptyset \quad \wedge \quad \bar{B} \cap F(\partial B_H) = \emptyset.$$

Dependiendo de el item que cumpla, la aplicación F será horizontal o vertical, respectivamente.

La debilitación de la definición mantiene la regularidad de las aplicaciones Hénon-like en el sentido que:

Teorema 4.4.1. *Toda aplicación Hénon-like de grado d es una aplicación quasi-Hénon-like de grado d .*

Demostración. Se sigue directamente de la definición de aplicaciones Hénon-like y la observación realizada sobre la condición 3 en esta.

La importancia de la familia de aplicaciones quasi-Hénon-like es que en esta se encuentran las herraduras complejas que generalizan la de Smale. \square

Definición (Herraduras complejas). Una **herradura compleja de grado d** es una aplicación quasi-Hénon-like de grado d $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que para todo entero $n > 0$, dependiendo de si F es horizontal o vertical, las proyecciones

$$\pi_1 \circ \varphi^{-1} : \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^m(B) \rightarrow \mathbb{C} \quad \wedge \quad \pi_2 \circ \varphi^{-1} : \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^{-m}(B) \rightarrow \mathbb{C}$$

o

$$\pi_2 \circ \varphi^{-1} : \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^m(B) \rightarrow \mathbb{C} \quad \wedge \quad \pi_1 \circ \varphi^{-1} : \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^{-m}(B) \rightarrow \mathbb{C}$$

son fibraciones triviales con fibras uniones disjuntas de discos.

Observación: La idea de la fibración se extiende de la Herradura de Smale donde las proyecciones son paquetes de d^n intervalos.

Definición (Campo f -trapping). Sea M una variedad diferenciable, $U \subset M$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow M$ una función diferenciable. Un campo de conos

$$\mathfrak{C} = (C_x \subset T_x M)_{x \in M}$$

sobre U es un **campo f -trapping** si

1. C_x depende continuamente de x .
2. Siempre que $x \in U$ y $f(x) \in U$ se tiene que $d_x f(C_x) \subset C_{f(x)}$.

El concepto anterior permite brindar facilidad a la hora de verificar si una aplicación quasi-Hénon-like de grado d es una herradura compleja, para esto

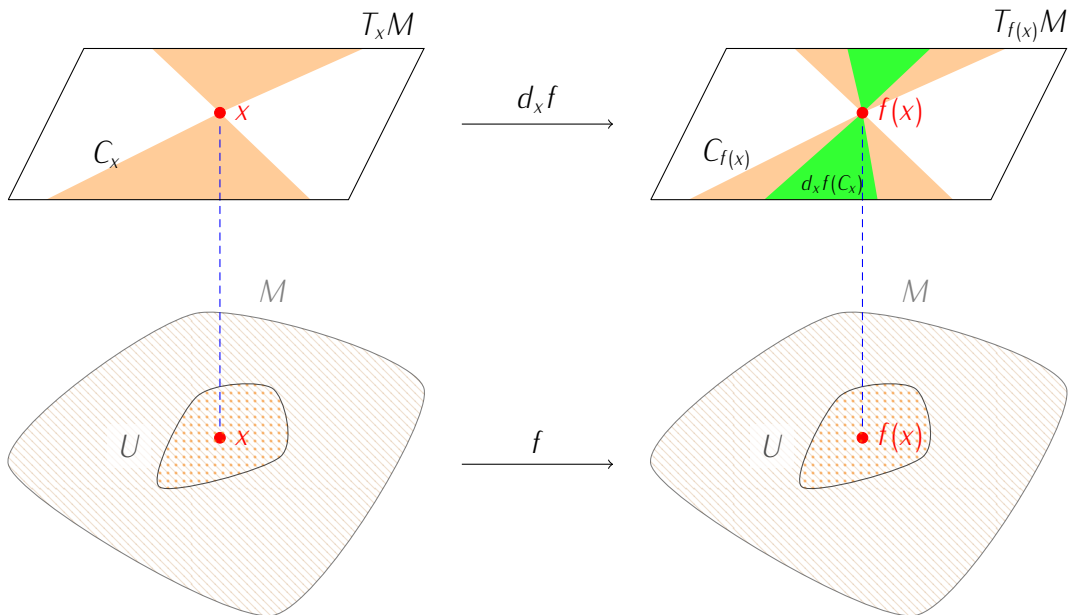


Figura 4.2: Diagrama Campo f -trapping.

