

LÍMITE SINGULAR DE RELAJACIÓN RÍGIDA Y DIFUSIÓN  
DOMINANTE PARA EL SISTEMA DE FLUJO CUADRÁTICO

LADY ESTEFANIA MURCIA LOZANO

Universidad Nacional De Colombia  
Facultad De Ciencias  
Departamento De Matemáticas  
Bogotá D.C., Colombia  
2018

LÍMITE SINGULAR DE RELAJACIÓN RÍGIDA Y DIFUSIÓN  
DOMINANTE PARA EL SISTEMA DE FLUJO CUADRÁTICO

LADY ESTEFANIA MURCIA LOZANO

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas

Director

JUAN CARLOS HERNÁNDEZ RINCÓN

Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional De Colombia

Facultad De Ciencias

Departamento De Matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

2018

**Resumen:** En este trabajo se presenta en detalle algunos resultados del artículo CONSERVATION LAWS III:relaxation limit (ver [17]), en relación al estudio del límite singular de relajación rígida y difusión dominante para el problema de Cauchy de un sistema de Flujo Cuadrático. Se realizaron algunas modificaciones respecto al artículo, particularmente en el estudio de la región invariante, ya que no usamos el principio del máximo para establecer dicha región. Además se comprueba en detalle la última observación del artículo, la cual se refiere a la inclusión de una función  $\alpha(v, u)$  Lipchitz continua positiva en el término de relajación del sistema, verificando la adecuada inclusión de este término mediante la demostración de los resultados del artículo bajo esta nueva condición.

**Palabras Claves:** Sistema de Flujo Cuadrático, Región Invariante, Límite de Relajación, Difusión Dominante.

**Abstract:** In this work, it has been presented in detail some results of the article CONSERVATION LAWS III: relaxation limit (see [17]), in relation to the study of the singular limits of stiff relaxation and dominant diffusion for the Cauchy problem of the System of Quadratic Flux. Some modifications were made from the article, particularly in the study of the invariant region, because we didn't use the maximum principle to construct this region. In addition, the last observation of the article is developed in detail, which refers to the inclusion of a positive  $\alpha(v, u)$  Lipchitz function in the term of relaxation of the system, verifying the adequate inclusion of this term through the demonstration of the results of the article under this new condition.

**Key Words:** System of Quadratic Flux, Invariant Region, Relaxation Limit, Dominant Diffusion.

---

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

---

---

Firma  
Nombre:  
Jurado

---

Firma  
Juan Carlos Hernández Rincón  
Director

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>2. PRELIMINARES</b>	<b>7</b>
2.1. Análisis Funcional . . . . .	7
2.2. Problema de Cauchy de un sistema de leyes de conservación con relajación y difusión	8
2.2.1. Regiones Invariantes Positivas . . . . .	9
2.3. Compacidad Compensada . . . . .	10
<b>3. LÍMITE SINGULAR DE RELAJACIÓN RÍGIDA Y DIFUSIÓN DOMINANTE PARA EL SISTEMA DE FLUJO CUADRÁTICO</b>	<b>13</b>
3.1. Acotación a priori de las soluciones . . . . .	13
3.2. Estudio de los pares de entropía-flujo . . . . .	26
3.3. Convergencia débil de la solución viscosa . . . . .	29
<b>4. COMENTARIOS FINALES</b>	<b>37</b>
Bibliografía . . . . .	39



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$U_t + F(U)_x + \frac{1}{\tau}R(U) = 0, \quad (1.0.1)$$

donde  $U = U(x, t)$  es un  $N$ -vector de cantidades físicas,  $F(U)$  es el vector flujo y  $R(U)$  es un término de relajación que representa la fuerza que impulsa el sistema perturbado hacia el estado de equilibrio.  $\tau$ , el cual es pequeño en muchas aplicaciones, es el tiempo de relajación y puede verse como un tiempo escala característico en el proceso de relajación. Un sistema de la forma (1.0.1) es un sistema de leyes de balance con relajación.

Los sistemas de relajación (1.0.1) surgen en el modelamiento físico de diferentes fenómenos como la teoría de combustión [21, 22, 26], cromatografía [33, 39], viscoelasticidad [5, 29], teoría cinética [2–4], flujo en ríos [12, 39] y flujo de tráfico [19, 20, 32, 35, 39].

El correspondiente sistema disipativo asociado a (1.0.1)

$$U_t + F(U)_x + \frac{1}{\tau}R(U) = \epsilon U_{xx}, \quad (1.0.2)$$

donde  $\epsilon$  es el coeficiente de difusión o parámetro artificial de viscosidad. El comportamiento de las soluciones  $U^{\tau, \epsilon}(x, t)$  del sistema (1.0.2) cuando el tiempo de relajación  $\tau$  y el coeficiente de viscosidad  $\epsilon$  tienden a 0 es un hecho interesante tanto en física como en matemáticas, este tipo de límite singular ha sido estudiado por ejemplo en [6, 13, 23].

El fenómeno de relajación se presenta en muchas situaciones físicas, la primera aproximación a este tipo de problemas fue hecha por Whitham en su libro *Linear and Nonlinear Waves* [39], quien introduce la llamada condición subcaracterística en el caso lineal, condición validada posteriormente para sistemas no lineales  $2 \times 2$  por Tai-Ping Liu en [18].

En 1993, con [6], Chen y Liu despertaron el interés sobre el problema del límite de relajación y disipación cero para sistemas de leyes de conservación con relajación y disipación, es decir, el

estudio cuando el tiempo de relajación y la viscosidad tienden a cero. En su artículo, Chen y Liu consideran los modelos viscosos de elasticidad y de transición de fase y estudian su límite de relajación y disipación, para este fin aplican el método de la región invariante [7] y la teoría de la compacidad compensada, originalmente introducida en [28,38].

Los dos autores de [6] junto con David Levermore publicaron el artículo [5] en 1994, cuya principal contribución es el desarrollo de resultados para tratar con  $n \times n$  sistemas hiperbólicos con relajación. En [16] Shi Jin y Zhouping Xin proponen una nueva clase de esquema numérico para una elección específica del sistema de relajación, el cual es dado por

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0 \\ v_t + au_x = \frac{1}{\tau}(v_*(u) - v), \quad (a, \tau > 0). \end{cases} \quad (1.0.3)$$

En [29], Roberto Natalini mostró que el modelo de relajación (1.0.3) bajo la condición subcaracterística

$$-\sqrt{a} < v'_*(u) < \sqrt{a},$$

goza de una serie de propiedades.

Para las soluciones viscosas del sistema del gas dinámico isentrópico en coordenadas Eulerianas con término de relajación

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = \epsilon \rho_{xx} \\ m_t + \left( \frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right)_x + \frac{m-h(\rho)}{\tau} = \epsilon m_{xx}, \end{cases} \quad (1.0.4)$$

con valor inicial acotado

$$(\rho(x, 0), m(x, 0)) = (\rho_0(x) + \epsilon, m_0(x)), \quad (1.0.5)$$

Lattanzio y Marcati [27] obtienen una estimativa a priori en  $L^\infty$  para  $h(\rho) = c\rho(1 - \rho)$ ,  $c > 0$  y consideran el límite cuando el término de relajación  $\tau \rightarrow 0$ . Lu [23] obtiene la convergencia de las soluciones del problema de Cauchy (1.0.4)-(1.0.5) para casos más generales que el considerado en [27] cuando el término de relajación  $\tau$  tiende a cero más rápido que el parámetro de difusión.

El estudio cuando  $\tau \rightarrow 0$  para el modelo extendido de flujo de tráfico

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ u_t + \left( \frac{u^2}{2} + g(\rho) \right)_x + \frac{u-h(\rho)}{\tau} = 0, \end{cases} \quad (1.0.6)$$

fue iniciado por Schochet [35]. Esta clase de modelo fue introducido en [39] con el fin de estudiar el flujo de tráfico de vehículos.

En [23] se estudia el límite singular de relajación rígida y difusión dominante, esto es,  $\tau = o(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  para el problema de Cauchy de un sistema  $2 \times 2$  de leyes de balance con relajación

y difusión:

$$\begin{cases} v_t + f(v, u)_x = \epsilon v_{xx} \\ u_t + g(v, u)_x + \frac{1}{\tau} \alpha(v, u)(u - h(v)) = \epsilon u_{xx}, \end{cases} \quad (1.0.7)$$

con valor inicial acotado y medible

$$(v(x, 0), u(x, 0)) = (v_0(x), u_0(x)), \quad (1.0.8)$$

donde  $\tau$  es el término de relajación,  $\alpha(v, u) > 0$  y  $\epsilon$  es el coeficiente de difusión. En [23] se establece que si  $\tau = o(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y existe una cota a priori en  $L^\infty$  para las soluciones  $(v^\epsilon, u^\epsilon) \equiv (v^{\epsilon, \tau(\epsilon)}, u^{\epsilon, \tau(\epsilon)})$  del problema (1.0.7)-(1.0.8) entonces existe una subsucesión  $(v^{\epsilon_k}, u^{\epsilon_k})$  convergente a la solución de estado de equilibrio del sistema, mostrando la aplicación de este resultado al sistema de elasticidad, al sistema del gas dinámico isentrópico en coordenadas Eulerianas y al modelo extendido de flujo de tráfico. También se considera el límite de relajación rígida y difusión dominante sin el uso de una estimativa a priori en  $L^\infty$  para los problemas de Cauchy del sistema de fluido dinámico en coordenadas Lagrangianas y el modelo de flujo de tráfico.

El límite de relajación rígida y difusión dominante para el problema de Cauchy de las ecuaciones no homogéneas del sistema de elasticidad con relajación y difusión

$$\begin{cases} v_t - u_x + g(v, u) = \epsilon v_{xx} \\ u_t - s(v)_x + f(v, u) \frac{u-h(v)}{\tau} = \epsilon u_{xx}, \end{cases} \quad (1.0.9)$$

con valor inicial acotado

$$(v(x, 0), u(x, 0)) = (v_0(x), u_0(x)), \quad (1.0.10)$$

es estudiado en [25] usando el esquema dado en [23] o [24].

Teniendo ya referencias sobre el estudio de estos Sistemas de Cauchy con relajación y difusión dominante, seguiremos el esquema dado en [17]. Se estudiará el límite singular de relajación rígida y difusión dominante para el problema de Cauchy con relajación y difusión, asociado al sistema de flujo cuadrático (1.0.11) y (1.0.12):

$$\begin{cases} v_t + (uv)_x = \epsilon v_{xx} \\ u_t + \frac{1}{2} (3u^2 + v^2)_x + \frac{1}{\tau} \alpha(v, u)(u - h(v)) = \epsilon u_{xx}, \end{cases} \quad (1.0.11)$$

con valor inicial acotado y medible

$$(v(x, 0), u(x, 0)) = (v_0(x), u_0(x)), \quad (1.0.12)$$

donde  $\alpha(v, u)$  es positiva y Lipchitz continua.

