UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Secuencia didáctica para la enseñanza del algebra vectorial a partir de la geometría Euclidiana y Analítica

Jeason Humberto Ramírez Urrego

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá D.C, Colombia
2016

Secuencia didáctica para la enseñanza del algebra vectorial a partir de la geometría Euclidiana y Analítica

Jeason Humberto Ramírez Urrego

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Crescencio Huertas Campos
Matemático, Magister en educación

Codirector
José Reinaldo Montañez Puentes
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá D.C, Colombia
2016

“Hay una razón en la naturaleza para que exista algo más bien que nada. Esto es una consecuencia de aquel gran principio de que nada se hace sin razón; así como debe haber, además, una razón para que exista esto, más bien que otra cosa”.

G. W.Leibniz
Resumen de metafísica.

“Las leyes de la matemática no son meramente invenciones o creaciones humanas. Simplemente "son": Existen independientemente del intelecto humano. Lo más que puede hacer un hombre de inteligencia aguda es descubrir que esas leyes están allí y llegar a conocerlas”.

M. C. Escher

Agradecimientos

En primer lugar, a la Universidad Nacional de Colombia, por ofrecer el programa de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales; quienes mediante su exigencia y estructura curricular me han permitido complementar mi formación académica, disciplinar y profesional.

A mi director, el Profesor Crescencio Huertas Campos, mi mayor agradecimiento por haberme permitido culminar mis estudios, quien confiando en este trabajo, orientó el camino a seguir desde su experiencia, formación, paciencia, valiosa dirección, colaboración, tiempo y sobre todo su apoyo, hasta permitirle llegar a buen fin, las cuales también, han sido de fuente de motivación y admiración.

A la profesora Myriam Margarita Acevedo quien con sus orientaciones pedagógicas aporto en gran medida para el avance de este trabajo.

A los profesores Edgar Lozano, Yolanda Gómez, Olga Gómez, Eugenia Quevedo, Jhonattan Quiroz, quienes con sus orientaciones, consejos, sabiduría y especialmente su amistad fueron de apoyo para culminar este trabajo, ellos sólo se merecen buenas palabras por toda su incondicionalidad. Gracias por su amistad.

No puedo olvidar en mis agradecimientos a mi familia quienes siempre han estado orgullosos de mí, especialmente a mis padres, que de forma incondicional y a pesar de la distancia siempre estuvieron a mi lado.

A todos ustedes, mi mayor reconocimiento y gratitud.

Resumen

El presente trabajo surgió de la necesidad de abordar el problema de la construcción del concepto de vector mediado por su representación; paso omitido frecuentemente en la educación media y en los niveles universitarios, donde generalmente se enseña a partir de la definición formal y abstracta de espacio vectorial. Por lo anterior, se diseñó una Secuencia didáctica en la cual se expone la construcción de dicho concepto de manera progresiva teniendo en cuenta las diferentes etapas de representación, esto es, como vector geométrico, vector de posición, vector coordenado y como elemento de un conjunto que posee la estructura de espacio vectorial, aportándose al proceso enseñanza-aprendizaje a estudiantes que cursen física o algebra lineal. Para ésta construcción se tuvieron en cuenta el proceso de evolución histórica, los referentes disciplinares y el análisis didáctico sustentado en la prueba diagnóstica que hace evidentes algunos obstáculos de aprendizaje en los estudiantes.

Palabras claves: espacio vectorial, estructura, representación, secuencia didáctica, vector geométrico, vector coordenado, vector de posición, vector como elemento de un espacio vectorial.

Abstract

This work arose from the need to approach the problem of constructing the concept of vector mediated by its representation; a step frequently omitted in secondary education and university levels, where it’s often taught from formal and abstract definition of vector space. Therefore, a teaching sequence has been designed in order to expose the building of this concept in a progressive way; considering construction the different stages of representation such as geometric vector, vector position, coordinate vector and as an element of a set having the structure of vector space, time providing the teaching-learning process to students taking physical or linear algebra. For this construction the process of historical evolution, concerning to disciplinary and didactic analysis supported by the diagnostic test makes clear some obstacles to student learning were taken into account.

Keywords: vector space, structure, representation, teaching sequence, geometric vector, coordinate vector, vector position, vector as an element of a vector space.

Contenido

Pág.

Resumen ..... **IX**

Lista de figuras ..... **XIII**

Lista de tablas ..... **XIV**

Introducción **1**

1. Preliminares **5**

1.1 Identificación del problema didáctico 5
1.2 Objetivos 6
1.2.1 Objetivo general 6
1.2.2 Objetivos especificos 6

2. Referentes Teóricos **7**

2.1 Referentes Históricos y Epistemológicos 7
2.1.1 Fuentes tempranas en la concepción del vector: el pensamiento de Aristoteles y Platón, el concepto de magnitud y medida de la magnitud en la Geometría de Euclides 8
2.1.2 La relación entre la Física y las Matemáticas: el problema de la geometrización de la naturaleza 12
2.1.2.1 La física que desarrollaron Arquímides y Galileo 12
2.1.2.2 La Mecánica de Newton 13
2.1.2.3 La teoría del calor de Joseph Fourier 14
2.1.3 La consolidación Matemática del concepto de vector como elemento de un Espacio Vectorial 14
2.1.3.1 La aparición de los números complejos de Cardano y la geometría de Descartes 14
2.1.3.2 La geometría de posición de Leibniz, la representación geométrica e interpretación de los números Complejos de Wallis, Wessel, Argand y Gauss. El problema de la representación del concepto de vector 16
2.1.3.3 William Hamilton y el desarrollo de los Cuaterniones 19
2.1.3.4 Extensión de los calculos de Grassman y los sistemas vectoriales de Gibbs y Heaviside. Formalización del concepto de vector 21

2.2 Referentes Disciplinares **23**
2.2.1. Concepto de magnitud escalar y magnitud vectorial 24
2.2.2. El Concepto de vector y La Estructura de Espacio vectorial 28
2.2.2.1 El vector geométrico (el segmento de recta orientado) y el sistema de los vectores libres 28
2.2.2.2 Vectores fijos y el Vector de posición 33
2.2.2.3 El vector coordenado y el sistema de los vectores analíticos 36
2.2.2.4 La Estructura de Espacio vectorial 43
2.2.3 Noción de módulo 46

2.3 Referentes Didácticos **47**
2.3.1 Las concepciones didácticas de Piaget, Chevellard, Brousseau y el problema de la representación del concepto de vector 47
2.3.2 Análisis de la prueba diagnóstica 50
2.3.2.1 Implementación de la prueba diagnóstica-Metodología- 50
2.3.2.2 Análisis de resultados 50

3. Secuencia Didáctica **57**

3.1 Acerca de la Propuesta **57**
3.1.1 Descripción de la Secuencia Didáctica 58
3.1.2 Recursos y Materiales … 58
3.1.3 Contenidos de la Secuencia didáctica 59
3.1.3.1 Conceptuales 59
3.1.3.2 Procedimentales 59
3.1.3.3 Actitudinales 59
3.1.4 Metodología 59
3.1.5 Evaluación 60

3.2 Actividades de la Secuencia Didáctica 61
3.2.1 Actividad 1: Siguiendo la ruta, Construcción del vector como segmento de recta orientado – la flecha – 61
3.2.2 Actividad 2: Trasladando el edificio – Equipolencia de segmentos de recta orientados, definición de vector libre y definicion de desplazamiento 78
3.2.3 Actividad 3: Encontrando desplazamientos resultantes: Adición de vectores geométricos y producto de un vector geométrico por un escalar 87
3.2.4 Actividad 4: Fijando vectores geometricos en el plano analítico y encontrando vectores anclados o de posición. 109

4. Conclusiones y Recomendaciones **125**
4.1 Conclusiones 125
4.2 Recomendaciones 126

A. Anexo: Registro fotográfico de la apliacion de la pruneba diagnóstica **127**

Bibliografía **129**

Lista de figuras

Pág.

Figura 1: Representación geométrica de los números complejos hecha por Wessel 17
Figura 2: Interpretación geométrica de los números reales hecha por Wallis 19
Figura 3: Interpretación geométrica de los números complejos hecha por Wallis 19
Figura 4: Segmento de recta dirigido 28
Figura 5a: Vectores geométricos con igual sentido 29
Figura 5b: Vectores geométricos con diferente sentido. 29
Figura 6: Equipolencia entre vectores geométricos 30
Figura 7: Vectores geométricos opuestos 30
Figura 8: Adición de vectores geométricos. 31
Figura 9: Regla del paralelogramo 31
Figura 10: Producto de un escalar por un vector geométrico.....32
Figura 11: Construcción geométrica de un vector fijo 33
Figura 12: Descomposicion lineal de un vector en el plano 33
Figura 13: Descomposicion lineal de un vector en el espacio 34
Figura 14: Sistema de los vectores unitarios. 36
Figura 15: Vector coordenado. 39
Figura 16: Cosenos directores de un vector 40
Figura 17: Registro fotográfico aplicación prueba diagnóstica 125

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1. Relacion entre magnitud geométrica y medida planteada por Euclides. 10
Tabla 2. Uso y manejo de la definición de producto de un escalar y una magnitud..... 11
Tabla 3. Representación geométrica de los números complejos hecha por Wallis 18
Tabla 4. Etapa 1. Construcción del conjunto de los segmentos de recta. 51
Tabla 5. Etapa 2. Construcción de los concepto magnitud y cantidad 52
Tabla 6. Etapa 3. Orden y Suma de clases de equivalencia 53
Tabla 7. Etapa 4. Construcciones con regla y compás. 55

Introducción

Una de las características más acentuadas que se le atribuyen a las matemáticas es el poder de abstracción y consolidación de conceptos obtenidos a través de los procesos de deducción lógica, representación simbólica y formalización, mediante los cuales se proporciona el surgimiento de nuevos resultados y teorías, que darán solución a gran parte de las problemáticas que están inmersas en la evolución y avance de las ciencias.

En este sentido, la construcción, consolidación y evolución del concepto de vector como una idea que se formaliza en la teoría de la estructura de espacio vectorial, se fundamenta en los desarrollos históricos y en los aspectos disciplinares provenientes de la física, la aritmética, el álgebra y la geometría, que proporcionan una forma compacta de escribir las leyes de la naturaleza con simplicidad mediante expresiones matemáticas, generando una herramienta poderosa que las hace trascender como disciplinas formales que tratan de explicar el mundo real; ejemplos de ello son el desarrollo de la teoría planteada por Galileo para discutir y modelar el movimiento parabólico, la mecánica de Newton o la teoría de Einstein acerca de la invarianza de las leyes de la física.

Por otra parte, tradicionalmente la enseñanza de los vectores está ligada a la presentación que hacen los libros de texto de física, frente a que inicialmente se exhiben las definiciones de las magnitudes, donde se hace una somera distinción entre éstas como escalares y vectoriales, asociándose por un lado, a la masa, el tiempo, la temperatura y por el otro, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración o la fuerza, como ejemplos respectivos de cada una de ellas, limitándose a una explicación vaga y sin significado, desconociendo el hecho que dichas magnitudes son de distinta naturaleza, obtenidas mediante la construcción de clases de equivalencia donde a las magnitudes vectoriales fuera de poseer una magnitud escalar (módulo), se les asocia una dirección y un sentido.

Hecha esta separación de las magnitudes físicas, se procede a la exposición del concepto de vector, donde en un primer momento, se carece del uso teórico dándose prelación al uso práctico como un objeto geométrico asociado a una flecha o un segmento de recta dirigido, que representará gráficamente a las magnitudes vectoriales que servirán como modelo para el estudio de los fenómenos presentes en la naturaleza.

Acto seguido, los textos representarán al vector geométrico en el plano cartesiano asociándolo con una pareja ordenada de números reales sin hacer distinción alguna entre estos dos sistemas, ni mostrar los pasos que permiten dicha conexión, es decir, que se evidencia una ruptura conceptual entre el hecho de pasar del plano euclidiano al plano analítico y de allí al paso formal de la estructura de espacio vectorial; por lo tanto, no se muestra el paso alterno que conectará a estas dos representaciones, que consiste en anclar el vector geométrico al origen del plano cartesiano, para luego identificar el

punto final de éste con una pareja ordenada de números reales determinándolo como un objeto propio de la geometría analítica.

Finalmente, en los libros de algebra lineal se hace la presentación del vector como un elemento de un conjunto arbitrario y no vacío, en el cual se define una estructura algebraica denominada de espacio vectorial, mostrada de manera abstracta y rigurosa donde las operaciones no se definen y las propiedades se toman como axiomas, configurándose un sistema axiomático independiente de la naturaleza de los objetos, pues el espacio de los vectores geométricos o segmentos de recta orientados y los puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ serán ejemplos particulares de estos.

La anterior presentación de la literatura consultada, muestra la confusión y dificultad del aprendizaje del concepto de vector por parte de los estudiantes, generado por el desconocimiento de las representaciones geométrica o analítica que puede presentar este objeto matemático, la cual se hace más evidente cuando se estudian las operaciones de estos, que darán paso a la construcción de la estructura, ya sea porque estas son traducidas a fórmulas o reducidas a operaciones aritméticas entre números que simplemente se regirán por las reglas del álgebra, sin arrojar algún tipo de equivalencia o significado con los resultados obtenidos con la representación geométrica, ya que simplemente serán utilizados como ayudas visuales. Es decir, que no se hace una diferenciación entre estos dos sistemas que tienen en común las propiedades que definen a la estructura de espacio vectorial, permitiendo ver que estos se comportan desde el punto de vista algebraico de la misma manera.

Es por ello, que el presente trabajo abordó la problemática anteriormente expuesta, a través de la propuesta de una Secuencia didáctica para la enseñanza del álgebra vectorial a partir de la geometría euclidiana y analítica, dando sentido al vector como un segmento de recta orientado, como una pareja de números reales y como un elemento de un espacio vectorial, ofreciendo otra visión en el abordaje de la enseñanza de esta temática, que de paso permita el desarrollo cognitivo de los estudiantes, reconociendo los posibles obstáculos de aprendizaje que se evidencian en la consolidación de esta teoría.

De igual forma, las actividades planteadas van del plano euclidiano al plano analítico, donde se muestra que tanto el conjunto de los vectores geométricos, como el conjunto de los vectores coordenados a partir de las operaciones definidas en ellos, determinan diferentes ejemplos de espacio vectorial, las cuales están soportadas en tres referentes:

El primero, los referentes históricos los cuales son desarrollados, haciendo un recorrido desde Euclides hasta llegar a principios del siglo XX, donde la teoría de estos objetos se consolida formalmente con autores como Gibbs y Heaviside, evidenciando el uso del simbolismo, la representación, el lenguaje moderno y la consolidación formal del concepto; además se tienen en cuenta las etapas históricas presentadas en la física y las matemáticas que muestran sus encuentros y desencuentros que de una u otra manera aportan a la construcción de este concepto.

El segundo, los referentes disciplinares que se desarrollaron bajo el uso reflexivo de textos clásicos utilizados en el programa de matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, que dinamizan el aprendizaje de los futuros profesionales, como la geometría analítica de Murdoch, el Cálculo de Tom Apóstol, el Álgebra abstracta de Herstein, el análisis vectorial de Schaum, entre otros, que muestran los diferentes puntos de vista en

el abordaje de la teoría a desarrollar, como los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial, vector geométrico, vector fijo, vector coordenado y el vector como un elemento de un espacio vectorial real.

Y el referente didáctico el cual se sustenta en la teoría de la Epistemología genética de Piaget, la teoría de la antropología de Chevallard y las situaciones didácticas de Brousseau, donde se estructurará la propuesta, tomando como derroteros las etapas del desarrollo de los conceptos en matemáticas: la protomatemática, la paramatemática y la matemática.

Por último, se presenta en el tercer capítulo y con el fin de contribuir al proceso enseñanza aprendizaje a estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad que cursen física o algebra lineal, la Secuencia didáctica acerca del concepto de vector mediado por su representación como un elemento de un espacio vectorial, a partir de la geometría euclidiana y la geometría analítica, estructurada con actividades orientadas a favorecer la comprensión de dicho concepto, teniendo como base los referentes históricos, disciplinares y didácticos, contemplados en este trabajo.

1. Preliminares

1.1 Identificación del problema didáctico

Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza de los vectores en la asignatura de física para la educación media, se aborda generalmente como la presentan los libros de texto; mediante el uso del segmento de recta orientado (la flecha), para luego trasladarlo al plano cartesiano y representarlo como una pareja ordenada de números reales, sin hacer algún tipo de distinción, frente a que dicho concepto presenta una yuxtaposición de dos representaciones distintas en dos planos diferentes. Por un lado, se tiene el plano sintético concebido a la manera de Euclides, en el que prevalecen las construcciones con regla y compás, donde el actor principal es el vector geométrico y por el otro, el plano cartesiano concebido a la manera de Newton en el cual predomina el manejo de las parejas ordenadas de números reales, que serán asociadas al vector analítico o coordenado; esto a su vez, determinará en el campo pedagógico la enseñanza de dos representaciones distintas para el mismo objeto matemático (una geométrica y otra analítica).

Este problema, se agudiza cuando el estudiante sin comprender las diferencias entre estas dos representaciones de este objeto matemático, se le presenta la geometría vectorial en un curso de algebra lineal, como un ejemplo de algo más abstracto, como es la noción de espacio vectorial real; este concepto es introducido sin significado y sin un propósito claro, generando más confusión en los estudiantes, ya que en esta teoría los objetos desaparecen y se presentan como elementos de un conjunto arbitrario no vacío V sobre un cuerpo K, cuyos elementos cumplen ciertas reglas y que serán denominados vectores, lo que dificulta el aprendizaje de dicho concepto por parte de los educandos. De igual forma hay que entender que este concepto no nace para resolver problemas, sino para unificar la teoría según lo afirma Dorier [11].

Lo anterior, deja al descubierto, que en la escuela aún persiste la matemática estructurada también llamada moderna, producto de la concepción bourbakista, que hace referencia a la enseñanza de las matemáticas, donde sin ninguna profundidad y reflexión (cualidades que caracterizan a las matemáticas), desligan el significado de los objetos, para pasar directamente a la abstracción; contrario a lo que afirman algunos educadores matemáticos como Brousseau [5],que manifiestan que para construir un determinado tipo de conocimiento, es necesario que el estudiante se involucre en la resolución de problemas que forman parte de una situación didáctica, los cuales aportarán al desarrollo de la teoría.

En consecuencia, el problema antes planteado surgió de la necesidad de buscar una estrategia didáctica que muestre la construcción de este objeto mediado por sus diferentes representaciones, inicialmente a partir de la necesidad física de representar algunos fenómenos presentados en la naturaleza, como por ejemplo el desplazamiento y

como ésta noción queda claramente determinada por un objeto matemático denominado vector geométrico, para luego ser sustituido por la representación analítica de una pareja ordenada de números reales para denominarlo vector coordenado, y así más adelante perder su carácter ontológico y ser presentado como un elemento arbitrario de un conjunto que tiene la estructura de espacio vectorial; surgiendo la pregunta didáctica: *¿Cómo construir el concepto de vector como elemento de un espacio vectorial haciendo uso de una Secuencia didáctica que involucre actividades diseñadas y estructuradas desde la geometría euclidiana y analítica*?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General.

Diseñar y estructurar una secuencia didáctica mediante actividades para la construcción del concepto de vector como elemento de un espacio vectorial, a partir de la geometría Euclidiana y analítica.

1.2.2 Objetivos Específicos:

- Analizar la evolución histórica de la noción de vector y de espacio vectorial.
- Comparar las diferentes formas de presentación de la noción de vector y espacio vectorial, en algunos textos de algebra lineal y análisis vectorial.
- Indagar fortalezas, debilidades, saberes previos en los estudiantes relacionados con la noción de vector, a partir de una actividad diagnóstica.
- Diseñar una secuencia didáctica mediante actividades que permitan la construcción de la noción de vector como elemento de un espacio vectorial.

2. Referentes Teóricos.

2.1 Referentes Históricos y Epistemológicos

Con el surgimiento del vector, como un concepto proveniente de la necesidad de dar explicación a los fenómenos presentados en la naturaleza y la relación intrínseca entre la física y las matemáticas, obtenida de los encuentros y desencuentros que estas ciencias presentaban para su desarrollo, se da en gran medida, “la culminación de un largo y accidentado proceso de evolución histórica” (Parraguez [21], p. 13) que también revolucionó el pensamiento del ser humano, desarrollando las bases disciplinares, para lo que hoy conocemos, como la estructura de espacio vectorial.

Es así, que para presentar ésta síntesis del desarrollo histórico del concepto de vector se revisaron tres etapas que se pueden considerar como relevantes para la consolidación formal de este concepto. En la primera etapa se revisaron las fuentes tempranas en la idealización del concepto de vector, basados en los pensamientos de Aristóteles, Platón y la geometría de Euclides. La segunda etapa muestra la relación entre las matemáticas y la física como un proceso de evolución y consolidación formal de este concepto donde la geometría y el álgebra toman relevancia, evidenciados en los trabajos de Arquímedes, Galileo, Newton y Fourier. Y finalmente la última etapa se basa en los trabajos desarrollados por autores como Cardano, Descartes, Leibniz, Wallis, Wessel, Argand, Hamilton, Grassman, Gibbs y Heaviside, que dan cuenta de la teoría del vector y el espacio vectorial como objetos puramente matemáticos, presentándose una etapa puramente formal.

Así mismo, las etapas antes mencionadas soportan la construcción de la secuencia didáctica, relacionando los desarrollos de las diferentes representaciones, las dificultades en su adaptación y consolidación como ideas fundamentales que nacen de las ciencias; que al mismo tiempo permiten percibir los posibles obstáculos epistemológicos para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo.

2.1.1 Fuentes tempranas en la concepción de la noción de vector: El pensamiento de Aristóteles y Platón, el concepto de magnitud y medida de la magnitud en la Geometría de Euclides.

Para los griegos, existían dos concepciones fundamentales sobre el universo que los rodeaba; La primera relacionada con el mundo físico o cambiante, que se estudiaba mediante la física, que se encargaba del estudio de los fenómenos de la naturaleza, específicamente del movimiento de los cuerpos, mediados por la observación, la experimentación y el análisis, que de paso la instaura en gran medida como una ciencia natural y la segunda relacionada con el cosmos, que desde la escuela platónica, acepta que el camino para llegar a la verdad es la geometría, ya que ésta con su forma de razonamiento permitiría llegar al lugar de lo inmutable, la perfección y la armonía, considerándola así, como una ciencia deductiva dejando de ser una ciencia visual.

Para Platón (428 – 347 a.C), la ciencia es el conocimiento de las ideas, por ello, consideraba que la geometría hace parte de dicho mundo y puede crearse por sí misma, por ende, los objetos que hacen parte de esta ciencia existen independientes del mundo fenomenológico o real y tienen vida propia, ésta tendencia filosófica, se denomina el *idealismo platónico*.

Mientras que para Aristóteles (384 – 322 a.C), los fenómenos de la naturaleza no podían ser interpretados desde una concepción puramente geométrica, puesto que, la ciencia para él, es cualitativa, descriptiva y discursiva; por ello, hace una distinción en sus tratados de la *física* y l*a metafísica*, que tienen como finalidad el ser. La primera se encarga del estudio de los seres de acuerdo a su movimiento, sin importar su esencia, ni sus causas y la segunda estudia los seres como entes abstractos carentes de materialidad, sin tener en cuenta su movimiento. Este enfoque es denominado *constructivismo nominal aristotélico*.

Por otro lado, con la aparición del libro los *Elementos*, escrito por *Euclides* (330 – 275 a.C), se sistematiza toda la matemática –geometría– existente en su época, mediante un modelo axiomático siguiendo el enfoque constructivista nominal aristotélico. En este legado deja ver explícitamente cómo el razonamiento es riguroso basado en principios preestablecidos producto de acuerdos o generados a partir de la secuencia lógica con la que está construida.

Así mismo, da respuesta, a dos crisis filosóficas y ontológicas, que se dan dentro del avance de estas ciencias, desarrollando la teoría para cada una de ellas; la primera es la ruptura generada por Pitágoras entre la geometría y la aritmética, y la segunda son las paradojas de Zenón, que refieren en contra del movimiento.

Respecto a la primera crisis, ésta se evidencia con la aparición de los segmentos inconmensurables (la necesidad geométrica por encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados cuya medida es la unidad), ya que, en su teoría asumían que todos los segmentos geométricos siempre eran conmensurables, no poseían una definición rigurosa de medida ni de magnitud, simplemente las relacionaban con los

números[1], así que, las tomaban como ideas primitivas y establecían la conmensurabilidad a partir de una unidad de medida común, de tal suerte que al comparar dos magnitudes geométricas de la misma especie, éstas se podían expresar como múltiplos enteros de dicha unidad. Lo que en nuestra escritura actual sería:

> *Sean A y B dos cantidades de la misma magnitud y μ una unidad común, se dice que A y B están en la misma razón, si existen números naturales m y n, tales que se cumple qué $A = m\mu$ y $B = n\mu$, para $\langle m, n \rangle = 1$*[2]

Lo anterior, genera un cambio de paradigma en el pensamiento griego, ya que existe un rompimiento entre las matemáticas y la filosofía que concebían los pitagóricos, donde su principio fundamental, los números son el principio de las cosas, es decir, todo es "número" o "relación entre números". Se abandona la idea de identificar las magnitudes geométricas con una descripción numérica como la base para medir exactamente, pues la concepción de número se complejiza y en consecuencia, muestran que la geometría (la representación) y la aritmética (la concepción numérica) son independientes la una de la otra.

Y respecto a la segunda crisis, las paradojas de Zenón (490 – 430 a.C), son críticas que admiten que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles, que matemáticamente, conllevan a la divisibilidad infinita de un segmento considerado este como finito, evidenciado en la *paradoja de Aquiles y la tortuga*; este problema pasa del espacio físico al espacio geométrico, que se reduce a la sucesión de puntos sobre la recta que representan cada instante que ocupan tanto *Aquiles* como la *Tortuga*, se aplica la noción de límite a la suma de los términos de una serie geométrica infinitamente decreciente obteniendo un resultado finito, resultado de una suma de infinitos términos, conduciendo a contradicciones, y por ende a controversias en el pensamiento.

Es así, que en el desarrollo del libro V, *la teoría de Eudoxo de las magnitudes inconmensurables y las proporciones*, se resarce la dificultad del manejo de este tipo de magnitudes partiendo de las conmensurables, al igual que en el libro VII lo hace para los números. Las magnitudes allí tomadas son geométricas sin carácter numérico, que permiten ser comparadas entre sí para formar razones, aunque se establezca una relación numérica entre ellas. Lo anterior toma fuerza con el libro X con *la clasificación de los inconmensurables*. Aquí, es donde se comienza a evidenciar la distinción entre *magnitud* y *número*, ya que para los griegos la primera es divisible de manera infinita, mientras que el segundo lo es de manera finita. Euclides centra sus esfuerzos en tratar de volver a unificar la aritmética y la geometría.

En este sentido, el trabajo de Euclides en el libro V, consistió en relacionar la magnitud geométrica con la medida, como lo trataron de hacer los pitagóricos, lo cual se evidencia en las tres primeras definiciones y en las cuatro primeras proposiciones:

Parte de la definición de Razón, como se muestra a continuación:

---

[1] Euclides establece el concepto de número en la definición dos del libro VII: "Un número es una multiplicidad compuesta de unidades".(Garciadiego, 2006, p. 7)

[2] La notación $\langle m, n \rangle = 1$, significa que tanto m como n son primos relativos, es decir que el máximo común divisor entre ellos es igual a 1.

*"**Definición V. 3**: Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad".* (Euclides [13], p. 787).

En la definición 4, establece el producto de la medida de una cantidad (segmento) por un número natural y en la definición 5 se establece la proporción entre magnitudes geométricas, como lo muestra Zea ([29], p.26):

Notación clásica - retórica	Notación moderna-simbólica
*"**Definición V. 4**: Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere la otra"* (Euclides [13], p. 787).	Para dar significado a la definición, de manera moderna hay que definir nA, para luego compararla con otra magnitud B de la misma especie, es decir: • Si A representa una cantidad de una magnitud cualquiera, entonces nA será la notación para representar la adición de dicha cantidad n veces, es decir, $\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{n\ veces}$ Y se denominara, el producto de n por A, para un entero n positivo. • Dadas A y B cantidades de la misma magnitud se cumple que existe un n positivo tal que $nA > B$, Lo que indica que nA supera a B.
*"**Definición V. 5**: Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda, es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta"* (Euclides, [13], p. 787).	Dando significado a la definición, en la notación moderna, se tiene que: dadas las Cantidades A ,B , C y D de la misma magnitud, entonces A y B están en la misma razón que C y D, cuando para todo p y q se establece: i. Si $pA > qB$ si y sólo si, $pC > qD$. ii. Si $pA = qB$ si y sólo si, $pC = qD$. iii. Si $pA < qB$ si y sólo si, $pC < qD$.

Tabla 1: Relación entre la Magnitud geométrica y la medida planteada por Euclides

En las cuatro primeras proposiciones, aparecen implícitamente las propiedades de los espacios vectoriales, relacionando las magnitudes (segmentos) y los números (medida) según lo muestra Zea ([29], p.27 y 28):

***"Proposición V.1**: Dado cualquier número de magnitudes, sean cuales fueran. Equimúltiplos de otras magnitudes en igual número, cualesquier que fueren las veces que de una de ellas sea múltiplo de alguna, ese múltiplo será de todas las demás"* (Euclides [13], p. 790).	Dadas A y B dos magnitudes, se tiene que $m\,(A+B)$ representa el producto de m por la suma de las magnitudes A y B, que es igual a $mA+mB=m\,(A+B)$, denominada la Propiedad distributiva del producto de un escalar con respecto a la suma de dos magnitudes.
***"Proposición V.2**: Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera lo es de una cuarta y una quinta es el mismo múltiplo de la segunda, que una sexta lo es de una cuarta, la primera y la quinta juntas serán el mismo múltiplo de la segunda que la tercera y la sexta lo son de la cuarta"* (Euclides [13], p. 790).	Dados m y n enteros positivos y A una magnitud, tal que $m \neq n$, se cumple que: $$mA+nA=(m+n)A$$ Denominada Propiedad distributiva de la suma de escalares con respecto al producto de una magnitud.
***"Proposición V.3**: Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta"* (Euclides [13], p. 790)	Dados m y n enteros positivos, tal que $m \neq n$, se cumple que: $$n(mA)=(mn)A$$ Denominada Propiedad asociativa del producto de escalares con respecto al producto de una magnitud.
***"Proposición V.4**: Si una primera magnitud tiene con una segunda, la misma razón que una tercera con una cuarta, los equimúltiplos de la primera y la tercera tendrán la misma razón que los de la segunda y la cuarta tomados en su orden"* (Euclides [13], p. 790).	Si $A:B=C:D$, entonces $mA:nB=mC:nD$

Tabla 2: Uso y manejo de la definición de producto de un escalar y una magnitud

En las citas anteriores, se deja en evidencia que *Euclides* hace uso y manejo de la definición del producto de un escalar por una magnitud (cantidad según el lenguaje actual), sentando las bases para lo que posteriormente se conocerá como la operación externa del producto de un escalar por la medida o módulo de un vector, esto es: $\vec{B}=n\vec{A}$. Que de manera explícita, se llegará a la definición formal, que se presenta a continuación:

Al multiplicar un vector $\vec{A}$ por un escalar $n \in \mathbb{Z}$, obtenemos un nuevo vector $\vec{B} = n\vec{A}$ que tiene las siguientes características:

- *$\vec{B}$ tendrá la misma dirección que $\vec{A}$. (entendiéndose por dirección la recta que contiene al segmento, a su vez, dos rectas paralelas determinarán la misma dirección).*
- *Si el escalar n es Positivo, entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tendrán el mismo sentido y si el escalar n es negativo, entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tendrán sentidos contrarios.*
- *El módulo o medida de $\vec{B}$ será $\|\vec{B}\| = |n| \cdot \|\vec{A}\|$*[3].

Con esta construcción, las magnitudes escalares se irán diferenciando de las magnitudes vectoriales, de estas últimas se harán explícitos los elementos que las conforman instaurándolas como nuevos objetos geométricos que visualmente representarán nociones físicas como el desplazamiento, la fuerza, la velocidad o la aceleración y que serán denominadas ***Vectores geométricos***.

2.1.2 La relación entre la física y las matemáticas: El problema de la geometrización de la naturaleza.

2.1.2.1 La física que desarrollaron Arquímedes y Galileo.

Con Arquímedes (287 – 212 a.C.), autor de dos tratados uno *Sobre el equilibrio de los planos* lo que actualmente se llama *la Estática* y el otro titulado *El equilibrio de los cuerpos flotantes* que se denomina *Hidrostática*, en los cuales desconoce el movimiento o el cambio, se da un primer paso a la aplicación de la geometría al mundo terrestre, estableciendo una somera relación intrínseca entre las matemáticas – geometría – y la física, descrita en su obra *Método*; además, deja entre ver, cómo la física está íntimamente relacionada con la búsqueda de relaciones geométricas relativamente complejas, que dan cuenta de las explicaciones de los fenómenos que se presentan en el mundo físico. Evidenciando la emergencia del nacimiento de otro tipo de objetos distintos a los numéricos, que manifiesten las explicaciones fenomenológicas que se venían presentando en su época.

Para comienzos del siglo XVII no había muchos fenómenos matematizados; pero con el nacimiento de la ciencia moderna impregnada por la herencia de las corrientes filosóficas platónica y aristotélica, el retorno de las obras de Arquímedes, y el desarrollo del álgebra y el cálculo como disciplinas, las matemáticas se van consolidando como el lenguaje que describiría a la física. Es el estudio del movimiento el fenómeno más elemental, con el que la física empieza su búsqueda hacia la formalización.

Por su parte, Galileo Galilei (1564 – 1642), alejándose del pensamiento aristotélico, muestra la necesidad de explicar los fenómenos presentes en la naturaleza con métodos puramente matemáticos, desligando de ellos sus cualidades sensibles y expresándolos en términos cuantitativos (pasando de la cualidad a la cantidad). Estudia el problema de la caída libre de los cuerpos en el que encuentra una expresión matemática que lo

[3] La expresión $\|\vec{B}\| = |n| \ \|\vec{A}\|$ reformula la definición 4 del libro V de los *Elementos* de *Euclides,* de igual modo, se hará con las demás definiciones y proposiciones que dan cuenta de estos hechos.

describiría, un problema que es estudiado desde la Grecia clásica; que revoluciona el pensamiento y genera un salto conceptual estableciendo una correlación entre el espacio físico y el espacio euclideo (el espacio descrito por Euclides), dando lugar a la matematización del movimiento en más de una dimensión. Un ejemplo de ello, es el movimiento de un proyectil (movimiento parabólico) que se describe como un movimiento compuesto, dándose cuenta que los cuerpos pueden caer verticalmente mientras se mueven horizontalmente, es decir, existen dos movimientos independientes: un movimiento horizontal y un movimiento vertical que da inicio al tratamiento vectorial que hoy se conoce, dando como resultado la matematización del movimiento, sentando las bases para el estudio de la *mecánica de los cuerpos*.

2.1.2.2 La mecánica de Newton

Con la presentación de la obra de Newton "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (1687), mostrada de forma sistemática a la manera de Euclides compuesta por tres libros, se da la gran síntesis entre el mundo terrestre y el mundo celeste (cosmos), generando un principio unificador, que inician pensadores como Copérnico, Galileo o Kepler basados en la escuela Aristotélica que venía en decadencia y que obligaba al mundo a establecer otro tipo de corrientes filosóficas que permitieran restablecer el orden del pensamiento y ver al mundo físico de otra forma. Nace la *mecánica clásica* o *mecánica de Newton*.

Newton, explica el movimiento de casi todo, con la introducción de las tres leyes que llevan su nombre, que no cambiaron el modo como funciona el mundo físico, pero si mostraron un cambio en la manera de verlo y entenderlo. Como una consecuencia de ello, nace la idea de la formalización de la fuerza total que se puede aplicar a un cuerpo cuando sobre él interactúan más de una fuerza; la expreso como la composición de dos fuerzas que pueden interactuar sobre un cuerpo si se aplican de manera simultánea, asumiendo implícitamente la noción de vector en lo que se va a denominar la *regla del paralelogramo de fuerzas*, enunciada como sigue:

> *"Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas simultáneamente, la fuerza resultante sería descrita por la diagonal de un paralelogramo; al mismo tiempo sus lados, describirían las fuerzas separadamente" (Newton citado por Zea* [29]*, p. 59).*

Aunque todavía no se había generado el concepto de vector formalmente, si se hacía una realidad latente que éste tenía que surgir de la necesidad de la representación de estos fenómenos físicos, que se evidencia con el concepto de fuerza que Newton representa gráficamente mediante la utilización de rectas con cierta dirección. Además, implícitamente crea un método vectorial para sumar vectores que tienen el mismo punto de aplicación.

A pesar de que Newton no tenía gran interés por modelar la física matemáticamente, si tenía claro que ésta era de gran importancia para la ciencia que venía desarrollando; además, de la toma de conciencia en que la matemática usada hasta ese momento como la aritmética y la geometría no eran suficientes para crear los modelos que explicarían sus principios.

2.1.2.3 La Teoría del calor de Joseph Fourier.

Con el avance de la física para el siglo XVIII, se produce la búsqueda del modelo matemático y la exploración del modelo mecánico de los fenómenos que se presentaban en la naturaleza, se buscaba la matematización formal de ésta ciencia. Un ejemplo, es el paso de la *mecánica clásica* a la *mecánica racional*, denominada ésta última así, por la propuesta de formular las leyes de la mecánica matemáticamente, evitando entidades hipotéticas inobservables, explicándolas mediante expresiones matemáticas en función de entidades observables como la masa, la longitud y el tiempo, extendiendo la mecánica que había propuesto Newton a una *mecánica puramente matemática.*

Con lo anterior, se buscaba que todo tipo de fenómeno fuera expresado como un sistema mecánico; es el caso del calor, teoría expuesta por Josep Fourier (1768-1830) en su libro "*teoría analítica del calor"* (1822), fue el primero en lograr construir una teoría matemática, mediante el uso de las derivadas parciales, expresada como una ecuación diferencial:

$$pc\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad \textit{Ecuación de la propagación del calor.}$$

Esta ecuación extiende el marco referencial de la física y de las matemáticas, ya que Fourier se aleja de la mecánica clásica pasando al análisis matemático como el lenguaje que permitiría comunicar y transmitir cualquier fenómeno de la naturaleza, haciendo uso de los vectores (aunque aún no se conocían con dicho nombre) como objetos conceptuales que se podían obtener mediante combinaciones lineales.

2.1.3 La Consolidación Matemática del concepto de Vector como elemento de un Espacio Vectorial.

2.1.3.1 La aparición de los números complejos de Cardano y La geometría de Descartes.

Con los esfuerzos por construir una teoría para resolver ecuaciones de grado mayor a uno, se venía dando por una parte, la ampliación de los sistemas numéricos y por la otra, la consolidación del álgebra como una disciplina abstracta emergente de este desarrollo. Entre las dificultades encontradas para el progreso de esta teoría, los algebristas italianos del siglo XVI se encontraron con raíces cuadradas de números negativos a los cuales nunca dieron el estatus de números; históricamente ya se habían presentado otras situaciones en las que había ocurrido este suceso, como son los inicios del álgebra con Brahmagupta o Al-Khwarizmi (820 a.C) quienes abstrayendo el uso más práctico de las matemáticas que denominaban "*la ciencia de la reducción y el equilibrio"*, dieron importancia a los números negativos pero desconocieron la de sus raíces cuadradas o el caso de Herón de Alejandría quien en su obra "S*tereometría*" (siglo I a.C), obtiene la expresión $\sqrt{88-144}$, que por las diferentes traducciones del texto, se transforma en un número positivo; los griegos, las omitían por no encontrar una correlación con la geometría.

Es Girolamo Cardano (1501 – 1576) quien hace un uso prudente de ellos; además, establece una manera de manipularlos, dichos resultados los publica en su libro titulado

"*Ars magna"* (1545), donde muestra de una u otra manera un primer uso y manejo de los números complejos a partir de un problema de tipo geométrico, como se enuncia a continuación:

"*Dado un segmento de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de manera que formen un rectángulo de área igual a 40 unidades cuadradas"* (Cuesta [10], p. 4)

El problema lo redujo a una ecuación cuadrática de la forma, $x^2 - 10x + 40 = 0$, cuyas soluciones son números complejos; cabe resaltar que su trabajo hace referencia al manejo de raíces cuadradas de números negativos denominados *ficticios*, que hasta ese momento eran rechazados por los matemáticos, pues no podían ser usados para medir cantidades y se consideraban poco útiles para desarrollar la teoría, además de no poseer representación geométrica alguna. Con Cardano se da el nacimiento de los números complejos, abriendo los caminos a lo que más adelante se denominaría el análisis vectorial.

Con base en el pensamiento de Galileo junto con los estudios y aportes de René Descartes (1596 – 1650) plasmados en su *filosofía mecanicista* y la invención de la geometría analítica, se establece una nueva manera de correlacionar el mundo físico y con la geometría. Bajo la idea de seguir "*el orden de las razones*" (Ortiz [20], p. 113), Descartes, organiza su geometría como una secuencia lógica que va desde lo concreto a lo abstracto; basado en la teoría de las proporciones de Euclides, estableció la forma de operar aritméticamente magnitudes de cualquier especie transformándolas a magnitudes lineales, a partir de la construcción de un segmento denominado unidad. Creó una analogía con los números, donde se hace explícita la relación entre número y magnitud y se sirvió del álgebra para dar respuesta a muchos problemas geométricos, permitiendo el desarrollo de varios estudios que Galileo no pudo desarrollar de manera alguna.

En el camino por descubrir una solución geométrica a las ecuaciones de tercer grado y de paso, conseguir como consecuencia lógica, la solución a uno de los problemas clásicos de la antigüedad, "la *trisección del ángulo"*, mediante objetos geométricos, Descartes se encontró, que con la simplificación hecha del lenguaje compuesta por las representaciones geométricas del momento, sólo se consideraban las raíces positivas, de allí que se encontraba impedido para representar raíces negativas de forma geométrica. Para salir del problema, retoma el trabajo de Cardano y a las raíces negativas les asigna segmentos de recta dirigidos opuestos a los segmentos correspondientes de raíces positivas, haciendo una clara distinción entre ellas.

Cabe aclarar, que Descartes nunca entendió este tipo de raíces, ya que en su obra la *Geometrie* (1637), expresa:

> *"Ni las raíces verdaderas, ni las falsas son siempre reales; a veces son imaginarias; es decir, mientras que uno puede imaginar tantas raíces de cada ecuación como grado haya asignado, no siempre hay una cantidad definida que corresponda a cada raíz imaginada."*(Macías [17], p. 44)

De esta forma, se vislumbra el nacimiento de nuevos objetos matemáticos diferentes a los ya conocidos como el punto, la recta, el plano, el número natural, entre otros, que introducidos de manera paulatina como el segmento de recta dirigido darán respuesta a muchos de los problemas que más adelante se presentarán.

