Sobre representaciones de ciertas álgebras de transformación

ROBINSON JULIAN SERNA VANEGAS
CÓDIGO 01-830222

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
JUNIO DE 2010

Sobre representaciones de ciertas álgebras de transformación

Robinson Julian Serna Vanegas
código 01-830222

Trabajo final para optar al título de
Magíster en Ciencias Matemáticas

Director
Oleksandr Zavadskyy
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2010

Dedicado a

Dios todopoderoso por su favor para conmigo y a mi esposa por su amor incondicional.

Agradecimientos

Doy gracias en primer lugar a Dios quien me ha dado capacidad y me ha fortalecido en todo momento.

Expreso mi gratitud a mi esposa por motivarme permanentemente a cumplir este sueño, a mis padres por apoyarme en todos los retos que he emprendido y a mis suegros por su ayuda incondicional.

Agradezco al Profesor Zavadskyy por los aportes que ha hecho en mi formación académica, en el área de representaciones de estructuras algebraicas; además, por confiar en mis capacidades para dirigirme en este trabajo final.

Índice general

Introducción

La teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados (posets) sobre un campo fue desarrollada por la escuela de Kiev durante los años 1970-1990 siguiendo el trabajo inicial de Nazarova y Roiter [12]. Ellos asociaron a cada poset un problema matricial, reduciendo de ésta manera la clasificación de representaciones indescomponibles de posets a problemas de algebra lineal.

Para hallar la clasificación de representaciónes indescomponibles, Nazarova y Roiter construyeron un algoritmo efectivo de diferenciación de posets con respecto a un punto maximal. Como resultado de utilizar dicho algoritmo, Kleiner [7, 8] obtuvo el criterio de tipo representación finito para posets, así como la lista de todas las representaciones indescomponibles de posets de tipo finito sobre campos arbitrarios.

Además, Kleiner extendió el problema de representaciones de posets al problema de representaciones de pares de posets. Él consideró un problema matricial plano asociado a cada par de ellos y demostró el criterio respectivo de tipo representación finito.

Luego, Zavadskij y Kirichenko [21, 22] consideraron los órdenes tejados, en otra terminología, anillos semimaximales (anillos semiperfectos, semiprimarios, noetherianos, cuyos anillos principales de endomorfismos son de valuación discreta). Ellos investigaron los módulos admitidos sobre un orden tejado usando técnicas de la teoría de representaciones de posets, así como algunas otras técnicas nuevas desarrolladas en [17, 22], más precisamente, los algoritmos de diferenciación para órdenes tejados y para posets (respecto a un par conveniente de puntos) construidos por Zavadskij en 1974 y publicados en 1977 en [22] y [17] respectivamente. Con el uso de esos métodos ellos obtuvieron el criterio principal de tipo representación finito para órdenes tejados el cual es una extensión del criterio de Kleiner para posets ordinarios.

Más tarde, Zavadskij y Revitskaya generalizaron el concepto de representaciones de órdenes tejados y de representaciones de posets finitos sobre un campo T introduciendo un problema matricial plano de tipo mixto sobre un par de álgebras que ellos llamaron álgebras de transformación. Ellos demostraron en [25] el criterio de tipo módulo acotado para un par de dichas álgebras el cual generaliza a la vez los criterios de tipo representación finito para órdenes tejados y para pares de posets finitos.

El objetivo principal de este trabajo es exponer en una forma introductoria y sistemática algunos temas de la teoría de representaciones. El primer capítulo contiene algunos preliminares de la teoría clásica de representaciones de posets. Posteriormente, en el segundo capítulo, se expone la teoría de representaciones de órdenes tejados de tipo finito. Finalmente, el tercer capítulo contiene el problema de representaciones de álgebras de transformación esbozando la prueba del criterio principal de tipo módulo acotado.

Adicionalmente, en la sección 3.7 presentamos en una forma breve algunas ideas generales sobre vías de solución de una conjetura (formulada en [25]) sobre el acotamiento de dimensiones de representaciones indescomponibles de pares de álgebras de transformación de tipo módulo acotado, en toda la clase de tales álgebras.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos generales y los resultados más importantes acerca de la teoría clásica de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados (posets) ordinarios, considerando únicamente posets finitos y representaciones de dimensión finita. Las respectivas pruebas y otros resultados más profundos de la teoría pueden consultarse en [5, 7, 8, 12–14, 19, 21–23, 25].

1.1. Representaciones de posets

Una **representación** de un poset finito $\mathcal{P}$ sobre un campo K es una tupla

$$U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$$

de K-espacios vectoriales de dimensión finita tales que $U_x \subseteq U_0$ para cada $x \in \mathcal{P}$ y si $x \leq y$ entonces $U_x \subseteq U_y$. El **vector dimensión** de una representación U es el vector $d = \underline{\dim}\, U = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P}) \in \mathbb{Z}^{\mathcal{P}}$ con $d_0 = \dim_K U_0$ y $d_x = \dim_K(U_x/\underline{U}_x)$, donde $\underline{U}_x = \sum_{y<x} U_y$ es un subespacio de U_x llamado **radical** de U_x.

Un **morfismo** $\varphi : U \longrightarrow V$ de una representación U en una representación V es una función K-lineal $\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ con la condición $\varphi(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$. La **categoría de representaciones** de $\mathcal{P}$ sobre el campo K es denotada por $\operatorname{rep}_K \mathcal{P} = \operatorname{rep} \mathcal{P}$. Obviamente, dos objetos U, V en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$ son **isomorfos** (se denota $U \simeq V$) si y sólo si existe un isomorfismo de K-espacios $\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) = V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

La **suma directa** de dos respresentaciones U, V de $\mathcal{P}$ es la representación

$$U \oplus V = (U_0 \oplus V_0, U_x \oplus V_x : x \in \mathcal{P}).$$

Una representación U se dice **descomponible** si es nula o bien si $U \simeq U' \oplus U''$ para algunas representaciones U', U'' no nulas. En caso contrario, U se llamará **indescom-**

ponible. Denotamos por $\operatorname{Ind}\mathcal{P} = \operatorname{Ind}_K \mathcal{P}$ al conjunto completo de representaciones indescomponibles sobre K no isomorfas dos a dos.

Se puede verificar que la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ es de **Krull-Schmidt**, esto es, la descomposición de cada representación de $\mathcal{P}$ en suma directa de representaciones indescomponibles es única salvo, isomorfismo y permutación de sumandos. En consecuencia, la clasificación de los objetos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ se reduce a a la clasificación de objetos en $\operatorname{Ind}\mathcal{P}$.

Un ejemplo sencillo de representaciones indescomponibles son las llamadas **representaciones triviales**, es decir, aquellos objetos en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ que tienen espacio principal U_0 isomorfo al cuerpo K. Para describir este tipo de representaciones, introducimos el concepto de **cono superior** (**inferior**) de un punto $x \in \mathcal{P}$ como el conjunto $x^{\nabla} = \{y \in \mathcal{P} : x \leq y\}$ ($x_{\Delta} = \{y \in \mathcal{P} : x \geq y\}$). Más generalmente, definimos el cono superior (inferior) de un subconjunto A de $\mathcal{P}$ como el conjunto $A^{\nabla} = \bigcup_{a\in A} a^{\nabla}$ ($A_{\Delta} = \bigcup_{a\in A} a_{\Delta}$).

Luego, a cada subconjunto A del poset $\mathcal{P}$ le asociamos una representación trivial $K(A) = (K, U_x : x \in \mathcal{P})$, donde

$$U_x = \begin{cases} K & \text{si } x \in A^{\nabla}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular, si $A = \emptyset$ obtenemos la representación $K(\emptyset) = (K, 0, \ldots, 0)$.

Es claro, que para cualquier conjunto $A \subseteq \mathcal{P}$ el vector $\underline{\dim}\, K(A) = (1, d_x : x \in \mathcal{P})$, donde $d_x = 1$ si x es un punto minimal en A y $d_x = 0$ en otro caso. En adelante si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ escribiremos $K(A) = K(a_1, \ldots, a_n)$.

Por otra parte, la representación $U = (U_0, U_a, U_b, U_c)$ del poset $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ de tres puntos incomparables tal que $U_0 = K \oplus K$, $U_a = K \oplus 0$, $U_b = 0 \oplus K$ y $U_c = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in K\}$ es un ejemplo de una representación indescomponible no trivial.

Problema matricial

El problema principal de la teoría clásica de representaciones de posets es clasificar todas las clases no isomorfas de representaciones indescomponibles de un poset dado sobre un campo K. Para ello, Nazarova y Roiter descubrieron que dicha clasificación se reduce a hallar las formas canónicas indescomponibles de un problema matricial asociado al poset.

Dada una representación U del poset $\mathcal{P}$ sobre K, elegimos una base $B_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ para el k-espacio principal U_0 y un sistema de generadores B_x de cada subespacio U_x módulo su radical. Escribimos la matriz

$$M = \left[\ \cdots \;\middle|\; M_x \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; M_y \;\middle|\; \cdots\ \right]$$

separada por franjas verticales M_x $(x \in \mathcal{P})$ formadas por vectores columnas, los cuales son las coordenadas de los vectores en B_x con respecto a la base elegida B_0.

Las posibles elecciones de la base B_0 del espacio U_0 y de los sistemas de generados B_x de los subespacios U_x corresponden a las **transformaciones admisibles** de la matriz M siguientes:

i) Transformaciones K-elementales sobre filas de la matriz M.

ii) Transformaciones K-elementales sobre columnas de cada bloque M_x.

iii) Para $x \leq y$, transformaciones K-elementales con adición de columnas del bloque M_x multiplicadas por un escalar del campo K a columnas del bloque M_y.

Dos matrices M, M' de este tipo son **equivalentes** (se denota $M \sim M'$) si M es obtenida por M' a través de transformaciones admisibles.

La matriz M es una **representación matricial** del poset $\mathcal{P}$ sobre K, su **vector dimensión** es $d = \underline{\dim}\, M = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P}) \in \mathbb{Z}^{\mathcal{P}}$ donde d_0 es el número de filas de M y d_x es el número de columnas en la franja M_x. Es claro que $\underline{\dim}\, U \leq \underline{\dim}\, M$, la igualdad se tiene si y sólo si cada sistema de generadores B_x es una base de U_x módulo su radical; en tal caso, dos objetos U, U' en $\operatorname{rep} \mathcal{P}$ son isomorfos si y sólo si para cualesquiera representaciones matriciales correspondientes M, M', se tiene que $M \sim M'$.

Observación 1.1. Por lo anterior, la clasificación de representaciones de dimensión finita de un poset $\mathcal{P}$ se reduce a un problema matricial, es decir, se reduce al problema de hallar formas canónicas no equivalentes de matrices de la forma M.

Definimos la **suma directa** de dos representaciones matriciales $M = [M_1 \,|\cdots|\, M_n]$ y $M' = [M'_1 \,|\cdots|\, M'_n]$ como la representación matricial

$$M \oplus M' = \left[\begin{array}{cc|c|cc} M_1 & 0 & \cdots & M_n & 0 \\ 0 & M'_1 & \cdots & 0 & M'_n \end{array}\right].$$

Una representación matricial es **descomponible** si es la suma directa de dos representaciones matriciales no nulas, en caso contrario, la representación matricial se llama **indescomponible**.

Nota 1.2. Se admite considerar representaciones matriciales «ideales», esto es, tales que contienen cero (n) número de filas y n (cero) número de columnas $M_{0,n}$ ($M_{n,0}$). Entonces, por ejemplo, si $\mathcal{P} = \{a\}$ es un poset de un único punto, su representación $M = [0]$ (matriz nula cuadrada de orden uno) es descomponible, ya que $M = M_{0,1} \oplus M_{1,0}$.

1.2. Diferenciación respecto a un punto maximal

Los algoritmos de diferenciación de posets son herramientas que se han construido para realizar la clasificación de representaciones de un poset dado. La idea básica de estos algoritmos consiste en pasar de una representación de un poset $\mathcal{P}$ a otra representación del poset derivado $\mathcal{P}'$, de tal manera que la clasificación de representaciones de ambos posets puedan ser descritas pasando del uno al otro; más precisamente, se puede formular una biyección entre representaciones indescomponibles de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ módulo un número finito de representaciones especiales. Aquí describimos el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal obtenido por Nazarova y Roiter en [12].

El conjunto de puntos maximales (minimales) de $X \subseteq \mathcal{P}$ lo denotamos por $\max X$ ($\min X$). Si $x \in \mathcal{P}$, denotamos por $\operatorname{inc}(x)$ al conjunto de puntos de $\mathcal{P}$ incomparables con x. Si $y \in \operatorname{inc}(x)$, escribimos $x||y$. Si $X, Y \subseteq \mathcal{P}$, escribimos $X||Y$ ($X < Y$) si $x||y$ ($x < y$) para todos los puntos $x \in X, y \in Y$.

Un poset es una **cadena** si es un orden lineal, es infinita o finita de acuerdo al número de elementos que tiene la cadena. Si la cadena tiene n puntos decimos que es una cadena de **longitud** n. Además, un poset es una **anticadena** si sus puntos son incomparables dos a dos. A una anticadena de dos (tres) puntos de le llama **díada** (**tríada**).

Si $\mathcal{P} = \bigcup X_i$ y $X_i \cap X_j = \emptyset$ entonces el poset $\mathcal{P}$ se dice que es la **suma** de los subposets $\{X_i\}$ y se denota $\mathcal{P} = \sum X_i$ (los puntos de diferentes X_i pueden ser comparables). Una suma $X + Y$ es **cardinal** (**ordinal**) si $X||Y$ ($X < Y$) y es denotada por $X \sqcup Y$ ($\mathcal{P} = X < Y$). La suma ordinal arbitraria de posets de tipo díada y posets de un único punto se le llama **girnalda**.

El **ancho** $w(\mathcal{P})$ del poset $\mathcal{P}$ es el máximo número de puntos mutuamente incomparables en $\mathcal{P}$. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3 (Dilworth, [15]). *Cada poset de ancho n es una suma de n cadenas.*

Denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ el **retículo modular libre** generado por el poset $\mathcal{P}$ (con operaciones denotadas por $\cdot$ y $+$) el cual puede ser entendido como el retículo que corresponde a las clases de equivalencia de términos no vacíos formados por elementos de $\mathcal{P}$ con el uso de operaciones $\cdot$ y $+$. Evidentemente, cada representación $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ induce una representación $U_{\mathcal{L}} = (U_0, U_x : x \in \mathcal{L})$ del retículo $\mathcal{L}$ donde $U_{x+y} = U_x + U_y$ y $U_{x.y} = U_x \cap U_y$ para cada $x, y \in \mathcal{P}$.

El **semiretículo superior** $\widehat{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ es el conjunto de todas las sumas formales de puntos $x_1 + \ldots + x_n$ donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una anticadena en $\mathcal{P}$, con el orden siguiente:

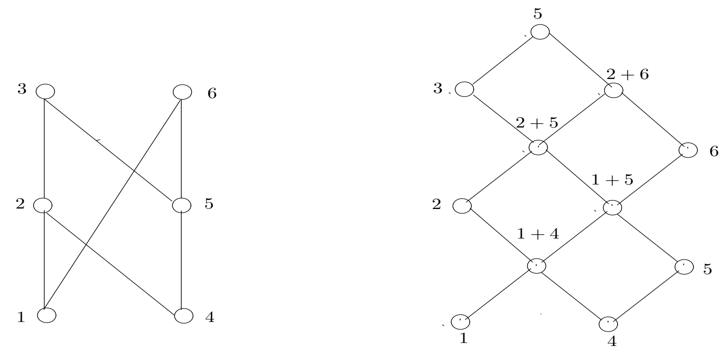
$$x_1 + \ldots + x_n \leq y_1 + \ldots + y_n \Leftrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}_{\Delta}\,.$$

De manera dual, el **semiretículo inferior** $\check{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ consiste de todos los productos formales de puntos $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una anticadena en $\mathcal{P}$, con el orden siguiente:

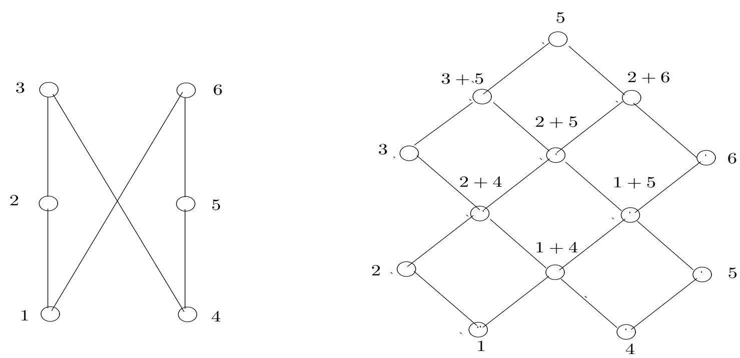
$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \geq y_1 \cdot \ldots \cdot y_n \Leftrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}^{\nabla}.$$

Ejemplo 1.4. Presentamos al lado izquierdo un poset y al lado derecho su respectivo semiretículo superior.

a)



b)



Los semiretículos $\widehat{\mathcal{P}}$ y $\check{\mathcal{P}}$ estan contenidos en $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ y se cumple que $\widehat{\mathcal{P}} \cap \check{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. Además, en el caso $w(\mathcal{P}) \leq 2$ los puntos en $\widehat{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$ son de la forma $x + y$ donde $\{x, y\}$ es una díada. Seguidamente, con relación a lo anterior, enunciamos un resultado sencillo e importante [2].

Lema 1.5. *Si $w(\mathcal{P}) = 2$, las representaciones indescomponibles del poset $\mathcal{P}$ tienen la forma $K(\emptyset)$,$K(x)$ con $x \in \mathcal{P}$ y $K(x, y)$ donde x, y son incomparables en $\mathcal{P}$.*

De acuerdo con Lema 1.5 se observa que las representaciones de este tipo de posets son bastante sencillas, el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal se utiliza en posets que al omitirle cierto cono inferior tenga ancho menor o igual a dos. A continuación (siguiendo [4, 12]) exponemos el algoritmo.

Un punto $b \in \max\mathcal{P}$ se dice **conveniente** para diferenciación si $w(\mathcal{N}) \leq 2$ donde $\mathcal{N} = \mathcal{P} \setminus b_{\Delta}$. Definimos el **poset derivado** de $\mathcal{P}$ con respecto al punto conveniente b por la igualdad

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_b = (\mathcal{P} \setminus \{b\}) \cup \widehat{\mathcal{N}}$$

con las relaciones de orden entre $\mathcal{P}\setminus\{b\}$ y $\widehat{\mathcal{N}}$ de manera natural como de subconjuntos del retículo $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.

Un ejemplo de un posets al cual no es posible realizar la diferenciación por un punto maximal es el poset G presentado en la página 14.

El **funtor de diferenciación** $F^b : \operatorname{rep}\mathcal{P} \longrightarrow \operatorname{rep}\mathcal{P}'$ correspondiente al punto maximal b asigna a cada objeto U en $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ un **objeto derivado** U' tal que $U'_0 = U_0$ y

$$U'_z = \begin{cases} U_z \cap U_b & \text{si } z \in \mathcal{P} \setminus \{b\}\,, \\ (U_x + U_y) \cap U_b & \text{si } z = x + y. \end{cases}$$

Además, a cada morfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ (considerado como una aplicación K-lineal $\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$) se le asigna el **morfismo derivado** $\varphi' = \varphi$.

Vamos a enunciar la propiedad principal de la diferenciación por un punto maximal establecida inicialmente en lenguaje matricial por Nazarova y Roiter [12] (biyección entre indescomponibles, abajo) y luego interpretada desde el punto de vista categórico, usando el funtor F^b, por Gabriel [4] (la equivalencia de categorías, abajo).

Teorema 1.6. *El funtor de diferenciación con respecto a un punto maximal*

$$F^b : \operatorname{rep}\mathcal{P} \longrightarrow \operatorname{rep}\mathcal{P}'_b$$

induce una equivalencia de categorías cocientes

$$rep\mathcal{P}/\left\langle \operatorname{Ind}\mathcal{N}\right\rangle \xrightarrow{\sim} \operatorname{rep}\mathcal{P}'_b$$

y una biyección entre indescomponibles

$$\operatorname{Ind}\mathcal{P} \setminus \operatorname{Ind}\mathcal{N} \rightleftarrows \operatorname{Ind}\mathcal{P}'_b.$$

En particular, $|\operatorname{Ind}\mathcal{P}'_b| = |\operatorname{Ind}\mathcal{P}| - |\widehat{\mathcal{N}}| - 1.$

De manera dual se define el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto minimal, su construcción se puede ver por ejemplo en [20].