En la primera parte, mediante algunos lemas se muestra la región invariante que existe para las soluciones viscosas, dando estimaciones a priori de las mismas. Seguido de la acotación sobre

---

compactos para las derivadas de las soluciones viscosas y el término de relajación  $\alpha(v, u) \frac{u - h(v)}{\tau}$ . En la siguiente subsección, utilizamos esto para aplicar el lema de Murat a la expresión  $\eta(v)_t + q(v)_x$  que involucra al par de entropía  $(\eta, q)$  con  $\eta$  de clase  $C^2$  y obtener en la siguiente sección un estudio más detallado que involucra cierto par de entropía-flujo. Siguiendo esto, en la tercera parte, utilizamos el lema del Divergente Rotacional para demostrar la convergencia fuerte de las soluciones viscosas, finalizando con la demostración de que  $v$  es además solución entrópica en el sentido de Lax del problema de Cauchy

$$v_t + (vh(v))_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x).$$

Para el problema de Cauchy (1.0.11), (1.0.12), el límite de relajación rígida y difusión dominante es tratado en [17] cuando  $\alpha(v, u) = 1$ .

## Capítulo 2

# PRELIMINARES

### 2.1. Análisis Funcional

Las siguientes definiciones y resultados se tomaron principalmente de [37]. Además, se utilizan algunos resultados sobre espacios  $L^p$  que no fueron citados, los cuales pueden revisarse en la teoría general sobre estos espacios en Brezis [1].

**Definición 1** (Pré-compacto). Sea  $X$  un espacio métrico. Un subconjunto  $M$  se dice pré-compacto o totalmente acotado si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un subconjunto finito  $J$  de  $M$  tal que  $M \subset \bigcup_{\alpha \in J} \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ .

**Teorema 2.1.1.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio métrico  $X$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- a.)  $A$  es compacto.
- b.)  $A$  es completo y pré-compacto.

**Demostración:**

La demostración de este resultado puede verse en [37, pág 28]. ■

**Definición 2** (Convergencia Débil-Estrella (Débil\*)). Sea  $E$  un espacio normado y  $\{u_n\}$  una sucesión en el espacio dual  $E'$ . La sucesión  $\{u_n\}$  se dice convergente débil-estrella al límite débil estrella  $v \in E'$  si para todo  $x \in E$ , se tiene  $u_n(x) \rightarrow v(x)$ .

Para los espacios  $L^p$ , se tomará en cuenta la definición que da Smoller en [36, pág 570]. Si  $f_n$  es una sucesión en  $L^p(\Omega)$ , y  $1 < p < \infty$ , entonces  $f_n$  converge débilmente a  $f$ , si  $\int_{\Omega} f_n \phi \rightarrow \int_{\Omega} f \phi$ , para todo  $\phi \in L^{p'}(\Omega)$ , con  $1/p + 1/p' = 1$ . Para  $p = \infty$ , se toma  $\phi \in L^1$ .

El siguiente teorema es una importante consecuencia del teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Puede revisarse este resultado en [34, pág 7], sin embargo se presenta un esbozo de la demostración.

**Teorema 2.1.2.** En un espacio de Banach  $X^*$  con predual  $X$  separable, toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente débil\*.

**Demostración:**

Consideremos los siguientes hechos:

1. Banach-Alaoglu-Bourbaki: la bola unitaria  $B_{X^*}$  es débil\* compacta para todo espacio normado  $X$ .
2. Si  $X$  es un espacio separable, la bola unitaria  $B_{X^*}$  es débil\* metrizable.

En efecto, si  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión acotada en  $X^*$ , entonces existe  $M > 0$  tal que la sucesión  $(x_n/M)_{n=0}^{\infty}$  está en  $B_{X^*}$ . Por la compacidad y metrización de  $B_{X^*}$  con respecto a la topología débil\*, se tiene la compacidad secuencial. Esto es, existe una subsucesión  $(x_{n_k}/M)_{k=0}^{\infty}$  tal que  $x_{n_k}/M \rightarrow x$  débil\*, para algún  $x \in B_{X^*}$ . Luego  $x_{n_k} \rightarrow Mx$ . ■

## 2.2. Problema de Cauchy de un sistema de leyes de conservación con relajación y difusión

Considerando la ecuación

$$U_t + F(U)_x + \frac{1}{\tau}R(U) = \epsilon U_{xx} , \quad (2.2.1)$$

y su sistema asociado, discriminando la relajación y disipación, se obtiene

$$U_t + dF(U)U_x = 0, \quad (2.2.2)$$

donde  $dF(U)$  es la Matriz Jacobiana de  $F$ . Se tienen las siguientes definiciones.

**Definición 3** (Sistema Hiperbólico y Estrictamente Hiperbólico). Decimos que el sistema (2.2.2) es Hiperbólico si  $dF$  tiene dos autovalores reales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Se dice Estrictamente Hiperbólico si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son distintos, es decir  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  coinciden en algunos puntos del dominio, el sistema es llamado Hiperbólicamente Degenerado.

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en el artículo [40].

**Teorema 2.2.1** (Existencia de las soluciones viscosas). Consideremos el siguiente problema de Cauchy para el sistema parabólico:

$$\begin{cases} u_t^1 + f_1(u^1, u^2, \dots, u^n)_x + g_1(u^1, u^2, \dots, u^n) = \epsilon u_{xx}^1 \\ \vdots \\ u_t^n + f_n(u^1, u^2, \dots, u^n)_x + g_n(u^1, u^2, \dots, u^n) = \epsilon u_{xx}^n \end{cases} \quad (2.2.3)$$

con dato inicial

$$u^1(x, 0) = u_0^1(x), \dots, u^n(x, 0) = u_0^n(x), \quad (2.2.4)$$

acotado y medible:

$$|u_0^1(x)| \leq M, \dots, |u_0^n(x)| \leq M.$$

- i) Suponga que  $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$  y  $g_i$  son funciones localmente Lipchitz, para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces el problema de Cauchy (2.2.3)-(2.2.4) tiene una única solución  $(u^{1\varepsilon}(x, t), \dots, u^{n\varepsilon}(x, t)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau_0))$  para  $\tau_0 > 0$  el cual depende únicamente de la norma en  $L^\infty$  del dato inicial, y

$$|u^{1\varepsilon}(x, t)| \leq 2M, \dots, |u^{n\varepsilon}(x, t)| \leq 2M, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \tau_0].$$

- ii) Más aún, si la solución  $(u^{1\varepsilon}(x, t), \dots, u^{n\varepsilon}(x, t))$  tiene una estimativa a priori

$$|u^{1\varepsilon}(x, t)| \leq M(T), \dots, |u^{n\varepsilon}(x, t)| \leq M(T), \quad \forall t \in [0, T],$$

entonces la solución  $(u^{1\varepsilon}(x, t), \dots, u^{n\varepsilon}(x, t))$  existe en  $\mathbb{R} \times [0, T]$ .

Particularmente, si existe  $N > 0$  tal que

$$\|u^{1\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])} \leq N, \dots, \|u^{n\varepsilon}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])} \leq N$$

entonces la solución  $(u^{1\varepsilon}(x, t), \dots, u^{n\varepsilon}(x, t)) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ .

**Definición 4** (Invariantes de Riemann). Las funciones  $W = W(u, v)$ ,  $Z = Z(u, v)$  son llamadas Invariantes de Riemann del sistema (2.2.2) correspondiente a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , si ellas satisfacen las ecuaciones

$$\nabla W \cdot r_{\lambda_1} = 0, \quad \nabla Z \cdot r_{\lambda_2} = 0.$$

Donde  $r_{\lambda_1}$  y  $r_{\lambda_2}$ , denotan los autovectores derechos.

**Definición 5** (Par de entropía). Un par de funciones  $(\eta(u), q(u))$  es llamado un par de entropía-flujo del sistema (2.2.2), si  $(\eta(u), q(u))$  satisfacen

$$\nabla q(u) = \nabla \eta(u) \nabla f(u).$$

**Definición 6** (Solución entrópica en sentido de Lax). Sean  $(\eta(u), q(u))$  el par de funciones de clase  $C^2$  que satisface  $q' = \eta' f'$ ,  $\eta'' \geq 0$ , y  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  una función positiva,  $v$  es solución entrópica en el sentido de Lax, si

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \eta(v) \phi_t + q(u) \phi_x dx dt \geq 0.$$

### 2.2.1. Regiones Invariantes Positivas

El estudio de las regiones invariantes es muy importante, en el sentido que permite resultados sobre el comportamiento de las soluciones en tiempos largos. Estos resultados fueron tomados del texto de Smoller en [36].

Consideremos el sistema con valor inicial;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \varepsilon D \vartheta_{xx} + M \vartheta_x + f(\vartheta, t) & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \vartheta(x, 0) &= \vartheta_0(x), & x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Aquí,  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ ,  $D = D(\vartheta, x)$  y  $M = M(\vartheta, x)$ , son funciones de valor matricial definidas en un subconjunto abierto  $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \Omega$ ,  $D \geq 0$ ,  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$  y si  $f$  es una función suave de  $U \times \mathbb{R}_+$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 7.** (Región Invariante) Un subconjunto cerrado  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  es llamado una Región Positiva Invariante para la solución local definida por (2.2.5), si cualquier solución  $\vartheta(x, t)$  teniendo todos su valores frontera e iniciales en  $\Sigma$ , satisface  $\vartheta(x, t) \in \Sigma$  para todo  $x \in \Omega$  y para todo  $t \in [0, \delta)$ .

Estas regiones pueden ser descritas en términos de una colección finita  $G_1, G_2, \dots, G_n$  de funciones suaves definidas en  $U$ , como se sigue:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^n \{\vartheta \in V : G_i(\vartheta) \leq 0, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.2.6)$$

**Definición 8.** (Función Quasi-Convexa) La función suave  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada Quasi-Convexa en  $\vartheta$  si siempre que  $dG_{\vartheta}(\eta) = 0$ , entonces  $d^2G_{\vartheta}(\eta, \eta) \geq 0$ .

A continuación, el principal resultado de esta sección, que permitirá determinar que condiciones sobre las funciones  $G_i$  son necesarias, para establecer la región invariante.