2.1.3.2 La geometría de posición de Leibniz, la representación geométrica e interpretación de los números complejos de Wallis, Wessel, Argand y Gauss. El problema de la representación del concepto de Vector.

Tratando de modelar el espacio físico analíticamente y con la necesidad de extender el álgebra de una manera más general que a su vez diera cuenta de las necesidades del momento, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), planteó una nueva manera de abordar los problemas, específicamente, los fenómenos que se presentaban en la naturaleza, diseñando una forma de geometrizar el espacio y matematizar las leyes presentes.

Leibniz planteaba, que el álgebra y la geometría cartesiana eran insuficientes para dar cuenta de la rica variedad de figuras geométricas posibles, y por lo tanto la ampliación del concepto de objeto geométrico. Por ello, intentó construir un nuevo campo teórico para el álgebra y la geometría que diera cuenta de las cualidades y los movimientos de estos objetos, a partir de sólo símbolos, queriendo construir una *geometría de posición* también denominada *geometría situs*.

Es así, que Leibniz quiso prescindir por completo de los números y de las formas geométricas como instrumentos de análisis, definiendo en general cualquier cuerpo geométrico o movimiento en función de un nuevo instrumento conceptual, que se componga exclusivamente de signos y fórmulas (Echavarría [12]. p. 70).

Leibniz evidencia la importancia de independizar los objetos matemáticos de los “objetos reales” explicados a través de la geometría, para ahora considerarlos como símbolos que establezcan sus relaciones a través de fórmulas matemáticas; para ello, trata de deshacerse del intuicionismo bajo el cual era construida la matemática en aquella época, impregnada e influenciada por los trabajos de Descartes, reemplazado por un enfoque puramente simbólico en el cual los objetos pierdan sus cualidades ontológicas concretas, para pasar a ser seres abstractos carentes de representación geométrica alguna, con resultados más eficientes y eficaces para el desarrollo de la teoría, rompiendo los límites impuestos por la geometría de Euclides.

Aunque Leibniz no vio su sueño cumplido, porque su sistema falló en la operatoria de los objetos creados, si dio las bases para la escritura matemática formal, mediante el lenguaje simbólico, dando inicio a la abstracción de los conceptos y relaciones, como el camino que permitiría evolucionar a las matemáticas como una disciplina que va más allá de explicar el mundo real.

A finales del siglo XVII ya se tenía cierto adiestramiento con el manejo de los números complejos, Caspar Wessel (1745 – 1818), escribe un único artículo llamado “*Essai sur la représentation analytique de la direction*” (1799), con el objetivo de poder representar la dirección de forma analítica asociada a estos números, que aunque nunca fue tenido en cuenta por la Real Academia de Ciencias de Dinamarca, si dio las bases para la representación geométrica de estos números, que luego fue adaptada a las representaciones cartesianas modernas de los vectores.

Con la interpretación, los números negativos son una extensión de los números positivos, Wessel estableció que para poder representar dichos números gráficamente, estos serían generados mediante una rotación de 180° en contra de las manecillas del reloj con

respecto a los números positivos, los cuales eran representados mediante segmentos de recta. Extendiendo así, los conceptos de segmento y dirección, lo que dio origen al segmento de recta orientado, haciendo explícita la relación entre magnitud y dirección, características fundamentales en los vectores.

Inicialmente construyó la estructura definiendo dos operaciones, la suma y la multiplicación de segmentos de forma geométrica, de la primera operación colocó el punto inicial de uno con el punto final del otro, además, estableció propiedades como la conmutativa, para la segunda operación, hizo uso de la geometría cartesiana construyendo un sistema de ejes coordenados perpendiculares, considerando +1 para la unidad en el eje horizontal y $+\varepsilon$ para la unidad en el eje vertical.

De igual manera, estableció que:

"*Sea* $+1$ *la unidad rectilínea positiva y* $+\varepsilon$ *otra unidad perpendicular a la unidad positiva tomada antes, teniendo ambas el mismo origen; entonces el ángulo de la dirección de* $+1$ *resulta igual a* $0º$*, y por lo tanto para* -1 *es* $180º$*, para* $+\varepsilon$ *es* $90º$*, y para* $-\varepsilon$ *es* $-90º$ *o* $270º$*. Por la regla que establece que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos*: $(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(-1)(-1) = +1$; $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1$; $(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1$; $(-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1$. *De este resultado se observa que* ε *es igual a* $\sqrt{-1}$." (Sánchez, 2011, p. 4)

Con su representación geométrica, Wessel estableció que cualquier segmento de recta o punto del plano podía ser representado mediante la expresión $a + b\,\varepsilon$. (Sánchez [26], p. 5), como se muestra en la figura 1:

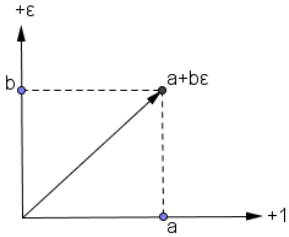


Figura 1: Representación geométrica de los números complejos hecha por Wessel

Con la representación anterior, encontró una expresión para la suma y el producto en términos analíticos, es decir:

$(a + b\,\varepsilon) + (c + d\,\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$, lo denomino la suma.
$(a + b\,\varepsilon) \times (c + d\,\varepsilon) = (ac - bd) + (ad + ab)\varepsilon$, lo denomino el producto.

Así, Wessel da inicio al desarrollo teórico del concepto de vector, de igual forma se comienzan a dar los visos de la estructura de espacio vectorial a partir de las propiedades que a ésta se le van atribuyendo. Cabe anotar que es a Euler que se le debe la representación de $\sqrt{-1}$ como i.

Pero es Jhon Wallis (1616-1703), el predecesor de Wessel quién en un intento fallido quiso construir una representación geométrica de estos números, tratando de representar las raíces complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, dando los elementos básicos a Wessel para que realice su construcción y análisis.

Wallis parte de la idea, que si los números negativos pueden ser representados en la recta numérica, los números complejos pueden ser representados en el plano mediante el siguiente artificio:

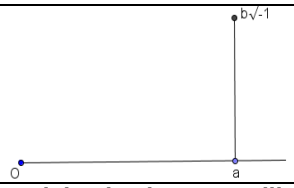
Traza una recta horizontal en la que ubica la parte real de la raíz, construida desde un cierto origen. (A la derecha se ubicaban los positivos y a la izquierda los negativos).	
Desde el número ubicado en la recta, procedía a construir un segmento perpendicular con medida arbitraria que simbolizaría $\sqrt{-1}$.	
Luego amplificaba la medida de $\sqrt{-1}$ que sería la medida de la parte imaginaria	

Tabla 3: Representación geométrica de los números complejos hecha por Wallis

Además, toma como base el siguiente razonamiento según lo muestra Rivero ([24], p. 9)

i. En la ecuación cuadrática $x^2 + 2bx + c^2 = 0$ Tiene como raíces

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

ii. Si $b \geq c$, entonces las soluciones son reales y pueden ser representadas como un par de puntos P_1 y P_2, asumiendo la construcción presentada en la figura 2:

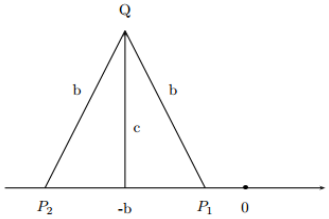


Figura 2: Interpretación geométrica de los números reales

Si $b < c$, entonces las soluciones no son reales, es decir son números complejos, toma los puntos P_1 y P_2 en el extremo del segmento de recta b, como este es más corto que c, los puntos no estarían en la recta real, estarían por encima, como se muestra en la figura 3.

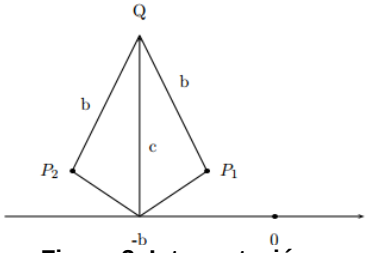


Figura 3: Interpretación geométrica de los números complejos

Con el surgimiento de la representación geométrica de los números complejos, descrita anteriormente, Robert Argand en su obra "*Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométrique*" (1806), explicita su representación geométrica de una manera más sencilla. Fundamenta su discusión a través de la geometría cartesiana, generando el conocido *Diagrama de Argand,* en el cual establece una interpretación geométrica para $\sqrt{-1}$ entendida como una rotación de 90° en el plano coordenado. Ésta es la representación geométrica moderna de los números complejos, su objetivo era encontrar métodos comparables para el análisis del espacio tridimensional como una forma de visualizar el espacio de estos entes.

Obviando el recelo que la comunidad matemática sentía en dicha época hacia los complejos por las múltiples dificultades que presentaban, Carl Friedrich Gauss, publica por primera vez en 1827, en su tesis doctoral "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus posse"*, un tratado detallado del uso y manejo de estos objetos, otorgándoles el estatus de número; en dicho documento, parte de dos perspectivas: la

primera, redescubre la representación geométrica, asociando el conjunto de los números complejos con el plano real $\mathbb{R}^2$, estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano cartesiano y los segmentos de recta dirigidos que habían encontrado Wessel y Argand tiempo atrás, exponiendo con toda claridad las relaciones y propiedades que estos objetos podían ofrecer y la segunda, desde el uso más práctico (para qué sirven), desconociendo su esencia y su naturaleza (Qué son) prueba el ***Teorema fundamental del algebra,*** el cual establece:

> *"Toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene solución, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que también son números complejos"*

Respondiendo a una necesidad práctica propia de la disciplina, así como los números reales comienzan a dar respuesta al problema de la medida.

2.1.3.3 William Hamilton y el desarrollo de los Cuaterniones.

Con el rompimiento del principio categórico de permanencia de la forma:"*todas las formas algebraicas son equivalentes cuando los símbolos son generales en forma pero específicos en valores (enteros positivos), serán equivalentes de la misma manera cuando los símbolos son generales tanto en valor como en forma*" (Klein, 1992, citado por Zea [29], p.77) y el abandono por la propiedad conmutativa del producto de los números reales, da nacimiento a los números hipercomplejos o cuaterniones creados por Sr. William Rowan Hamilton (1805 - 1865).

Hamilton influenciado por el pensamiento kantiano, plantea que la geometría debía ser la ciencia que describe el espacio, mientras que la física sería la ciencia que describe al tiempo. Basado en su ideología, Hamilton en su obra la *"teoría de las funciones conjugadas"* (1837) establece una forma de describir lo que para él era una teoría sistemática de la *ciencia del tiempo puro,* extendiéndose del plano al espacio, tratando de representar a este último como una tripleta de números reales que dieran cuenta de la rotación de los objetos en el espacio en términos físicos, buscó una analogía tridimensional de números complejos; en lugar de ello, se encontró con un álgebra de objetos de cuatro dimensiones que denominaría cuaternas, los cuales las describiría mediante la expresión:

$a + bi + cj + dk$, donde a, b, c, d son números reales.

Inicialmente para esta construcción parte de la expresión $a + bi + cj$, donde $i^2 = j^2 = -1$ y a la vez, i, j, 1 son perpendiculares dos a dos cuya longitud es la unidad.

Establece la estructura, definiendo la suma como se muestra a continuación:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Trató de hallar el producto de estos números el cual se le dificultó, como consecuencia de ello, se encontró con la ley de los módulos, con el razonamiento de suponer que si el módulo de los números complejos de la forma $a + bi$ es $a^2 + b^2$, entonces el producto de los módulos de dos números complejos es el módulo del producto de dichos números, encontrándose con más desaciertos y más complicaciones, es decir que:

$$(a+bi+cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij$$

Cuyo módulo del cuadrado era:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2$$

Al no encontrar un resultado satisfactorio, reafirma que hasta ese momento sólo se tenía un método para sumar o restar, no tenía un método para multiplicar ya que $ij \neq 0$; años más tarde, en un momento de lucidez, Hamilton se encuentra que para resarcir el error, no debía trabajar con tres términos sino con cuatro añadiendo el elemento k adicionado como una cantidad imaginaria añadida a i y j, verificando que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, denominando a estas cantidades como hoy las conocemos Hipercomplejos de la forma $a + bi + cj + dk$.

Hamilton es el primero en presentar de manera formal, dos representaciones alternativas para estos números, haciendo uso de los puntos del plano mediante parejas de números reales o mediante el uso de segmentos de recta dirigidos, ya que para él existía una fuerte conexión entre el álgebra como disciplina que avanza desde las reglas del álgebra aritmética hasta el álgebra simbólica, y la física dando un significado en el mundo real que podía ser representado gráficamente mediante la geometría; aquí se comienza a dar la idea de vector tal y como hoy se conoce.

Con este descubrimiento, Hamilton centró sus esfuerzos y su trabajo en el desarrollo de esta teoría ya que estos describirían la realidad física que él quería presentar, estableciendo una biyección entre los puntos del espacio descrito de manera cartesiana y los cuaterniones. Esto lo plasma en sus *lecciones sobre Cuaterniones* (1866), aplicándolos a los estudios de astronomía, dinámica, óptica, entre otras.

Es Hamilton quien se encargó de acuñar el término ***vector*** que proviene del verbo en latín "*veher*", que significa "*dirigir, direccionar*". También acuñó el término ***escalar***, ya que con el método expuesto por él, tenía la posibilidad de descomponer el cuaternión en dos tipos de cantidades: una escalar y otra vectorial, que se representaría como se muestra a continuación:

$Q = ScalQ + VectQ = SQ + VQ$ (Zea, [29], p. 81)

En este sentido, en Zea [29] se hace explicita la cita de Crowe, hecha por Hamilton, aclarando lo anterior:

> *"La parte algebraicamente real puede recibir todos los valores contenidos sobre una escala de progresión de números de lo negativo a lo positivo infinitamente; nosotros llamaremos entonces la parte escalar, o simplemente el escalar del Cuaternión, y designaremos este símbolo prefijando, a el símbolo del cuaternión, la característica Scal, o simplemente S, cuando no haya confusión para usar esta última abreviatura. De otro lado, la parte algebraicamente imaginaria, la cual es geométricamente construída por una línea recta o radio vector. En general, un Cuaternión tiene una determinada longitud y dirección en el espacio, puede ser llamada la parte vector, o simplemente vector del cuaternión; y puede ser denotada prefijando la característica Vect, o V".* (Crowe, citado por Zea [29], p. 65).

2.1.3.4 Extensión de los cálculos de Grassman y los sistemas vectoriales de Gibbs y Heaviside. Formalización matemática del concepto de Vector.

Con el avance de los sistemas numéricos, específicamente con la invención de los Cuaterniones y el surgimiento del concepto de vector desarrollados por Hamilton, se dan los inicios para el avance del análisis y el álgebra moderna en el siglo XIX. Grandes exponentes y defensores de estas disciplinas comienzan a surgir, es el caso de Hermann Grassman(1809-1877), quien queriendo mostrar el poder de la geometría, genera una estructura algebraica para representar espacios n-dimensionales, retomando el trabajo de Leibniz (la geometría de posición), dando los inicios del análisis vectorial.

Grassman en 1840 con su ensayo sobre la "*teoría de las mareas"*, basado en el estudio de los fenómenos procedentes del mar, incorpora a la reflexión el trabajo con los números negativos y la idea de sumar y restar segmentos de recta dirigidos, se da inicio a los desarrollos conceptuales de los espacios vectoriales.

Los estudios de Grassman estaban basados en el bagaje intelectual de la Grecia clásica, aunque avanzados para su época, permitieron explicar la teoría de la independencia lineal, la noción de subespacio, longitud, desdoblamiento, dimensión, unión e intersección de subespacios, y proyección de elementos en los subespacios, introduce dos productos que denominó exterior e interior, los cuales plasmó en su clásico "*Die lineale Ausdehnungslehre"* (1844), allí hizo explícitos los conceptos de *vector* y de *espacio vectorial*. Así mismo, comienza a dar las bases para la creación del sistema vectorial moderno.

"*La creación de Grassman sobrepasa a la de Hamilton en profundidad y perfección*" (Crowe, citado por Zea [29], p. 66).

Tomando las ideas de Grassman, quien introdujo formalmente las bases del análisis vectorial, a partir de métodos geométricos (suma de vectores, producto escalar y vectorial), y de Hamilton, quien por métodos algebraicos trata a los números complejos como parejas ordenadas de números, hecho que lo llevaría a descubrir a los cuaterniones, Josiah Williard Gibbs (1839-1903) desarrolla un sistema vectorial aplicable a la física de manera sencilla, en sus notas "*Elements of vector analysis"* (1884); para ello, considera la parte vectorial por separado de la parte escalar del cuaternión, ordena y presenta su cálculo vectorial, da inicio con las definiciones de escalar y vector haciendo explicita las diferencias entre dichas cantidades, las cuales se obtienen como clases de equivalencia de magnitudes de distinta naturaleza, como se muestra a continuación:

"*un vector es una cantidad que se considera como poseedora de dirección, así como de magnitud"*

"Un escalar es una cantidad que es poseedora de magnitud pero no de dirección"

Además, propone dos productos, el producto escalar $(A \cdot B)$ y el producto cruz $(A \times B)$ en la notación moderna que hoy conocemos y relaciona cantidades físicas como el desplazamiento, la fuerza, la velocidad o la aceleración, con las denominadas magnitudes vectoriales, las cuales se regirán por las reglas impuestas en la geometría vectorial.

Por otra parte haciendo oposición a los cuaterniones, Oliver Heaviside (1850-1925), desarrolla el análisis vectorial tal y como hoy lo conocemos, convirtiéndolo en el lenguaje que la física estaba buscando décadas atrás. Reformuló las teorías del telégrafo eléctrico creado por Lord Kelvin y del electromagnetismo, sintetizó las ecuaciones de Maxwell en cuatro ecuaciones, haciéndolas más accesibles con simplicidad y belleza.

Con estos descubrimientos los vectores ya no quedan limitados al concepto de segmento dirigido (un objeto que posee magnitud y dirección), o al de pareja ordenada (par ordenado de números reales), sino que además, se extienden sus propiedades para generar conceptos mucho más profundos como el concepto de *espacio vectorial* como una teoría que generaliza el concepto de vector desobjetivizándolo de las representaciones anteriores presentándolas como modelos o ejemplos.

2.2 Referentes Disciplinares

Con el desarrollo, avance y estudio de los vectores, se da paso a la construcción abstracta y formal de la teoría de los espacios vectoriales, permitiendo consolidar a dichos objetos como elementos propios de las matemáticas.

Esta teoría se soporta en tres etapas fundamentales: la primera etapa es la construcción geométrica del segmento de recta orientado proveniente de la geometría de Euclides en la que se hacen explícitos los conceptos de cantidad, magnitud y medida de la cantidad, para luego, desde la física de manera práctica describir los fenómenos presentados en la naturaleza dando paso a la construcción de las magnitudes escalares y vectoriales donde éstas últimas serán representadas gráficamente mediante el uso de dicho objeto denominándolo vector geométrico. En una segunda etapa al examinar el vector geométrico, estableciendo la igualdad entre ellos y fijando su punto inicial, se pasará a describirlos mediante las coordenadas que identifican a su punto final que por conveniencia se referenciarán en un sistema rectangular cartesiano, liberándolo de la geometría euclidiana para definirlo de manera analítica en términos de parejas o ternas de números reales, transformándolo en un elemento propio de la geometría analítica denominado vector coordenado, para finalmente, en la tercera etapa, conectar estos dos sistemas con el concepto de espacio vectorial desligando toda representación para concebirlo de manera abstracta, en el que prevalecerán las operaciones y propiedades que éste puede tener dotándolo de una estructura algebraica.

En consecuencia, en este apartado se destacará la importancia de establecer una correspondencia entre el vector geométrico y el vector coordenado, permitiendo mostrar la interconexión que existe entre la Geometría euclidiana y la Geometría Analítica en la que de manera natural y enriquecedora conllevarán al paso formal donde el vector se considerará como un elemento de un espacio vectorial.

Es por ello, que haciendo un uso reflexivo de los elementos teóricos que consolidan a los ***Vectores*** y los ***Espacios Vectoriales*** como una teoría matemática, se desarrollará el referente disciplinar mostrando los aspectos más importantes y las diferentes presentaciones que hacen algunos textos referidos a ésta temática, que aportarán a la construcción de la secuencia didáctica.

Inicialmente, se darán las bases teóricas referidas a la magnitud escalar y la magnitud vectorial, tomando como base la discusión hecha por Josep Fortuny [14] y de la serie Schaum de Murray R. Spiegel [19].

Así mismo, para desarrollar la teoría de los vectores y los espacios vectoriales se hará acorde con la construcción moderna que Gibbs y Heaviside realizaron; así, que se retoman los textos de Murdoch [18], la serie Schaum de Murray R. Spiegel [19] y el

cálculo de Tom Apóstol [1], en el que se hace una explicación amplia y detallada de estos conceptos, teniendo en cuenta el punto de vista estructural y analítico pasando por el punto de vista geométrico.

Para finalmente, pasar al punto de vista formal y abstracto, mostrando la teoría de módulos como la generalización de los espacios vectoriales tomados del libro "*Algebra moderna*" de Herstein [16], consolidándose toda la teoría que se quiere presentar.

2.2.1 Concepto de Magnitud escalar y Magnitud Vectorial.

Cuando se habla de ***magnitud***, se hace referencia a la cualidad atribuible que pueden tener los objetos o fenómenos de la naturaleza susceptibles de ser cuantificados como resultado de una *medición*. Generalmente, este concepto en la escuela se confunde con los términos de cantidad y medida de la cantidad, ya sea por abuso del lenguaje o desconocimiento, pues se asumen como sinónimas, aun cuando son elementos teóricos distintos.

Matemáticamente, la ***magnitud*** se asocia con un conjunto M de objetos (concretos o abstractos), que se obtiene al definir en un conjunto A no vacío, una relación de equivalencia[4] $(\sim)$ que define la igualdad de los objetos según la cualidad a cuantificar, es decir que M se obtiene como el conjunto cociente de aplicar dicha relación al conjunto A $\left(M = {}^{A}/_{\sim}\right)$; además de definir una operación interna sobre M, denominada adición $(+)$ de la siguiente manera: Para todo $a, b \in M$, existe $a + b \in M$.

Las clases obtenidas mediante la relación de equivalencia $(\sim)$ que pertenecen a $M = {}^{A}/_{\sim}$ se denominarán ***cantidades.***

Cabe aclarar, que la ***magnitud*** es la cualidad común a todos los elementos del conjunto M, mientras que una ***cantidad,*** es la característica que tienen en común todos los elementos de M que los hace iguales entre sí y que a su vez permiten definir a la *magnitud*.

Pero, el concepto de ***magnitud*** varía de acuerdo con el contexto en el que se esté trabajando, por ejemplo la física contempla a la densidad o la temperatura como magnitudes, las cuales no cumplen con la aditividad propuesta inicialmente para la construcción de este concepto, aquí estas son denominadas *magnitudes intensivas*. Por lo tanto, si se tiene en cuenta que estas se pueden clasificar de acuerdo con la operación interna (adición) definida en el conjunto cociente M, estas pueden ser ***magnitudes intensivas*** o ***magnitudes extensivas***[5]*.*

---

[4] Una relación de equivalencia definida en un conjunto no vacío A es una relación que verifica las tres propiedades siguientes:
I. Reflexiva: $a \sim a$, para todo $a \in A$
II. Simétrica: $a \sim b$, si y sólo si $b \sim a$, para todo $a, b \in A$
III. Transitiva: Si $a \sim b$, y $b \sim c$, entonces $a \sim c$, para todo $a, b, c \in A$.

[5] En matemáticas sólo se considera magnitudes a las magnitudes extensivas (aquellas donde está definida la operación de adición entre cantidades)

A su vez, si M es una magnitud extensiva y totalmente ordenada, lo que implica, que entre dos elementos distintos cualesquiera puede definirse una relación de orden $(<)$ como se hace para con los números reales, es decir, que para todo $a, b \in M$ se cumple que $a < b$ o bien $b < a$, entonces M se denominará ***magnitud escalar.***

Así, en las magnitudes escalares es posible definir dos nuevas operaciones: la diferencia $(-)$ y el producto $(\times)$ de una cantidad por números reales positivos como se muestra a continuación:

i. Para todo $a, b \in M$, existe $c \in M$, tal que $c = a - b$, si y sólo si $c + b = a$.
ii. Sea $r \in \mathbb{R}^+$, para todo $u \in M$ existe $a \in M$, tal que $r \times u = a$.

La primera operación subclasifica en dos categorías a las magnitudes escalares, con respecto al minuendo y al sustraendo; en el caso que el minuendo es mayor que el sustraendo, las magnitudes son denominadas ***magnitudes escalares absolutas*** y en el caso contrario serán denominadas ***magnitudes escalares relativas.***

La segunda es una operación externa $\cdot$ con elementos en $\mathbb{R}^+$ incluido el cero, que enuncia que cualquier cantidad pueda ser expresada como el producto de un cierto número por una cantidad, esto permite definir más adelante los conceptos de *medida* y de *unidad*.

La discusión anterior se puede sintetizar en la siguiente definición, tomada del libro de Fortuny [13]:

*"Una **Magnitud**, es un conjunto no vacío M en donde se han definido una relación de orden $(<)$ y una operación interna $(+)$ de modo que, para todo $a, b, c \in M$, se cumple:*

1. *Propiedad asociativa de la suma:* $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. *Propiedad conmutativa de la suma:* $a + b = b + a$
3. *Simplificación de la suma:* $a + c = b + c$ *implica que* $a = b$
4. *Ordenación: para todo* $a, b,$ *se satisface una y sólo una de las proposiciones siguientes*

$$a < b, \text{ ó, } a = b, \text{ ó, } a > b$$

5. *Transitividad del orden:* $a < b$ *y* $b < c$ *implica que* $a < c$
6. *Diferencia:* $a < b$ *si y sólo si, existe un* $c \neq 0$ *tal que* $a + c = b$
7. *Divisibilidad: para cada* a *en* M *y un número natural* n *existe un* b *en* M*, tal que* $a = b + b + b + \cdots + b$ *con* n*-sumandos, denotada* $a = n \cdot b$*, o,* $b = \left(1/n\right) \cdot a$*. De las condiciones anteriores,* M *admite la multiplicación y la división por números naturales y en consecuencia por números racionales positivos* $\mathbb{Q}^+$*.*
8. *Postulado de Arquímedes: Para cada* c *y* $d \in M$ *existe un numero natural* n *tal que* $d < n \cdot c$*."* (Fortuny [14], p.29)

Ahora, surge la necesidad de construir la ***medida de la cantidad***, para ello, se procede de la siguiente manera: si se toma un elemento u de M que cumple que para cada $a \in M$ permite dividir a $\mathbb{Q}^+$, de acuerdo con su orden, en dos conjuntos C_1 y C_2 de la siguiente manera:

$$C_1 = \{q \in \mathbb{Q}^+ / q \cdot u \leq a\}$$

$$C_2 = \{q \in \mathbb{Q}^+ / q \cdot u > a\}$$

Estos dos conjuntos determinan lo que se llama una ***cortadura*** en $\mathbb{Q}^+$. Esta cortadura determina un número real $r \in \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$r = Sup\{q \in \mathbb{Q}^+ / q * u \leq a\} = Sup\ C_1$$

O de manera equivalente

$$r = Inf\{q \in \mathbb{Q}^+ / q * u > a\} = Inf\ C_2$$

De esta manera, r es la cota superior mínima de C_1 o la cota inferior máxima de C_2.

Entonces u se denomina la ***unidad*** de M y por definición r representará la ***medida*** de a con respecto a u. Es decir, el número r puede tomarse como una representación de la cantidad a, que se puede representar por cualquiera de las notaciones que se muestran a continuación:

$$med_u(a) = r;\ m_u(a) = r^{6};\ a = r \cdot u;\ \ r = \frac{a}{u}\ (\textit{Razón entre cantidades})$$

Como consecuencia de lo anterior, se da lo siguiente:

- Si r es un número racional se dice que las cantidades a y u son ***conmensurables*** (esto es, con medida común, se cumple la igualdad $q * u = a$).

  Sea $r = \frac{m}{n}$, se tiene entonces que a contiene m partes o divisiones enésimas de u. Recíprocamente a todo número racional $\frac{m}{n}$ le corresponde a una cantidad, cuya medida es este número (basta con considerar la cantidad $m \cdot {}^{u}/_{n}$), así, entre las cantidades conmensurables con la unidad y los números racionales positivos existe un isomorfismo[7].

- En caso contrario, si r es un número irracional se dice que las cantidades a y u son ***inconmensurables.*** La correspondencia entre las cantidades inconmensurables y los números irracionales no necesariamente tiene que ser biunívoca.

Para que se tenga el isomorfismo de las cantidades con los números reales, se exige el axioma de continuidad, el cual establece:

> *"**Axioma de Continuidad:** Si las cantidades conmensurables con una unidad u de una magnitud se clasifican en dos clases no vacías de modo que toda cantidad de la primera sea menor que toda cantidad de la segunda, hay una cantidad que separa a ambas, es decir, mayor o igual que cualquiera de aquellas y menor o igual que todas éstas, según pertenezcan a una u otra clase. Se dice en este caso, que la magnitud M es continua y entonces $M = \mathbb{R}^+ \cdot u = r \cdot u$."* (Fortuny [14], p. 31)

---

[6] La notación $m_u(a) = r$, es una notación funcional, donde $m_u(a)$ es la imagen de a mediante m_u.

[7] La medida se expresa como el isomorfismo que se puede establecer entre la estructura algebraica y un subconjunto apropiado de números reales.

Es decir, si se establece un isomorfismo entre M y $\mathbb{R}^+$, tal que para cada a de M y fijada una cantidad u, de tal suerte que $m_u(a) = r$, para $r \in \mathbb{R}^+$, la magnitud M construida se denominará ***magnitud escalar continua***, y si la magnitud M se construye sobre $\mathbb{N}$, entonces la magnitud se denominará ***magnitud escalar discreta***.

Geométricamente, las magnitudes escalares pueden ser representadas mediante segmentos tomados sobre una recta a partir de un origen y cuyo módulo o medida de la cantidad quedará determinado por el número real r definido anteriormente que indicará su medida.

De este modo, sobre un conjunto cualquiera no vacío A, es posible definir más de una magnitud extensiva M, como la longitud, la superficie, el volumen o el tiempo; para el desarrollo de este trabajo solamente se considerará la magnitud "***longitud***", que es una ***Magnitud escalar,*** ya que los elementos del conjunto pueden ordenarse totalmente, teniendo sentido la expresión "existen dos segmentos de distinta longitud"; es ***absoluta,*** ya que sólo es cierto hablar, cuando el segmento minuendo es mayor o igual que el segmento sustraendo; además, es posible definir el producto de un segmento por un número real positivo, consolidándola en una ***magnitud escalar continua.***

Sin embargo, con respecto a la noción de ***magnitud vectorial***, ésta no queda determinada completamente mediante un número real r y una unidad de medida arbitraria u, como si pasa con las magnitudes escalares, puesto que se les debe adicionar los conceptos de dirección y sentido, que geométricamente al igual que las magnitudes escalares, se les representa mediante un segmento de recta incluyéndose la dirección, la cual queda bien determinada con la dirección de las rectas paralelas a la recta que contiene a dicho segmento y el sentido, el cual se representa con una punta de flecha quedando determinado por el orden de los puntos final e inicial que lo conforman.

Es así, que la siguiente definición tomada del texto de Schaum [19], determina una forma muy precisa de lo que se puede entender por *magnitud vectorial, como se muestra a continuación*:

> *"Una **Magnitud Vectorial**, es una magnitud física definida no sólo por la cantidad de una magnitud escalar, sino que además está determinada por una dirección y un sentido"* (Schaum [19], p.1).

En otras palabras, una *magnitud vectorial* es aquella que está conformada por cantidades que poseen módulo, dirección y sentido denominadas ***vectores***. Así mismo, se puede afirmar que el módulo de una *magnitud vectorial* es *una magnitud escalar*.

2.2.2 El Concepto de Vector y la Estructura de Espacio Vectorial

2.2.2.1. El vector geométrico y el Sistema de los Vectores libres

Murdoch [18], considera que un vector geométrico es un par ordenado de puntos en el espacio euclidio, es decir, "*si A y B son dos puntos cualesquiera ya sea en ε_2 o ε_3*[8]*, el vector es definido por el par ordenado (A, B) y se denotará por $\overrightarrow{AB}$*"; una representación geométrica que utiliza es identificándolo con el segmento de recta dirigido que va de A hacia B.

Mientras que Schaum [19], considera al Vector geométrico como *"una magnitud cuya determinación exige el conocimiento de un módulo, una dirección y un sentido"* que gráficamente se representa mediante un segmento de recta dirigido.

Las dos definiciones muestran los puntos de vista de cómo los autores abordan el concepto de vector geométrico acorde con la construcción de la teoría que van a exponer; la primera postura parte de un punto de vista analítico en donde define al vector como una pareja de puntos del plano euclideo, para luego relacionarlo con el segmento de recta dirigido, el cual le permitirá realizar sus argumentaciones y justificaciones como ayudas ilustrativas, las cuales irán abonando el camino hacia la construcción de la estructura $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial, mientras que la segunda postura es un punto de vista puramente geométrico, que será a su vez un discurso intuitivo, teniendo en cuenta que el segmento de recta dirigido está construido desde la geometría euclidiana aceptando su existencia como la representación gráfica del concepto Magnitud Vectorial.

Como consecuencia de las definiciones anteriores, los dos autores afirman geométricamente que:

"*Todo segmento de recta dirigido está asociado a un Vector y todo Vector está asociado a un segmento de recta dirigido en ε_2 o ε_3*".

Además de coincidir con la descripción de los elementos que conforman al vector geométrico, como se muestra a continuación:

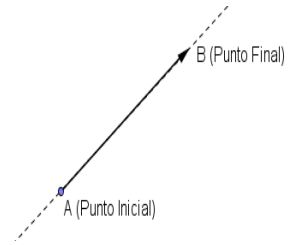


Figura 4: segmento de recta dirigido

El primer punto del par ordenado (A), se llama origen y el segundo (B), extremo del vector; la longitud del segmento $\overline{AB}$, medido en unidades adecuadas, se llama medida o módulo[9] de la magnitud vectorial, denotado $\|\overrightarrow{AB}\| = m_e(\overline{AB})$, su dirección es determinada por la recta que lo contiene, en tanto que, su sentido está dado por la orientación de los puntos, de su origen a su extremo representado mediante una cabeza de flecha, como se muestra en la figura 4.

[8] En el libro de Murdoch, ε_2 o ε_3, los considera como el plano y el espacio sintético que luego asociara al plano y al espacio analítico de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

[9] Cuando se hable del módulo, se hace referencia a la medida de la cantidad dependiendo de la magnitud escalar que define el contexto de la física; por ejemplo, si se habla del desplazamiento el módulo representa la longitud del segmento, si se habla de velocidad el módulo es la rapidez.

Conseguido el objeto geométrico que va a referir acerca de las magnitudes vectoriales –***el segmento de recta dirigido***–, cada uno de los autores establece las relaciones que surgen del comparar dos o más de estos objetos, con respecto a los elementos que los distinguen, en este caso, con respecto al módulo, a la dirección y al sentido.

En los textos consultados, Murdoch [18], es el único autor que presta mucha atención a la dirección y al sentido que pueden poseer dos o más vectores geométricos, exponiéndolo de la siguiente forma:

"*Si dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, implica que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos, por lo tanto, los vectores tendrán la misma dirección; así mismo, se dirá que los vectores tienen el mismo sentido, si los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no se cortan y tienen sentidos contrarios si estos últimos se unen o cortan ilustrándolo cómo se muestra en la figura 5a y 5b*". (Murdoch [18], p. 78)

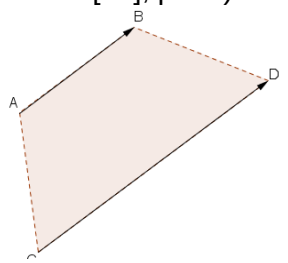


Figura 5a: vectores con igual sentido

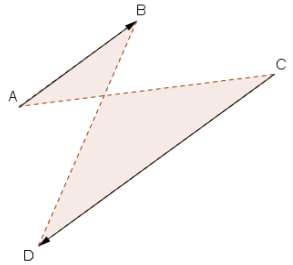


Figura 5b: vectores con diferente sentido

Así, si dos vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no son paralelos, entonces, estos nunca tendrán la misma dirección, ni el mismo sentido, estableciendo la no igualdad entre ellos.

Es claro, que puede surgir la pregunta: ¿cuándo dos vectores que están contenidos en la misma recta poseen el mismo sentido?; teniendo en cuenta las aclaraciones hechas por Murdoch [18], si dos vectores son ***colineales***[10], estos tendrán "*igual sentido o sentidos contrarios*", este hecho esta soportado, en el párrafo anterior, ya que dichos vectores pueden estar contenidos en la misma recta o en rectas paralelas e implícitamente siempre tendrán la misma dirección; además, la orientación queda determinada por el recorrido de los puntos iniciales hacia los puntos finales y ésta la define el orden de la pareja de puntos que los conforman.

De igual modo, l*os* ***Vectores geométricos*** *formados en ε_2 o ε_3,* se puedan deslizar a lo largo de una recta si son colineales o desplazarse paralelamente a sí mismos en el espacio, a estos vectores los autores los denominan ***vectores libres***.

Estudiadas las características que constituyen a los vectores geométricos se procede a definir el concepto de equipolencia entre vectores, donde implícitamente se construye una relación de equivalencia que genera una partición sobre dicho conjunto, haciendo una clasificación entre ellos, obteniendo la siguiente definición:

[10] Los Vectores ***colineales*** son aquellos que están en una misma recta o en rectas paralelas, también son denominados ***deslizantes***.

Equipolencia entre vectores: *Dos vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ *son equipolentes, si y sólo si, tienen el mismo módulo, la misma dirección e idéntico sentido, se denota* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$*. Si además, los vectores son colineales y tienen el mismo punto inicial diremos que los vectores son iguales. Este hecho lo denotamos* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*. Como se muestra en la figura 6.* (Schaum [19], p. 1)

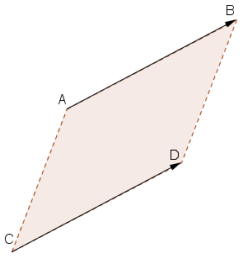


Figura 6: equipolencia entre vectores

Tanto Murdoch [18] como Schaum [19] coinciden en el hecho geométrico, que para reconocer cuando dos vectores son equipolentes, basta con construir el cuadrilátero que resulta al unir sus puntos iniciales por una parte, y sus puntos finales por la otra, y determinar si este es un paralelogramo o no, que finalmente es un artificio que permitirá hacer una distinción entre los conceptos de *Equipolencia* e *igualdad* entre vectores; Schaum [19] hace una reflexión desde un punto de vista geométrico acerca de dichos conceptos y establece que no son sinónimos por el hecho que la cualidad de ser iguales implica que todos y cada uno de los puntos que conforman a los vectores comparados deben coincidir, además, de ser colineales y tener el mismo punto inicial, es decir deben ser vectores ***deslizantes***[11], mientras que, para ser equipolente basta con que los vectores sean los lados opuestos de un paralelogramo.

La construcción de los conceptos de equipolencia como de igualdad parten de las relaciones de equivalencia que generan las particiones en el conjunto de los vectores libres, como la relación de congruencia entre segmentos y paralelismo entre rectas.

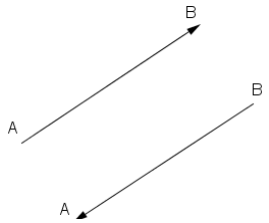


Figura 7: vectores opuestos

Por otro lado, también definen de manera geométrica el vector opuesto al vector $\overrightarrow{AB}$ como un vector que tiene el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, denotado $\overrightarrow{BA}$ que por abuso de la notación, algunos textos (incluidos los consultados) lo presentan como $-\overrightarrow{AB}$ haciendo la analogía con el opuesto aditivo de los números reales.

Con los conceptos construidos y las aclaraciones hechas, se procede a construir la estructura algebraica del Sistema de los ***vectores libres*** o geométricos estableciendo una analogía con los números reales que por lo general desde la física son denominados *escalares*; la presentación del libro de Schaum [19], realiza todo el tratamiento de los vectores basado sobre un conjunto S (que para Murdoch [18] es ε), el cual tendrá como elementos a los segmentos de recta orientados, en él está definida la adición, la diferencia entre vectores y el producto de un escalar por un vector, de forma geométrica, mientras que Murdoch [18] pasa directamente a la presentación analítica coincidiendo con la presentación hecha por Tom Apóstol [1], tomando la representación geométrica de estos hechos como ejemplos particulares de la teoría que se encuentran desarrollando, pasando directamente al manejo de las n-uplas ordenadas de números reales, para luego interconectarlas como elementos de un espacio vectorial.

Ahora bien, haciendo uso del concepto de equipolencia entre vectores se define la adición de vectores geométricos, como la presenta Schaum [19]:

---

[11] Dos vectores deslizantes se dicen iguales cuando tienen igual modulo, la misma dirección, el mismo sentido y además determinan la misma recta.

Adición entre vectores geométricos. *La adición también denominada la resultante de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es otro vector $\overrightarrow{EF}$, obtenido de trasladar el origen de $\overrightarrow{CD}$ al extremo de $\overrightarrow{AB}$ y uniendo el origen de $\overrightarrow{AB}$ al extremo de $\overrightarrow{CD}$, como se muestra en la figura 8. Analíticamente se expresa:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ (Schaum [19], p. 2)

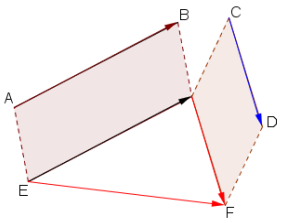


Figura 8: adición de vectores

Es un hecho, que la adición entre vectores, resulta de la traslación de dos vectores geométricos arbitrarios en ε_2 (análogo para ε_3) que no poseen la misma dirección, el cual se hará corresponder con la diagonal del paralelogramo que parte del origen común de estos mediante una adecuada traslación, así mismo, se dirá que la adición geométrica entre vectores cumple la regla del paralelogramo descrita por Newton y conocida desde los tiempos de Arquímedes, siendo de suma importancia en la física.

Para demostrar que efectivamente la adición entre vectores cumple la regla del paralelogramo, se parte fijando a dos vectores con distinta dirección a un origen común y se verifica que la suma está bien definida, como lo muestra Murdoch ([18], p.86) mediante el siguiente resultado, el cual lo enuncia como un teorema y un corolario:

Teorema 1*: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son vectores con el mismo origen A, entonces $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ donde D es el cuarto vértice del paralelogramo del cual $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son lados adyacentes.*

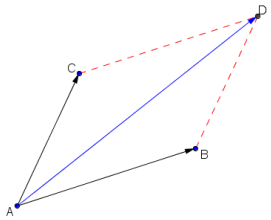


Figura 9: Regla del paralelogramo

Demostración. Sea el paralelogramo $ABCD$ como se muestra en la figura 2.9; por definición de paralelogramo y equipolencia de vectores se tiene que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, luego, se cumple que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Colorario 1. *Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ son vectores que tienen el mismo origen, entonces*

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

Con el anterior resultado, se permite definir la resta o sustracción de vectores como sigue:

Diferencia entre vectores geométricos. *La diferencia de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es otro vector $\overrightarrow{RS}$, representado analíticamente como $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, que sumado a $\overrightarrow{CD}$ se obtiene el vector $\overrightarrow{AB}$.*

Es decir, que para restar dos vectores, debemos encontrar un vector $\overrightarrow{CD}$ que sumado con $\overrightarrow{RS}$ dé como resultado al vector $\overrightarrow{AB}$, es decir, que si sumamos al vector $\overrightarrow{AB}$ (minuendo) el opuesto del vector $\overrightarrow{CD}$ (sustraendo), obtenemos el vector $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD})$, mostrando de manera intuitiva que la resta es un caso particular de la suma.