Teorema 4.4.2. Sea $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una aplicación quasi-Hénon-like de grado d . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $F : \bar{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una herradura compleja de grado d .
2. Existen funciones continuas positivas $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ sobre B tal que el

campo de conos

$$\mathfrak{C}_z = \{(\zeta_1, \zeta_2) \mid |\zeta_2| < \alpha(z)|\zeta_1|\}$$

es F -trapping, y el campo de conos

$$\mathfrak{C}'_z = \{(\zeta_1, \zeta_2) \mid |\zeta_1| < \beta(z)|\zeta_2|\}$$

es F^{-1} -trapping.

3. $F(\bar{B}) \cap \bar{B}$ y $F^{-1}(\bar{B}) \cap \bar{B}$ tienen d componentes conexas.

Demostración. Sin perder generalidad se asume que $B = D^2$ y que F satisface la condición 1. de aplicaciones quasi-Hénon-like o de aplicaciones Hénon-like.

(1 \Rightarrow 3) Por definición de herraduras complejas de grado d .

(1 \Rightarrow 2) Sean $F : \bar{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una herradura compleja de grado d y $z = (x, y) \in D^2$. Considere

$$\mathfrak{C}_z = \{(\zeta_1, \zeta_2) \mid |\zeta_2|_y < |\zeta_1|_x\}$$

donde $|\zeta|_x = \frac{|\zeta|}{(1 - |x|^2)}$, de modo que este campo de conos está definido por

$$\alpha(z) = \frac{1 - |y|^2}{1 - |x|^2}$$

. Y se mostrará que es F -trapping.

Como $F^{-1}(D^2) \cap D^2$ tiene d componentes conexas, sean U_1, U_2, \dots, U_d ; y $F(D^2) \cap D^2$ tiene d componentes conexas, $F(U_1), F(U_2), \dots, F(U_d)$. $F : U_i \rightarrow F(U_i)$ es un isomorfismo para cada $i = 1, \dots, d$.

Supóngase que $x \in D^2$, $F(x) \in D^2$, y $\zeta \in \mathfrak{C}_x \subset T_x D^2$. Tómesese una función analítica $\alpha : D \rightarrow D$ con ζ tangente al gráfico de α en x . Supóngase que $x \in \text{gr}(\alpha) \cap U_i$ y considere $F(\text{gr}(\alpha) \cap U_i)$. Se define $\beta : D \rightarrow D$ tal que $\text{gr}(\beta) = F(\text{gr}(\alpha) \cap U_i)$. Así $d_x F(\zeta)$ es tangente al gráfico de β , y como $F(\text{gr}(\alpha))$ tiene d componentes, β no es sobreyectiva. Por el lema de Schwarz, β es una contracción en la métrica de Poincaré y $d_x F(\zeta) \in \mathfrak{C}_F(x)$.

(2 \Rightarrow 3) Suponga que \mathfrak{C}_z y \mathfrak{C}'_z son campos de conos F -trapping y F^{-1} -trapping, respectivamente. Considere $\pi_1 \circ F : H_y \rightarrow \mathbb{C}$ para un $y \in D$ arbitrario.

Los valores críticos de esta aplicación están fuera de D , de lo contrario los puntos críticos $z_i \in H_y$ y sus imágenes estarían en D^2 , y la imagen de vectores horizontales en z_i serían vectores verticales en $F(z_i)$, que contradice la existencia de la característica trapping del campo. Por lema 4.4.1 y la definición de aplicaciones quasi-Hénon-like de grado d , $F(\bar{B}) \cap \bar{B}$ tiene d componentes.