**Teorema 2.2.2.** [Región Invariante] Sea  $\Sigma$ , como se define en (2.2.6), y suponga que para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  y para todo  $\bar{\vartheta} \in \partial\Sigma$ , las siguientes condiciones se tienen:

1.  $dG_i$  en  $\bar{\vartheta}$  es un autovalor izquierdo de  $D(\bar{\vartheta}, x)$  y  $M(\bar{\vartheta}, x)$ , para todo  $x \in \Omega$ .
2.  $G_i$  es quasi-convexo en  $\bar{\vartheta}$ .
3.  $dG_i(f) < 0$  en  $\bar{\vartheta}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Entonces  $\Sigma$  es invariante para el sistema (2.2.5), y todo  $\varepsilon > 0$ .

## 2.3. Compacidad Compensada

En esta sección se presentan algunos resultados sobre compacidad compensada, tomados del texto de Hermano Frid [30].

**Lema 1** (Murat). Si  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión acotada en  $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$  para alguna  $r$ , con  $2 < r \leq \infty$ , tal que  $f_k = g_k + h_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) donde  $\{g_k\}$  es una sucesión pre-compacta en  $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ , y  $\{h_k\}$  es una sucesión acotada en  $M(\Omega)$  (espacio de medidas de Radón) entonces  $\{f_k\}$  es pre-compacta en  $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ .

**Demostración:**

Se puede ver la demostración en [30, pág 33]. ■

Como ya se mencionó, el siguiente resultado debido a Tartar y Murat constituye el núcleo de la teoría de la compacidad compensada y será de especial utilidad para demostrar la convergencia de las soluciones asociadas al sistema con relajación rígida y difusión dominante. Su demostración puede verse en [30, pág 21].

**Teorema 2.3.1** (Divergente Rotacional). Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado y las sucesiones  $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ ,  $\{w^\varepsilon\}_\varepsilon$  acotadas en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  tales que;

- I.)  $\operatorname{div} v^\varepsilon$  es pré-compacto en  $W^{-1,2}(\Omega)$
- II.)  $\{\operatorname{rot} w^\varepsilon\}$  es pré-compacto en  $W^{-1,2}(\Omega; M^{n \times n})$ ,

donde  $M^{n \times n}$  es el espacio de las matrices  $n \times n$  y denotamos

$$(\operatorname{rot})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} w^i - \frac{\partial}{\partial x_i} w^j,$$

$$1 \leq i, j \leq n.$$

Supongamos además que  $v^\varepsilon \rightharpoonup v$  y  $w^\varepsilon \rightharpoonup w$  en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

Entonces

$$v^\varepsilon \cdot w^\varepsilon \rightharpoonup v \cdot w$$

en el sentido de las distribuciones.



## Capítulo 3

# LÍMITE SINGULAR DE RELAJACIÓN RÍGIDA Y DIFUSIÓN DOMINANTE PARA EL SISTEMA DE FLUJO CUADRÁTICO

Dado el sistema de Flujo Cuadrático con relajación rígida y difusión dominante

$$\begin{cases} v_t + (uv)_x = \epsilon v_{xx}, \\ u_t + \frac{1}{2}(3u^2 + v^2)_x + \frac{1}{\tau}\alpha(v, u)(u - h(v)) = \epsilon u_{xx} \end{cases} \quad (3.0.1)$$

con valor inicial acotado y medible

$$(v(x, 0), u(x, 0)) = (v_0(x), u_0(x)). \quad (3.0.2)$$

En aplicación del Teorema 2.2.1, sabemos que las soluciones existen localmente en el tiempo. Además, si encontráramos estimativas a priori para estas soluciones, podremos extenderlas globalmente, siendo este el propósito de la siguiente sección.

**Observación 1** (Notación de las soluciones del sistema). Para mayor precisión,  $u$  y  $v$ , en el sistema anterior, debiesen ser reemplazadas por  $u^\epsilon$  y  $v^\epsilon$ . Sin embargo, se utilizarán  $u$  y  $v$ , para indicar estas soluciones en tanto no hayan confusiones.

### 3.1. Acotación a priori de las soluciones

Para demostrar el siguiente Lema sobre la acotación de las soluciones, debemos establecer primero los Invariantes de Riemann. Ciertas curvas de nivel de estas funciones nos ayudaran a delimitar la región de acotación.

Escribimos el sistema hiperbólico asociado:

$$\begin{cases} v_t + (uv)_x = 0. \\ u_t + \frac{1}{2}(3u^2 + v^2)_x = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

de la forma

$$U_t + dF(U)U_x = 0,$$

$$\text{donde } U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \text{ y } F(U) = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{1}{2}(3u^2 + v^2) \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana asociada a  $F(U)$  está dada por

$$dF(U) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & 3u \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_1 = 2u + s^{1/2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 2u - s^{1/2},$$

con  $s = u^2 + v^2$ , y autovectores respectivos

$$r_1 = \begin{pmatrix} s^{1/2} - u \\ -v \end{pmatrix} \text{ y } r_2 = \begin{pmatrix} s^{1/2} + u \\ v \end{pmatrix}.$$

A este sistema hiperbólico, se calculan los Invariantes de Riemann asociados a los autovalores, es decir, las funciones  $W(v, u)$  y  $Z(v, u)$  que satisfacen,

$$\begin{aligned} W_u(s^{1/2} - u) - W_v v &= 0 \\ Z_u(s^{1/2} + u) + Z_v v &= 0. \end{aligned}$$

Solucionando el sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} W(u, v) &= s^{1/2} + u \\ Z(u, v) &= s^{1/2} - u. \end{aligned}$$

**Lema 2.** (Acotación de las soluciones  $u^\varepsilon$  y  $v^\varepsilon$ ) Sea  $h(v) \in C(\mathbb{R})$ . Si  $N$  y  $L$  son constantes positivas, tal que la curva  $u = h(v)$  y los datos iniciales  $(v_0(x), u_0(x))$  están dentro de la región

$$\Sigma = \{(v, u) : W(v, u) \leq N\} \cap \{(v, u) : Z(v, u) \geq -L\}$$

y  $u = h(v)$  pasa por las dos intersecciones  $(v_1, u_1)$  y  $(v_2, u_2)$  de las curvas  $W(v, u) = N$  y  $Z(v, u) = -L$ , entonces las soluciones  $(v^\varepsilon) = (v^{\varepsilon, \tau(\varepsilon)}, u^{\varepsilon, \tau(\varepsilon)})$  del problema de Cauchy (3.0.1)-(3.0.2) satisfacen

$$|u^\varepsilon(x, t)| \leq M, \quad |v^\varepsilon(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

donde  $M$  es independiente de  $\varepsilon$ .

**Demostración:**

Tomando los invariantes de Riemann del sistema, se obtienen las siguientes expresiones

$$W_u = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}}, \quad W_v = \frac{v}{\sqrt{s}}, \quad W_{uu} = \frac{v^2}{s^2}, \quad W_{uv} = -\frac{uv}{s^2}, \quad W_{vv} = \frac{u^2}{s^2};$$

$$Z_u = 1 - \frac{u}{\sqrt{s}}, \quad Z_v = -\frac{v}{\sqrt{s}}, \quad Z_{uu} = -\frac{v^2}{s^2}, \quad Z_{uv} = \frac{uv}{s^2}, \quad Z_{vv} = -\frac{u^2}{s^2}.$$

Consideremos las curvas  $W(v, u) = u + s^{1/2} = N$ , donde  $N > 0$ , esto es

$$u = \frac{N}{2} - \frac{v^2}{2N},$$

en este sentido, estamos hablando de parábolas que abren hacia abajo con vértice en  $\left(0, \frac{N}{2}\right)$ .

Similarmente las curvas  $Z(v, u) = u - s^{1/2} = -L$ , donde  $L > 0$ , esto es

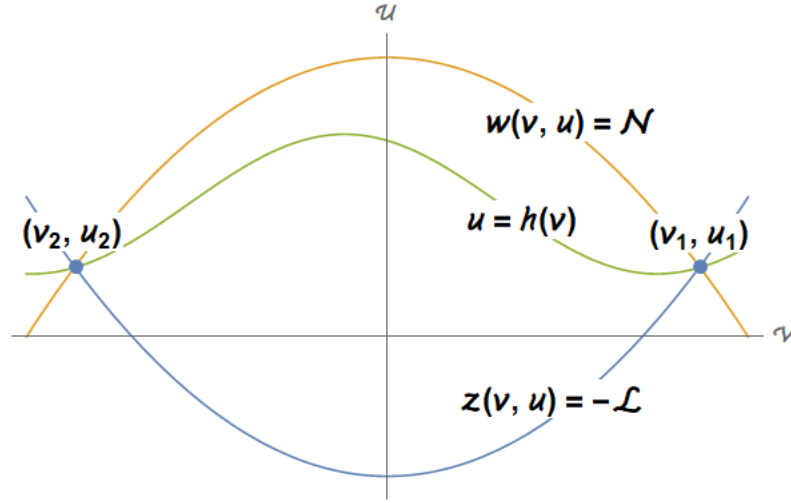
$$u = \frac{v^2}{2L} - \frac{L}{2},$$

en este sentido, estamos hablando de parábolas que abren hacia arriba con vértice en  $\left(0, -\frac{L}{2}\right)$ .

Ya que el dato inicial  $\vartheta_o(x) = (v_0(x), u_0(x))$  es acotado y  $h(v) \in C(\mathbb{R})$ , escogemos las constantes  $N$  y  $L$ , de tal manera que  $\vartheta_o$  y  $u = h(v)$ , esten en la región  $\Sigma$ , dada por:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(v, u) : W(v, u) \leq N\} \cap \{(v, u) : Z(v, u) \geq -L\} \\ &= \{(v, u) : W(v, u) - N \leq 0\} \cap \{(v, u) : -Z(v, u) - L \leq 0\}. \end{aligned}$$

Si la curva  $u = h(v)$  pasa los dos puntos de intersección  $(v_1, u_1), (v_2, u_2)$  de las curvas  $W = N, Z = -L$  y está por encima de la curva  $Z = -L$  y debajo de la curva  $W = N$  cuando  $v_1 \leq v \leq v_2$ , como se muestra en la figura 3.1:

Figura 3.1: Región Invariante  $\Sigma$ .