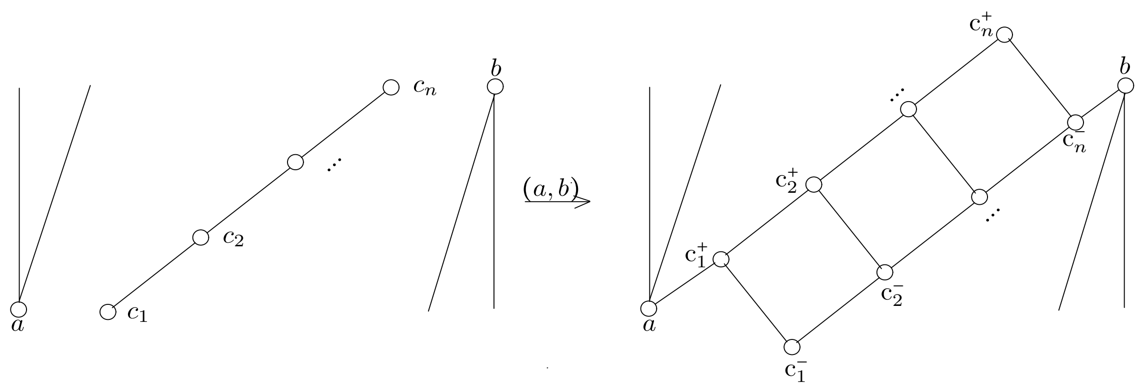
1.3. Diferenciación respecto a un par conveniente

Un par de puntos (a, b) se dice **conveniente** para diferenciación en $\mathcal{P}$, si $\mathcal{P} = a^{\nabla} + C + b_{\Delta}$ donde $C = \{c_1 < \ldots < c_n\}$ es una cadena (puede ser vacía) incomparable con los puntos a y b. Llamaremos al par conveniente (a, b) **especial** (**simple**) si $C = \emptyset$ ($|C| = 1$). El caso $b < a$ es admitido pero el caso $a \leq b$ contradice la definición.

El **poset derivado** con respecto al par (a, b) es un subposet en $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ de la forma

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{(a,b)} = a^{\nabla} + C^{-} + C^{+} + b_{\Delta},$$

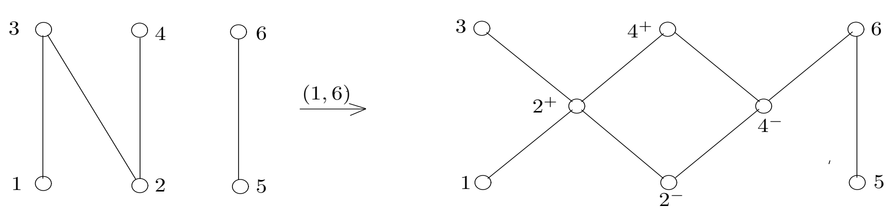
donde $C^{-} = \left\{c_1^{-} = b.c_1, \ldots, c_n^{-} = b.c_n\right\}$ y $C^{+} = \left\{c_1^{+} = a + c_1, \ldots, c_n^{+} = a + c_n\right\}$ son subconjuntos del retículo $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ y cumplen las relaciones de orden según el siguiente diagrama.



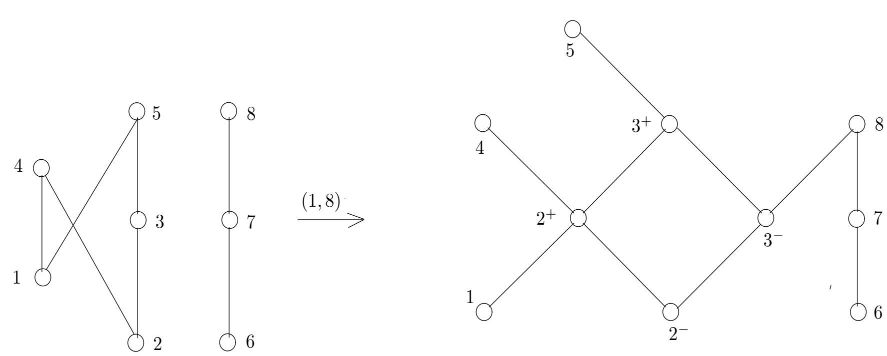
Es claro que cada nuevo par de puntos $c_i^{-} = c_i b$ y $c_i^{+} = a + c_i$ hereda las relaciones de orden previas del punto «paternal» c_i con los puntos del subposet $\mathcal{P} \setminus C$. Posteriormente, los puntos de los conjuntos $\mathcal{P} \setminus C$ y $\mathcal{P}' \setminus (C^{-} + C^{+})$ son identificados.

Ejemplo 1.7. Presentamos al lado izquiero un poset y al lado derecho su respecivo poset derivado con respecto al par conveniente indicado sobre la flecha.

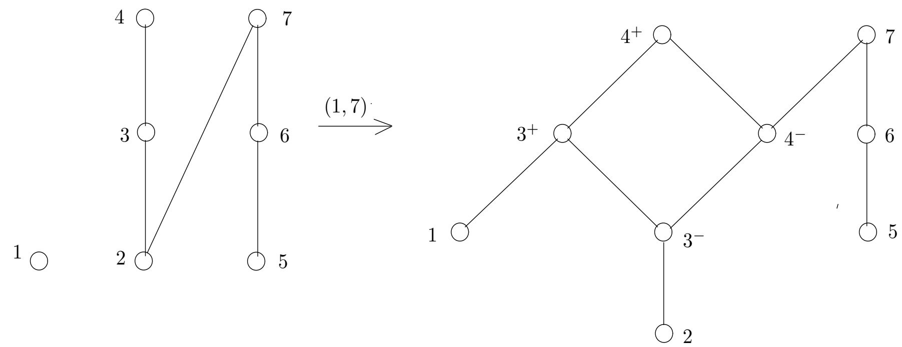
a)



b)



c)



El **funtor de diferenciación** $F^{(a,b)} : \operatorname{rep}\mathcal{P} \longrightarrow \operatorname{rep}\mathcal{P}'$ correspondiente al par de puntos (a, b) asigna a cada objeto $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ un objeto derivado $U' = (U'_0, U'_x : x \in \mathcal{P}')$ tal que $U'_0 = U_0$ y

$$U'_x = \begin{cases} U_x & \text{si } x \in a^{\nabla} + b_{\Delta}, \\ U_{c_i} \cap U_a & \text{si } x = c_i^-, \\ U_{c_i} + U_a & \text{si } x = c_i^+, \end{cases}$$

Además, a cada morfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ (considerado como una aplicación K-lineal $\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$) se le asigna el **morfismo derivado** $\varphi' = \varphi$.

Sea $\Omega = \langle K(a), K(a, c_1), \cdots, K(a, c_n)\rangle$ el ideal de la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}$ generado por los morfismos que se factorizan por sumas directas finitas de los objetos $K(a), K(a, c_1), \cdots, K(a, c_n)$ y sea $\Omega' = \langle K(a)\rangle$ el ideal de la categoría $\operatorname{rep}\mathcal{P}'$ generado por los morfismos que se expresan como suma directa de $m \geq 1$ copias del objeto $K(a)$. El funtor $F^{(a,b)}$ induce una equivalencia de categorías cocientes $(\operatorname{rep}\mathcal{P})/\Omega \overset{\sim}{\to} (\operatorname{rep}\mathcal{P}')/\Omega'$, más precisamente se cumple el siguiente resultado [20].

Teorema 1.8. *Sea $\mathcal{P} = a^{\nabla} + \{c_1 < \ldots < c_n\} + b_{\Delta}$ un poset con un par conveniente de puntos (a, b). El funtor de diferenciación $F^{(a,b)}$ induce una equivalencia de categorias cocientes*

$$(\operatorname{rep}\mathcal{P})/\left\langle K(a), K(a, c_1), \ldots, K(a, c_n)\right\rangle \overset{\sim}{\to} (\operatorname{rep}\mathcal{P}'_{(a,b)})/\left\langle K(a)\right\rangle$$

y una biyección entre indescomponibles

$$(\operatorname{Ind}\mathcal{P}) \setminus \{K(a), K(a, c_1), \ldots, K(a, c_n)\} \rightleftarrows \operatorname{Ind}\mathcal{P}'_{(a,b)} \setminus \{K(a)\}$$

En particular, $\left|\operatorname{Ind}\mathcal{P}'_{(a,b)}\right| = |\operatorname{Ind}\mathcal{P}| - n.$

Observemos que la diferenciación por un punto maximal se reduce a la diferenciación por un par conveniente del modo siguiente. Un poset **completado** $\overline{\mathcal{P}}_{(a,b)}$ con respecto al par especial (a, b) se obtiene de $\mathcal{P}$ por adjunción de una sola relación $a < b$. Si $b < a$ en $\mathcal{P}$ entonces los puntos a y b se identifican.

La diferenciación con respecto a un punto maximal $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P}'_b$ está determinada por una sucesión de pares convenientes de puntos

$$(x_1, b), \ldots, (x_m, b), (\emptyset, b),$$

si podemos pasar de $\mathcal{P}$ al poset $\mathcal{P}'_b$ a través de la sucesión de posets

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m, \mathcal{P}_{m+1} = \mathcal{P}'_b,$$

donde (x_i, b) es un par conveniente en $\mathcal{P}_{i-1}$ y $(\overline{\mathcal{P}_{i-1}})'_{(x_i,b)} = \mathcal{P}_i$. El poset $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}'_b + b$ y $(\overline{\mathcal{P}_m})'_{(\emptyset,b)} = \mathcal{P}'_b$. En [20] se encuentra el siguiente resultado importante.

Teorema 1.9. *Sea $\mathcal{P}$ un poset, $b \in \mathcal{P}$ un punto maximal conveniente para diferenciación y $(x_1, b), \ldots, (x_m, b), (\emptyset, b)$ una sucesión de pares convenientes que determinan la diferenciación por el punto maximal b. Entonces el funtor*

$$F^b : \operatorname{rep}\mathcal{P} \longrightarrow \operatorname{rep}\mathcal{P}'$$

es la composición de funtores

$$F^b = F^{(\emptyset,b)} F^{(x_m,b)} \ldots F^{(x_1,b)}.$$

1.4. Posets de tipo representación finito

Un poset es llamado de **tipo representación finito** si tiene un número finito de clases de isomorfismos de representaciones indescomponibles, en caso contrario, el poset es de **tipo representación infinito**.

Dados enteros positivos $l_1, \ldots, l_m$ denotamos por $(l_1, \ldots, l_m)$ a un poset isomorfo a la suma cardinal de m cadenas formadas por $l_1, \ldots, l_m$ elementos respectivamente. Para un entero positivo m denotamos por (N, m) a un poset isomorfo a la suma cardinal de una cadena con m elementos y el poset $\mathsf{N} = \{1 < 2 > 3 < 4\}$.

Los posets **críticos de Kleiner** se definen como los posets de tipo infinito tales que todos sus subposets son de tipo finito. Ellos son: $K_1 = (1,1,1,1)$, $K_2 = (2,2,2)$, $K_3 = (1,3,3)$, $K_4 = (\mathsf{N}, 4)$ y $K_5 = (1,2,5)$.

Teorema 1.10 (Criterio de Kleiner,[7])**.** *Para un poset $\mathcal{P}$, las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) El poset $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito.

b) $\mathcal{P}$ no contiene los conjuntos críticos de Kleiner.

c) El procedimiento de diferenciación reduce $\mathcal{P}$ al poset de un punto.

Anotamos que la implicación $a) \Rightarrow b)$ es una consecuencia de la serie de representaciones indescomponibles de cada poset crítico (ver apéndice A).

La forma **cuadrática de Tits** $f_{\mathcal{P}}$ se define para un vector $d = (d_0, d_x : x \in \mathcal{P})$ con entradas racionales por la fórmula

$$f_{\mathcal{P}}(d) = d_0^2 + \sum_{x \leq y} d_x d_y - d_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} d_x.$$

La forma $f_{\mathcal{P}}$ es **débilmente positiva** si $f_{\mathcal{P}}(d) > 0$ para cada vector $d > 0$ y es **débilmente no negativa** si $f_{\mathcal{P}}(d) \geq 0$ para cada vector $d \geq 0$. Adicionalmente al criterio de Kleiner, se tiene una caracterización para posets de tipo finito usando la forma cuadrática de Tits.

Teorema 1.11 (Drozd,[2]). *Un poset $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito si y sólo si la forma cuadrática de Tits $f_{\mathcal{P}}$ es débilmente positiva.*

Luego, de los dos teoremas anteriores, obtenemos la caracterización para posets de tipo representación finito en términos diagramáticos y de formas cuadráticas.

Corolario 1.12. *Para cada poset $\mathcal{P}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) El poset $\mathcal{P}$ es de tipo representación finito.

b) $\mathcal{P}$ no contiene los críticos de Kleiner.

c) La forma cuadrática $f_{\mathcal{P}}$ es débilmente positiva.

Una representación U del poset $\mathcal{P}$ se llama **cierta** si su vector dimensión $\underline{\dim}\, U$ no tiene coordenadas nulas , esto es, $d_x > 0$ para cada x en $\mathcal{P}$. Un poset $\mathcal{P}$ se llama **cierto** si tiene al menos una representación cierta indescomponible. En lenguaje matricial, U es cierta si y sólo si ninguna franja M_x es vacía o nula en cada representación matricial asociada M.

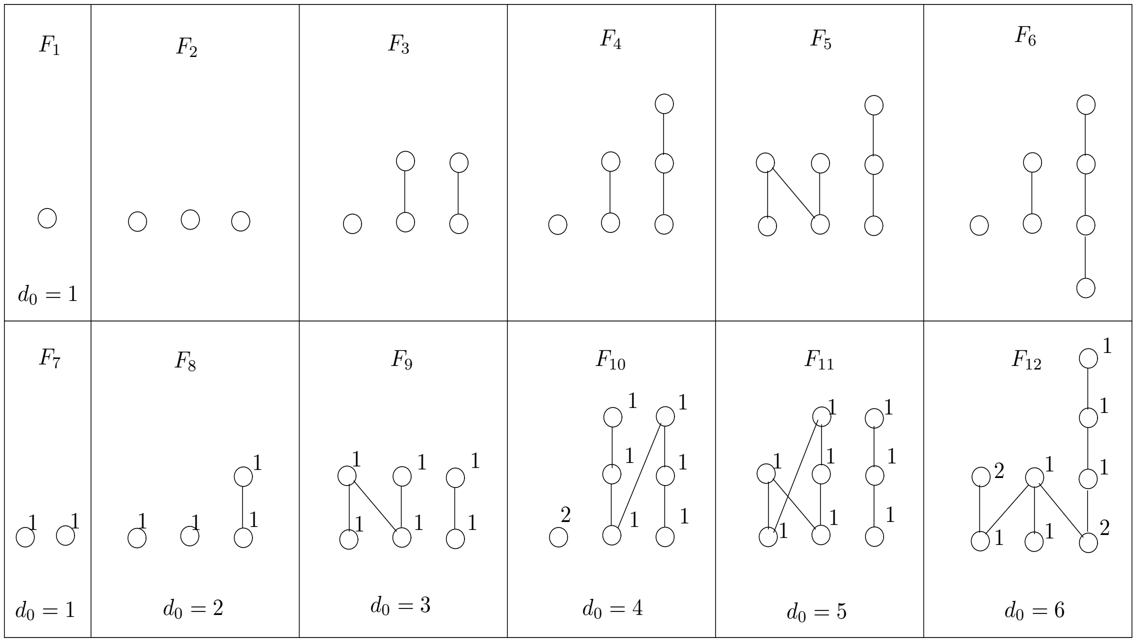
Cada representación U es una representación cierta de un subposet $\mathcal{Q} = \{x \in \mathcal{P} : d_x \neq 0\}$ de $\mathcal{P}$, donde $\mathcal{Q}$ se llama el **soporte** de U y escribimos $\mathcal{Q} = \operatorname{Supp} U$.

Observación 1.13. Es conocido que clasificar todas las representaciones de una clase de posets equivale a clasificar todos los posets ciertos de esa clase y todas sus representaciones ciertas indescomponibles.

Además, un poset $\mathcal{P}$ se dice **estricto** si existe una representación indescomponible U tal que $x \leq y$ si y sólo si $U_x \subseteq U_y$.

Para representaciones de tipo finito, Kleiner demostró en 1972 una clasificación de posets ciertos y sus representaciones indescomponibles ciertas. El listado completo de dichas representaciones consta de cuarenta indescomponibles [8].

Teorema 1.14 (Kleiner,[8]). *Un poset no vacío de tipo representación finito es cierto si y sólo si es uno de los posets de la siguiente tabla (salvo isomorfismo y antiisomorfismo).*



Algunos resultados con respecto a la tabla anterior son los siguientes:

a) Un poset de esta lista es estricto si y sólo si coincide con uno de los posets $F_1, \ldots, F_6$.

b) $\mathcal{P}$ tiene un único indescomponible cierto si y sólo si $\mathcal{P}$ es F_1 ó es uno de los posets $F_7, \ldots, F_{12}$. En la tabla se puede observar la respectiva dimensión.

c) Si $\mathcal{P}$ es uno de los posets de la tabla anterior, U es una representación indescomponible de $\mathcal{P}$ si y sólo si la forma cuadrática de Tits $f_{\mathcal{P}}(d_U) = 1$.

1.5. Pares de posets de tipo representación finito

Sean $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ un par de posets, supongamos $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{Q} = \{1, \ldots, m\}$. Una **representación matricial** sobre el campo K del par $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ es una matriz rectangular por bloques, con entradas en K, de la forma

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X_1^1 & \cdots & X_1^j & \cdots & X_1^m \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline X_i^1 & \cdots & X_i^j & \cdots & X_i^m \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline X_n^1 & \cdots & X_n^j & \cdots & X_n^m \\ \hline \end{array}$$

la cual, está particionada en n franjas horizontales X_i y en m franjas verticales X^j (algunas franjas podrían ser vacías). La célula X_i^j es la intersección de la franja X_i con la franja X^j .

Sobre esta matriz están permitidas las **transformaciones admisibles** siguientes:

i) Transformaciones elementales de filas en la franja horizontal X_i para cada $i = 1, \ldots, n$.

i') Transformaciones elementales de columnas en la franja vertical X^j para cada $j = 1, \ldots, m$.

ii) Para cada $i < j$ en $\mathcal{P}$, adición de filas en la franja horizontal X_i multiplicadas por elementos de K a filas de la franja horizontal X_j.

ii') Para cada $s < t$ en $\mathcal{Q}$, adición de columnas en la franja X^s multiplicadas por elementos de K a columnas de la franja X^t.

Dos matrices X, X' del tipo anterior son **equivalentes** (se denota $X \sim X'$) si X se reduce a X' mediante las transformaciones admisibles anteriores. Una matriz X se dice **indescomponible** si no es suma directa de dos matrices no nulas. El par $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es de **tipo representación finito** si el problema matricial correspondiente lo es, es decir, si el número de matrices indescomponibles no equivalentes es finito.

El **vector dimensión** de una representación matricial X es el vector

$$d = \underline{\dim}\, X = (d_1, \ldots, d_n, d^1, \ldots, d^m)$$

donde d_i (d^j) es el numero de filas (columnas) de la franja X_i (X^j). Además, la **dimensión** de X está definida por la fórmula

$$d^+(X) = \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{m} d^i.$$

Anotamos que si $\mathcal{P}$ es un poset de un elemento el problema matricial del par $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ es el problema matricial correspondiente al poset $\mathcal{Q}$ visto en la primera sección. Por lo cual, el problema de representaciones de un par de posets generaliza el problema de representaciones de un poset.

Si $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es un par de díadas, tenemos una serie de representaciones matriciales indescomponibles de la forma

$$\begin{array}{|c|c|} \hline I_n & I_n \\ \hline I_n & F \\ \hline \end{array} \qquad (n \geq 1)$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y F es una matriz en la forma canónica de Frobenius sobre el campo dado K. Observamos, que aún en el caso en que K sea finito, la serie es infinita (debido al valor $n \geq 1$ arbitrario); así pues, el par $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es de tipo representación infinito. Es más, si $w(\mathcal{P}) \geq 2$ y $w(\mathcal{Q}) \geq 2$ entonces el par

($\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$) es de tipo infinito; en otras palabras, si el par ($\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$) es de tipo representación finito entonces alguno de los dos posets es una cadena finita (tiene ancho uno).

Es fácil probar que si $\mathcal{P} = C_{m+1}$ es una cadena de $m+1$ puntos y $\mathcal{Q}$ un poset arbitrario (finito), el problema matricial correspondiente al par (C_{m+1},$\mathcal{Q}$) es equivalente al problema matricial correspondiente al poset $C_m \sqcup \mathcal{Q}$ (suma cardinal de C_m y $\mathcal{Q}$ de acuerdo con nuestras notaciones). En otras palabras, el problema de representaciones de un par de posets de tipo finito se reduce al problema de representaciones de posets de tipo finito.

