fce Escuela de Economía documentos

ISSN 2011-6322

Documento Escuela de Economía
No 25

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS SETAR Y STAR PARA EL ÍNDICE DE EMPLEO INDUSTRIAL COLOMBIANO

Milena Hoyos y Mario Galindo

fce Centro Editorial
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

COMPARACIÓN DE LOS MODELOS SETAR Y STAR PARA EL ÍNDICE DE EMPLEO INDUSTRIAL COLOMBIANO

Milena Hoyos y Mario Galindo *

Resumen

Este trabajo pretende mostrar evidencia de no linealidad en el índice de empleo industrial colombiano. Para esto, se estiman los modelos SETAR y STAR, usando la serie mensual del índice para el periodo 1990-2010. El artículo presenta además una comparación del desempeño de pronósticos de los modelos para diferentes horizontes de predicción. Los principales resultados muestran evidencia de no linealidad, explicada por un SETAR de cuatro regímenes y un LSTAR de dos regímenes, así como la superioridad del segundo modelo en capacidad predictiva. El LSTAR no solamente ofrece ganancias importantes en desempeño de pronósticos, sino también presenta ventajas frente a su rival en términos de facilidad de interpretación.

Palabras claves: Ciclo económico, no linealidad, modelo SETAR, modelo STAR, índice de empleo industrial.

Abstract

This article intends to show evidence of nonlinearity in the Colombian industrial employment index. For this, a nonlinear self-exciting threshold autoregressive model and a smooth transition autoregressive model are estimated for the monthly index from 1990 to 2010. The article also presents a forecast comparison of the models for different forecast horizons. The main results show evidence of nonlinearity, explained by a four-regime SETAR model and a two-regime LSTAR model, as well as the superiority of the latter model in predictive capacity. The LSTAR model not only offers important benefits in forecast performance, but also presents advantages in front of its rival in terms of interpretation ease.

Keywords*:* Business cycle, nonlinearity, SETAR model, STAR model, industrial production index.

Clasificación JEL: C22, C52, C53.

* Milena Hoyos es Magíster en Estadística, profesora e investigadora de la Escuela de Economía de la Universidad Nacional de Colombia. Email: nmhoyosg@unal.edu.co
Mario Galindo es Magíster(c) en Economía, profesional especializado de la Comisión de Regulación en Salud. Email: mg.galindo267@uniandes.edu.co
Los autores agradecen a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia por la financiación recibida. Así mismo, a la ayuda de Brayan Rojas en algunos cálculos del trabajo.

La serie Documentos FCE considera para publicación manuscritos originales de estudiantes de maestría o doctorado, de docentes y de investigadores de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia; resultado del trabajo colectivo o individual y que hayan sido propuestos, programados, producidos y evaluados en una asignatura, en un grupo de investigación o en otra instancia académica.

Documentos FCE
Escuela de Economía
ISSN 2011-6322

La serie Documentos FCE puede ser consultada en el portal virtual: http://www.fce.unal.edu.co/publicaciones/

Coordinador Centro Editorial-FCE
Álvaro Zerda Sarmiento
Profesor Asociado - FCE

Equipo Centro Editorial-FCE
Sergio Pérez
David Alejandro Bautista Cabrera
Juan Carlos García Sáenz

Contacto: Centro Editorial –FCE

Correo electrónico:
publicac_fcebog@unal.edu.co

Este documento puede ser reproducido citando la fuente. *El contenido y la forma del presente material es responsabilidad exclusiva de sus autores y no compromete de ninguna manera a la Escuela de Economía, ni a la Facultad de Ciencias Económicas, ni a la Universidad Nacional de Colombia.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Rector
Moisés Wassermann Lerner

Vicerrector Sede Bogotá
Julio Esteban Colmenares

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Decano
Jorge Iván Bula Escobar

Vicedecano Académico
Gerardo Ernesto Mejia Alfaro

ESCUELA DE ECONOMÍA
Director
Leonardo Duarte Vergara

Coordinador Programa Curricular de Economía
Héctor William Cárdenas

1. Introducción

En la primera mitad del siglo XX, el llamado "enfoque clásico" del ciclo, inspirado en la obra de Burns & Mitchell (1946), enfatizó que uno de los objetivos principales de la investigación empírica consistía en describir adecuadamente el ciclo económico[1]. Su descripción bajo este enfoque posee un elemento fundamental. Este elemento está relacionado con la definición del ciclo como la secuencia de fases o regímenes[2].

Desde otra perspectiva, la información cíclica es extraída eliminando la tendencia, o nivel permanente de los agregados. Diversas metodologías han sido propuestas para llevar a cabo dicha extracción; en particular, se pueden aplicar métodos estadísticos, económicos o híbridos[3]. Bajo esta aproximación se supone que las variables macroeconómicas se describen mediante un proceso estocástico lineal con coeficientes fijos. En palabras de Blanchard & Fischer (1989), este ha sido un componente fundamental de conexión entre la teoría macroeconómica y la econometría.

Sin embargo, la integración entre estas dos áreas ha dejado de lado elementos esenciales en la descripción del ciclo, presentes en el marco de Burns & Mitchell. Además, la estructura lineal de los procesos estocásticos descarta cualquier posibilidad de capturar no linealidades en la evolución cíclica de la actividad económica (véase Diebold & Rudebusch 1996).

En años recientes ha surgido un renovado interés por la no linealidad del ciclo y diversas metodologías estadísticas han sido propuestas para su modelación. Estos procedimientos descansan sobre la idea de que las recesiones y expansiones deben ser tratadas como objetos probabilísticos distintos. Entre estos se encuentran los modelos SETAR y STAR introducidos por Tong (1978) y Teräsvirta (1994), respectivamente. Varios trabajos empíricos han mostrado que estos modelos no sólo son capaces de capturar hechos estilizados de variables macroeconómicas, sino que además parecen ofrecer mejoras en términos de predicción[4].

A pesar de estas bondades, existen pocos estudios que abordan este tema para la economía colombiana. Particularmente, no existen trabajos para analizar la no linealidad del índice de empleo industrial colombiano, así como tampoco una evaluación del desempeño de pronósticos para esta variable. Así mismo, a pesar de que existen varios estudios que evalúan la capacidad de predicción de modelos no lineales, es escasa la literatura que realiza comparaciones entre los modelos SETAR y STAR. Este trabajo pretende mostrar evidencia de no linealidad en el índice y realizar una comparación del desempeño de pronósticos de estos dos modelos para dicha serie.

El documento se encuentra dividido en cuatro secciones: la primera es esta introducción, la segunda introduce los modelos SETAR y STAR, la tercera muestra los resultados empíricos y la cuarta concluye.

[1] Instituciones como NBER, IMF, OECD han tomado este enfoque para localizar puntos de quiebre y definir recesiones (véase Harding & Pagan 2008).
[2] Otro elemento sustancial en el enfoque clásico está referido a los co–movimientos (véase Diebold & Rudebusch 1996).
[3] Véase Canova (2007) para una descripción completa de estos métodos.
[4] No existe sin embargo, un consenso sobre la superioridad de estos modelos. Algunos autores han encontrado que los pronósticos generados por metodologías no lineales no muestran diferencias significativas frente a pronósticos obtenidos por métodos lineales. Incluso se ha encontrado que el modelo no lineal pueden ser superado por su contraparte lineal, a pesar del mejor ajuste mostrado por el primero. Diversos argumentos que explican el desempeño inferior de modelos no lineales han sido discutidos en la literatura. Véase Teräsvirta (2006).