(3 \Rightarrow 1) Asuma que $F(\bar{B}) \cap \bar{B}$ tiene d componentes. Suponga por inducción que, para todo $n = 1, 2, \dots, N - 1$,

$$\pi_2 : \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^{-m}(D^2) \rightarrow D$$

es una fibración trivial con fibras d^n discos y para todo $y \in D$ y cada componente U de

$$H_y \cap \bigcap_{0 \leq m \leq n} F^{-m}(D^2)$$

la aplicación $\pi_1 \circ F^n : U \rightarrow D$ es un isomorfismo analítico.

Demostramos para $n = N$. Elija esa componente U para $n = N - 1$ y considere $F^N(U)$. Como $\pi_1 \circ F^{N-1}$ es un isomorfismo analítico de U a D y $F(\bar{D}^2) \cap \bar{D}^2$ tiene d componentes, $F^N(U) \cap \bar{D}^2$ tiene también d componentes, cada una homeomorfa al disco y para las cuales la aplicación $\pi_1 : U_i \rightarrow D$ es un isomorfismo.

□

Restringiendo a aplicaciones Hénon-like, la caracterización se ve como:

Corolario 4.4.2.1. *Sea $F : \bar{D}_1 \times \bar{D}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una aplicación Hénon-like de grado d . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $F : \bar{D}_1 \times \bar{D}_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una herradura compleja de grado d .
2. Para todo $(x, y) \in \bar{D}_1 \times \bar{D}_2$ los valores críticos de los polynomial-like $F_{1,y}$ y $F_{2,x}^{-1}$ (o $F_{2,x}$ y $F_{1,y}^{-1}$) están fuera de D_1 y D_2 , respectivamente.

Sobre las herraduras complejas se sabe que los diámetros de los discos en las fibras tienden a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, tal cual como sucede en la herradura de Smale y los intervalos de las proyecciones. Por último, el resultado de esta sección cae sobre la aplicación de Hénon de grado dos:

Teorema 4.4.3. Para cada $a \neq 0$ y cada c tal que

$$|c| > \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) (1 + |a|)^2$$

existe una constante $R > 0$ tal que $F_{a,c} : \overline{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una herradura compleja.

Demostración. Sean $F = F_{a,c}$ y

$$R = \alpha \left(1 + |a| + \sqrt{(1 + |a|)^2 + 4|c|} \right)$$

con $\alpha > 1/2$. Por el **Teorema 4.3.1** y el ejemplo 1 de la **Sección 4.3.1**, $F : \overline{D}_R^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es quasi-Hénon-like. A partir del **Teorema 4.4.2**, la demostración se completa mostrando que para valores apropiados de a , c y α , el campo de conos definido por

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) \mid |\zeta_2| < |\zeta_1|\}$$

es F – trapping, y similarmente,

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) \mid |\zeta_1| < |\zeta_2|\}$$

es F^{-1} – trapping.

Lo primero se sigue notando que $F(x, y) \in \overline{D}_R^2$ implica que $|x^2 + c - ay| \leq R$, lo cual a su vez implica que

$$|x|^2 \geq |c| - R(1 + |a|).$$

Como $d_{(x,y)}F(\zeta_1, \zeta_2) = (2x\zeta_1 - a\zeta_2, \zeta_1)$, mostraremos que $|\zeta_2| < |\zeta_1|$ implica $|\zeta_1| < |2x\zeta_1 - a\zeta_2|$. Esto se tiene ya que

$$2\sqrt{|c| - R(1 + |a|)} - |a| > 1.$$

Un análisis similar para F^{-1} y el segundo campo de conos genera la misma desigualdad. \square

Es decir, existe un bidisco en el cual la dinámica de $F_{a,c}$ es del tipo herradura compleja, generalizando el resultado visto para aplicaciones de Hénon reales.