Veamos que en efecto,  $\Sigma$  es una región invariante en aplicación del Teorema 2.2.2, tomando

$$\vartheta = (v, u), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -u & -v \\ -v & -3u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha(v, u) \left( \frac{u-h(v)}{\tau} \right) \end{pmatrix}$$

En términos del teorema, tenemos las funciones suaves:

$$G_1(v, u) = W(v, u) - N \quad G_2(v, u) = -Z(u, v) - L.$$

Con primeras y segundas derivadas como sigue:

$$\begin{aligned} dG_1(v, u) &= W_v(v, u)\hat{i} + W_u(v, u)\hat{j} = \frac{v}{\sqrt{s}}\hat{i} + \left(1 + \frac{u}{\sqrt{s}}\right)\hat{j} \\ dG_2(v, u) &= -Z_v(v, u)\hat{i} - Z_u(v, u)\hat{j} = \frac{v}{\sqrt{s}}\hat{i} + \left(\frac{u}{\sqrt{s}} - 1\right)\hat{j}, \\ d^2G_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial v^2}G_1 & \frac{\partial^2}{\partial v\partial u}G_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}G_1 & \frac{\partial^2}{\partial u^2}G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{vv}(v, u) & W_{vu}(v, u) \\ W_{uv}(v, u) & W_{uu}(v, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{s^{3/2}} & -\frac{uv}{s^{3/2}} \\ -\frac{uv}{s^{3/2}} & \frac{v^2}{s^{3/2}} \end{pmatrix} \\ d^2G_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial v^2}G_2 & \frac{\partial^2}{\partial v\partial u}G_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}G_2 & \frac{\partial^2}{\partial u^2}G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_{vv}(v, u) & -Z_{vu}(v, u) \\ -Z_{uv}(v, u) & -Z_{uu}(v, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{s^{3/2}} & -\frac{uv}{s^{3/2}} \\ -\frac{uv}{s^{3/2}} & \frac{v^2}{s^{3/2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Veamos que en efecto verifican las hipótesis, para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  y  $\bar{\vartheta} = (\bar{v}, \bar{u}) \in \partial\Sigma$ .

1.  $dG_1$  y  $dG_2$  en  $\bar{\vartheta}$ , son vectores propios a izquierda de  $D(\bar{\vartheta}, x)$  y  $M(\bar{\vartheta}, x)$ .

- Dado que  $D((\bar{v}, \bar{u}), x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , trivialmente  $dG_1$  y  $dG_2$  son autovectores propios.

Solucionando la ecuación  $\text{Det}(M - \mu I) = 0$ , para  $\mu$  se obtienen los siguientes valores propios:

$$\mu_1 = -2u - \sqrt{s}, \quad \mu_2 = -2u + \sqrt{s}.$$

Para abreviar la notación, definimos  $\bar{s} = \bar{u}^2 + \bar{v}^2$ .

- $dG_1(\bar{v}, \bar{u})$  es autovector izquierdo de  $M((\bar{v}, \bar{u}), x) = \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} dG_1(\bar{v}, \bar{u})M((\bar{v}, \bar{u}), x) &= \begin{pmatrix} W_v(\bar{v}, \bar{u}) & W_u(\bar{v}, \bar{u}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} & 1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix} \\ &= \left( \left[ -\bar{u} \left( \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) + \left( 1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) (-\bar{v}) \right] \quad \left[ -\bar{v} \left( \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) + \left( 1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) (-3\bar{u}) \right] \right) \\ &= \left( \left[ -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} - \bar{v} - \frac{\bar{v}\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \quad \left[ \left( -\frac{\bar{v}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right) - 3\bar{u} - \frac{3\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \right) \\ &= \left( \left[ -\frac{2\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} - \bar{v} \right] \quad \left[ -\sqrt{\bar{s}} - 3\bar{u} - \frac{2\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \right) \\ &= \left( \left[ -\frac{2\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} - \bar{v} \right] \quad \left[ (-2\bar{u} - \sqrt{\bar{s}}) + \frac{2\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} - \bar{u} \right] \right) \\ &= \left( \left[ (-2\bar{u} - \sqrt{\bar{s}}) \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \quad \left[ (-2\bar{u} - \sqrt{\bar{s}}) \left( 1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) \right] \right) \\ &= (-2\bar{u} - \sqrt{\bar{s}}) \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} & 1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \end{pmatrix} = \mu_1 (dG_1) \end{aligned}$$

- $dG_2(\bar{v}, \bar{u})$  es autovector izquierdo de  $M((\bar{v}, \bar{u}), x) = \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
dG_2(\bar{v}, \bar{u})M((\bar{v}, \bar{u}), x) &= \begin{pmatrix} -Z_v(\bar{v}, \bar{u}) & -Z_u(\bar{v}, \bar{u}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} & \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{u} & -\bar{v} \\ -\bar{v} & -3\bar{u} \end{pmatrix} \\
&= \left( \left[ -\bar{u} \left( \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) + \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} - 1 \right) (-\bar{v}) \right] \quad \left[ -\bar{v} \left( \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) + \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} - 1 \right) (-3\bar{u}) \right] \right) \\
&= \left( \left[ -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} + \bar{v} - \frac{\bar{v}\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \quad \left[ -\left( \frac{\bar{v}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right) + 3\bar{u} - \frac{3\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \right) \\
&= \left( \left[ -\frac{2\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} + \bar{v} \right] \quad \left[ -\sqrt{\bar{s}} + 3\bar{u} - \frac{2\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} \right] \right) \\
&= \left( \left[ -\frac{2\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} + \bar{v} \right] \quad \left[ -(-2\bar{u} + \sqrt{\bar{s}}) - \frac{2\bar{u}^2}{\sqrt{\bar{s}}} + \bar{u} \right] \right) \\
&= \left( \left[ (-2\bar{u} + \sqrt{\bar{s}}) \left( \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} \right) \right] \quad \left[ (-2\bar{u} + \sqrt{\bar{s}}) \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} - 1 \right) \right] \right) \\
&= \left( -2\bar{u} + \sqrt{\bar{s}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{s}}} & \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{s}}} - 1 \end{pmatrix} = \mu_2(dG_2).
\end{aligned}$$

▪  $G_1$  y  $G_2$  son cuasi-convexas en  $\bar{\vartheta}$ . Según la Definición 8, tomamos  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ .

▪ Caso  $G_1$ : La conclusión se sigue pues;

$$\begin{aligned}
d^2G_{1\bar{\vartheta}}(\eta) &= \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}^2}{\bar{s}^{3/2}} & -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} \\ -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} & \frac{\bar{v}^2}{\bar{s}^{3/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \left( \frac{\bar{u}^2}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\eta_1^2) - 2\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} (\eta_1\eta_2) + \left( \frac{\bar{v}^2}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\eta_2^2) \\
&= \left( \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\bar{u}^2\eta_1^2 - 2\bar{u}\bar{v}(\eta_1\eta_2) + \bar{v}^2\eta_2^2) \\
&= \left( \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\bar{u}\eta_1 - \bar{v}\eta_2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Caso  $G_2$ : La conclusión se sigue pues;

$$\begin{aligned}
d^2G_{2\bar{\vartheta}}(\eta) &= \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}^2}{\bar{s}^{3/2}} & -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} \\ -\frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} & \frac{\bar{v}^2}{\bar{s}^{3/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \left( \frac{\bar{u}^2}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\eta_1^2) - 2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{s}^{3/2}} (\eta_1\eta_2) + \left( \frac{\bar{v}^2}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\eta_2^2) \\
&= \left( \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\bar{u}^2\eta_1^2 - 2\bar{u}\bar{v}(\eta_1\eta_2) + \bar{v}^2\eta_2^2) \\
&= \left( \frac{1}{\bar{s}^{3/2}} \right) (\bar{u}\eta_1 - \bar{v}\eta_2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

- $dG_1(f) < 0$  y  $dG_2(f) < 0$  en  $\vartheta$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

•

$$\begin{aligned}
dG_1(f) &= (W_v(\bar{v}, \bar{u}), W_u(\bar{v}, \bar{u})) \cdot \left( 0, -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right) \\
&= W_u(\bar{v}, \bar{u}) \left( -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right).
\end{aligned}$$

Ya que  $\frac{\alpha(\bar{v}, \bar{u})}{\tau} > 0$ , nos concentraremos en el signo de la expresión  $W_u(\bar{v}, \bar{u}) (\bar{u} - h(\bar{v}))$ : Si  $\vartheta \in \partial\Sigma \cap W(v, u) = N$ , entonces  $(\bar{u} - h(\bar{v})) > 0$ . Además,  $W_u(v, u) > 0$ , para todo  $(v, u) \in \mathbb{R}^2$ , entonces la expresión tomada inicialmente es positiva.

Así, puede concluirse que

$$dG_1(f) = W_u(\bar{v}, \bar{u}) \left( -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right) < 0.$$

•

$$\begin{aligned}
dG_2(f) &= (-Z_v(\bar{v}, \bar{u}), -Z_u(\bar{v}, \bar{u})) \cdot \left( 0, -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right) \\
&= -Z_u(\bar{v}, \bar{u}) \left( -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right).
\end{aligned}$$

Análogamente, si  $\vartheta \in \partial\Sigma \cap Z(v, u) = -L$ , entonces  $(\bar{u} - h(\bar{v})) < 0$ . Además,  $Z_u(v, u) > 0$ , para todo  $(v, u) \in \mathbb{R}^2$ , luego  $-Z_u(\bar{v}, \bar{u}) (\bar{u} - h(\bar{v})) > 0$ . Luego, puede concluirse

$$dG_2(f) = -Z_u(\bar{v}, \bar{u}) \left( -\alpha(\bar{v}, \bar{u}) \left( \frac{\bar{u} - h(\bar{v})}{\tau} \right) \right) < 0.$$

Ya que el dato inicial  $\vartheta_o(x) = (v_0(x), u_0(x))$  y la curva  $u = h(v) \in C(\mathbb{R})$  están en  $\Sigma$ , en aplicación del Teorema 2.2.2, esta región es invariante positiva, y por lo tanto las soluciones  $\vartheta^\varepsilon = (v^\varepsilon, u^\varepsilon)$  están en  $\Sigma$ . Así, obtenemos una estimación a priori para las soluciones:

$$|u^\varepsilon(x, t)| \leq M, \quad |v^\varepsilon(x, t)| \leq M$$

donde  $M$  es independiente de  $\varepsilon$ .

Luego las soluciones  $u^\varepsilon(x, t)$  y  $v^\varepsilon(x, t)$  son uniformemente acotadas en  $L^\infty$  respecto a  $\varepsilon$ . Además, en aplicación del Teorema 2.1.2 existe una subsucesión  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  convergente débil\*, notado

$$W^* - \lim(u^\varepsilon(x, t), v^\varepsilon(x, t)) = (u(x, t), v(x, t)). \quad (3.1.2)$$

■

**Lema 3.** Para el sistema de Flujo Cuadrático (3.0.1) si  $0 < \alpha_0 \leq \alpha(v, u)$  y  $h(v) \in C^2(\mathbb{R})$  entonces  $\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2$ ,  $\varepsilon(v_x^\varepsilon)^2$  y  $\frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau}$  son acotados en  $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

### Demostración:

Por simplicidad, omitiremos el superíndice  $\varepsilon$  en la demostración.