Un par de posets ($\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$) es llamado un **par de conjuntos críticos** (en el sentido de Kleiner) si una de las siguientes condiciones es satisfecha salvo transposición de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

a) $\mathcal{P} = (1)$, $\mathcal{Q} = K_i$ para $i = 1,..,5$;

b) $\mathcal{P} = (2)$, $\mathcal{Q} = (1,1,1),(2,5),(3,3)$;

c) $\mathcal{P} = (3)$, $\mathcal{Q} = (1,5),(2,2)$;

d) $\mathcal{P} = (4)$, $\mathcal{Q} = (1,3)$;

e) $\mathcal{P} = (5)$, $\mathcal{Q} = \mathsf{N}$;

f) $\mathcal{P} = (6)$, $\mathcal{Q} = (1,2)$;

g) $\mathcal{P} = (7)$, $\mathcal{Q} = (1,1)$.

Luego, en consecuencia del teorema 1.10 obtenemos el criterio de tipo representación finito para un par de posets.

Teorema 1.15 (Criterio de Kleiner, [8])**.** *Un par de posets ($\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$) es de tipo representación finito si y sólo si no contiene como un subposet ningún par de conjuntos críticos.*

Nota 1.16. Se dice que ($\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$) contiene un par de conjuntos críticos ($\mathcal{P}'$,$\mathcal{Q}'$) si $\mathcal{P}$ contiene a $\mathcal{P}'$ y $\mathcal{Q}$ contiene a $\mathcal{Q}'$.

1.6. Posets de tipo manso y de crecimiento finito

Vamos a considerar la noción de representaciones de un poset sobre un anillo. Una **representación** de $\mathcal{P}$ sobre un anillo Λ es una colección

$$U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P}),$$

donde U_0 es un Λ-módulo libre finitamente generado, cada U_x es un Λ-submódulo libre finitamente generado de U_0 y además, se cumple que si $x \leq y$ entonces $U_x \subseteq U_y$.

Sean U, V dos representaciones de $\mathcal{P}$ sobre Λ, un **morfismo** $\varphi : U \longrightarrow V$ de U en V es un Λ-homomorfismo de módulos $\varphi : U_0 \longrightarrow V_0$ tal que para cada $x \in \mathcal{P}$ se tiene que $\varphi(U_x) \subseteq V_x$. Denotamos por $\operatorname{rep}_\Lambda \mathcal{P}$ la categoría de representaciones sobre el anillo Λ.

Sea K un campo infinito, sea $\Lambda = K[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en un campo K y $\operatorname{mod} K[x]$ la colección de $K[x]$-módulos de dimensión finita sobre K. Un objeto U en $\operatorname{rep}_{K[x]} \mathcal{P}$ induce un **funtor**

$$F_U : \operatorname{mod} K[x] \longrightarrow \operatorname{rep} \mathcal{P}$$

que asigna a cada objeto A en $\operatorname{mod} K[x]$ el objeto

$$U \otimes_{K[x]} A = (U_0 \otimes_{K[x]} A, U_x \otimes_{K[x]} A : x \in \mathcal{P})$$

y a cada morfirmo $\varphi : A \to B$ en $\operatorname{mod} k[x]$ el morfismo $1_U \otimes_{K[x]} \varphi$. La imagen del funtor F_U se denomina la **serie de representaciones** de $\mathcal{P}$ sobre K generada por U.

Una serie es **auténtica** si contiene infinitas (salvo isomorfismo) representaciones indescomponibles. Denotamos por $\mu_K(d)$ el mínimo número posible de series que contienen casi todas (excepto un número finito) las representaciones indescomponibles sobre K de dimensión d. Un poset se llama de **tipo manso** sobre K si $\mu_K(d) < \infty$ para todo vector dimensión d y es llamado de **tipo crecimiento finito** sobre K si el conjunto de valores $\mu_K(d)$, con d un vector dimensión, es acotado. Claramente si un poset es de tipo crecimiento finito entonces es de tipo manso.

Si K es un campo finito, entonces un poset $\mathcal{P}$ es manso o de crecimiento finito si y sólo si $\mathcal{P}$ lo es sobre cualquier extensión infinita F de K, este hecho no depende de la elección de F.

Un ejemplo de posets que no son mansos son los llamados **críticos de Nazarova** siguientes: $N_1 = (1,1,1,1,1)$, $N_2 = (1,1,1,2)$, $N_3 = (2,2,3)$, $N_4 = (1,3,4)$, $N_5 = (\mathsf{N}, 5)$, $N_6 = (1,2,6)$.

En 1975 Nazarova obtuvo el criterio de tipo representación manso.

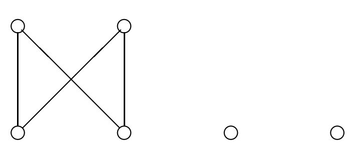
Teorema 1.17 (Criterio de Nazarova, [13, 24])**.** *Para un poset $\mathcal{P}$, las siguientes afirmarmaciones son equivalentes:*

a) $\mathcal{P}$ es de tipo representación manso.

b) $\mathcal{P}$ no contiene los críticos de Nazarova.

c) La forma cuadrática $f_{\mathcal{P}}$ es débilmente no negativa.

Un ejemplo de un poset de tipo representación manso que no es de tipo crecimiento finito es el siguiente:

$G =$ 

A continuación enunciamos el criterio de tipo crecimiento finito para posets ordinarios obtenido en 1982.

Teorema 1.18 (Criterio de Zavadskij y Nazarova, [23])**.** *Un poset manso $\mathcal{P}$ es de tipo crecimiento finito si y sólo si no contiene al poset G.*

La clasificación completa de todas las representaciones indescomponibles de los posets de tipo representación crecimiento finito fué obtenida por Zavadskij a finales de los años ochenta, ver por ejemplo [18, 19].

Por otra parte, en un sentido intuitivo, un poset es **salvaje** cuando el problema de clasificación de sus representaciones indescomponibles contiene, como un subproblema, el problema conocido no resuelto de **par de matrices** que consiste en la reducción a una forma canónica de un par de matrices cuadradas (A, B) del mismo orden sobre el campo K por transformaciones simultáneas de semejanza

$$X^{-1}AX, X^{-1}BX$$

con X cualquier matriz invertible. Compare con [1, 13, 16].

CAPÍTULO 2

Órdenes tejados de tipo finito

En este capítulo presentamos de manera introductoria los conceptos y resultados más importantes acerca de la teoría de representaciones de órdenes tejados incluyendo el criterio de tipo representación finito para dichos anillos; en la base de los resultados obtenidos originalmente en [21, 22] (ver también [11, 16]).

2.1. Anillos de valuación discreta

Sea T un campo, una **valuación discreta** (norma discreta) es un par (T, v) donde v es una función $v : T \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ que cumple las siguientes condiciones:

a) $v(xy) = v(x) + v(y)$ para todo $x, y \in T$,

b) $v(0) = \infty$,

c) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ para todo $x, y \in T$.

El conjunto $\mathcal{O} = \{x \in T : v(x) \geq 0\}$ es un subanillo de T el cual es llamado **anillo de valuación discreta**. Un elemento $\pi \in \mathcal{O}$ tal que $v(\pi) = 1$ se dice **primo**.

Es conocido que cada elemento no nulo $x \in T$ tiene la forma $x = \epsilon\pi^n$ donde ϵ es invertible en $\mathcal{O}$ y $n \in \mathbb{Z}$; si $n \geq 0$ entonces $x \in \mathcal{O}$. El anillo $\mathcal{O}$ es local cuyo único ideal maximal es $\pi\mathcal{O} = \{x \in T : v(x) > 0\}$, además todos sus ideales son los siguientes:

$$\mathcal{O} \supset \pi\mathcal{O} \supset \pi^2\mathcal{O} \supset \cdots \supset \pi^m\mathcal{O} \supset \cdots$$

Ejemplo 2.1. Ejemplos de anillos de valuación discreta.

a) El conjunto $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{m}{n} : (p,n) = 1 \text{ y } m, n \in \mathbb{Z},\ \text{n} \neq 0\right\}$, con p un número primo, es el anillo de valuación discreta del campo de los números racionales, con norma discreta $v(\frac{m}{n}) = s$ donde $m = p^s m'$ con $(p, m') = 1$. $\mathbb{Z}_{(p)}$ es llamado el anillo de los **números p-enteros**. Un elemento primo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ es $\pi = p$.

   El conjunto de invertibles de este anillo es $\mathbb{Z}^*_{(p)} = \left\{\frac{m}{n} : (p,n) = (p,m) = 1\right\}$. Es evidente que el campo de fracciones de $\mathbb{Z}_{(p)}$ es $T = \mathbb{Q}$ y si $x \in \mathbb{Q}$ entonces x tiene la forma $x = p^s \frac{m}{n}$ con $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}^*_{(p)}$ y en consecuencia $v(x) = s$.

b) El anillo $\mathcal{O} = K[[x]]$ de las series formales sobre un campo K es el anillo de valuación discreta, con el ideal maximal $x\mathcal{O}$ y el campo de clases residuales K. Si T es su campo de fracciones y $f \in T$, entonces $f = x^m \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ con $a_0 \neq 0$ y $v(f) = m$.

2.2. Órdenes tejados

Sea $\mathcal{O}$ un anillo de valuación discreta con el campo de fracciones T y un elemento primo π fijo. Sea $K = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ el campo de clases residuales de $\mathcal{O}$. Un **orden tejado** (en terminología antigua, anillo semimaximal primo) es un subanillo Λ del anillo de matrices $M_n(T)$, de la forma

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\lambda_{12}}\mathcal{O} & \cdots & \pi^{\lambda_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\lambda_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & \pi^{\lambda_{2n}}\mathcal{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi^{\lambda_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\lambda_{n2}}\mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

donde los λ_{ij} son enteros tales que $\lambda_{ii} = 0$ para todo i y $\lambda_{ij} + \lambda_{jk} \geq \lambda_{ik}$ para todo i, j, k. El orden tejado Λ se llama **reducido** ó **morita reducido** si $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} > 0$ para todo $i \neq j$, esto es equivalente a decir que el orden es **básico**, esto es, los Λ-módulos proyectivos $e_{ii}\Lambda$ no son isomorfos dos a dos. En adelante, en forma breve escribimos $\Lambda = [\lambda_{ij}]$.

La matriz $[\lambda_{ij}]$ es equivalente a una matriz con una fila o una columna de ceros; si suponemos que la k-ésima fila es nula tenemos que $\lambda_{ki} + \lambda_{ij} \geq \lambda_{kj}$, es decir $\lambda_{ij} \geq 0$ para todo i, j.

Observemos que el anillo $\mathcal{O}$ es un subanillo de su anillo clásico de fracciones T; así, Λ denota el conjunto de todas las matrices $[a_{ij}] \in M_n(T)$ tales que $a_{ij} \in \pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$ donde e_{ij} son las identidades matriciales estándar en $M_n(T)$, en especial e_{ii} son elementos idempotentes. Es claro que $M_n(T)$ es el anillo clásico de fracciones de Λ.

Lema 2.2. *Todo orden tejado es Morita equivalente*[1] *a un orden reducido.*

Demostración. Basta con observar que un orden es Morita equivalente a un orden básico. □

Lo anterior significa que estudiar la categoría de módulos sobre un orden tejado es equivalente a estudiar la categoría de módulos sobre un orden tejado reducido. En adelante consideramos siempre anillos reducidos.

2.3. Módulos admitidos sobre un orden tejado

Un Λ-módulo **admitido** es un Λ-módulo (izquierdo ó derecho) finitamente generado sin $\mathcal{O}$-torsión. El anillo clásico de fracciones del anillo Λ es $Q = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} T = M_n(T)$. Como es conocido Q es isomorfo a la suma directa de n copias del único Q-módulo simple derecho (izquierdo) $S = [T, \cdots, T]$ (S^t, t es la trasposición de matrices).

Un Λ-módulo admitido derecho no nulo A se llama **irreducible** si es un submódulo de un Q-módulo simple, es decir, A es Λ-módulo irreducible si $A \subset S = [T, \cdots, T]$.

Así pues, cada módulo admitido irreducible derecho tiene la forma

$$A = [\pi^{\alpha_1}\mathcal{O}, \cdots, \pi^{\alpha_n}\mathcal{O}]$$

donde los α_i son enteros y $\alpha_i + \lambda_{ij} \geq \alpha_j$ para todo i, j. Análogamente los Λ-módulos irreducibles izquierdos tienen la forma $A = [\pi^{\alpha_1}\mathcal{O}, \cdots, \pi^{\alpha_n}\mathcal{O}]^t$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_{ij} + \alpha_j \geq \alpha_i$ para todo i, j. En adelante se escribirá brevemente $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$.

Notemos que si $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ y $A' = [\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n]$ son dos Λ-módulos irreducibles derechos tenemos la relación de contenencia

$$A \subseteq A' \Leftrightarrow \alpha_i \geq \alpha'_i.$$

Proposición 2.3. *Dos Λ-módulos irreducibles $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$, $A' = [\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n]$ irreducibles son isomorfos si y sólo si existe un entero k tal que $\alpha_i = \alpha'_i + k$ para todo $i = 1, \cdots, n$.*

Demostración. Sean A, A' Λ-módulos irreducibles isomorfos entonces sus envolturas racionales $\widetilde{A} = A \otimes_{\mathcal{O}} T, \widetilde{A'} = A' \otimes_{\mathcal{O}} T$ son isomorfas al Q-módulo simple $S = [T, \cdots, T]$ como Q-módulos, pero el anillo de endomorfismos del Q-módulo simple S es isomorfo (o antiisomorfomo, dependiendo del lado de acción) al cuerpo T. Es decir, cada tal isomorfismo entre A y A' se realiza multiplicando cada elemento de A por π^k, de donde sigue inmediatamente la afirmación. Recíprocamente, basta observar que la función $f : A \longrightarrow A'$ tal que $f(x_1, \cdots, x_n) = \pi^k (x_1, \cdots, x_n)$ es un isomorfismo. □

[1]Dos anillos se se dicen **Morita equivalentes** si las categorías de módulos sobre ellos son equivalentes.

Proposición 2.4. *Existen solamente finitos Λ-módulos irreducibles salvo isomorfismo.*

Demostración. Sea $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ un orden tejado, sea $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ un Λ-módulo irreducible. Definimos $a = min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ entonces $A' = [\alpha_1 - a, \cdots, \alpha_n - a]$ es un Λ-módulo irreducible y por Proposición 2.3 $A \simeq A'$. Supongamos que $\alpha_i = a$ entonces $A' = [\beta_1, \cdots, \beta_n]$ con $\beta_1, \cdots, \beta_n$ enteros no negativos y $\beta_i = 0$, luego, cada irreducible es isomorfo a un irreducible con al menos una entrada nula, como es evidente que $0 \leq \beta_j \leq \lambda_{ij}$ obtenemos que salvo isomorfismo el número de Λ-módulos irreducibles es finito. $\square$

En adelante se notará por $\mathcal{L}_r(\Lambda)$ ($\mathcal{L}_l(\Lambda)$) el retículo modular de todos los Λ-módulos irreducibles derechos (izquierdos). Podemos observar que los retículos $\mathcal{L}_r(\Lambda)$ y $\mathcal{L}_l(\Lambda)$ son infinitos y periódicos y las operaciones del retículo estan dadas por las siguientes fórmulas:

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \cap [\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n] = [max\{\alpha_1, \alpha'_1\}, \cdots, max\{\alpha_n, \alpha'_n\}]$$

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] + [\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n] = [min\{\alpha_1, \alpha'_1\}, \cdots, min\{\alpha_n, \alpha'_n\}]$$

Lema 2.5. *Los retículos $\mathcal{L}_r(\Lambda)$ y $\mathcal{L}_l(\Lambda)$ son antiisomorfos.*

Demostración. Basta ver que la función $\varphi : \mathcal{L}_r(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{L}_l(\Lambda)$ tal que $\varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \varphi(-\alpha_1, \cdots, -\alpha_n)^t$ es un antiisomorfismo. En efecto, es evidente que la función es biyectiva y además si $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ y $A' = [\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n]$ tenemos que $\varphi(A \cap A') = [-max\{\alpha_1, \alpha'_1\}, \cdots, -max\{\alpha_n, \alpha'_n\}]^t = [min\{-\alpha_1, -\alpha'_1\}, \cdots, min\{-\alpha_n, -\alpha'_n\}]^t = [-\alpha_1, \cdots, -\alpha_n]^t + [-\alpha'_1, \cdots, -\alpha'_n]^t = \varphi(A) + \varphi(A')$ y análogamente se cumple que $\varphi(A + A') = \varphi(A) \cap \varphi(A')$ completando así la prueba. $\square$

Todo orden tejado es anillo semiperfecto[2]. Usando las propiedades de las cubiertas proyectivas[3] de módulos finitamente generados sobre un anillo semiperfecto (ver [11]) podemos caracterizar los Λ-módulos proyectivos.

Proposición 2.6. *Un Λ-módulo irreducible es proyectivo si y sólo si contiene exactamente un submódulo maximal.*

Demostración. Sea A un Λ-módulo irreducible y supongamos que A contiene exactamente un submódulo maximal AR. Entonces $(A/AR) = S$, donde S es un Λ-módulo simple. si denotamos el cubrimiento proyectivo de A y S por $P(A)$ y $P(S)$ respectivamente, tenemos que $P = P(S) = P(A)$ es un Λ-módulo principal indescomponible. Sea $\varphi : P(A) \longrightarrow A$ la proyección asociada, como A es irreducible tenemos que

[2] Un anillo Λ es **semiperfecto** si y sólo si cada Λ-módulo simple tiene una cubierta proyectiva.

[3] La **cubierta proyectiva** de un módulo A es un epimorfismo $\varphi : P(A) \to A$, donde $P(A)$ es proyectivo y el submódulo $\ker(\varphi)$ es superfluo en $P(A)$; es decir, la suma de $\ker(\varphi)$ con cualquier submódulo propio de $P(A)$, es siempre un submódulo propio de $P(A)$.

$ker\varphi = 0$ por lo tanto $A \simeq P(A)$ es proyectivo. En el otro sentido, cada Λ-módulo proyectivo indescomponible es un Λ-módulo irreducible con exactamente un submódulo maximal. □

Obviamente, todos los Λ-módulos proyectivos derechos salvo isomorfismo son $P_1, \cdots, P_n$, donde $P_i = [\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in}]$.

En adelante $\mathcal{P}_r(\Lambda)$ $(\mathcal{P}_l(\Lambda))$ denota al subposet del retículo $\mathcal{L}_r(\Lambda)$ $(\mathcal{L}_l(\Lambda))$ formado por todos los Λ-módulos proyectivos derechos (izquierdos). Además, notaremos $P_i^k = [\lambda_{i1+} + k, ..., \lambda_{in} + k]$ el proyectivo derecho isomorfo a P_i.

Lema 2.7. *Los posets $\mathcal{P}_r(\Lambda)$ y $\mathcal{P}_l(\Lambda)$ son antiisomorfos.*

Demostración. Basta observar que la función $\varphi : P_r(\Lambda) \longrightarrow P_l(\Lambda)$ tal que $\varphi\left(P_i^k\right) = P_i^{-k}$ es un antiisomorfismo. □

Proposición 2.8. *El poset de Λ-módulos proyectivos se describe por el conjunto $\mathcal{P}(\Lambda) = \left\{P_i^k : 0 \leq i \geq n, k \in \mathbb{Z}\right\}$ donde $P_i^k \leq P_j^l \Leftrightarrow k - l \geq \lambda_{ij}$ en el caso izquierdo y $P_i^k \leq P_j^l \Leftrightarrow k - l \geq \lambda_{ji}$ en el caso derecho.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.3 es evidente que los Λ-módulos proyectivos son de la forma P_i^k y no hay otros. Además, la relación de orden es inmediata al considerar que si $P_i^k \subseteq P_j^l$, en el caso izquierdo, necesariamente $\lambda_{ii}+k \geq \lambda_{ij} + l$, es decir, $k - l \geq \lambda_{ij}$. Recíprocamente, si $k - l \geq \lambda_{ij}$ obtenemos $k + \lambda_{di} \geq \lambda_{ij} + \lambda_{di} + l$ y en consecuencia para cualquier d se cumple que $k + \lambda_{di} \geq \lambda_{dj} + di + l$, es decir, $P_i^k \subseteq P_j^l$. Análogamente se obtiene la fórmula para el caso derecho. □

Finalmente presentamos sin demostración (ver [21]) que el orden Λ se define por el anillo $\mathcal{O}$ y el poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ de manera única.