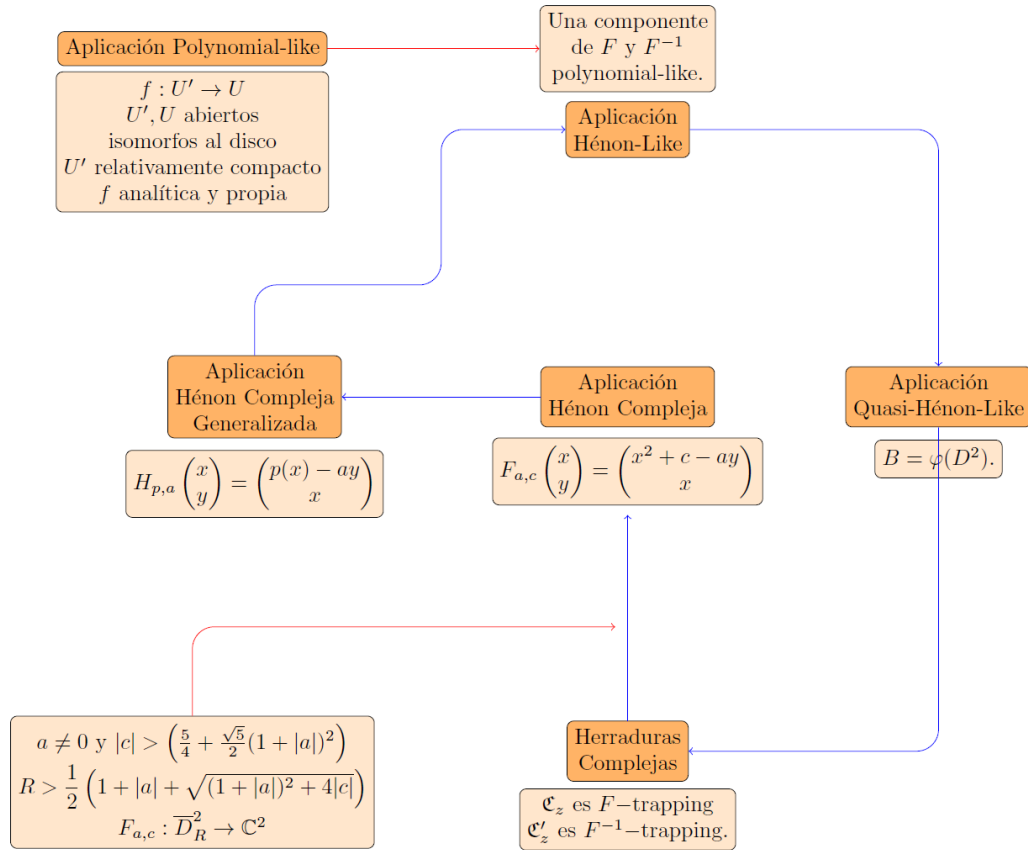


Figura 4.3: Generalizaciones Complejas

El diagrama anterior describe lo realizado durante las secciones anteriores de este capítulo en búsqueda del concepto de *Herradura Compleja*, aplicaciones en la cuales se exhiben dinámicas de herraduras análogas al caso real.

4.4.1. Conjuntos invariantes

En la última sección del **Capítulo 2**, se mostró la relación entra la dinámica de las aplicaciones de Hénon y el límite inverso de polinomios cuadráticos sobre los conjuntos invariantes haciendo uso de la dinámica simbólica.

En el caso complejo, utilizando la dinámica simbólica se pueden caracterizar estos subconjuntos invariantes de herraduras complejas que fueron generalizados a partir del caso real, y así poder entenderlos.