En el caso que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes o iguales, el vector $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = 0$, se denominara el ***vector nulo*** o ***vector cero***, representado por $\vec{0}$. Es

un vector donde el origen coincide con su extremo, tiene módulo nulo, y no se le determina ni dirección, ni sentido. Cabe aclarar que este vector se construye para dar consistencia a la estructura algebraica del sistema de los vectores libres.

A continuación, Schaum [19], relaciona el conjunto de los números reales y el conjunto S de los vectores geométricos mediante una operación externa denominada el producto de un escalar por un vector, asumiendo que una magnitud vectorial se puede multiplicar por una magnitud escalar como sigue:

Producto de un escalar por un vector geométrico. *Sean m y $\overrightarrow{AB}$ un escalar y un vector respectivamente, se define el producto del escalar m por el vector $\overrightarrow{AB}$, como otro vector $m\overrightarrow{AB}$, que posee la misma dirección que $\overrightarrow{AB}$ pero con módulo $|m|$ veces el modulo de $\overrightarrow{AB}$ y un sentido igual si m es positivo, nulo si m es cero u opuesto si m es negativo.* (Schaum, [19], p. 2)

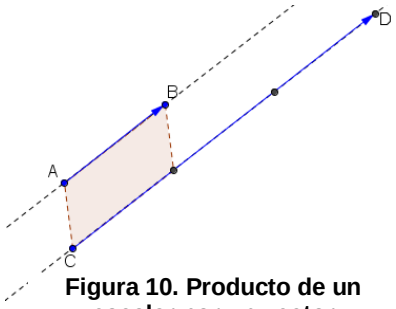


Figura 10. Producto de un escalar por un vector

Como consecuencia, el producto de un escalar por un vector da como resultado otro vector con la misma dirección que el primero, es decir paralelo a dicho vector, donde el sentido dependerá del escalar bajo el cual se está multiplicando al vector inicial, este resultado Murdoch [18] lo sintetiza en el siguiente corolario:

Corolario 2. *Dos vectores no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos o colineales si, y sólo si, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$* para $k \neq 0$, *y son paralelos, tienen la misma dirección y sentido si, y sólo si, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ cuando $k > 0$.* (Murdoch, [18], p.87)

Con las dos operaciones definidas sobre el conjunto de los vectores libres S y los resultados obtenidos, se verifica geométricamente que los vectores libres con respecto a la adición y al producto por escalar determinan lo que más adelante se llamará estructura de espacio vectorial, como lo presenta el texto de Schaum ([19], p. 2):

Sea S el conjunto de los vectores libres, donde se han definido la adición entre vectores denotada $(+)$ y el producto por escalar, y sean $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ vectores de S, m y n escalares (números reales) se cumple que:

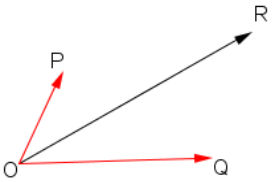
- Propiedad Asociativa de la adición $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}\right)$
- Propiedad Conmutativa de la adición $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
- Elemento Neutro de la adición $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
- Elemento inverso de la adición $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$
- Propiedad Asociativa del producto por un escalar $m\left(n\overrightarrow{AB}\right) = (mn)\overrightarrow{AB}$
- Propiedad Conmutativa del producto por un escalar $m\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}m$
- Propiedad distributiva del producto de un vector respecto a la adición entre escalares
$$(m+n)\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB}$$
- Propiedad distributiva del producto por un escalar respecto a la adición entre vectores
$$m\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = m\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{CD}$$

2.2.2.2 Vectores fijos y el Vector de posición.

Hasta este momento se ha hablado del conjunto de los vectores geométricos como segmentos de recta dirigidos que se deslizan libremente por ε_2 o ε_3, en los cuales se han definido dos operaciones básicas las cuales cumplen una serie de propiedades geométricas que a su vez determinan una estructura algebraica (la estructura de espacio vectorial) como lo presenta Schaum [19]. En este apartado se toma como referencia el trabajo hecho por Murdoch [18], quien centra sus esfuerzos en construir el concepto de *vector fijo* y de *posición* desde el inicio de la presentación del tema, tomando como base el concepto de vector geométrico para poder más adelante dar el paso en la construcción del vector analítico.

Inicia con la restricción de fijar un punto O de ε y sobre él realiza todo el estudio y construcción respectiva.

Para ello, considera el conjunto ε_2 (plano euclideo) y en él, escoge el vector libre $\overrightarrow{AB}$, el cual fija al punto O encontrando un vector equipolente $\overrightarrow{OR}$; sobre dicho punto se construyen dos vectores libres con distinta dirección $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, como se muestra en la figura 11.



11. construcción geométrica de un vector fijo.

Un resultado que se logra entrever, es la similitud existente entre la adición de vectores geométricos y la construcción geométrica anterior, ya que el vector $\overrightarrow{OR}$ es la diagonal de un paralelogramo, obtenido mediante la adición de los múltiplos escalares de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, reafirmando que:

"*Cualquier vector $\overrightarrow{OR}$ puede ser expresado en términos de los múltiplos escalares de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$*"

Esta situación, se soporta en el hecho que si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{XY}$ son arbitrarios con distinta dirección y el punto O de ε_2 es fijo, entonces al aplicar la definición de equipolencia entre vectores, se puede encontrar vectores que tengan el mismo punto inicial O de ε_2, es decir, que existen vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ equipolentes a los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, y $\overrightarrow{XY}$ respectivamente; además, si se trazan las rectas que contienen a los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y por el extremo de $\overrightarrow{OR}$ (el punto R) se trazan rectas paralelas a las direcciones de estos vectores se forma el paralelogramo $\boxdot\, OERF$ cortando a dichas rectas en los puntos E y F, como se muestra en la figura 12, en la cual se puede deducir que:

Si $\|\overrightarrow{OP}\| = p$, $\|\overrightarrow{OQ}\| = q$, entonces, por la definición de módulo y de producto de un vector por un escalar, se tiene que existen escalares x, e y arbitrarios, tales que:

$\|\overrightarrow{OE}\| = |x|\|\overrightarrow{OP}\| = |x \cdot p|$, luego $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{OP}$
$\|\overrightarrow{OF}\| = |y|\|\overrightarrow{OQ}\| = |y \cdot q|$, luego $\overrightarrow{OF} = y\overrightarrow{OQ}$

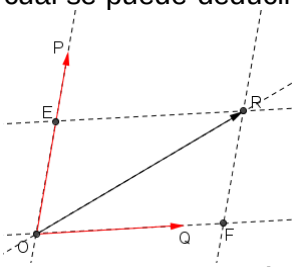


Figura 12. Descomposición lineal de un vector en el plano.

Inmediatamente, por la definición de adición de vectores geométricos tenemos que:

$$\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{XY}$$

Que es la expresión pedida. Los vectores $x\overrightarrow{OP}$ e $y\overrightarrow{OQ}$ serán denominados las ***componentes vectoriales*** o ***vectores componentes*** de $\overrightarrow{OR}$; de aquí se desprende el esfuerzo por encontrar a x e y de manera única para los vectores dados; los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ serán los vectores en la base del sistema de coordenadas definido por sus direcciones en el plano que determinan.

De igual forma, Murdoch [18] presenta el caso para los vectores geométricos en ε_3, es decir, si $\overrightarrow{OR}$ es un vector geométrico de ε_3, existen vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ de ε_3, equipolentes a los vectores trasladados $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OS}$, cuyo punto inicial y fijo es O. Por el extremo R de $\overrightarrow{OR}$ se trazan planos paralelos, respectivamente, a los que determinan $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OS}$ (expuesto en el párrafo anterior), formándose el paralelepípedo $QMRVUTPO$ de donde se deduce:

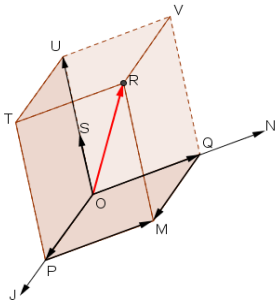


Figura 13. Descomposición lineal de un vector en el espacio

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OJ}\| &= |x|\|\overrightarrow{OP}\| = |x \cdot p| \\ \|\overrightarrow{ON}\| &= |y|\|\overrightarrow{OQ}\| = |y \cdot q| \\ \|\overrightarrow{OU}\| &= |z|\|\overrightarrow{OS}\| = |z \cdot r| \end{aligned}$$

Por la adición de vectores tenemos que:

$$\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{MQ} + y\overrightarrow{PM} + z\overrightarrow{OJ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} + z\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OQ} + z\overrightarrow{OS}$$

De la expresión se desprende que x, y, z son únicos, las componentes $x\overrightarrow{OP}$, $y\overrightarrow{OQ}$, $z\overrightarrow{OS}$ son las componentes vectoriales de $\overrightarrow{OR}$.

Las expresiones obtenidas en los resultados anteriores para ε_2 y ε_3, serán denominadas ***combinaciones lineales*** del vector $\overrightarrow{OR}$, respectivamente.

Formalmente:

"Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ de ε_2, y x e y escalares, decimos que el vector geométrico $\overrightarrow{XY} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$ es una ***combinación lineal*** *de los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$".*

Análogamente para ε_3, el vector geométrico $\overrightarrow{XY} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} + z\overrightarrow{EF}$ es una ***combinación lineal*** *de los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$.*

De las construcciones geométricas hechas y de la definición de *combinación lineal*, nace el teorema denominado de la base, que Schaum [19] presenta como un ejercicio resuelto, el cual se enuncia de la siguiente manera:

***Teorema 2: Teorema de la base**. Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ vectores geométricos en un mismo plano, no colineales, no paralelos y diferentes del vector cero, entonces cualquier otro vector geométrico $\overrightarrow{XY}$ de dicho plano puede expresarse de manera única como la combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, es decir, $\overrightarrow{XY} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$, para x, y escalares.* (Schaum, 1970, p.7)

Por la forma como el autor ha definido las operaciones de adición de vectores y el producto de un vector por un escalar, es evidente que si los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{XY}$ pertenecen a ε_2 o ε_3, entonces cualquier combinación de ellos también pertenecerá a ε_2 o ε_3 respectivamente.

Además, del concepto de la *combinación lineal* de vectores geométricos, se desprenden los conceptos de ***dependencia** e **independencia lineal***, los cuales tienen interpretaciones geométricas que refieren respecto a la dirección de dos o más vectores en el plano o en el espacio (en los textos consultados dichas interpretaciones son omitidas, por lo tanto posiblemente carecen de importancia o de significado al ser enseñados).

> ***"**Dos vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **linealmente dependientes** si y sólo si existe un escalar $k \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ (es decir, si uno de ellos es múltiplo escalar del otro). En caso contrario, diremos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **linealmente independientes**".*

Como consecuencia de la definición, si los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son linealmente dependientes, entonces estos tendrán la misma dirección, puesto que estos o son colineales o son paralelos, cumpliéndose la igualdad $\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{CD} = 0$, para un escalar k arbitrario distinto de cero; por lo tanto, uno de los vectores será múltiplo escalar del otro, así mismo, si la igualdad es diferente a cero, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ serán linealmente independientes, es decir, que los vectores tendrán direcciones distintas y en consecuencia pertenecerán a rectas distintas no paralelas.

En el caso de ε_3, la dependencia lineal se da cuando tres vectores pertenecen al mismo plano y uno de ellos se puede obtener como combinación lineal de los otros dos. En caso contrario los vectores serán linealmente independientes.

Para continuar la construcción que se está presentando, surge la necesidad de la definición de vector unitario y la reflexión de algunas de sus consecuencias:

> *"Un vector cuyo módulo es la unidad se llama **vector unitario.** Además si $\overrightarrow{AB}$ es un vector cuyo módulo es distinto de cero, entonces el vector $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ será un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$."*

Murdoch [18] con la definición del vector unitario asociada a la definición de combinación lineal de un vector $\overrightarrow{XY}$, obtiene el caso particular de la representación de un vector cualquiera (en el plano o en el espacio) mediante la combinación lineal de sus vectores unitarios, así, si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son tres vectores geométricos fijos en el mismo punto de origen y unitarios los cuales se simbolizan como $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ respectivamente, mutuamente

perpendiculares, entonces cualquier vector $\overrightarrow{XY}$ se puede expresar de manera única, en términos de dichos vectores, es decir, $\overrightarrow{XY} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} + z\overrightarrow{EF} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$**.** (Si $\hat{\boldsymbol{k}} = \vec{0}$, el problema se reduce al conjunto de vectores de ε_2). El único propósito de hacer uso de los vectores unitarios es indicar la dirección en el espacio de dicho vector en un sistema de referencia.

Además, es importante aclarar que todo vector unitario $\overrightarrow{AB}$ se puede expresar como el producto de un vector unitario $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ de la misma dirección y sentido que aquel multiplicado por el módulo de $\overrightarrow{AB}$, es decir que $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\hat{\boldsymbol{\imath}}$**,** que representa el producto de un escalar por un vector.

Construidos los vectores $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ de ε_3, perpendiculares dos a dos**,** se ha construido un sistema de vectores unitarios que tiene por direcciones las correspondientes a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio X, Y, Z, (si $Z = 0$, entonces el problema se reduce al plano coordenado) con sentidos positivos, a su vez, todo vector geométrico que tenga fijo su punto inicial en el origen de este sistema se denominará ***vector anclado*** *o* ***vector de posición***[12], así mismo, se asociará ε_2 con $\mathbb{R}^2$ y ε_3 con $\mathbb{R}^3$ (es decir, el plano euclideo con el plano coordenado o analitico).

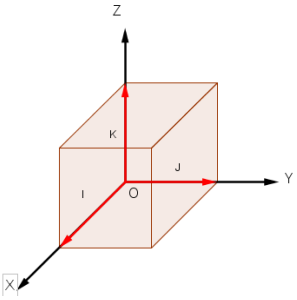


Figura 14. Sistema de vectores unitarios

2.2.2.3 El vector Coordenado y el Sistema de los Vectores analíticos*.*

Como ya se dijo en el apartado 2.2.2.1, Tom apóstol [1], da relevancia a la construcción del concepto de vector como un punto en un sistema de coordenadas rectangulares, identificándolo con una n-upla de números reales, no presenta interconexión alguna entre las representaciones analítica y geométrica del concepto, parte de la abstracción, su visión es racional aunque no formal, enfocada a la resolución de problemas que involucren al espacio n-dimensional, (para $n > 3$) y al estudio de propiedades comunes a los espacios de una, dos, tres o más dimensiones, que para él: "*Esto está de acuerdo con el espíritu de la matemática moderna que facilita el desarrollo de métodos de amplias síntesis para atacar distintos problemas de manera simultánea*"(Apóstol [1], p.547). Su visión no es geométrica, hace uso de ella para establecer algunas interpretaciones de conceptos que le permiten su aprehensión con mayor facilidad o le permiten construir otros conceptos a partir de dichas interpretaciones.

Mientras que Schaum [19] aunque toma un punto de vista intuitivo, hace un uso indistinto entre los vectores libres y los vectores coordenados dependiendo del uso más práctico que le permita resolver los ejercicios propuestos en su texto.

---

[12] Para obtener la unicidad del *vector anclado* y diferenciarlo del *vector libre,* la definición de igualdad es más exigente, ya que no basta con tener las características propias de la equipolencia entre estos entes, sino que, además se debe adicionar la característica de tener el mismo origen (punto inicial), es un vector libre se reduce un vector fijo para luego anclarlo a un sistema de referencia, así mismo, todos los vectores libres o deslizantes del plano iguales con un vector fijo dado se reducirán a uno y sólo un vector anclado que los representará.

Sin embargo, Murdock [18] es un autor que hace el cambio de representación del *vector anclado* al *vector coordenado*, desligando al *vector geométrico*, que le permitirán entrar a los espacios n-dimensionales de manera natural, su visión al igual que la de Apóstol [1] no es geométrica, simplemente hace uso del segmento dirigido como ayuda visual que le permitirá mostrar algunos resultados de su construcción. Su trabajo parte con la incorporación del sistema coordenado mediado de los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ de ε_3, denominada por algunos textos como la ***descomposición canónica*** del vector de posición (como ya se ha mostrado en el apartado anterior 2.2.2.2) para generar el concepto de base, y con él, la creación del ***vector de posición*** donde el punto inicial está anclado al origen de dicho espacio o plano cartesiano (según sea el caso), como se muestra a continuación:

> *"Una **base** es un sistema de coordenadas, y la expresión univoca para un vector como una combinación lineal de vectores base no es otra cosa que la descomposición del vector en sus componentes a lo largo de los diferentes ejes coordenados".*

Así pues, por la definición de base, "las coordenadas de un vector son determinadas unívocamente por el sistema de coordenadas en el que esté definido".

En los sistemas coordenados especialmente en el plano y en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, los puntos son parejas o ternas ordenadas de números reales. Así, si se toma el sistema de referencia ortogonal $\mathbb{R}^2$, es decir, se toma el plano cartesiano, con unidades iguales sobre los ejes y el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, se tiene que dicho vector tendrá como inicio al punto A, cuyas coordenadas asignadas serán (x_1, y_1) y como extremo a B cuyas coordenadas asignadas serán (x_2, y_2) de manera única, este resultado presentado por Murdoch [18], se obtiene del hecho de que existen los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de posición los cuales se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, es decir que $\overrightarrow{OA} = x_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_1\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\overrightarrow{OB} = x_2\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_2\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ que serán denotados o reescritos en la forma analítica (a, b) es decir, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) = A$ y $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2) = B$.

De igual manera, se puede obtener a $\overrightarrow{OB}$ como la adición de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$, es decir, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, descomponiéndolo como una combinación lineal:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_2\hat{\boldsymbol{\jmath}}) - (x_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_1\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = (x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Obteniendo una nueva representación de los vectores, como parejas ordenadas de números reales, cabe aclarar que dicha igualdad presenta el paso de un sistema a otro, pues se trata de objetos diferentes (geométricos a analíticos).

Por lo tanto, si hacemos una traslación[13] del sistema de referencia al punto A como nuevo origen, se obtendrán, las ecuaciones cartesianas que lo definirán $x' = x - x_1$, e,

[13] En la geometría analítica se entiende como ***traslación*** como el cambio de los ejes coordenados OX, OY a los nuevos ejes $O'X'$, $O'Y'$ y sus ecuaciones representativas son $x' = x - a$, e, $y' = y - b$, que significa mover el punto P de coordenadas (x, y), a unidades horizontalmente y b unidades verticalmente.

$y' = y - y_1$. Por lo tanto, las nuevas coordenadas del punto B serán $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, coincidiendo en el resultado obtenido en el párrafo anterior.

Por la definición de igualdad[14] geométrica, cualquier vector $\overrightarrow{CD}$ es igual $\overrightarrow{AB}$ si tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, consecuentemente si cumple también las ecuaciones anteriores, que nos dicen que las diferencias $x_2 - x_1, y_2 - y_1$, obtenidas extrayendo las coordenadas en ese orden, son las mismas para dos vectores analíticos iguales cualesquiera, estableciendo un importante resultado presentado por Murdoch (1980, p. 79 y 80) enunciado a continuación:

Teorema 3: *Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(u_1, v_1)$ y $D(u_2, v_2)$ son puntos de ε_2 los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales, si y sólo si, $x_2 - x_1 = u_2 - u_1$, $y_2 - y_1 = v_2 - v_1$.*

Demostración*.* Que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea igual al vector $\overrightarrow{CD}$, implica que se cumple la igualdad de las diferencias de coordenadas de los puntos iniciales y los puntos finales de cada uno de los vectores y recíprocamente. Para ello, si se expresan los vectores $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{CD}$ como combinaciones lineales, se tiene que:

$$(x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (u_2 - u_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (v_2 - v_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}},$$

Por la igualdad de pareja ordenada tenemos que $(x_2 - x_1) = (u_2 - u_1)$ y $(y_2 - y_1) = (v_2 - v_1)$, ahora para verificar que los módulos son iguales basta con aplicar fórmula de la distancia[15] de dos puntos dados, si las diferencias de coordenadas son iguales, entonces $d(\overline{CD}) = d(\overline{AB}) = r$, que era lo que se quería demostrar. Se puede concluir que vectores iguales tienen componentes rectangulares iguales.

El teorema 3, muestra que un vector $\overrightarrow{AB}$ esta completamente determinado por la forma coordenada de los números $x_2 - x_1, y_2 - y_1$, obtenida sustrayendo a las coordenadas de su origen las coordenadas de su extremo, estos números reciben el nombre de ***componentes Rectángulares del vector*** $\overrightarrow{AB}$, lo cual se escribirá

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Es claro, que con los resultados obtenidos anteriormente, el vector que inicialmente era libre, al anclarlo al origen del plano coordenado es definido ahora mediante el uso de parejas de parejas ordenadas de números reales, que lo establecerán finalmente de manera algebraica o analítica, transformándolo a lo que denominaremos el ***vector coordenado***.

Como un caso particular, si se toma el vector $\overrightarrow{AB}$ igual al vector $\overrightarrow{OP}$, cuyo punto inicial es el origen del plano coordenado y cuyo punto final P tiene coordenadas (x, y), se tiene

---

[14] En este apartado tomaremos la equipolencia y la igualdad se vuelven sinónimas, pues todo vector fijo quedará representado por un solo un vector anclado.

[15] El autor hace referencia a la distancia, hace referencia a la distancia en un sistema rectangular, cuya fórmula para dos puntos en el plano se define como $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

que, si $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, entonces las coordenadas del primero son iguales a las coordenadas del segundo respectivamente, es decir, $(x - 0, y - 0) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y en consecuencia las coordenadas de P serán $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Este hecho se resume en el siguiente teorema, presentado en el texto de Murdoch ([18], p.80):

Teorema 4. *Todo vector $\overrightarrow{AB}$ es igual a un vector $\overrightarrow{OP}$ con punto inicial en el origen del plano cartesiano y cuyas componentes son las componentes de $\overrightarrow{AB}$ como coordenadas de su extremo, así, si P es el punto (x, y), entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$.*

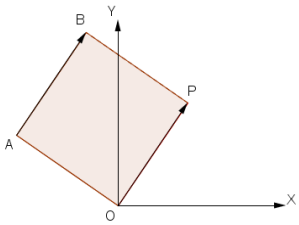


Figura 15: vector coordenado

Este resultado nos permite apreciar con toda claridad, que podemos ***anclar*** al vector $\overrightarrow{AB}$ encontrando un vector igual $\overrightarrow{OP}$ con punto inicial en el origen; por otra parte, como los vectores definidos en el primer apartado, son parejas de parejas ordenadas de puntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, con esta nueva construcción los vectores reducen sus componentes, hasta convertirlas en las componentes rectangulares de un punto, entendidas estas últimas como parejas o ternas de números reales. De igual modo, esta construcción permite definir al vector de manera única.

Así, "*cada vector geométrico del plano o el espacio con origen en el origen del plano o espacio coordenado, determina una pareja o terna de números reales y cada punto o terna de números reales del plano o espacio cartesiano determina un vector geométrico de manera única*".

Para realizar la distinción entre el punto y el vector coordenado los cuales pueden estar presentes en un mismo contexto se utilizan las notaciones propuestas por Murdoch [18], la primera notación (x, y, z) hará referencia al punto P y la segunda notación $[x, y, z]$ hace referencia al vector cuyo punto final es P y extremo inicial en el origen $(0,0,0)$ que se denominará notación matricial, aunque refieren al mismo objeto matemático se hace la distinción de acuerdo al contexto.

Otro resultado importante, es la correlación que existe entre el módulo del vector geométrico, y la norma o distancia del vector coordenado, cuya medida queda bien definida mediante el número real r, obtenido a partir de la fórmula de la distancia entre puntos del plano cartesiano. Por lo tanto $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = r$.

Una de las consecuencias de esta nueva presentación, es que las propiedades del vector geométrico se pierden como la dirección, pues ésta se vuelve única y se determina por la recta que pasa por el origen del sistema que contiene al vector coordenado, que se rescata mediante la definición del coseno director el cual reorientará al segmento de recta dirigido y por ende al punto coordenado; además, el módulo se reduce a la distancia pitagórica entre puntos, y el sentido lo determinará el sistema coordenado.

Los textos de física Universitaria como Serway [27], toman la dirección de un vector en el plano o en el espacio cartesiano mediante el ángulo θ construido con el eje positivo del eje de las equis y el vector, para verificarlo simplemente se toma un sistema de referencia ortogonal en ε_3 que denominan espacio coordenado $\mathbb{R}^3$ y se añade el

concepto de coseno director el cual es una forma de orientar al vector a partir de las direcciones que se obtienen de la intersección entre los distintos planos coordenados como lo presenta Murdoch [18].

Es decir, dado $\overrightarrow{AB}$ un vector en $\mathbb{R}^3$, con origen $A(x_1, y_1, z_1)$ y extremo $B\,(x_2, y_2, z_2)$, haciendo el análisis que se realizó para los vectores en $\mathbb{R}^2$, las ecuaciones que lo definen son $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$, $z' = z - z_1$, en particular las nuevas coordenadas de B son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$[16].

Al graficarlo se tiene que, los tres ángulos $\measuredangle BAX, \measuredangle BAY, \measuredangle BAZ$, que se forman con el vector $\overrightarrow{AB}$ y los ejes X, Y, Z serán llamados ***ángulos directores del vector*** y se representan por α, β y λ Como se muestra en la figura 16.

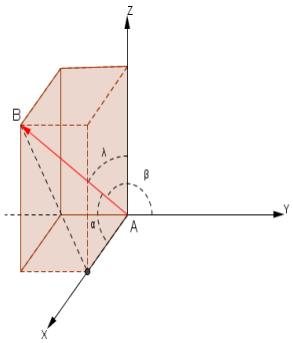


Figura 16: cosenos directores de un vector en el espacio

Así, si dos vectores en $\mathbb{R}^3$, tienen la misma dirección y el mismo sentido, implica que tienen los mismos ángulos directores. Además, es claro que $0° \leq \alpha \leq 180°$, $0° \leq \beta \leq 180°$, $0° \leq \lambda \leq 180°$.

Como un ángulo comprendido entre 0° y 180° está determinado en forma única por su rotación, la orientación de un vector que finalmente se dirá que es la dirección del vector y está definida por los cosenos de sus tres ángulos directores. Los cuales reciben el nombre de ***cosenos directores del vector***.

Para obtenerlos, se parte de la proyección[17] de B sobre los ejes, así, sobre el eje X tiene coordenadas $(x_2 - x_1, 0, 0)$ con relación a los ejes trasladados y se ve que $x_2 - x_1$ es positivo, nulo o negativo, según que $\alpha < 90°$, $\alpha = 90°$, o $\alpha > 90°$, por consiguiente si r es la medida de $\overrightarrow{AB}$, y el triángulo BAC de la figura es rectángulo en A, se tiene que $x' = x_2 - x_1 = r\cos\alpha$ o $\cos\alpha = \frac{x'}{r}$; análogamente proyectando B sobre los ejes Y y Z se encuentra que:

$$y' = y_2 - y_1 = r\cos\beta \text{ o } \cos\beta = \frac{y'}{r}$$
$$z' = z_2 - z_1 = r\cos\lambda \text{ o } \cos\lambda = \frac{z'}{r}$$

Por la definición de igualdad tenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si tienen el mismo módulo r y las diferencias obtenidas extrayendo las coordenadas en ese orden son iguales, lo que implica de paso que los cosenos directores definidos anteriormente deben ser los mismos.

Aplicando la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$, a las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, se tiene que:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

---

[16] En ε_2 la diferencia $z_2 - z_1 = 0$, es decir, la componente $z = 0$.

[17] Cuando se habla de la proyección, hace referencia a la proyección de un punto sobre una recta, definida como la perpendicular bajada del punto a dicha recta.

Además, por la definición de coseno director tenemos:

$r^2 = r^2(cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\lambda) = x'^2 + y'^2 + z'^2$ dividiendo la expresión entre r^2 se tiene que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\lambda = 1$, así, se puede afirmar que:

Teorema 5. *La suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier vector $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^3$ es igual a 1.*

Ahora, si de las ecuaciones:

$x' = r\,cos\,\alpha$, donde $x' = x_2 - x_1$
$y' = r\cos\beta$, donde $y' = y_2 - y_1$
$z' = r\,cos\,\lambda$, donde $z' = z_2 - z_1$

Dividiendo sus componentes por la medida r del vector $\overrightarrow{AB}$, obtenemos:

Teorema 6. *El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes son $[x', y', z']$ es $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ y sus cosenos directores son $\frac{x'}{r}, \frac{y'}{r}, \frac{z'}{r}$.* (Murdoch [18], p.81)

Consecuentemente si $[x, y, z]$ tiene magnitud r, entonces $\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right]$ es un vector unitario; así, se establece lo siguiente:

> *"Los cosenos directores de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las componentes de un vector unitario que tiene su misma dirección y sentido".* (Murdoch [18], p.82)

Todos los vectores nulos se consideran iguales porque tienen componentes nulas; se representan por 0 y se escriben $0 = [0, 0, 0]$. Este vector analítico nace de la necesidad algebraica para complementar y dar consistencia a la teoría; además de poder establecer una analogía con el vector geométrico $\vec{0}$.

Con la interpretación que cada vector en el sistema coordenado rectangular está determinado de manera única por las componentes o números reales de la pareja ordenada que conforma a sus puntos finales, se puede entonces prescindir de la representación gráfica quedándose con la representación analítica o algebraica que adquieren estos objetos.

Teniendo en cuenta los resultados presentados en este apartado, se procederá a analizar la estructura algebraica de manera analítica como la presentan Murdoch [18] y Apóstol [1], donde tanto la suma entre vectores tomada de la adición de los vectores geométricos y el producto por escalar son parejas o ternas de números reales. De igual manera se establecerá la analogía de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, tomando como referencia que si $z = 0$, entonces $[x, y, z] = [x, y, 0] = [x, y]$.

De la construcción analítica se establecerán los teoremas y definiciones necesarias para construir la operatoria de los vectores como se hizo para los vectores geométricos, que así mismo establecerán una estructura de espacio vectorial, como sigue: (Murdoch [18], p.86 y 87).

Suma de vectores analíticos: *Sean* $X_1 = [x_1, y_1, z_1]$ *y* $X_2 = [x_2, y_2, z_2]$ *dos vectores analíticos cualesquiera de* $\mathbb{R}^3$*; se define la suma* $X_1 + X_2$ *como el vector:*

$$X_1 + X_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$$

La suma de vectores obedece las mismas reglas básicas que la de números reales; presentadas a continuación, en ellas X_1, X_2, X_3 y X_4 representan vectores arbitrarios.

A1. *La suma de dos vectores cualesquiera es un vector definido de forma única.*
A2. *Ley conmutativa de la suma de vectores:* $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$.
A3. *Ley asociativa de la suma de vectores:* $(X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$
A4. *Vector nulo. Existe un vector* O *tal que* $X + O = X$ *para todo vector* X.
Así se tiene $X + O = O + X$ para todo vector en *X.*
A5.*Todo vector* X *tiene un opuesto* $-X$ *tal que* $X + (-X) = O$.[18]
El vector coordenado $[-x, -y, -z]$ se llama el opuesto[19] de X, y se denota por $-X$
Se define la diferencia de $X_1 - X_2$ como el vector $X_1 + (-X_2)$ es decir,

$$X_1 - X_2 = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$$

El siguiente teorema relaciona la interpretación geométrica de la adición con la interpretación analítica de la suma de los vectores

Teorema 7. *Si* A, B *y* C *son tres puntos cualquiera, entonces* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Demostración*. Sea* A el origen de un sistema de referencia rectangular y sean los puntos B y C con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), respectivamente, entonces se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = [x_1, y_1, z_1]$$
$$\overrightarrow{BC} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$
$$\overrightarrow{AC} = [x_2, y_2, z_2] = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Ahora se procede a definir el producto por escalar.

Producto de un vector analítico por un escalar: *Sea* $X = [x, y, z]$ *un vector analítico y* k *un número real (escalar). El vector* $[ky, kx. kz]$ *será denominado el producto del vector* X *por el escalar* k *se le representa por* kX.

$$kX = [kx, ky, kz]$$

Además, se cumplen las siguientes reglas:

Si X e Y son vectores cualesquiera y k_1, k_2, k_3 son escalares arbitrarios entonces:

---

[18] La suma $X + (-Y)$ se escribe $X - Y$ y se denomina diferencia de X y Y.
[19] Aunque ya se había discutido acerca del vector opuesto, es importante aclarar que este al igual que el vector O, nacen de la necesidad algebraica por hacer consistente la teoría desligándola de ambigüedades.

S1. kX es un vector determinado en forma única.
S2. $k(X+Y) = kX + kY$.
S3. $(k_1 + k_2)X = k_1X + k_2X$.
S4. $k_1(k_2X) = (k_1k_2)X$
S5. $1X = X$, $(-1)X = -X$ y $0X = O$

Retomando la definición de módulo de un vector, $\|X\|$ representará la magnitud del vector X, se tiene el siguiente resultado:

$$\|kX\| = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2} = |k|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |k| \cdot \|X\|$$

Si $k > 0$, se tiene que kX tiene la misma dirección y sentido que X; si por otra parte, $k < 0$, la orientación de kX es opuesta a la de X y si $k = 0$, entonces $kX = 0$.

Lo anterior, se soporta en el hecho que si $k > 0$, los cosenos directores de kX son kx/kr, ky/kr, kz/kr, o sea x/r, y/r, z/r, donde $r = \|X\|$; si $k < 0$ los cosenos directores de kX son $\frac{kx}{|k|r}, \frac{ky}{|k|r}, \frac{kz}{|k|r}$, o $-x/r, -y/r, -z/r$.

Teorema 8. *Si k y X son, respectivamente, un escalar y un vector analítico cualesquiera, el módulo de kx es $|k|$ veces la de X, en tanto que su sentido es igual u opuesto al de este, según que k sea positivo o negativo.* (Murdoch [18], p.87)

2.2.2.4. La Estructura de Espacio Vectorial.

Con las leyes básicas del álgebra de vectores geométricos y analíticos, resumidas en las cinco reglas ***A1*** a ***A5*** para la suma y las cinco reglas ***S1*** a ***S5*** para el producto de un vector por un escalar, que ya han sido enunciadas en los apartados anteriores, se introduce un importante concepto que unifica la teoría de los vectores que es la estructura de ***Espacio vectorial***; esencialmente, es un sistema algebraico en el cual las reglas ya expuestas serán tomadas como postulados o axiomas, "*los cuales fueron introducidas por Giusseppe Peano (1858-1932), en su libro Cálculo Geométrico, (1888), donde expone la teoría de manera axiomática, sintetizando las propiedades inherentes a la noción de vector y define la axiomática de los espacios vectoriales sobre los números reales, de la forma moderna*",(Zea [29], p. 136) como se muestra a continuación:

"Sea V un conjunto no vacio, cuyos elementos $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ se llaman vectores, dotado de dos operaciones una interna (suma)[20] y otra externa[21] (producto por un número real), que cumplen los siguientes Axiomas:

I. ***Axiomas de clausura:***

A1. Clausura con respecto a la adición. *Si X_1, X_2 son dos vectores cualesquiera de V, su suma que es un vector único representado por $X_1 + X_2$, está también en V.*

[20] Dado un conjunto V, y $+$ una operación, decimos que $+$ es una ley de composición interna si $+: V \times V \to V$
[21] Dado los conjuntos S y V, y la operación $*$, decimos que $*$ es una ley de composición externa si $*: S \times V \to V$

A2. Clausura respecto de la multiplicación por números reales. *Si dado X en V y k es un número real, existe un vector único kX en V, que es el producto de X por el escalar k (o múltiplo escalar de X).*

II. ***Axiomas para la suma:***

A3. *La adición de vectores es conmutativa* $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$
A4. *La adición de vectores es asociativa* $(X_1 + X_2)+X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$
A5. *Existe un vector O en S, tal que $X + O = X$, para todo X en V*
A6. *Todo vector X en V tiene un opuesto $-X$ en V tal que $X + (-X) = 0$*

III. ***Axiomas para el producto de un vector por un escalar:***

A7. *Si X_1, X_2 son dos vectores en V y k es un numero real, se tiene que*

$$k(X_1 + X_2) = k\,X_1 + kX_2$$

A8. *Si dado X en V y k_1, k_2 son numero reales,* $(k_1 + k_2)X = Xk_1 + k_2X$
A9. *Si dado X en V y k_1, k_2 son numero reales,* $k_1 \cdot (k_2X) = (k_1 \cdot k_2)X.$
A10. *Para todo vector X en V,* $1X = X.$

Tanto Apóstol [1] como Murdoch [18] separan el concepto de vector geométrico y analítico para establecer una forma más general de definirlos como una n-upla de números reales, siendo los números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ las coordenadas o componentes del vector y definiendo a $\mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial.

En ésta presentación se muestra el carácter abstracto de la definición de espacio vectorial, que se va desprendiendo la naturaleza de los objetos hasta obtener lo que Tom Apóstol [1] va a denominar ***Espacio lineal,*** como caso general de las n-uplas de números reales o complejos.

En otras palabras, intuitivamente se puede pensar en un espacio vectorial como una colección de objetos denominados vectores, junto con las operaciones de adición (denominada interna) y producto por escalar (denominada externa), que satisface los tres grupos de axiomas anteriores. Este resultado formalmente se puede consolidar en un conjunto que tiene la estructura de ***grupo***[22] ***abeliano***[23] con respecto a la adición y que cumple los axiomas de $\boldsymbol{S1}$ a $\boldsymbol{S5}$ con respecto al producto por escalar.

De la definición se desprenden algunas observaciones de importancia:

Observación 1. La definición de espacio vectorial puede hacerse más general si los escalares son elementos de un campo F arbitrario no necesariamente ser definido sobre el conjunto de los números reales. Desde un punto de vista particular, el espacio vectorial

---

[22] Un conjunto G con una operación interna * se dice que es un *grupo* sí:
a) * es asociativa.
b) * posee elemento neutro en G.
c) Todo elemento de G es invertible en si mismo con respecto a *

[23] G se dice grupo abeliano, si además de cumplir las propiedades de grupo, se cumple la propiedad conmutativa con respecto a *

arriba definido, se conoce con el nombre de ***espacio vectorial real*** o espacio vectorial sobre los números reales.

Observación 2. Cabe aclarar que en el axioma ***S2*** anterior, el $+$ representa la suma de los elementos de V, mientras que en el axioma ***S3***, en el primer miembro el $+$ representa la suma usual de los números reales y en el segundo miembro representa la suma de V.

Observación 3. Usando los axiomas listados en la definición, se puede probar que para todo vector X en V, se tiene que $0X = 0$ denominado vector cero, además para todo escalar k, se cumple que $k0 = 0$, y, que $(-1)X = -X$. (Como lo muestra Apóstol [1] en su construcción de los espacios lineales).

Es decir:

a. Se puede probar que $0X = 0$.

   Demostración: Sean α, β números reales, tales que $\alpha = \beta = 0$, por el axioma ***S3.*** Se tiene que $\alpha X + \beta X = (\alpha + \beta)X$, en consecuencia por la hipótesis tenemos:

$$0X + 0X = (0 + 0)X = 0X$$

   Ahora, restando $0X$ de ambos miembros de la ecuación anterior y considerando el hecho que $0X - 0X = 0$, se tiene:

$$0X + (0X - 0X) = 0X - 0X$$
$$0X - 0 = 0$$

   Por lo tanto $0X = 0$.

b. Para el caso de que $X = 0$, se procede de manera similar que en a, aplicando ***S2,*** es decir, sea $X = Y = 0$, en $k(X + Y) = k\,X + k\,Y$, en consecuencia tenemos que $k\,0 + k\,0 = k(0 + 0) = k\,0 = 0$.

c. Para establecer que los vectores $-X$ y $(-1)X$ son idénticos, se procede de la siguiente manera, por el axioma ***S5*** se tiene que $1X = X$ y como $0X = 0$ por el resultado 1, en consecuencia se tiene que $X + (-1)X = 1X + (-1)X = (1 - 1)X = 0X = 0$. ahora, restando X de ambos miembros de la igualdad, se obtiene que $-X = (-1)X$.

Observación 4. La diferencia $X - Y$ de dos vectores de define como $X + (-Y)$ y si k es un escalar, entonces, $k(X - Y) = kX - kY$, este resultado puede obtenerse como una consecuencia inmediata de los axiomas.

Observación 5. Un primer ejemplo que permite ir consolidando la teoría de los espacios vectoriales, es el conjunto de vectores $[X_1, X_2, X_3]$ de $\mathbb{R}^3$, el conjunto de los vectores en $\mathbb{R}^3$con origen en el origen del espacio coordenado, los cuales se usan como modelos para la construcción de este concepto. Este espacio se va a representar por V_n como lo representa Apóstol [1] en su libro.

Observación 6. Algunas definiciones tomadas del libro de Apóstol que complementan la teoría de espacios vectoriales son: (Apóstol [1], p.681)

- *Si V es un espacio vectorial y A un subconjunto de V que a su vez es un espacio vectorial (con relación a la misma adición y multiplicación por un escalar que en V), entonces A recibe el nombre de subespacio de S.*

- *Si $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$ son vectores en un espacio V, cualquier vector*

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_rX_r$$

  formado de los sumandos de los múltiplos escalares de $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$, recibe el nombre de combinación lineal de $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$ en S.

- *El subespacio de S que consta de todas las combinaciones lineales de los vectores $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$, se designa con el nombre de subespacio generado por $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r$.* Es así, que en el espacio V_3

$$E_1 = [1, 0, 0],$$
$$E_2 = [0, 1, 0],$$
$$E_3 = [0, 0, 1],$$

  Se tiene

$$[x_1, x_2, x_3] = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3.$$

  Se deduce que todo vector en V_3 es una combinación lineal de E_1, E_2, E_3, consecuentemente, V_3 es el espacio generado por estos tres vectores.

2.2.3. Noción de módulo

En la teoría formal del álgebra abstracta se presenta el concepto de módulo como una definición de espacio vectorial de una manera más abstracta y general, en la cual no está especificada la naturaleza de los "vectores u objetos" X_1, $X_2, \ldots,$ sino que se define un conjunto V arbitrario no vacio y en él se definen la adición y el producto por un escalar de esos "vectores u objetos" las cuales satisfacen los axiomas enunciados en la definición de espacio vectorial sobre un ***anillo*** en vez de sobre un ***campo***, se está definiendo lo que en matemáticas se va a denominar como un ***módulo***.