2. Modelos SETAR y STAR

2.1 Representación

Los modelos de cambio de régimen consideran la existencia de estados o regímenes. El comportamiento dinámico de la serie está determinado por el régimen que ocurre en un momento dado del tiempo, y el régimen a su vez, por una variable que puede ser observable o latente. Los regímenes son conocidos cuando esta variable, llamada la variable de umbrales, se observa. No es posible saber con exactitud el régimen asociado a un periodo de tiempo determinado, cuando esta variable es latente. Sin embargo, en este último caso se pueden computar probabilidades de ocurrencia de los regímenes.

Dentro del tipo de modelos determinados por variables observables se encuentran los modelos autorregresivos de umbral. Un caso particular se tiene cuando la variable de umbrales es un rezago del proceso de interés. Este modelo es llamado SETAR (por sus siglas en inglés Self-Exciting Threshold Autoregressive) y está dado por

$$X_t = \emptyset_0^{(j)} + \emptyset_1^{(j)} X_{t-1} + \cdots + \emptyset_{p_j}^{(j)} X_{t-p_j} + \varepsilon_t^{(j)}, \quad \text{si } r_{j-1} < X_{t-d} \leq r_j, \tag{1}$$

donde $j = 1, \ldots, l$, con l el número de regímenes. X_{t-d} es la variable de umbrales y d el parámetro de retraso. Los umbrales $r_j (j = 1, \ldots, l-1)$ son números reales tales que $-\infty = r_0 < r_1 < \cdots < r_{l-1} < r_l = \infty$. Además, $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza σ_j^2. Los coeficientes $\emptyset_1^{(j)}, \ldots, \emptyset_{p_j}^{(j)}$, son números reales y los números enteros no negativos $p_1, \ldots, p_l$ denotan los órdenes autorregresivos de los diferentes regímenes.

Usando una función indicadora I, el modelo anterior puede también escribirse como

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(\emptyset_0^{(j)} + \emptyset_1^{(j)} X_{t-1} + \cdots + \emptyset_{p_j}^{(j)} X_{t-p_j} + \varepsilon_t^{(j)} \right) I\left(r_{j-1} < X_{t-d} \leq r_j\right). \tag{2}$$

El SETAR asume que el cambio entre un régimen y otro es instantáneo y que la frontera entre dos regímenes está dada por un valor de la variable de umbrales. Teräsvirta (1994) propuso un modelo donde la transición entre regímenes es gradual. Este se obtiene al reemplazar la función indicadora por una función continua, que puede cambiar suavemente entre cero y uno, cuando X_{t-d} incrementa. Este modelo es conocido como STAR (por sus siglas en inglés Smooth Transition Autoregressive) y está dado por

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left(\emptyset_0^{(j)} + \emptyset_1^{(j)} X_{t-1} + \cdots + \emptyset_{p_j}^{(j)} X_{t-p_j} \right) \left(G_{j-1}\left(X_{t-d}; \gamma_{j-1}, r_{j-1}\right) - G_j\left(X_{t-d}; \gamma_j, r_j\right) \right) + \varepsilon_t, \tag{3}$$

donde $G_j(X_{t-d}; \gamma, r)$ es la función de transición, $G_0 = 1$ y $G_l = 0$. Además, γ_j es la tasa de transición y $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza σ^2.

El modelo anterior puede además escribirse como

$$X_t = \sum_{j=1}^{l} \left[\left(\emptyset_0^{(j)} + \emptyset_1^{(j)} X_{t-1} + \cdots + \emptyset_{p_j}^{(j)} X_{t-p_j} \right) - \left(\emptyset_0^{(j-1)} + \emptyset_1^{(j-1)} X_{t-1} + \cdots + \emptyset pj{-}1j{-}1Xt{-}pj{-}1Gj{-}1(Xt{-}d;\gamma j{-}1,rj{-}1){+}\varepsilon t, \right. \tag{4}$$

con $\emptyset_i^{(0)} = 0$ y $G_0 = 1$.

Dentro de las funciones de transición más comúnmente usadas se encuentran la función logística

$$G(X_{t-d};\gamma,r)=\frac{1}{1+\exp\left(-\gamma(X_{t-d}-r)\right)},\qquad \gamma>0, \tag{5}$$

y la función exponencial

$$G(X_{t-d};\gamma,r)=1-\exp(-\gamma(X_{t-d}-r)^2),\qquad \gamma>0. \tag{6}$$

Un modelo STAR de dos regímenes con una función de transición logística es denominado LSTAR y uno con una exponencial es llamado ESTAR. El parámetro γ indica la rapidez del cambio de un régimen a otro y el parámetro r el punto de inflexión o umbral entre los dos regímenes. En el modelo LSTAR, cuando γ es grande, la función de transición se aproxima a la función indicadora $I(X_{t-d}>r)$. En este caso el SETAR puede ser aproximado por el LSTAR. Cuando $\gamma\to 0$, la función se aproxima a una constante, igual a 0.5, y cuando $\gamma=0$, el LSTAR se reduce a un AR lineal. Por su parte, en el ESTAR la función se aproxima a una constante, igual a 0, cuando $\gamma\to 0$, e igual a 1, cuando $\gamma\to\infty$. En ambos casos el modelo se reduce a un AR lineal.

En el LSTAR los dos regímenes están asociados con valores grandes y pequeños de la variable X_{t-d}, llamada la variable de transición. Este modelo puede ser usado para modelar asimetrías del ciclo económico, donde los regímenes se asocian a expansiones, en cuyo caso $G(X_{t-d};\gamma,r)=1$, y a contracciones, con $G(X_{t-d};\gamma,r)=0$. En contraste, el ESTAR supone una estructura dinámica similar para las expansiones y las contracciones, aunque se pueden tener dinámicas diferentes en el punto medio, donde los valores son cercanos a r. En este último modelo el interés está centrado en determinar la distancia respecto a este parámetro r, ya que esta distancia define los regímenes.

Tanto el SETAR como el STAR suponen que en cada régimen la serie puede ser descrita apropiadamente por un modelo autorregresivo lineal. Estos modelos no lineales permiten además que ciertas características de la serie, como media, varianza y autocorrelaciones, sean diferentes en distintos regímenes. A diferencia de los AR, la estacionariedad de la serie no requiere que todas las raíces del polinomio autorregresivo $g(z)=z^{p_j}-\sum_{i=1}^{p_j}\emptyset_i^{(j)}z^{p_j-i}$ estén por dentro del círculo unitario. Es posible tener una alternancia entre regímenes explosivos y contractivos y aun así tener estacionariedad a nivel global.

Otra característica interesante de los modelos no lineales es su habilidad para producir comportamientos de ciclos límite[5], esto es soluciones de equilibrio que en vez de colapsar a un punto límite simple, convergen a un conjunto de puntos, creando una órbita periódica.