Proposición 2.9. *La pareja $(\mathcal{O}, P(\Lambda))$ define un orden tejado morita reducido único salvo de isomorfismo en el sentido siguiente: Si $\Lambda \Leftrightarrow (\mathcal{O}, P(\Lambda))$ y $\Lambda' \Leftrightarrow (\mathcal{O}', P(\Lambda'))$. Entonces $\Lambda \simeq \Lambda' \Leftrightarrow \mathcal{O} \simeq \mathcal{O}'$ y $\mathcal{P}(\Lambda) \simeq P(\Lambda')$.*

En otras palabras, salvo isomorfismo, a cada orden tejado Λ le corresponde un único poset infinito $\mathcal{P}(\Lambda)$ y a cada poset infinito (del mismo tipo) le corresponde un único orden tejado.

2.4. Problema matricial

Aplicando resultados de la teoría de representaciones de posets, reducimos el problema de hallar los módulos admitidos indescomponibles sobre un orden tejado Λ al problema de hallar formas canónicas de un problema matricial asociado al poset $\mathcal{P}(\Lambda)$. La idea principal consiste en asignarle a cada Λ-módulo admitido una colección (análoga a una representación de un poset) de ciertos $\mathcal{O}$-retículos en un T-espacio vectorial y formular el problema matricial asociado.

Sea A un Λ-módulo admitido derecho, Sea $\widetilde{A} = A \otimes_{\mathcal{O}} T$ el Q-módulo **envoltura racional** de A, como

$$A = A1 = A(e_{11} + \cdots + e_{nn}) = Ae_{11} \oplus Ae_{22} \oplus \cdots \oplus Ae_{nn}$$

se obtiene que

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}e_{11} \oplus \cdots \oplus \widetilde{A}e_{nn}$$

y los sumandos $\widetilde{A}e_{ii}$ son espacios lineales sobre el campo T. Además, como $e_{ij}e_{ji} = e_{ii}$ para todo i, j, las funciones $\widetilde{A}e_{ii} \xrightarrow{e_{ij}} \widetilde{A}e_{ij} \xrightarrow{e_{ji}} \widetilde{A}e_{ii}$ son inversas una de la otra; luego, cada una de ellas es un isomorfismo y su composición es el isomorfismo idéntico; por tal razón, podemos identificar los T-espacios lineales $\widetilde{A}e_{11} = \cdots = \widetilde{A}e_{nn} = V$. Como $Ae_{ii} \subseteq \widetilde{A}e_{ii} = V$ entonces cada Ae_{ii} es un **$\mathcal{O}$-orden** en V llamado **$\mathcal{O}$-retículo**, esto es, un $\mathcal{O}$-submódulo libre de V de rango finito, es más, un **orden completo**, esto es, su rango es igual a la $\dim_T V$. Es claro que para cada i, j se cumple que $Ae_{ii}\pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O} \subseteq Ae_{jj}$.

En resumen, si $A_i = Ae_{ii} \subseteq V$, al Λ-módulo admitido derecho A le hacemos corresponder la colección

$$A \longrightarrow (V, A_1, \cdots, A_n) \tag{2.1}$$

Donde $A_1, \cdots, A_n$ son $\mathcal{O}$-retículos en el T-espacio V tales que

$$A_i\pi^{\lambda_{ij}} \subseteq A_j \tag{2.2}$$

Vamos a probar que módulos admitidos y colecciones del tipo 2.1 se corresponden biunívocamente salvo isomorfismo y equivalencia respectivamente.

Proposición 2.10. *Si A, A' son Λ-módulos admitidos derechos y $(V, A_1, \cdots, A_n)$, $(V', A'_1, \cdots, A'_n)$ son sus colecciones correspondientes respectivamente, $A \simeq A'$ si y sólo si existe un T- isomorfismo $\widetilde{\varphi} : V \longrightarrow V'$ tal que $\widetilde{\varphi}(A_i) = A'_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$.*

Demostración. Supongamos φ un Λ-isomorfismo de A en A', como $V = \widetilde{A}_i$ y $V' = \widetilde{A}'_i$ salvo isomorfismo, tenemos un T-isomorfismo $\widetilde{\varphi} : V \longrightarrow V'$ dado por la fórmula $\widetilde{\varphi}(ae_{ii} \otimes t) = a\varphi(e_{ii}) \otimes t$ donde t es cualquier elemento no nulo en T. Haciendo $t = 1$ se cumple que $\widetilde{\varphi}(A_i) = A'_i$ para todo i. Recíprocamente, definimos φ de A en A' tal que a cada n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ en A (se puede ver de esta manera debido a la descomposición de A en n sumandos directos) se le asigna $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (\widetilde{\varphi}(a_1), \ldots, \widetilde{\varphi}(a_n))$. Evidentemente ésta función es un Λ-isomorfismo. □

Es más, una condición necesaria y suficiente para que un módulo admitido A sea descomponible es que su colección correspondiente $(V, A_1, \cdots, A_n)$ sea descomponible, es decir, que exista una descomposición no trivial $V = V' \oplus V''$ tal que $A_i = (A_i \cap V') \oplus (A_i \cap V'')$ para cada i.

En consecuencia, por la proposición anterior y las fórmulas 2.1 y 2.2, la clasificación de los Λ-módulos admitidos se reduce al problema de clasificación de colecciones de $\mathcal{O}$-retículos en un espacio vectorial. Este problema es formulado de manera natural en lenguaje matricial.

Problema matricial

Sea A un Λ-módulo admitido derecho, $(V, A_1, \cdots, A_n)$ la colección correspondiente al módulo A. Fijamos una base del T-espacio vectorial V; en cada $\mathcal{O}$-submódulo A_i escogemos una colección finita $\mathcal{U}_i$ (puede ser vacía) de elementos tal que el conjunto $\bigcup_j \mathcal{U}_j \pi^{\lambda_{ji}}$ (contenido en A_i por la fórmula 2.2) genere sobre $\mathcal{O}$ a A_i para cualquier i.

Sea M_i una matriz cuyas columnas estan formadas por las coordenadas de los vectores de $\mathcal{U}_i$ en la base escogida (esto no descarta la posibilidad que M_i sea una matriz vacía). Definimos la matriz

$$M = \left[\; M_1 \;\middle|\; M_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; M_n \;\right],$$

es claro, que las filas de la matriz M son linealmente independientes sobre T, es más, las filas de M corresponden a una base de V. Por tanto, M tiene número de filas igual a $\dim_T V$. Las matrices M_i forman n franjas verticales de la matriz M, donde cada franja M_i forma un sistema de $\mathcal{O}$-generadores del orden A_i módulo del suborden $\underline{A_i} = \sum_{j \neq i} A_j \pi^{\lambda_{ji}}$.

Es claro que el grupo G de transformaciones correspondientes a una segunda elección de la base de V y una segunda elección de conjuntos $\mathcal{U}_i$ es generado por las siguientes **transformaciones admisibles**:

i) Transformaciones T-elementales de filas de toda la matriz M.

ii) Transformaciones $\mathcal{O}$-elementales de columnas dentro de cada franja M_i.

iii) Adicionar columnas de M_i a columnas de M_j multiplicados por el escalar $\pi^{\lambda_{ij}}$ para todo par de franjas M_i, M_j (se denota $M_i \xrightarrow{\lambda_{ij}} M_j$).

La matriz M es **equivalente** a una matriz M' (se escribe $M \sim M'$) si M' se obtiene de M por transformaciones admisibles.

A cada orden tejado Λ le asociamos un poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ y su problema matricial correspondiente M, así pues, el problema de clasificación de Λ-módulos admitidos se reduce al problema de clasificar las formas canónicas no equivalentes dos a dos correspondientes al problema matricial asociado.

El criterio de tipo representación finito para órdenes tejados se demostró en 1974, en la base del algoritmo de diferenciación para órdenes tejados construido por Zavadskij en el mismo año.

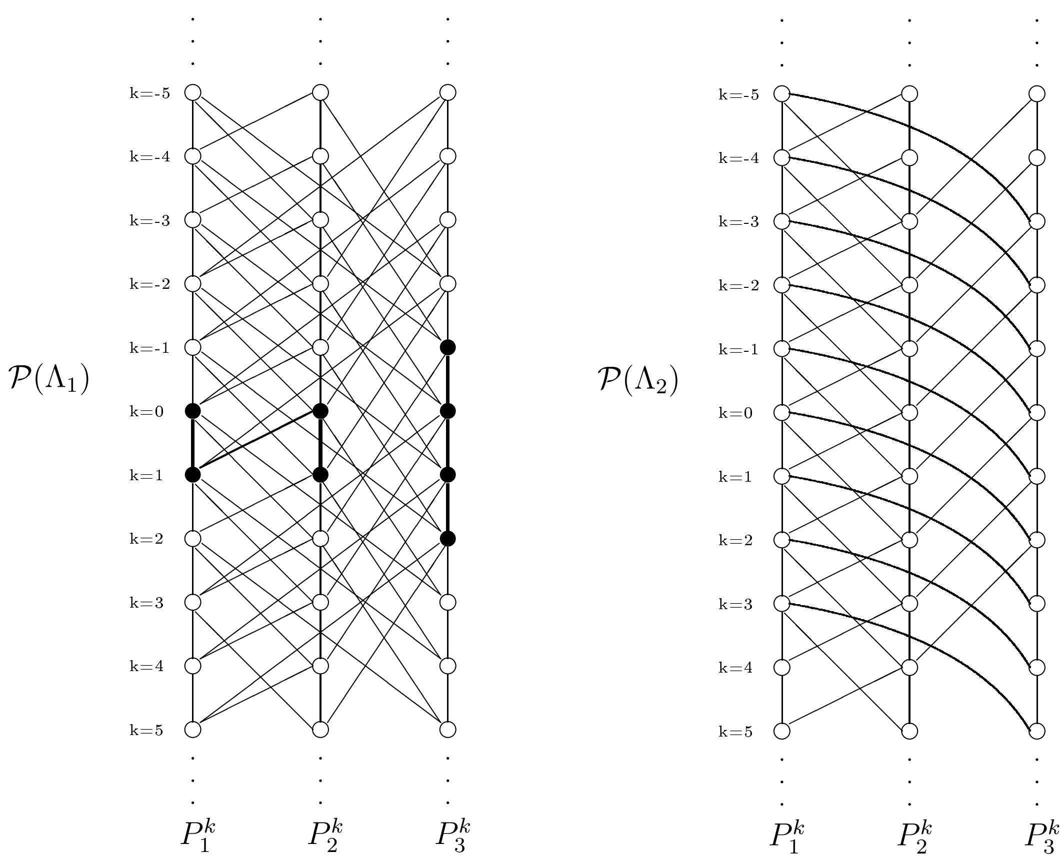
Teorema 2.11 (Criterio de Zavadskij y Kirichenko, [22]). *Un orden tejado Λ es de tipo representación finito si y sólo si el poset asociado $\mathcal{P}(\Lambda)$ no contiene los críticos de Kleiner.*

En secciones 2.6 y 2.7 se encuentra el algoritmo de diferencición para órdenes tejados y el esbozo de la prueba del criterio anterior respectivamente.

Ejemplo 2.12. Sean los órdenes tejados dados por las matrices

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los respectivos posets asociados son:



Entonces,

a) El orden tejado Λ_1 es de tipo infinito, se puede ver en la gráfica que $K_4 \subseteq \mathcal{P}(\Lambda_1)$.

b) El orden tejado Λ_2 es tal que su poset asociado $\mathcal{P}(\Lambda_2)$ no contiene como subposet ninguno de los posets críticos de Kleiner. Por Teorema 2.11 el orden tejado Λ_2 es de tipo finito.

2.5. 01-órdenes tejados

Un orden tejado $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ tal que $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$ se llama **01-orden tejado**. Al 01-orden tejado Λ le asignamos el conjunto $\mathcal{Q}(\Lambda) = \{1, 2, \cdots, n\}$ junto con la relación de orden $i \leq j \Leftrightarrow \lambda_{ij} = 0$. En efecto, como $\lambda_{ii} = 0$ para todo i la relación es reflexiva, además ya que $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} > 0$ tenemos la antisimetria y la desigualdad $\lambda_{ij} + \lambda_{jk} \geq \lambda_{ik}$ concluye la propiedad transitiva.

A cada poset finito $\mathcal{P} = \{1, 2, \cdots, n\}$ le corresponde un único 01-orden tejado $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ definido tal que $\lambda_{ij} = 0$ si $i \leq j$ y $\lambda_{ij} = 1$ en otro caso. Evidentemente la matriz $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ es un 01-orden.

Ejemplo 2.13. Al 01-orden tejado

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se le asigna el poset $\mathcal{Q}(\Lambda) = \{1; 2 < 3; 4 < 5\}$ de tipo $(1, 2, 2)$.

Podemos caracterizar fácilmente un 01-orden tejado de acuerdo a la forma de su poset asociado.

Proposición 2.14. *Para un orden tejado reducido Λ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Λ es un 01-orden.

b) El poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ es ordinalmente descomponible.

c) El poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ es la suma ordinal de infinitas copias del poset finito $\mathcal{Q}(\Lambda)$.

Demostración. En primer lugar probamos la implicación a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Sea $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ con $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$, $P_i^0 = \{\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in}\}$. Entonces $P_i^1 = \pi P_i^0 = \{\lambda_{i1} + 1, \ldots, \lambda_{in} + 1\}$ y, ya que $\lambda_{ik} + 1 \geq 1 \geq \lambda_{jk}$ para cada $k = 1, \ldots n$, tenemos que $P_i^1 \leq P_j^0$ para todos los i, j en $P_r(\Lambda)$. En otras palabras, $P_r(\Lambda)$ tiene la forma

$$\cdots < \left\{P_i^{k+1}\right\}_{i=1,\ldots,n} < \left\{P_i^{k}\right\}_{i=1,\ldots,n} < \left\{P_i^{k-1}\right\}_{i=1,\ldots,n} < \cdots,$$

donde cada uno de los sumandos es el poset $\mathcal{Q}(\Lambda)$.

Para la implicación (c) $\Rightarrow$ (a), sea $\mathcal{P}(\Lambda) = \{X < Y\}$ (suma ordinal de X y Y) con X, Y subposets no vacíos y sea q_i^0 el elemento minimal de la cadena $\left\{P_i^k\right\}_{k=1,\ldots,n} \cup Y$. Entonces $q_i^0 < q_j^0$ para todo i, j, en otras palabras, Λ es isomorfo a un 01-orden tejado. $\square$

El criterio de tipo representación finito (manso, crecimiento finito) para 01-órdenes tejados fué probado fácilmente como una consecuencia del criterio de tipo representación finito (manso, crecimiento finito) para posets finitos.

Teorema 2.15. *El problema de clasificación de Λ-módulos admitidos sobre un 01-orden tejado reducido $\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O}$, $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$ es equivalente precisamente al problema de clasificación de representaciones del poset asignado $\mathcal{Q}(\Lambda)$ sobre el campo de clases residuales $K = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$.*

Demostración. Sea $\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O}$, con $\lambda_{ij} \in \{0,1\}$ al orden Λ le asignamos el poset finito $\mathcal{Q}(\Lambda)$ como arriba, como $A_i\pi^{\lambda_{ij}} \subset A_j$ entonces $A_i\pi \subset A_j$ para todo i, j. Sea $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$ y sea $\overline{\Omega} = \pi\Omega$, es claro que $\overline{\Omega} \subset A_1, \cdots, A_n \subset \Omega$. Consideremos el cociente $U_0 = \Omega/\overline{\Omega} = \Omega/\pi\Omega$, tenemos que U_0 es un K-espacio lineal que contiene los subespacios $U_i = Ai/\overline{\Omega}$, es decir, un Λ-módulo admitido A se define en este caso por la colección de K-espacios lineales $U = (U_0, U_1, \cdots, U_n)$ tal que $\lambda_{ij} = 0$ si y sólo si $U_i \subset U_j$. En otras palabras la colección anterior es una representación del poset finito $\mathcal{Q}(\Lambda)$. □

De manera inmediata obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.16. *Un 01-orden tejado Λ es de tipo representación finito (manso, crecimiento finito) si y sólo si el poset $\mathcal{Q}(\Lambda)$ lo es.*

En conclusión, el problema de clasificación de representaciones de posets sobre un campo T es un caso particular del problema de clasificación de módulos admitidos sobre un 01-orden tejado.

2.6. Diferenciación para órdenes tejados

Si Λ es un orden tejado, el poset asociado $\mathcal{P}(\Lambda)$ es infinito periódico. Así, la idea principal diagramática de este algoritmo es usar la diferenciación para poset finitos con respecto a un par conveniente de puntos con repetición periódica por niveles del poset $\mathcal{P}(\Lambda)$. Pero, para colecciones de $\mathcal{O}$-retículos $(V, A_1, \ldots, A_n)$ la acción del algoritmo no se puede reducir a la composición de diferenciaciones (con respecto al par de puntos) de representaciones ordinarias de posets sobre un campo K. Se requiere una construcción de algebra lineal más general.

Sea $\mathcal{P}(\Lambda)$ el poset asociado al orden tejado reducido $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$. Necesitamos los siguientes resultados (ver demostraciones en [22]) para definir el algoritmo de diferenciación.

Lema 2.17. *Si $\mathcal{P}(\Lambda)$ no contiene los subconjuntos $(1,1,1,1)$ y $(2,2,2)$ entonces existen elementos $a, b \in \mathcal{P}(\Lambda)$ tal que el subconjunto $a^{\nabla} \cup b_{\Delta}$ contiene todos los elementos de $\mathcal{P}(\Lambda)$ excepto, quizá, uno.*

Lema 2.18. *Si $n \geq 2$ y $\mathcal{P}(\Lambda)$ no contiene los subconjuntos $(1,1,1,1)$ y $(2,2,2)$. Entonces existe un par de índices distintos (k,l) tal que cumple una de las siguientes condiciones:*

a) $\lambda_{ki} + \lambda_{il} = \lambda_{kl}$ *para todo i.*

b) Existe un índice m tal que $\lambda_{ki}+\lambda_{il} = \lambda_{kl}$ *para todo $i \neq m$ y* $\lambda_{km}+\lambda_{ml} = \lambda_{kl}+1$.

Sea $B = [\beta_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ una matriz con entradas en $\mathbb{Z}$ de tal manera que $\beta_{ii} = 0$ para todo i y

$$\beta_{i_1 i_2} + \beta_{i_2 i_3} + \ldots + \beta_{i_n i_1} \geq 0 \tag{2.3}$$

para cualesquiera valores $i_1, \ldots, i_n$ en $\{1, \ldots, n\}$. Podemos asociar a esta matriz un orden tejado $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ de tal manera que

$$\lambda_{ij} = \min_{i_2,\ldots,i_n} \{\beta_{i i_2} + \beta_{i_2 i_3} + \ldots + \beta_{i_n j}\}$$

Decimos que el anillo Λ es **generado** por la matriz B.

Ejemplo 2.19. La matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cumple la condición 2.3 y además, $\beta_{ii} = 0$ para todo i. El anillo generado por la matriz B es el orden tejado (definido por la matriz)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que el proceso de pasar de la matriz B a la matriz Λ consiste únicamente en corregir las entradas β_{ik} de la matriz B que no cumplen la condición $\beta_{ij}+\beta_{jk} \geq \beta_{ik}$ para algún valor j, cambiando β_{ik} por un valor menor que sí la cumpla.

Sea Λ un orden tejado reducido y sea $k \neq l$ con $(k, l \geq 1)$. Denotamos por $\Lambda^-_{(k,l)}$ el anillo generado por la matriz $B = [\beta_{ij}]$ donde $b_{kl} = \lambda_{kl} - 1$ y $\beta_{ij} = \lambda_{ij}$ para $(i,j) \neq (k,l)$. Esta matriz B es no negativa y por tanto satisface la fórmula 2.3. En efecto, podemos asumir que $\lambda_{ik} = 0$ para todo i, luego $\lambda_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{jk} \geq \lambda_{ik} = 0$ para todo i,j. En consecuencia B es no negativa.

Un par de puntos distintos (k,l) se llama **par conveniente** para diferenciación si satisface una de las condiciones a) ó b) del lema 2.18. Definimos el **anillo derivado** $\Lambda'_{(k,l)}$ de la siguiente manera:

a) Si el par (k,l) satisface la condición a) del lema 2.18 entonces $\Lambda'_{(k,l)} = \Lambda^-_{(k,l)}$.

b) Si el par (k,l) satisface la condición b) del lema 2.18 entonces $\Lambda'_{(k,l)}$ es el anillo generado por la matriz $B = [\lambda_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n+1}$, (acordamos $n+1 = m'$) donde

$$\begin{cases} \beta_{kl} = \lambda_{kl} - 1;\ \beta_{ml} = \lambda_{ml} - 1;\ \beta_{km'} = \lambda_{km} - 1; \\ \beta_{m'm} = 1;\ \beta_{m'm'} = 0; \\ \beta_{m'j} = \lambda_{mj} \text{ para } j \neq m, m';\ \beta_{im'} = \lambda_{im} \text{ para } i \neq k, m'; \\ \beta_{ij} = \lambda_{ij}, \text{ si } i,j \neq m' \text{ y } (i,j) \neq (k,l), (m,l). \end{cases}$$

Mostramos que esta definición es correcta, esto es, que en el caso b) la matriz B satisface la condición 2.3.