Formalmente para Herstein [15], éste se define de la siguiente manera:

*"Sea R un anillo cualquiera; un conjunto no vacío M se dice que es un **R-módulo** o simplemente un módulo sobre R, si M es un grupo abeliano bajo una operación $(+)$, tal que para cada $r \in R$ y $m \in M$ existe un elemento rm en M, de tal modo que se verifica:*

i. $r(a + b) = ra + rb$
ii. $r(sa) = (rs)a$
iii. $(r + s)a = ra + sa$

para cualesquiera $a, b \in M$ y $r, s \in R$". (Herstein [15], p.188)

Este punto de vista es riguroso y abstracto, se parte de las matemáticas formales para la construcción de dicho concepto, desligando la intuición. Es por ello que dicho concepto no se orienta en la educación media de la secundaria, ni en los primeros semestres de universidad para el curso de física o álgebra lineal, así mismo, no se tendrá en cuenta dentro de la secuencia didáctica.

2.3 Referentes Didácticos

2.3.1. Las concepciones didácticas de Piaget, Chevallard, Brousseau y el problema de la representación del concepto de vector.

Al ampliar el dominio de las aplicaciones de las matemáticas al campo de la resolución de problemas de las ciencias, la ingeniería y las matemáticas mismas, aparece el problema de la representación de los objetos como un obstáculo para el aprendizaje de los mismos.

Es el caso del concepto de vector, que nace como una idea[24] que permite dar respuesta al problema de la matematización de la física que de paso unifica e interrelaciona tres conceptos esenciales, como son el vector geométrico, el vector coordenado o analítico y el vector como un elemento de un espacio vectorial, que se articulan en tres fases del pensamiento: el pensamiento intuitivo o intuicionista (paramatemática), el pensamiento analítico (protomatemática) y el pensamiento estructural o abstracto (matemática), los cuales en la práctica de aula conducen a la enseñanza de tres tipos de representaciones distintas para el mismo objeto matemático; cada una de éstas muestra las particularidades en la construcción del concepto y la conformación de la estructura que subyace en ellas. Un ejemplo claro de lo anterior, son las posiciones encontradas por los autores citados en el referente disciplinar, quienes de acuerdo a la teoría a desarrollar parten de cualquiera de las tres fases del pensamiento, desligando las otras dos, generando posiblemente confusión en los estudiantes que inician con estos temas del algebra lineal.

Es así, que la propuesta didáctica que se presenta en el siguiente apartado, busca contribuir al proceso de enseñanza–aprendizaje del concepto de vector como elemento de un espacio vectorial justificada en tres fuentes pedagógicas y didácticas, que han ayudado al estudio de las formas más relevantes para la adquisición del conocimiento matemático por parte de los individuos:

La primera hace referencia al desarrollo biológico y la evolución de las estructuras cognitivas de carácter lógico-matemático, denominado por Piaget [22] la *epistemología genética* que es una teoría del aprendizaje, presentada de manera sistemática y ordenada; en ella, el desarrollo del pensamiento y la construcción del conocimiento es

[24] Al expresar una idea se requiere del uso de algún tipo de lenguaje (oral, gráfico, simbólico), que conllevan a características propias de las matemáticas como son las formas de representación y las notaciones, herramientas que permiten interactuar con el conocimiento asignando significado, simplificando la escritura y favoreciendo su comprensión.

una actividad propia del ser humano, resultado de la interrelación que ocurre entre un sujeto y un objeto de estudio, en el que el proceso de la construcción del conocimiento no puede entenderse como algo predeterminado por las estructuras internas de los sujetos (resultado de una construcción sólida), ni las características de los objetos de estudio (conocidas por la mediación de estas estructuras), sino que se da a partir de las etapas biológicas del desarrollo por las que pasa un individuo para generar su aprendizaje. Soporta su teoría, en la búsqueda de la explicación cuando se pasa de un conocimiento menos elaborado a un conocimiento totalmente elaborado. Para ello, planteó que el sujeto es un actor activo, partícipe de este proceso como resultado de la acción de modificar el pensamiento para que nuevos conocimientos puedan ser construidos o simplemente sean provocados por la naturaleza inusual del individuo, llamándolo ***proceso de acomodación*** o ***adaptación del conocimiento***.

La segunda, la ***teoría antropológica de la Didáctica de las matemáticas*** propuesta por Chevallard [7], plantea las condiciones para que el conocimiento científico, bajo ciertos tratamientos, se convierta en un conocimiento enseñable mediante una posible ***transposición*** que denominaría ***didáctica***. Para dicho fin, consideró que existe un objeto identificable llamado "saber sabio" que valida a las matemáticas como una ciencia abstracta, un "saber enseñado" y un "saber aprendido" donde se asume que lo se enseña por parte del profesor tendrá que ser aprendido finalmente por los estudiantes, que es un proceso natural en los individuos, generando un "estado de conocimiento ideal" al que la enseñanza y el aprendizaje deben converger, donde es responsabilidad del docente realizar y facilitar una serie de transformaciones adaptativas para que dichas situaciones se den.

Y la tercera de las ***Situaciones didácticas*** propuestas por Brousseau [5], que indagan por las condiciones para que los estudiantes construyan este conocimiento, a partir de una génesis artificial. Propuso la creación de un esquema más general para la enseñanza de los conceptos que llamaría "***Secuencia didáctica***" o "***situaciones didácticas***" que provoquen una "***génesis artificial***" de los conceptos en matemáticas. Dichas secuencias construidas de manera intencional deben estar constituidas por actividades que guíen y orienten a los estudiantes desde la intuición hasta la formalización de conceptos, teniendo presentes tres momentos fundamentales en la generación de éstos: la Protomatemática (pensamiento intuicionista), la Paramatemática (pensamiento analítico) y la Matemática (pensamiento abstracto).

Con lo anterior, se deja al descubierto que la construcción de un concepto[25] matemático puede estar mediado por las diversas formas de representación, ya sea por su evolución histórica o por su concepción disciplinar bajo la cual es concebida, como sucede con el concepto de vector, el cual se puede presentar mediante tres formas partiendo del planteamiento hecho por los autores anteriormente citados y las tres fases del pensamiento:

[25] Entendiendo concepto matemático como lo aceptado por la comunidad matemática.

La primera como un segmento de recta dirigido, quien sirviéndose de la geometría sintética (al modo como la concebía Euclides), se considera una forma del pensamiento intuicionista[26] (etapa del pensamiento concreto o protomatemática), se reflexiona a partir de un lenguaje basado en la representación gráfica de figuras geométricas que generan leyes y regularidades y se permite a la geometría vectorial y la física dar sus inicios. En esta forma de pensamiento los conceptos son usados de manera implícita en actividades del ser humano, se determinan condiciones de uso y manejo, pero **no hay conciencia de la existencia como objeto abstracto.**

La segunda forma de representación del concepto de vector se materializa con los desarrollos de la geometría analítica como la teoría donde converge el álgebra simbólica y la geometría sintética que da paso al pensamiento analítico (paramatemática), donde los objetos se desligan de las interpretaciones física y geométrica que éstos puedan ofrecer y adquieren formas de representación simbólicas mediante fórmulas, donde el concepto de lugar geométrico toma fuerza, consolidándose como una nueva forma de razonamiento. Es aquí donde surge una nueva definición para el vector con un cambio en su representación; en este sistema al vector se le aplica un tratamiento numérico referenciándolo como una n-upla de números reales elementos del espacio $\mathbb{R}^n$, ganando en abstracción, pues los objetos geométricos serán transformados a objetos analíticos que creados de esta forma, pueden ser manipulados mediante las reglas del algebra y la aritmética, facilitando su operatoria. En esta forma del pensamiento hay una toma de conciencia de la existencia del concepto generado por la familiaridad de uso, a pesar de que se estudian sus relaciones, propiedades, organizaciones, pero **aún no hay teoría que lo sustente.**

Sintetizando las dos representaciones anteriores de manera conjuntista, se llega a la tercera forma como un pensamiento estructural (etapa de pensamiento abstracto o matemática) que es formal y que va a permitir desligar a los objetos totalmente de cualquier naturaleza, aquí los elementos cumplen las reglas determinadas por la estructura de espacio vectorial y serán denominados vectores sin ningún tipo de restricción con respecto al tipo de representación en la que esté definido, además que cambia su operatoria habitual, aquí la axiomática cobra fuerza. **Este pensamiento construye una teoría que controla al concepto definido a partir de las estructuras en las que participa y de las propiedades que satisface, poniéndola a salvo de ambigüedades, errores e inexactitudes, que a su vez lo libera de toda referencia con el mundo real y lo ubica en el plano de lo abstracto o de la formalización.**

De este modo, se hace evidente que a medida que se avanza en la evolución de este concepto, también se avanza en su representación y en su notación. El paso de una representación a otra en el campo pedagógico comienza a adquirir el carácter de obstáculo de aprendizaje, ya que por parte de los estudiantes al no encontrarle significado alguno, no entienden que éstos están íntimamente relacionados por la naturaleza de cómo están definidos.

---

[26] Los lineamientos curriculares para Matemáticas, se reconoce al intuicionismo como: “el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos” (MEN 2003).

El docente por su parte es quien debe tener claro estos elementos disciplinares que soportan a los vectores como una teoría (saber sabio), la cual se debe transformar y mediar con las diferentes representaciones que este conlleva (saber enseñado), que sirviendo como orientador los estudiantes puedan pasar del pensamiento concreto (flecha), al pensamiento abstracto (vector como elemento de un espacio vectorial) como lo plantean Piaget [22] y Chevallard [7] para que haya un verdadero aprendizaje (saber aprendido).

2.3.2. Análisis de la prueba diagnóstica.

2.3.2.1. Implementación de la Prueba diagnóstica -Metodología-.

Se planteó una prueba que se ha denominado exploratoria o diagnóstica, acerca de algunos tópicos fundamentales que son requisito para el abordaje de la temática de los vectores, como es la construcción de la magnitud escalar y la magnitud vectorial, que desde la práctica y la experiencia docente se ha evidenciado indagar para fortalecer el proceso enseñanza – aprendizaje del concepto de vector.

Dicha actividad por factores de posibilidad, se aplicó a 20 estudiantes voluntarios de educación media (10º y 11), cuyas edades oscilan entre los 15 a los 17 años, de la Institución Educativa ISABEL II de carácter oficial del Distrito Capital, ubicada en la localidad de Kennedy, donde desde la asignatura de física han tenido un contacto inicial con éstos entes, específicamente con las magnitudes que son objeto de análisis; cabe aclarar que la prueba es válida para estudiantes de la media fortalecida (programa implementado por la secretaria de educación del distrito capital desde el año 2010), entendida ésta como la profundización en áreas específicas del conocimiento, en este caso en el área de matemáticas, como para estudiantes de primeros semestres de universidad.

El objetivo de aplicar la prueba era analizar e interpretar de manera sistemática las dificultades, posibles errores asociados al aprendizaje del concepto de magnitud vectorial y de vector; además, que permitiera de una u otra manera dar sentido y poder visualizar la estructura de la secuencia didáctica referida al cómo abordar esta temática en los cursos de la educación media, específicamente en los grados décimo para luego ser abordados en los primeros semestres de universidad.

Dicha actividad se estructuró en cuatro etapas, distribuidas en actividades exploratorias o de inicio, de desarrollo y de finalización, las cuales están enfocadas desde la paramatemática, la protomatemática y la matemática, referidas en el apartado anterior; este ejercicio se desarrolló en 4 horas de clase (anexo A).

2.3.2.2. Análisis de Resultados

En un inicio se pensó realizar la prueba diagnóstica abordando el concepto de vector, para ello se crea un primer instrumento, conformado por las preguntas:

1. *Qué entiende por vector*
2. *Qué entiende por magnitud vectorial, dé ejemplos*
3. *Qué relación existe entre la magnitud vectorial y el vector*

Del análisis de las respuestas dadas a las preguntas anteriores se determinó que era necesario obtener información acerca de conceptos previos que son prerrequisito para el abordaje y trabajo de la temática propuesta, puesto que, para los estudiantes no son claros los conceptos de magnitud, cantidad y medida de la cantidad, que como se referenció en el marco disciplinar, éstas se asumen como sinónimas y por ende se presenta confusión en la diferenciación de la magnitud escalar y la magnitud vectorial, que son fundamentales para la construcción del concepto de vector.

De esta manera, se procedió a replantear el cuestionario de manera más estructurada y se decide trabajar el tema magnitudes escalares y vectoriales, con el cual se espera conocer a ciencia cierta acerca de los posibles obstáculos de aprendizaje que pueden presentar los educandos al enfrentarse con esta temática (sabiendo que estos conceptos ya han sido tratados en la clase de física o en cursos anteriores de ciencias naturales).

En consecuencia, el instrumento diseñado estuvo construido de manera que se evidenciaron los resultados en dos aspectos: el primero de manera descriptiva, en el cual se identifican diferentes formas de razonamiento que pueden presentar los estudiantes y a su vez valorar su progreso, y el segundo de manera instructiva que marca las pautas a seguir por los estudiantes en el desarrollo de la guía para favorecer el avance y poder establecer el nivel de razonamiento tanto geométrico como analítico en el que se encuentran.

Dicho instrumento constituido por cuatro etapas (construcción del conjunto de los segmentos de recta, construcción de la cantidad de la magnitud y la magnitud, construcción de la estructura de la magnitud, construcción de la medida de la magnitud), que a su vez, cada etapa estuvo conformada por preguntas abiertas y clasificadas de acuerdo al grado de complejidad que éstas presentaron, las cuales fueron analizadas de acuerdo a los tipos de respuesta dadas por los estudiantes:

En la búsqueda de mecanismos y posibles soluciones por tratar de resolver la guía propuesta, los estudiantes a partir de la obtención de información, definiendo modelos, y decidiendo cuales técnicas iban a utilizar para resolver la guía, generaron variados tipos de respuestas las cuales en la puesta en común fueron defendidas, modificadas, discutidas, comunicadas y validadas.

Etapa 1: Construyendo Segmentos 1. "*Sea O el conjunto de todos los segmentos de recta del plano, los cuales describen la menor trayectoria entre dos puntos distintos*".[27]	
Ítem	**Objetivo de la etapa**
1.1. Toma una hoja en blanco, en ella: • Dibuja diferentes puntos. • Construye diferentes segmentos de	Construcción del conjunto O e identificación y notación del objeto geométrico.

[27] El enunciado 1, da cuenta de la noción de segmento, el cual se formaliza como un concepto matemático mediante las siguientes definiciones:

1. Un punto C está entre A y B si y solo si :
   i. A, B y C son distintos y colineales,
   ii. $AB + BC = AC$
2. Al conjunto formado por los puntos A, B y todos los puntos C comprendidos entre A y B, se denomina ***Segmento de recta.***

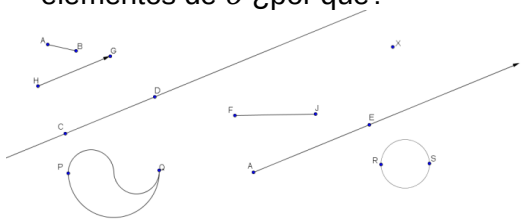
recta que unan dos puntos distintos de los dibujados.	
1.2. ¿Cómo se pueden simbolizar los segmentos de recta construidos?	
1.3. De las figuras presentadas a continuación determina cuáles son elementos de O ¿por qué? 	
1.4. ¿Cómo se reconoce la cualidad particular que permita determinar si un elemento pertenece a O ó no?	

Tabla 4. Etapa 1. Construcción del conjunto de los segmentos de recta.

Esta primera etapa, buscaba que el estudiante interpretara la información, de ella sacará lo más importante y desarrollará los puntos de manera secuencial, llegando a la construcción del conjunto O conformado por los segmentos de recta construidos por él, reconociendo las cualidades particulares de los elementos que pertenecen a este conjunto. En este sentido, un grupo de 15 estudiantes reconocen el objeto geométrico por su nombre y forma, presentando dificultad en su manera de cómo construirlo, ya que no diferencian las partes, ni las componentes que subyacen en el objeto, no son capaces de establecer o explicar las propiedades, ni de escribirlo de manera simbólica, es decir, no reconocen la notación puesto que no poseen un lenguaje geométrico básico, el cual les permita referirse al objeto construido; por lo anterior, se les dificultó construir el conjunto O.

Con el grupo restante de 5 estudiantes no les fue posible establecer las relaciones y propiedades que presenta el segmento de recta, ni su notación.

Etapa 2: Hacia la congruencia de segmentos	
2. En el conjunto O, definiremos una relación llamada ***congruencia***, de la siguiente manera: "*el segmento $\overline{AB}$ está relacionado con el segmento $\overline{CD}$ o que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, si y sólo si, al superponer uno en el otro todos y cada uno de sus puntos coinciden*"	
ítem	**Objetivo de la etapa**
2.1. Construye conjuntos de segmentos congruentes a cada uno de los segmentos construidos en el punto 1.1.	Construcción, identificación, reconocimiento y análisis de la congruencia entre segmentos, clases de equivalencia, conjunto cociente y conceptos de cantidad y magnitud longitud.
2.2. Explica por qué la congruencia de segmentos, define una relación de equivalencia en el conjunto O.	
2.3. Dado el segmento $\overline{AB}$, ¿Cuántos segmentos congruentes a él podemos construir?	

2.4. Si notamos el conjunto de los segmentos congruentes al segmento $\overline{AB}$, como $[\overline{AB}]$, a dicha colección la denominaremos una *clase de equivalencia*. ¿dado el segmento $\overline{AB}$ cuantas clases de equivalencia lo pueden contener?	
2.5. Dadas las clases de equivalencia $[\overline{AB}]$ y $[\overline{CD}]$, determinadas por los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, ¿existirán en la clase $[\overline{AB}]$ elementos que pertenezcan a la clase $[\overline{CD}]$ y viceversa? Argumenta tu respuesta.	

Tabla 5. Etapa 2. Construcción de los concepto magnitud y cantidad

Después de logrado el objeto geométrico y el conjunto requerido O, se dio paso a la segunda fase; en esta etapa se buscó que el estudiante a través de la manipulación y experimentación, estableciera relaciones, propiedades, interpretaciones de la notación utilizada, que a su vez indaga acerca de la elaboración de definiciones con algún tipo de estructura que le permitan pasar a la formalidad (el estudiante se induce hacia la abstracción); en este caso se quiere que logren identificar la diferencia entre los conceptos de cantidad y magnitud, la primera obtenida a partir de las clases de equivalencia mediante la congruencia entre segmentos y la segunda como el conjunto conformado por dichas clases, que permitirá a su vez ser denominada ***magnitud longitud***.

18 estudiantes reconocieron la congruencia entre segmentos, presentaron dificultad en la construcción de la clase de equivalencia, ya que no asociaron la relación de equivalencia con el objeto geométrico, no identificaban que a un segmento de recta dado se le pueden asociar infinitos segmentos congruentes que además posean distintas posiciones y de ahí construir un conjunto que se denominará la clase de equivalencia de dicho segmento, para luego construir el conjunto O^* con estas colecciones, para así, a cada elemento de este nuevo conjunto denominarlo una ***cantidad.*** Buscan en todo momento elementos concretos tratando de hallar soluciones en este campo, no desligan el pensamiento del mundo real. Los 2 estudiantes restantes no saben o no responden.

Después de explicada y construida la clase de equivalencia mediante la relación de congruencia entre segmentos, se procede a hallar la magnitud longitud, esta tarea fue realizada por la totalidad del grupo.

En este ítem se evidenció que no reconocían la diferencia entre cantidad y magnitud porque posiblemente nunca es sus clases habituales de matemáticas se había realizado dicha distinción.

Etapa 3: Construyendo la estructura	
ítem	**Objetivo de la etapa**
3.1. ¿Tiene sentido hablar de $[\overline{AB}]$+$[\overline{CD}]$? Argumenta tu respuesta.	

3.2. Determina gráficamente que es el segmento de recta $\overline{AB}+\overline{CD}$. Realiza ejemplos. Determina las condiciones para que dicha suma pueda realizarse.	Construcción de la estructura bajo las operaciones de adición de segmentos y producto de un segmento por un número real.
3.3. ¿Es cierto que $\overline{AB}+\overline{CD} \in [\overline{AB}]+[\overline{CD}]$? ¿qué condiciones se debe cumplir para que la proposición sea cierta?	
3.4. La clase resultante denominada suma es independiente del representante, es decir, si dados los segmentos de recta $\overline{A'B'} \in [\overline{AB}]$ y $\overline{C'D'} \in [\overline{CD}]$ ¿es posible afirmar que $\overline{A'B'}+\overline{C'D'}=\overline{A'D'} \in [\overline{AD}]$? Argumenta tu respuesta.	
3.5. ¿Tiene sentido hablar del segmento de recta $\overline{AA}$, por consiguiente, tiene sentido hablar de la clase de equivalencia $[\overline{AA}]$?	
3.6. Verifica gráficamente si se cumplen las siguientes propiedades: ✓ $[\overline{AB}]+[\overline{CD}]=[\overline{CD}]+[\overline{AB}]$ ✓ $([\overline{AB}]+[\overline{CD}])+[\overline{EF}]=[\overline{AB}]+([\overline{CD}]+[\overline{EF}])$ ✓ ¿Es cierto que $[\overline{AA}]+[\overline{CD}]=[\overline{CD}]$?	
3.7. Si $[\overline{AB}]=[\overline{CD}]$, entonces se cumple que ¿$[\overline{AB}]+[\overline{EF}]=[\overline{CD}]+[\overline{EF}]$? Argumenta tu respuesta.	
3.8. Al comparar los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, ¿Tendrá sentido hablar de $\overline{AB}<\overline{CD}$ sin hacer uso de la medida? Establece un criterio para determinar en qué casos se cumple dicha relación.	
3.9. ¿Si $\overline{AB}<\overline{CD}$, entonces $[\overline{AB}]<[\overline{CD}]$? Argumenta tu respuesta.	

Tabla 6. Etapa 3. Orden y Suma de clases de equivalencia

Definida la relación de equivalencia entre los segmentos de recta, mediante la congruencia y obtenidas las particiones sobre el conjunto O, es decir, las clases de equivalencia, se crea el conjunto O^*, permitiéndose la construcción de las definiciones de ***magnitud*** y ***cantidad de la magnitud***, las cuales van a dar paso a la construcción de la estructura algebraica y del orden entre las clases; con respecto a la primera, se definen dos operaciones una interna denominada suma y una externa denominada producto de un segmento por un escalar, en las cuales se verifican las propiedades que estas van a cumplir y con la segunda se establece un criterio de comparación distinto a la congruencia entre segmentos, mediante la relación "*ser menor que*" entre las clases que será compatible con la suma ya definida.

Aquí, el objetivo era encaminar al estudiante hacia la necesidad de trabajar con las clases de equivalencia, que eligiera los representantes de las mismas y que realizara comparaciones y operaciones con dichos elementos, para luego establecer

generalidades obtenidas de las propiedades de las operaciones construidas y de la comparación entres los segmentos de recta mediante el tamaño de estos (que por abuso del lenguaje diremos la longitud), lo que lo conllevaría a la construcción de la estructura algebraica del conjunto.

En este sentido, el objetivo no se cumplió, puesto que, las preguntas resultaron complejas, algunas presentaron ambigüedad y otras no fueron entendidas por los estudiantes, 14 estudiantes realizaron deducciones y conjeturas con mucha dificultad; trataron de explicar con sus palabras lo sucedido, estableciendo analogías entre las operaciones, el orden y la estructura de los segmentos de recta con las operaciones, el orden y la estructura de los números reales, trabajando en todo momento con los representantes de las clases, pero sin encontrar una correlación entre estos y los resultados obtenidos en los ítems anteriores. Fue necesaria la intervención del docente mediante la explicación de lo que se buscaba. 5 estudiantes no comprendieron las propiedades, no establecieron relaciones de orden, se les debió indicar los pasos a seguir y un estudiante no sabe o no responde.

Dado lo anterior, se evidencia que esta tercera parte de actividad debe ser replanteada en la secuencia didáctica, con el fin de lograr el objetivo propuesto.

Etapa 4: relaciones de orden y construcciones con regla y compás	
Ítem	**Objetivo de la etapa**
4. Si definimos la resta entre cantidades como sigue: $[\overline{AB}] - [\overline{CD}] = [\overline{XY}]$ si y sólo si, $[\overline{CD}] + [\overline{XY}] = [\overline{AB}]$	Uso y manejo de la regla y el compás, aproximación a la construcción de la medida.
5. Dé significado geométrico a las siguientes expresiones $5\overline{AB}$, $7\overline{AB}$, $11\overline{AB}$.	
6. Dado el segmento de recta $\overline{AB}$ arbitrario, construye con regla y compás $\frac{1}{5}\overline{AB}$, $\frac{1}{7}\overline{AB}$, $\frac{1}{11}\overline{AB}$.	

Tabla 7. Etapa 4. Construcciones con regla y compás.

En esta última etapa, luego de haber construido la magnitud, la cantidad y el haber tratado de establecer las relaciones de orden y la operatividad del conjunto mediante la suma de las clases y el producto de un segmento por un escalar, se dio paso a las construcciones con regla y compás. Para la gran mayoría de los estudiantes que realizaron esta actividad, fue novedoso el uso de estos instrumentos para la generación de conceptos matemáticos, así hayan tenido algún tipo de contacto con éstos, posiblemente nunca los habían conectado con el área de matemáticas sino con el área de tecnología. En la institución donde se aplicó la prueba diagnóstica no se evidenció algún tipo de prelación al uso de estos instrumentos como herramientas que permitan adquirir conocimiento matemático en los estudiantes, mientras que unos pocos habían hecho algún tipo de trabajo en matemáticas con la regla y el compás.

Después de evidenciada la dificultad del uso y manejo de la regla y el compás, se procedió a dar las indicaciones de la utilización de estos elementos de trazo, se explica su importancia para las matemáticas, específicamente para la enseñanza de la geometría; acto seguido se propuso la actividad a desarrollar, en la que solamente se pudo evidenciar con respecto a ésta que reconocen la posibilidad de establecer el orden de las cantidades comparando los representantes de cada una de ellas a través de la comparación y para ello miden en todo momento los segmentos a comparar.

Con el análisis anterior, quedó de manifiesto que la estructura de la secuencia didáctica debe partir de la construcción de los conceptos de magnitud, cantidad y medida de la cantidad, también se pudo observar que hay que hacer énfasis en las construcciones con regla y compás como instrumentos facilitadores de conocimiento. Por ello, esta actividad hará parte de la secuencia didáctica replanteándose algunos puntos para que sean más asequibles y entendibles a los estudiantes.

3. Secuencia Didáctica.

3.1. Acerca de la propuesta.

Teniendo en cuenta lo planteado en los referentes históricos, disciplinares y pedagógicos, el estudio de los vectores es uno de tantos conocimientos de las matemáticas que provienen de la física, es decir, son objetos teórico–prácticos que presentan ciertas características de acuerdo a la teoría y al modelo que se presenten. Desde la física sirve como modelo para la conceptualización de fenómenos y leyes que se estudian mediante las denominadas magnitudes vectoriales y desde las matemáticas sirve como modelo para la representación abstracta del mismo concepto, sin la necesidad de la ayuda visual, que se unifican cuando un elemento arbitrario de un conjunto no vacío cumple unas ciertas reglas de juego, aprovechando para entrar a los espacios que se denominarán los espacios vectoriales.

La presente secuencia didáctica surgió de la necesidad de diferenciar las representaciones que presenta el concepto de vector y que en la escuela frecuentemente se omiten o se desconocen, ya que se enseñan como una sola, generando confusión en los estudiantes cuando nuevamente se estudian con la estructura de espacio vectorial la cual ha sido evidenciada desde la experiencia docente del autor.

De igual modo, se busca que el estudiante comprenda e interiorice la evolución de este concepto, consolidando la teoría de los vectores como una secuencia ordenada de conocimiento, que aporte al proceso de enseñanza-aprendizaje; por ello, se inicia con la construcción del concepto de magnitud, cantidad y medida de la cantidad, para luego establecer las diferencias entre las magnitudes escalares y las magnitudes vectoriales, que conlleva a la construcción del concepto de vector como derrotero de la propuesta, el cual será relacionado con el uso de los segmentos de recta orientados, que se originan de la necesidad por representar gráficamente algunos fenómenos de la naturaleza siendo una problemática propia de la física, como caso específico se construye el concepto de desplazamiento éste como una magnitud vectorial, para luego pasar a su representación analítica como pareja ordenada de números reales. Estas como dos representaciones diferentes para el mismo objeto (geométrico y analítico) las cuales están interconectadas y que pierden su carácter ontológico al teorizarse como un elemento de un conjunto que tiene la estructura de espacio vectorial, siendo ésta última una necesidad propia de las matemáticas.

Es por ello, que la Secuencia didáctica se centró en la representación del concepto de vector ayudado por la geometría euclidiana y la geometría analítica hasta llegar al vector como elemento de un espacio vectorial real. Para el abordaje y desarrollo de las actividades propuestas en la Secuencia didáctica el estudiante por su parte requiere además de tener la disposición por aprender, tener algunos conocimientos básicos de

geometría euclidiana, aritmética, algebra elemental, geometría analítica y nociones acerca del uso y manejo de la regla y el compás, los cuales en su conjunto son conocimientos previos para el abordaje de esta temática.

3.1.1. Descripción de la Secuencia didáctica

La Secuencia está conformada por cuatro (4) actividades estructuradas donde se presenta una breve descripción de las temáticas a abordar, los objetivos y discusiones para la formalización de los conceptos, relaciones y propiedades trabajadas, además de las diferentes etapas bajo las cuales están construidas:

Etapa inicial: en la que se involucra al estudiante hacia el tema de manera introductoria o de ambientación, que de paso explora acerca de los conocimientos previos que deben tener acerca de algunos conceptos básicos para la comprensión de los temas a abordar.

Etapa de desarrollo: en la que se permite la profundización de las temáticas propuestas, estudiando las estructuras y propiedades que subyacen en el concepto de vector a partir de su representación. Se presentan actividades donde se realiza la construcción del concepto del Vector geométrico, tomando como base los principios de la geometría Euclidiana y haciendo uso de la regla y el compás como instrumentos que permiten generar este conocimiento; actividades donde se realiza la construcción del vector coordenado tomando los principios básicos de la geometría analítica, específicamente la ubicación de los vectores geométricos en el plano cartesiano para luego quedarse con la representación de una pareja ordenada de números reales y finalmente actividades para la construcción del concepto de vector como elemento de un espacio vectorial, estableciendo comparaciones entre las dos construcciones anteriores y otros entes matemáticos que cumplan con ésta estructura.

Etapa de finalización: en la que se proponen preguntas que comprueban el grado de aprehensión de las temáticas propuestas y el uso de los conceptos en un contexto académico determinado.

3.1.2. Recursos y materiales.

Dentro de los recursos a utilizar para el desarrollo de cada una de las actividades propuestas de la Secuencia didáctica, se proponen:

Por parte de los estudiantes hacer uso de los instrumentos de trazo utilizados en geometría (regla, compás, lápices y/o bolígrafos de distintos colores), hojas blancas, hojas milimetradas, calculadora.

Por parte del docente la pizarra, computador portátil para el uso opcional de algún tipo de software matemático (C.A.R, Geogebra), que de una u otra manera puedan apoyar las construcciones con regla y compás, las cuales permitirán la apropiación del nuevo conocimiento mediado por el cambio de estas tecnologías.

3.1.3. Contenidos de la Secuencia didáctica.

3.1.3.1. Conceptuales.

A continuación se referencian los aspectos disciplinares que se busca enseñar:

- ✓ El sistema de los vectores Geométricos.
- ✓ Vectores fijos y de posición.
- ✓ El sistema de los vectores Coordenados.
- ✓ La estructura de espacio vectorial.

3.1.3.2. Procedimentales.

Buscan la adquisición de destrezas y habilidades para desarrollar razonamiento lógico-deductivo en los estudiantes, referidos a la temática a abordar:

- ✓ Obtención del Vector libre a partir del segmento de recta orientado.
- ✓ Uso de la regla y el compás en la obtención de las propiedades y relaciones de los vectores libres.
- ✓ Obtención de los vectores fijos y de posición a partir del vector geométrico.
- ✓ Obtención del vector coordenado a partir del vector de posición.
- ✓ Uso y manejo de las propiedades y relaciones de los vectores coordenados.
- ✓ Uso y manejo de la estructura de espacio vectorial a partir de ejemplos.

3.1.3.3. Actitudinales.

- ✓ Trabajo autónomo, en equipo y participación por parte de los estudiantes.
- ✓ Compromiso, interés por el desarrollo de las actividades.
- ✓ Respeto y tolerancia de la opinión del otro.
- ✓ Puntualidad en la entrega de las actividades.
- ✓ Creatividad en los métodos empleados en la resolución de problemas y ejercicios propuestos.

3.1.4. Metodología.

Para el desarrollo de la secuencia didáctica, cada actividad debe ser orientada, mediada y dirigida por el docente, mediante explicaciones o preguntas que dan cuenta de manera explícita acerca de la evolución del concepto vector. Cada actividad contiene los objetivos a desarrollar según cada temática planteada y una pequeña descripción que busca que los estudiantes mediante las preguntas, construcciones y ejercicios planteados construyan conceptos, establezcan relaciones, realicen conjeturas y reconozcan las estructuras que subyacen en cada una de las diferentes representaciones de dicho concepto. Para ello, las desarrollarán a partir de las etapas inicial, de desarrollo y final que las conforman, trabajadas en clase o en casa, de manera grupal o individual.

Así mismo, por cada temática trabajada se plantea una discusión que el docente puede utilizar de manera opcional donde se concretan conceptos, definiciones, explicaciones o la teoría a desarrollar, además que permiten mostrar la estructura del conocimiento

matemático, como un conocimiento secuencial y ordenado que parte de preconceptos para la construcción de nuevos conceptos, relaciones y estructuras, enfatizando en la adquisición de destrezas y habilidades matemáticas, de razonamiento lógico-deductivo, tomando como referencia los cambios sociales, históricos y los avances disciplinares que han fortalecido este concepto, que de paso aporte en las prácticas sociales como un valor agregado en la formación de ciudadanos.

3.1.5. Evaluación.

En el marco de las reflexiones pedagógicas propuestas dentro de la educación matemática en Colombia se puede ver a la geometría "como una herramienta que permita ser un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y como un recurso de modelación que representa visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra o el cálculo, o de otras ciencias naturales como la física y una vía para desarrollar pensamiento y comprensión, y, en un nivel avanzado, como una teoría formal" (Asocolme, 2002, pág.35) y el álgebra "como un área que conlleva a la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, que permitan que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de estructuras, patrones, relaciones y funciones" (MEN, 2002, pág. 16).

Teniendo en cuenta las anteriores concepciones, la evaluación será concebida como un proceso de aprendizaje continuo y permanente; además de permitir ser una reflexión crítica, donde el docente asume el papel de orientador del proceso enseñanza-aprendizaje que dirija el desarrollo y avance de la secuencia didáctica, el cual irá permitiendo que los estudiantes en la medida que van desarrollando la propuesta potencien estrategias para el planteamiento y resolución de problemas mediante el uso de los conceptos vistos, desarrolle el razonamiento matemático de manera coherente, realice deducciones e inferencias haciendo uso de la formalidad, se comunique matemáticamente, lea, comprenda el lenguaje matemático usado en la secuencia y especialmente vayan adquiriendo pensamiento científico; así mismo, podrá evidenciar fortalezas y debilidades conceptuales, procedimentales y actitudinales mostradas por los mismos, combinando aspectos cualitativos y cuantitativos.

La evaluación se hará evidente mediante pruebas escritas las cuales darán cuenta de los conocimientos adquiridos, la participación y trabajo en clase, la disposición del estudiante en las actividades la cual se hará cierta con su comportamiento y con la entrega puntual de las mismas; además, se tendrán en cuenta el respeto y la responsabilidad durante el desarrollo de sus actividades, la coevaluación e intercambios de ideas.

3.2. Actividades de la Secuencia Didáctica.

3.2.1. Actividad 1: Construcción del vector como segmento de recta orientado.

Objetivos:

- ✓ Establecer diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales.
- ✓ Identificar e interpretar las características fundamentales que definen a los segmentos de recta orientados. (módulo, dirección y sentido).

Descripción: Existen fenómenos de carácter físico que requieren para su estudio el uso de cantidades diferentes a los números reales, ya que estos no poseen toda la información necesaria para describirlos, como es el caso del desplazamiento, la velocidad, la fuerza entre otras. En esta actividad se busca que, a partir de preguntas, los estudiantes se acerquen y realicen inferencias acerca de los diferentes tipos de magnitudes (escalares y vectoriales) que se pueden presentar en una situación de tipo práctico, sus posibles representaciones y características fundamentales que las diferencian; el objetivo principal es lograr la construcción del segmento de recta orientado como representación gráfica de las magnitudes vectoriales.

ETAPA DE INICIO

A. CONSTRUCCIÓN DE LA MAGNITUD ESCALAR.

I. CONSTRUYENDO SEGMENTOS:

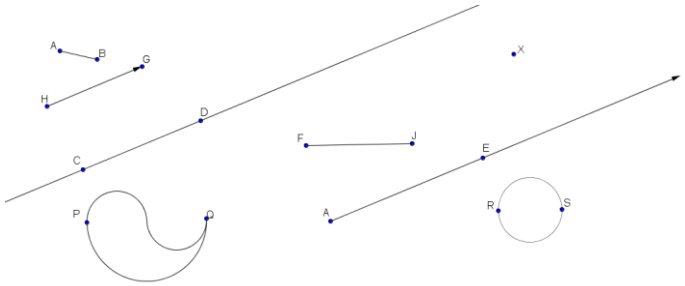
1. Dada la siguiente información:

   - "*Sea 0 el conjunto de todos los segmentos de recta del plano*". [28]

   Analiza y Responde las preguntas presentadas a continuación:

   - ✓ Explique el enunciado propuesto.
   - ✓ Toma una hoja en blanco, en ella:
     - Dibuja diferentes puntos.
     - Construye diferentes segmentos de recta que unan dos puntos distintos de los que dibujaste.
     - ¿Cómo se pueden simbolizar los segmentos de recta construidos?

2. De las figuras presentadas a continuación determina cuales son elementos de *0* ¿por qué?



[28] Se entenderá intuitivamente que *un segmento de recta es la menor trayectoria entre dos puntos distintos* del plano.

3. ¿Cómo reconocemos la cualidad particular que permita determinar si un elemento pertenece a O ó no?

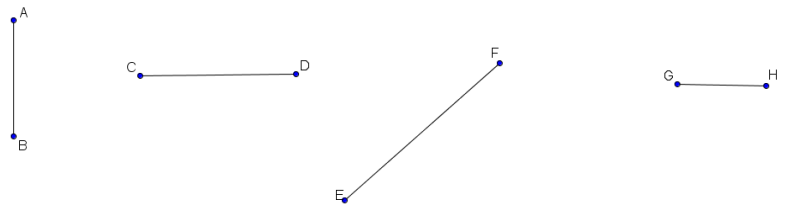
II. HACIA LA CONGRUENCIA DE SEGMENTOS:

Dada la siguiente información:

- En el conjunto O, definiremos intuitivamente una relación llamada de ***congruencia***, de la siguiente manera: "*el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{CD}$, si y sólo si, al superponer uno en el otro, todos y cada uno de los puntos que los conforman coinciden*".

Analiza y Responde las preguntas:

1. Dados los siguientes segmentos; construye conjuntos de segmentos congruentes a cada uno de ellos. Para ello haz uso de la regla y el compás.



2. Si en la definición cambiamos la frase "*al superponer uno en el otro todos y cada uno de sus puntos coinciden*" por "*al trasladarlos con regla y compás, todos y cada uno de los puntos que los conforman coinciden*", ¿cambia el sentido del enunciado? Argumente su respuesta.

3. Se puede afirmar que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{BA}$. justifica tu respuesta.

4. Lee con atención la siguiente información:

   - Una relación R sobre un conjunto no vacío X, se dice de equivalencia, si R cumple las siguientes propiedades:

     R_1.**Propiedad Reflexiva:** Si para todo elemento a de X, se cumple que, a está relacionado consigo mismo.

     R_2.**Propiedad Simétrica:** Si para todo par de elementos a y b de X, se cumple que, Si a está relacionado con b, entonces, b está relacionado con a.

     R_3.**Propiedad Transitiva:** Si para toda terna de elementos a, b, c de X, Si a está relacionado con b y b está relacionado c, entonces, a está relacionado con c.

     A manera de ejemplo y utilizando la definición anterior, veamos cuando una relación sobre el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$ es de equivalencia y cuando no.

- Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales (enteros positivos) se puede probar que la relación de igualdad definida en este conjunto es de equivalencia, ya que:
  1. Para todo $a \in \mathbb{N}$, se cumple que $a = a$ luego es reflexiva.
  2. Para todo $a, b \in \mathbb{N}$. Si $a = b$, entonces $b = a$ luego es simétrica.
  3. Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ luego es transitiva.

- Veamos que se puede probar, que si definimos la relación R en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, como sigue: "dados dos números enteros a y b, están relacionados si su diferencia es un número par, es decir, $a - b = 2p$ para $a, b, p \in \mathbb{Z}$", R determina una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$:
  1. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $a - a = 0$ (0 es un número par). Luego R es reflexiva.
  2. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que si $a - b = 2p$ (es un número par), entonces $b - a = -(a - b) = -2p$ también es un número par (con signo contrario). Luego R es simétrica.
  3. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a - b = 2p$ (es un número par) y $b - c = 2q$ (es un número par) entonces $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c) = 2p + 2q = 2(p + q)$ es un número par. Luego R es transitiva.

- Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales se puede probar que la relación de orden definida en este conjunto no es de equivalencia, ya que aunque es transitiva, es decir, se cumple que si $a < b$ y $b < c$, entonces se cumple que $a < b < c$; no se cumplen las propiedades reflexiva puesto que, no se cumple que $a < a$ y simétrica ya que si $a < b$, entonces no es cierto decir que se cumple que $b < a$.

Haciendo uso de la información anterior, verifica por que la congruencia entre segmentos, define una relación de equivalencia en el conjunto O.

5. Responde las siguientes preguntas:

- ✓ Dado el segmento $\overline{AB}$, ¿Cuántos segmentos congruentes a él podemos construir?
- ✓ Si notamos el conjunto de los segmentos congruentes al segmento $\overline{AB}$, como $[\overline{AB}]$, a dicha colección la denominaremos una *clase de equivalencia*. ¿dado el segmento $\overline{AB}$ cuantas clases de equivalencia lo pueden contener?
- ✓ Dadas las clases de equivalencia $[\overline{AB}]$ y $[\overline{CD}]$, determinadas por los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, ¿existirán en la clase $[\overline{AB}]$ elementos que pertenezcan a la clase $[\overline{CD}]$ y viceversa? Argumenta tu respuesta.
- ✓ De lo anterior, ¿Podemos afirmar lo siguiente?