2.2 Estrategia de especificación empírica

El procedimiento de especificación empírica consiste de los siguientes pasos:

(1) Especificar un modelo autorregresivo lineal para la serie.
(2) Probar la hipótesis nula de linealidad contra la alternativa de no linealidad del tipo SETAR o STAR.
(3) Identificar el modelo. Para el SETAR esta fase consiste en la determinación de la variable de umbrales, del número de regímenes, la localización de los umbrales y la especificación de los

[5] En modelos de series de tiempo lineales las fluctuaciones son causadas por choques aleatorios exógenos. En contraste, en los no lineales es posible que se presenten fluctuaciones aún en ausencia de estos choques. Esta situación puede presentarse cuando el modelo contiene un ciclo límite.

órdenes autorregresivos. Para el STAR esta etapa incluye la selección del tipo de modelo y de la estructura de rezagos.

(4) Estimar los parámetros.
(5) Validar el modelo.
(6) Usarlo para fines descriptivos o predicción.

Se han propuesto diferentes alternativas para analizar los modelos de cambio de régimen. En este documento se seguirá la sugerida por Tsay (1989) para el SETAR y por Teräsvirta (1994) para el STAR. Estas metodologías parten de la identificación de un modelo AR lineal para la serie y de la selección de un conjunto de posibles valores del parámetro de retraso d. El propósito es llevar a cabo una prueba estadística en la que se contrasta la hipótesis nula de linealidad contra la alternativa de no linealidad, a partir de una regresión lineal.

2.2.1. Prueba de no linealidad

En el caso del SETAR, el procedimiento inicia con el ordenamiento de los datos de acuerdo a la variable de umbrales, y con la estimación de una autorregresión usando el método de mínimos cuadrados recurrentes. Suponiendo que la recurrencia comienza con las primeras m observaciones, se computan los residuos predictivos estandarizados $\hat{\eta}_t$, para $t > m$, y se estima la regresión auxiliar de $\hat{\eta}_t$ sobre $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$. Los residuos de este último modelo $\hat{\epsilon}_t$, son usados para computar el estadístico de prueba

$$\hat{F} = \frac{(\sum \hat{\eta}_t^2 - \sum \hat{\epsilon}_t^2)/(p+1)}{\sum \hat{\epsilon}_t^2 /(T-d-m-p-h)}, \tag{7}$$

con $h = máx\{1, p+1-d\}$ y T el tamaño de la muestra, y donde la suma sobre t se hace desde $m+1$ hasta $T-d-h+1$. Bajo la hipótesis nula de linealidad y un T grande, la estadística $\hat{F}$ sigue aproximadamente una distribución F con $p+1$ y $T-d-m-p-h$ grados de libertad.

En el STAR, la prueba inicia con la estimación del modelo bajo la hipótesis nula y con el cómputo de los residuos $\hat{u}_t$. Posteriormente, se estima la regresión auxiliar de $\hat{u}_t$ sobre $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ y $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})X_{t-d}^i$, $i = 1,2,3$, y se computan los residuos $\hat{v}_t$. El estadístico de prueba corresponde a

$$\widehat{LM} = \frac{(\sum \hat{u}_t^2 - \sum \hat{v}_t^2)/3p}{\sum \hat{v}_t^2 /(T-4p-1)}. \tag{8}$$

Bajo la hipótesis nula de linealidad y un T grande, la estadística $\widehat{LM}$ sigue aproximadamente una distribución F con $3p$ y $T-4p-1$ grados de libertad.

2.2.2. Identificación del modelo

Los autores sugieren usar los resultados de la prueba para identificar la variable de umbrales del SETAR y la variable de transición del STAR. La propuesta es seleccionar el valor del parámetro de retraso d que minimiza el p-valor. Para la localización de los umbrales y la identificación del número de regímenes del SETAR, Tsay (1989) propone realizar diagramas de dispersión entre los residuos estandarizados o las razones t de las estimaciones recurrentes y la variable de umbrales. La estrategia consiste en identificar como posibles umbrales los valores de la razón t que se desvían de la convergencia a un valor fijo, o aquellos donde se detectan cambios en el comportamiento de los

residuos. Criterios de información como AIC[6] o BIC, pueden además ser usados para realizar una búsqueda más precisa de los umbrales.

Para la selección de los órdenes autorregresivos del SETAR puede utilizarse también criterios de información. Considerando diversos valores para $p_1, \dots, p_l$ y varios valores cercanos a los umbrales seleccionados, se estima el modelo para todas las posibles combinaciones de los valores anteriores. Los umbrales y órdenes definitivos son aquellos que minimizan el criterio.

De otro lado, Teräsvirta (1994) recomienda usar los resultados de la prueba de no linealidad para la selección del tipo de modelo STAR. Para ello, se realiza la siguiente secuencia de pruebas de hipótesis

$$H_{01}: \beta_{3j} = 0, j = 1, \dots, p \quad (9)$$

$$H_{02}: \beta_{2j} = 0 | \beta_{3j} = 0, j = 1, \dots, p \quad (10)$$

$$H_{03}: \beta_{1j} = 0 | \beta_{2j} = \beta_{3j} = 0, j = 1, \dots, p \quad (11)$$

donde β_{ij} son los coeficientes que acompañan a las variables explicativas $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})X_{t-d}^{i}$, $i = 1,2,3$, en la regresión auxiliar. Si el p-valor de la prueba H_{02} es el más pequeño, un modelo ESTAR es elegido. En otro caso un LSTAR es seleccionado.

Para la escogencia de la estructura de rezagos del STAR es usual comenzar con el orden p del AR, para luego eliminar secuencialmente los coeficientes no significativos.

2.2.3. Estimación del modelo

Una vez se ha identificado el modelo, se procede a estimar los parámetros. En el caso del SETAR, la estimación se realiza usando el método de mínimos cuadrados ordinarios. Para ello, se divide la muestra en l grupos, y se estima el modelo autorregresivo de cada régimen por separado, usando únicamente las observaciones pertenecientes a dicho régimen[7].

Los parámetros del STAR $\theta = (\emptyset_1^{(j)}, \dots, \emptyset_{p_j}^{(j)}, \sigma^2, r_j, \gamma_j)'$ son estimados por el método de mínimos cuadrados no lineales, el cual es equivalente a máxima verosimilitud bajo el supuesto de distribución normal de los errores. La estimación puede ser llevada a cabo usando algún procedimiento de optimización no lineal. Posibles problemas computaciones pueden ser mitigados usando buenos valores iniciales de los parámetros. Una escogencia de estos valores para r_j y γ_j puede hacerse mediante una búsqueda de grilla.

El problema de estimación puede además ser simplificado concentrado la función de la suma de cuadrados con respecto a los parámetros autorregresivos, como fue sugerido por Leybourne, Newbold & Vougas (1998). Fijados r_j y γ_j, el STAR es lineal en los parámetros autorregresivos, así que estos últimos coeficientes pueden ser obtenidos por MCO.

Algunas veces pueden presentarse problemas numéricos relacionados con la estimación del parámetro γ_j (véase Teräsvirta 1998). Para aliviar estos problemas el autor sugiere estandarizar el exponente de la función de transición, dividiéndolo por la desviación estándar muestral.

[6] Tong (1990) propuso una modificación del AIC para modelos SETAR.