Consideremos la función  $p(u, v) = \frac{u^2}{2} - h(v)u + \frac{C_1 v^2}{2}$ . Para esta función  $p(v, u)$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p_u(v, u) &= u - h(v) & p_v(v, u) &= -uh'(v) + C_1 v & p_{uu}(v, u) &= 1 & p_{vv}(v, u) &= -uh''(v) + C_1 \\ p_{uv}(v, u) &= -h'(v). \end{aligned}$$

Consideremos la expresión

$$p_{uu}u_x^2 + 2p_{uv}u_x v_x + p_{vv}v_x^2 = 1 \cdot (u_x^2) + 2(-h'(v))u_x v_x + (-uh''(v) + C_1)v_x^2. \quad (3.1.3)$$

Ya que  $h(v) \in C^2(\mathbb{R})$ , y  $v$  es acotada. Entonces  $h'(v)$ , y  $h''(v)$  son acotadas, luego satisface

$$p_{uu}u_x^2 + 2p_{uv}u_xv_x + p_{vv}v_x^2 \geq C_2(u_x^2 + v_x^2) \quad (3.1.4)$$

para alguna constante  $C_2 > 0$ .

Multiplicando el sistema (3.0.1) por  $(p_v, p_u)$ , tenemos

$$p_v(v, u)v_t(x, t) + p_v(v, u)(uv)_x = p_v(v, u)\varepsilon v_{xx} \quad (3.1.5)$$

$$p_u(v, u)u_t(x, t) + \frac{p_u(v, u)}{2}(3u^2 + v^2) + p_u(v, u)\alpha(v, u)\frac{(u - h(v))}{\tau} = p_u(v, u)\varepsilon u_{xx}. \quad (3.1.6)$$

Adicionamos las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.6)

$$\begin{aligned} & (p_v(v, u)v_t(x, t) + p_u(v, u)u_t(x, t)) + \frac{p_u(v, u)}{2}(3u^2 + v^2) + p_v(v, u)(uv)_x + p_u(v, u)\alpha(v, u)\frac{(u - h(v))}{\tau} \\ &= p_v(v, u)\varepsilon v_{xx} + p_u(v, u)\varepsilon u_{xx}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Ya que

$$p_{xx}(v, u) = p_{uu}u_x^2 + 2p_{uv}u_xv_x + \underline{p_u u_{xx}} + p_{vv}v_x^2 + \underline{p_v v_{xx}},$$

de esta ecuación en (3.1.7) y usando la desigualdad (3.1.4), se obtiene;

$$p(v, u)_t + p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x + p_v(v, u)(uv)_x + p_u(v, u)\alpha(v, u)\frac{(u - h(v))}{\tau} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon [p_{xx}(v, u) - (p_{uu}u_x^2 + 2p_{uv}u_xv_x + p_{vv}v_x^2)] \\ &\leq \varepsilon [p_{xx}(v, u) - C_2(u_x^2 + v_x^2)]. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Analizando el segundo sumando de la expresión (3.1.8), se obtiene:

$$\begin{aligned}
p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x &= p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x \\
&\quad + p_u(v, h(v)) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) - p_u(v, h(v)) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) \\
&\quad + p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) - p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) \\
&\quad + \frac{3}{2}(p_{ux}(v, u)(u^2 - h^2(v))) - \frac{3}{2}(p_{ux}(v, u)(u^2 - h^2(v))) \\
&= \left[ p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x - p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) \right] \\
&\quad + \left[ p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) - p_u(v, h(v)) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right) \right] \\
&\quad + \left[ \frac{3}{2}(p_{ux}(v, u)(u^2 - h^2(v))) - \frac{3}{2}(p_{ux}(v, u)(u^2 - h^2(v))) \right] \\
&\quad + p_u(v, h(v)) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right)_x \\
&= \frac{3}{2}(p_u(v, u)(u^2 - h^2(v))) + p_u(v, h(v)) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right)_x \\
&\quad - \frac{3}{2}p_{ux}(v, u)(u^2 - h^2(v)) + (p_u(v, u) - p_u(v, h(v))) \left( \frac{3}{2}h^2(v) + \frac{1}{2}v^2 \right)_x.
\end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio para  $p_u(v, u)$ , luego existe  $\beta_1 \in (h(v), u)$ , tal que  $p_{uu}(v, \beta_1) = \frac{p_u(v, u) - p_u(v, h(v))}{u - h(v)}$ ,

$$\begin{aligned}
p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x &= \left( \frac{3}{2}p_u(v, u)(u^2 - h^2(v)) \right)_x + \left( \int^v p_u(s, h(s))(3h(s)h'(s) + s)ds \right)_x \\
&\quad - \frac{3}{2}(p_{uu}u_x + p_{uv}v_x)(u + h(v))(u - h(v)) \\
&\quad + p_{uu}(\beta_1, v)(u - h(v))(3h(v)h'(v) + v)v_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_u(v, u) \left( \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)_x &= \left[ \frac{3}{2}p_u(u, v)(u^2 - h^2(v)) + \int^v p_u(s, h(s))(3h(s)h'(s) + s)ds \right]_x \\
&\quad + \left[ -\frac{3}{2}(p_{uu}u_x + p_{uv}v_x)(u + h(v))(u - h(v)) \right] \\
&\quad + [p_{uu}(\beta_1, v)(u - h(v))(3h(v)h'(v) + v)v_x].
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

En la expresión (3.1.10), asignamos la siguiente notación:

$$T_1 = \left[ \frac{3}{2} p_u(u, v)(u^2 - h^2(v)) + \int_x^v p_u(s, h(s))(3h(s)h'(s) + s) ds \right]. \quad (3.1.11)$$

$$T_2 = \left[ -\frac{3}{2} (p_{uu}u_x + p_{uv}v_x)(u + h(v))(u - h(v)) \right]. \quad (3.1.12)$$

$$T_3 = [p_{uu}(\beta_1, v)(u - h(v))(3h(v)h'(v) + v)v_x]. \quad (3.1.13)$$

Por otro lado, para el tercer término de la expresión (3.1.8), obtenemos

$$\begin{aligned} p_v(v, u)(uv)_x &= p_v(v, u)(uv)_x + p_v(v, u)(vh(v))_x - p_v(v, u)(vh(v))_x \\ &\quad + p_v(v, h(v))(vh(v))_x - p_v(v, h(v))(vh(v))_x \\ &\quad + p_{vx}(v, u)v(u - h(v)) - p_{vx}(v, u)v(u - h(v)) \\ &= p_v(v, u)[(uv)_x - (vh(v))_x] + p_v(v, h(v))(vh(v))_x \\ &\quad + (p_v(v, u) - p_v(v, h(v)))(vh(v))_x \\ &\quad + p_{vx}(v, u)v(u - h(v)) - p_{vx}(v, u)v(u - h(v)). \end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema del Valor Medio para  $p_v(v, u)$ , luego existe  $\beta_2 \in (h(v), u)$ , tal que  $p_{vu}(v, \beta_2) = \frac{p_v(v, u) - p_v(v, h(v))}{u - h(v)}$ .

$$\begin{aligned} p_v(v, u)(uv)_x &= \left( p_v(v, u)v(u - h(v)) + \int_x^v p_v(s, h(s))(h(s) + h'(s)s) ds \right) \\ &\quad + [-p_{vx}(v, u)v(u - h(v))] \\ &\quad + p_{uv}(\beta_2, v)(u - h(v))(h(v) + h'(v)v)v_x. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

En la expresión (3.1.14), asignamos la siguiente notación:

$$\tilde{T}_1 = \left( p_v(v, u)v(u - h(v)) + \int_x^v p_v(s, h(s))(h(s) + h'(s)s) ds \right). \quad (3.1.15)$$

$$\tilde{T}_2 = [-p_{vx}(v, u)v(u - h(v))]. \quad (3.1.16)$$

$$\tilde{T}_3 = p_{uv}(\beta_2, v)(u - h(v))(h(v) + h'(v)v)v_x. \quad (3.1.17)$$

Ya que  $p_{uu}$ ,  $p_{uv}$  y  $(u + h(v))$  son acotadas, podemos tomar  $\max(|p_{uu}|, |p_{uv}|, |u + h(v)|) = C$ . Así, de (3.1.12)

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq C\sqrt{2}\sqrt{\tau}(|u_x| + |v_x|) \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} \\ &= C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|u_x| \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} + C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|v_x| \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Consideremos la desigualdad

$$\delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta} \geq |ab| \quad \text{con} \quad \delta > 0, \quad (3.1.19)$$

Tomamos el primer sumando de la expresión (3.1.18), y la desigualdad anterior (3.1.19), sea

$$a = \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad b = C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|u_x|.$$

Obtenemos

$$C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|u_x| \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} \leq \delta \frac{|u - h(v)|^2}{2\tau} + \frac{K2\tau|u_x|^2}{4\delta}. \quad (3.1.20)$$

Similarmente, tomamos el segundo sumando de la expresión (3.1.18), y la desigualdad (3.1.19), asignamos

$$a = \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad b = C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|v_x|.$$

Obtenemos

$$C\sqrt{2}\sqrt{\tau}|v_x| \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{2}\sqrt{\tau}} \leq \delta \frac{|u - h(v)|^2}{2\tau} + \frac{K2\tau|v_x|^2}{4\delta}. \quad (3.1.21)$$

Tomando las desigualdades (3.1.20) y (3.1.21) en (3.1.18), resulta:

$$|T_2| \leq \delta \frac{(u - h(v))^2}{\tau} + C_1(\delta)\tau(u_x^2 + v_x^2), \quad C_1(\delta) \text{ es una constante que depende de } \delta. \quad (3.1.22)$$

Análogamente, de (3.1.16), se obtiene

$$|\tilde{T}_2| \leq \delta \frac{(u - h(v))^2}{\tau} + C_2(\delta)\tau(u_x^2 + v_x^2), \quad C_2(\delta) \text{ es una constante que depende de } \delta. \quad (3.1.23)$$

Ahora, consideremos el caso  $T_3$ . Teniendo en cuenta que  $p_{uu} = 1$  y el término  $(3h(v)h'(v) + v)$  es acotado.

$$|T_3| = |p_{uu}(\beta_1, v)(u - h(v))(3h(v)h'(v) + v)v_x| \leq \left| \frac{(u - h(v))}{\sqrt{\tau}} C_4\sqrt{\tau}v_x \right| \quad (3.1.24)$$

Con  $C_4$  que depende de la expresión  $(3h(v)h'(v) + v)$ .