"*Al definir las clases de equivalencia en el conjunto O, estas inducen una partición en el conjunto, es decir, el conjunto O queda dividido en subconjuntos que presentan las siguientes características:*

- *Dado el segmento $\overline{AB}$, existe una y sólo una clase de equivalencia que lo contiene.*

- *La unión de todas las clases de equivalencia generan al conjunto O.*
- *Dadas dos clases de equivalencia distintas $[\overline{AB}]$ y $[\overline{CD}]$, no tienen elementos en común, es decir son disyuntas".*

Argumenta tu respuesta. Concluye.

En virtud de lo anterior, diremos que cada una de las clases de equivalencia que se pueden definir sobre el conjunto O, formarán un nuevo conjunto que denominaremos ***conjunto cociente*** y lo denotaremos como $O^* = O/\cong$; donde $\cong$ es el símbolo que representa la relación de congruencia definida en O; además, diremos que los elementos O^* se llamarán ***cantidades*** y al conjunto O^* lo denominaremos ***magnitud longitud***.

III. CONSTRUYENDO LA ESTRUCTURA:

ADICIÓN ENTRE SEGMENTOS

1. Dada la siguiente información:

En el conjunto O^* definiremos una operación denominada *suma* entre segmentos de la siguiente manera:

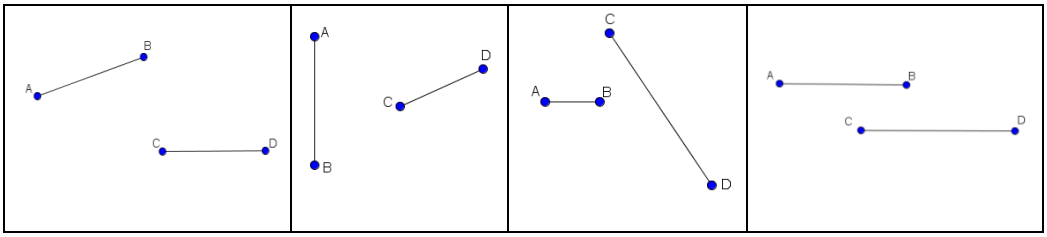
Intuitivamente diremos que: "sumar dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ arbitrarios, es colocarlos uno a continuación del otro, sobre una misma recta $\overleftrightarrow{l}$".

Para ello, procederemos de la siguiente manera:

- *Sean $\overline{AB} \in [\overline{AB}]$ y $\overline{CD} \in [\overline{CD}]$ segmentos de recta arbitrarios.*
- *Sea la recta $\overleftrightarrow{l}$, tal que $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{l}$*
- *Sobre la recta $\overleftrightarrow{l}$, con ayuda del compás haciendo centro en el punto B ubicamos el punto E, de tal manera que B este entre A y E y $\overline{CD} \cong \overline{BE}$.*
- *Al segmento resultante $\overline{AE}$ lo llamaremos la suma de dichos segmentos, es decir, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$"*, además, diremos que $\overline{AE} \in [\overline{AE}]$.

Responde las siguientes preguntas:

1. Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construya con regla y compás el segmento de recta $\overline{AB} + \overline{CD}$ para cada caso, luego determina las clases resultantes de los ejemplos realizados.



2. Sin hacer uso de la medida ¿Compare la longitud de cada segmento suma $(\overline{AB}+\overline{CD})$, obtenido del punto anterior con los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dados? Que puede observar.
3. Verifica mediante ejemplos que la suma es independiente del representante que se tome, es decir, si dados los segmentos de recta $\overline{A'B'} \in [\overline{AB}]$ y $\overline{C'D'} \in [\overline{CD}]$, siempre se cumple que $\overline{A'B'}+\overline{C'D'}=\overline{A'E'} \in [\overline{AE}]$
4. De los ejercicios anteriores ¿Qué puede concluir?

De la construcción anterior, se ha extendido la suma de segmentos de recta a la suma de clases de equivalencia, obtenidas mediante la relación de congruencia entre segmentos, eligiendo un representante de cada una de las clases respectivamente, por ello, parece natural definir esta suma entre las clases de la siguiente manera:

$$[\overline{AB}]+[\overline{CD}]=[\overline{AB}+\overline{CD}]$$

5. Verifica gráficamente si se cumplen las siguientes propiedades:
   - ✓ $[\overline{AB}]+[\overline{CD}]=[\overline{CD}]+[\overline{AB}]$
   - ✓ $([\overline{AB}]+[\overline{CD}])+[\overline{EF}]=[\overline{AB}]+([\overline{CD}]+[\overline{EF}])$
   - ✓ Por convención, definiremos el segmento de recta $\overline{AA}$ como un segmento cuya longitud es cero, por consiguiente, la clase de equivalencia $[\overline{AA}]=[0]$ es aquella que contiene a todos los segmentos cuya longitud es cero. verifica gráficamente que siempre se cumple que $[\overline{AA}]+[\overline{CD}]=[\overline{CD}]$.

6. Si $[\overline{AB}]=[\overline{CD}]$, entonces se cumple que ¿$[\overline{AB}]+[\overline{EF}]=[\overline{CD}]+[\overline{EF}]$? Argumenta tu respuesta.

ORDEN ENTRE SEGMENTOS

1. Construye otra posible forma de comparación distinta a la ya planteada por la relación de equivalencia definida entre segmentos.

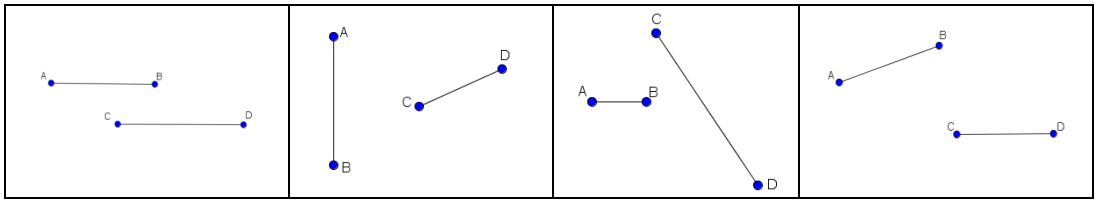
2. Dados los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, intuitivamente ¿Qué significa que $\overline{AB}$ sea menor que $\overline{CD}$? Haz una representación grafica para establecer un criterio y determina en qué casos se cumple dicha relación.

3. Dada la siguiente definición:

   "*Dados los segmentos recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, diremos que el segmento $\overline{AB}$ es menor que el segmento $\overline{CD}$, si* existe el segmento $\overline{EF}$ tal que $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{CD}$. *Este hecho lo denotamos $\overline{AB}<\overline{CD}$* "

   Responde:

   - Dados los segmentos que se muestran a continuación, compáralos y determina cual es menor en cada caso. Ten en cuenta la definición anterior ¿siempre existe un segmento $\overline{EF}$ que hace cierta la igualdad $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{CD}$?. Justifica tu respuesta en cada caso.



Además, diremos que $[\overline{AB}] \leq [\overline{CD}]$, *si y solo si* $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$ *o* $[\overline{AB}] = [\overline{CD}]$.

De la misma manera como se definió la suma entre clases, parece natural definir la relación de orden entre las mismas, de la siguiente manera:

Si $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$, *entonces existe la clase de equivalencia* $[\overline{EF}]$ *tal que* $[\overline{AB}] + [\overline{EF}] = [\overline{CD}]$ *o* $[\overline{AB}] = [\overline{CD}]$.

- Verifica la proposición. Justifica tu respuesta
  Si $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$ y $[\overline{HG}] < [\overline{JK}]$, entonces $[\overline{AB}] + [\overline{HG}] < [\overline{CD}] + [\overline{JK}]$
- ¿Si $[\overline{AB}] < [\overline{CD}]$, entonces $\overline{AB} < \overline{CD}$? Argumenta tu respuesta.

4. Si definimos la resta entre cantidades como sigue:

$$[\overline{AB}] - [\overline{CD}] = [\overline{XY}] \text{ si y sólo si, } [\overline{CD}] + [\overline{XY}] = [\overline{AB}]$$

- ➢ Ilustra la definición y describe cómo se pueden restar segmentos de recta con regla y compás.
- ➢ ¿Qué condiciones se deben cumplir para que $[\overline{AB}] - [\overline{CD}]$, siempre pueda realizarse?

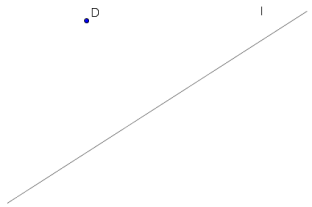
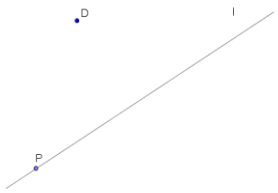
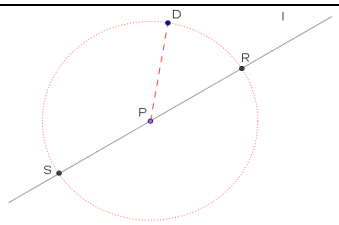
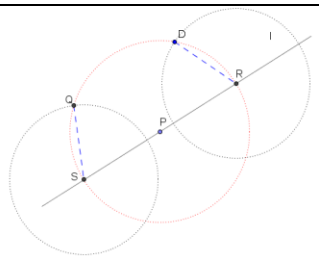
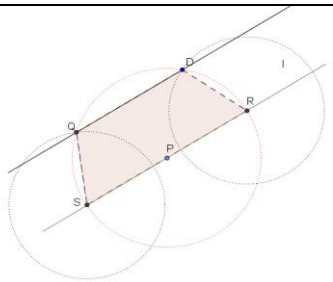
Con el desarrollo de los puntos anteriores, se ha definido una operación interna en O^* denominada suma entre cantidades, la cual permitirá dotar al conjunto de una estructura algebraica, que en este caso será de monoide conmutativo $(O^*, +)$; además de una relación de orden entre cantidades, generándose un conjunto totalmente ordenado $(O^*, \leq)$.

PRODUCTO DE UN SEGMENTO POR UN ESCALAR

1. Responde las siguientes preguntas:
   - Da significado geométrico a las siguientes expresiones $5\overline{AB}$, $7\overline{AB}$, $11\overline{AB}$.
   - Dado el segmento de recta $\overline{AB}$ arbitrario, construye con regla y compás $\frac{1}{5}\overline{AB}$, $\frac{1}{7}\overline{AB}$, $\frac{1}{11}\overline{AB}$, para ello, ten en cuenta las siguientes construcciones:

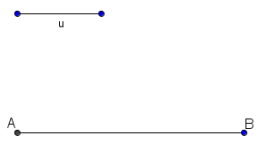
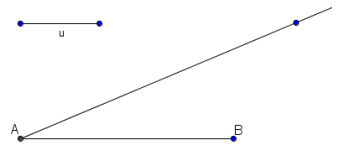
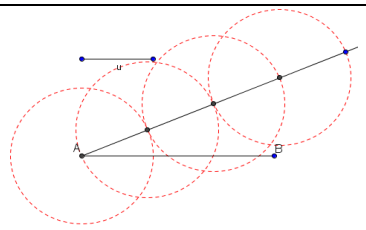
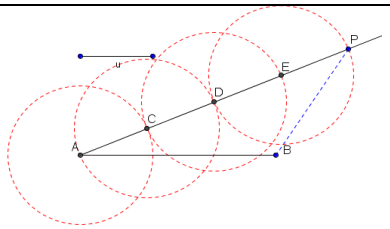
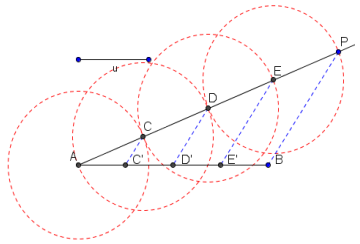
Construcción 1: construcción de rectas paralelas

Para realizar la construcción geométrica de una recta paralela a una recta $\overleftrightarrow{l}$ que pasa por un punto *D*, exterior a la recta $\overleftrightarrow{l}$; como se muestra a continuación:

1. Dibuje la recta $\overleftrightarrow{l}$ y el punto *D* exterior a ella.	
2. Determine un punto *P* cualquiera en la recta $\overleftrightarrow{l}$.	
3. Haciendo centro en el punto *P* de la recta $\overleftrightarrow{l}$ y con radio $\overline{PD}$, trace una circunferencia que denominaremos C, ésta interseca a la recta $\overleftrightarrow{l}$ en los puntos *S* y *R.*	
4. Con el compás, trace una circunferencia con centro en *S* de radio $\overline{RD}$, la cual interseca a la circunferencia C, en el punto *Q.*	
5. Finalmente, una los puntos *D* y *Q,* obteniendo la recta $\overleftrightarrow{DQ}$, que será paralela a la recta $\overleftrightarrow{l}$.	

2. En la construcción anterior ¿Por qué el segmento de recta $\overline{DQ}$ resulta también ser paralela a la recta $\overleftrightarrow{l}$?

Construcción 2: división de un segmento en 4 partes iguales

1. Dibuje el segmento de recta $\overline{AB}$ y un segmento de recta $\bar{u}$ denominado patrón o unidad.	
2. Trace una semirecta $\vec{r}$ que parta del extremo A, del segmento de recta $\overline{AB}$.	
3. Sobre $\vec{r}$, trace la circunferencia de radio $\bar{u}$, 4 veces, que será el número de partes en que se dividirá el segmento $\overline{AB}$.	
4. Unimos el vértice B del segmento de recta $\overline{AB}$, con el cuarto punto (P) obtenido de la traslación de $\bar{u}$.	
5. Finalmente, trazamos rectas paralelas al segmento de recta obtenido del punto anterior, $\overline{BP}$, por los puntos obtenidos mediante la traslación del segmento $\bar{u}$. Asi, quedará el segmento $\overline{AB}$ dividido en 4 partes iguales	

3. Generaliza la construcción anterior a n partes iguales.
4. Dado el segmento de recta $\overline{AB}$ arbitrario, construye con regla y compás, $\frac{1}{4}\overline{AB}$, $4\overline{AB}$, $\frac{3}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4}(3\overline{AB})$=3$\left(\frac{1}{4}\overline{AB}\right)$, para ello ten en cuenta las construcciones anteriores. De igual manera da sentido a las expresiones $\frac{1}{4}[\overline{AB}]$, $4[\overline{AB}]$, $\frac{3}{4}[\overline{AB}]$.
5. En general, ¿es cierto que $m[\overline{AB}] = [m\overline{AB}]$ para m entero positivo? Argumenta tu respuesta.
6. ¿Dado el segmento de recta $\overline{CD}$ existe un segmento de recta $\overline{AB}$ tal que $4\overline{AB} = \overline{CD}$?
7. ¿geométricamente qué significa, $\frac{m}{n}[\overline{AB}]$?
8. Verifica que siempre se cumple que $\frac{m}{n}[\overline{AB}] = m\left[\frac{1}{n}\overline{AB}\right] = \frac{1}{n}[m\overline{AB}]$
9. En general, ¿Se puede dar el caso en el que $m[\overline{AB}] = n[\overline{CD}]$, es decir, $\frac{m}{n}[\overline{AB}] = [\overline{CD}]$, para $[\overline{AB}]$ y $[\overline{CD}]$ dos clases distintas, para m y n enteros positivos? Argumente su respuesta.

Con lo anterior, se ha construido de manera inductiva una operación externa que denominaremos producto por escalar, de la siguiente manera:

En el conjunto O^* *"sea la clase de equivalencia* $[\overline{AB}]$ *y* k *un número entero positivo, se define el producto de la clase por un número entero positivo como:*

$$0[\overline{AB}] = [0]$$
$$1[\overline{AB}] = [\overline{AB}]$$
$$2[\overline{AB}] = [\overline{AB}] + [\overline{AB}]$$

....

$$k[\overline{AB}] = \underbrace{[\overline{AB}] + [\overline{AB}] + [\overline{AB}] + \cdots + [\overline{AB}]}_{k\ clases\ de\ equivalencia\ de\ segmentos}$$

Si k[29] *es un número racional de la forma* $k = \left(\frac{1}{q}\right)$, *entonces* $k[\overline{AB}] = \left(\frac{1}{q}\right)[\overline{AB}]$ *y se definirá como la clase que resulta de dividir el segmento* $\overline{AB}$ *en* q *partes iguales, para luego ser definido el producto por escalar para cualquier racional de la forma* $k = \frac{p}{q}$, *de la siguiente manera* $k[\overline{AB}] = \frac{p}{q}[\overline{AB}] = p\left(\left(\frac{1}{q}\right)[\overline{AB}]\right)$.

IV. CONSTRUYENDO LA MEDIDA

Dada la información**:**

Sea la clase de equivalencia $[\overline{AB}]$ *y la clase de equivalencia* $[\bar{e}]$ *denominada cantidad patrón o unidad. Dado los segmentos de recta* $\overline{AB} \in [\overline{AB}]$ *y* $\bar{u} \in [\bar{e}]$, *si se tiene que* $\overline{AB} = n\bar{u}$, *entonces diremos que* $\bar{u}$ *cabe un número exacto de veces en* $\overline{AB}$, *se denominará la* ***medida entera*** *de* $\overline{AB}$ *y se denota* $m_{\bar{u}}(\overline{AB}) = n$ *para* n *entero positivo. Así mismo, Si* $\overline{AB} = \frac{n}{m}\bar{u}$, *entonces diremos que las* m *partes alícuotas de* $\bar{u}$ *caben un número exacto de veces en* $\overline{AB}$, *se denominará la* ***medida racional*** *de* $\overline{AB}$, *para* n *y* m *enteros positivos y* $m \neq 0$ *y se denota* $m_{\bar{u}}(\overline{AB}) = \frac{n}{m}$.

Responde las siguientes preguntas:

1. Dado el segmento $\bar{u}$ unidad o patrón:
   - ✓ Determina si dicho segmento, cabe exactamente en cada uno de los segmentos presentados a en la figura.
   - ✓ Determina cuales segmentos tienen un número exacto de veces el segmento $\bar{u}$ y cuáles no, clasifícalos.

[29] Aunque se carece de una definición formal si k es un número irracional $(k \in \mathbb{Q}^c)$, se propone introducirlo a través de la medida o de la construcción de la magnitud longitud como se mostró en el referente disciplinar, seleccionando un segmento de recta fijo $\bar{u}$ denominado unidad y definirlo mediante el axioma del extremo superior como se hace para los números reales; es decir, $\|\overline{AB}\| = Sup\left\{{}^{p}/_{q} / \frac{p}{q}\bar{u} \leq \overline{AB}\right\} = m_u(\overline{AB})$, se acepta que $k\overline{AB}$ es un segmento que tiene por medida$|k|\|\overline{AB}\|$, el cual existe por el axioma de continuidad para las magnitudes escalares.

- ✓ Determina la medida de los segmentos en los que el segmento $\bar{u}$ cabe exactamente, haz uso de la regla y el compás.
- ✓ Establece una estrategia para determinar la medida de los segmentos en los cuales el segmento $\bar{u}$ no cabe exactamente.

2. Dado el segmento $\bar{u}$ unidad y el segmento $\overline{AB}$ ¿Cuántas veces cabe $\bar{u}$ en $\overline{AB}$?

3. Construya con regla y compás segmentos que contengan un número exacto de veces al segmento $\bar{u}$
4. ¿Usted siempre puede conseguir un segmento $\overline{AB}$ que contenga un número exacto de veces al segmento $\bar{u}$? Justifique su respuesta.
5. Construya segmentos $\bar{u}$ y $\overline{AB}$, tal que el segmento $\bar{u}$ no esté contenido un número exacto de veces en el segmento $\overline{AB}$, luego para calcular la medida de $\overline{AB}$ proceda de la siguiente manera:
   - ✓ Encuentre un punto $C \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ y $\overline{AC} = n\bar{u}$ ($\bar{u}$ este contenido exactamente un número de veces en $\overline{AC}$)
   - ✓ Compara el segmento $\overline{CB}$ con el segmento $\bar{u}$ y determina cual es mayor. Si $\bar{u}$ es mayor que $\overline{CB}$, utiliza la construcción 2 para dividirlo en m partes iguales, obteniendo el segmento $\bar{u}_1$ tal que $\bar{u} = m\bar{u}_1$.
   - ✓ Determina cuantas veces cabe el segmento $\bar{u}_1$en $\overline{CB}$. Si $\bar{u}_1$ esta contenido un número exacto de veces (n_1) en $\overline{CB}$, entonces $\overline{CB} = n_1\bar{u}_1$, donde n_1 será la medida de $\overline{CB}$ y $\bar{u}_1 = \frac{1}{m}\bar{u}$. En caso contrario, vuelve a dividir el segmento $\bar{u}_1$ en d_1 partes iguales y repite el procedimiento[30].
   - ✓ Si $\overline{AC} = n\bar{u}$ y $\overline{CB} = n_1\bar{u}_1$, entonces $\overline{AC} + \overline{CB} = n\bar{u} + n_1\bar{u}_1 = n\bar{u} + n_1\frac{1}{m}\bar{u} = \left(n + \frac{n_1}{m}\right)\bar{u} = \overline{AB}$, diremos que $n + \frac{n_1}{m}$ será la medida de $\overline{AB}$.
6. Construye un segmento $\bar{u}$ y distintos segmentos, repite el procedimiento anterior para hallar la medida de dichos segmentos.
7. Teniendo en cuenta lo hecho anteriormente, construye un segmento $\bar{u}$ y establece un criterio bajo el cual se pueda encontrar la medida de aquellos segmentos que se obtienen como el conteo de unidades o fracciones de $\bar{u}$.

En conclusión y formalmente, Si dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tales que, existen enteros positivos p y q, para $\langle p, q\rangle$[31] $= 1$, que satisfacen $\overline{AB} = p\bar{u}$ y $\overline{CD} = q\bar{u}$, o, de manera equivalente $q\overline{AB} = p\overline{CD}$ con respecto a un segmento patrón $\bar{u}$, diremos que los segmentos son ***conmensurables****, en caso contrario, los denominaremos* ***inconmensurables****.*

---

[30] Si el procedimiento de dividir $\bar{u}_k$ se da de manera finita, obteniendo la medida del segmento $\overline{AB}$ como una cadena de números racionales, entonces $\overline{AB} = \left(n + \frac{n_1}{m} + \frac{n_2}{m^2} + \cdots \frac{n_k}{m^k}\right)\bar{u}$ y se dirá que la cantidad $[\overline{AB}]$ es ***conmensurable*** con la unidad $[\bar{u}]$, en caso contrario, diremos que la cantidad $[\overline{AB}]$ es ***inconmensurable*** con la unidad $[\bar{u}]$ y se le asignará un número irracional por el axioma de continuidad de las magnitudes escalares.

[31] La notación $\langle p, q\rangle$ es otra notación para denotar el máximo común divisor entre p y q, es decir, $m.c.d(p, q) = \langle p, q\rangle$.

Discusión de la actividad de inicio (parte A): Con la creación de la *magnitud –* ***longitud***– mediante la creación del conjunto O^*, se ha construido una de las denominadas ***magnitudes escalares***, ya que los elementos que allí pertenecen, cumplen las condiciones interpuestas por la definición, los cuales se obtuvieron mediante la relación de congruencia entre segmentos, que serán llamados las *cantidades*; además, de definirse en dicho conjunto una relación de orden, que de paso, es un orden total sobre éste conjunto y dos operaciones una interna llamada de adición entre clases de equivalencia y otra externa denominada producto de una clase de equivalencia por un número real positivo, las cuales permitirán generar la estructura algebraica. Dado lo anterior, la construcción hecha nos va a permitir afirmar que la magnitud construida es ordenada, divisible y arquímediana[32], la cual queda bien determinada por el valor o dato numérico que se le asigne.

B. CONSTRUCCIÓN DEL SEGMENTO DE RECTA ORIENTADO. (LA FLECHA)

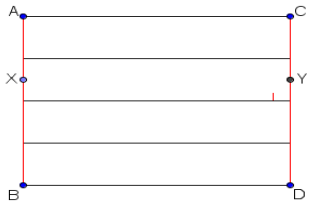
Veamos la siguiente situación:

La prueba de 100 metros es una competencia donde los atletas intentan recorrer la distancia descrita en el menor tiempo posible. Ésta carrera, a diferencia de las demás de velocidad, consta de unos carriles, en el que cada atleta (8 como máximo) se sitúa en uno de ellos, donde se deben mantener a lo largo de toda la carrera sin poder salirse de este.

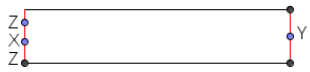
Haciendo uso de la información anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Es suficiente con saber que la distancia total de la pista es de 100 metros para determinar el recorrido de los atletas durante la carrera? Argumente su respuesta.

2. Si se supone que el punto X es el punto de salida y el punto Y es el punto de llegada, para cada atleta ubicado en su carril (Como se muestra en la figura), diremos que a cada recorrido descrito gráficamente por los atletas para llegar de X a Y, lo denominaremos su ***trayectoria***.



   - ¿Qué sucede si un atleta tiene distintas posiciones de partida en un carril, como es el caso de las posiciones X, Z y Z' que se muestra en la gráfica?



   - Construya representaciones gráficas que describan los posibles recorridos realizados por un atleta en su carril, para ello tenga en cuenta que él corre de la salida a la meta; además, dibuje con otro color diferente al utilizado, el recorrido que describe exactamente los 100 metros.
   - ¿Cómo debe ser la trayectoria descrita por cada atleta para que el recorrido sea exactamente de 100 metros?
   - Sin hacer uso de la medida ¿Cómo puede comprobar que el trayecto escogido por usted en el punto anterior es el que determina exactamente los 100 metros? ¿qué propiedad geométrica se debe cumplir?

[32]La propiedad arquimediana entre las cantidades de la magnitud longitud establece que: dadas las clases $[\overline{AB}]$ y $[\overline{CD}]$, para $[\overline{AB}] \neq [\overline{AA}]$, existe un número $n \in \mathbb{N}$, tal que $n[\overline{AB}] > [\overline{CD}]$.

- ¿Cómo deben ser la línea de partida y la línea de llegada para que cada atleta describa exactamente los 100 metros? Argumente su respuesta geométricamente.
- Se dirá que si un atleta describe el segmento $\overline{XY}$ a la recta que contiene a dicho segmento se le llamará la ***dirección***. ¿Qué sucede si otro atleta parte de un punto X' hasta un punto Y', de tal manera que tenga la misma dirección que el primero? ¿Qué relación geométrica se debe cumplir entre los segmentos $\overline{XY}$ y $\overline{X'Y'}$ para que la dirección sea la misma?

3. Si se tiene que dos atletas se encuentran en entrenamiento, corren cada uno en un carril distinto, manteniendo la misma distancia entre ellos y la misma dirección durante todo el recorrido:

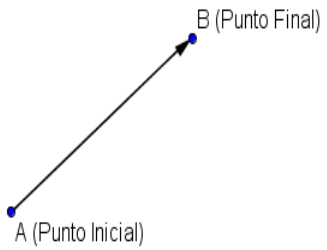
   - ¿Cómo son sus trayectorias?
   - Si uno de los atletas va de la salida a la llegada y el otro de la llegada a la salida, e inician en el mismo instante ¿Cómo son sus trayectorias?
   - ¿Por qué el segmento de recta $\overline{XY}$ no sirve para representar gráficamente si el corredor parte de la salida a la meta o por el contrario si se está devolviendo de la meta a la salida? Argumente su respuesta.
   - Si definimos el ***sentido*** del recorrido fijando el punto de partida y el punto de llegada (en ese orden) ¿se puede afirmar que el segmento de recta $\overline{XY}$ representa gráficamente la misma trayectoria que el segmento de recta $\overline{YX}$? Argumente su respuesta.
   - ¿Para usted que simboliza $\overrightarrow{XY}$?

4. Se definirá el módulo del segmento de recta orientado como $\|\overrightarrow{XY}\| = \|\overline{XY}\| = m_u(\overline{XY}) = 100$ metros, donde u es la unidad patrón equivalente al segmento de un (1) metro (a escala). Construya distintos segmentos de recta, que unan las distintas posiciones que puede tener un atleta en su carril con un punto Y fijo de la llegada, haga uso de la medida para determinar que el segmento de que mide exactamente los 100 metros es el menor recorrido de todos los construidos. justifique su respuesta geométricamente.

5. ¿Existirá otra figura geométrica diferente a la dibujada, que visualmente pueda representar el trayecto de exactamente los 100 metros realizado por los atletas? Argumente su respuesta.

Discusión de la actividad de inicio (parte B): Con la actividad de inicio, se pudo ver que no bastó con la información de la trayectoria más corta (óptima) que podían describir los atletas en la carrera, ni cuál es la distancia de dicho trayecto, sino que además, se necesitaron dos cualidades adicionales, una el trasladarse sobre rectas paralelas a la recta que contenía el segmento de la menor trayectoria descrito por los competidores en cada carril de la pista y la otra, hacer explicito hacia donde se va a trasladar el atleta durante la competencia, es decir, se debía definir el punto de partida (la salida) y el punto de llegada (la meta). A estas dos propiedades condicionales las denominaremos la ***dirección*** y el ***sentido***. Es así, que este tipo de magnitudes que quedan determinadas por una magnitud escalar, una dirección y un sentido se denominarán ***magnitudes vectoriales***.

Por otra parte, para la construcción gráfica del segmento de recta orientado en el plano, bastó con tomar dos puntos distintos uno de partida (A) y uno de llegada (B), los cuales nos permitieron determinar la trayectoria más corta, descrita por los atletas, que visualmente es representado mediante el segmento de recta que los une ($\overline{AB}$) y que es paralelo a las líneas que conforman cada carril, éste a su vez, estará contenido en una única recta $\overleftrightarrow{l}$, manteniendo así, a todos y cada uno de los puntos que lo conforman en la dirección que posea dicha recta, diremos entonces que el segmento de recta posee ***dirección***, de igual manera, cuando determinamos el recorrido del segmento determinando el punto de partida (A) y el punto de llegada (B), estamos definiendo la orientación del mismo, es entonces, cuando diremos que el segmento tiene ***sentido***, ya que los puntos están dados en un cierto orden y lo representaremos mediante una cabeza de flecha en el punto final del segmento, finalmente la distancia que hay del punto A al punto B, será denominada la medida o ***módulo*** que se le asigne al segmento de recta orientado, que muchas veces por abuso del lenguaje lo denominamos la longitud del segmento.



Es así, que una flecha encuentra su analogía geométrica en el concepto de segmento de recta orientado, ya que éste posee módulo, dirección y sentido. En consecuencia, Si dados dos puntos distintos A (punto de partida) y B (punto de llegada) en ese orden, forman un segmento de recta orientado, que generalmente lo denotamos con el símbolo $\overrightarrow{AB}$ y será la representación gráfica de las magnitudes vectoriales.

ETAPA DE DESARROLLO

Objetivo: precisar los conceptos de módulo, dirección y sentido que caracterizan a los segmentos de recta orientados.

1. Teniendo en cuenta las situaciones anteriores construya:

   - ✓ Segmentos de recta orientados, que tengan diferentes direcciones, diferentes sentidos y diferentes módulos.
   - ✓ Segmentos de recta orientados que tengan iguales direcciones, diferentes sentidos y diferentes módulos.
   - ✓ Segmentos de recta orientados que tengan iguales direcciones, diferentes sentidos e iguales módulos.
   - ✓ Indiqué cuáles son las condiciones para que dos segmentos de recta orientados sean diferentes.
   - ✓ Indique cuales son las condiciones para que dos segmentos de recta orientados sean colineales o deslizantes. Para ello busque la definición e interprétela.
   - ✓ ¿Dos segmentos de recta orientados pueden tener la misma dirección y no ser colineales, ni paralelos? Argumenta tu respuesta.

2. Una forma de definir el ***módulo*** de un segmento de recta orientado es como se muestra a continuación:

   Sea $\overrightarrow{AB}$ un segmento de recta orientado y $\bar{u}$ un segmento de recta arbitrario fijo denominado patrón. Denominaremos la ***medida*** de $\overrightarrow{AB}$ a la medida del segmento de recta $\overline{AB}$[33], es decir, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overline{AB}\| = m_u(\overline{AB})$, a su vez, será llamada la ***norma*** o ***módulo*** del segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$. Además, $\|\overline{AB}\|$ determinará la ***distancia*** que hay del punto A al punto B.

   Con base en el párrafo anterior, conteste las siguientes preguntas:

   - ✓ ¿si $\overline{AB} \cong \overline{BA}$, entonces $m_u(\overline{AB}) = m_u(\overline{BA})$? Justifique su respuesta
   - ✓ ¿ $\|\overrightarrow{AB}\|$=$\|\overrightarrow{BA}\|$? Justifique su respuesta.
   - ✓ ¿Existe alguna diferencia entre $\|\overrightarrow{AB}\|$ y $\|\overline{AB}\|$?
   - ✓ Justifique y represente gráficamente haciendo uso de regla y compás, la siguiente propiedad:

     "Dados dos puntos P y Q en una recta $\overleftrightarrow{l}$, siempre existirá un número real positivo r, tal que, es la longitud del segmento de recta orientado determinado por dichos puntos $\left(\|\overrightarrow{PQ}\| = r\right)$".

   - ✓ ¿Existirá un segmento de recta orientado cuyo módulo sea cero? Argumente su respuesta.

3. Otra forma de definir la ***dirección*** de un segmento de recta orientado es como sigue:

   *"Dados la recta $\overleftrightarrow{l}$ en el plano y el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$ contenido en ella; la clase de equivalencia conformada por todas las rectas paralelas a la recta $\overleftrightarrow{l}$, se denomina la **dirección** del segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$".*

   Con base en la definición, justifique porqué:

   - ✓ Dado el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$, ¿Cuántas rectas y segmentos de recta orientados paralelos a él puedes encontrar? ¿Cuántos segmentos de recta orientados congruentes o de igual medida? Argumenta tu respuesta.
   - ✓ El paralelismo entre rectas determina una relación de equivalencia (haga uso de la definición de relación de equivalencia dada en la actividad de inicio parte A numeral 2)
   - ✓ Construya clases de equivalencia a partir del paralelismo entre rectas.

---

[33] Recuerde que: *si se tiene que $\overline{AB} = n\bar{u}$, entonces $\bar{u}$ cabe un número exacto de veces en $\overline{AB}$, se denomina la **medida entera** de $\overline{AB}$ y se denota $m_{\bar{u}}(\overline{AB}) = n$ para n entero positivo. Así mismo, Si $\overline{AB} = \frac{n}{m}\bar{u}$, entonces las m partes alícuotas de $\bar{u}$ caben un número exacto de veces en $\overline{AB}$, se denomina la **medida racional** de $\overline{AB}$, para n y m enteros positivos y $m \neq 0$ y se denota $m_{\bar{u}}(\overline{AB}) = \frac{n}{m}$.*

- ✓ Si dos segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen igual dirección, entonces las rectas que los contienen son rectas paralelas. Verifíquelo gráficamente usando regla y compás.
- ✓ Dos segmentos de recta orientados paralelos a uno dado, son paralelos entre sí.

4. ¿Qué entiende con la frase: "si dos segmentos de recta orientados tienen igual dirección, entonces cabe la posibilidad que uno de ellos sea nulo"? explique.

5. Otra forma de definir el ***sentido*** de un segmento de recta orientado es como sigue a continuación:

   "Dados dos segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ que tengan la misma dirección, tienen el mismo sentido:

   a. *Cuando pertenecen a la misma recta y al hacer coincidir sus puntos iniciales A y C, el segmento de recta orientado $\overrightarrow{CD}$ está en la misma semirecta determinada por A donde se encuentra B.*
   b. *Cuando están en rectas paralelas distintas y los puntos finales de cada uno de ellos están en el mismo semiplano generado por la recta que une sus puntos iniciales"*

   - Construya gráficamente las situaciones descritas en los literales *a* y *b*.
   - Qué postulados, teoremas o definiciones de la geometría Euclidiana permiten que el sentido este bien definido. Enúncielos.
   - Con base en la definición anterior. Qué condiciones se debe cumplir para que
     - ✓ Dos segmentos de recta orientados tengan sentidos contrarios.
     - ✓ Dos segmentos de recta orientados tengan diferentes sentidos

     (Realice la representación geométrica correspondiente en cada caso)

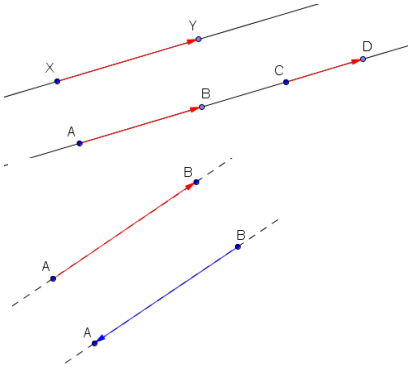
6. Si se afirma que: "*El **sentido** de un segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$, es una cualidad que este posee para distinguirlo del segmento orientado $\overrightarrow{BA}$*", entonces podemos decir, que el sentido de un segmento de recta orientado esta dado como una comparación de éste con otros de izquierda a derecha. ¿por qué?

7. Aunque $\overline{AB} = \overline{BA}$, no es cierto afirmar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ ¿representan el mismo segmento de recta orientado? ¿por qué? Demuestre gráficamente este hecho y justifíquelo haciendo uso de la definición dada en el numeral anterior.

8. Determina un criterio para determinar cuando dos segmentos de recta orientados son opuestos, para ello ten en cuenta las cualidades definidas en los segmentos de recta orientado el módulo, la dirección y el sentido.

9. ¿Cómo se entendería el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AA}$? ¿Qué módulo, dirección y sentido tiene?

Discusión de la actividad de desarrollo (Algunos Casos particulares): De los ejercicios anteriores se buscaba construir algunos tipos de segmentos de recta orientados importantes que poseen características particulares, los cuales van aportando al desarrollo de la teoría, es el caso de los segmentos de recta orientados colineales, opuestos y el segmento de recta orientado nulo, los cuales se describen a continuación:



- ✓ Diremos que dos o más segmentos de recta orientados son colineales o deslizantes si son paralelos o están contenidos en la misma recta.

- ✓ el segmento de recta orientado opuesto al segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$ será por definición $\overrightarrow{BA}$, este hecho permite entender que el sentido de un segmento de recta orientado es importante.

- ✓ Las definiciones anteriores, permiten determinar cuando dos segmentos de recta orientados poseen:

  - Sentidos diferentes (si tienen diferente dirección)
  - Sentidos contrarios(si tienen igual dirección, diferente módulo y los puntos finales se encuentran en semiplanos distintos a los que determina la recta que une sus puntos iniciales)
  - Sentidos opuestos (si tienen igual módulo y dirección, pero sentidos contrarios)

- ✓ En el caso que $A = B$, es decir, donde el punto inicial y el punto final sean coincidentes, se puede afirmar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, y geométricamente representa un punto, se denominará segmento de recta orientado nulo (también denominado cero $\vec{0}$). De paso aceptamos por convención que $\vec{0}$ es un segmento de recta orientado que tiene módulo 0, no se le asigna dirección, ni sentido; esta afirmación se soporta en dos hechos fundamentales, por un lado, se sabe que $[\overline{AA}] = \emptyset$, y por el otro, que $\|\overline{AA}\| = 0$; También diremos que él es su propio opuesto, es decir, $\vec{0} = -\vec{0}$.

ETAPA DE FINALIZACIÓN

1. Presente ejemplos de magnitudes vectoriales como por ejemplo el desplazamiento, la velocidad, la fuerza, el peso, donde se evidencie claramente la magnitud escalar de éstas. Además haga un paralelo entre este tipo de magnitudes.

2. Establezca la diferencia entre medida, cantidad y magnitud. De igual manera establezca la diferencia entre magnitud escalar y cantidad escalar, magnitud vectorial y cantidad vectorial.

3. Escriba un criterio que permita determinar cuando dos o más segmentos de recta orientados poseen la misma dirección. Utilice los postulados, teoremas o definiciones de la geometría euclidiana para justificar su respuesta.

4. Argumenta cada una de las siguientes afirmaciones**:**

   - Dados dos puntos distintos A y B en el plano, ¿cuántos posibles sentidos se pueden determinar para el segmento $\overline{AB}$? Argumente su respuesta.
   - Dados dos segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con igual dirección. Indique en qué casos dichos segmentos de recta orientados tienen igual sentido.
   - ¿cuántos vectores paralelos a $\vec{0}$ puedes encontrar?

5. Toma puntos arbitrarios del plano y construye segmentos de recta orientados que tengan la dirección que desees, pero con diferentes módulos y sentidos. Determina con los segmentos que construiste clases de equivalencia respecto al módulo, a la dirección y al sentido.

6. Del punto anterior determina relaciones de equivalencia a partir de los criterios definidos para la construcción de segmentos de recta orientados, realizados en las actividades de inicio.

7. ¿Qué información fue necesaria para dibujar el segmento de recta orientado (la flecha)?

8. La figura presentada a continuación, ¿también podría ser una representación gráfica de las magnitudes vectoriales que puede ser reemplaza por el segmento de recta orientado? Justifica tu respuesta.

3.2.2. Actividad 2: Trasladando el edificio: Equipolencia de segmentos de recta orientados, definición de vector libre y definición de desplazamiento.

Objetivos:
- ✓ Definir la igualdad de segmentos de recta orientados.
- ✓ Definir el vector libre a partir de la igualdad de segmentos de recta orientados.
- ✓ Definir el desplazamiento como un vector libre.

Descripción: la construcción de la definición de vector libre se hará a partir de una situación concreta, que conllevará a la representación gráfica de esta mediante figuras y el uso y manejo de los segmentos de recta orientados (flechas), como representaciones visuales para el acercamiento a la noción de desplazamiento; para ello, se construirá la definición de equipolencia e igualdad de segmentos de recta orientados mediante la construcción de las clases de equivalencia determinadas por dichos segmentos.

ETAPA DE INICIO

Veamos la siguiente noticia tomada del periódico el TIEMPO publicada el 29 de septiembre de 1999:

"En Bogotá hace aproximadamente cuarenta años, la construcción de la avenida calle 19 se vio obstruida por el llamado edificio Cudecom, el cual se encontraba en la intersección con la avenida Caracas. Dicha estructura, levantada veinte años antes, tenía ocho pisos y dada su excelente calidad de construcción podía dar muchos años más de uso. En vez de ser demolida para dar paso a la nueva vía, se determinó, trasladarlo hacia el nor-este una distancia de veintinueve metros, ésta labor tomó cerca de un año de negociaciones, diseños y construcción, para poder finalmente trasladar este edificio de ocho mil toneladas de peso la distancia descrita, en un tiempo estimado de nueve horas y a una velocidad promedio de movimiento de veinte centímetros por minuto".