[7] Note que las observaciones pertenecientes al primer régimen son aquellas que cumplen la condición $X_{t-d} \leq r_1$. De manera general, las observaciones del régimen j cumplen la condición $r_{j-1} < X_{t-d} \leq r_j$.

2.2.4. Evaluación del modelo

Después de estimar los parámetros se evalúan las propiedades del modelo ajustado. Tong (1990) y Teräsvirta & Anderson (1992) analizan las propiedades de largo plazo de los modelos SETAR y STAR, respectivamente, usando el esqueleto[8] del modelo cuando $t \to \alpha$ para diferentes valores iniciales de $x_{t-1}^0, \dots, x_{t-p}^0$, con $p = \max(p_1, p_2)$. El esqueleto puede converger a un punto límite estable o a un ciclo límite estable. Si este ciclo es de periodo k, existirán k valores $\bar{x}_t, \bar{x}_{t-1}, \dots, \bar{x}_{t-k+1}$ independientes de las condiciones iniciales. El esqueleto puede además exhibir un comportamiento caótico, en cuyo caso se presentarán diferentes trayectorias no divergentes, que dependerán de los valores iniciales. Es posible también que el esqueleto diverja. En este último caso el modelo es rechazado.

Los residuos son usados para la validación del modelo. En este documento se utilizarán algunas pruebas desarrolladas para el caso lineal y las pruebas de correlación serial y no linealidad remanente propuestas por Eitrheim & Teräsvirta (1996) para el STAR. Estos autores diseñaron una prueba de multiplicador de Lagrange para dependencia serial de orden q en ε_t y otra para probar la hipótesis nula de que un modelo STAR de dos regímenes es adecuado contra la alternativa de un modelo aditivo de tres regímenes. Esta última prueba es útil para saber si el modelo propuesto captura adecuadamente la no linealidad de los datos, o si por el contrario se requieren regímenes adicionales.

De acuerdo con Franses & van Dijk (2000), el estadístico de prueba puede ser calculado como nR^2, donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar de los residuos $\hat{\varepsilon}_t$ sobre $\hat{z}_t \equiv \partial F\left(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p_j}; \hat{\theta}\right)/\partial\theta$ y q rezagos de los residuos $\hat{\varepsilon}_{t-1}$,…, $\hat{\varepsilon}_{t-q}$ en la prueba de correlación serial, y sobre $\hat{z}_t$ y los regresores $\left(X_{t-1}, \dots, X_{t-p_j}\right) X_{t-e}^i$, $i = 1,2,3$, en no linealidad remanente. Eitrheim & Teräsvirta (1996), recomiendan reemplazar $\hat{\varepsilon}_t$ por los residuos de la regresión de $\hat{\varepsilon}_t$ sobre las derivadas del esqueleto del modelo con respecto a los parámetros $\hat{z}_t$. El estadístico de prueba tiene una distribución asintótica χ^2 con q grados de libertad para la primera prueba y con $3p$ grados de libertad para la segunda.

2.2.5. Pronósticos

Además de describir el comportamiento dinámico de las variables, los modelos de series de tiempo no lineales han sido ampliamente usados para pronosticar. Sin embargo, computar pronósticos para estos modelos es más difícil que para el caso lineal. Para tener una idea de las complicaciones que surgen en este contexto, considere el proceso X_t que obedece a un SETAR o STAR, esto es

$$X_t = F\left(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p_j}; \theta\right) + \varepsilon_t, \tag{12}$$

donde el esqueleto $F\left(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p_j}; \theta\right)$ es una función no lineal de los parámetros θ.

El pronóstico óptimo h pasos adelante está dado por

$$\hat{X}_{t+h|t} = E[X_{t+h}|\Omega_t], \tag{13}$$

con Ω_t el conjunto de información disponible hasta el periodo t. El pronóstico óptimo 1 paso adelante equivale a

$$\hat{X}_{t+1|t} = E[X_{t+1}|\Omega_t]$$

[8] La parte determinística del modelo es comúnmente llamada el esqueleto del modelo. (Véase Chan & Tong 1985).

$$= E\left[F\left(1, X_t, \dots, X_{t-p_j+1}; \theta\right) + \varepsilon_{t+1}\middle|\Omega_t\right]$$
$$= F\left(1, X_t, \dots, X_{t-p_j+1}; \theta\right), \quad (14)$$

y el pronóstico óptimo 2 pasos adelante a

$$\hat{X}_{t+2|t} = E[X_{t+2}|\Omega_t]$$
$$= E[F\left(1, X_{t+1}, X_t, \dots, X_{t-p_j+2}; \theta\right) + \varepsilon_{t+2}\middle|\Omega_t]$$
$$= E\left[F\left(1, \hat{X}_{t+1|t} + \varepsilon_{t+1}, X_t, \dots, X_{t-p_j+2}; \theta\right)\middle|\Omega_t\right] \quad (15)$$

(véase Franses & van Dijk 2000 y Lundbergh & Teräsvirta 2002) [9].

Como puede verse, el pronóstico un paso adelante es equivalente al de un modelo AR lineal, sin embargo, no existen expresiones analíticas exactas para horizontes de predicción mayores a 1. Es posible aproximar la esperanza condicional usando técnicas de integración numérica, aunque esta solución no suele usarse mucho en la práctica debido a que se requieren secuencias computacionales intensivas[10].

Se han propuesto varias alternativas para obtener pronósticos h pasos adelante. Uno de estos es el método de pronóstico ingenuo, el cual asume que $\varepsilon_{t+h} = 0$ para todo h. Este método sin embargo, produce pronósticos sesgados (véase Brown & Mariano 1989). Una segunda opción es el método de errores de pronóstico normal. Una posibilidad adicional, y quizá la más empleada en la práctica, es el uso de métodos de simulación tales como Monte Carlo o bootstrap.

Lin & Granger (1994) y Clements & Smith (1997) compararon varios de estos métodos para modelos STAR y SETAR, respectivamente. Estos autores encontraron que Monte Carlo y bootstrap muestran un buen desempeño. En este documento se utilizará Monte Carlo para el cómputo de los pronósticos de los modelos considerados. Para ello, se simularán N valores para X_{t+1}, X_{t+2},…, X_{t+h}, y se obtendrá el pronóstico h pasos adelante como el promedio de estos valores.

3. Resultados Empíricos

3.1. Los datos

La serie analizada es el crecimiento mensual del índice de empleo industrial colombiano, ajustado estacionalmente[11]. Los datos usados para el periodo 1990:01 a 2010:05, en frecuencia mensual, corresponden a un total de 245 observaciones y fueron obtenidos del Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE. Mediante un análisis preliminar se detectaron datos atípicos en los periodos 1992:01, 1994:02, 1997:08 y 1998:01. Con el fin de reducir el tamaño de los residuos en estos cuatro periodos y, en general, eliminar posibles efectos negativos de estos datos sobre el ajuste y la inferencia en los modelos, las cuatro observaciones fueron corregidas. El gráfico de la serie en niveles y de la primera diferencia del logaritmo natural del índice, son presentados en las Figuras 1 a 3.

