FACULTAD NAL DE MINAS - MEDELLIN COLOMBIA

Capitulo Especial

CONCEPTOS PREVIOS

En este capítulo introductorio sólo se pretende recordar al estudiante algunos de los tópicos contemplados por él en asignaturas ya cursadas. Es el caso de las Matemáticas (Algebra, Geometría, Trigonometría y Cálculo Diferencial e Integral) y la Física.

Para un repaso de las matemáticas, se recomienda como bibliografía de primera mano:

Thomas, George B

Cálculo infinitesimal y geometría analítica. Versión española de J. Porcal y L. Bravo. Editorial Aguilar.

Los siguientes son los principales temas que se deben recordar en matemáticas:

1. Igualdades y proporciones
2. Fórmulas geométricas: Areas de triángulo, paralelogramo, trapecio, círculo; volúmenes de cubo, paralelepípedo regular, cilindro regular, cono, esfera.
3. Conceptos algebráicos: Término algebráico. Operaciones algebráicas. Operaciones con cero e infinito. Productos notables y factorización. Solución de ecuaciones algebráicas de grado n: por fórmula, por tanteo y por gráfica.
4. Ecuación de una línea recta en el plano x,y: Paralela al eje x. Paralela al eje y. Conocidos un punto (x_1,y_1) y la pendiente m. Conocidos el intercepto con el eje y (0,b) y la pendiente m. Conocido el intercepto con el eje x (a,0) y la pendiente m. Conocidos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Conocidos los dos interceptos (a,0) y (0,b). Recta que pase por el origen (0,0). Ecuación general del tipo: $AX + BY + C = 0$.

5. Interpolación lineal: Por lo general se usa cuando se quiere saber el valor de una variable extractado de una tabla de datos. En este caso se desconoce $y = f(x)$, pero se dispone de una tabla de valores Y_i vs. X_i; se puede asumir que estos valores corresponden a una $Y = f(X)$ continua entre (X_1, Y_1) y (X_n, Y_n), donde $i = 1$ corresponde al primer término e $i = n$, al último de la tabla. Así, si se quiere determinar un valor intermedio de Y para un X dado, tal que $X_i < X_a < X_{i+1}$ (nótese X_i y su consecutivo X_{i+1}). Se pueden seguir, básicamente, dos procedimientos: a. Contruir una gráfica continua de Y vs. X y leer directamente $Y_a = f(X_a)$; ó b. Suponer que $Y = f(X)$ es aproximadamente una recta en el intervalo cerrado (X_i, X_{i+1}) y así aplicar la siguiente expresión general:

$$Y_a = Y_{i+1} - \left(\frac{X_{i+1} - X_a}{X_{i+1} - X_i}\right)(Y_{i+1} - Y_i) \qquad [CP.1]$$

La extrapolación lineal también puede hacerse de manera similar a la interpolación lineal, pero es mucho más arriesgada por cuanto la información suministrada por la tabla no dice nada acerca de la continuidad de la función Y vs. X para valores por arriba o por debajo de los puntos extremo; además, de ser continua la función, no podemos saber cuál será la forma de su gráfica para valores externos al intervalo fijado por la tabla. En algunos casos, la extrapolación lineal para valores muy próximos a los extremos no acarrea un error muy grande.

Ejemplo de extrapolación: En la tabla que se muestra a continuación se relacionan las variables T y P. Se pide encontrar T a P = 0.10 y P a T = 56.

P	0.1217	0.1475	0.1781	0.2141
T	40	45	50	55

$$Ta = 40 - \frac{0.1217 - 0.10}{0.1217 - 0.1475}(40 - 45) = 35.8$$

Entonces, $T_a = f(P_a) = f(0.10) = 35.8$ aprox.

$$P_b = 0.2141 - \frac{55 - 56}{55 - 50}(0.2141 - 0.1768) = 0.2213$$

Entonces, $P_b = g(T_b) = g(56) = 0.2213$ aprox.

<u>Ejemplo</u> de <u>interpolación</u>: Usando la tabla de datos que aparece a continuación, encuentre un valor de Y cuando X= 0.9 y un valor de X cuando Y= 0.3 .