1. Teniendo en cuenta lo anterior y si decimos que:

   "*El edificio se traslada cuando todos y cada uno de los puntos que lo conforman se mueven paralelamente en la misma dirección, manteniendo el sentido y la misma distancia, conservándose tanto la forma, como el tamaño".*

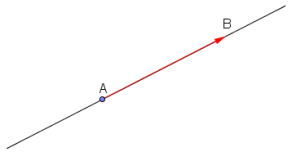
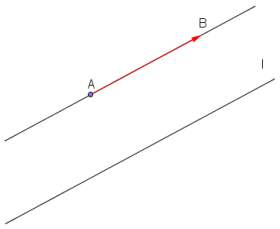
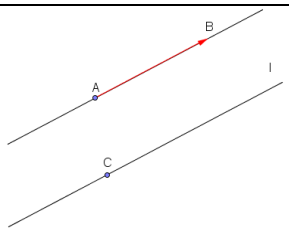
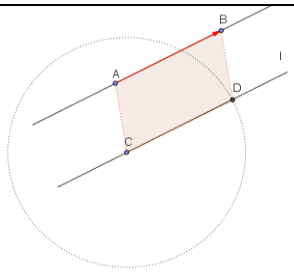
   Responde las siguientes preguntas:

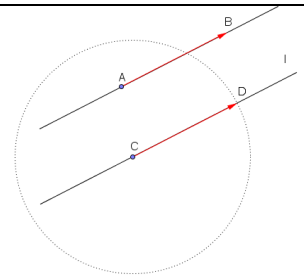
   - ✓ Represente gráficamente la situación del edificio, aplicando la definición anterior dada en el párrafo anterior.
   - ✓ Explique Por qué no se deformó el edificio al trasladarlo.
   - ✓ ¿Qué condiciones cumplen todos los puntos que conforman la base para que pueda moverse el edificio? Argumente su respuesta.
   - ✓ ¿Ocurrirá siempre lo mismo con todos los objetos que se les aplique una traslación? Argumente su respuesta.

2. Si tuviéramos el segmento de recta orientado $\overrightarrow{OX}$ que representa la menor trayectoria (desplazamiento) que hay del punto O hasta el punto X. ¿Cómo se podría obtener la traslación de dicho segmento de recta orientado a una recta $\overleftrightarrow{l}$ en el plano que contenga los puntos O' y X', de tal manera que los segmentos de recta orientados sean congruentes $\left(\overrightarrow{OX} \cong \overrightarrow{O'X}\right)$? ¿Qué posibilidades se pueden presentar?

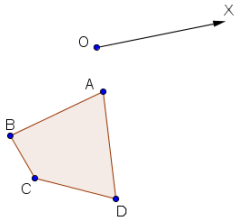
3. analiza la construcción con regla y compás que se presenta a continuación y compárala con la que hiciste en el punto anterior:

Construcción 3: Traslación de un segmento de recta orientado a una recta dada

1. Sea $\overrightarrow{AB}$ un segmento de recta orientado dado y sea $\overleftrightarrow{AB}$ la recta que lo contiene.	
2. Construimos la recta $\overleftrightarrow{l}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, (que a su vez es paralela al segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$).	
3. Determinamos un punto *C* cualquiera que pertenezca a $\overleftrightarrow{l}$	
4. Con el compás y centro en el punto inicial *A*, tomamos longitud de $\overline{AB}$; haciendo centro en *C*, trazamos una circunferencia con radio igual a la longitud de $\overline{AB}$ que cortará a $\overleftrightarrow{l}$ en el punto *D*.	

5. Finalmente, orientamos el segmento $\overline{CD}$, de tal suerte que este tenga el mismo sentido que el segmento orientado dado $\overrightarrow{AB}$ en $\overleftrightarrow{l}$.	

4. Si representamos gráficamente la base del edificio mediante un cuadrilátero cuyos vértices sean A, B, C, D, respectivamente, obteniendo el cuadrilátero $\square ABCD$:

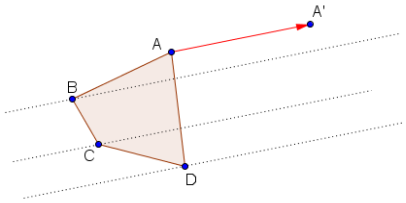
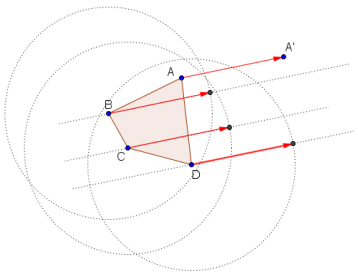
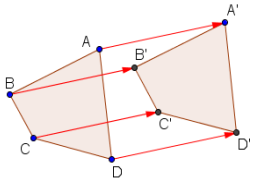


- Defina el segmento de recta orientado $\overrightarrow{OX}$, que representa el desplazamiento que hay del punto O al punto X, indicando la dirección y el sentido en el que se va a realizar la traslación del edificio la distancia indicada (29 metros a escala). como se muestra en la figura.
- Traslada el cuadrilátero haciendo uso de la regla y el compás, para ello traslada los vértices del mismo, de tal manera que se conserve la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{OX}$ (haz uso de la construcción 3) hasta obtener el cuadrilátero $\square A'B'C'D'$. ¿Qué puedes observar?
- Si unimos los vértices correspondientes A con A', B con B', etc. (Obtenidos de la traslación del punto anterior) mediante segmentos de recta orientados y luego procedemos a compararlos:

  - ✓ ¿Cómo son los segmentos de recta orientados generados por la traslación del edificio con respecto a $\overrightarrow{OX}$?
  - ✓ ¿Cómo son los segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{DD'}$; $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{A'D'}$; $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC'}$?
  - ✓ ¿Qué tipo de cuadrilátero forman los vértices consecutivos del edificio con sus respectivas imágenes, es decir $AA'B'B$, $BB'C'C$, $AA'D'D$, $CC'D'D$?
  - ✓ ¿los segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{DD'}$; $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{CC'}$, son lados de qué tipo de cuadrilátero? Descríbalo, enuncie sus propiedades.
  - ✓ ¿Qué sucede al medir los lados y los ángulos correspondientes de los cuadriláteros $\square ABCD$ y $\square A'B'C'D'$? ¿cómo son las figuras obtenidas?
  - ✓ ¿Se puede definir otro segmento de recta orientado diferente a $\overrightarrow{OX}$, de tal manera que permita realizar el mismo desplazamiento? Justifica tu respuesta.

5. Observa con atención la siguiente construcción con regla y compás, donde se muestra la traslación de una figura dada conocido el segmento de recta orientado de traslación ($\overrightarrow{AA'}$), contrasta tus respuestas dadas en los puntos anteriores y concluye:

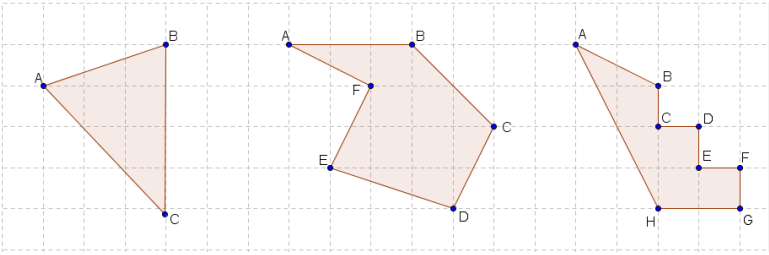
Construcción 4: traslación de una figura

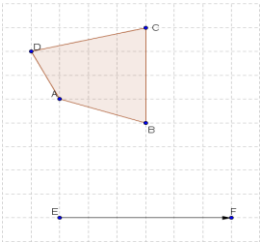
1. Construya rectas paralelas al segmento de recta orientado $\overrightarrow{AA'}$, que pasen por cada vértice (A, B, C y D) del cuadrilátero respectivamente.	
2. Tome una longitud arbitraria como módulo del segmento de recta $\overrightarrow{AA'}$, luego traslade esta longitud en cada recta construida, cuyo punto de partida es cada uno de los vértices del cuadrilátero, en el sentido que indica el segmento de recta orientado. Así se obtienen los vértices del nuevo cuadrilátero.	
3. Una los vértices del nuevo cuadrilátero, determinados por la traslación de la figura, según el segmento de recta orientado dado. Así se habrá trasladado la figura que era lo que se quería construir.	

6. ¿Qué axiomas, teoremas y definiciones de la Geometría Euclidiana nos permiten realizar la construcción 4? Enúncielos y si es posible trate de demostrarlos.

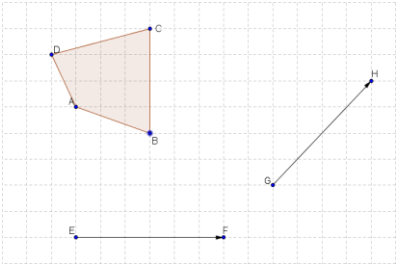
ETAPA DE DESARROLLO

1. Dadas las siguientes figuras geométricas, determine sus propiedades y defina un segmento de recta orientado con módulo, dirección y sentido que desee para cada una de ellas, luego, trasládelas usando regla y compás. (Haga uso de las construcciones 3 y 4).

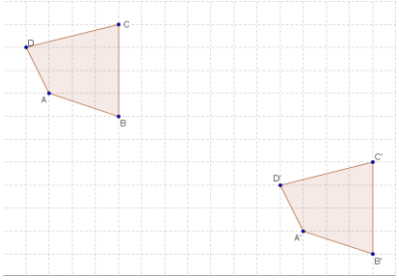




2. Usando regla y compás, realiza la traslación del cuadrilátero según el segmento de recta orientado $\overrightarrow{EF}$, luego aplica nuevamente la traslación al cuadrilátero pero en sentido opuesto. ¿Qué puedes concluir?



3. Usando regla y compás, traslada el edificio representado mediante el cuadrilátero $\square ABCD$ en la dirección y sentido que el segmento de recta orientado $\overrightarrow{EF}$, luego, al nuevo cuadrilátero obtenido mediante la primera traslación, vuélvelo a trasladar en la dirección y sentido que $\overrightarrow{GH}$ ¿Qué puedes concluir? ¿Qué sucede si se traslada en la dirección y sentido que $\overrightarrow{GH}$ y luego en la dirección y sentido que $\overrightarrow{EF}$?



4. Encuentra dos segmentos de recta orientados que permitan trasladar el cuadrilátero $\square ABCD$, hasta obtener el nuevo cuadrilátero $\square A'B'C'D'$. Como lo muestra la figura. ¿Qué puedes concluir?

5. Basados en los numerales anteriores, verifica en cada una de las construcciones que el cuadrilátero obtenido mediante la traslación de los vértices, es siempre un paralelogramo.

6. Dada la siguiente definición:

   "Dos segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, si ambos poseen el mismo módulo, la misma dirección e igual sentido. Se denota $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$."

   Verifique que la equipolencia de segmentos de recta orientados determina una relación de equivalencia, es decir, cumple las siguientes propiedades:

   - ✓ ***Reflexiva:*** Todo segmento orientado es equipolente a sí mismo. ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$)
   - ✓ ***Simétrica:*** Si $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a otro $\overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{CD}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$. ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, implica $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$).
   - ✓ ***Transitiva:*** Si $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD}$ es equipolente a $\overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al $\overrightarrow{EF}$. ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, implica $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$).

7. ¿Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, al superponer uno en el otro, entonces A y C, B y D coinciden? Argumente su respuesta.

8. ¿En qué casos dos segmentos de recta orientados son iguales?

9. Dado un segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$, ¿cuántos segmentos de recta orientados equipolentes a él puedes encontrar?

10. ¿es posible afirmar que:

    *"**Dos** segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, si y sólo si, son lados opuestos de un paralelogramo"*? Argumenta tu respuesta.

*Diremos que dos segmentos de recta son equipolentes si estos tienen igual módulo, igual dirección e igual sentido; además, al conjunto de todos los segmentos de recta equipolentes con el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$, es decir, a la clase de equivalencia $[\overrightarrow{AB}]$ se denominará **vector libre** y lo denotaremos $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB}) = \{\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\} = [\overrightarrow{AB}]$.*

*Así mismo, el vector libre $[\overrightarrow{OX}]$ será denominado el **desplazamiento** del punto O al punto X, obtenido en este caso de la traslación hecha al edificio; pues la igualdad de este vector no depende de la localización de los puntos inicial y final en el que estén ubicados los puntos en el plano.*

Discusión de la actividad de inicio y desarrollo: De las actividades presentadas anteriormente, se pudo verificar que al aplicar una traslación a una figura geométrica arbitraria y al unir sus vértices con las imágenes correspondientes generadas por dicho movimiento, se obtuvieron: figuras geométricas congruentes (figuras iguales en forma y tamaño) y segmentos de recta orientados equipolentes, es decir, que sus módulos son iguales, por lo tanto los segmentos de recta son congruentes, tienen el mismo sentido ya que los puntos tienen el mismo orden definido y son paralelos entre sí, pues poseen la misma dirección. A su vez, se pudo observar que dichos segmentos de recta orientados son lados opuestos de un paralelogramo.

Por otra parte, si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, se puede comprobar que al trasladar a $\overrightarrow{CD}$ paralelamente a $\overrightarrow{AB}$ hasta que el punto C coincida con el punto A, se obtendrá que los puntos D y B, también coincidirán, esto permitirá definir la igualdad entre los segmentos de recta orientados.

Formalizando,

***Definición 1:** A la colección de todos los segmentos de recta orientados que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido a un segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$ arbitrario dado, se denominará **vector libre** denotado $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ determinado por el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$. A Cualquier segmento de recta dirigido de ésta colección, será llamado un representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$.*

De la definición 1, se puede deducir que los vectores libres son clases de equivalencia determinados por segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ arbitrarios, que no es otra cosa, que el conjunto de segmentos de recta orientados equipolentes con él; además si comparamos dos elementos de este conjunto, estos no son segmentos de recta orientados diferentes, son representaciones particulares del mismo vector libre, lo que permite evidenciar que cualquier representante que conforma la colección, no

puede ser representante de más de un vector libre. Esta situación se logra precisar con la siguiente proposición que puede ser de una u otra forma más consistente que la definición misma:

Proposición: *cada segmento de recta dirigido es un representante de un, y solamente un, vector libre.*

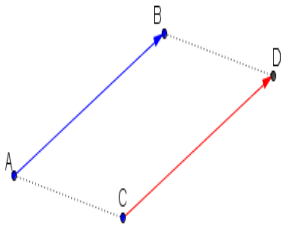
Veamos que el siguiente es un argumento válido que reafirma la proposición:

Si $\overrightarrow{AB}$ es un segmento de recta orientado, entonces, este es representante de un vector libre $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$. Puesto que es equipolente con infinitos segmentos de recta orientados que lo forman, cada segmento de recta orientado es un representante de por lo menos un vector libre; quedando por demostrar que $\overrightarrow{AB}$ no puede representar a más de uno.

Así mismo, como $\overrightarrow{AB}$ es un representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$, supongamos que $\overrightarrow{AB}$ también es representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD})$, entonces, por la definición 1, se cumple que, existe $\overrightarrow{CD}$ que también es un representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD})$, luego $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$ ya que ambos son representantes del mismo vector libre, además como la relación de equipolencia entre segmentos orientados es simétrica, tenemos que $\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{AB}$, por otra parte, sea $\overrightarrow{EF}$ otro elemento cualquiera de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD})$ diferente de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tenemos que se cumple que $\overrightarrow{EF}\sim\overrightarrow{CD}$, luego $\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{EF}$; además por ser transitiva la relación de equipolencia, tenemos que $\overrightarrow{EF}\sim\overrightarrow{AB}$, esto demuestra que cada representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD})$ es también representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$, invirtiendo el mismo argumento obtenemos que cada representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$es también representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD})$, por lo tanto $[\overrightarrow{AB}] = \boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB}) = \boldsymbol{v}(\overrightarrow{CD}) = [\overrightarrow{CD}]$.

Luego $\overrightarrow{AB}$ es representante de un y solamente un vector libre $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ como se quería.

Ahora, si se consideran segmentos de recta orientados equipolentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ como entes puramente geométricos que tienen solamente módulo, dirección y sentido, olvidándose de sus puntos iniciales y finales, es claro que dichos segmentos efectivamente son idénticos. Es el caso del ***desplazamiento*** el cual se puede representar mediante el vector libre $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ como la representación matemática de lo que se va a denominar ***magnitud vectorial,*** pues la igualdad de este vector no depende de la localización de los puntos inicial y final en el que estén ubicados los puntos en el plano.



Además, si denotamos S_2 como el conjunto de los segmentos de recta orientados en el plano obtenido mediante el conjunto cociente de las clases de equivalencia de los segmentos de recta orientados equipolentes entre sí, hemos definido el conjunto de los vectores libres en el plano.

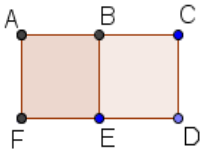
Por otro lado, a los elementos que pertenecen a un ***vector libre*** $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ los denominaremos vectores geométricos, los cuales son segmentos de recta orientados, es decir, que dado el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$ representante de $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ lo llamaremos ***vector geométrico***. Esto permitirá de una u otra forma trabajar con los representantes de los vectores libres sin ninguna pérdida de generalidad.

ETAPA DE FINALIZACIÓN

1. Verifica gráficamente si la siguiente proposición es cierta o no: "*Todos los segmentos de recta orientados de una misma clase son equipolentes entre sí".*

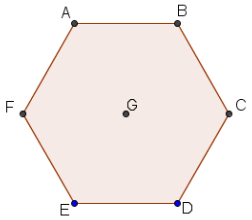
2. Construya con regla y compás un paralelogramo, en el determine todos los segmentos de recta orientados que puedas y dales el sentido que desees. Determina cuales pares de segmentos de recta orientados son equipolentes y cuáles no lo son.

3. En una tabla se fijan seis puntillas formando dos cuadrados contiguos como se muestra en la figura. Por dichas puntillas se quiere pasar una lana uniendo dos de ellas no necesariamente contiguas.



   Si queremos mostrar el recorrido realizado por la lana pasando por las puntillas, representados mediante los segmentos de recta orientados, responde las siguientes preguntas:
   - ✓ ¿Cuántos segmentos de recta orientados podría formar incluyendo aquellos que su punto de partida y de llegada coinciden, considere el sentido de los mismos? represéntelos gráficamente y nómbrelos.
   - ✓ ¿Cuántos segmentos de recta orientados podría formar sin tener en cuenta aquellos que su punto de partida y de llegada coincidan, considere el sentido de los mismo? represéntelos y nómbrelos.
   - ✓ Si consideramos que la distancia a la que están separados dos puntos contiguos (que forman el cuadrado) es de una unidad, encuentre segmentos de recta cuyo módulo sea de: Una unidad (1), dos unidades (2), $\sqrt{2}$ unidades, $\sqrt{5}$ unidades.
   - ✓ Construya clases de equivalencia a partir del módulo de los segmentos de recta orientados construidos.
   - ✓ Construya segmentos de recta orientados que partan del mismo vértice ¿Cuántos puedes encontrar?, establece relaciones de equivalencia sobre cada vértice.
   - ✓ De los segmentos de recta construidos anteriormente:
     - ➢ Encuentra segmentos de recta que tengan la misma dirección, (recuerda para ello, los segmentos de recta orientados deben ser paralelos). Establece la relación de equivalencia.
     - ➢ Encuentra segmentos de recta que tengan el mismo sentido, (recuerda para ello, los segmentos de recta orientados deben tener el mismo orden definido con respecto a sus puntos inicial y final). Establece la relación de equivalencia.

- Encuentra segmentos de recta que tengan la misma dirección y el mismo sentido. Establece la relación de equivalencia.
- Encuentra segmentos de recta que tengan la misma dirección, la misma magnitud y el mismo sentido. Establece la relación de equivalencia.
- Encuentra segmentos de recta orientados que sean opuestos. Establece la relación de equivalencia.



4. Suponga ahora que el arreglo hecho en la tabla es de forma hexagonal, de tal manera que la distancia a dos puntillas consecutivas sea equidistante. Realice el mismo procedimiento planteado en el punto anterior.

5. Comprueba las siguientes propiedades:

- *Si dos segmentos de recta orientados son equipolentes, entonces tienen la misma longitud, dirección y sentido.*
- *Si P es el punto medio de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, entonces $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*
- *Dado el cuadrilátero $\square ABCD$, es un paralelogramo, si y solamente si, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*
- *Dado un segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ y un punto C que no pertenece a la misma recta que contiene al segmento orientado, existe un único segmento orientado equipolente a $\overrightarrow{AB}$ con origen en C.* (Siempre es posible construir un representante de un vector libre dado con origen C cualquiera, esto justifica el adjetivo libre).
- Si $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AD}$, entonces $B = D$. (no existen dos segmentos de recta orientados equipolentes distintos con igual origen).

6. ¿Todos los vectores nulos son equipolentes entre sí, es decir $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB} \sim \overrightarrow{CC}$? ¿por qué?

3.2.3. Actividad 3: Encontrando desplazamientos resultantes: Adición de vectores geométricos y producto de un vector geométrico por un escalar.

Objetivos:

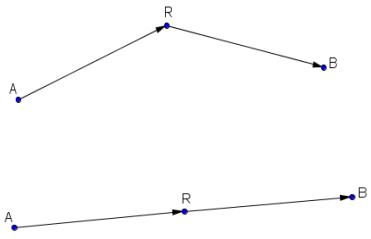
- ✓ Definir la operación binaria llamada adición entre segmentos de recta orientados.
- ✓ Definir la operación binaria llamada el producto de un segmento de recta orientado por un escalar.
- ✓ Identificar propiedades fundamentales que definen la estructura algebraica de los vectores libres (S_2) definidas mediante la adición y el producto de un segmento de recta orientado por un escalar.

Descripción: Aunque se ha podido representar adecuadamente los desplazamientos mediante segmentos de recta orientados (ahora llamados vectores geométricos) y que se ha mostrado que existen infinitos segmentos orientados equipolentes a uno dado, aún no se ha desarrollado una estrategia para responder preguntas como: ¿Cuál es el desplazamiento resultante de los desplazamientos realizados por los atletas en una carrera de relevos? o ¿si se hubiera desplazado dos o más veces el edificio cual sería el desplazamiento resultante?. Es por ello, que en esta actividad se definirá la operatoria para estos objetos matemáticos y se tratará dará respuesta a las preguntas antes planteadas.

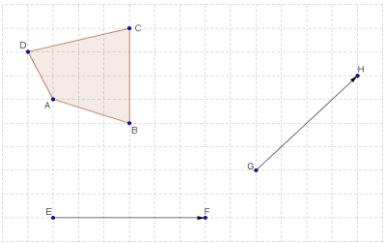
ETAPA DE INICIO

Responde las siguientes preguntas:

1. A continuación se presentan dos recorridos que han descrito unos atletas en una carrera de relevos, en la cual el punto A es el punto que representa la salida, el punto B representa la llegada y el punto R representa donde se realiza el primer relevo. Implemente una estrategia para encontrar el desplazamiento resultante que realizaron los atletas en los dos casos ¿los dos desplazamientos resultantes son iguales? Argumente su respuesta.



2. Dado el cuadrilátero $\square ABCD$, y los vectores geométricos $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GH}$ que representan el desplazamiento en que va a ser trasladado el cuadrilátero en la dirección y sentido que indican. Como se muestra en la figura.



   - ➢ Traslade el cuadrilátero en la dirección y sentido que indica el vector $\overrightarrow{EF}$, luego vuélvalo a trasladar en la dirección y sentido que indica el vector $\overrightarrow{GH}$. ¿existirá un vector geométrico que permita desplazar el cuadrilátero en un sólo movimiento reemplazando los otros dos vectores dados?

- Si se traslada el cuadrilátero $\square ABCD$, primero en la dirección y sentido que determina el vector geométrico $\overrightarrow{GH}$ y luego en la dirección y sentido que determina el vector geométrico $\overrightarrow{EF}$, ¿la traslación final del cuadrilátero cambia con respecto a la que se realizó inicialmente? (compare las traslaciones resultantes hechas en cada caso).
- Implemente una estrategia que permita encontrar el desplazamiento resultante, encontrando un vector $\overrightarrow{XY}$ el cual permita realizar dicho desplazamiento en un sólo movimiento. Argumente su respuesta.

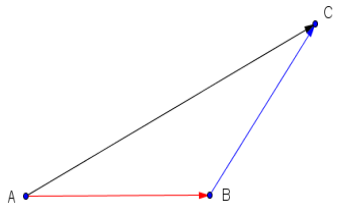
3. Encontrar el vector geométrico resultante de dos vectores geométricos colineales o paralelos, si:

   - los vectores geométricos tienen el mismo sentido.
   - los vectores geométricos tienen sentidos opuestos.

4. Encontrar el vector geométrico resultante de dos vectores geométricos no colineales o paralelos, si:

   - ✓ Parten del mismo punto inicial.
   - ✓ Uno parte del punto final del otro.
   - ✓ No parten del mismo punto inicial y ninguno parte del punto final del otro.

Lea con atención la siguiente definición:



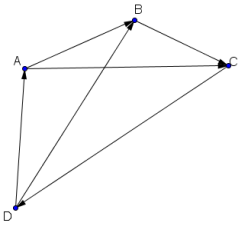
***Definición 2**: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ dos vectores geométricos representantes de los vectores libres $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ y $\boldsymbol{w}(\overrightarrow{BC})$ respectivamente, ubicados de tal manera que el segundo parta del punto final del primero (como se muestra en la figura); al vector geométrico $\overrightarrow{AC}$ representante del vector libre $\boldsymbol{s}(\overrightarrow{AC})$ se denominará la resultante o adición entre dichos vectores geométricos obtenido de unir el punto inicial de $\overrightarrow{AB}$ con el punto final de $\overrightarrow{BC}$ y se denotará por $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Geométricamente representará el tercer lado de un triángulo formado por dichos vectores.*

5. De la definición 2, ¿será cierto afirmar, que la adición entre vectores geométricos puede ser definida mediante la adición entre sus vectores libres (clases de equivalencia), es decir, si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$ son representantes de los vectores libres $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$, $\boldsymbol{w}(\overrightarrow{BC})$ y $\boldsymbol{s}(\overrightarrow{AC})$ respectivamente, se cumple que $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})+\boldsymbol{w}(\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{s}(\overrightarrow{AC})$? Argumenta tu respuesta.

6. ¿La definición 2 se cumple si los vectores geométricos son paralelos o colineales?

7. Haciendo uso de la definición 2. ¿Es posible afirmar que: *"Dados dos vectores geométricos no nulos y no paralelos o colineales, determinan de manera única un plano"*? justifique su respuesta.

8. Dado el cuadrilátero $\square ABCD$ cuyos lados son segmentos de recta orientados. Construya la adición de los vectores geométricos como se indica a continuación. De igual manera muestre mediante ejemplos que adiciones no se podrían obtener de la figura.



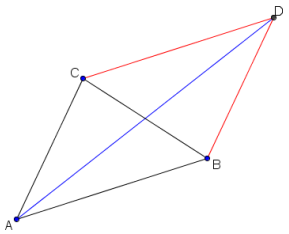
- ✓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
- ✓ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.
- ✓ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.
- ✓ $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}$.
- ✓ $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}$.
- ✓ $\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$.

- ➢ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
- ➢ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$
- ➢ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
- ➢ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$
- ➢ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
- ➢ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

- ➢ ¿En el cuadrilátero $\square ABCD$, cuál es el punto inicial y el punto final de encontrar el vector geométrico resultante $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$?

- ➢ Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, encuentre un ejemplo donde $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$ ¿Qué tipo de figura geométrica obtuvo? Justifique su respuesta.

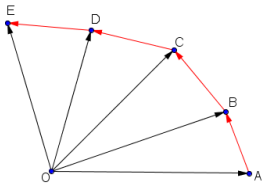
9. Dado el paralelogramo $\square ABCD$ y sus dos diagonales, complete las igualdades haciendo uso de la definición 2, para cada caso represente gráficamente la adición obtenida:



- ✓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=$ __
- ✓ $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=$ ___
- ✓ $\overrightarrow{BA}+$ __ $=\overrightarrow{BC}$
- ✓ ___ $+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$

- ✓ ___ $+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$
- ✓ $\left(\overrightarrow{AB}+\text{___}\right)+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}$
- ✓ $\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)=$ ___

10. En la figura $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, encontrar $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, en términos de la adición de los otros vectores geométricos, ¿se puede encontrar una generalidad si son n los vectores geométricos que parten del mismo punto O?.



11. Una alternativa para sumar dos vectores geométricos, es mediante ***la regla del paralelogramo*** formulada por Newton y de gran aplicación en la física, la cual se enuncia a continuación:

- ➢ *Sean los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$,*
- ➢ *procedemos a ubicar el punto inicial de $\overrightarrow{AB}$ con el punto inicial de $\overrightarrow{CD}$, para ello, debemos encontrar un vector geométrico equipolente con $\overrightarrow{CD}$ que tenga como punto de inicio el punto A ($\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{AE}$).*
- ➢ *Luego, construimos el paralelogramo que tenga como lados a los vectores geométricos dados, trazando por el punto B una recta paralela a $\overrightarrow{AE}$ y por el punto E una recta paralela a $\overrightarrow{AB}$ que se intersecaran en un punto F. Cabe*

aclarar, que por la construcción hecha y la definición de paralelogramo $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{BF}$ *y* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

- *Por la definición 2, podemos ver que la diagonal del paralelogramo que parte del punto* A *(origen de los vectores* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AE}$*) es el vector geométrico suma, ya que es el tercer lado del triángulo* ΔAEF*, el cual tendrá como punto de inicio el punto* A *y punto final el punto* F $(\overrightarrow{AF})$.
- *Así,* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$ *será la suma de los vectores dados.*

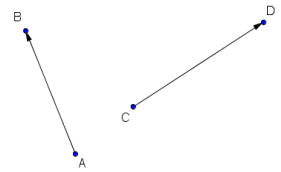
Nótese que la otra diagonal del paralelogramo corresponderá a lo que denominaremos la resta o sustracción de los vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{AE}$*, esto es,* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$*, de otro modo, como* $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AE}$ *tenemos que* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$.

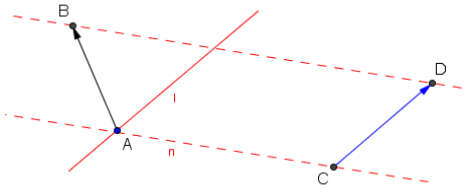
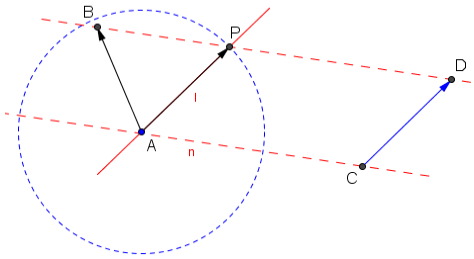
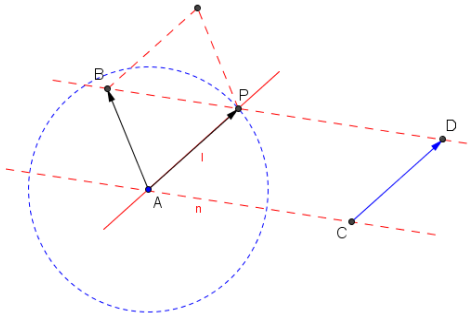
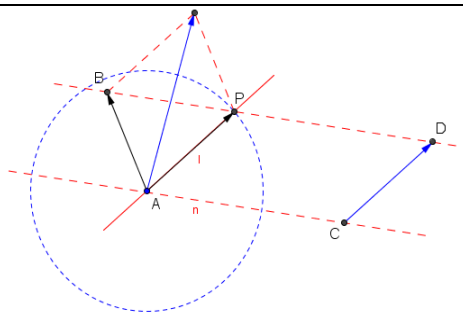
Con base en el procedimiento anterior que describe la regla del paralelogramo, responde las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántos vectores geométricos se necesitan para construir un paralelogramo? ¿Qué condiciones deben cumplir?
- ✓ Haga una representación gráfica de la regla del paralelogramo enunciada anteriormente.
- ✓ ¿Cómo justificaría mediante el uso de la regla y el compás, el método de la adición de vectores geométricos, establecida en la regla del paralelogramo? Haga una representación geométrica de este hecho.
- ✓ ¿La regla del paralelogramo es útil si los segmentos de recta orientados son colineales o paralelos? Encuentre una estrategia para realizar la adición de dichos segmentos de recta orientados, haga uso de la regla y el compás y contraste lo respondido con lo construido.
- ✓ Dado el paralelogramo $\square OPQR$, enuncie sus propiedades. Además, dada la diagonal $\overrightarrow{OQ}$, compare los triángulos ΔORQ y ΔOPQ y establezca propiedades.
- ✓ Dado $\overline{AB}$ encuentre una estrategia a partir de la regla del paralelogramo para bisecarlo. (haga uso de los vectores geométricos para esta construcción).

12. Observa con atención la siguiente construcción con regla y compás, donde se muestra la adición entre vectores geométricos que no parten del mismo punto inicial mediante la regla del paralelogramo, contrasta tus respuestas dadas en los puntos anteriores y concluye:

Construcción 4: adición de vectores Geométricos

1. Sean los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, que no parten del mismo punto inicial y tienen diferentes direcciones.	

2. Trace por el punto inicial de $\overrightarrow{AB}$, una recta $\overleftrightarrow{l}$ paralela a $\overrightarrow{CD}$, luego una los puntos iniciales A y C por medio de una recta $\overleftrightarrow{n}$.	
3. Por el punto final de $\overrightarrow{CD}$ trace una recta paralela a $\overleftrightarrow{n}$, esta interseca a $\overleftrightarrow{l}$ en un punto P. De la figura, podemos observar que $\square APDC$ es un paralelogramo, donde $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AP}$, por lo tanto, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}$.	
4. Como $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$ tienen el mismo punto inicial, es posible construir un paralelogramo que los tenga como lados.	
5. Aplicando la regla del paralelogramo, tenemos que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}$ es la diagonal del paralelogramo que parte del punto A y cuyos lados son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AP}$ respectivamente y que denominares el vector geométrico suma.	

13. Pruebe:
    "Si O, P, Q y R son puntos de una misma recta y se cumple que, si $\|\overrightarrow{OR}\| = \|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{OQ}\|$, entonces $\overrightarrow{PR} \sim \overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{QR} \sim \overrightarrow{OP}$".
14. Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, ¿existirá un vector geométrico $\overrightarrow{EF}$, tal que $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$? Argumenta tu respuesta.
15. Si dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, tal que existe un vector geométrico $\overrightarrow{EF}$, donde se cumple que $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ ¿Quién es $\overrightarrow{EF}$ si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?
16. Si definimos el vector geométrico $\overrightarrow{EF}$ como el vector cero o nulo (denotado $\overrightarrow{EF} = \vec{0}$), obtenido de la expresión $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ para que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. ¿Quién tiene que ser el vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ para que la igualdad $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ se cumpla?

17. Otra forma de definir la sustracción de los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ es como la adición del vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con el vector opuesto del vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ obtenido del punto anterior y denotado $-\overrightarrow{CD}$. Es decir:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right)$$

- ✓ De una interpretación geométrica de este hecho. Haga uso de la regla del paralelogramo para justificar su interpretación.
- ✓ Haga un contraste entre la definición de sustracción y el resultado obtenido en el punto 14. Que puede concluir.

18. Establezca un criterio para adicionar vectores geométricos opuestos con regla y compás. Argumente su respuesta.

19. Dado $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$ ¿Se cumple que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DB}$? Argumente su respuesta geométricamente.

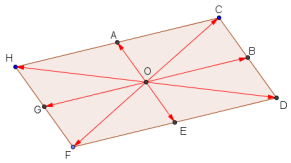
20. Para todo par de vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. Verifique gráficamente si siempre se cumple cada una de las siguientes proposiciones, en caso que no sea verdadera de un contraejemplo para justificar su respuesta:

- ✓ $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$
- ✓ Si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, entonces $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$
- ✓ Si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ y $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- ✓ Si $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen sentidos opuestos
- ✓ Si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| > \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, entonces $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$
- ✓ Si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| < \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, entonces $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
- ✓ $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right\| \geq \left|\left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|\right|$
- ✓ Es posible que $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right\| = \left|\left\|\overrightarrow{AB}\right\| - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|\right|$ y $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$
- ✓ $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right\|^2 = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2$

21. Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no nulos y no paralelos, haciendo uso de la geometría euclidiana intérprete mediante ejemplos la denominada la ***desigualdad triangular***, para luego intentar realizar una demostración geométrica de este hecho.

$$\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$$

22. Dado el paralelogramo y los segmentos de recta orientados que parten del centro de su interior O, exprese cada uno de los segmentos de recta orientados, en términos de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. tenga en cuenta que los puntos A, B, G, E son puntos medios de los lados del paralelogramo, $\overline{FC}$ y $\overline{HD}$ son las diagonales del mismo.

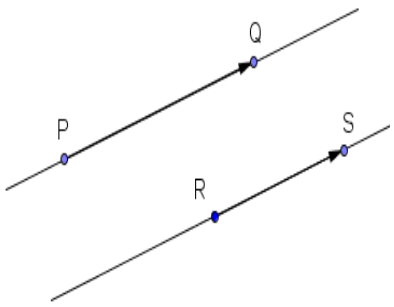


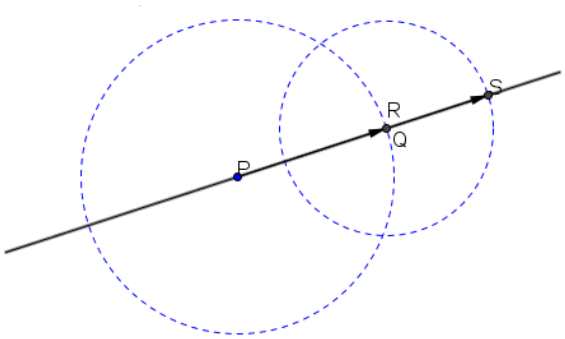
23. Si dados $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, tal que tienen igual dirección, sentidos contrarios y $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ tiene el sentido de $\overrightarrow{OP}$. Compare las longitudes $\|\overrightarrow{OP}\|$ y $\|\overrightarrow{OQ}\|$. Determine todas las posibilidades que se pueden presentar, represente gráficamente.

24. Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos y:
    - Tienen el mismo sentido, entonces ¿Qué sentido tendrá el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$?
    - Tienen sentidos contrarios, entonces ¿Qué sentido tendrá el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$?
    - Tienen sentidos opuestos, entonces ¿Qué sentido tendrá el segmento orientado $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$?

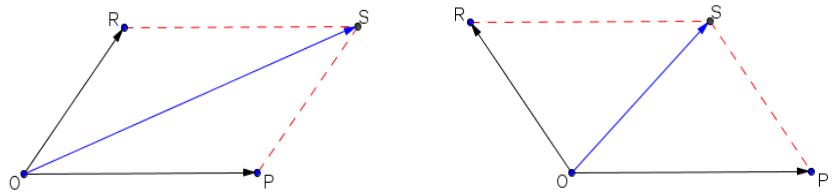
Discusión de la actividad de inicio (adición de segmentos de recta orientados o vectores geométricos): Para la construcción geométrica de la adición de segmentos de recta orientados o vectores geométricos, se parte del simple hecho que para ser definida, se tiene que si $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{PQ})$ es un vector libre arbitrario y R es cualquier punto en el plano, entonces existe exactamente un representante de dicho vector, con punto inicial R, Para ello se selecciona cualquier vector geométrico perteneciente a $\boldsymbol{v}(\overrightarrow{PQ})$ y se traslada su punto inicial a R. (Discusión que ya se hizo en la actividad 2). Hecha ésta aclaración, se logra presentar los tres casos en los cuales es posible realizar la adición entre vectores geométricos: cuando los vectores geométricos son colineales o paralelos, cuando parten del mismo punto inicial y cuando no:

1. ***Adición de Vectores geométricos paralelos o colineales:*** Dados dos vectores geométricos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ paralelos o colineales con el mismo sentido, se puede observar que es imposible formar un paralelogramo cuyos lados sean $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ (¿por qué?), entonces debemos buscar una estrategia que nos permita la manera de adicionar dichos vectores; para ello, simplemente hacemos coincidir el punto final de $\overrightarrow{PQ}$ con el punto inicial de $\overrightarrow{RS}$ (recuerde que siempre es posible trasladar un segmento de recta orientado $\overrightarrow{RS}$ a esta posición, encontrando un segmento de recta equipolente con él como se hizo para los segmentos de recta en la actividad 1), la adición de dichos segmentos de recta orientados es el segmento de recta orientado $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$, (en ese orden), que tendrá la misma dirección y sentido de los segmentos de recta orientados dados.





2. ***Adición de Vectores geométricos que parten del mismo punto inicial:*** Si denotamos con $\overrightarrow{OP}$ el segmento de recta orientado con punto inicial O y punto final P y $\overrightarrow{OR}$ el segmento de recta orientado con punto inicial O y punto final R, de tal suerte que tengan diferentes direcciones (es decir, que los segmentos de recta orientados no están en la misma recta), aplicando la definición 3, podemos encontrar un punto S del plano y construir el paralelogramo $\square OPSR$ cuyos lados sean los segmentos de recta orientados dados y la adición de dichos segmentos será la diagonal $\overrightarrow{OS}$ del mismo.



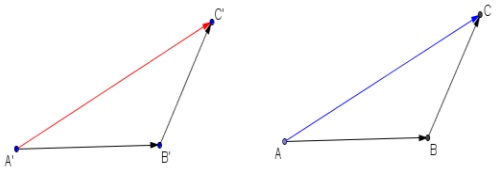
Cabe aclarar, que los segmentos de recta orientados por ser lados de un paralelogramo son equipolentes con los lados opuestos del mismo respectivamente ($\overrightarrow{OR} \sim \overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{RS}$), que mediante una traslación los podemos hacer coincidir, de tal suerte que uno de ellos parta del punto final del otro, así el segmento de recta orientado resultante será por la definición 2, el tercer lado del triángulo ΔOPR, estableciéndose la adición de segmentos de recta orientados que parten del mismo punto.

3. ***Adición de Vectores geométricos arbitrarios con distinta dirección:*** Dados dos segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, en un plano, tales que no tienen el mismo punto inicial; como ya se vio en la construcción 4, se pudo probar que aún en el caso de dos segmentos de recta orientados que no partan del mismo punto inicial, es posible hallar un segmento de recta orientado resultante como resultado de la adición entre ellos. Así, si dados los segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no colineales y no paralelos en un mismo plano, existen vectores geométricos $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ equipolentes a cada uno de ellos respectivamente, de tal forma que sus puntos iniciales coincidan; pues al ser no colineales, los segmentos de recta orientados tienen diferentes direcciones determinadas por las rectas $\overleftrightarrow{l}$ y $\overleftrightarrow{r}$ que se cortarán en un punto O que será el punto inicial de los segmentos de recta orientados, reduciendo el problema al caso 2.