Tomamos la expresión anterior (3.1.24), y la desigualdad (3.1.19), asignamos

$$a = \frac{|u - h(v)|}{\sqrt{\tau}} \quad \text{y} \quad b = C_4\sqrt{\tau}|v_x|.$$

Para obtener:

$$|T_3| \leq \delta \frac{(u - h(v))^2}{\tau} + C_5 \frac{\tau v_x^2}{4\delta}, \quad \text{con } C_5 \text{ constante.} \quad (3.1.25)$$

Análogamente, de (3.1.27), se obtiene

$$|\tilde{T}_3| \leq \delta \frac{(u - h(v))^2}{\tau} + C_6 \frac{\tau v_x^2}{4\delta}, \quad \text{con } C_6 \text{ constante.} \quad (3.1.26)$$

Defínase  $q(u, v)_x = T_1 + \tilde{T}_1$ . En (3.1.8), se obtiene.

$$\begin{aligned} p(u, v)_t + T_1 + T_2 + T_3 + \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \tilde{T}_3 + \alpha(v, u) \frac{(u - h(v))^2}{\tau} &= p(u, v)_t + q(u, v)_x \\ &+ T_2 + T_3 + \tilde{T}_2 + \tilde{T}_3 \\ &+ \alpha(v, u) \frac{(u - h(v))^2}{\tau} \\ &\leq \varepsilon [p_{xx}(u, v) - C_2(u_x^2 + v_x^2)]. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Además, reemplazando (3.1.22), (3.1.23), (3.1.25), (3.1.26) en (3.1.27) resulta

$$p(u, v)_t + q(u, v)_x - 4\delta \frac{(u - h(v))^2}{\tau} + \alpha(v, u) \frac{(u - h(v))^2}{2\tau} + (\varepsilon C_2 - \tau C_3)(u_x^2 + v_x^2) \quad (3.1.28)$$

$$\leq \varepsilon p_{xx}(u, v) - \alpha(v, u) \frac{(u - h(v))^2}{2\tau}. \quad (3.1.29)$$

Si tomamos  $\delta = \frac{\alpha_0}{8}$  en la desigualdad (3.1.28), obtenemos

$$p(u, v)_t + q(u, v)_x + \left(-\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) + \alpha_0\right) \frac{(u - h(v))^2}{2\tau} + (\varepsilon C_2 - \tau C_3)(u_x^2 + v_x^2) \leq \varepsilon p_{xx}(u, v), \quad (3.1.30)$$

para una constante positiva  $C_3$  dependiendo de las cotas de las segundas derivadas de  $p(u, v)$ . Además  $\tau = o(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , luego  $2\tau C_3 \leq \varepsilon C_2$  si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño. Luego, de la desigualdad (3.1.30), resulta

$$\alpha_0 \frac{(u - h(v))^2}{2\tau} + \left(C_2 \frac{\varepsilon}{2}\right) (u_x^2 + v_x^2) \leq \varepsilon p_{xx}(u, v) - p(u, v)_t - q(u, v)_x. \quad (3.1.31)$$

Sea  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  un conjunto compacto arbitrario. Escojamos  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  tal que  $\phi_K = 1$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$  y escribamos  $S = \text{sop}\phi$ . Entonces, multiplicando (3.1.31) por  $\phi$  e integrando por partes sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , tenemos

$$\begin{aligned} &\iint_K \left( \frac{C_2}{2} \varepsilon (u_x^2 + v_x^2) \phi + \alpha_0 \frac{(u - h(v))^2}{\tau} \phi \right) dxdt \\ &\leq \iint_S \left( \frac{C_2}{2} \varepsilon (u_x^2 + v_x^2) \phi + \alpha_0 \frac{(u - h(v))^2}{\tau} \phi \right) dxdt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{C_2}{2} \varepsilon (u_x^2 + v_x^2) \phi + \alpha_0 \frac{(u - h(v))^2}{\tau} \phi \right) dxdt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (p\phi_t + q\phi_x + \varepsilon p\phi_{xx}) dxdt \leq M(\phi), \end{aligned}$$

es decir,  $\varepsilon u_x^2$ ,  $\varepsilon v_x^2$  y  $\frac{(u-h(v))^2}{\tau}$  son acotadas en  $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ . ■

### 3.2. Estudio de los pares de entropía-flujo

Para ver la existencia de los pares de entropía flujo de nuestro sistema, se requiere escribir la condición de entropía flujo  $\nabla \bar{q}(U) = \nabla \bar{\eta}(U) \nabla F(U)$ , como

$$\begin{cases} \bar{q}_u = 3u\bar{\eta}_u + v\bar{\eta}_v \\ \bar{q}_v = v\bar{\eta}_u + u\bar{\eta}_v. \end{cases}$$

Eliminando  $\bar{q}$  se obtiene

$$v(\bar{\eta}_{vv} - \bar{\eta}_{uu}) + 2u\bar{\eta}_{uv} = 0.$$

Mediante la sustitución  $\bar{\eta}(v, u) = \eta(s, u)$  y  $\bar{q}(v, u) = q(s, u)$  se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\eta_{ss} = \frac{1}{4s} \eta_{uu},$$

cuya solución está dada por  $\eta(s, u) = h(s)e^{ku}$  para  $k$  constante y  $h(s)$  que satisface

$$h''(s) - \frac{k^2}{4s} h(s) = 0.$$

Además si en esta última ecuación hacemos  $a(s) = s^{1/4}$ ,  $r = ks^{1/2}$ ,  $h(s) = a(s)\phi(r)$ , se puede transformar en

$$\phi''(r) - \left(1 + \frac{3}{4r^2}\right) \phi(r) = 0,$$

cuya solución en serie existe y nos conduce a la existencia de los pares de entropía-flujo.

A continuación se estudiará la compacidad de un par arbitrario de entropía-flujo asociado a la ecuación escalar

$$v_t + (h(v)v)_x = 0. \tag{3.2.1}$$

**Teorema 3.2.1.** Si  $(\eta(v), q(v))$  es un par de entropía-flujo de la ecuación escalar

$$v_t + (h(v)v)_x = 0, \tag{3.2.2}$$

con  $\eta$  de clase  $C^2$  entonces  $\eta(v)_t + q(v)_x$  es compacto  $H_{loc}^{-1}$ .

#### Demostración:

Reescribimos la primera ecuación en (3.0.1) como sigue:

$$v_t + (h(v)v)_x = \varepsilon v_{xx} + ((h(v)v) - (uv))_x. \tag{3.2.3}$$

Sea  $(\eta(v), q(v))$  cualquier par de flujo-entropía de entropía de (3.2.2). Entonces multiplicando (3.2.3) por  $\eta'(v)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\eta(v)_t + q(v)_x &= -\eta'(v)((uv) - (h(v)v))_x + \varepsilon\eta'(v)v_{xx} \\
&= -(\eta'(v)v(u - h(v)))_x + \varepsilon\eta(v)_{xx} \\
&\quad + v\eta''(v)(u - h(v))v_x - \eta''(v)v_x^2.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

En sentido de la aplicación del Lema de Murat 1, debemos dar los siguientes pasos, para  $\Omega$  conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ :

- a)  $\{\eta(v^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$  es acotada en  $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$ , para algún  $r$ , con  $2 < r \leq \infty$ .
- b)  $\{-(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + \varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx}\}_\varepsilon$  es una sucesión precompacta en  $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ .
- c)  $\{v^\varepsilon\eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}\}_\varepsilon$  es una sucesión acotada en  $M(\Omega)$ , donde  $M(\Omega)$  son las medidas acotadas de Radon.

Procedemos a estas demostraciones, con ayuda del hecho de que una sucesión uniformemente acotada en  $L^\infty(\Omega)$ , lo es también en  $W^{-1,\infty}$ .

- a) Ya que  $\eta$  y  $q$  están en  $C^2(\Omega)$ , y  $v^\varepsilon$  es acotada, entonces  $\{\eta(v^\varepsilon)_t + q(v^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$  es uniformemente acotada en  $L^\infty(K)$ , para  $K$  compacto arbitrario en  $\Omega$ , luego lo es en  $W_{loc}^{-1,\infty}(\Omega)$ .
- b) Podemos ver que  $\{-(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + \varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx}\}_\varepsilon$  es convergente en  $W_{loc}^{-1,2}(\Omega) = H_{loc}^{-1}(\Omega)$ , luego precompacta en  $H_{loc}^{-1}(\Omega)$ .

Sea  $\phi \in H_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} [(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx})] \phi dxdt \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} (\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x \phi dxdt + \int_{\Omega} (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx}) \phi dxdt \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} (\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x \phi dxdt \right| + \left| \int_{\Omega} (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx}) \phi dxdt \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))\phi_x dxdt \right| + \left| \int_{\Omega} \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta'(v^\varepsilon)v_x^\varepsilon\right) \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_x\right) dxdt \right|,
\end{aligned}$$

ya que  $\eta'(v^\varepsilon)$  es acotada. Si  $c$  es esta constante de acotación, resulta

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} [(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx})] \phi dxdt \right| \\
&\leq \left| c \int_{\Omega} v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))\phi_x dxdt \right| + \left| c \int_{\Omega} (\varepsilon^{\frac{1}{2}}v_x^\varepsilon)(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_x) dxdt \right|
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} [(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx})] \phi dxdt \right| \\ & \leq c \left( \int_{\Omega} \tau \phi_x^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + c \left( \int_{\Omega} \varepsilon v_x^{\varepsilon 2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \varepsilon \phi_x^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y como  $\frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau}, v_x^{\varepsilon 2} \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} [(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x + (\varepsilon\eta(v^\varepsilon)_{xx})] \phi dxdt \right| \\ & \leq cK \left( \int_{\Omega} \tau \phi_x^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + cK_1 \left( \int_{\Omega} \varepsilon \phi_x^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donde  $K$  y  $K_1$  son constantes.

Como la sucesión es convergente, resulta compacta en  $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ .

- c) Para ver que  $\{v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}\}_\varepsilon$  es una sucesión acotada en  $M(\Omega)$ , basta ver que es uniformemente acotada en  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

Sea  $K$  un compacto arbitrario en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

$$\int_K |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| dxdt \quad (3.2.5)$$

$$\leq \int_K [ |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon| + |\eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| ] dxdt \quad (3.2.6)$$

$$= \int_K |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon| dxdt + \int_K |\eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| dxdt, \quad (3.2.7)$$

como  $\eta''(v^\varepsilon)$  es acotada, digamos por una constante  $K_2$ , resulta

$$\int_K |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| dxdt \quad (3.2.8)$$

$$\leq K_2 \int_K |v^\varepsilon (u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon| dxdt + K_2 \int_K |v_x^{\varepsilon 2}| dxdt, \quad (3.2.9)$$

aplicando la desigualdad de Hölder, y el hecho de que  $\varepsilon (v_x^\varepsilon)^2$  es acotado

$$\int_K |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| dxdt \quad (3.2.10)$$

$$\leq K_2 \left( \int_K \frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \int_K \varepsilon v_x^{\varepsilon 2} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + K_3 \quad (3.2.11)$$

y como  $\frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau}, \varepsilon v_x^\varepsilon \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\int_K |v^\varepsilon \eta''(v^\varepsilon)(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))v_x^\varepsilon - \eta''(v^\varepsilon)v_x^{\varepsilon 2}| dxdt \leq K_4 \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} + K_3 \rightarrow K_3 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2.12)$$

$K_3$  y  $K_4$  son constantes. ■

### 3.3. Convergencia débil de la solución viscosa

Finalizamos el estudio del Sistema de Flujo Cuadrático, con el siguiente Teorema sobre la convergencia de las soluciones viscosas.

**Teorema 3.3.1.** Para el problema de Cauchy (1.0.11)-(1.0.12), si  $g(v) = vh(v)$ , con  $\mu \{v : g''(v) = 0\} = 0$ , ( $\mu$  medida de Lebesgue) entonces existe una subsucesión  $(v^\varepsilon, u^\varepsilon)$  que converge a las funciones  $(v, u)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , las cuales son los estados de equilibrio determinados de manera única por  $(E_1) - (E_2)$ :

$(E_1)$   $u(x, t) = h(v(x, t))$ , para casi todo  $(x, t) \in \Omega$  un conjunto abierto y acotado;

$(E_2)$   $v(x, t)$  es la  $L^\infty$  solución entrópica de el problema de Cauchy

$$v_t + (vh(v))_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x).$$

#### Demostración:

Consideremos los pares de entropía-flujo de la ecuación escalar

$$v_t + (h(v)v)_x = 0, \quad (3.3.1)$$

como se sigue:

$$(\eta_1(\theta), q_1(\theta)) = (\theta - k, g(\theta) - g(k)) \quad (3.3.2)$$

$$(\eta_2(\theta), q_2(\theta)) = \left(g(\theta) - g(k), \int_k^\theta (g'(s))^2 ds\right) \quad (3.3.3)$$

donde  $k$  es una constante arbitraria y  $g(\theta) = \theta h(\theta)$ .

Notemos además los límites débil\* de los pares de flujo-entropía evaluados en las subsucesiones de soluciones viscosas halladas en (3.1.2):

$$\overline{\eta_i(v^\varepsilon)} = w^* - \lim \eta_i(v^\varepsilon) \quad \overline{q_i(v^\varepsilon)} = w^* - \lim q_i(v^\varepsilon) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Veamos convenientemente el producto  $\eta_1 q_2 - q_1 \eta_2$ :

$$\begin{aligned}
\eta_1 q_2 - q_1 \eta_2 &= (v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(k))^2 \\
&+ (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds \\
&+ (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 \\
&+ k \int_v^k (g'(s))^2 ds - k \int_v^k (g'(s))^2 ds \\
&+ (g(v) - g(k))^2 - (g(v) - g(k))^2 \\
&= (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - g(v^\varepsilon)^2 + 2g(v^\varepsilon)g(k) - g(k)^2 \\
&+ g(v^\varepsilon)^2 - 2g(v^\varepsilon)g(v) + g(v)^2 - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 \\
&+ v \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - k \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - k \int_v^k (g'(s))^2 ds \\
&+ v^\varepsilon \int_k^v (g'(s))^2 ds - k \int_k^v (g'(s))^2 ds \\
&+ (g(v) - g(k))^2 - (g(v) - g(k))^2 \\
&= (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 \\
&+ (v - k) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds + (v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds \\
&- (g(v) - g(k))^2 - g(v^\varepsilon)^2 + 2g(v^\varepsilon)g(k) - g(k)^2 \\
&+ g(v)^2 - 2g(v)g(k) + g(k)^2 + g(v^\varepsilon)^2 - 2g(v^\varepsilon)g(v) + g(v)^2 \\
&= (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 \\
&+ (v - k) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds + (v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds \\
&- (g(v) - g(k))^2 \\
&+ 2g(v^\varepsilon)g(k) + 2g(v)^2 - 2g(v)g(k) - 2g(v^\varepsilon)g(v) \\
&= (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 \\
&+ (v - k) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds + (v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds \\
&- (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k))(g(v^\varepsilon) - g(v)).
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Aplicando el límite débil\* a  $\eta_1 q_2 - q_1 \eta_2$ , se obtiene de (3.3.4):

$$\begin{aligned} \overline{\eta_1 q_2 - q_1 \eta_2} &= \overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\ &+ (v - k) \overline{\int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} + \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds} \\ &- (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

por Teorema del Divergente Rotacional 2.3.1

$$\begin{aligned} &\overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\ &+ (v - k) \overline{\int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} + \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$- (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} = \overline{\eta_1} \overline{q_2} - \overline{q_1} \overline{\eta_2}. \quad (3.3.7)$$

Analícemos ahora la expresión (3.3.7):

$$\begin{aligned} \overline{\eta_1} \overline{q_2} - \overline{q_1} \overline{\eta_2} &= \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(k))^2} \\ &= \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon))^2} + 2\overline{g(v^\varepsilon)g(k)} - g(k)^2 \\ &+ \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\ &+ (g(v) - g(k))^2 - (g(v) - g(k))^2 \\ &= \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\ &- (g(v) - g(k))^2 + 2\overline{g(v^\varepsilon)g(k)} - 2\overline{g(v^\varepsilon)g(v)} + 2g(v)^2 - 2g(v)g(k). \\ &= \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\ &- (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

De las ecuaciones (3.3.6),(3.3.7) y (3.3.8), se tiene:

$$\begin{aligned}
& \overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} \\
& + (v - k) \overline{\int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} + \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds} \\
& - (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \\
& = \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right)^2 \\
& - (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right).
\end{aligned}$$

Estudiamos el primer sumando para obtener

$$\begin{aligned}
& = \overline{(v^\varepsilon - v) \int_k^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} \\
& + (v - k) \overline{\int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} + \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds} \\
& - \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right)^2 \\
& - (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right). \\
& = (v - k) \overline{\int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} + \overline{(v^\varepsilon - k) \int_k^v (g'(s))^2 ds} \\
& - \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right)^2 \\
& - (g(v) - g(k))^2 - 2(g(v) - g(k)) \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Conjugando las expresiones (3.3.6) y (3.3.9), se obtiene:

$$\overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))^2} = - \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right)^2$$

equivalente a:

$$\overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds} - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2 + \left( \overline{(g(v^\varepsilon) - g(v))} \right)^2 = 0. \tag{3.3.10}$$

Veamos que el primer sumando de esta expresión es positivo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} \left( (\theta - v) \int_v^\theta (g'(s))^2 ds - (g(\theta) - g(v))^2 \right) &= \int_v^\theta (g'(s))^2 ds + (\theta - v)(g'(\theta))^2 - 2(g(\theta) - g(v))g'(\theta) \\
&= \int_v^\theta (g'(s))^2 ds + \int_v^\theta g'(\theta) ds - 2g'(\theta) \int_v^\theta g'(s) ds \\
&= \int_v^\theta (g'(\theta) - g'(s))^2 ds > 0, \text{ para todo } \theta.
\end{aligned}$$

ya que  $g''(v) \neq 0$  en casi toda parte.

Así, la función

$$(\theta - v) \int_v^\theta (g'(s))^2 ds - (g(\theta) - g(v))^2$$

es convexa, y como en  $v$  esta se anula, entonces la función debe ser positiva. Esto es

$$(\theta - v) \int_v^\theta (g'(s))^2 ds - (g(\theta) - g(v))^2 > 0. \quad (3.3.11)$$

De este resultado en (3.3.10), se tiene que

$$\overline{(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} (g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2} = 0 \quad (3.3.12)$$

$$\left( \overline{g(v^\varepsilon) - g(v)} \right)^2 = 0 \quad (3.3.13)$$

Consideremos un conjunto  $\Omega$ , cualquier abierto y acotado de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . De la ecuación 3.3.12, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) dx dt = 0. \quad (3.3.14)$$

Por otro lado, de (3.3.11) en el conjunto  $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : (v^\varepsilon(x, t) - v(x, t)) > \alpha\}$ , es decir para  $(v^\varepsilon(x, t) - v(x, t)) > \alpha > 0$ ,

$$(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) > C_\alpha, \quad (3.3.15)$$

sobre  $\Omega_1$ , con  $C_\alpha > 0$  independiente de  $\varepsilon$ , luego

$$\int_{\Omega_1} (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) dx dt \geq C_\alpha \mu(\Omega_1). \quad (3.3.16)$$

y análogamente si  $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : (v^\varepsilon(x, t) - v(x, t)) < -\alpha\} = \Omega \cap \{(x, y) : (v(x, t) - v^\varepsilon(x, t)) > \alpha\}$ , el mismo razonamiento conducente a (3.3.15), llevaría a que

$$(v - v^\varepsilon) \int_{v^\varepsilon}^v ((g'(s))^2 ds - (g(v) - g(v^\varepsilon))^2) > C_\alpha, \quad (3.3.17)$$

de aquí, que

$$(v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) > C_\alpha, \quad (3.3.18)$$

sobre  $\Omega_2$ . Así, nuevamente se obtiene

$$\int_{\Omega_2} (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) dxdt \geq C_\alpha \mu(\Omega_2). \quad (3.3.19)$$

Así, tomando el conjunto  $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{(x, y) : |v^\varepsilon(x, t) - v(x, t)| > \alpha\}$ ,

$$\int_{\Omega_3} (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) dxdt \geq C_\alpha \mu(\Omega_3) > 0, \quad (3.3.20)$$

lo que implica que de (3.3.14),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_3} (v^\varepsilon - v) \int_v^{v^\varepsilon} ((g'(s))^2 ds - (g(v^\varepsilon) - g(v))^2) dxdt = 0, \quad (3.3.21)$$

así, para toda constante  $\alpha$ , de (3.3.20) y (3.3.21):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\Omega \cap \{(x, t) : |v^\varepsilon - v| > \alpha\}) = 0,$$

es decir  $v^\varepsilon$  converge en medida a  $v$ , luego existe una subsucesión  $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$  que converge en casi toda parte a  $v$ .

Veamos ahora que  $u^\varepsilon$  converge a  $u = h(v)$  en casi toda parte sobre  $\Omega$ .