Y	0.1	0.5	0.8	1.2
X	3.8	2.5	1.3	0.3

Utilizando convenientemente la ec. CP.1 obtenemos:

$Y_a = f(X_a) = f(0.9) = 0.96$ aprox.

$X_b = g(Y_b) = g(0.3) = 3.15$ aprox.

<u>Ejemplo</u> de <u>extrapolación</u> <u>con error</u> significativo: La tabla que veremos más adelante presenta algunos valores de una función Y = f(X). Se pide calcular por el método de extrapolación lineal un valor para X cuando Y= 10 y un valor para Y cuando X= 2.0 .

X	1.5	1.0	0.5	0.0
Y	0	5	8	9

Entonces, $X_a = X(Y_a) = X(10) = -0.5$ aprox.

$Y_b = Y(X_a) = Y(2.0) = -5$ aprox.

Sin embargo, la tabla se ha generado de la ecuación $Y = 9 - 4X^2$; por esta razón $X = \pm 0.5\sqrt{9 - Y}$, lo cual no permite soluciones reales sino para de Y menores o iguales a 9 . Así, $X_a = \pm 0.5\sqrt{-1} \neq -0.5$

$Y_b = -7 \neq -5.$

6. Cálculo diferencial e integral:
   a. Concepto y notación de la primera y la segunda derivadas de una función.
   b. Tener a mano una tabla de las principales diferenciales de Funciones típicas, Funciones algebráicas y Logaritmos.,Aprenderse las más comunes.
   c. Identificación de un punto máximo, un punto mínimo y un punto de inflexión, mediante los conceptos de primera y segunda derivada.
   d. Concepto y notación de la primera y la segunda derivadas parciales de una función en dos y en tres variables independientes, es decir, para funciones $f(x,y)$ ó $g(x,y,z)$.
   e. Métodos más comunes de integración indefinida e integración definida. Haciéndo más énfasis en estos últimos deben hacerse ejercicios de integración analítica (con ecuaciones) y de integración gráfica. Se recomienda aprender a manejar el papel logarítmico o papel log-log.
   f. Propiedades de la integral definida.
   g. Concepto y notación de las ecuaciones diferenciales, en especial las de primer orden y primer grado.

7. Clara distinción entre lo que es una "Diferencia Infinitesimal" y una "Cantidad Infinitesimal": Trataremos de explicar estos conceptos tan importantes para la Termodinámica con la resolución de un problema matemático.

   Problema: Sean $F_1(X) = Y = 2X^3 - 1$; $F_2(X) = 3Y = 14X^2 - 11$ y $F_3(X) = Y = 14X - 13$. La función Longitud de una curva en el plano (X,Y) será $L(X,Y) = L = f((X_2,Y_2),(X_1,Y_1))$ y la función área bajo la curva en el plano (X, Y) será $A(X,Y) = A = g((X_2,Y_2),(X_1,Y_1))$. El operador Delta hace que $\Delta(X) = X_2 - X_1$, donde X_2 y X_1 son respectivamente los límites superior e inferior de la integral definida de $d(X)$, pero no tiene sentido sino para aquellas variables que están asociadas a un punto. La Longitud y el

Area no son variables de punto, pero Y y X sí lo son. Observese que L = f(Forma de la función F(X)) y de igual modo A = g(Forma de la función F(X)).

En el problema se pide calcular $\Delta(Y)$, L y A para cada una de funciones F en el intervalo cerrado para X ($X_2 = 2$, $X_1 = 1$).

Calculo de $\Delta(Y)$: Encontremos dY para cada caso y luego integremos entre los límites dados:

$\frac{6X^3}{3}$

$dF_1 = 6X^2dX$; Integrando: $f_1 = 2(X_2^3 - X_1^3) = 14$

$(1/3)dF_2 = (28/3)XdX$; Int.: $f_2 = (14/3)(X_2^2 - X_1^2) = 14$

$dF_3 = 14XdX$; Integrando: $f_3 = 14(X_2 - X_1) = 14$

Comprobación:

$F_1(X_2) = 2X_2^3 - 1 = 15 = Y_2$; $F_1(X_1) = 2X_1^3 - 1 = 1 = Y_1$

$f_1 = \Delta Y = Y_2 - Y_1 = 14$

$(1/3)F_2(X_2) = (1/3)(14X_2^2 - 11) = 15 = Y_2$

$(1/3)F_2(X_1) = (1/3)(14X_1^2 - 11) = 1 = Y_1$

$f_2 = \Delta Y = Y_2 - Y_1 = 14$

$F_3(X_2) = 14X_2 - 13 = 15 = Y_2$; $F_3(X_1) = 14X_1 - 13 = 1 = Y_1$

$f_3 = \Delta Y = Y_2 - Y_1 = 14$

Conclusión: f_1, f_2 y f_3 son independientes de la forde la curva a partir de la cual se generaron dado que representan la Diferencia Finita de una Variable con Propiedad Puntual entre dos puntos dados, es decir, son un ΔY. Entonces, $\lim_{\Delta Y \to 0} (\Delta Y) = dY$; aquí se ve claramende que dY es una "Diferencia Infinitesimal", porque se ha generado en el límite de una "Diferencia Finita".

Cálculo de L: Por definición, la longitud de una curva entre dos puntos dados, con límites de integración en X, está dada por la siguiente expresión:

$$L\Big|_a^b = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Aquí debemos notar que para los tres casos (como se demostró antes) la integración se hará entre los mismos puntos límite (1 , 1) y (2 , 15), pero sobre tres funciones distintas (diferente forma).

De F_1 : $(dY/dX)_1 = 6X^2$, entonces la longitud será

$$f_4 = \int_1^2 (1 + 36X^4)^{\frac{1}{2}} dX$$

Resolviendo por métodos numéricos aproximados, dada la complejidad de la integración, obtenemos $f_4 = 14.5$ aprox.$= L_1$

De F_2: $(dY/dX)_2 = (28/3)X$; así $f_5 = \int_1^2 (1 + ((28/3)X)^2)^{\frac{1}{2}} dX$

Esta es una integral del tipo $\int (a + x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ que tiene solución directa.

Obtenemos $f_5 = 14.0597 = L_2$

De F_3: $(dY/dX)_3 = 14$; así $f_6 = \int_1^2 (1 + 196)^{\frac{1}{2}} dX$

Obtenemos $f_6 = 14.0357 = L_3$

Conclusión: f_4, f_5 y f_6 son dependientes de la forma de la curva a partir de la cual se generaron dado que se calcularon entre los mismos puntos. De tratarse de una variable puntual L_1, L_2 y L_3 deberían tener el mismo valor,,por lo tanto, la Longitud de una curva es función de la forma de la misma; a este tipo de variables (que son función de la forma de la curva) se les llama variables de trayectoria o recorrido dado que no tienen propiedad puntual. Entonces, $\lim_{L \to 0} (L(X,Y)) = dL$

aquí se ve claramente que dL es una "Cantidad Infinitesimal" porque se ha generado en el límite de una "Cantidad finita" ó "Variable de Trayectoria", o sea, que por más pequeña que sea L, nunca será generada por la diferencia de una variable puntual (en este caso es función de dos variables y de la forma de la curva).

Cálculo de A: Como el área bajo la curva es una función de dos variables que a su vez son función una de la otra, podemos calcular, en este caso, $A_x = A(X_2, X_1)$ y $A_y = A(Y_2, Y_1)$.