En consecuencia, de cada uno de los tres casos se ha obtenido un modelo geométrico de la adición de segmentos de recta orientados cuyo resultado es otro segmento de recta que está determinado de manera única,

Además, con los argumentos geométricos anteriormente mostrados también se ha podido demostrar que:

Para efectuar la adición de segmentos de recta orientados o vectores geométricos, nos apoyamos en el hecho que si dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \in \boldsymbol{v}(\overrightarrow{AB})$ y $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'} \in \boldsymbol{w}(\overrightarrow{BC})$, entonces, se cumple que:

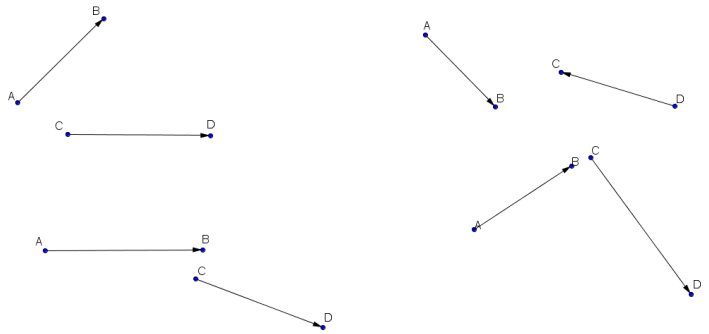


$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\sim\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}\right)\in \boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AB}\right)+\boldsymbol{w}\left(\overrightarrow{BC}\right)$$

Es decir, si $\overrightarrow{A'B'}\sim\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{B'C'}\sim\overrightarrow{BC}$, entonces los triángulos $\Delta A'B'C'$ y ΔABC serán congruentes y por una traslación adecuada el segmento de recta orientado $\overrightarrow{A'C'}$ se hará coincidir con el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AC}$. Lo que conllevará a que sigue siendo el mismo resultado, independiente de los representantes de $\boldsymbol{v}$ y de $\boldsymbol{w}$ usados para calcularlo, permitiendo afirmar que la adición de segmentos de recta orientados o vectores geométricos está bien definida.

ETAPA DE DESARROLLO

1. Halla $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ en cada caso, para ello haga uso de la definición 3.



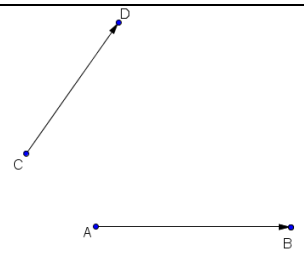
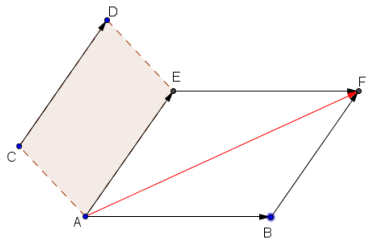
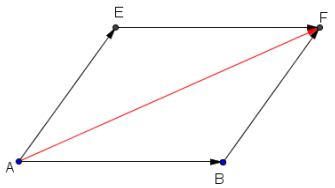
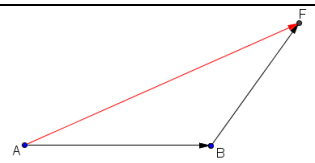
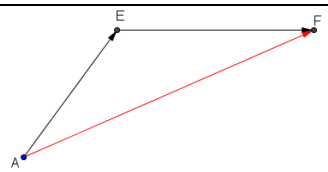
2. Contesta las siguientes preguntas:

   - ✓ Compara la definición 2, con la definición 3 haz un paralelo entre ambas definiciones y concluye.
   - ✓ ¿Será cierto afirmar que la adición de vectores geométricos es otro vector geométrico? Justifique su respuesta.
   - ✓ ¿$\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}$? justifique su respuesta.
   - ✓ Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ ¿Cuál será la dirección, la magnitud y sentido de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$? Argumente su respuesta.
   - ✓ ¿Será cierto que $\overrightarrow{AB}=-\left(-\overrightarrow{AB}\right)$? Argumenta tu respuesta.

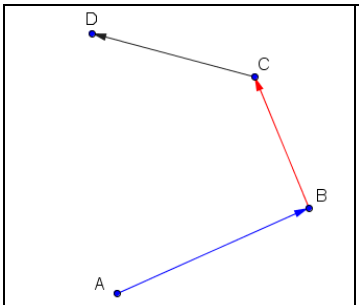
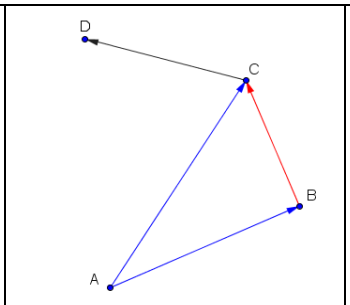
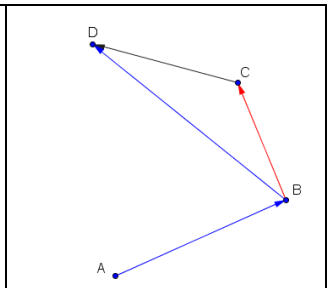
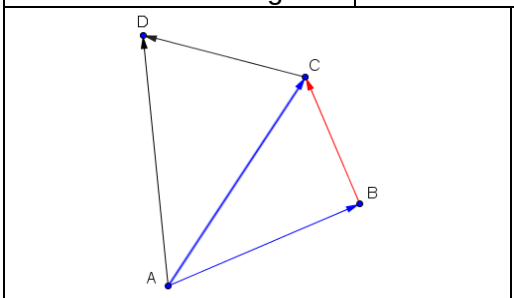
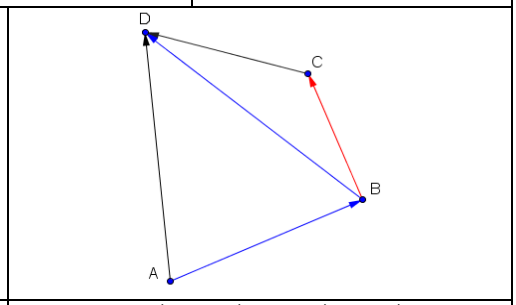
3. Si consideramos el conjunto S_2 como el conjunto de todos los segmentos de recta orientados o vectores geométricos (incluido el vector nulo) en el plano, es posible comprobar que la adición de segmentos de recta orientados cumple las propiedades: Asociativa, conmutativa, elemento neutro y opuesto aditivo.

   A manera de ejemplo veamos que la adición de segmentos de recta orientados es conmutativa y asociativa:

Construcción 5: Conmutatividad de segmentos de recta orientados

1. Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ Vectores geométricos arbitrarios y coplanares con distinta dirección.	
2. Al realizar la traslación de $\overrightarrow{CD}$ haciendo coincidir su punto inicial con el punto inicial de $\overrightarrow{AB}$, es decir que $A = C$, hasta construir el paralelogramo ⊡ $AEFB$ que los tiene como lados, se puede demostrar que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{BF}$ y que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (como lo muestra la figura).	
3. Ahora, aplicando la regla del paralelogramo para la adición de segmentos de recta orientados, tenemos que: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$	
4. De lo anterior y como $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{BF}$, se tiene que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$,	
5. Además, se tiene que $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AE}$, luego: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$	
6. Por el criterio de congruencia L.L.L tenemos que $\Delta AEF \cong \Delta ABF$ por consiguiente, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cong \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ lo que implica que $\lVert \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \rVert = \lVert \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} \rVert$, por lo tanto los vectores tienen el mismo módulo; además, se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ tienen el misma dirección, pues son la diagonal del paralelogramo determinada por el segmento $\overline{AF}$ contenida en la recta que pasa por los puntos A y F, así mismo el vector geométrico resultante tienen como punto inicial el punto A y punto final el punto F conservándose el sentido, luego los vectores geométricos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ son iguales. Finalmente, por la definición de equipolencia se cumple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ mostrando que la adición de segmentos de recta orientados es conmutativa.	

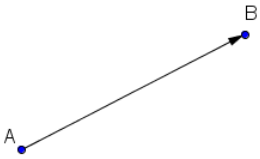
Construcción 6: Asociatividad de segmentos de recta orientados

		
Dados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ como muestra la figura.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
		
$\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$	
Como $\overrightarrow{AD} \cong \overrightarrow{AD}$, implica que $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$, por la construcción geométrica anteriormente hecha, esto permitirá afirmar que $\left\|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)\right\|$, es decir, que ambos vectores geométricos tienen el mismo módulo, así mismo, tienen la misma dirección pues están contenidos en la misma recta que contiene al segmento $\overline{AD}$ y tienen el mismo sentido pues los puntos inicial y final son A y D en ese orden, de lo anterior, podemos afirmar $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$, luego, la adición de segmentos de recta orientados es asociativa.		

4. Verifique haciendo uso de la regla y el compás, que las siguientes propiedades se cumplen:

   - ✓ $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$ (a todo segmento de recta orientado le corresponde un segmento de recta orientado opuesto)
   - ✓ Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$, entonces $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH}$
   - ✓ $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{BC}$
   - ✓ $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{DE}$

5. Dado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ (como el que se muestra en la figura). Mediante el procedimiento conocido en didáctica como *método inductivo experimental*, es posible definir el producto de un vector geométrico por un escalar, como se muestra a continuación:



Si consideramos el producto de un vector geométrico por un escalar como una suma repetida, se procederá a definir por recurrencia lo que significaría $n\overrightarrow{AB}$ para $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera:

- ✓ $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
- ✓ $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
- ✓ $4\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

….

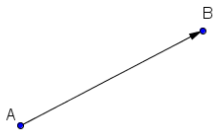
- ✓ $(n+1)\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

Es así, que en la cadena de igualdades antes presentadas, el lado izquierdo representa una serie de números naturales, en la que hacen falta $1\overrightarrow{AB}$ y $0\overrightarrow{AB}$, mientras que en el lado derecho se observa que para pasar de un renglón a otro, se suma el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ repetidas veces. Lo anterior, nos conduce a utilizar la operación de la resta para devolver el proceso, y poder de esta manera definir $1\overrightarrow{AB}$ como $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ y $0\overrightarrow{AB}$ como $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, dando sentido a ésta construcción.

Con base en la definición anterior:

- ➢ Construya con regla y compás los vectores geométricos $2\overrightarrow{AB}$, $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{AB}$, $5\overrightarrow{AB}$, $6\overrightarrow{AB}$, determine el módulo, la dirección y el sentido de cada uno de ellos.
- ➢ Pruebe de manera inductiva que $(m+n)\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AB}$.

6. Si $-\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{AB}$, por el método inductivo experimental. Construya con regla y compás los vectores geométricos $k\overrightarrow{AB}$, para $k \in \mathbb{Z}^-$ y $k < -1$, para los cuales:



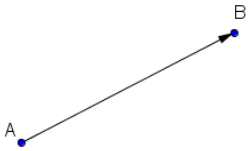
- ✓ $-2\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$
- ✓ $-3\overrightarrow{AB} = (-2)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \left(-2\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$
- ✓ $-4\overrightarrow{AB} = (-3)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \left(-3\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$

….

- ✓ $-2\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$
- ✓ $-(n+1)\overrightarrow{AB} = (-n)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \left(-n\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$

Determine la magnitud, la dirección y el sentido de cada uno de ellos. (Utiliza como ayuda la construcción anterior).

7. Construya con regla y compás vectores geométricos $k\overrightarrow{AB}$ de manera inductiva, para $k \in \mathbb{Q}$, es decir, vectores geométricos de la forma $k\overrightarrow{AB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ y $k\overrightarrow{AB} = \frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Para ello:



- ✓ Construya un vector geométrico que tenga por módulo la mitad del vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con la misma dirección y sentido, es decir $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (utilice el procedimiento para bisecar un segmento con regla y compás).

- ✓ Construya un vector geométrico que tenga por módulo la tercera parte del vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con la misma dirección y sentido, es decir $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (utilice el procedimiento para trisecar un segmento con regla y compás).

- ✓ Construya un vector geométrico que tenga por módulo la cuarta parte del vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con la misma dirección y sentido, es decir $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ (utilice el procedimiento para trisecar un segmento con regla y compás).

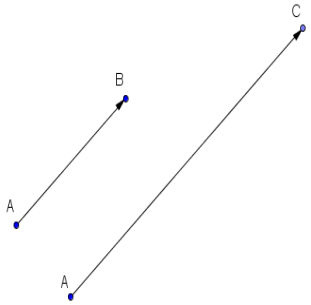
- ✓ Plantee una estrategia para construir un vector geométrico que tenga por módulo la enésima parte del vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, con la misma dirección y sentido, es decir, construya $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$.

- ✓ Construya vectores geométricos que se enuncian a continuación, aplicando el método inductivo experimental expuesto en el punto 5, además, verifique el módulo, la dirección y el sentido de cada uno de ellos:

  - $2\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right)$
  - $3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$
  - $-5\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$
  - $-6\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

- ✓ Pruebe inductivamente que $\frac{m}{n}\overrightarrow{AB} = m\left(\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{n}\left(m\overrightarrow{AB}\right)$, inicialmente de ejemplos que verifiquen la igualdad, con $m > 0$ y luego con $m < 0$, para luego intentar realizar una prueba de este hecho.

Mediante el proceso inductivo de adicionar un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ así mismo repetidas veces de manera finita o de adicionar partes alícuotas de este, hasta obtener un nuevo vector geométrico, (como se hizo en la actividad 1 para los segmentos de recta) se obtuvo una nueva operación denominada ***producto de un vector geométrico por un número entero o racional***[34]*.*



Del hecho anterior y aplicando la definición de producto en los números reales, se puede encontrar lo siguiente:

Si $k \in \mathbb{Z}^+$, *entonces* $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\cdots+\overrightarrow{AB}}_{k\ veces}=k\overrightarrow{AB}$

Si $k \in \mathbb{Z}^-$, *entonces* $\underbrace{\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\cdots+\left(-\overrightarrow{AB}\right)}_{k\ veces}=k\overrightarrow{AB}$

Si $k=\frac{p}{q}$, entonces

$$k\overrightarrow{AB}=\frac{p}{q}\overrightarrow{AB}=p\left[\frac{1}{q}\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{q}\left[p\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{q}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\cdots+\overrightarrow{AB}}_{p\ veces}\right].$$

Luego $k\overrightarrow{AB}$, *es construir un segmento de recta orientado que tenga la misma dirección de* $\overrightarrow{AB}$ *y cuya longitud sea* $|k|$ *veces la longitud de* $\overrightarrow{AB}$, *es decir* $\|\overrightarrow{AB}\|$ *se transforma en* $|k|\|\overrightarrow{AB}\|$.

8. Aceptando la definición anterior del producto de un vector geométrico por un número real y dado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, construya vectores geométricos que cumplan las siguientes condiciones dadas si k es construible (para ello tome el valor de k arbitrario acorde a las condiciones planteadas):

   - ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $k>1$.
   - ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $k=1$.
   - ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $0<k<1$.

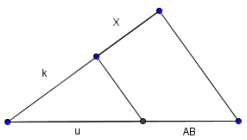
➢ [34] Obsérvese que en la definición no se ha dado sentido a $k \in \mathbb{R}$, pero si se han admitido dos cosas:

i. El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es un número real positivo, y
ii. Con el argumento de aceptar la continuidad de la recta y la continuidad de los números reales, podemos aceptar que dado un número real r arbitrario, existe un segmento de recta que lo tiene por longitud; además se puede probar que para todo racional k se cumple que $\|k\overrightarrow{AB}\|=|k|\|\overrightarrow{AB}\|$.

En tal caso y aceptado lo anterior, podemos definir $k\overrightarrow{AB}$ para $k \in \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

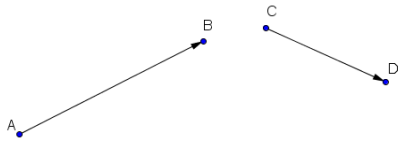
"$k\overrightarrow{AB}$ *es un vector geométrico que tiene por módulo* $|k|\|\overrightarrow{AB}\|$, *por dirección la dirección* $\overrightarrow{AB}$ *y por sentido el sentido de* $\overrightarrow{AB}$ *si* $k>0$ *(positivo), o, sentido opuesto de* $\overrightarrow{AB}$, *si* $k<0$ *(negativo)".*

➢ Otra forma de enfrentar el problema es teniendo en cuenta si k es construible y $\bar{u}$ es el segmento unidad, por la construcción de la medida, el axioma de continuidad y por el teorema de Thales se tiene que $\frac{k}{1}=\frac{X}{\overrightarrow{AB}}$, luego $k\overrightarrow{AB}=1X$, o $X=k\overrightarrow{AB}$ (como se muestra en la figura).



- ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $k = 0$.
- ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $k < -1$.
- ✓ $k\overrightarrow{AB}$, de tal manera que $-1 < k < 1$.
- ✓ Encuentre gráficamente el conjunto de puntos X tales que $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB}$, si cumple cada una de las condiciones anteriores.

9. Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ como se muestra en la figura, construya geométricamente los vectores que se presentan a continuación:



- ✓ $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$
- ✓ $2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
- ✓ $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
- ✓ $-(\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CD}$
- ✓ $\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD}$
- ✓ $\left(2\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD})\right) = 2\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD})$
- ✓ $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) + 2\overrightarrow{CD}$

10. Dados los puntos A, B, C, no colineales. describa gráficamente el conjunto de puntos X, tales que $\overrightarrow{AX} = k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$, de tal manera que:

- ✓ $k = 0$ y p un número real.
- ✓ $p = 0$ y k un número real.
- ✓ $k = 0$ y $0 \leq p \leq 1$.
- ✓ $p = 0$ y $0 \leq k \leq 1$
- ✓ $0 \leq k \leq 1$ y $0 \leq p \leq 1$
- ✓ $k = 1$ y p un número real.
- ✓ $p = 1$ y k un número real.
- ✓ $k = 1$ y $0 \leq p \leq 1$.
- ✓ $p = 1$ y $0 \leq k \leq 1$.

11. Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ con distinta dirección y sentido, que puede decir de la expresión $k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$ si k y p son enteros o racionales.

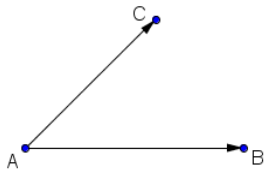
12. Compruebe la siguiente afirmación:

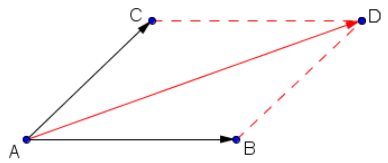
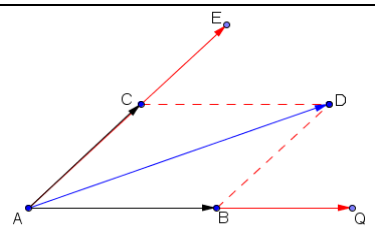
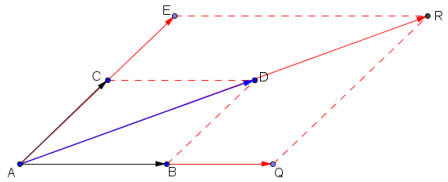
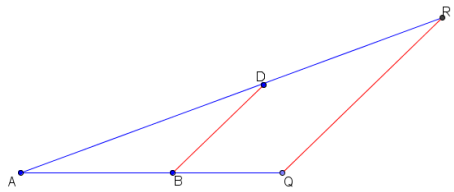
"El producto de un vector geométrico por un escalar es igual al vector geométrico nulo, si y sólo si el escalar es cero o el vector dado es el vector nulo".

13. A manera de ejemplo, veamos cómo se comporta el producto por escalar respecto a la adición de segmentos de recta orientados, es decir se verificara que para todo $k \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ se cumple:

$$k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

Construcción 7: $k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

✓ Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ dos vectores geométricos con distinta dirección, que parten del mismo punto (A).	

✓ Por la definición 3 (regla del paralelogramo), $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, es la diagonal del paralelogramo $\square ABDC$, cuyos lados son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}\sim\overrightarrow{BD}$ respectivamente.	
✓ Por la definición de producto de un vector geométrico por un número real, tenemos que existe k positivo diferente de 0 y 1, tal que $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$ y $k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ sean vectores geométricos con mayor longitud a los dados.	
✓ Nuevamente, por la regla del paralelogramo tenemos que el vector geométrico adición es: $$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AR}$$ Que es la diagonal del paralelogramo $\square AERQ$.	
✓ Por la construcción de los paralelogramos $\square ABDC$ y $\square AERQ$, en los pasos 3 y 4, por el teorema de Thales que: ✓ $\Delta ABD\sim\Delta AQR$, por lo tanto sus lados son proporcionales. Es decir, $$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$ ✓ Además, por la definición de módulo tenemos $\lVert\overrightarrow{AQ}\rVert=\lVert\overline{AQ}\rVert$, $\lVert\overrightarrow{AR}\rVert=\lVert\overline{AR}\rVert$, $\lVert\overrightarrow{AD}\rVert=\lVert\overline{AD}\rVert$, $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert=\lVert\overline{AB}\rVert$. ✓ Pero $\overrightarrow{AR}$ es colineal con $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, entonces, existe un numero real r positivo, tal que $\overrightarrow{AR}=r(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Por lo tanto, $$\frac{r\lVert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\rVert}{k\lVert\overrightarrow{AB}\rVert}=\frac{\lVert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\rVert}{\lVert\overrightarrow{AB}\rVert}$$ Lo que nos permite concluir que $\frac{r}{k}=1$ o $r=k$.	
✓ Por el paso 5, $\overrightarrow{AR}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=k\overrightarrow{AD}$, que es equipolente con $k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$, es decir, como $k\overline{AB}\cong\overline{AQ}$ y $k\overline{AC}\cong\overline{AE}$, implica que $k\overline{AB}+k\overline{AC}\cong\overline{AQ}+\overline{AE}$, pero $\overline{AE}\cong\overline{QR}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, se cumple que $k\overline{AB}+k\overline{AC}\cong\overline{AQ}+\overline{QR}$, así mismo, $k(\overline{AB}+\overline{AC})\cong\overline{AQ}+\overline{QR}$ luego $\lVert k(\overline{AB}+\overline{AC})\rVert=\lVert k\overline{AB}+k\overline{AC}\rVert=\lVert\overline{AQ}+\overline{QR}\rVert$, por lo	

tanto tienen el mismo módulo, por otra parte como $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AD}$, son múltiplos escalares, implica que son paralelos o colineales por lo tanto tienen la misma dirección. lo anterior permite afirmar que el producto de un vector por un número real es distributivo con respecto a la adición de vectores geométricos.

- Verifique que la construcción anterior también es válida si los vectores geométricos no necesariamente parten del mismo punto inicial, es decir, si son vectores arbitrarios. Analice los casos para los que $k = 0$, o, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

14. Sea S_2 el conjunto de los vectores geométricos. Verifique que el producto de un vector geométrico por escalar, cumple las siguientes propiedades dando significado geométrico a las mismas:

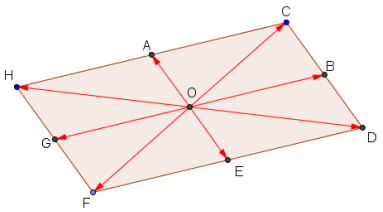
- Del procedimiento $\vec{0} = 0\overrightarrow{AB} = (1 + (-1))\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB}$, ¿podemos afirmar que $-\overrightarrow{AB} = (-1)\overrightarrow{AB}$? Justifique su respuesta.
- $(k + p)(\overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AB}$, para k y p números reales. De igual manera, analice los casos para los que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, o, $k = 0$, o, $p = 0$.
- $(kp)(\overrightarrow{AB}) = k(p\overrightarrow{AB}) = p(k\overrightarrow{AB})$, para k y p números reales.
- Si $(0)(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ o $(k)(\vec{0}) = \vec{0}$ ¿es posible afirmar: para que el producto sea nulo es suficiente que uno de los factores sea nulo?

15. Si $k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} \sim k\overrightarrow{EF} + p\overrightarrow{GH}$. para $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no colineales, ¿se puede afirmar que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{GH}$?

En los ejercicios y discusiones posteriores se hará el cambio de la equipolencia por la igualdad, lo cual permitirá facilidad con el trabajo que se viene realizando con los vectores geométricos.

16. Sea $\square CDFH$ un paralelogramo y A, B, E, G los puntos medios de los lados. Encuentre k y p de tal manera que el segmento de recta dirigido de la forma $k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}$, sea igual a cada uno de los siguientes segmentos de recta orientados:

- ✓ $\overrightarrow{OC}$
- ✓ $\overrightarrow{OD}$
- ✓ $\overrightarrow{OF}$
- ✓ $\overrightarrow{OH}$
- ✓ $\overrightarrow{FC}$
- ✓ $\overrightarrow{HD}$
- ✓ $\overrightarrow{CF}$
- ✓ $\overrightarrow{DH}$
- ✓ $\overrightarrow{OG}$
- ✓ $\overrightarrow{OE}$



17. ***Criterio de paralelismo:*** *Dados dos vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se dicen paralelos (o colineales) si y sólo si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, para algún escalar k.* (*es decir, dos vectores geométricos son paralelos o colineales si uno de ellos es múltiplo escalar del otro*).

- ✓ Compruebe geométricamente el criterio de paralelismo.
- ✓ Dado el criterio anterior ¿Existe alguna diferencia entre paralelismo y colinealidad entre vectores geométricos?

- ✓ ¿Todo segmento de recta orientado tiene la misma dirección que si mismo?
- ✓ ¿se puede afirmar que el vector geométrico con longitud 0, tiene la misma dirección de su opuesto y es paralelo así mismo? argumenta tu respuesta.

Hasta este momento, se ha tenido la oportunidad de trabajar con vectores geométricos, obtenidos como la adición de otros dos vectores geométricos que tienen distinta dirección, es decir, que dado un vector geométrico $\overrightarrow{EF}$, lo podemos expresar en la forma $k\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{CD}$, donde k y p son números reales y $k\overrightarrow{AB}$, $p\overrightarrow{CD}$ serán múltiplos escalares de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ respectivamente, a dichas expresiones las denominaremos ***Combinaciones lineales***.

Formalmente

Definición 3: *Diremos que el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ es una* ***combinación lineal*** *de los vectores geométricos $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$, si existen escalares k y p tales que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}+p\overrightarrow{EF}$.*

Definición 4: *Dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, diremos que son* ***linealmente dependientes*** *(L.D), si existen escalares k y p no todos nulos, tales que $k\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{CD}=0$. En caso contrario diremos que los vectores son* ***linealmente independientes*** *(L.I).*

Como una consecuencia de la definición 4, si dados los vectores geométricos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ implica que existe $k\neq 0$ tal que $1\overrightarrow{AB}+(-k)\overrightarrow{CD}=0$, luego son linealmente dependientes, los cuales, geométricamente serán colineales o paralelos.

18. Teniendo en cuenta las definiciones 3 y 4:

- ✓ Pruebe que, en la expresión $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}+p\overrightarrow{EF}$. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son colineales si $p=0$ o $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ son colineales si $k=0$.
- ✓ Construya conjuntos de segmentos de recta orientados linealmente dependientes y linealmente independientes, dibújelos y describa lo encontrado.
- ✓ Construya un trapecio rectángulo, cuyas bases menor y mayor sean los vectores geométricos $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$, luego exprese los vectores geométricos $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, como una combinación lineal de los siguientes segmentos de recta orientados, teniendo en cuenta para cada caso que $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}=2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$, $\overrightarrow{BC}=3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$, además determina que pares de vectores geométricos son linealmente dependientes y cuáles no.

Definición 5: *Un vector geométrico cuya longitud es uno (1) se denomina unitario y se denota por $\vec{u}$.*

Dado un $\overrightarrow{AB}$ un vector geométrico arbitrario no nulo, se puede encontrar un vector unitario asociado a este. Si se considera el vector $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\left(\overrightarrow{AB}\right)$, el cual tendrá el mismo sentido que $\overrightarrow{AB}$, (pues el número real $k=\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ es positivo), por el criterio de paralelismo, se puede afirmar que el vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ es colineal o

paralelo con $\overrightarrow{AB}$ pues es múltiplo escalar de este por cómo está definido, por lo tanto tendrán la misma dirección, finalmente para comprobar que es unitario basta con calcular su módulo y observar que es uno (1), es decir,

$$\|\overrightarrow{CD}\| = |k|\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left|\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right| \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 1$$

Lo anterior nos permite concluir que $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ garantizando la existencia de este vector geométrico.

19. Con base en la definición 5:

- ✓ Pruebe que, para todo vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, puede ser expresado como $\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\vec{u}$. Verifique la dirección y sentido de este vector. Argumente su respuesta.
- ✓ Dados $\|\overrightarrow{CD}\| = \frac{1}{k}$, y $\|\overrightarrow{AB}\| = k$ para $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$, encuentre vectores unitarios a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ respectivamente. encuentra además un vector unitario a $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\|$. Inicialmente realice ejemplos particulares que den cuenta de lo planteado dando valores numéricos para k y luego intente realizar una prueba de este hecho.
- ✓ Encuentre un vector unitario en la dirección opuesta al vector $\overrightarrow{AB}$, realice su construcción geométricamente y explíquela.

Discusión de la actividad de desarrollo:

Como se ha recurrido a la geometría euclidiana para definir dos operaciones binarias que se pueden realizar con segmentos de recta orientados o vectores geométricos, como son la adición de vectores geométricos y el producto de un vector geométrico por un escalar, entonces tenemos lo siguiente:

- ❖ Se ha comprobado que dados dos o más vectores geométricos arbitrarios de S_2, con la adición satisface las siguientes propiedades:

  - Asociativa: $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$
  - Conmutativa: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
  - Elemento neutro $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donde $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$
  - Opuesto aditivo $\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

- ❖ Con la construcción geométrica de la sustracción o diferencia de vectores geométricos, a partir de la adición, se ha encontrado de paso solución a la ecuación vectorial:

$$\vec{x} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$

  Que no es más, que una ecuación de tipo algebraico, que responde igual que si se trabajara con las propiedades encontradas sobre la operación de la adición de números reales, es decir:

Para encontrar el vector geométrico $\vec{x}$, implica en despejar dicho vector de la ecuación, para ello basta adicionar a ambos lados de la igualdad a $-\overrightarrow{CD}$, que es un vector geométrico opuesto a $\overrightarrow{CD}$, y aplicar todas las propiedades obtenidas en la adición de segmentos de vectores geométricos, así:

$\left(\vec{x}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$	Definición de operación binaria
$\vec{x}+\left(\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)\right)=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$	Propiedad asociativa de la adición de segmentos de recta orientados
$\vec{x}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$	Propiedad del opuesto aditivo $\overrightarrow{CD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)=0$
$\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)$	Propiedad del opuesto aditivo $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$.

De lo anterior, al encontrar que el segmento de recta orientado que denominamos sustracción, estamos definiendo un vector geométrico $\vec{x}$ como aquel que adicionado al vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ nos dará como resultado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$.

- Por otra parte, para definir el producto de un vector geométrico por un escalar (número real), basto tomar un número real k arbitrario y un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ cualquiera de $\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AB}\right)$, donde la longitud es $|k|$ y se probo que este es un vector geométrico paralelo o colineal a $\overrightarrow{AB}$, este nuevo vector geométrico tendrá la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$ si $k>0$, la misma dirección, pero sentido opuesto que $\overrightarrow{AB}$ si $k<0$, y por módulo $|k|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, como un caso particular, si $k=0$, entonces $0\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=0$, luego $0\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

- De la definición del producto de un vector geométrico por un escalar, se puede ver que si existe un único punto C en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de tal manera que C este entre A y B, además, se cumple que $\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=|k|$, y en consecuencia si $k\geq 0$, entonces $k\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AB}\right)=\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AC}\right)$**;** mientras que si $k\leq 0$, entonces $k\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AB}\right)=-\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AC}\right)=\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{CA}\right)$**.** Luego, se puede describir a $k\boldsymbol{v}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ como la colección de los segmentos de recta orientados en el plano, cuyas longitudes son $|k|$ veces la longitud de $\overrightarrow{AB}$, y cuya dirección es la misma, pero el sentido varía según k sea positivo o negativo. Además, ratificando que el vector $k\overrightarrow{AB}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$.

ETAPA DE FINALIZACIÓN

1. Dado el vector geométrico $k\overrightarrow{AB}$ describa como es el módulo, la dirección y el sentido. si k es positivo, k es cero o si k es negativo.

2. Dado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, describa el vector geométrico $k\overrightarrow{AB}$ si k es entero positivo mayor que 1, k es entero negativo menor que -1 o si k es racional.

3. Construya con regla y compas un triángulo isósceles ΔABC , determine los puntos medios de cada uno de sus lados y nómbrelos M, N, P. Luego exprese como una combinación lineal de los segmentos de recta orientados $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AP}$, los siguientes segmentos de recta orientados:
   - $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MC}$.
   - ¿A qué s igual $\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$?
   - Determine pares de vectores geométricos linealmente dependientes e independientes que se pueden obtener de la figura construida.

4. Por la forma como se han definido las operaciones de adición de vectores geométricos y el producto de un vector geométrico por un escalar, es evidente que si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, pertenecen al mismo plano, cualquier combinación lineal de ellos también pertenece a ese plano. Represente este hecho geométricamente e intente realizar una prueba de este hecho.

5. Compruebe que si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no son colineales y no nulos, $k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{CD} = 0$ implica que $k = p = 0$.

6. Pruebe que si $k_1\overrightarrow{AB} + p_1\overrightarrow{CD} = k_2\overrightarrow{AB} + p_2\overrightarrow{CD}$ siendo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no colineales, entonces, se cumple que $k_1 = k_2$ y $p_1 = p_2$.

7. Dados los puntos A, B, C , donde $A - C - B$ y cuyos vectores son $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, tal que $\left\|\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}\right\| = \frac{r}{t}$, con $r + t = 1$, pruebe geométricamente que, $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OB}$, para r y t escalares.

8. Pruebe de forma geométrica el teorema denominado ***Teorema de la base***:

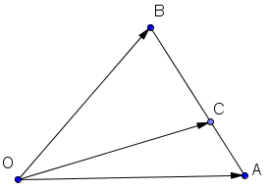
   "*Dado el segmento de recta orientado $\overrightarrow{AB}$ en un plano puede expresarse como una combinación lineal de dos segmentos de recta orientados, no colineales, no paralelos y no nulos, que están en dicho plano".*

9. Pruebe la proposición:

   "*Sea A, B, C, puntos distintos, M un punto de referencia cualquiera, decimos que A, B, C son colineales si y solamente si existen escalares k, l, p diferentes de cero, tal que $k + l + p = 0$ y $k\overrightarrow{MA} + l\overrightarrow{MB} + p\overrightarrow{MC} = 0$". (**Criterio de Colinealidad**)*

10. Esta es una actividad propuesta para aquellos estudiantes que estén interesados en seguir profundizando en esta temática de los vectores geométricos. En este punto, se quiere mostrar la aplicación de la geometría vectorial a la geometría euclidiana, tomando algunos teoremas de esta rama, los cuales pueden ser demostrados mediante argumentos propios de los vectores geométricos, para ello, se debe hacer uso de los conceptos, definiciones y resultados, que se han obtenido en las actividades propuestas anteriores:

Demuestre los siguientes teoremas:



- Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dos segmentos de recta orientados como y C un punto en $\overline{AB}$, tal que $\frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{k}{p}$, donde k y p son números reales, muestra la figura, prueba que $k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} = (k+p)\overrightarrow{OC}$.
- ✓ las diagonales de un paralelogramo se bisecan. (Suponga que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son los lados del paralelogramo).
- ✓ Teorema de la paralela media: El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual en longitud a la mitad de este.
- ✓ Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.
- ✓ El segmento que une un vértice de un paralelogramo con el punto medio del lado opuesto del mismo, triseca la diagonal que une los otros dos vértices no contiguos.
- ✓ Sea $\overline{XY}$ el diámetro de una circunferencia y A un punto arbitrario de la misma. Si $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AB}$, encontrar el lugar geométrico de los puntos B como el movimiento de A en el circulo.
- ✓ Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ son dos recta cualesquier en el espacio, muestre que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{GG'}$, donde G, G' son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ respectivamente.

3.2.4. Actividad 4: Ubicando la tripulación: Fijando vectores geométricos en el plano analítico y encontrando vectores anclados o de posición.

Objetivos:

- ✓ Construir Vectores geométricos anclados en un sistema cartesiano.
- ✓ Construir e identificar Vectores coordenados y de posición en el plano cartesiano a partir de los vectores geométricos fijos.
- ✓ Relacionar de manera algebraica a los vectores geométricos con los vectores coordenados.
- ✓ Identificar propiedades fundamentales que definen la estructura algebraica de los vectores coordenados definidas mediante las operaciones de suma de vectores y el producto de un vector por un escalar de manera analítica.

Descripción: con el estudio de los vectores libres a través del estudio de los vectores geométricos o segmentos de recta orientados se han establecido propiedades y relaciones que fueron construidas mediante el uso y manejo de la regla y el compás. Ahora el objetivo es simplificar este trabajo haciendo uso exclusivo del álgebra, es decir, sin recurrir a artificios de tipo geométrico; para ello se construirá el concepto de vector coordenado haciendo dos restricciones: la primera, se anclará el origen de un vector geométrico arbitrario a un punto C del plano y se considerará el conjunto de vectores equipolentes a él como uno sólo, mediante la construcción de la relación de equivalencia que los representa, para luego pasar a anclar el origen del vector al origen O del plano cartesiano denominándolo vector de posición, de ésta manera los vectores que se denominaban libres ya no lo serán y la segunda, es representarlos mediante parejas de números reales, para luego manipularlos a través de las reglas básicas del álgebra y de la aritmética, que permitirán ser descritos completamente como puntos o parejas ordenadas de números, permitiendo desligar de ellos las representaciones gráficas. Es decir, utilizaremos elementos de tipo algebraico para describir elementos de tipo geométrico mediante los denominados sistemas de coordenadas haciendo uso de la geometría analítica.

ETAPA DE INICIO

Veamos la siguiente situación:

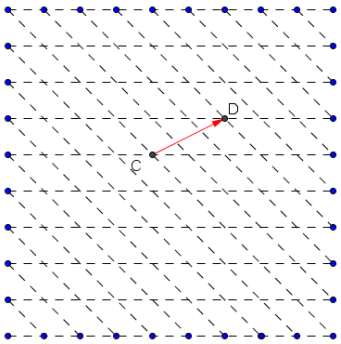
Al norte del océano pacifico se encuentra el centro de guardacostas Alameda, en la bahía de San Francisco, aquí los métodos para localizar barcos o enviar uno en el momento que sea necesario, son estrictamente profesionales, tanto en horas de vigilancia sin incidentes como en momentos de crisis en altamar, el guardacostas siempre cumple con su deber con un enorme variedad de formas y de medios, cartas de navegación muy detalladas y precisas, una gran familiaridad con la bahía y las aguas de los alrededores, una electrónica muy sofisticada, dispositivos de rastreo de alta precisión, personal profesional en las costas.

Un oficial recibe una señal de peligro: “una tripulación de marinos en un yate, parece que se han ido a la deriva y se encuentran perdidos en un punto desconocido”, en cualquier caso, el guardacostas debe usar sus propios recursos para ubicarlos.

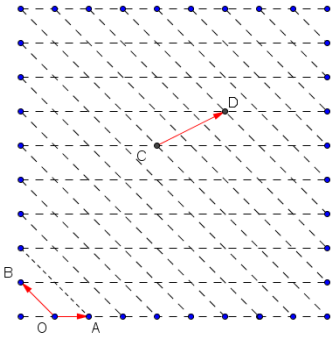
1. Haciendo uso del geoplano y un sistema de referencia el cual es un conjunto de coordenadas que se requiere para poder determinar la posición de un punto (en este caso la posición de la tripulación) en el plano, el cual gráficamente consta de dos rectas no paralelas, intersecantes en un punto O y no necesariamente perpendiculares, donde cada una de estas rectas divide al plano en dos semiplanos disyuntos; además de asignarse direcciones positivas o negativas. Siga las instrucciones:

   - Trate de localizar la posición de la tripulación y responde las siguientes preguntas:

     - ✓ Teniendo en cuenta que la tripulación inicialmente se encontraba en la posición C y ahora se encuentra en la posición D, en una hoja cuadriculada construye un geoplano y en el dibuja el vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ que representa el vector desplazamiento del yate (como se muestra en la figura), además, para ayudar al guardacostas a encontrar la posición de la tripulación, encuentra el conjunto de vectores equipolentes al vector $\overrightarrow{CD}$ de tal manera que determine las posibles ubicaciones y desplazamientos que puede presentar el yate en el mar. ¿Cuántos vectores geométricos puedes determinar con la condición antes planteada? argumenta tu respuesta.



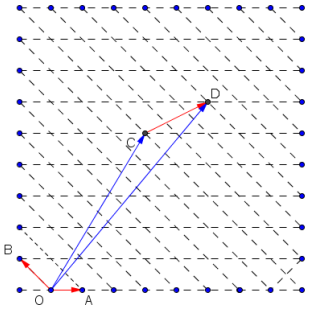
     - ✓ Ahora en el geoplano construye un sistema de referencia arbitrario, ubicando con un lápiz de color el punto O que será el origen de nuestro sistema de referencia que denominaremos el centro de guardacostas, para luego dibujar los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ cuya longitud sea de una unidad (es decir, se construirán dos vectores unitarios) que partan del punto O, donde cada uno de ellos tenga la dirección de los ejes del sistema de referencia que desees. Como se muestra en la figura.



     - ✓ Si tomamos un punto C fijo en el plano, ¿es siempre posible encontrar un vector geométrico con origen en dicho punto que sea equipolente a un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ arbitrario? Argumenta tu respuesta.

     - ✓ ¿Cuántos vectores geométricos equipolentes a $\overrightarrow{CD}$ puedes obtener cuyo punto inicial sea el punto O? Ubícalos en el geoplano.

- Construye en tu sistema de referencia los vectores geométricos $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ ¿Puedes expresar el vector $\overrightarrow{CD}$ como una combinación lineal de los vectores geométricos antes mencionados? has uso de la figura para argumentar tu respuesta.

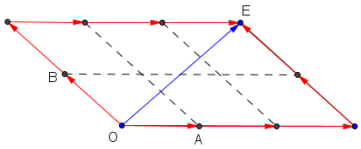


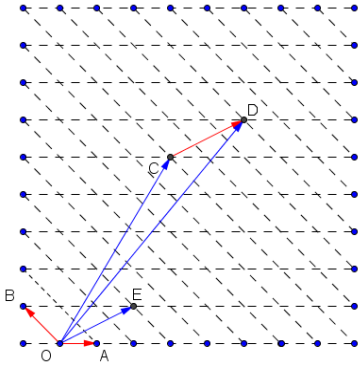
2. Encuentra un vector $\overrightarrow{OE}\sim\overrightarrow{CD}$ y muestre geométricamente que dicho vector geométrico:

   - Se puede escribir como una combinación lineal de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
   - Encuentre escalares k y p tales que $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}$.
   - ¿Será cierta la afirmación: "cualquier vector geométrico equipolente con $\overrightarrow{CD}$ es equipolente a uno y sólo un vector anclado $\overrightarrow{OE}$"?
   - ¿Es siempre posible expresar cualquier vector $\overrightarrow{OE}$, en términos de los múltiplos escalares de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$?
   - En la expresión $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}$. ¿es siempre posible encontrar los escalares k y p?

3. Si definimos "*al par de parejas de números como las coordenadas del vector anclado en O, que son determinadas por los puntos inicial y final que lo conforman*".

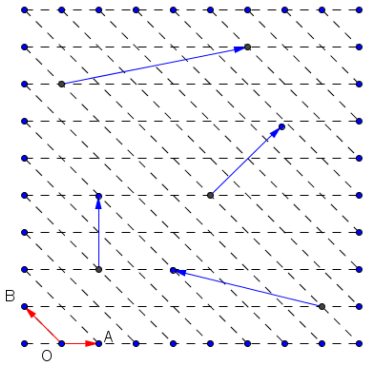
   - Escribe las coordenadas de los puntos inicial y final de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sabiendo que son unitarios y que el punto O tiene coordenadas (0,0), así mismo encuentra las coordenadas de los puntos inicial y final de los vectores $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$. Es decir, a cada uno de los vectores geométricos exprésalos como un conjunto de parejas de parejas ordenadas. Como se muestra en la gráfica.