Definición. Sea $d \in \mathbb{Z}$ con $d \geq 2$. Entonces

$$\Sigma_d = \{\omega = (\dots\omega_{-2}\omega_{-1}\overline{\omega_0}\omega_1\omega_2\dots) : \omega_k \in \{0, 1, \dots, d\}\}$$

es el **espacio de bi-sucesiones con entradas** $\{0, 1, \dots, d\}$. Además,

$$\begin{aligned} \sigma_d : \Sigma_d &\mapsto \Sigma_d \\ \omega &\mapsto (\dots\omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\overline{\omega_1}\omega_2\dots) \end{aligned}$$

es la **función shift de orden** d .

Por otro lado, sean

$$\Sigma_d^+ = \{\omega = (\overline{\omega_0}\omega_1\omega_2\dots) : \omega_k \in \{0, 1, \dots, d\}\}$$

$$\Sigma_d^- = \{\omega = (\dots\omega_{-2}\omega_{-1}) : \omega_k \in \{0, 1, \dots, d\}\}$$

los **espacios de sucesiones con entradas** $\{0, 1, \dots, d\}$ **no-negativo** y **negativo** respectivamente. Y análogamente a σ_d , sean σ_d^+ y σ_d^- los shifts unilaterales sobre estos espacios, respectivamente.

La definición anterior generaliza la dinámica simbólica de dos símbolos ya utilizada, y con esta se desarrollan los siguientes resultados sobre los conjuntos invariantes:

Teorema 4.4.4. Sea $F : \overline{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una herradura compleja de grado d entonces existe un homeomorfismo $\Phi : K \rightarrow \Sigma_d$ que conjuga F a σ_d .

El teorema anterior es una generalización para el caso complejo del **Teorema 3.4.2**. En el caso $d = 2$, Φ es única salvo el automorfismo de Σ_2 que intercambia 0 y 1. Para lo que sigue puede fijarse d y notar $\Sigma = \Sigma_d$, $\Sigma_+ = \Sigma_d^+$, $\Sigma_- = \Sigma_d^-$, $\sigma = \sigma_d$, $\sigma_+ = \sigma_d^+$ y $\sigma_- = \sigma_d^-$.

El teorema anterior de hecho es un corolario del siguiente resultado:

Teorema 4.4.5. Existen homeomorfismos

$$\Gamma_+ : K_+ \rightarrow \Sigma_+ \times D \quad \wedge \quad \Gamma_- : K_- \rightarrow D \times \Sigma_-$$

que pueden ser escritos como

$$\Gamma_+(x, y) = (\gamma_+(x, y), y) \quad \wedge \quad \Gamma_-(x, y) = (x, \gamma_-(x, y)),$$

tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 K_+ \cap F^{-1}(D^2) & \xrightarrow{\gamma_+} & \Sigma_+ \\
 \downarrow F & & \downarrow \sigma_+ \\
 K_+ & \xrightarrow{\gamma_+} & \Sigma_+
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 K_- \cap F(D^2) & \xrightarrow{\gamma_-} & \Sigma_- \\
 \downarrow F^{-1} & & \downarrow \sigma_- \\
 K_- & \xrightarrow{\gamma_-} & \Sigma_-
 \end{array}$$

Las inclusiones $K \subset K_+$ y $K \subset K_-$ inducen las proyecciones canónicas $\Sigma \rightarrow \Sigma_+$ y $\Sigma \rightarrow \Sigma_-$.

Para la demostración véase (Oberste-Vorth, 2005). A partir de este, se obtiene una caracterización sobre el Conjunto de Julia Completo:

Teorema 4.4.6. Si F es una herradura compleja de grado d entonces K es un conjunto de Cantor y F es conjugada a la función shift de orden d sobre K .

Demostración. La segunda afirmación es resultado del Teorema 4.4.4, mientras que la primera se obtiene al relacionar la dinámica de la herradura con la dinámica simbólica sobre su conjunto invariante que ya se sabe es un conjunto de Cantor. \square

¿Y los límites inversos? Pues bien, así como en el caso real la dinámica polinomial y las aplicaciones de hénon se relacionan vía los límites inversos en los conjuntos invariantes, en el caso complejo también se llega a la relación entre las herraduras complejas y la dinámica polinomial generalizada representada por su límite inverso.