Trabajemos primero $A_x = \int YdX$

De F_1: $f_7 = \int_1^2 (2X^3 - 1)dX$; $f_7 = 6.5 = A_{x1}$

De F_2: $f_8 = (1/3)\int_1^2 (14X^2 - 11)dX$; $f_8 = 7.2 = A_{x2}$

De F_3: $f_9 = \int_1^2 (14X - 13)dX$; $f_9 = 8.0 = A_{x3}$

Ahora trabajemos $A_y = \int XdY$

De F_1: $f_{10} = \int_1^2 X(6X^2dX)$; $f_{10} = 22.5 = A_{y1}$

De F_2: $f_{11} = \int_1^2 X(28XdX)$; $f_{11} = 21.7 = A_{y2}$

De F_3: $f_{12} = \int_1^2 X(14XdX)$; $f_{12} = 21.0 = A_{y3}$

Conclusión: En este caso se observa que $A_x \neq A_y$; f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11} y f_{12} son dependientes de la forma de la curva y de la variable que se tome como independiente, aún cuando se calcularon a partir de los mismos puntos. De tratarse de una variable puntual, A_{xi} y A_{yi} deberían tener el mismo valor, por lo tanto el Area bajo una curva es una variable de trayectoria o recorrido dado que no tiene propiedad puntual. Entonces, $\lim_{A \to 0} (A(X,Y)) = dA$, aquí se ve claramente que dA es una "Cantidad Infinitesimal" porque se ha generado en el límite de una cantidad finita.

Observaciones: Sin entrar en detalles de definición de ecuaciones diferenciales exactas, podemos generalizar diciendo que una "Diferencia Infinitesimal" da origen a una diferencial exacta, mientras que una "Cantidad Infinitesimal" origina una diferencial inexacta.

En Termodinámica se acostumbra la siguiente notación para los distintos infinitésimos que se puedan estudiar:

dY = Diferencia infinitesimal total de una variable

δA = Cantidad infinitesimal de área, en este caso

∂X = Diferencia infinitesimal parcial de la variable X, en este caso, en una función de más de dos variables independientes.

Así, $\int_{Y_1}^{Y_2} dY = \Delta Y = Y_2 - Y_1$; $\int_1^2 \delta A = {}_1A_2 = A_{12}$ [CP.2]

si, $(\partial Y/\partial X)_z = f(X) \Rightarrow \int (\partial Y/\partial X)_z dX = \int f(X)dX$

Para el repaso de la Física se cree muy conveniente consultar la siguiente bibliografí:

Resnick, Robert y Halliday, David
Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería; Parte Uno. Traducción de S. Mosqueira R. Compañía Editorial Continental, S.A.

Entre otros temas deben revisarse con detenimiento los siguientes:

1. Medidas Físicas.
   Medidas. Cantidades físicas. Patrones y unidades. Sistemas de referencia. Longitud. Tiempo. Sistemas de unidades.
2. Dinámica de partículas.
   Concepto de masa. Las tres leyes fundamentales de la mecánica newtoniana. Fuerzas de fricción. Limitaciones de la mecánica newtoniana.
3. Trabajo y energía.
   Trabajo. Potencia. Energía cinética. Teorema Trabajo-Energía.
4. La conservación de la energía.
   Fuerzas conservativas y no-conservativas. Energía potencial. Sistemas conservativos en una, dos y tres dimensiones. Sistemas con fuerzas no-conservativas. La conservación de la energía. Masa y energía.
5. Estática de cuerpor rígidos.
   Condiciones para el equilibrio mecánico. Equilibrio estable, inestable e indiferente en un campo gravitacional.
6. Gravitación.
   Variación de la aceleración debida a la gravedad. El campo gravitacional. Energía potencial gravitacional.
7. Estática de los fluidos .
   Noción de fluido. Presión y densidad. Variación de la presión en un fluido en reposo. Principio de Pascal y pricipio de Arquímides. Medida de presión.

8. Dinámica de los fluidos.

Conceptos generales. Flujo irrotacional. Ecuación de la continuidad. Ecuación de Bernoulli. Leyes de conservación en mecánica de fluidos. Campo de flujo.

9. Temperatura.

Descripción macroscópica y microscópica. Equilibrio térmico (Ley Cero de la Termodinámica). Medida de temperaturas. Termómetro de gas. Temperatura de gas ideal. Escalas de temperatura. Dilatación térmica.

10. Calor y Primera Ley de la Termodinámica.

Calor. Cantidad de calor y calor específico. Conducción del calor. Equivalente mecánico del calor. Calor y trabajo. Primera ley de la termodinámica.

11. Teoría cinética de los gases.

Ecuación de estado del gas ideal. Concepto de "mole" o "mol". Otras ecuaciones para gases reales.

12. Entropía y la Segunda ley de la Termodinámica.

Procesos reversibles e irreversibles. Ciclo de Carnot. Segunda ley de la termodinámica. Eficiencia de las máquinas. Escala termodinámica de temperatura. Entropía. La entropía y el desorden.