Sin pérdida de generalidad suponemos que $\lambda_{ik} = 0$ para todo i. Entonces $\lambda_{ij} \geq 0$ para todo i,j, $\lambda_{kl} \geq 1$, $\lambda_{km} \geq 1$, luego todos los λ_{ij} son no negativos excepto, quizás β_{ml}. Es posible que $\beta_{ml} = -1$, en este caso, $\beta_{i_1i_2} + \ldots + \beta_{i_{n+1}i_1} < 0$, donde $i_1 = m$ y $i_2 = l$ (los sumandos en 2.3 pueden ser reorganizados cíclicamente). Luego, $\beta_{i_1i_2} + \ldots + \beta_{i_si_1} < 0$, donde los índices $i_i, \ldots, i_s$ son distintos y $2 \leq s \leq n$. Entonces $\beta_{i_1i_2} + \ldots + \beta_{i_si_1} = -1$. Si m' no está entre los índices $i_3, \ldots, i_s$, entonces expresando β_{ij} en términos de λ_{ij} obtenemos $\lambda_{ml} + \ldots + \lambda_{i_sm} = 0$, por tanto $\lambda_{ml} + \lambda_{lm} = 0$ lo cual contradice el hecho de que Λ es reducido. Pero si $\beta_{ml} + \ldots + \beta_{xm'} + \beta_{m'y} + \ldots + \beta_{i_sm} = -1$, luego, expresando β_{ij} en términos de λ_{ij}, para $y \neq m$ obtenemos

$$(\lambda_{ml} + \ldots + \lambda_{xm}) + (\lambda_{my} + \ldots + \lambda_{i_sm}) \leq 1,$$

lo cual vuelve a contradecir el hecho que Λ es reducido. Para $y = m$ tenemos $(\lambda_{ml} + \ldots + \lambda_{xm}) \leq 0$, lo cual es nuevamente imposible.

Anotamos que los anillos $\Lambda'_{(k,l)}$ y $\Lambda^{-}_{(k,l)}$ no son reducidos necesariamente.

2.7. Observaciones de la prueba del criterio 2.1

Las definiciones y afirmaciones dadas en la sección anterior definen el procedimiento de diferenciación combinatorial de las matrices con entradas en los enteros $[\lambda_{ij}]$ que definen órdenes tejados Λ. Ahora esbozamos la prueba del criterio principal de [22], Teorema 2.11 en este capítulo.

Condición necesaria

Supongamos que la colección $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{O}$-retículos del T-espacio vectorial X corresponden al Λ-módulo admitido derecho A, $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ es un orden tejado reducido y $A_i\pi^{\lambda_{ij}} \subseteq A_j$.

Sea $F = \sum_{i=1}^{n} A_i$, definimos el conjunto $A_i^k = A_i\pi^k \cap F$, donde $k = 0, -1, -2, \ldots$. Obviamente, $A_i^0 = A_i$ y $A_i^k \subseteq A_j^l$ si $k - l \geq \lambda_{ij}$. Además, $A_i^k = F$ si $|k| \geq c = max_{ij}\{\lambda_{ij}\}$ y así, se asume que el índice k varía dentro de los límites $-c \leq k \leq 0$.

Denotamos por $\mathcal{R}$ al poset $\mathcal{R} = \{p_i^k\}_{-c\leq k\leq 0; i=1,\ldots,n}$ definido por $p_i^k \leq p_j^l$ si y sólo si $k-l \geq \lambda_{ij}$. Obviamente, $\mathcal{R}$ es un subconjunto del poset asociado $P_l(\Lambda)$, a tal subconjunto le llamaremos **segmento** de $P_l(\Lambda)$. Como el poset $P_l(\Lambda)$ es un poset periódico infinito, el segmento más generalmente consiste de un periódo. Aquí garantizamos que para los valores $-c \leq k \leq 0$ hay un periódo completo.

Ahora definimos una representación del poset $\mathcal{R}$ sobre el anillo de división $K = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$.

Consideramos el espacio vectorial $V = F/F\pi$ sobre el anillo de división K. Establecemos $V_i^k = (A_i^k + F\pi)/F\pi$ y asociamos un punto $p_i^k \in \mathcal{R}$ con el K-espacio V_i^k. Entonces la colección de subespacios $V(A) = \{V_i^k\}$ de V es una representación del poset $\mathcal{R}$ sobre el anillo K.

Es claro que si el módulo A es descomponible, entonces su representación correspondiente $V(A)$ es también descomponible. Además, si A es isomorfo a A' entonces sus respectivas representaciones son equivalentes. Por construcción, $V(A)$ satisface la condición $\sum_{i=1}^n V_i^0 = V$. Denotamos por $U(A) = \{U_i^k\}$ la representación truncada de $\mathcal{R}$ correspondiente a $V(A)$.

Ahora, suponemos que el conjunto $\mathcal{P}(\Lambda)$ contiene uno de los subconjuntos críticos K_z con $z \in \{1,\ldots,5\}$. Podemos asumir que todos los puntos minimales de K_z están incluidos entre los puntos $\{p_i^0\}_{i=1,\ldots,n}$ (estos son los puntos minimales de $\mathcal{R}$). Entonces, el conjunto $\mathcal{R}$ contiene el subconjunto crítico K_z, donde todos los puntos minimales de K_z están incluidos entre los puntos minimales de $\mathcal{R}$. Se demuestra entonces, en este caso, que para cualquier representación truncada $W = \{W_i^k\}$ de $\mathcal{R}$ sobre K tal que $\sum_i W_i^0 \sum_{i,k} W_i^k$ y $W_k = 0$, si $p_i^k \notin K_z$, podemos encontrar un Λ-módulo admitido A tal que $U_i^k = W_i^k$ para todo $p_i^k \in K_z$, donde $\{U_i^k\} = U(A)$. Para dicha prueba se consideran los casos en que $z = 4$ y $z \neq 4$.

Al obtener el resultado anterior, se concluye, para el caso $z \neq 4$, que existe un número infinito de representaciones indescomponibles de K_z no equivalentes dos a dos, tales que la suma de los subespacios correspondientes a los puntos minimales de K_z es un cubrimiento del espacio total. Luego, Λ es un anillo de tipo infinito cuando $K_z \neq (\mathsf{N}, 4)$.

Para el caso $z = 4$, es decir, $K_z = (\mathsf{N}, 4) = \{a_1 < a_2 > b_1 < b_2; c_1 < c_2 < c_3 < c_4\}$. Sea $a_1 = p_i^0$, $b_1 = p_j^0$ y $c_1 = b_m^0$, obviamente i, j, m son índices distintos. Si $p_t^l \in K_4$ y $t \neq i, j, m$, podemos asumir que $l = 0$; pero en este caso, para cualquier punto p_t^0 existe un número infinito de representaciones truncadas indescomponibles no equivalentes dos a dos $\{U_s^k\}$ de K tal que la suma $U_i^0 + U_j^0 + U_m^0 + U_t^0$ es un cubrimiento del espacio total. Lo anterior se debe a la lista de indescomponibles de K_4 escrita en el apéndice A. Pero, si para algún $p_i^k \in K_4$ el índice t es uno de los índices i, j ó m, es claro que $a_2 = p_i^{k_1}$, $b_2 = p_i^{k_2}$, $c_2 = p_i^{k_3}$, $c_3 = p_i^{k_4}$ y $c_4 = p_i^{k_5}$, donde $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ y $k_5 < k_4 < k_3 < 0$. En consecuencia $\lambda_{ij} \geq 2$, $\lambda_{ji} \geq 1$, $\lambda_{im} \geq 4$, $\lambda_{mi} \geq 2$, $\lambda_{jm} \geq 4$ y $\lambda_{mj} \geq 2$ y para el indempotente $e = e_{ii} + e_{jj} + e_{mm}$ el anillo $e\Lambda e$

es un subanillo del anillo

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por Lema 3.3 en [6], Γ es un anillo de tipo infinito, por lo cual, Λ es también un anillo de tipo infinito. Completando de esta manera la demostración de la condición necesaria.

Condición suficiente

La parte central de la prueba de la suficiencia es una construcción puramente algebraica, en lenguaje matricial del algoritmo de diferenciación principal para órdenes tejados, presentado en [22] en la base de Lema auxiliar 2.3 y Proposición principal 2.5. Observemos más o menos generalmente (evitando detalles no esenciales) estas dos afirmaciónes.

Sea B una matriz con coeficientes en $\pi^{s-1}\mathcal{O}$ $(s \in \mathbb{Z})$. Considerando sus elementos módulo $\pi^s\mathcal{O}$, obtenemos una matriz B sobre el anillo de división $K = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$. Decimos que las columnas de B son **linealmente independientes módulo** $\pi^s\mathcal{O}$ si las columnas de B módulo $\pi\mathcal{O}$ son linealmente independientes módulo K. Enunciamos el lema auxiliar antes de la proposición principal.

Lema 2.20. *Sea*

$$B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$$

una matriz dividida en dos bloques con coeficientes en $\pi^{s-1}\mathcal{O}$ $(s \in \mathbb{Z})$ cuyas columnas son linealmente independientes módulo $\pi^s\mathcal{O}$. Entonces, usando transformaciones $\mathcal{O}$-elementales izquierdas de filas de B_1 y usando adición de filas de B_2 multiplicadas a izquierda por elementos de $\mathcal{O}$ a filas de B_1, podemos convertir B_1 en una matriz con entradas en $\{0, \pi^{s-1}\}$, donde cada fila y cada columna tiene al menos una entrada nula.

Demostración. Es evidente que por transformaciones $\mathcal{O}$-elementales de filas y reordenamientos de columnas, la matriz B_2 puede reducirse a la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n\pi^{s-1} & * \\ \hline 0 & X \end{array}\right],$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y X es una matriz con entradas en $\pi^s\mathcal{O}$. Luego, la parte de B_1 que está encima de $I_n\pi^{s-1}$ puede hacerse cero. La parte restante de B_1 encima de X debe tener columnas que son linealmente independientes módulo $\pi^s\mathcal{O}$, por transformaciones $\mathcal{O}$-elementales de filas esto se reduce a la forma

$$\left[\begin{array}{c} I_n\pi^{s-1} \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

Solamente resta realizar las transformaciones de filas de B_2 y reordenamientos inversos de las columnas de B. □

Se sigue de esta demostración que si escojemos un conjunto maximal de columnas de B_2 que sean linealmente independientes módulo $\pi^s\mathcal{O}$, entonces B_1 puede ser reducido de modo que esas columnas contengan todas las entradas nulas y el resto de columnas de B_2 contienen el elemento π^{s-1}.

Proposición 2.21. *Sea $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ un orden tejado reducido y sea (k,l) un par conveniente de índices. Si $\Lambda^-_{(k,l)}$ y $\Lambda'_{(k,l)}$ son anillos de tipo finito, entonces Λ es de tipo finito.*

Demostración. Sea A un Λ-módulo indescomponible admitido derecho y $A_1, \dots, A_n$ la colección de retículos completos en el T-espacio derecho finito-dimensional correspondiente a A, con $A_i\pi^{\lambda_{ij}} \subseteq A_j$.

Sea

$$M = \left[\ M_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, M_n\ \right]$$

la matriz correspondiente a esta colección, donde asumimos que los elementos correspondientes a las columnas de M_i generan el retículo A_i para cada i.

Usando transformaciones T-elementales de filas, $\mathcal{O}$-elementales de columnas se reduce M_l a la forma $I\pi^{\lambda_{kl}}$. Luego, como $A_k\pi^{\lambda_{kl}} \subseteq A_l$ tenemos que M_k es una matriz sobre $\mathcal{O}$.

Si todos los elementos de M_k son múltiplos de π, entonces $A_k\pi^{\lambda_{kl}-1} \subseteq A_l$ y en este caso, A es un módulo sobre el anillo $\Lambda^-_{(k,l)}$. Por hipótesis $\Lambda^-_{(k,l)}$ es de tipo finito y por tanto existen finitos Λ-módulos de este tipo.

Ahora consideramos el caso cuando existen elementos en M_k no divisibles por π. Se demuestra que la matriz M de n bloques asume la forma (desechando las columnas de ceros en M_l)

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline I & 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & X & B_2 & C' & Y_i & I\pi^{\lambda_{kl}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hspace{2cm}}_{M_k}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\hspace{2cm}}_{M_m}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hspace{1cm}}_{M_i}} & \multicolumn{1}{c}{\underbrace{\hspace{1cm}}_{M_l}} \end{array}$$

donde X, C' y Y_i son matrices sobre $\pi\mathcal{O}$, $\pi^{\lambda_{km}}\mathcal{O}$ y $\pi^{\lambda_{kl}}\mathcal{O}$ $(i \neq k, l, m)$ respectivamente y B_1 y B_2 son matrices sobre $\pi^{\lambda_{km-1}}\mathcal{O}$, donde B_1 es una matriz con entradas en $\left\{0, \pi^{\lambda_{km-1}}\right\}$.

Consideramos la matriz de $n+1$ bloques

$$M' = \left[\ M'_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, M'_{n+1}\ \right]$$

donde $M'_k = X$, $M'_l = I\pi^{kl}$, $M'_m = C'$, $M'_{n+1} = B_2$, y $M'_i = Y_i$ para los i restantes y demostramos que M' es la representación matricial de un $\Lambda'_{(k,l)}$-módulo A'. En otras palabras, la clasificación de Λ-módulos admitidos que no son módulos sobre $\Lambda^-_{(k,l)}$ se reduce a la clasificación de $\Lambda'_{(k,l)}$-módulos admitidos. Se prueba además que existe una familia finita de Λ-módulos a los que se le puede asociar el mismo $\Lambda'_{(k,l)}$-módulo. En consecuencia, si $\Lambda'_{(k,l)}$ es un anillo de tipo finito entonces existen únicamente finitos Λ-módulos que no son módulos sobre $\Lambda^-_{(k,l)}$. $\square$

Para completar la prueba de la condición suficiente se tiene en cuenta que el algoritmo de diferenciación para órdenes tejados que consiste en pasar de un poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ (asociado al orden Λ) a los posets $\mathcal{P}(\Lambda^-_{(k,l)})$ ó $\mathcal{P}(\Lambda'_{(k,l)})$ corresponde a aplicar diferenciación con respecto a un par conveniente de puntos (y la completación) un número finito de veces. En lo anterior no consideramos que el poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ es infinito ya que este es periódico y definido por un segmento finito $\mathcal{R}$. Luego, los subconjuntos críticos de Kleiner (por la convergencia del algoritmo de diferenciación por un par conveniente de puntos) no pueden surgir al diferenciar el poset $\mathcal{P}(\Lambda)$ y en un número finito de pasos $\mathcal{P}(\Lambda)$ se reduce a un orden lineal (cadena infinita) correspondiente al orden tejado trivial $\Lambda = \mathcal{O}$.

CAPÍTULO 3

Álgebras de transformación de tipo módulo acotado

En este capítulo, al considerar el problema de representaciones de un par de álgebras de transformación, generalizamos el problema de representaciones de un par de posets finitos y el problema de representaciones de órdenes tejados. Se presenta de manera general (omitiendo detalles) el criterio de tipo módulo acotado y el criterio de tipo representación finito para pares de álgebras de transformación obtenido en [25]. Adicionalmente, presentamos el listado de representaciones indescomponibles del problema particular de tipo «cadena-girnalda» y algunas observaciones a la conjetura 3.17, mostrando su veracidad en algunos casos particulares.

3.1. Representaciones de álgebras de transformación

Sea $\mathcal{O}$ un anillo de valuación discreta con el campo de fracciones T, $\pi \in \mathcal{O}$ un elemento primo y sea $M_n(T)$ el álgebra de matrices sobre T. LLamamos **álgebra de transformación** a la $\mathcal{O}$-subálgebra de $M_n(T)$ de la forma

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} A_{ij},$$

consistiendo de todas las matrices cuadradas de orden n tales que su entrada (i,j) pertenece al $\mathcal{O}$-submódulo $A_{ij} = \pi^{\lambda_{ij}}\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi^{\lambda_{ij}}$ con $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $\pi^{+\infty}\mathcal{O} = 0$, $\pi^{-\infty}\mathcal{O} = T$ y cumpliendo las siguientes tres condiciones:

a) $A_{ii} = \mathcal{O}$ ó $A_{ii} = T$ para todo i.

b) $A_{ij}A_{jk} \subseteq A_{ik}$ para todo i, j, k.

c) $A_{ij}A_{ji} \neq A_{ii}$ para todo i, j.

Por brevedad, en adelante se escribirá $\mathcal{A} = [\lambda_{ij}]$. Es evidente que si el álgebra de transformación $\mathcal{A}$ es tal que todos los exponentes λ_{ij} son finitos, estamos refiriéndonos a un orden tejado.

Problema matricial

Las **transformaciones derechas $\mathcal{O}$-elementales (T-elementales) de columnas** de una matriz en $M_n(T)$ son de dos tipos:

a) Multiplicación a derecha de una columna por un elemento invertible del anillo $\mathcal{O}$ (anillo T).

b) Adición de una columna multiplicada a derecha por un elemento arbitrario de $\mathcal{O}$ (de T) a otra columna.

Simétricamente se difinen las **transformaciones izquiedas $\mathcal{O}$-elementales (T-elementales) de filas**.

Definimos un problema matricial asociado al álgebra de transformación $\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}A_{ij}$ con matrices rectangulares X (cuyas entradas son elementos de T) particionadas en n franjas verticales X^j (algunas franjas podrían ser vacías) de la forma

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c} X^1 & \cdots & X^n \end{array}\right]$$

y las **transformaciones admisibles** sobre X siguientes:

i) Transformaciones T-elementales izquierdas de filas en la matriz X

ii) Transformaciones $\mathcal{O}$-elementales (T-elementales) derechas de columnas en la franja X^i cuando $A_{ii} = \mathcal{O}$ ($A_{ii} = T$).

iii) Adición de columnas en la franja X^i multiplicadas a derecha por elementos de A_{ij} a columnas de la franja X^j.

El problema matricial definido por la matriz X y las trasformaciones admisibles anteriores es llamado el **$(T, \mathcal{A})$-problema**, la matriz X la llamaremos **$(T, \mathcal{A})$-matriz**.

Naturalmente, dos $(T, \mathcal{A})$-matrices X, X' son **equivalentes** (se denota $X \sim X'$) si X se reduce a X' mediante las transformaciones admisibles anteriores. Una matriz X es **indescomponible** si no es suma directa de dos matrices no nulas. El $(T, \mathcal{A})$-problema es de **tipo representación finito** si el número de matrices indescomponibles no equivalentes es finito.

El **vector dimensión** de una $(T, \mathcal{A})$-matriz X es el vector

$$d = \underline{\dim}\, X = (d_0, d^1, \ldots, d^n)$$

donde d_0 es el número de filas de la matriz X y d^j es el numero de columnas de la franja X^j. Además, la **dimensión** de X está definida por la fórmula

$$d^+(X) = d_0 + \sum_{j=1}^{n} d^j.$$

Además, con respecto a la dimensión anterior se clasifican los problemas matriciales de acuerdo al acotamiento de dimensiones de sus matrices indescomponibles. Más precisamente, un $(T, \mathcal{A})$-problema es de **tipo módulo acotado** si existe una constante C tal que $d^+(X) < C$ para cada $(T, \mathcal{A})$-matriz indescomponible X.

Ejemplo 3.1. Ejemplos sencillos de $(T, \mathcal{A})$-problemas.

a) Sea $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$ un poset finito, definimos $A_{ij} = T$ si $i \leq j$ en el poset $\mathcal{P}$; en caso contrario $A_{ij} = 0$. Decimos que $\mathcal{A}$ es el **álgebra de incidencia** del poset $\mathcal{P}$. En este caso, el $(T, \mathcal{A})$-problema es el problema matricial correspondiente a las representaciones del poset $\mathcal{P}$ sobre el campo T. El criterio de tipo módulo acotado es el criterio de Kleiner de tipo representación finito para posets [7].

b) Si $\mathcal{A}$ es un orden tejado entonces el $(T, \mathcal{A})$-problema es el problema de representaciones del orden tejado $\mathcal{A}$ estudiado en el capítulo 2. En este caso, el criterio de tipo módulo acotado coincide con el criterio de tipo representación finito para órdenes tejados [22].

De manera análoga a las representaciones de posets y de órdenes tejados, podemos pasar de un problema matricial a una representación en forma de ciertas colecciones en un T-espacio. La idea consiste en escojer un T-subespacio U_0 de dimensión igual al número de filas de la matriz X. Luego, identificando las columnas de X con vectores en U_0, asociamos a cada índice i el $\mathcal{O}$-submódulo $U_i \subseteq U_0$ (el cual puede además ser o contener un T-subespacio) generado por las columnas de las matrices X^k con coeficientes en A_{ki}.