[9] Note que operador lineal E no puede ser intercambiado por el operador no lineal F. Por tanto, $E[F\left(1, X_{t+1}, X_t, \dots, X_{t-p_j+2}; \theta\right)\middle|\Omega_t] \neq F\left(E\left[1, X_{t+1}, X_t, \dots, X_{t-p_j+2}\middle|\Omega_t\right]; \theta\right) = F\left(1, \hat{X}_{t+1|t}, X_t, \dots, X_{t-p_j+2}; \theta\right)$.

[10] El pronóstico dos pasos adelante puede ser expresado usando una integral de una dimensión. Sin embargo, a medida que aumenta el horizonte de predicción, la dimensión de la integral también crece. Esto significa que para computar pronósticos h pasos adelante se requiere resolver integrales multidimensionales, lo cual puede llegar a ser complicado cuando se computan pronósticos varios pasos adelante.

[11] El marcado patrón estacional, caracterizado por fuertes caídas en los meses de diciembre y enero, fue extraído a través del programa TRAMO-SEATS de Gómez & Maravall (1996).

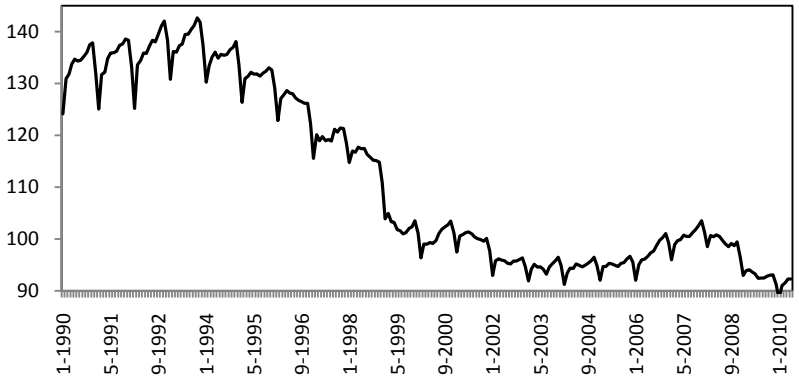

Figura 1. Indice de empleo industrial sin desestacionalizar

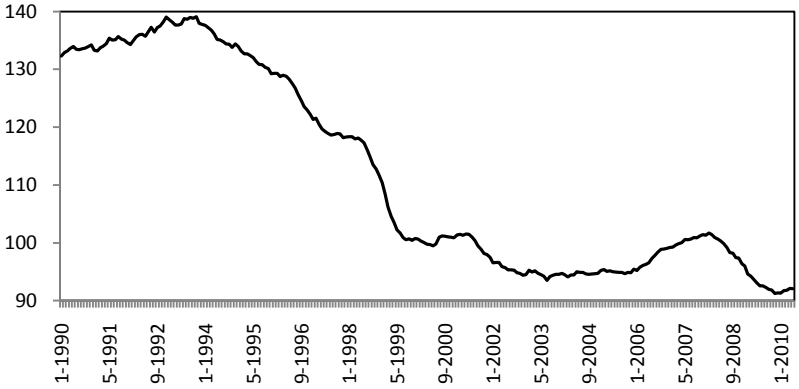

Figura 2. Indice de empleo industrial desestacionalizado

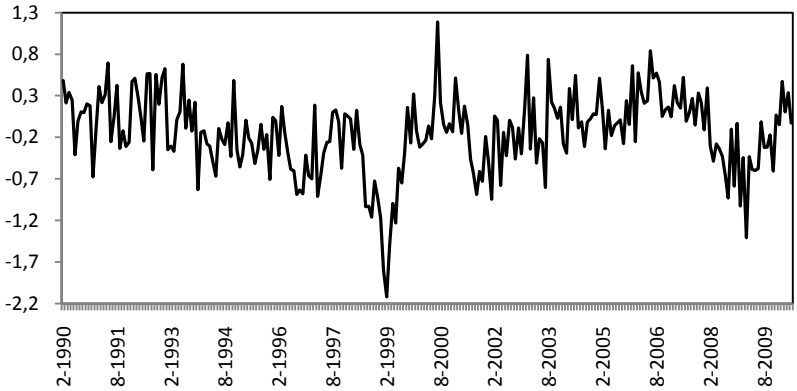

Figura 3. Crecimiento mensual del índice de empleo industrial

3.2. Pruebas de no linealidad

Con el fin de verificar la existencia de no linealidad en los datos, se realizaron las pruebas propuestas por Tsay (1989) y Teräsvirta (1994) para los rezagos de umbral $d = 1, \dots, 13$. El modelo autorregresivo lineal AR(13), escogido a partir del criterio de información AIC, fue usado como modelo base. Los estadísticos de prueba y su respectivo p-valor son presentados en las Tablas 1 y 2.

Tabla 1: Prueba de no linealidad de Tsay

	Observaciones de la regresión inicial[12]		
d	25	37	55
1	1.72 (0.054)	1.76 (0.047)	1.78 (0.046)
2	1.79 (0.042)	1.66 (0.068)	1.51 (0.112)
3	0.81 (0.657)	1.06 (0.396)	1.18 (0.294)
4	1.54 (0.099)	1.67 (0.065)	1.39 (0.164)
5	0.97 (0.485)	0.93 (0.529)	1.02 (0.436)
6	1.42 (0.148)	1.43 (0.144)	1.27 (0.233)
7	1.47 (0.126)	1.44 (0.139)	1.37 (0.175)
8	1.03 (0.423)	1.06 (0.399)	1.24 (0.251)
9	1.23 (0.254)	1.21 (0.270)	1.11 (0.353)
10	0.76 (0.709)	0.72 (0.755)	0.70 (0.772)
11	0.90 (0.561)	0.95 (0.510)	1.35 (0.184)
12	1.82 (0.038)	1.43 (0.142)	1.29 (0.220)
13	0.65 (0.820)	0.56 (0.891)	0.66 (0.806)

P-valor entre paréntesis.

Tabla 2: Prueba de no linealidad de Teräsvirta

		Hipótesis			
d	No linealidad	H_{01}	H_{02}	H_{03}	Modelo
1	1.28 (0.142)	0.85 (0.605)	1.26 (0.243)	1.74 (0.055)	Lineal
2	1.48 (0.045)	1.57 (0.097)	0.94 (0.515)	1.84 (0.039)	LSTAR
3	0.83 (0.752)	0.90 (0.550)	0.69 (0.774)	0.92 (0.530)	Lineal
4	1.13 (0.291)	0.69 (0.770)	1.61 (0.085)	1.11 (0.356)	Lineal
5	0.78 (0.822)	0.89 (0.566)	0.37 (0.977)	1.13 (0.338)	Lineal
6	1.16 (0.261)	1.00 (0.451)	1.15 (0.320)	1.30 (0.213)	Lineal
7	1.48 (0.046)	1.22 (0.266)	1.41 (0.159)	1.72 (0.058)	LSTAR
8	0.89 (0.651)	0.55 (0.893)	1.31 (0.211)	0.88 (0.576)	Lineal
9	1.17 (0.246)	0.98 (0.476)	0.72 (0.747)	1.85 (0.038)	Lineal
10	1.04 (0.423)	0.71 (0.753)	1.53 (0.109)	0.89 (0.569)	Lineal
11	1.10 (0.331)	1.14 (0.325)	1.10 (0.360)	1.03 (0.427)	Lineal
12	0.98 (0.505)	0.86 (0.595)	0.60 (0.851)	1.55 (0.104)	Lineal
13	0.89 (0.651)	0.51 (0.916)	1.21 (0.275)	1.02 (0.429)	Lineal

P-valor entre paréntesis.