Para ver esto, sea $f : U' \rightarrow U$ un polynomial-like de grado 2 tal que los valores críticos están en $U \setminus \overline{U'}$ (por ejemplo, $U' = D_3(0)$, $U = D_9(4)$ y $f(z) = z^2 + 4$). Como el valor crítico está en $U \setminus \overline{U'}$, el conjunto $f^{-1}(U')$ consiste de dos conjuntos abiertos, U_0 y U_1 , homeomorfos a discos y cada $f|_{U_i} : U_i \rightarrow U'$ es un isomorfismo. Con esto establecido, el siguiente teorema demostrado en (Oberste-Vorth, 2005) muestra la relación entre las dinámicas polynomial-like y de herraduras complejas.

Teorema 4.4.7. Existen homeomorfismos

$$\Psi_+ : D^2 \rightarrow U \times D \quad \wedge \quad \Psi_- : D^2 \rightarrow U \times D$$

que pueden ser escritos como

$$\Psi_+(x, y) = (\psi_+(x, y), y) \quad \wedge \quad \psi_-(x, y) = (x, \psi_-(x, y)),$$

tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} D^2 \cap F^{-1}(D^2) & \xrightarrow{\psi_+} & U' \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ D^2 & \xrightarrow{\psi_+} & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D^2 \cap F(D^2) & \xrightarrow{\psi_-} & U' \\ \downarrow F^{-1} & & \downarrow f \\ D^2 & \xrightarrow{\psi_-} & U \end{array}$$

En el caso cuadrático, tenemos:

Corolario 4.4.7.1. Sean P_c un polinomio cuadrático complejo definido para $c \notin M$, $\widehat{\mathbb{C}}_{P_c}$ el límite inverso de (\mathbb{C}, P_c) y F la aplicación de Hénon (herradura compleja) con P_c en su definición. Entonces existen homeomorfismos

$$\Psi_{\pm} : K_{\pm} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_{P_c}$$

tal que

$$\begin{aligned} \widehat{P}_c \circ \Psi_+ &= \Psi_+ \circ F \\ \widehat{P}_c \circ \Psi_- &= \Psi_- \circ F^{-1} \end{aligned}$$

Demostración. Se extiende Ψ_+ de K_+ en la herradura compleja restringida a K_+ por la fórmula $\Psi_+(x) = \lim \widehat{P}_c^{-n}$. \square

Con esto se concluye el trabajo, en el cual se estudiaron las aplicaciones de Hénon y los polinomios cuadráticos tanto en variable real como en variable compleja. En ambos casos, identificando los conjuntos invariantes de la dinámica polinomial, Conjuntos de Julia para variable compleja y Conjuntos de Cantor homeomorfos al Cantor $1/3$ sobre el intervalo $[0, 1]$ para variable real. Luego de eso, se definieron las condiciones para que la aplicación de Hénon exhibiera dinámica de herradura, Herradura de Smale para variable real y Herraduras complejas para variable compleja.

Con estos elementos es posible establecer la relación, mediante la dinámica simbólica, entre el límite inverso de polinomios cuadráticos y las aplicaciones de Hénon.