En consecuencia, obtenemos el siguiente problema de clasificación de $\mathcal{O}$-submódulos de un T-espacio vectorial. Los objetos de la **categoría de representaciones** $\operatorname{rep} \mathcal{A}$ del álgebra $\mathcal{A}$ son colecciones de la forma

$$U = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$$

donde U_0 es un T-espacio vectorial de dimensión finita en el cual se distingue una colección de $\mathcal{O}$-submódulos $U_1, \ldots, U_n$ satisfaciendo las dos siguientes condiciones:

a) $U_i A_{ij} \subseteq U_j$ para todo i, j, esto es, la suma directa $M = M(U) = \oplus_{i=1}^{n} U_i$ es un natural $\mathcal{A}$-módulo derecho.

b) M es un $\mathcal{A}$-módulo finitamente generado, esto es, $U_i/\underline{U}_i$ es un A_{ii}-módulo para cada i, donde $\underline{U}_i = \sum_{k \neq i} U_k A_{ki}$.

Un **morfismo** $\varphi : U \longrightarrow V$ en la categoría rep $\mathcal{A}$ es una función T-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$ tal que $\varphi(U_i) \subseteq V_i$ para cada i. Evidentemente un morfismo φ es un isomorfismo en la categoría rep $\mathcal{A}$ si y sólo si es un isomorfismo de espacios vectoriales en el que $\varphi(U_i) = V_i$ para todo i.

La clasificación de representaciones del álgebra $\mathcal{A}$ (es decir, de objetos de la categoría rep $\mathcal{A}$) salvo isomorfismo es equivalente a la clasificación de $(T, \mathcal{A})$-matrices no equivalentes.

Teniendo en cuenta el ejemplo 3.1, si el álgebra $\mathcal{A}$ es un orden tejado tenemos el problema de clasificación de colecciones de $\mathcal{O}$-retículos en un espacio vectorial estudiado en [21, 22] (Capítulo 2 de este trabajo). Además, si $A_{ii} = T$ para todo i tenemos el problema de clasificación de tuplas de T-subesespacios vectoriales en un T-espacio vectorial principal de dimensión finita (representaciones de un poset ordinario) estudiado en [5, 7, 8, 12–14, 23] (observaciones generales en Capítulo 1 de este escrito).

El **vector dimensión** de una representación U es el vector $d = \underline{\dim}\, U = (d_0, d^1 \ldots, d^n)$, donde $d_0 = \dim_T U_0$ y d^i es el mínimo numero de generadores del A_{ii}-módulo $U_i/\underline{U}_i$. Si d no tiene entradas nulas la representación U se denomina **cierta**. Un álgebra de transformación $\mathcal{A}$ se llama **cierta** si admite una representación indescomponible cierta.

3.2. Poset asociado y combinatorias

De manera análoga al caso de órdenes tejados, asociamos a cada álgebra de transformación $\mathcal{A} = [\lambda_{ij}]$ un poset $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$, esto es, una suma de n cadenas de la forma siguiente:

$$\mathcal{P}_i = \begin{cases} \{p_i^0\} & = \text{ cadena de un punto} \quad \text{si } \mathcal{A}_{ii} = T, \\ \{p_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}} & = \text{ cadena infinita} \quad \text{si } \mathcal{A}_{ii} = \mathcal{O}. \end{cases}$$

La relación de orden en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ está definida por la fórmula

$$p_i^k \leq p_k^l \Leftrightarrow k - l \geq \lambda_{ij}.$$

En particular, $\mathcal{P}_i \leq \mathcal{P}_j$ para $\mathcal{A}_{ij} = T$ y en cada cadena se cumple que si $k > l$ entonces $p_i^k < p_i^l$.

Evidentemente $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es un conjunto infinito si y sólo si $\mathcal{A}_{ii} = \mathcal{O}$ para algún i. En el caso en que $\mathcal{A}$ sea un orden tejado el poset $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es el mismo descrito en el capítulo anterior.

En adelante, vamos a usar para $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ la descomposición estándar $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty + \mathcal{P}^0$, donde $\mathcal{P}^\infty(\mathcal{P}^0)$ es la suma de todas las cadenas infinitas (de un punto) de la forma $\mathcal{P}_i$.

Un poset $\mathcal{P}$ se llama un **$\mathbb{Z}$-conjunto** si es representable como una suma de dos subposets $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty + \mathcal{P}^0$ y cumple las siguientes condiciones:

a) $\mathcal{P}^\infty = \sum_{i \in I^\infty} \mathcal{P}_i$ es una suma arbitraria de cadenas infinitas de la forma $\mathcal{P}_i = \left\{p_i^k\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con relaciones $p_i^{k+1} < p_i^k$ en las cadenas (I^∞ es un conjunto de índices),

b) Si $p_i^k, p_j^l \in \mathcal{P}^\infty$ entonces $p_i^k < p_j^l \Leftrightarrow p_i^{k+1} < p_j^{l+1}$,

c) Si $p_i^k \in \mathcal{P}^\infty$ y $x \in \mathcal{P}^0$ entonces $p_i^k < x \Leftrightarrow p_i^{k+1} < x$ $(x < p_i^k \Leftrightarrow x < p_i^{k+1})$.

Las cadenas infinitas $\mathcal{P}_i$ son llamadas **órbitas** en el conjunto $\mathcal{P}$. A un punto $p_i^k \in \mathcal{P}_i$ se le llama **orbital** y un punto en $\mathcal{P}^0$ se le dice **simple**. En adelante $\mathcal{P}^0 = \{p_i^0\}_{i \in I^0}$ es el conjunto de los puntos simples (I^0 es un conjunto de índices).

Es claro que si $\mathcal{A}$ es un álgebra de transformación, el poset $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es un $\mathbb{Z}$-conjunto; además, un poset finito es también un $\mathbb{Z}$-conjunto con $\mathcal{P}^\infty = \emptyset$.

Un subconjunto $X \subseteq \mathcal{P}$ es un **$\mathbb{Z}$-subconjunto** si cada órbita $\mathcal{P}_i$ está contenida en X o es disyunta con X, en este caso el conjunto X está dotado de una estructura de $\mathbb{Z}$-conjunto inducida de la estructura de $\mathcal{P}$.

Dos $\mathbb{Z}$-conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ se dicen ser **isomorfos** si existe un isomorfismo de posets φ de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ tal que $\varphi(\mathcal{P}^\infty) = \mathcal{Q}^\infty$ (en consecuencia $\varphi(\mathcal{P}^0) = \mathcal{Q}^0$) y si $\varphi(p_i^k) = q_j^l$ entonces $\varphi(p_i^{k+1}) = q_j^{l+1}$.

A cada $\mathbb{Z}$-conjunto $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \mathcal{P}_i$ con conjunto de índices $I = I^\infty \cup I^0$, podemos asociar de manera natural un álgebra de transformación $\text{Alg}\mathcal{P} = [\lambda_{ij}]_{i,j \in I}$ donde

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} -\infty & \text{si } i,j \in I^0 \text{ y } p_i^0 \leq p_j^0, \\ \inf_{k,l}\left\{k - l : p_i^k \leq p_k^l\right\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que $\inf\mathbb{Z} = -\infty$ y $\inf\emptyset = +\infty$. Es evidente que $\text{Alg}\,\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ y $\mathcal{P}(\text{Alg}\,\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, es decir, existe una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismos de álgebras de transformación y clases de isomorfismo de $\mathbb{Z}$-conjuntos con conjunto de índices I finito.

Ejemplo 3.2. Al poset $\mathcal{P} = \mathsf{N} = \{1 < 3 > 2 < 4\}$ le asociamos el álgebra de transformación (más precisamente, álgebra de incidencia)

$$\text{Alg}\mathcal{P} = \begin{bmatrix} T & 0 & T & 0 \\ 0 & T & T & T \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}.$$

Además, si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Lambda)$ es el poset asociado al orden tejado $\Lambda = \Lambda_1$ del ejemplo 2.12 y $\mathcal{P}' = (2) = \{4 < 5\}$ es una cadena de dos puntos, al poset definido por la suma cardinal de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ ($\mathcal{P} \sqcup \mathcal{P}'$) le corresponde el álgebra de transformación

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{P} \sqcup \mathcal{P}') = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi^3\mathcal{O} & 0 & 0 \\ \pi^2\mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} & 0 & 0 \\ \pi^2\mathcal{O} & \pi^3\mathcal{O} & \mathcal{O} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}.$$

Vamos a definir una relación de equivalencia y su respectiva partición en el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Sea $\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathcal{A}_{ij}$ un álgebra de transformación, sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{p_i^k\}$ el $\mathbb{Z}$-conjunto asociado. Dos puntos $p_i^k, p_j^l \in \mathcal{P}$ (y además sus índices i, j) se llaman **ligados** si $\mathcal{A}_{ij} \neq 0$ y $\mathcal{A}_{ji} \neq 0$, esto es, $\lambda_{ij}, \lambda_{ji} < \infty$. Es claro que la relación «estar ligado» es una relación de equivalencia, notamos esta relación por $\sim$.

Por definición de $\mathcal{A}$ tenemos que $p_i^k \sim p_j^l$ si y sólo si $i = j$ ó ($i \neq j$ y $\lambda_{ij}, \lambda_{ji} \in \mathbb{Z}$). En el segundo caso necesariamente tenemos que $\mathcal{A}_{ii} = \mathcal{A}_{jj} = \mathcal{O}$. En particular todos los puntos en una órbita están ligados.

Sea $\widetilde{\mathcal{P}}$ el **conjunto cociente** finito de $\mathcal{P}$ consistiendo de las clases de equivalencia $\widetilde{p}_i^k$ de puntos $p_i^k \in \mathcal{P}$. Introducimos una relación de orden en $\widetilde{\mathcal{P}}$ definida por

$$\widetilde{p}_i^k \leq \widetilde{p}_j^l \Leftrightarrow \mathcal{A}_{ij} \neq 0.$$

Un punto $\widetilde{p}_i^k \in \widetilde{\mathcal{P}}$ se llama **simple** (**múltiple**) si $\mathcal{A}_{ii} = T$ ($\mathcal{A}_{ii} = \mathcal{O}$). Las relaciones entre puntos de $\widetilde{\mathcal{P}}$ están clasificadas en relaciones de tipo fuerte y de tipo débil.

La relación $\widetilde{p}_i^k \leq \widetilde{p}_j^l$ es **débil** si y sólo si $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ (en este caso los puntos $\widetilde{p}_i^k$ y $\widetilde{p}_j^l$ son necesariamente múltiples). En caso contrario la relación es **fuerte**. Para una relación fuerte (débil) $\widetilde{p}_i^k < \widetilde{p}_j^l$ en $\widetilde{\mathcal{P}}$ vamos a usar la notación $\widetilde{p}_i^k \lhd \widetilde{p}_j^l$ ($\widetilde{p}_i^k \prec \widetilde{p}_j^l$).

Si $p_i^k < p_j^l$ en $\mathcal{P}$ y además $\widetilde{p}_i^k \lhd \widetilde{p}_j^l$ ($\widetilde{p}_i^k \prec \widetilde{p}_j^l$) entonces la relación original $p_i^k < p_j^l$ se dice fuerte (débil) y se denota análogamente $p_i^k \lhd p_j^l$ ($p_i^k \prec p_j^l$).

Sea $X \subseteq \widetilde{\mathcal{P}}$, al conjunto $[X] = \{x \in \mathcal{P} : \widetilde{x} \in X\}$ se le llama **imagen inversa** de X en $\mathcal{P}$. Obviamente cada imagen inversa es un $\mathbb{Z}$-subconjunto de $\mathcal{P}$. Consideramos la **subálgebra correspondiente** a $X \subseteq \widetilde{\mathcal{P}}$, $\mathcal{A}_X = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\mathcal{A}_{ij}$ donde la suma es tomada bajo los índices i, j tales que $\widetilde{p}_i^k, \widetilde{p}_j^l \in X$. En particular, obtenemos $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}$. Si $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ es un punto múltiple (simple) y $X = \{\widetilde{x}\}$ tenemos que $\mathcal{A}_{\widetilde{x}}$ es un orden tejado (el campo T).

Un **vector** correspondiente al poset $\mathcal{P}$ es cualquier función $d : \mathcal{P} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$) tomando finitos valores distintos de cero. El **soporte** ($\mathrm{Supp}\, d$) de un vector d es definido por la fórmula $\mathrm{Supp}\, d = \{x \in \mathcal{P} : d(x) > 0\}$ y la **forma**

cuadrática de Tits asociada al conjunto $\mathcal{P}$ está definida por

$$f_{\mathcal{P}}(d) = \sum_{x} d^2(x) + \sum_{x<y} d(x)d(y) - d(0)\sum_{x} d(x) \text{ donde } x, y \in \mathcal{P}.$$

Los vectores tales que $f_{\mathcal{P}}(d) = 1$ son las **raíces** de la forma de Tits asociada al conjunto $\mathcal{P}$. Una raíz d se dice **trivial** si $d(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathcal{P} \cup \{0\}$.

Dos subconjuntos $X, Y \subseteq \mathcal{P}$ se llaman **conjuntos conjugados** si existe un automorfismo φ del $\mathbb{Z}$-conjunto $\mathcal{P}$ tal que $\varphi(X) = Y$. Dos raíces d y d' se dicen **raíces conjugadas** si $d'(0) = d(0)$ y $d'(x) = d(\varphi(x))$ para todo $x \in \mathcal{P}$ y algún automorfismo φ del $\mathbb{Z}$-conjunto $\mathcal{P}$.

3.3. Pares de álgebras de transformación

Análogamente al paso de representaciones de un poset a representaciones de pares de posets, generalizamos el $(T, \mathcal{A})$-problema introduciendo el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema plano de tipo mixto asociado al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de álgebras de transformación.

Problema matricial

Sean $\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}A_{ij}$, $\mathcal{B} = \sum_{i,j=1}^{m} e_{ij}B_{ij}$ álgebras de transformación. Entonces $M_{n\times m}(T)$ es un $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-bimódulo natural que define un problema matricial plano (en el sentido de [3]).

Las matrices del problema tienen la forma

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline X_1^1 & \cdots & X_1^j & \cdots & X_1^m \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline X_i^1 & \cdots & X_i^j & \cdots & X_i^m \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline X_n^1 & \cdots & X_n^j & \cdots & X_n^m \\ \hline \end{array},$$

esto es, X es una matriz rectangular particionada en n franjas horizontales X_i y m franjas verticales X^j. La célula X_i^j es la intersección de la la franjas X_i y X^j (algunas franjas podrían ser vacías). Con respecto a esta matriz se permiten las **transformaciones admisibles** siguientes:

i) Transformaciones $\mathcal{O}$-elementales (T-elementales) izquierdas de filas en la franja X_i cuando $A_{ii} = \mathcal{O}$ ($A_{ii} = T$).

i') Transformaciones $\mathcal{O}$-elementales (T-elementales) derechas de columnas en la franja X^i cuando $B_{ii} = \mathcal{O}$ ($B_{ii} = T$).

ii) Adición de filas en la franja X_j multiplicadas a izquierda por elementos de A_{ij} a filas de la franja X_i.

ii') Adición de columnas en la franja X^i multiplicadas a derecha por elementos de B_{ij} a columnas de la franja X^j.

El problema matricial definido por la matriz X y las trasformaciones anteriores es llamado el $(\mathcal{A},\mathcal{B})$**-problema**, la matriz X la llamaremos $(\mathcal{A},\mathcal{B})$**-matriz**.

Dos $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-matrices X, X' son **equivalentes** (se denota $X \sim X'$) si X se reduce a X' mediante las transformaciones admisibles anteriores. Una matriz X es **indescomponible** si no es suma directa de dos matrices no nulas. El $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema es de **tipo representación finito** si el número de matrices indescomponibles no equivalentes es finito.

El **vector dimensión** de una $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-matriz X es el vector

$$d = \underline{\dim}\, X = (d_1, \ldots, d_n, d^1, \ldots, d^m)$$

donde d_i (d^j) es el numero de filas (columnas) de la franja X_i (franja X^j). Además, la **dimensión** de X está definida por la fórmula

$$d^+(X) = \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{n} d^i.$$

Un $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema es de **tipo módulo acotado** si existe una constante C tal que $d^+(X) < C$ para cada $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-matriz indescomponible X.

Ejemplo 3.3. Ejemplos sencillos de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problemas.

a) Si $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{O}$ con $m = n = 1$. Las matrices cuadradas de orden 1 de la forma (π^k) no son equivalentes para distintos valores de k y éstas son las únicas matrices indescomponibles. Luego el $(\mathcal{O},\mathcal{O})$-problema es de tipo infinito y de tipo módulo acotado haciendo $C = 2$.

b) Sea $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{Q} = \{1, \ldots, m\}$ dos posets finitos, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las álgebras de incidencia de los posets $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente. En este caso el $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema es el problema de representación del par de posets $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ sobre el campo T y el criterio de tipo representación módulo acotado es el criterio de Kleiner de tipo representación finito para pares de posets [7].

3.4. Problema plano de tipo cadena-girnalda

Presentamos la clasificación de matrices indescomponibles de un $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema donde el poset $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una cadena y el poset $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es una girnalda, enunciando el criterio de tipo módulo acotado y tipo representación finito para el caso particular de un par de álgebras de transformación cuyo poset asociado es una girnalda.

Sea $H = H_n$ un 01-orden tejado de la forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente $\mathcal{P}(H)$ es una cadena infinita. Se puede ver en [21] que los órdenes tejados cuyo poset asociado es una cadena son hereditarios[1] e isomorfos a H.

El caso más sencillo es cuando las dos álgebras de transformación corresponden a dos cadenas, este caso tiene solución puramente combinatorial. Evidentemente si se trata de dos cadenas finitas, según Teorema 1.15, este problema es de tipo finito y por tanto de tipo módulo acotado. Veamos la solución del problema «cadena-cadena».

Lema 3.4. *Si $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son cadenas, entonces el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema es de tipo módulo acotado y el conjunto de matrices indescomponibles no vacías se agota, salvo equivalencia, por las matrices cuadradas de orden 1 de la forma $X = X_i^j = [\pi^k]$, donde $k = 0$ para $A_{ii} = T$ ó $B_{jj} = T$ y $k \in \mathbb{Z}$ para el caso $A_{ii} = B_{jj} = \mathcal{O}$.*

Demostración. En efecto, si $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ y $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B})$ son conjuntos unitarios, entonces debemos considerar tres casos. El primero es el caso $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (T, T)$ el cual es trivial. El segundo caso es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (T, H_n)$ el cual corresponde al problema de representaciones del orden hereditario H_n resuelto en [21] y concuerda con la afirmación del lema. El tercer caso es $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (H_m, H_n)$ el cual es equivalente a $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (H_m, H_n^t)$ donde t es la operación de transposición de matrices.

Para probar el tercer caso, tengamos en cuenta que las filas de la franja horizontal X_i de la matriz $X = [X_i^j]$ se pueden sumar a las filas de la franja X_s con coeficientes en $\mathcal{O}$ $(\pi\mathcal{O})$ para $i < s$ $(i > s)$ y las columnas de la franja vertical X^j se pueden sumar de manera similar. Sea $x = \epsilon\pi^k$ un elemento de T con el exponente minimal k que ocurre en la matriz X. Asignamos una numeración desde 1 hasta mn para las células X_i^j asignando los números $1, \ldots, n$ para las células de la primera fila (numerando de izquierda a derecha), los índices $n+1, \ldots, 2n$ para las células en la segunda fila (en la misma dirección) y así sucesivamente. Luego, encontramos la célula con índice minimo que contenga un elemento de la forma $x = \epsilon\pi^k$ y reducimos la célula por tranformaciones admisibles a la forma diagonal por bloques. Cada bloque tiene la forma $\pi^{k+l}I$ sobre la diagonal, donde $l \geq 0$ y I denota la matriz identidad (de algún tamaño). Obviamente existe un bloque de la forma $\pi^k I$ sobre la diagonal, con el cual podemos obtener ceros arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha de este bloque por medio de transformaciones admisibles, luego separando esta célula como sumando directo obtenemos $X = [\pi^k]$ en el caso indescomponible.

[1] Un anillo es **hereditario** si todos sus ideales (izquierdos y derechos) son proyectivos.