Los resultados de la prueba de Tsay indican que existe evidencia estadística de no linealidad para los rezagos 1, 2 y 4, a un nivel de significancia de 10%, para el número de observaciones de la regresión inicial sugerido por el autor. El menor p-valor del estadístico está asociado al parámetro de retraso $d = 1$, lo que sugiere a X_{t-1} como variable de umbrales. La Tabla 1 muestra además que la no linealidad para el caso $d = 1$, se mantiene para otros valores de observaciones iniciales.

De otro lado, la prueba de Teräsvirta muestra que la hipótesis nula de linealidad es rechazada para los rezagos 2 y 7, a un nivel de significancia del 10%. A pesar de la mínima diferencia en el p-valor para estos dos valores del parámetro de retraso, en este documento se elige a X_{t-2} como

[12] Tsay (1989) usa (T/10)+p observaciones para iniciar el algoritmo de mínimos cuadrados recurrentes. Para la serie estudiada este valor corresponde a 37.

variable de transición. Dos razones motivan esta escogencia, la primera el menor rezago de esta variable y la segunda, el menor p-valor del estadístico reportado en las pruebas H_{01} y H_{03}.

3.3. Modelo SETAR

Para el SETAR, la localización de los umbrales se realizó mediante un diagrama de dispersión entre las estimaciones recurrentes de las razones t del coeficiente autorregresivo de rezago 1 y la variable de umbrales. La razón t, presentada en la Figura 4, muestra tres cambios de dirección alrededor de -0.4, -0.3 y 0, sugiriendo la existencia de tres umbrales y cuatro regímenes.

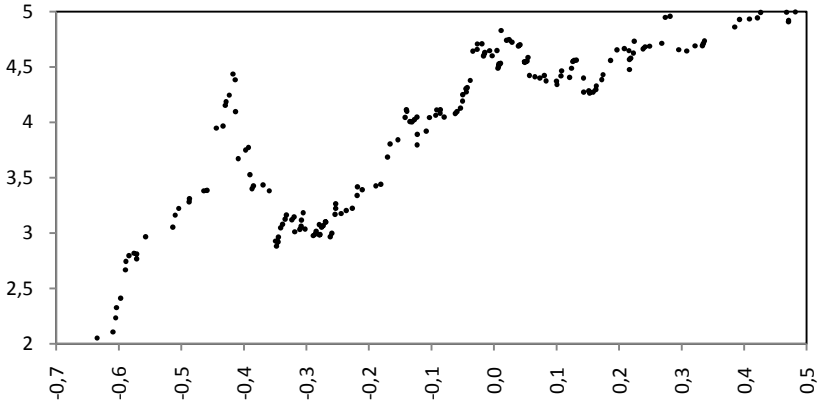

Figura 4: Razones t recurrentes del coeficiente AR de rezago 2 versus X_{t-1}

El criterio de información AIC modificado por Tong (1990) fue usado para realizar una búsqueda más detallada de los umbrales y para la selección de la estructura de rezagos. Para los umbrales r_1, r_2 y r_3 se consideraron todos los valores de la variable X_{t-1} contenidos en los intervalos (-0.43, -0.37), (-0.32, -0.26) y (-0.03, 0.02), respectivamente, y para p_1, p_2, p_3 y p_4 números entre 0 y 13. Los modelos con los menores AIC se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3: Identificación de umbrales y de órdenes AR

No. Regímenes	Umbrales	Ordenes AR	AIC
4	-0.411, -0.276, 0.01	2, 1, 5, 0	-502.28
4	-0.385, -0.276, 0.01	2, 1, 5, 0	-502.20
4	-0.411, -0.276, 0.011	2, 1, 13, 0	-502.06
4	-0.385, -0.276, 0.011	2, 1, 13, 0	-501.98
4	-0.411, -0.276, 0.024	2, 1, 5, 0	-501.85
4	-0.385, -0.276, 0.024	2, 1, 5, 0	-501.77
4	-0.411, -0.276, 0.011	2, 1, 5, 0	-501.76

Los parámetros del SETAR(4;2,1,5,0), seleccionado a partir del AIC, fueron estimados por MCO. Los coeficientes no significativos al 5% fueron eliminados[13]. El modelo elegido es presentado en la ecuación 16.

[13] El modelo que incluye únicamente los términos cuyos coeficientes son significativos mostró mejor desempeño de pronósticos que aquel que tiene en cuenta todos los regazos.

$$X_t = \begin{cases} \underset{(0.112)}{0.307X_{t-1}} + \underset{(0.127)}{0.547X_{t-2}} + \hat{\varepsilon}_t^{(1)} & \text{si } X_{t-1} \leq -0.411 \\ \underset{(0.346)}{-1.104} - \underset{(1.021)}{2.768X_{t-1}} + \hat{\varepsilon}_t^{(2)} & \text{si } -0.411 < X_{t-1} \leq -0.276 \\ \underset{(0.113)}{0.438X_{t-2}} + \underset{(0.100)}{0.267X_{t-5}} + \hat{\varepsilon}_t^{(3)} & \text{si } -0.276 < X_{t-1} \leq 0.01 \\ \underset{(0.038)}{0.082} + \hat{\varepsilon}_t^{(4)} & \text{si } X_{t-1} > 0.01 \end{cases} \tag{16}$$

$$\hat{\sigma}_1 = 0.419, \hat{\sigma}_2 = 0.221, \hat{\sigma}_3 = 0.331, \hat{\sigma}_4 = 0.358$$
$$n_1 = 60, n_2 = 31, n_3 = 60, n_4 = 92$$
$$\text{AIC} = -491.44, \text{BIC} = -466.99,$$

donde los valores entre paréntesis son errores estándar.

Para analizar las propiedades dinámicas de la serie se computaron las raíces de los polinomios característicos $g(z) = z^{p_j} - \sum_{i=1}^{p_j} \widehat{\emptyset}_i^{(j)} z^{p_j - i}$. Los resultados presentados en la Tabla 4 muestran que el segundo régimen, a diferencia de los demás, es explosivo, por lo que la serie tiende a dejar rápidamente este régimen, y por tanto, a permanecer menos tiempo en éste que en los otros tres. El tercer régimen, por su parte, tiene cuatro raíces complejas, indicando un comportamiento cíclico del empleo. Los resultados además muestran que la dependencia lineal en los datos es baja cuando el crecimiento trimestral en la tasa de empleo es mayor a 0.01%.

La varianza del término de error muestra importantes diferencias entre regímenes. El valor más pequeño se obtiene para el régimen dos y el más grande para el uno, siendo este último casi el doble del primero.