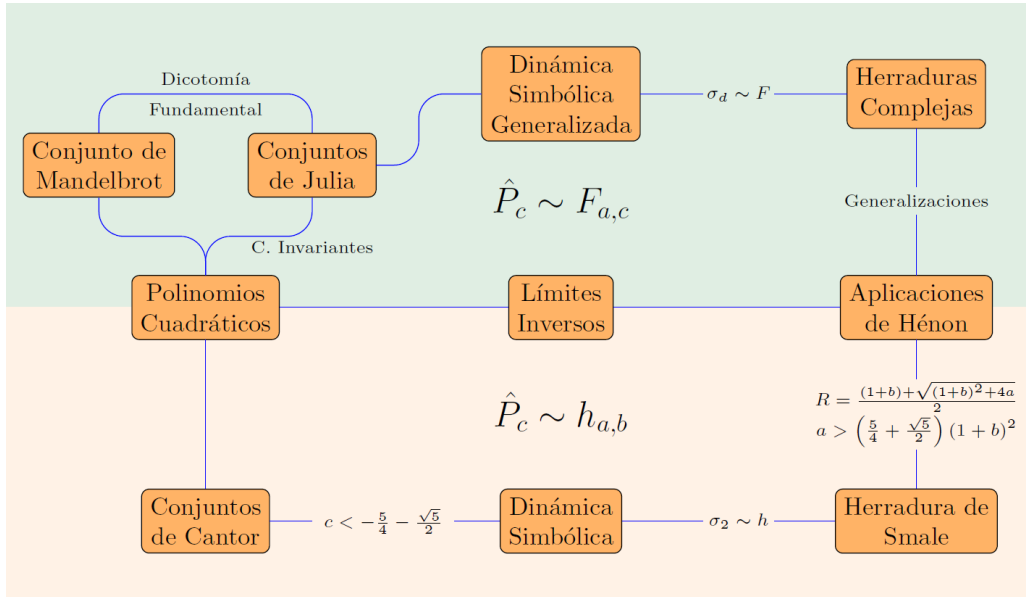


Figura 4.4: Resumen del trabajo

Conclusiones

1. La dinámica de la Aplicación de Hénon real que estudié es un excelente ejemplo como introducción a la teoría de sistemas dinámicos dadas las propiedades que exhibe.
2. Se evidencia la relación que existe entre los polinomios cuadráticos y la aplicación de Hénon como una generalización natural. El uso de los límites inversos resulta útil a la hora de demostrar esta relación formalmente sobre sus conjuntos invariantes.
3. Al igual que en la dinámica polinomial, la generalización a variable compleja brinda herramientas para la obtención de resultados sobre las Aplicaciones de Hénon, muchos de ellos análogos a la teoría polinomial.
4. La definición de los conjuntos invariantes de Aplicaciones de Hénon, al ser “una copia” de los polinomiales induce a pensar en una posible definición del conjunto de Mandelbrot como:

$$M := \{(a, c) : \|H_{a,c}(0, 0)\| \rightarrow \infty\}$$

pero esto aún no brinda caracterizaciones importantes principalmente porque:

- La órbita de 0 en el caso polinomial jugaba un papel fundamental que $(0, 0)$ no cumple en la aplicación de Hénon.
- El **Teorema 4.4.6** es la caracterización del conjunto de Julia completo para aplicaciones Hénon complejas que no contiene posibilidades para la topología del conjunto, como la dicotomía fundamental en polinomios cuadráticos complejos.

Bibliografía

- Abellán Zapata, C. (2015). Caos, linealidad y dimensión. Tesis de grado, Universidad de Murcia.
- Aybar, O., Aybar, I., and Hacinliyan, A. (2013). Stability and bifurcation in the hénon map and its generalizations. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, 4:529–538.
- Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., and Stacey, P. (1992). On devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4):332–334.
- Benedicks, M. & Carleson, L. (1991). The dynamics of the hénon map. *Annals of Mathematics*, 133(1):73–169.
- Devaney, R. (2008). An introduction to chaotic dynamical systems. *Westview press*.
- Devaney, R. and Nitecki, Z. (1979). Shift automorphisms in the hénon mapping. *Commun.Math. Phys*, 67:137–146.
- Devaney, R. L. (1994). The complex dynamics of quadratic polynomials. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 49:1–29.
- Devaney, R. L. (2018). A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment. *CRC Press*.
- Devaney, R. L., Henk Broer, F., and Hasselblatt, B. (2010). Complex exponential dynamics. *Handbook of dynamical systems*, 3:125–224.
- Douady, A. & Hubbard, J. H. (1985). On the dynamics of polynomial-like mappings. *In Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 18(2):287–343.
- Geyer, L. (2016). M597 lecture notes. *Topics in Mathematics Complex Dynamic*, 49:29–30.