Adicionalmente, si $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}) = \{a_1 \lhd \ldots \lhd a_r\}$ y $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B}) = \{b_1 \lhd \ldots \lhd b_s\}$ se obtiene una partición de la matriz X en células más grandes de tipo Y_λ^μ correspondiente al par (a_λ, b_μ), cada una de las cuales corresponde al caso considerado arriba de conjuntos unitarios $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}_\lambda)$ y $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B}_\mu)$. Asignando números desde 1 hasta rs a las células Y_λ^μ como arriba y representando la primera celula distinta de cero en esta colección como una suma directa de matrices indescomponibles del tipo $[\pi^k]$, como fué descrito arriba, notamos que, en vista de las relaciones fuertes entre elementos de las cadenas $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ y $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B})$, esas matrices $[\pi^k]$ pueden ser separadas como sumandos directos. □

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}_n$ un 01-orden tejado de tamaño n tal que el poset finito $\mathcal{Q}(\mathcal{G})$ asociado a $\mathcal{G}$ sea una girnalda. Como se demostró en el capítulo anterior el poset formado por todos los $\mathcal{G}$-módulos proyectivos $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ es una suma ordinal de infinitas copias de $\mathcal{Q}(\mathcal{G})$ y el problema de clasificación de módulos admitidos sobre dicho orden es el problema de representaciones del poset $\mathcal{Q}(\mathcal{G})$. Note además que el orden H es un caso especial de un orden del tipo $\mathcal{G}$.

Presentamos la solución al problema «cadena-girnalda» cuando la girnalda es asociada a un 01-orden tejado (ver demostración en [25]).

Lema 3.5. *Un $(H, \mathcal{G})$-problema es de tipo módulo acotado y el conjunto de $(H, \mathcal{G})$-matrices indescomponibles no vacías se agota, salvo equivalencia, por matrices de cuatro tipos siguientes:*

$$\begin{array}{|c|}\hline \pi^k \\ \hline\end{array}\ , \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \pi^k & \pi^k \\ \hline\end{array}\ , \qquad \underset{l \geq k+l}{\begin{array}{|c|c|}\hline \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \\ \hline\end{array}}\ , \qquad \underset{l \geq k}{\begin{array}{|c|c|}\hline \pi^k & \pi^k \\ \hline 0 & \pi^l \\ \hline\end{array}}$$

a) b) c) d)

donde cada franja horizontal corresponde a un punto en el conjunto finito $\mathcal{Q}(H)$ asociado al 01-orden H; en cada una de las matrices del tipo b), c) y d) el par de franjas verticales corresponde a una díada en el conjunto $\mathcal{Q}(\mathcal{G})$ y la flecha en la matriz d) indica la existencia de adiciones admisibles sobre el anillo $\mathcal{O}$ de filas de la franja superior a filas de la franja inferior.

Observemos que adiciones sobre $\pi\mathcal{O}$ de filas (columnas) de una franja horizontal (vertical) a filas (columnas) en otra franja son evidentemente admisibles.

Finalmente, para completar la solución del problema «cadena-girnalda», presentamos el caso general canónico (ver [25]). Un álgebra $\mathcal{A}$ tal que el conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una girnalda se dice **canónica** si $A_{\widetilde{x}}$ es una cadena o una girnalda asociada a un 01-orden tejado para cada punto múltiple $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{P}}$. Si ambas álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cánónicas, el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema se llama **canónico**.

Proposición 3.6. *Si $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una cadena y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es una girnalda, entonces el $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema es de tipo módulo acotado y, en el caso canónico, el conjunto de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-matrices indescomponibles no vacías se agota, salvo equivalencia, por las matrices (recorriendo los valores k, l en el conjunto $\mathbb{Z}$) de los siguientes tipos:*

a) $\begin{array}{cc} & T \\ T & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} & T \\ \mathcal{O} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} & \mathcal{O} \\ T & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \begin{bmatrix} \pi^k \end{bmatrix}\end{array}$

b) $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ T & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ \mathcal{O} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ \mathcal{O} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \\ & l \geq 1\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ \pi & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \\ & & l \geq 0\end{array}$

$\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ T & \begin{matrix} T \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ T & \begin{matrix} T \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ T & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} T & T \end{matrix} \\ T & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix}\end{array}$

c) $\begin{array}{cc} T & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{cc} \mathcal{O} & \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^k \end{bmatrix} \\ & l \geq k+1\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} \pi & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix} \\ & & l \geq k\end{array}$

$\begin{array}{ccc} T & \begin{matrix} T \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} T & \begin{matrix} T \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} T & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} T & \begin{matrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi^k & \pi^k \\ 0 & \pi^l \end{bmatrix}\end{array}$

donde las transformaciones de columnas en el caso c) pueden ser descritas usando la sub-álgebra de $\mathcal{B}$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, obtenemos el criterio de tipo módulo acotado y tipo representación finito para el caso particular de pares de álgebras de transformación cuyo poset asociado es una girnalda.

Teorema 3.7. *Si $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son girnaldas, el $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-problema es de tipo módulo acotado (tipo finito) si y sólo si uno de los conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ó $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es una cadena (cadena finita).*

Demostración. Evidentemente, la condición suficiente (de cada criterio) es consecuencia de la proposición anterior. La condición necesaria se sigue de la proposición anterior y el hecho de que los problemas (T^2, T^2), (Ω, Ω) y (Ω, T^2) son de tipo módulo no acotado (ver [25]). La última propiedad es demostrada por las series infinitas de matrices indescomponibles (sobre T en el primer caso, en segundo y tercer caso sobre $K = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$) de la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline I_n & J \end{array}\right],$$

donde J es una célula de Jordan de tamaño arbitrario n. □

Lo interesante de la solución al problema «cadena-girnarlda», es que se conoce la lista completa de objetos indescomponibles, lo cual en el caso general no se ha encontrado; es más, para el caso particular de representaciones de órdenes tejados de tipo finito no se ha obtenido el listado.

3.5. Diferenciación para álgebras de transformación

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}^\infty + \mathcal{P}^0$, donde $\mathcal{P}^\infty = \sum_{i\in I^\infty} \mathcal{P}_i$ con $\mathcal{P}_i = \{p_i^z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ y $\mathcal{P}^0 = \{p_i^0\}_{i\in I^0}$. Un punto simple $a \in \max\mathcal{P}$ se dice **conveniente** para diferenciación si $w(\mathcal{N}) \leq 2$, donde $\mathcal{N} = \mathrm{inc}(a)$ es el conjunto de puntos incomparables con a (es claro que $\mathcal{N}$ es un $\mathbb{Z}$-subconjunto de $\mathcal{P}$). Sea $\widehat{\mathcal{N}}$ es el semiretículo superior de $\mathcal{N}$, definimos el **poset derivado** de $\mathcal{P}$ con respecto al punto a por la igualdad

$$\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{a\}) + \widehat{\mathcal{N}},$$

con las relaciones de orden entre $\widehat{\mathcal{N}}$ y $\mathcal{P} \setminus \{a\}$ de manera natural, como de subconjuntos del retículo $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. Las órbitas en el conjunto $\mathcal{P}'$ son todas las órbitas del conjunto $\mathcal{P}$ mas las nuevas órbitas de los dos tipos siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \left\{p_i^{k+z} + p_j^{l+z}\right\}_{z\in\mathbb{Z}} & \text{donde } p_i^k, p_j^l \in \mathcal{N}^\infty; \\ \text{b)} & \left\{p_i^z + p_j^0\right\}_{z\in\mathbb{Z}} & \text{donde } p_i^z \in \mathcal{N}^\infty, p_j^0 \in \mathcal{N}^0. \end{array}$$

Obviamente, desde el punto de vista combinatorial, esta operación es la diferenciación con respecto al punto maximal a en el sentido de Nazarova y Roiter extendido al caso de un conjunto infinito $\mathcal{N}$ y acorde con la $\mathbb{Z}$-estructura del conjunto $\mathcal{P}$.

Es claro que el número de nuevos puntos simples es siempre finito y el número de nuevas órbitas es finito si y sólo si el conjunto cociente $\widetilde{\mathcal{N}}$ no contiene díadas de la forma $\{\widetilde{x}, \widetilde{y}\}$ ó cadenas de la forma $\{\widetilde{x} \prec \widetilde{y}\}$, donde $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ son puntos múltiples. En este caso, fijando una numeración de los puntos de $\mathcal{P}'$ (compatible con la definición de un $\mathbb{Z}$-conjunto), obtenemos el **álgebra derivada** $\mathcal{A}'_a = \mathrm{Alg}\mathcal{P}'_a$, la cual es independiente de la numeración elegida salvo isomorfismo.

De acuerdo con el algoritmo de diferenciación por un punto maximal para posets finitos y el algoritmo de diferenciación para órdenes tejados; tenemos el siguiente resultado de convergencia del algoritmo.

Lema 3.8. *Para cada álgebra de transformación $\mathcal{A}$, el conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ no contiene subconjuntos críticos de Kleiner $K_1, \ldots, K_5$ si y sólo si el poset derivado $\mathcal{P}'_a$ no contiene tales conjuntos.*

Sea $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones indescomponibles del álgebra $\mathcal{A}$. Denotamos la clase de isomorfismo de la representación U por $[U]$.

Un álgebra de transformación $\mathcal{A}$ se dice **escindida** si el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es representable de la forma $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = X + Y + C$, donde $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \triangleleft Y$ y C es una cadena arbitraria que también puede ser vacía o infinita. Enunciamos dos lemas auxiliares importantes (ver [25]).

Lema 3.9. *Un álgebra escindida no es cierta.*

Como consecuencia de Lema 3.4 y Proposición 3.6, se puede hallar la clasificación de matrices indescomponibles para el $(T, \mathcal{A})$-problema cuyo poset asociado es suma de una cadena y una girnalda.

Lema 3.10. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de transformación y $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = C + G$, donde la cadena C y la girnalda G son $\mathbb{Z}$-subconjuntos, entonces el $(T, \mathcal{A})$-problema es de tipo módulo acotado y el conjunto de $(T, \mathcal{A})$-matrices no vacías indescomponibles se agota, salvo equivalencia, por las matrices de la siguiente forma:*

a) $X = [X^i] = [1]$,

b) $X = \left[\begin{array}{c|c} X^i & X^j \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \pi^{-k} & \pi^{-l} \end{array}\right]$, *donde* $\{p_i^k, p_j^l\}$ *es una díada,*

c) $X = \left[\begin{array}{c|c|c} X^i & X^j & X^u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \pi^{-k} & \pi^{-l} & \pi^{-r} \end{array}\right]$ *y* $X = \left[\begin{array}{c|c|c} X^i & X^j & X^u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \pi^{-k} & 0 & \pi^{-r} \\ 0 & \pi^{-l} & \pi^{-r} \end{array}\right]$ *donde* $\{p_i^k, p_j^l, p_u^r\}$ *es una tríada,*

d) $X = \left[\begin{array}{c|c|c|c} X^i & X^j & X^u & X^v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \pi^{-k} & 0 & \pi^{-r} & 0 \\ 0 & \pi^{-l} & \pi^{-r} & \pi^{-s} \end{array}\right]$, *donde* $\{p_i^k, p_j^l, p_u^r < p_v^s\}$ *es un subconjunto de tipo* $(1,1,2)$ *(si $u = v$, entonces las dos franjas se vuelven una sola).*

Algunas matrices de la lista anterior pueden ser equivalentes (y diferir por un coeficiente π^z).

En adelante, denotamos las clases de isomorfismo de representaciones indescomponibles del álgebra $\mathcal{A}$ correspondientes a $(T, \mathcal{A})$-matrices de la forma a) y b) por $[i] = [p_i^k]$ y $[p_i^k, p_j^l]$ respectivamente.

Ahora, describimos el funtor de diferenciación correspondiente al $(T, \mathcal{A})$-problema.

Un objeto $U = (U_0, \ldots, U_n)$ en $\operatorname{rep}\mathcal{A}$ se escribe $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$, con $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $U_x = \pi^k U_i$ para $x = p_i^k$. Sea un punto simple $a \in \max\mathcal{P}$ conveniente para diferenciación, sea $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_a$ el el poset derivado y asociado al álgebra derivada $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_a$.

El **funtor de diferenciación** $F^a : \operatorname{rep}\mathcal{A} \to \operatorname{rep}\mathcal{A}'$ correspondiente al punto conveniente a, asigna a cada objeto $U = (U_0, U_x : x \in \mathcal{P})$ en $\operatorname{rep}\mathcal{A}$ el **objeto derivado** $U' = (U'_0, U'_x : x \in \mathcal{P}')$ en $\operatorname{rep}\mathcal{A}'$, tal que $U'_0 = U_a$ y

$$\begin{aligned} U'_x &= U_x \cap U_a && \text{para } x \in \mathcal{P} \setminus \{a\}, \\ U'_{x+y} &= (U_x + U_y) \cap U_a && \text{para } x + y \in \widehat{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Además, a cada morfismo $\varphi : U \to V$ en $\operatorname{rep}\mathcal{A}$ (considerado como una aplicación T-lineal $\varphi : U_0 \to V_0$) le asigna el **morfismo derivado** $\varphi' : U'_0 \to V'_0$ como la restricción de φ al conjunto $U'_0 = U_a$.

Anotamos que $U'_{u+v} = U'_{x+y}\pi^z$ para $x = p_i^k$, $y = p_j^l$, $u = p_i^{k+z}$ y $v = p_j^{l+z}$. Observamos además que aunque la colección U contiene $\mathcal{O}$-submódulos de diferentes clases (T-espacios, $\mathcal{O}$-retículos y sus sumas directas) la fórmula de diferenciación anterior es prácticamente la misma para el caso de diferenciación de representaciones de posets sobre un cuerpo.

En primer lugar notemos que $U' = 0$ si y sólo si $U_a = 0$, esto es, si U es en efecto una representación del álgebra $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. En este caso, si U es indescomponible, entonces por Lema 3.10 obtenemos que $[U] = [i] = [p_i^k]$, donde $p_i^k \in \mathcal{N}$, ó $[U] = [p_i^k, p_j^l]$, donde $\{p_i^k, p_j^l\}$ es una díada en $\mathcal{N}$. Denotamos la colección de todas las clases $[U]$ de este tipo por Θ y consignamos este resultado de la siguiente manera:

Lema 3.11. *Si U es una representación indescomponible en $\operatorname{rep}\mathcal{A}$, $U' = 0$ si y sólo si $[U] \in \Theta$.*

Definimos la operación de **integración**, como el proceso inverso a la diferenciación, donde a cada representación W del álgebra $\mathcal{A}'$ esta operación le asocia una representación **primitiva** $U = W^{\uparrow}$ del álgebra $\mathcal{A}$ tal que $(W^{\uparrow})' \cong W$. En [25] podemos observar matricialmente el procedimiento de la integración de representaciones indescomponibles, el cual es un procedimiento bastante útil para calcular representaciones indescomponibles. Presentamos la propiedad principal del algoritmo de diferenciación para el $(T, \mathcal{A})$-problema.

Proposición 3.12. *El funtor $F^a : \operatorname{rep}\mathcal{A} \to \operatorname{rep}\mathcal{A}'$ induce una biyección*

$$(\operatorname{Ind}\mathcal{A}) \setminus \Theta \to \operatorname{Ind}\mathcal{A}',$$

y la biyección inversa es definida por la operación $\uparrow$. En particular, el álgebra $\mathcal{A}$ es de tipo representación módulo acotado si y sólo si el álgebra derivada $\mathcal{A}'$ también lo es.

3.6. Criterio principal de tipo módulo acotado

Formulamos a continuación el criterio principal de tipo módulo acotado para pares de álgebras de trasformación.

Teorema 3.13 (Criterio de Zavadskij y Revitskaya, [25]). *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de álgebras de trasformación, el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema es de tipo módulo acotado si y sólo si el par de posets $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{P}(\mathcal{B}))$ no contiene pares de conjuntos críticos en el sentido de Kleiner.*

Demostración. La idea general de la prueba contiene dos partes centrales.

La primera parte, consiste en reducir el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema al caso de un $(T, \mathcal{A})$-problema (análogamente al problema de pares de posets de tipo finito). Considerando un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema asumimos que uno de los conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ no es una girnalda, de lo contrario, la prueba se reduce al teorema 3.7.

Luego, supongamos por ejemplo que el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ no es una girnalda, en este caso, $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ contiene un subconjunto de tipo $(1, 1, 1)$ ó $(1, 2)$. Si $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es un conjunto infinito o nó es una cadena, el par $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{P}(\mathcal{B}))$ contiene un par de conjuntos críticos en el sentido de Kleiner. Por otro lado, se demuestra en [25] que si $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ no es cadena finita y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ no es girnalda, entonces el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema es de tipo módulo no acotado.

Suponiendo que $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = C_m$ es una cadena finita conteniendo únicamente m puntos simples. Si $m = 1$ inmediatamente se tiene el $(T, \mathcal{B})$-problema. Si $m \geq 2$, consideramos el $(T, \mathcal{B}')$-problema donde $\mathcal{B}'$ es un álgebra de transformación tal que el poset asociado sea la suma cardinal del poset $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ y la cadena C_{m-1} de $m - 1$ puntos $(\mathcal{P}(\mathcal{B}') = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \sqcup C_{m-1})$ demostrando que $\mathcal{P}(\mathcal{B}')$ no contiene subconjuntos críticos de Kleiner si y sólo si el par $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{P}(\mathcal{B}))$ no contiene pares críticos.

En consecuencia, el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema de tipo módulo acotado es reducido a la investigación del $(T, \mathcal{B}')$, ó, cambiando de notación, se reduce al $(T, \mathcal{A})$-problema.

La segunda parte de la prueba consiste en demostrar el criterio de tipo representación módulo acotado para el caso de $(T, \mathcal{A})$-problemas, generalizando en particular, el criterio de tipo finito para órdenes tejados.

Teorema 3.14. *Un $(T, \mathcal{A})$-problema es de tipo módulo acotado si y sólo si el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ no contiene subconjuntos críticos de Kleiner.*

Presentamos un esbozo de la prueba.

Condición necesaria

Para esta parte, asumimos que el poset $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ contiene un subconjunto crítico $K = K_z$ para algún $z \in \{1, \ldots, 5\}$. Uno puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el álgebra $\mathcal{A}$ es **minimal**, esto es, todos los puntos simples en $\mathcal{P}$ pertenecen a K_z, todas las órbitas en $\mathcal{P}$ intersectan a K_z y si otro subconjunto crítico $K_{z'}$ está contenido en $\mathcal{P}$ se cumplen las mismas propiedades anteriores.

Supongamos que K_z tiene al menos un punto orbital, de lo contrario, el $(T, \mathcal{A})$-problema es el problema clásico de representaciones de posets sobre el cuerpo T resuelto en [7]. Si todos los puntos de K_z son orbitales, asumimos que $\mathcal{A}$ es un orden tejado. Por Teorema 2.11 el anillo $\mathcal{A}$ es de tipo infinito y por Apéndice A es de tipo módulo no acotado, contradiciendo la hipotesis.

Considerando el caso $z = 1$, tenemos que cada punto orbital $x \in K_z$ tiene la forma (cambiando la enumeración de puntos en las órbitas, de ser necesario) $x = p_i^0$, luego, para dos puntos orbitales $x = p_i^0$ y $y = p_j^0$ en K_z obtenemos $\lambda_{ij} \geq 1$ y $\lambda_{ji} \geq 1$. Por lo tanto, las matrices indescomponibles de la forma

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} I & 0 & I & I \\ 0 & I & I & J_0 \end{array}\right]$$

(J_0 es una célula de Jordan con valor propio cero) corresponden a representaciones del conjunto K_1 (ver apéndice A) sobre un campo arbitrario, por lo cual, dichas matrices serían $(T, \mathcal{A})$-matrices, contradiciendo nuevamente la hipotesis. En consecuencia, $K_1 \nsubseteq \mathcal{P}$.

Ahora se considera el caso cuando K_z contiene puntos simples y orbitales. Sea $x, y \in K_z$ dos puntos comparables, donde x es simple y y es un punto orbital. Entonces existe entre x e y infinitos puntos de la órbita de y, de modo que $\mathcal{P} \setminus \{x\}$ contiene otro subconjunto crítico $K_{z'}$, lo cual es imposible. Por lo tanto, ningún punto simple en K_z es comparable con un punto orbital, esto es, K_z es una suma cardinal $K_z = X \sqcup Y$, donde X consiste de puntos simples y Y de puntos orbitales, $w(X) \leq 2$ y $\max X \subset \max \mathcal{P}$.

Además, como $K_1 \nsubseteq \mathcal{P}$, cada punto simple $a \in \max X$ es conveniente para diferenciación y como $w(X) \leq 2$, la diferenciación con respecto a este punto no produce nuevos puntos simples. Es más, $s(\mathcal{P}'_a) = s(\mathcal{P}) - 1$, donde $s(\mathcal{P})$ es el número de puntos simples en $\mathcal{P}$. Reemplazando $\mathcal{P}$ por $\mathcal{P}'_a$ y repitiendo el procedimiento anterior, en un número finito de pasos obtenemos $s(\mathcal{P}) = 0$, es decir, tenemos la situación cuando todos los puntos en $\mathcal{P}$ son orbitales, lo cual es una contradicción (notemos que la existencia de un subconjunto crítico en el poset devidado $\mathcal{P}'_a$ es garantizada por Lema 3.8).