Ya que  $\frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau} \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ , para todo  $K$  compacto se tiene

$$\iint_K (u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2 dxdt \longrightarrow 0,$$

luego, si tomamos el compacto  $K$  de tal manera que  $\Omega \subseteq K$ , entonces, :

$$\iint_\Omega (u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2 \phi dxdt \longrightarrow 0,$$

de lo que se concluye

$$u^\varepsilon \longrightarrow h(v) \quad \text{casi toda parte en } \Omega. \quad (3.3.22)$$

Por otra parte  $u^\varepsilon \xrightarrow{*} u$ . Luego, para  $\phi$  de soporte compacto  $S$ , tal que  $\phi_K = 1$ , se tiene

$$\iint_{\Omega} |u^\varepsilon - u| dxdt \leq \iint_K |u^\varepsilon - u| dxdt \leq \iint_S |u^\varepsilon - u| \phi dxdt \rightarrow 0 \quad (3.3.23)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Conjugando (3.3.22) y (3.3.23), se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |u - h(v)| dxdt &= \iint_{\Omega} |u - u^\varepsilon + u^\varepsilon - h(v)| dxdt \\ &\leq \iint_{\Omega} |u - u^\varepsilon| dxdt + \iint_{\Omega} |u^\varepsilon - h(v)| dxdt \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

demostrandóse que  $u = h(v)$  en casi toda parte sobre  $\Omega$ .

Veamos a continuación la propiedad  $E_2$ , utilizando la Definición 6, para ver que  $v(x, t)$  es una solución entrópica en el sentido de Lax del problema de Cauchy

$$v_t + (vh(v))_x = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x). \quad (3.3.25)$$

Tomando la expresión (3.2.4) y el hecho de que  $\eta''(v^\varepsilon) > 0$ , para  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \eta(v^\varepsilon)_t \phi + q(v^\varepsilon)_x \phi dxdt &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} -(\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon)))_x \phi + \varepsilon \eta(v^\varepsilon)_{xx} \phi \\ &\quad + v \eta''(v)(u - h(v))v_x \phi \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))) \phi_x + \varepsilon \eta(v^\varepsilon) \phi_{xx} \\ &\quad + v \eta''(v)(u - h(v))v_x \phi dxdt. \\ &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta'(v^\varepsilon)v^\varepsilon(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))) \phi_x + \varepsilon \eta(v^\varepsilon) \phi_{xx} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$+ K \left( \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \frac{(u^\varepsilon - h(v^\varepsilon))^2}{\tau} dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{\tau}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \varepsilon v_{x^2}^\varepsilon dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.3.27)$$

Si hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (3.3.26) y (3.3.27), se obtiene:

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \eta(v)_t \phi + q(v)_x \phi dxdt \leq 0,$$

de donde

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \eta(v) \phi_t + q(v) \phi_x dx dt \geq 0.$$

■

En general la condición de solución entrópica en el sentido de Lax puede llevar a la unicidad de soluciones o conducir a soluciones físicamente realistas. Para ver en detalle esta condición de Lax, se puede ver su artículo original [14] o consultar [8, pág 220], [10, pág 341], [11, pág 508] para mayor detalle sobre su significado físico.

## Capítulo 4

# COMENTARIOS FINALES

- El estudio de este trabajo pretendía ver la última conclusión de Liu y Cheng en el artículo [17], sobre la inclusión en el término de relajación, de una función Lipchitz continua positiva  $\alpha(v, u)$ , de la que además se asumió la existencia de su mínimo. Así, el desarrollo del trabajo concluye la aceptación de este término, bajo las hipótesis ya mencionadas que resultan necesarias tanto para la existencia de las soluciones viscosas, como para la acotación del término de mecanismo de relajación en  $L^2_{loc}$ .
- En el artículo [17] estudiado, se hallan las estimativas a priori en  $L^\infty$  debido al principio del máximo. Este no se aplicó en el trabajo debido a la falta de acotación de los autovalores asociados a los Invariantes de Riemann del sistema. En este caso, debemos asegurar inicialmente que la función  $u = h(v)$  esta en cierta región limitada por las curvas  $W(v, u) = N$  y  $Z(v, u) = -L$ . Esto conociendo que la naturaleza de las mismas son parábolas (convexas).
- Es interesante preguntarse para que otro tipo de sistemas se puede aplicar el razonamiento del trabajo, es decir adicionar al término fuente, una función  $\alpha(v, u)$  Lipchitz continua positiva. Esto en sentido de ampliar aplicaciones del método aquí utilizado. Para responder este tipo de interrogantes, podríamos empezar mirando el límite del sistema AW-Rascle, estudiado por De La Cruz, Rendón y Juajibioy en el artículo RELAXATION LIMIT FOR AW- RASCLE, [9]. Consideramos el problema de Cauchy para el sistema Aw-Rascle:

$$\begin{cases} p_t + (m - \rho P(\rho))_x = \epsilon \rho_{xx} \\ m_t + \left( \frac{m^2}{\rho} + mP(\rho) \right)_x + \alpha(p, m) \frac{m-h(p)}{\tau} = \epsilon m_{xx}. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

este queda como una pregunta abierta de este trabajo, con posible indagación en estudios posteriores.



# Bibliografía

- [1] Brezis, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] J. E. Broadwell, *Shock structure in a simple discrete velocity gas*, Phys. Fluids, **7** (1964), 1243-1247.
- [3] R. E. Caflish, *Navier-Stokes and Boltzmann shock for a model of gas dynamics*, Comm. Pure Appl. Math., **32** (1979), 521-554.
- [4] C. Cercignani, *The Boltzmann equations and its application*, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [5] G.-Q. Chen, C. D. Levermore and T.-P. Liu, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, Comm. Pure Appl. Math., **47** (1994), 787-830.
- [6] G.-Q. Chen and T.-P. Liu, *Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 755-781.
- [7] K. N. Chueh, C. C. Conley and J. A. Smoller, *Positive invariant regions for systems of nonlinear equations*, Indiana. Univ. Math. J., **26** (1977), 373-392.
- [8] Constantine, Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. (2005).
- [9] De La Cruz, Richard Alexander, Juajibioy Juan Carlos, and Leonardo Rendón. Relaxation limit for Aw-Rasclé system. [arXiv:1310.1305](https://arxiv.org/abs/1310.1305). (2013).
- [10] Debnath, Lokenath. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science Business Media, 2011.
- [11] Friedlander, Susan, and Denis Serre, eds. *Handbook of mathematical fluid dynamics*. Elsevier, 2002.
- [12] C. Klingenberg and Y.-G. Lu, *Existence of solutions to hyperbolic conservation laws with a source*, Comm. Pure Appl. Math. Phys., **187** (1997), 327-340.
- [13] C. Klingenberg and Y.-G. Lu, *Singular limits for inhomogeneous equations of elasticity*, Acta Math. Scientia, **29B**(3) (2009), 645-649.

- 
- [14] Lax, Peter D. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Vol. 11. SIAM, 1973.
- [15] M. Liu and Zhixin Cheng, *Conservation laws III: relaxation limit*, Revista Colombiana de Matemáticas, **41** (2007), 107-115.
- [16] S. Jin and Z. Xin, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., **48**(3) (2007), 235-277.
- [17] M. Liu and Zhixin Cheng, *Conservation laws III: relaxation limit*, Revista Colombiana de Matemáticas, **41** (2007), 107-115.
- [18] T-P. Liu, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm Math Phys, **108**(1) (1987), 153-175.
- [19] T. Li, *Global solutions and zero relaxation limit for a traffic flow model*, SIAM J. Appl. Math, **61**(3) (2000), 1042-1065 (electronic).
- [20] T. Li, *Global solutions of nonconcave hyperbolic conservation laws with relaxation arising from traffic flow*, J. Differential Equations, **190**(1) (2003), 131-149.
- [21] Y.-G. Lu, *Cauchy problem for an extended model of combustion*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Vol. **120A** (1992), 349-360.
- [22] Y.-G. Lu, *Cauchy problem for a hyperbolic model*, Nonlinear Anal., TMA, **23** (1994), 1135-1144.
- [23] Y.-G. Lu, *Singular limits of stiff relaxation and dominant diffusion for nonlinear systems*, J. Diff. Eqs., **179** (2002), 687-713.
- [24] Y. G. Lu, *Hyperbolic conservations laws and the compensated compactness method*, Vol **128**, Chapman and Hall, New York, (2002).
- [25] Y. G. Lu and C. Klingenberg, *Singular limits for inhomogeneous equations of elasticity*, Acta Mathematica Scientia, **29B**(3) (2009), 645-649.
- [26] A. Majda, *A qualitative model for dynamic combustion*, SIAM J. Appl. Math., **41** (1981), 70-93.
- [27] C. Lattanzio and P. Marcati, *The zero relaxation limit for the hydrodynamic Whitham traffic flow model*, J. Diff. Eqs., **141** (1997), 150-178.
- [28] F. Murat, *L'injection du cône positif de  $H^{-1}$  dans  $W^{-1,q}$  est compacte pour tout  $q < 2$* , J. Math. Pures Appl., Vol. **60** (1981), 309-322.
- [29] H. R. Natalini, *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 795-823.

- 
- [30] Hermano Frid Neto, *Compacidade compensada aplicada às leis de conservação*, 19 colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto De Matemática Pura E Aplicada.
- [31] B. Perthame, *Kinetic formulation of conservation laws*, Oxford University Press, (2002).
- [32] M. Rascle, *An improved macroscopic model of traffic flow: Derivation and links with the Lighthill-Whitham model*, Math. Comput., **35**(5-6) (2002), 581-590. Traffic flow Modelling and simulation.
- [33] H. K. Rhee, R. Aris and N. R. Amundsen, *On the theory of multicomponent chromatography*, Phil. Trans. Royal Soc. London, **267A** (1970), 419-455.
- [34] Roubíček, Tomáš. *Nonlinear partial differential equations with applications*. **Vol. 153**. Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] S. Schochet, *The instant-response limit in Whitham's nonlinear traffic-flow model: uniform well-posedness and global existence*, Asymptotic Analysis, **1** (1988), 263-282.
- [36] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York (1983).
- [37] Ma, Tsoy-Wo. *Classical analysis on normed spaces*. World Scientific, 1995.
- [38] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Research notes in mathematics, nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt symposium, Vol. 4, ed. R. J. Knops, New York: Pitman Press, (1979), 136-212.
- [39] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons, New York (1973).
- [40] Yan, Jin, Zhixin Cheng, and Ming Tao. Conservation laws I: viscosity solutions. *Revista Colombiana de Matemáticas* 41.1 (2007): 81-90.