-
- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *In The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, New York, NY., pages 94–102.
- Hubbard, J. (1986). The hénon mapping in the complex domain. *Chaotic Dynamics and Fractals*. Academic Press. New York, pages 101–111.
- Hubbard, J. & Oberste-Vorth, R. W. (1994a). Hénon mappings in the complex domain i: the global topology of dynamical space. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, pages 5–46.
- Hubbard, J. & Oberste-Vorth, R. W. (1994b). Hénon mappings in the complex domain ii: Projective and inductive limits of polynomials. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*.
- Keen, L. (1994). Julia sets of rational maps. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 49:71–89.
- Kuznetsov, Y. A. (2013). Elements of applied bifurcation theory. *Springer Science & Business Media*, 112.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), pages 130–141.
- Milnor, J. (1990). Dynamics in one complex variable: introductory lectures. *Institute for Mathematical Sciences*. Stony Brook, pages 130–141.
- Mora, L. & Romero, N. (1994). Una introducción a los sistemas dinámicos: via la aplicación de hénon. *Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas*.
- Munkres, J. (2014). Topology. *Pearson Education*.
- Oberste-Vorth, R. (1997). An introduction to multi-dimensional complex dynamics: Hénon mappings in \mathbb{C}^1 . *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(4):2143–2154.
- Oberste-Vorth, R. (2000). Horseshoes among hénon mappings. *Recent Advances in Applied and Theoretical Mathematics*, pages 116–121.
- Oberste-Vorth, R. (2002). Horseshoes as projective limits. *In Conference Proceedings: 2002 WSEAS MACTEE, WAMUS, NOLASC, Vouliagmeni, Athens, Greece, Dec*, pages 29–31.
- Oberste-Vorth, R. (2005). Complex horseshoes and the dynamics of mappings of two complex variables. *arXiv preprint math/0507073*.

-
- Parra, M. (2019). Rayos externos en el conjunto de mandelbrot. *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Tesis de Grado.
- Poincaré, H. (1907). Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. *Acta Math*, 31:1–64.
- Robinson, C. (1998). Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. *CRC press*, pages 73–169.
- Silverman, S. (1992). On maps with dense orbits and the definition of chaos. *Rocky Mountain Journal*, pages 353–375.

A. Función de Ángulo Doble

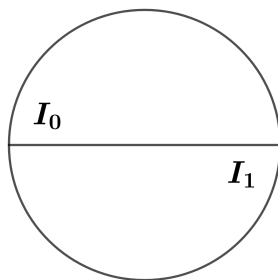
En este apéndice se muestran dos hechos sobre la Función "Duplicante". Definida en el círculo considerado como los reales módulo uno y está dada por

$$D(\theta) = 2\theta \pmod{1}$$

Obs. 1:

El ángulo θ es periódico bajo D si y sólo si θ es un racional de la forma p/q (en forma irreducible) con q impar.

Una segunda observación acerca de esta función es que se puede obtener la expansión binaria de θ notando la *posición* de θ en el círculo relativa a D . Para definir la posición, se denota el semicírculo superior $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ por I_0 y el semicírculo inferior $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$ por I_1 .



Dado θ , se relaciona una cadena infinita de 0's y 1's a θ como sigue: La posición de θ es $B(\theta) = (s_0, s_1, \dots)$ donde $s_j = 0$ si $D^j(\theta) \in I_0$ o $s_j = 1$ si $D^j(\theta) \in I_1$.

Obs. 2:

La expansión binaria de θ es la posición $B(\theta)$ respecto a la función D .