Condición suficiente

Para esta parte de la prueba, definimos como $\lambda(\mathcal{P})$ el número de clases de conjugación de todas las raíces de un conjunto $\mathcal{P}$ con soporte de ancho 2 y distinto a $F_8 = (1, 2, 3)$. Se demuestra en [25] que si un conjunto $\mathcal{P}$ no contiene subconjuntos críticos de Kleiner entonces $\lambda(\mathcal{P}) < \infty$.

Asumimos que el conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ no contiene subconjuntos críticos y se prueba por inducción sobre $\lambda(\mathcal{P})$ que el $(T, \mathcal{A})$-problema es tipo módulo acotado. Por Lema 3.9 podemos suponer que el álgebra $\mathcal{A}$ no es cierta.

La **base de inducción** es el caso $\lambda(\mathcal{P}) = 0$ correspondiendo a un conjunto $\mathcal{P}$ de ancho 2. Para el caso en que $\widetilde{\mathcal{P}}$ tiene puntos simples, si $x \in \widetilde{\mathcal{P}}$ es un punto simple, entonces el poset $\widetilde{\mathcal{P}} = X + \{x\} + Y + \mathcal{N}$, donde $X \lhd x \lhd Y$, $\mathcal{N} = \mathrm{inc}(x)$ (conjunto de puntos incomparables con x) es una cadena y la imagen inversa $[\mathcal{N}]$ es también una cadena. Como $\mathcal{A}$ no es un álgebra escindida, se sigue entonces que $X = Y = \emptyset$ y podemos aplicar Lema 3.10 al conjunto $\mathcal{P} = \{x\} + [\mathcal{N}]$.

Para el caso en que $\widetilde{\mathcal{P}}$ no tiene puntos simples, si $x \lhd y$ es una relación fuerte en $\widetilde{\mathcal{P}}$, entonces $\widetilde{\mathcal{P}} = X + Y + Z$, donde $X = x_\Delta$, $Y = \left\{t \in \widetilde{\mathcal{P}} : x \lhd t\right\}$ y se cumple que $x \prec z$ ó $x||z$ para cualquier punto $z \in Z$. Como $w(\mathcal{P}) \leq 2$ la imagen inversa $[Z]$ es una cadena y el álgebra $\mathcal{A}$ es escindida, no siendo este el caso. Luego, $\widetilde{\mathcal{P}}$ tiene únicamente relaciones de tipo débil. Bajo los supuestos anteriores, $|\widetilde{\mathcal{P}}| \leq 2$ (de lo contrario $w(\mathcal{P}) \geq 3$), $\widetilde{\mathcal{P}}$ es un singleton ó es el conjunto $\{x, y\}$ donde $[x]$ e $[y]$ son cadenas. En el primer caso $\mathcal{A}$ es orden tejado de tipo finito tal que $w(\mathcal{P}) \leq 2$ (ver sección 2), mientras que en el segundo caso podemos usar Lema 3.10.

Paso de inducción Si existe un punto simple maximal $a \in \mathcal{P}$ entonces $w(\mathcal{N}) \leq 2$, con $\mathcal{N} = \mathrm{inc}(a)$ y a es un punto conveniente para diferenciación. Es más, como el álgebra $\mathcal{A}$ no es escindida tenemos $w(\mathcal{N}) = 2$. Se demuestra entonces que $\lambda(\mathcal{P}'_a) < \lambda(\mathcal{P})$, luego, el álgebra $\mathcal{A}'_a$ es de tipo módulo acotado por Lema 3.8 y la hipotesis de inducción. En consecuencia, el álgebra $\mathcal{A}$ es de tipo módulo acotado por Proposición 3.12.

Por otra parte, veamos el caso cuando el conjunto $\max\mathcal{P}$ no tiene puntos simples. Consideremos el conjunto cociente $\widetilde{\mathcal{P}}$ y escojamos un punto arbitrario $a \in \max\widetilde{\mathcal{P}}$. Luego, $\widetilde{\mathcal{P}} = X + \{a\} + Y$, donde $X = \left\{x \in \widetilde{\mathcal{P}} : x \lhd a\right\}$. Se demuestra que el conjunto $G = [Y]$ es una girnalda.

Es claro que si $X = Y = \emptyset$, entonces $\mathcal{P} = [a]$, esto es, el álgebra $\mathcal{A}$ es un orden tejado. Por Teorema 2.11 $\mathcal{A}$ es un álgebra de tipo finito.

Si $X = \emptyset$ y $Y \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{P} = C + G$ donde los conjuntos $C = [a]$ y $G = [Y]$ contienen puntos orbitales. Por lo tanto, uno de los conjuntos C y G es una cadena y el otro es una girnalda reduciendo el problema al Lema 3.10.

Finalmente, si $X \neq \emptyset$, entonces $w(G) = 2$ porque el álgebra $\mathcal{A}$ no es escindida.

Consideramos ahora un punto múltiple $b \in \max Y$ y los conjuntos $W = \left\{x \in \widetilde{\mathcal{P}} : x \lhd b\right\}$ y $L = \mathcal{P} \setminus [W + b]$. Como $\mathcal{P}$ no contiene subconjuntos críticos y todos los puntos en Y son incomparables o débilmente comparables con a se sigue que $Y \setminus b \subseteq W$.

Además, como $w(G) = 2$ tenemos que L es una cadena (la cual contiene a C como una subcadena). Luego, $\mathcal{P} = [W] + [b] + L$, donde $[W] \lhd [b]$ y como el álgebra $\mathcal{A}$ no es escindida tenemos que $W = \emptyset$. Por tanto $\mathcal{P} = [b] + L$, donde L es una cadena y $[b]$ es una girnalda, lo cual es un caso demostrado en Lema 3.10. Esto completa la prueba del teorema 3.13. □

De manera inmediata, obtenemos el criterio de tipo finito para un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema. Podemos ver, en el caso de un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema de tipo finito, que ninguno de los conjuntos cocientes $\widetilde{P}(\mathcal{A})$ y $\widetilde{P}(\mathcal{B})$ contiene subconjuntos de la forma $\{x, y, u\}$, $\{u, v\}$ ó $\{u \prec v\}$ donde x, y son puntos simples y u, v son puntos múltiples; es más, uno de los conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ debe ser una cadena finita. Por Lema 3.12 y en vista de lo anterior obtenemos dos afirmaciones importantes.

Proposición 3.15. *Un $(T, \mathcal{A})$-problema de tipo módulo acotado es de tipo finito si y sólo si el conjunto $\mathcal{N} = inc(x)$ es una cadena finita para cada punto orbital $x \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Proposición 3.16. *Un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema de tipo módulo acotado es de tipo finito si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones (salvo transposición de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$).*

a) El conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una cadena finita de m elementos ($m \geq 1$).

b) Para cada punto orbital $x \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ el conjunto $\mathcal{N} = inc(x)$ es una cadena finita para $m = 1$ y es vacío para $m \geq 2$.

3.7. Observaciones sobre una conjetura

En [25] se formuló una conjetura natural sobre acotamiento de dimensiones de objetos indescomponibles en toda la clase de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado.

Conjetura 3.17. *Existe una constante C, tal que para cada par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de álgebras de trasformación de tipo módulo acotado y para cada $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-matriz indescomponible X, se tiene que $d^+(X) < C$.*

Observemos la veracidad de la conjetura para el caso de varias clases particulares de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado.

Caso 1. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ posets finitos. Consideramos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las álgebras de incidencia de los posets finitos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente, es claro que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Bajo estos supuestos, por Teoremas 1.15 y 3.13 el $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problema es de tipo módulo acotado si y sólo si es de tipo finito. Además, si $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es un par de posets de tipo finito entonces uno de ellos es una cadena finita, por ejemplo $\mathcal{P} = C_{m+1}$. Entonces, se cumple lo siguiente.

Lema 3.18. *El problema matricial correspondiente al par $(C_{m+1}, \mathcal{Q})$ es equivalente al problema matricial correspondiente al poset $C_m \sqcup \mathcal{Q}$ (suma cardinal de C_m y $\mathcal{Q}$) sobre el campo T.*

Demostración. Sea $C_m = \{a_1 < \ldots < a_m\}$ y $\mathcal{P} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Para una representación arbitraria U del poset $C_m \sqcup \mathcal{Q}$, consideremos su presentación matricial

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A^1 & \cdots & A^m & B^1 & \cdots & B^n \end{array}\right],$$

donde, las franjas verticales A^i y B^i están asociadas a los puntos a_i y b_i respectivamente. Entonces, utilizando transformaciones admisibles podemos reducir A^1 a la forma estándar

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

y, utilizando las adiciones de columnas del bloque A^1 a columnas de los demás bloques $A^2, \ldots, A^n$ anulamos todos los elementos a la derecha de I reduciendo cada uno de estos bloques A^i $(i \neq 1)$ a la forma

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline A_2^i \end{array}\right].$$

Aplicamos el mismo procedimiento a la matriz A_2^2; continuando de esta manera, al final obtenemos que la matriz X se reduce a la forma

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_1^1 & \cdots & B_1^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 & B_2^1 & \cdots & B_2^n \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & B_m^1 & \cdots & B_{m-1}^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_{m+1}^1 & \cdots & B_{m+1}^n \end{array}\right],$$

donde las franjas verticales B^i originales se han conservado. Notemos que la submatriz B de X, formada por las células B_i^j, está particionada en n franjas verticales B^j y $m+1$ franjas horizontales B_i. Sobre la matriz B están permitidas las transformaciones admisibles correspondientes al problema plano asociado al par de posets $(C_{m+1}, \mathcal{Q})$. En efecto, las adiciones de columnas correspondientes a las relaciones de orden en $\mathcal{Q}$ se han permitido desde el inicio por la definición de la representación matricial y según la matriz anterior, las adiciones de filas de una franja horizontal B_i a filas de una franja B_j están permitidas si y sólo si $i > j$, debido a que, únicamente para este caso, al realizar dichas operaciones se puede corregir, con operaciones admisibles de columnas, lo que ha cambiado en la forma canónica de la parte izquierda de la matriz. Esto completa la prueba.

□

Por Lema 3.18, podemos calcular sencillamente las representaciones de pares de posets de tipo finito usando la lista (descubierta por Kleiner, ver [8, 10]) de representaciones ciertas de posets de tipo finito. Como la lista mencionada de indescomponibles es finita, la clase de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$

y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ posets finitos satisface la conjetura. Según dicho listado, una cota superior para las dimensiones de las matrices indescomponibles es $C = 16$.

Caso 2. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ 01-órdenes tejados. Por Teorema 2.15 este caso se reduce al caso anterior.

Caso 3. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ posets de ancho uno. Este es el caso cuando $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son cadenas, por Lema 3.4 se cumple la conjetura y una cota superior para las dimensiones de las $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-matrices es $C = 2$.

Caso 4. $(T, \mathcal{A})$-problemas con $\mathcal{A}$ un orden tejado y el ancho $w(\mathcal{P}(\mathcal{A})) \leq 2$. Si el poset $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ tiene ancho uno estamos en el caso anterior. Si $\mathcal{P}$ tiene ancho dos, por ser periódico infinito, tiene un número finito de subposets todos de ancho uno y dos, cuyas representaciones indescomponibles (por Lema 1.5) son triviales de la forma $K(\emptyset)$,$K(x)$ con $x \in \mathcal{P}$ y $K(x, y)$ donde x, y son incomparables en $\mathcal{P}$. Luego, esta clase de $(T, \mathcal{A})$-problemas tiene $(T, \mathcal{A})$-matrices indescomponibles de dimensión menor igual a $C = 6$.

Caso 5. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado con $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ girnaldas. En este caso, según Proposición 3.7 uno de los posets $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ es una cadena. Además, en Proposición 3.6 se muestra el conjunto de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-matrices indescomponibles, luego, es obvio el cumplimiento de la conjetura para esta subclase de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas de tipo módulo acotado. Es claro que $C = 4$ es una cota superior para el conjunto de dimensiones de las $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-matrices indescomponibles.

Caso 6. $(T, \mathcal{A})$-problemas con $\mathcal{A}$ un orden tejado de tipo finito. Necesitamos enunciar otra conjetura que servirá para dar una posible vía de solución a este caso particular.

Conjetura 3.19 ([21]). *Todos los módulos admisibles indescomponibles sobre un orden tejado de tipo finito, se corresponden unívocamente con todas las representaciones ciertas indescomponibles de todos los subposets ciertos mutuamente inequivalentes*[2] *del poset* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

La idea principal, para probar la conjetura anterior, es ver que cualquier orden tejado de tipo finito se puede reducir por diferenciación a un 01-orden en un número de pasos fijo; si esto fuera cierto, usando el algoritmo de integración, podríamos restaurar las representaciones del orden original y tendríamos la demostración.

Si esta conjetura se probara, obtenemos que el número de $(T, \mathcal{A})$-matrices indescomponibles (con $\mathcal{A}$ en la clase de órdenes tejados de tipo finito) es finito, lo cual confirma la conjetura 3.17 para este caso.

Observación 3.20. En resumen, la idea que se tiene para probar la conjetura 3.17 consiste en desarrollar la teoría de representaciones de órdenes tejados y más generalmente, de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-problemas hasta el nivel de descripción completa de las representaciones indescomponibles.

[2] Dos posets $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ ciertos en el poset $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ son **equivalentes** si existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{M} = \left\{p_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, p_{i_n}^{\lambda_n}\right\}$ y $\mathcal{M}' = \left\{p_{i_1}^{\lambda_1+\alpha}, \ldots, p_{i_n}^{\lambda_n+\alpha}\right\}$.

APÉNDICE A

Series de indescomponibles de los críticos de Kleiner

Para cada conjunto crítico de Kleiner K_i $(i = 1, \ldots, 5)$ escribimos una serie infinita de representaciones indescomponibles no equivalentes. Una representación truncada $\{U_x\}_{x \in K_i}$ se escribe de manera siguiente: a un punto $x \in K_i$ le corresponde una matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas (en la base del espacio U_0) de elementos básicos del espacio U_x. La matriz identidad y el bloque de Jordan con cualquier valor propio se denotan por I e J respectivamente. La dimensión de esas matrices puede ser arbitraria. Los bloques vacíos correspondesn a matrices nulas.

1. $K_1 = (1,1,1,1) = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
J & I & I & \\
\hline
I & I & & I \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{a_1} & \multicolumn{1}{c}{a_2} & \multicolumn{1}{c}{a_3} & \multicolumn{1}{c}{a_4}
\end{array}$$

2. $K_2 = (2,2,2) = \{a_1 < a_2; b_1 < b_2; c_1 < c_2\}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
J & I & I & & & \\
\hline
I & I & & & I & \\
\hline
I & & & I & & I \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{a_1} & \multicolumn{1}{c}{a_2} & \multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{c_1} & \multicolumn{1}{c}{c_2}
\end{array}$$

3. $K_3 = (1,3,3) = \{a_1; b_1 < b_2 < b_3; c_1 < c_2 < c_3\}$

J	I	I					
I	I				I		
I			I				I
	I			I		I	
a_1		b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3

4. $K_4 = (\mathsf{N}, 4) = \{a_1 < a_2 > b_1 < b_2; c_1 < c_2 < c_3 < c_4\}$

J	I		I						
I	I	I					I		
I				I					I
	I				I			I	
					I	I			
a_1		a_2	b_1	b_2		c_1	c_2	c_3	c_4

5. $K_5 = (1,2,5) = \{a_1; b_1 < b_2; c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5\}$

J	I		I								I
I	I	I		I							
		I			I				I		
	I					I				I	
		I					I				
I								I			
a_1			b_1		b_2		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

Conclusiones

La mayor ganancia para el autor es el hecho de introducirse en la teoría de representaciones de conjuntos parcialmente ordenados y observar las aplicaciones a las representaciones de ordenes tejados; más generalmente, de álgebras de transformación. Esto le permitirá abordar algunos problemas de investigación en esta temática, como por ejemplo, los problemas abiertos mensionados en el desarrollo del trabajo; el primero sobre la clasificación de módulos admitidos indescomponibles sobre un orden tejado de tipo finito y el segundo sobre el acotamiento de dimensiones de matrices indescomponibles, en la clase de pares de álgebras de transformación de tipo módulo acotado. Las observaciones hechas a la conjetura 3.17 han despertado en el autor interés de trabajar en la solución de dicho problema.

Para investigaciones futuras sobre el tema considerado, sería interesante describir precisamente las representaciones indescomponibles de un par de álgebras de transformación. Obteniendo, de esta manera, una generalización amplia de los resultados clásicos de Kleiner para posets ordinarios y como una consecuencia directa, se tendría la solución de las conjeturas 3.17 y 3.19.

Por otra parte, existe la línea de investigación de relaciones de la teoría observada de representaciones de álgebras de transformación con las teorías de representaciones de otras estructuras algebraicas, en particular, de álgebras de Artin de dimensión finita, de grupos abelianos sin torsión y de retículos modulares; así como, las relaciones con la teoría de formas bilineales y cuadráticas enteras.

Desde 1980 hasta hoy, la investigación de la teoría de representaciones de posets se ha encaminado hacia el estudio de posets con estructuras adicionales (posets con involución, posets con una relación de equivalencia, posets equipados, etc.). Concluimos entonces que este ha sido un trabajo muy importante por marcar los primeros pasos en esta línea de investigación y acercarnos a problemas más amplios que pueden ser abordados a posteriori.

Bibliografía

[1] D.M. Arnold, *Abelian groups and Representations of partially ordered sets*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Yu. A. Drozd, *Coxeter transformations and representations of partially ordered sets*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **8** (1974), 34–42; English transl. in Functional Anal. Appl. **8** (1974).

[3] ———, *Matrix problems and categories of matrices*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **28** (1972), 144–153.

[4] P. Gabriel, *Representations indécomposables des ensembles ordonnés*, Semin. Dubreil Algèbre **26** (1972/73), 301–304.

[5] P. Gabriel and A.V. Roiter, *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[6] V.V. Kirichenko, *On matrix rings of third order with a finite number off irreducible integral representations*, Inst. Math. Acad. Sci. Ukrainian SSR, preprint No. **7** (1972), (Russian).

[7] M.M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **28** (1972), 32–41; English transl., J. Soviet Math. **3** (1975), 598–612.

[8] ———, *Faithful representations of partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **28** (1972), 42–79; English transl., J. Soviet Math. **3** (1975), 598–612.

[9] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1986.

[10] M. Hazewinkel, N. Gubareni, and V.V. Kirichenko, *Algebras, Ring and Modules Volume 1*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, New York, 2005.

[11] ———, *Algebras, Ring and Modules Volume 2*, Mathematics and Its Applications, Springer, The Netherlands, 2007.

[12] Nazarova L.A. and Roiter A.V., *Representations of partially ordered sets*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **28** (1972), 5–31; English transl. in J. Soviet Math. **3** (1975).

[13] L.A. Nazarova, *Partially ordered sets of infinite type*, Izv. AN SSRR, Ser. Mat. **39** (1975), 963–991; English transl., Math. USSR Izvestija **9** (1975), 911–938.

[14] C.M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

[15] B.S.W. Schroder, *Ordered Sets: An Introduction*, Birkhauser Boston, USA, 2003.

[16] D. Simson, *Linear Representations of Partially Ordered Sets an Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications,Vol.4, Gordon and Breach Sci. Publ., New York, 1992.

[17] A.G. Zavadskij, *Difefrentiation with respect a pair of points*, Matrix Problems, Kiev (1977), 115–121 (in Russian).

[18] ———, *The Auslander-Reiter quiver for posets of finite growth*, Topics in Algebra, Banach Center Publ. **26** (1990), Parte 1,569–587.

[19] ———, *Differentiation algorithm and classification of representations*, Izv. AN SSSR, Ser. Mat. **55** (1991), 1007–1048; English transl., Math. USSR Izvestiya **39** (1992), 975–1012.

[20] ———, *On two point differentiation and its generalitation*, Contemporary mathematics **376** (2005), 413–435.

[21] A.G. Zavadskij and V.V. Kirichenko, *Torsion-free modules over primary ring*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **57** (1976), 100–116; English transl., J. Soviet Math. **11** (1979), 598–612.

[22] ———, *Semimaximal rings of finite type*, Mat. Sb. **103** (1977), 323–345; English transl., Math. USSR-Sb. **32** (1977), 273–291.

[23] A.G. Zavadskij and L.A. Nazarova, *Partially ordered sets of finite growth*, Funktsional Anal. I. prilozhen **16** (1982), 72–73; English transl. in Funtional Anal. Appl. **16** (1982).

[24] ———, *Partially ordered sets of tame type*, Matrix Problems, Kiev (1977), 122–143 (in Russian).

[25] A.G. Zavadskij and U.S. Revitskaya, *A matrix problem over a discrete valuation ring*, Mat. Sb. **190:6** (1999), 835–858.