Tabla 4: Raíces de los polinomios característicos del SETAR

Régimen 1		Régimen 2		Régimen 3		
Raíz	Módulo	Raíz	Módulo	Raíz	Módulo	Periodo
0.91	0.91	-2.77	2.77	0.90	0.90	
-0.60	0.60			$-0.71 \pm 0.37i$	0.80	2.4
				$0.26 \pm 0.63i$	0.68	5.3

Las propiedades de largo plazo del SETAR fueron analizadas usando el esqueleto del modelo estimado. Tomando diferentes valores iniciales, se computaron valores para $x_1, x_2, \ldots$, asumiendo ruidos iguales a cero. El esqueleto indicó convergencia a un punto límite. Este punto sin embargo, depende de las condiciones iniciales consideradas. Para ciertos valores iniciales la serie converge a 0.082, y para otros a 0.

La validación del modelo se llevó a cabo a través de diferentes pruebas de diagnóstico sobre la serie de residuos estandarizados y residuos estandarizados al cuadrado. Estas pruebas incluyen medidas de varianza, sesgo, kurtosis, pruebas Jarque-Bera para normalidad, LM de Engle para efectos ARCH y Ljung Box para correlacion serial. La varianza fue calculada utilizando los residuos sin estandarizar. Los resultados reportados en la Tabla 5 muestran que el modelo es adecuado.

Tabla 5: Pruebas de diagnóstico para los residuos del SETAR

Estadísticas			Norm.	Efectos ARCH			Correlación serial					
Var.	Sesgo	Kurt.	JB	$A_{(1)}$	$A_{(6)}$	$A_{(12)}$	$LB_{(6)}$	$LB_{(12)}$	$LB_{(24)}$	$LB^2_{(6)}$	$LB^2_{(12)}$	$LB^2_{(24)}$
0.125	0.01	3.12	(0.93)	(0.39)	(0.26)	(0.56)	(0.64)	(0.11)	(0.35)	(0.21)	(0.67)	(0.53)

P-valor entre paréntesis. $A_{(i)}$ indica el orden i de la prueba ARCH. $LB_{(i)}$ y $LB^2_{(i)}$ denotan el orden i de la estadística Q de Ljung Box para los residuos y los residuos al cuadrado, respectivamente.

3.4. Modelo STAR

Los resultados de la prueba de no linealidad, contenidos en la Tabla 2, indican que el modelo más adecuado para los datos es un LSTAR. El número de regímenes inicialmente considerado fue dos, y dado que las pruebas de diagnóstico indicaron un adecuado ajuste del modelo, no se consideraron otros valores de l.

Para la estimación del modelo se partió de un AR(13) en ambos regímenes, eliminando posteriormente los coeficientes no significativos. Estos fueron removidos uno por uno, comenzando con el menos significativo, y re-estimando el modelo después de cada eliminación. Siguiendo las recomendaciones de Teräsvirta (1994) el exponente de la función de transición fue re-escalado dividiendo por la desviación estándar muestral $\hat{\sigma}(x) = 1/2.13$. El procedimiento fue repetido para diferentes valores iniciales de los parámetros r y γ. El modelo estimado es presentado en la ecuación 17.

$$X_t = \underset{(0.130)}{-0.426} + \underset{(0.109)}{0.630}X_{t-1} - \underset{(0.053)}{0.195}X_{t-12} + [\underset{(0.171)}{0.515} - \underset{(0.202)}{0.555}X_{t-1} + \underset{(0.086)}{0.289}X_{t-8}] \times [1 + \exp\{\underset{(0.812)}{-1.706} \times \underset{(0.148)}{2.13}(X_{t-2} + 0.402)\}]^{-1} + \hat{\varepsilon}_t, \quad (17)$$

$$\hat{\sigma} = 0.353, \hat{\sigma}^2(\text{STAR/AR}) = 0.996$$
$$\text{AIC} = -467.40, \text{BIC} = -439.83,$$

donde los valores entre paréntesis son errores estándar y $\hat{\sigma}^2(\text{STAR/AR})$ es la razón de la varianza de los residuos del LSTAR y AR. Usando la notación de la ecuación 3, el modelo estimado puede también ser escrito como

$$X_t = [-0.426 + 0.630X_{t-1} - 0.195X_{t-12}] \times [1 - G(X_{t-2}; \hat{\gamma}, \hat{r})] + [0.089 + 0.075Xt-1+0.289Xt-8-0.195Xt-12 \times GXt-2;\gamma,r+\varepsilon t. \quad 18$$

El primer régimen puede asociarse a un periodo de recesión. El signo negativo del intercepto refleja las tasas de crecimiento negativas del empleo ocurridas en épocas de contracción económica. En contraste, el signo positivo del intercepto del segundo régimen está reflejando periodos de auge económico. El umbral $\hat{r} = -0.4\%$ puede ser interpretado como el punto medio entre la recesión y la expansión. Por su parte, el valor de $\hat{\gamma} = 1.706/\hat{\sigma}(x)$ indica que la transición de un régimen al otro es lenta, y esto explica las diferencias encontradas con el SETAR. Esta transición suave puede además observarse en la Figura 5, donde se grafica la función de transición estimada para el LSTAR.

Las raíces de los polinomios característicos $g(z) = z^{12} - 0.630z^{11} + 0.195$ y $g(z) = z^{12} - 0.075z^{11} - 0.289z^4 + 0.195$, correspondientes a los regímenes 1 y 2, respectivamente, se muestran en la Tabla 6. Estas indican que ambos regímenes son estacionarios, y que existe un comportamiento cíclico en el empleo.

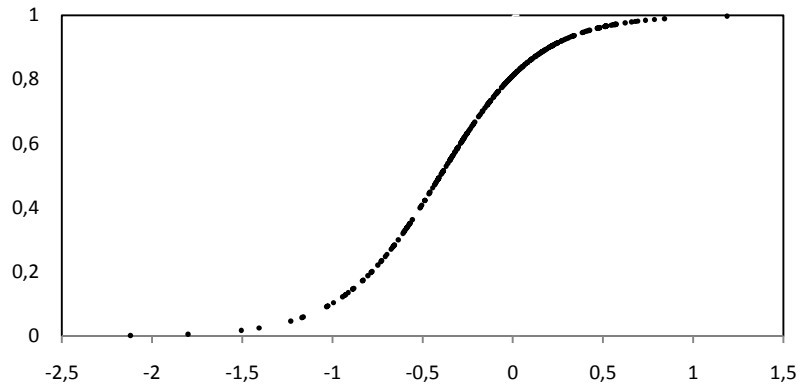

Figura 5: Función de Transición versus X_{t-2}

Tabla 6: Raíces de los polinomios característicos del LSTAR

Régimen 1			Régimen 2		
Raíz	Módulo	Periodo	Raíz	Módulo	Periodo
$0.92 \pm 0.21i$	0.95	27.6	$0.66 \pm 0.66i$	0.93	8.1
$0.68 \pm 0.60i$	0.90	8.7	$-0.65 \pm 0.66i$	0.92	2.7
$0.28 \pm 0.83i$	0.87	5.0	$0.84 \pm 0.16i$	0.85	33.8
$-0.18 \pm 0.83i$	0.85	3.5	$0.17 \pm 0.83i$	0.85	4.6
$-0.58 \pm 0.61i$	0.84	2.7	$-0.15 \pm 0.83i$	0.84	3.6
$-0.80 \pm 0.22i$	0.83	2.2	$-0.83 \pm 0.16i$	0.84	2.1

Las propiedades de largo plazo del LSTAR fueron analizadas usando el esqueleto del modelo estimado. Tomando diferentes valores iniciales, se computaron valores para $x_1, x_2, \ldots$, asumiendo ruidos iguales a cero. El esqueleto indicó convergencia a un punto límite correspondiente a -0.02.