   - Con las instrucciones anteriores, ¿es posible determinar la localización del yate?¿Cuáles son sus coordenadas?

4. Dados los vectores geométricos dibujados en el sistema de referencia mostrados a continuación, determina la clase de equivalencia de cada uno de ellos, luego a cada uno exprésalos como una combinación lineal de los vectores geométricos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, escribe la pareja de parejas de números.

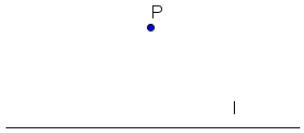
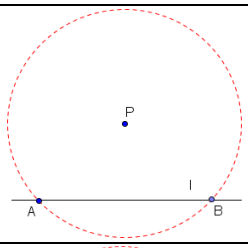
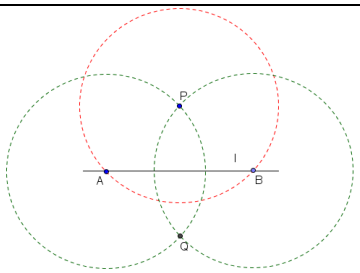


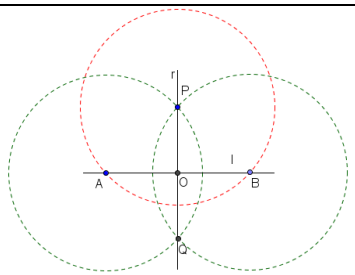
5. Encuentra la pareja ordenada (k,p) que determina el punto final de $\overrightarrow{OB}$ si el origen de cada uno de ellos se encuentra anclado al sistema de referencia O.

Es claro, que para cada vector geométrico $\overrightarrow{CD}$ en el plano, existe un vector geométrico equipolente $\overrightarrow{OE}$ anclado en el origen, el cual, a su vez quedará determinado biunívocamente por un punto E (el cual por comodidad en la notación lo reemplazaremos por P) de coordenadas (k,p); a dicho vector se le denominará ***Vector de posición*** de (k,p) y al punto $P(k,p)$ se le denominará las ***coordenadas*** del vector geométrico $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OP}$.

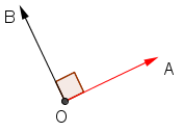
6. A continuación, construye los vectores de referencia $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ perpendiculares, es decir transforma tu sistema de referencia inicial en un plano cartesiano, para ello, sigue la construcción geométrica que se muestran a continuación:

Construcción 8: Rectas perpendiculares

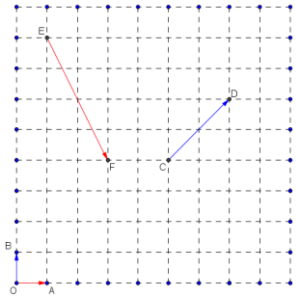
1. Dada la recta $\overleftrightarrow{l}$ y un punto P fuera de ella, construiremos una recta perpendicular a dicha recta, usando regla y compás, como se muestra en la figura.	
2. Con centro en P, trazamos una circunferencia que corte a $\overleftrightarrow{l}$ en los puntos A y B, los cuales son equidistantes con P.	
3. Con centro en A y radio $\overline{AP}$ trazamos una circunferencia, análogamente, con centro en B y radio $\overline{BP}$ trazamos otra circunferencia, las cuales se han de intersecar en los puntos P y Q.	

4. Unimos P y Q obteniendo la recta perpendicular $\overleftrightarrow{r}$.	
Para probar que $\overleftrightarrow{r}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{l}$, basta utilizar el criterio de congruencia L.L.L para los triángulos ΔQPA y ΔQPB, para demostrar que los ángulos $\measuredangle QPA$ y $\measuredangle QPB$ son iguales. Luego aplicamos el criterio L.A.L para los triángulos ΔOPA y ΔOPB para demostrar que los ángulos $\measuredangle POA$ y $\measuredangle POB$ son iguales.	

- Busque otras formas de construir rectas perpendiculares con regla y compás, indique que postulados y teoremas de la geometría euclidiana que sustentan dichas construcciones.
- Basados en la construcción 8, tome los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ perpendiculares (como se muestra en la figura), cuya longitud sea uno y construya el nuevo sistema de referencia en el geoplano, para ello haga uso de la cuadricula de las hojas que estas utilizando.



- En el sistema de referencia construido expresa los vectores $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD}$ arbitrarios (mostrados en la figura), como una combinación lineal de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ compara este resultado con los resultados del punto anterior estableciendo un paralelo, luego concluye.



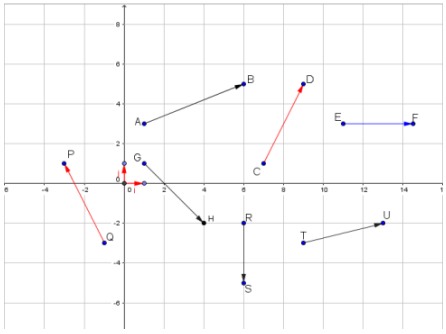
- Si se sabe que la longitud de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es uno (1) y que las coordenadas de los puntos iniciales de cada uno de ellos es $(0,0)$ que coinciden con las coordenadas del punto O, determine para cada vector anclado en O las coordenadas, teniendo en cuenta que existe una pareja de números reales únicos que identificarán al punto final.
- Muestre que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se pueden identificar mediante la pareja ordenada $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente, para cualquier sistema de referencia en el que se encuentren ubicados.
- Si notamos a los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ mediante las letras $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ y $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ respectivamente, muestre que todo vector de posición $\overrightarrow{OP}$ puede expresarse mediante la combinación lineal $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} = k\vec{\boldsymbol{\imath}} + p\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, donde k y p son precisamente las coordenadas del punto final P.
- Representa gráficamente en el plano cartesiano, los vectores de posición $\overrightarrow{OP}$, cuyas coordenadas son $\left({}^{1}/_{3}, 5\right)$, $\left(4, \frac{1}{4}\right)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{7}, \sqrt{3}\right)$, igualmente expresa a cada uno como una combinación lineal de los vectores $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ y $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$.

Discusión de la actividad de inicio: Con la restricción de fijar el punto inicial de cada vector geométrico y al encontrar el conjunto de todos los vectores equipolentes con él, es decir, definiendo su clase de equivalencia, estamos construyendo el conjunto de los vectores fijos, los cuales limitarán a los vectores libres a desplazarse a cualquier lugar del plano. Por otra parte, si fijamos a dichos vectores al origen del plano cartesiano se está dando paso a la construcción del conjunto de los vectores anclados o de posición; un conjunto en el cual las propiedades de paralelismo y colinealidad se vuelven sinónimas pues todo vector equipolente con un vector anclado dado, mediante la relación de equivalencia será denominado igual, esto permitirá describirlos de manera única identificándolos mediante las coordenadas de su punto final, consiguiendo así, a los vectores que llamaremos coordenados.

Por otra parte, al afirmar que a cada vector geométrico del plano se le pueden asociar dos vectores no colineales y no nulos, anclados en un punto arbitrario fijo C, estamos afirmando que todo vector geométrico se puede escribir de manera única como una combinación lineal de dichos vectores, esto es, si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos vectores anclados en el punto O del plano, para cualquier vector $\overrightarrow{OP}$ existirán números reales k y p tales que $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}$; a los números k y p se le denominarán las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto a los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Si los vectores se encuentran en un sistema cartesiano, cualquier vector $\overrightarrow{OP}$ se llamará de de posición con respecto al punto P, el cual también puede ser escrito de manera única, en la forma $\overrightarrow{OP} = k\vec{\boldsymbol{\imath}} + p\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, donde k y p serán las coordenadas que identificarán a dicho punto.

Así, a cada vector anclado en el origen del plano cartesiano $\overrightarrow{OP}$ se le asocia un par de vectores unitarios mutuamente perpendiculares $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ y $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ que permitirán describirlo en términos de las coordenadas del punto final, diremos entonces que dichos vectores son una ***base***, puesto que este conjunto formado por ellos, permite describir a todos los vectores del plano.

ETAPA DE DESARROLLO



1. Dados los vectores fijos en el plano cartesiano como se muestra en la figura. Halla las coordenadas del punto inicial y del punto final, de cada uno de ellos, así mismo, encuentra un vector equipolente a cada uno anclado al origen o de posición, halla sus coordenadas.

Vector fijo	Coordenada del punto inicial	Coordenada del punto final	Vector anclado al origen	Coordenada del punto final del vector anclado al origen

2. Con los vectores fijos del punto anterior, expresa cada uno de ellos como una combinación lineal de los vectores de posición que los conforman, luego exprésalos como la combinación lineal de los vectores base $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$.

3. Dado el vector fijo $\overrightarrow{CD}$ en el plano cartesiano cuyas coordenadas del punto inicial y punto final son (x_1, y_1), (x_2, y_2) respectivamente, pruebe que existe un vector anclado en el origen o de posición, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CD}$ que tendrá por coordenadas en el punto final $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. A $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ se les denomina las ***coordenadas rectangulares*** *del vector* $\overrightarrow{CD}$. Encuentre las coordenadas rectangulares de los vectores coordenados obtenidos en el punto 1.

4. Es posible afirmar que: "*todo vector geométrico se puede representar como un vector de posición*". Argumenta tu respuesta.

5. Pruebe que todo vector de posición $\overrightarrow{OP}$ puede ser identificado mediante las coordenadas del punto final P, si existen números reales x, e, y que lo determinan de manera única.

6. Pruebe que:

   "Para todo vector fijo $\overrightarrow{CD}$ cuyas coordenadas de los puntos inicial y final son $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$, es posible encontrar un vector de posición $\overrightarrow{OP}$ que lo representa mediante las coordenadas $\langle (0,0), (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rangle \sim (x, y)$, quedando bien determinado"

7. Dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyas coordenadas rectangulares son (x, y). Pruebe que si el vector fijo $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$ tiene como coordenadas en el punto inicial (a, b), entonces las coordenadas del punto final son $(a + x, b + y)$. Inicialmente haga ejemplos particulares de este hecho para asegurarse que la proposición es verdadera. (haga una representación gráfica de este hecho en el plano cartesiano).

8. Pruebe que:

   "para cada punto del plano cartesiano le corresponde un y sólo un vector de posición que lo describe o que sirve para identificarlo".

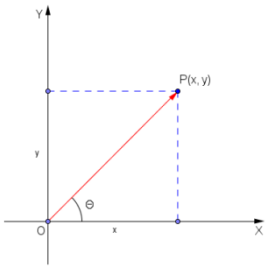
9. Si dados el vector fijo $\overrightarrow{CD}$ y el vector de posición $\overrightarrow{OP}$, tales que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$. complete la siguiente tabla con la información dada:

Vector $\overrightarrow{CD}$		**Vector de posición $\overrightarrow{OP}$**
Punto inicial	**Punto final**	**Coordenadas rectangulares**
$(2, 5)$	$(-3, 7)$	
	$\left(-\frac{2}{5}, -5\right)$	$(6, 9)$
$(-4, -2)$		$(1, 1)$

$\left(7,\frac{1}{3}\right)$	$(-1,8)$	
	$\left(\frac{-1}{5},-5\right)$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$
$(0,-2)$		$(0,9)$

10. Dado el conjunto $\mathbb{R}^2$ *"el conjunto de parejas ordenadas de números reales* (x,y), *tales que* $x,y \in \mathbb{R}$*".* Pruebe las siguientes proposiciones:

- Si $\overrightarrow{OP}$ es un vector de posición, entonces existen números reales x, e, y de $\mathbb{R}^2$, que lo determinan de manera única.
- Al igual que definimos para los vectores geométricos el módulo y el sentido, muestre que estos también son válidos para el vector de posición, (en este conjunto las relaciones de paralelismo y colinealidad se transforman en una sola pues todo vector equipolente con un vector anclado dado, mediante la relación de equivalencia será denominado igual, es por ello que la dirección[35] entre estos vectores se vuelve única), es decir:
  - ✓ Dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyas componentes rectangulares son (x,y) muestre que el módulo está dado por $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
  - ✓ Dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$, ubique en el plano cartesiano los vectores coordenados cuyas componentes rectangulares sean (x,y),$(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$, para $x>0$, e, $y>0$, con lo anterior muestre que el sentido de todo vector de posición está dado a partir de la ubicación de las componentes rectangulares en el plano cartesiano.



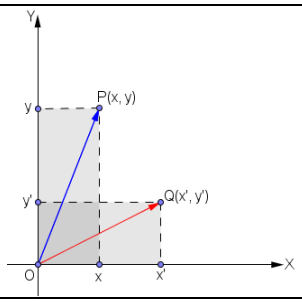
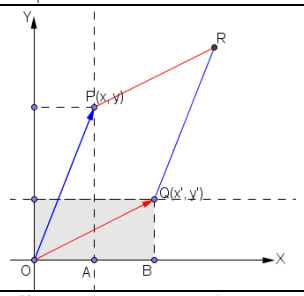
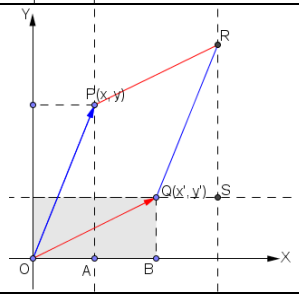
  - ✓ Dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$, ubique en el plano cartesiano los vectores coordenados cuyas componentes rectangulares sean $(x,0)$, $(0,y)$, $(0,-y)$, $(-x,0)$, para $x>0$, e, $y>0$ y determine el módulo la dirección y el sentido de cada uno de ellos.
  - ✓ Dado el vector fijo $\overrightarrow{CD}$ cuyas coordenadas inicial y final son (x_1,y_1) y (x_2,y_2) respectivamente, encuentre el vector de posición $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CD}$ y halle el módulo y el sentido (haga una representación grafica de este hecho en el plano cartesiano).
  - ✓ Complete la tabla y Represente gráficamente los vectores coordenados:

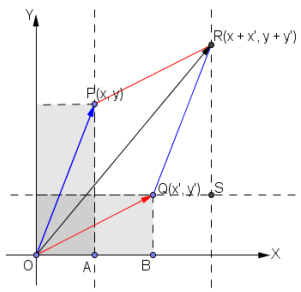
[35] La dirección es un concepto muy utilizado en física que se usa para hablar acerca de la orientación de un vector en el plano cartesiano, "Dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyas componentes rectangulares son (x,y), la dirección es el ángulo θ que forma el vector con el eje positivo de las equis, este se calcula mediante la fórmula $\theta = tang^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, medido en radianes". Para los intereses de este trabajo dicho concepto no se tuvo en cuenta.

Vector de posición	Coordenadas	Módulo	Sentido
$\overrightarrow{OA}$	$(-\frac{3}{2}, -3)$		
$\overrightarrow{OB}$	$\left(0, \frac{4}{7}\right)$		
$\overrightarrow{OC}$	$\left(\frac{3}{2},\ 8\right)$,		
$\overrightarrow{OD}$	$(6, 0)$,		
$\overrightarrow{OE}$	$(5, -9)$		

- Escriba un criterio para determinar cuando dos vectores coordenados son equipolentes o cuando son iguales.
- Represente el vector geométrico nulo como un vector de posición.

11. Justifica los pasos mostrados en la siguiente construcción, haga uso de la geometría analítica para argumentar sus respuestas:

	1. Sean los vectores de posición $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ cuyas coordenadas son (x, y) y (x', y') respectivamente. (como se muestra la figura)
	2. Por la regla del paralelogramo tenemos: _____ _____ _____ _____
	3. $\Delta OAP \cong \Delta QSR$ (son congruentes) ¿Por qué? _____ _____ _____ _____

	4. Luego las coordenadas del punto R son $(x + x', y + y')$ ¿por qué? _____ _____ _____ _____ Así, el vector de posición $\overrightarrow{OR}$ será el vector suma pedido.

La anterior construcción conduce a la definición algebraica de la ***Suma de vectores coordenados***, es decir, dados los vectores de posición $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ cuyas coordenadas son (x, y) y (x', y') respectivamente, la suma denotada por $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, es la diagonal $\overrightarrow{OR}$ del paralelogramo ⊡ $OPRQ$, cuyas Coordenadas serán:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Por lo tanto, la adición de vectores de posición se obtiene sumando las coordenadas componente a componente de los puntos finales que identifican a cada vector.

12. Haga el mismo análisis hecho en el punto anterior y verifique si la definición de suma de vectores coordenados es válida para vectores colineales o paralelos o si son fijos en un punto arbitrario o si no parten del mismo punto inicial. Justifica tu respuesta.

13. ¿Por qué la suma de vectores de posición se siempre se debe realizar mediante la regla del paralelogramo? Argumenta tu respuesta.

14. Encuentre la suma de los vectores coordenados, además determine la magnitud y el sentido de los vectores coordenados resultantes:

- ✓ $\overrightarrow{OP} = (7,0)$ y $\overrightarrow{OQ} = (0,3)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (-\frac{1}{2}, -2)$ y $\overrightarrow{OQ} = (2, -2)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (-3, 0)$ y $\overrightarrow{OQ} = (0,3)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ y $\overrightarrow{OQ} = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (1, -1)$ y $\overrightarrow{OQ} = (4,4)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (0,0)$ y $\overrightarrow{OQ} = (4, -8)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (9,0)$ y $\overrightarrow{OQ} = (9,0)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (1,1)$ y $\overrightarrow{OP} = (-1, -1)$
- ✓ $\overrightarrow{OP} = (0,9)$ y $\overrightarrow{OQ} = (0,9)$

15. Qué condiciones deben cumplir los vectores de posición para que las coordenadas del vector suma sean cero $(0,0)$.

16. Muestre analíticamente que la suma de vectores de posición $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OS}$ que tienen por coordenadas (x, y), (x', y') y (x'', y'')respectivamente, cumple las siguientes propiedades:

i. La suma de dos vectores de posición cualesquiera es un vector de posición definido de forma única, identificado por la pareja ordenada de números reales $(x + x', y + y')$.
ii. Si $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$, entonces $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y)$ (propiedad conmutativa de la suma de vectores).
iii. Si $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS})$, entonces $[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')]$ (propiedad asociativa de la suma de vectores).
iv. Dado $\overrightarrow{OP}$ existe un vector $\vec{O}$ tal que $\overrightarrow{OP} + \vec{O} = \overrightarrow{OP}$ para todo vector $\overrightarrow{OP}$. Se cumple que $(x, y) + (0,0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$ (El vector de posición $\vec{O}$ se llama vector cero o nulo y tiene por coordenadas $(0, 0)$). (propiedad del elemento neutro).
v. Si Todo vector $\overrightarrow{OP}$ tiene un opuesto $-\overrightarrow{OP}$, tal que se cumple $\overrightarrow{OP} + (-\overrightarrow{OP}) = \vec{O}$, entonces $(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0,0)$ (El vector de posición $-\overrightarrow{OP}$ se llama el opuesto de $\overrightarrow{OP}$ y tiene por coordenadas $(-x, -y)$).
vi. Si se define la resta $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ como el vector de posición $\overrightarrow{OP} + (-\overrightarrow{OQ})$, pruebe que $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ tendrá por coordenadas $(x - x', y - y')$.

17. Completa la tabla:

$\overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OQ}$	$\overrightarrow{OR}$	$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$	$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$	$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP}$
$(7,0)$	$(0,3)$	$(9,0)$				
$(-\frac{1}{2}, -2)$	$(2, -2)$	$(5, -2)$				
$(-3, 0)$	$(0,3)$	$(1,1)$				
$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$	$(-1, -1)$				
$(1, -1)$	$(4,4)$	$(0,9)$				
$(0,0)$	$(4, -8)$	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{7}\right)$				

18. Complete la tabla:

$\overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OQ}$	$\overrightarrow{OR}$	$(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + \overrightarrow{OR}$	$\overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$	$\overrightarrow{OP} + \vec{O}$	$\overrightarrow{OQ} + \vec{O}$
$(7,0)$	$(0,3)$	$(9,0)$				
$(-\frac{1}{2}, -2)$	$(2, -2)$	$(5, -2)$				
$(-3, 0)$	$(0,3)$	$(1,1)$				
$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$	$(-1, -1)$				
$(1, -1)$	$(4,4)$	$(0,9)$				
$(0,0)$	$(4, -8)$	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{7}\right)$				

19. Si $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{OG}$ son dos vectores de posición, cuyas coordenadas rectangulares son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, pruebe que :

$$\|\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

20. Como el caso de los vectores geométricos, podemos encontrar una expresión de tipo analítica para el producto de un escalar por un vector de posición, es decir, si dado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyas coordenadas son (x, y) y un número real k, entonces el vector de posición $k\overrightarrow{OP}$ tendrá por coordenadas $k(x, y) = (kx, ky)$.

- Pruebe que $\overrightarrow{OP}$ y $k\overrightarrow{OP}$ tienen la misma dirección por lo tanto son colineales.
- Determine el módulo de $k\overrightarrow{OP}$ y establezca una comparación con el módulo de $\overrightarrow{OP}$.
- Determine el sentido de $k\overrightarrow{OP}$, para ello tenga en cuenta que k puede ser $k > 0$, $k = 0$, o, $k < 0$.
- Complete siguiente tabla:

k	$\overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OQ}$	$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$	$k\overrightarrow{OP}$	$k\overrightarrow{OQ}$	$k(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$
5	$(7,0)$	$(0,3)$				
-7	$(-\frac{1}{2}, -2)$	$(2, -2)$				
$\frac{2}{5}$	$(-3, 0)$	$(0,3)$				
$-\frac{7}{3}$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$				
4	$(1, -1)$	$(4,4)$				
-1	$(0,0)$	$(4, -8)$				

- De la tabla anterior ¿qué puede decir de $k(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$ y $k\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$?

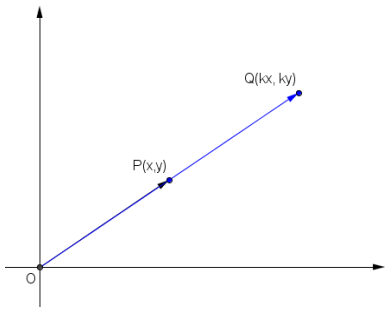
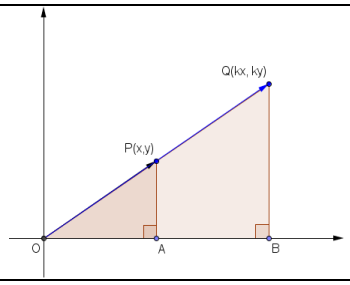
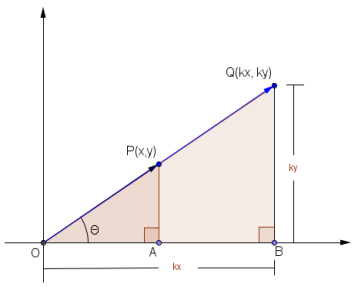
- Complete la siguiente tabla:

k	s	$\overrightarrow{OP}$	$k\overrightarrow{OP}$	$s\overrightarrow{OP}$	$k\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OP}$	$(k + s)\overrightarrow{OP}$
4	5	$(9,0)$				
-1	-3	$(5, -2)$				
2	-4	$(1,1)$				
$\frac{1}{3}$	-3	$(-1, -1)$				
$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$(0,9)$				
6	0	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{7}\right)$				

- De la tabla anterior ¿qué puede decir de $(k + s)\overrightarrow{OP}$ y $k\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OP}$?

21. Justifica los pasos mostrados en la siguiente construcción la cual permite comprobar que la definición analítica de producto de un vector de posición por un escalar concuerda con la definición geométrica. Para ello haga uso de la geometría analítica para argumentar sus respuestas:

- A manera de ejemplo se analizará si $k > 0$
  Observe que si $k > 0$, entonces kx y ky tienen los mismos signos que x y y respectivamente ¿por qué?

	1. si (x, y) está en el primer cuadrante del plano donde x e y son ambos positivos, entonces el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ estará en el primer cuadrante. Así mismo, como (kx, ky) esta también en el primer cuadrante, $\overrightarrow{kOP}$ estará en el primer cuadrante. ¿por qué? _____ _____ _____ _____ ¿Qué condiciones debe cumplir (x, y) para que los vectores de posición se encuentren en los otros tres cuadrantes del plano cartesiano? Argumenta tu respuesta. _____ _____
	2. ¿Por qué los triángulos ΔOAP y ΔOBQ son semejantes? _____ _____ _____ _____
	3. ¿Por qué los vectores de posición tienen la misma dirección? ¿cuál es el módulo de $\overrightarrow{OP}$ y de $\overrightarrow{OQ}$ que relación cumplen? _____ _____ _____ _____

- Analice los casos para los cuales $k < 0$ y $k = 0$.

22. Dados los vectores de posición $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ que tienen por coordenadas (x, y) y (x', y') respectivamente, y los escalares k, k_1, k_2, muestre analíticamente que el producto de un vector por un escalar, cumple las siguientes propiedades:

    i. $k\overrightarrow{OP}$ es un vector determinado en forma única por las coordenadas (kx, ky).
    ii. Si $k(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = k\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$, entonces $k((x + x'), (y + y')) = (k(x + x'), k(y + y'))$
    iii. Si $(k_1 + k_2)\overrightarrow{OP} = k_1\overrightarrow{OP} + k_2\overrightarrow{OP}$, entonces $(k_1 + k_2)(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$
    iv. Si $k_1\left(k_2\overrightarrow{OP}\right) = (k_1k_2)\overrightarrow{OP}$, entonces $k_1(k_2(x, y)) = (k_1k_2)(x, y)$

v. Si $1\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}$, entonces $1(x, y) = (x, y)$
vi. Si $(-1)\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP}$, entonces $(-1)(x, y) = -(x, y)$
vii. Si $0\overrightarrow{OP} = \vec{O}$, entonces $0(x, y) = (0,0)$

Discusión de la actividad de desarrollo: al construir los vectores coordenados, se proporciona un mecanismo para representar a un vector de posición en términos de sus componentes rectangulares identificando al punto final de este, por una pareja de números reales (x, y) determinándolos de manera única.

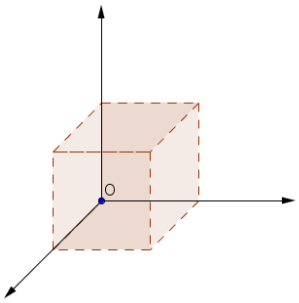
Con la anterior construcción, se proporciona un tratamiento algebraico para los vectores que se venían trabajando de manera geométrica; las definiciones de adición de vectores geométricos y producto de un vector por un escalar, se han transformado a la suma de las componentes, es decir que dados los vectores coordenados $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ cuyas coordenadas son (x, y) y (x', y') respectivamente la suma se define como $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, a su vez, dado el número real k, el producto por escalar no es otra cosa que multiplicar a dicho numero por cada una de las componentes que conforman al vector, es decir, $k\overrightarrow{OP} = k(x, y) = (kx, ky)$; las cuales simplifican el proceso de operar estos objetos sin recurrir a algún tipo de artificio geométrico.

ETAPA DE FINALIZACIÓN

1. Explica porque con la definición de vector fijo se limita a los vectores libres.

2. ¿Existe diferencia entre los vectores de posición y los vectores coordenados? Argumenta tu respuesta.

3. Al igual que se construyo un sistema de coordenadas para el plano denominándolo plano cartesiano, se puede construir un sistema de coordenadas en el espacio denominándolo tridimensional o espacio cartesiano, el cual consta de tres rectas concurrentes en un punto O denominado el origen y perpendiculares dos a dos, como se muestra en la figura. Se denomina $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.



- Implementa una estrategia que permita ubicar diferentes puntos gráficamente en el espacio cartesiano, para ello recurre a situaciones concretas de tu cotidianidad, como por ejemplo ubicar un punto en tu cuarto o en tu salón de clases.
- Si afirmamos que a cada punto del espacio lo podemos asociar con una tripla ordenada de números de reales de manera univoca (x, y, z), localice los siguientes puntos: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(-1,0,-1)$, $(1,0,1)$, $(1,2,4)$, $(2,4,1)$, $(1, 4, 2)$, $(4,1,2)$, $(2,1, 4)$.
- De qué forma son los puntos que se encuentran ubicados en cada uno de los ejes coordenados, expréselos como una tripla ordenada de manera general.

- De qué forma son los puntos que se encuentran ubicados en cada uno de los planos coordenados xy, xz, yz, expréselos como una tripla ordenada de manera general.
- Si asociamos a cada punto P del espacio cuyas coordenadas sean (x, y, z) un vector cuyo punto inicial sea el punto $(0,0,0)$ y punto final P, ubique los siguientes vectores en el espacio cartesiano.
  $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(-1,0,-1)$, $(1,0,1)$, $(1,2,4)$, $(2,4,1)$, $(1,4,2)$, $(4,1,2)$, $(2,1,4)$.
- Si extendemos las operaciones de suma y de producto de un vector por un escalar de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, entonces tenemos:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$k\overrightarrow{OP} = k(x, y, z) = (kx, ky, z).$$

Completa la siguiente tabla:

k	$\overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OQ}$	$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$	$k\overrightarrow{OP}$	$k\overrightarrow{OQ}$	$k(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$
5	$(7,0,0)$	$(0,3,5)$				
-7	$(-\frac{1}{2}, -2, 1)$	$(2, -2, 2)$				
$\frac{2}{5}$	$(-3, 0,4)$	$(0,3, -4)$				
$-\frac{7}{3}$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$				
4	$(1, -1, -1)$	$(4,4,4)$				
-1	$(0,3,3)$	$(4, -8, 4)$				

- Así mismo, Si extendemos el módulo del plano al espacio tenemos:

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Completa la tabla, de igual manera grafíquelos en el plano cartesiano y determine la dirección y el sentido de los mismos:

k	$\overrightarrow{OP}$	$\overrightarrow{OQ}$	$\|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\|$	$\|k\overrightarrow{OP}\|$	$\|k\overrightarrow{OQ}\|$	$k\|\overrightarrow{OP}\| + k\|\overrightarrow{OQ}\|$
5	$(7,0,0)$	$(0,3,5)$				
-7	$(-\frac{1}{2}, -2, 1)$	$(2, -2, 2)$				
$\frac{2}{5}$	$(-3, 0,4)$	$(0,3, -4)$				
$-\frac{7}{3}$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$				
4	$(1, -1, -1)$	$(4,4,4)$				
-1	$(0,3,3)$	$(4, -8, 4)$				

4. Conclusiones y recomendaciones

4.1 Conclusiones

Al elaborar la Secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de vector como elemento de un espacio vectorial, mediado por su representación, surgen las siguientes conclusiones:

- Con el desarrollo del referente histórico se dan a conocer las dificultades en la consolidación formal del concepto de vector mediado por su representación, ya que este nace de los encuentros y desencuentros que se presentan en la evolución de la física y las matemáticas como dos disciplinas formales que aportan al avance de las ciencias; donde la primera modela los fenómenos presentes en la naturaleza y la segunda además de permitir ser el lenguaje de la primera mostrando los resultados de manera sistemática y organizada, posibilita el progreso de la aritmética, el álgebra y la geometría como disciplinas abstractas e independientes de los problemas de aplicación que las generan.

- Del mismo modo, con el desarrollo del referente disciplinar basado en la presentación teórica que hacen los libros de texto consultados, frente a la enseñanza del concepto de vector y de espacio vectorial, estos están determinados por la manera como cada autor aborda éste concepto acorde con la teoría que van a desarrollar; algunos parten del vector geométrico como una ayuda visual para desarrollar el concepto de vector de coordenado, para luego pasar a los espacios vectoriales reales, mientras que otros parten de un punto de vista abstracto exhibiendo al vector como un elemento de un espacio vectorial, para presentar como ejemplos particulares las representaciones geométricas y analíticas de éste; lo que deja de manifiesto que en ambos puntos de vista no se realiza diferenciación alguna entre éstas representaciones que hacen alusión al mismo objeto matemático, enseñándose como una sola.

- Por otra parte, con el desarrollo del referente didáctico se permite mostrar el concepto de vector como un ejemplo para construir una didáctica de un concepto matemático siguiendo las tres etapas propuestas por Brousseau, ya que en un primer momento éste parte de una etapa concreta que nace desde la física como una necesidad, el segmento de recta orientado (protomatemática), para luego en un segundo momento pasar a una etapa casi formal como es el uso del plano cartesiano y la representación de este como una pareja de números reales, en donde las operaciones se aritmétizan cumpliendo las reglas básicas del álgebra (paramatemática), y así, finalmente construir una teoría formal y abstracta como es la de espacio vectorial (matemática).

- Finalmente, este trabajo realizó una contribución en la enseñanza del concepto de vector como elemento de un espacio vectorial, ya que ofrece otra visión en el abordaje de ésta temática tomando como derrotero la evolución de éste concepto mediado por su representación aportando al proceso enseñanza–aprendizaje a estudiantes de física o algebra lineal; es importante recalcar que se esperan buenos resultados frente a la aplicación de la secuencia didáctica de tal manera que sean significativos a largo plazo, ya que se puede ir implementando paulatinamente en el aula de clase.

4.2 Recomendaciones

Para la implementación de la Secuencia didáctica en el aula se sugiere tener en cuenta:

- Rescatar la enseñanza de la geometría euclidiana no sólo como una asignatura fundamental para la creación de pensamiento matemático, sino también por su importancia para la comprensión de otras ciencias, en particular la física. En ella se hace énfasis del uso de la regla y el compás o la implementación de las nuevas T.I.C tanto para aterrizar el conocimiento como para introducir al estudiante en el manejo de software educativo y la apropiación del nuevo conocimiento mediado por el cambio de las tecnologías.

- Orientar y encaminar al estudiante hacia el cambio de representaciones, que traen consigo miradas distintas para el mismo objeto matemático y por consiguiente tratamientos operatorios diferentes que se constituyen posteriormente en una teoría sólida como es el caso del concepto de vector mediado por su representación ya sea como un segmento de recta orientado en la geometría euclidiana o la pareja ordenada de números en la geometría analítica, para luego ambas ser unificadas en la teoría de los espacios vectoriales.

- La importancia que debe dar el docente de secundaria en afianzar su conocimiento disciplinar como una herramienta indispensable para generar nuevas estrategias didácticas y mejorar las prácticas en el aula.

A. Anexo: Evidencia fotográfica de la aplicación de la prueba diagnóstica.

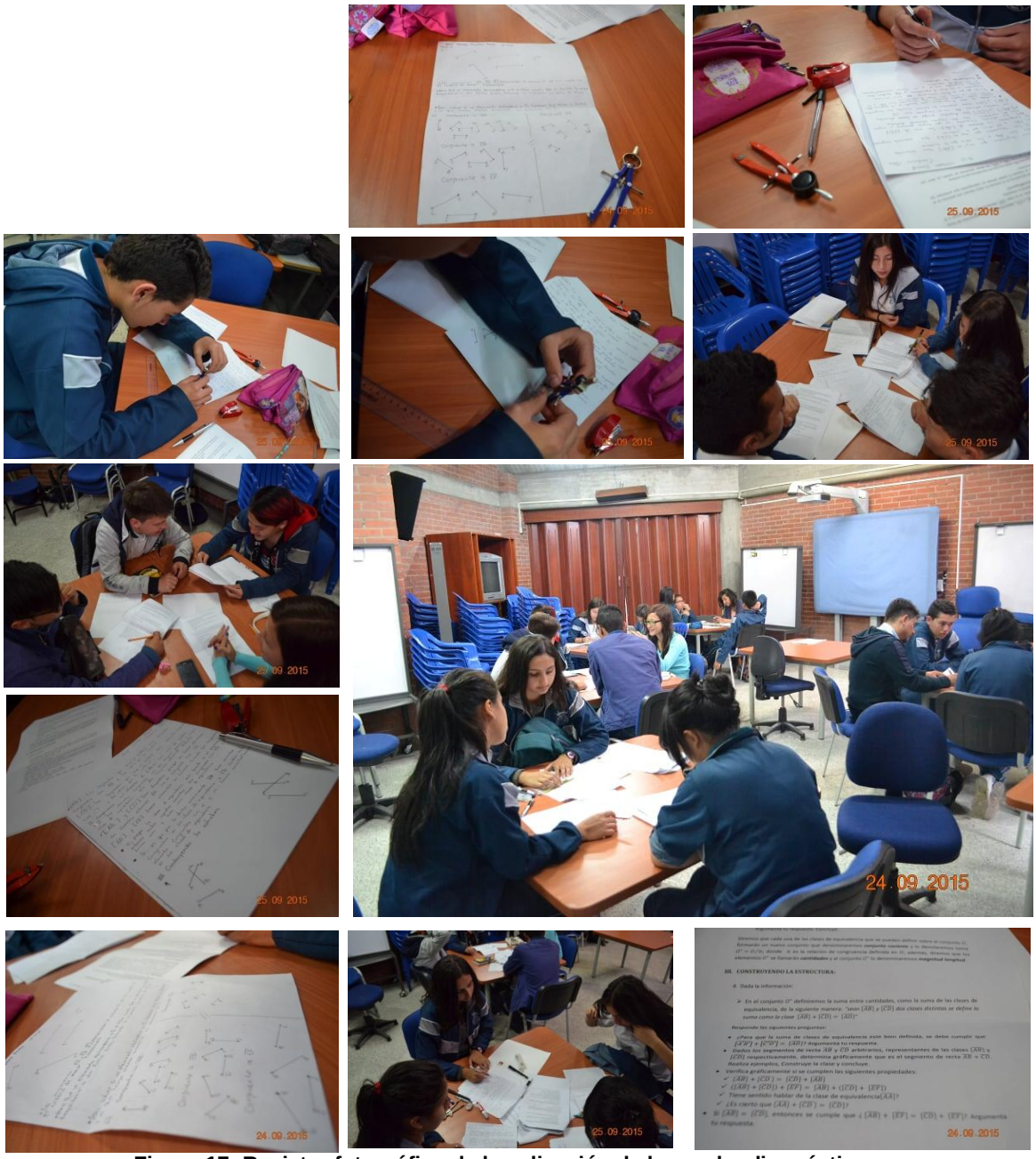


Figura 17: Registro fotográfico de la aplicación de la prueba diagnóstica.

Bibliografía

[1] APOSTOL, Tom. M. (1973). *CALCULUS Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introduccion al Álgebra Lineal.* Barcelona: Editorial Reverte S.A.

[2] ARENZANA, V. (1997). *El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günter Grassman*. Revista Suma, número 25 (pág 61-70). (http://revistasuma.es/IMG/pdf/25/061-070.pdf)

[3] ASOCOLME. (2002). *Estándares curriculares. Área de matemáticas: Aportes para el análisis.* Cuadernillo número 5. Bogotá: Editorial Gaia.

[4] BORZI, S. (2012). *Nociones centrales de la teoría piagetiana. C*itas extraídas de textos de J. Piaget y otros Cátedra de "Psicología Genética" Facultad de Psicología, UNLP, Argentina.

(http://blogs.unlp.edu.ar/psicologiagenetica/files/2014/01/nociones_centrales_2012.pdf)

[5] BROUSSEAU, G. (1999). *Educación y Didáctica de las Matemáticas. Educación matemática*. México noviembre de 1999.

[6] CAMPANARIO, J y MOYA, A. (1999) ¿Cómo enseñar Ciencias? Principales tendencias y propuestas. Enseñanza de las Ciencias. Volumen 17, No. 2: (pag179-192).

[7] CHEVALLARD, Y. (1993). La Transposición Didáctica, Buenos Aires: Aique.

[8] COULSON, A. E. (1967). *Mathematical Thopics: An introduction to Vectors.* England: Logmans.

[9] CROWE, M. J. (1985). *A history of vector Analysis. The Evolution of the Ideas of a Vectorial System.* New York: Dover pub.

[10] CUESTA, J (2008). Tema 1: Introducción a los números complejos. Universidad Carlos III de Madrid. OPENCOURSEWARE.

http://ocw.uc3m.es/matematicas/ampliacion-de-matematicas-i/lecturas/cap1.pdf/view.

[11] DORIER, J. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. HISTORIA MATHEMATICA 22 (pág.227-261).

(http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245).

[12] ECHAVARRIA, J. (1996). *la Geometria Leibniziana: de la perspectiva al análisis situs*. *Congreso de la sociedad española historica de la ciencia.* (pág 69 -78).

(http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/587753.pdf).

[13] EUCLIDES, (1999). *Los elementos.* Madrid: Planeta–De Agostini, S. A.

[14] FIOL, M. L. y FORTUNY, A. J. (1990). *PROPORCIONALIDAD DIRECTA. La forma y el número.* Madrid: Editorial Sintesis.

[15] GARCIADIEGO, D. A. (2006). *Evolución del concepto de número, del siglo XVI a principios del XX." Maestría en Educación Matemática*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. (Conferencia Magistral).

(http://www.matedu.cinvestv.mx/~maestriaedu/docs/asig2/gdiegoconceptonum2.pdf).

[16] HENSTEIN, I. (1970). *Algebra Moderna.* México: F.Trillas, S. A.

[17] MACIAS, Mª. R. (2010). *Evolucion Histórica del concepto de número*. Autodidácta Revista online.

(http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf).

[18] MURDOCH, D. (1980). *Geometría analítica con vectores y matrices.* México: Editorial LIMUSA.

[19] MURRAY, S. (1970). *Serie Schaum: Análisis Vectorial.* México: editorial McGraw-Hill.

[20] ORTIZ, L. (2014). Galileo y Descartes: la matematización de la física. Artículo, Costa Rica: Rev filosofía Univ. (pág 107 - 116)

[21] PARRAGUEZ, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto Espacio Vectorial*. Tesis doctoral, México: Instituto Politécnico Nacional, 2009.

(http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/parraguez_2009.pdf)

[22] PIAGET, J. (1975) *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático. Psicología Evolutiva*. Paidós, Buenos Aires.

[23] POLANÍA, S. y SÁNCHEZ, Z. (2010). *Un acercamiento al pensamiento geométrico.* Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

[24] RIVERO, M. F. (2001). *Una introducción a los números complejos.* Universidad de los Andes Mérida Venezuela.

(https://www.academia.edu/8094583/Una_Introducción_a_los_Números_Complejos).

[25] ROSALES, G. A (2009). *Desarrollo histórico del álgebra vectorial*. Unión, Revista Iberoamericana de educación Matemática. (Pág 63-76).

(http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/19/Union_019_010.pdf).

[26] SÁNCHEZ, E. (1993). "*Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*", Brousseau, G. Lecturas de didáctica de las matemáticas. La escuela francesa. México: CINVESTAV-IPN.

(http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentosBrousseauppdf).

[27] SÁNCHEZ, M. J. (2011). Historia de las Matemáticas - *Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones.* Revista de investigación. Pensamiento matemático.

(http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/hamilton_y_el_descubrimiento_de_los_cuaterniones.pdf).

[28] SERWAY, R. A. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. Volumen 1. Séptima edición. CENGAGElearning.

[29] ZEA, S. C. (2012). *La instauracion histórica de la noción de vector como concepto matemático.* Tesis de pregrado. Cali: Universidad del Valle.

(http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4650/1/CB-0463887.pdf).