Las pruebas de diagnóstico sobre la serie de residuos, presentadas en la Tabla 7, incluyen las usadas para el SETAR y las pruebas de correlación serial y no linealidad remanente propuestas por Eitrheim & Teräsvirta (1996). La última prueba realizada para los rezagos $e = 1,2,3,4$ muestra que no se requieren regímenes adicionales, dado que el modelo está capturando adecuadamente la no linealidad de los datos. Las otras pruebas sugieren un adecuado ajuste.

Tabla 7: Pruebas de diagnóstico para residuos del LSTAR

Estadísticas			Norm.	Efectos ARCH			Correlación serial					
Var.	Sesgo	Kurt.	JB	$A_{(1)}$	$A_{(6)}$	$A_{(12)}$	$LB_{(6)}$	$LB_{(12)}$	$LB_{(24)}$	$LB^2_{(6)}$	$LB^2_{(12)}$	$LB^2_{(24)}$
0.125	0.28	2.85	(0.21)	(0.65)	(0.66)	(0.73)	(0.74)	(0.41)	(0.21)	(0.73)	(0.52)	(0.09)

Correlación Serial				No linealidad remanente			
$ET_{(6)}$	$ET_{(12)}$	$ET_{(24)}$	V.Trans.	X_{t-1}	X_{t-2}	X_{t-3}	X_{t-4}
(0.79)	(0.22)	(0.27)		(0.28)	(0.54)	(0.62)	(0.86)

P-valor entre paréntesis. $A_{(i)}$ indica el orden i de la prueba ARCH. $LB_{(i)}$ y $LB^2_{(i)}$ denotan el orden i de la estadística Q de Ljung-Box para los residuos y los residuos al cuadrado, respectivamente. $ET_{(i)}$ indica el orden i de la prueba de correlación serial de Eirtheim-Teräsvirta. V.Trans. es la variable de transición usada en la prueba de no linealidad remanente.

3.5. Pronósticos

Para evaluar la capacidad de predicción de los modelos se computaron pronósticos fuera de muestra por medio de simulación de Monte Carlo. La evaluación fue realizada contrastando pronósticos de valores ya observados, con sus valores reales, para diferentes orígenes y horizontes de predicción. Comenzando con el origen 1997:12, se computaron pronósticos, errores absolutos y errores cuadráticos 1 a 10 pasos adelante. El ejercicio fue repetido para todos los orígenes de predicción desde 1998:01 hasta 2010:04 para $h = 1$, y desde 1998:01 hasta 2009:07 para $h = 10$.

Se obtuvieron 149, 148 y 140 pronósticos 1, 2 y 10 pasos adelante, respectivamente. Cada uno de estos fue calculado tomando el promedio de 1.000 valores simulados del modelo SETAR dado en (1) con parámetros estimados en (16), y del LSTAR dado en (4) y (5), con los parámetros estimados en (17). Los términos de ruido corresponden a muestras obtenidas de una distribución normal con media cero y varianza $\hat{\sigma}_j^2$ para el SETAR y $\hat{\sigma}^2$ para el LSTAR. Los parámetros del modelo no fueron re-estimados con las nuevas observaciones disponibles.

Este mismo procedimiento fue ejecutado para otra submuestra que considera todos los orígenes de predicción desde 2003:12. El error absoluto medio (EAM) y la raíz del error cuadrático medio (RECM) para ambos modelos y orígenes son presentados en las Tablas 8 y 9. Para verificar la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre dos modelos, se consideró la prueba de Diebold & Mariano (1995), la cual evalúa la hipótesis nula de igualdad de alguna función de pérdida entre los pronósticos de dos modelos. En este documento se utiliza la prueba modificada por Harvey, Leybourne & Newbold (1997)[14] basada en la RECM. Las tablas muestran además estos criterios de evaluación para un AR lineal[15], el cual es usado como modelo de referencia.

Tabla 8: Evaluación de pronósticos. EAM

h	1997:12			2003:12		
	AR	SETAR	LSTAR	AR	SETAR	LSTAR
1	[0.282]	0.971	0.974	[0.231]	1.044	1.053
2	[0.296]	0.994	0.962	[0.235]	1.054	1.026
3	[0.329]	0.993	0.949	[0.263]	1.009	1.016
4	[0.345]	0.996	0.946	[0.266]	1.011	0.990
5	[0.349]	1.027	0.984	[0.269]	1.048	1.059
6	[0.352]	1.044	0.985	[0.271]	1.069	1.041
7	[0.355]	1.048	0.992	[0.289]	1.026	1.008
8	[0.356]	1.048	0.987	[0.295]	1.062	1.016
9	[0.363]	1.038	0.997	[0.309]	1.026	1.022
10	[0.368]	1.012	0.987	[0.323]	1.008	1.023

Los valores entre corchetes son EAM del AR. Para el SETAR y LSTAR, los valores corresponden a EAM del modelo sobre EAM del AR.

[14] Estos autores propusieron una versión modificada de la prueba de Diebold & Mariano (1995), que corrige los problemas asociados al tamaño del estadístico de prueba cuando se consideran muestras pequeñas y horizontes de predicción mayores a 1.

[15] El AR(12) mostró un mejor desempeño de pronósticos que el AR(13). Por esta razón en esta sección se utiliza un AR de orden 12 como modelo de referencia.

Tabla 9: Evaluación de pronósticos. RECM

h	1997:12			2003:12		
	AR	SETAR	LSTAR	AR	SETAR	LSTAR
1	[0.363]	0.984	0.965	[0.301]	0.992	1.016
2	[0.380]	1.034	0.975*	[0.296]*	1.076	1.018*
3	[0.421]	1.031	0.973*	[0.336]	1.056	1.047
4	[0.436]	1.036	0.964*	[0.332]	1.074	1.009
5	[0.446]	1.055	0.974*	[0.341]	1.087	1.043
6	[0.457]*	1.067	0.977*	[0.345]	1.077	1.022
7	[0.468]*	1.070	0.986*	[0.368]	1.049	1.001
8	[0.475]*	1.074	0.989*	[0.377]	1.060	1.006
9	[0.486]	1.056	0.996	[0.401]	1.022	1.008
10	[0.487]	1.046	0.999	[0.408]	1.017	1.010

Los valores entre corchetes son RECM del AR. Para el SETAR y LSTAR, los valores corresponden a RECM del modelo sobre RECM del AR.
* indica que RECM del modelo es significativamente menor que RECM del SETAR, de acuerdo con la prueba de Diebold-Mariano, usando un nivel de significancia de 0.05.

El EAM sugiere un mejor desempeño del LSTAR para el origen 1997:12 y todos los horizontes de predicción, excepto para $h = 1$ en el que el SETAR es preferido. Este último modelo muestra además un mejor desempeño que el lineal para $h = 1, \dots 4$. Estos resultados sin embargo, cambian de manera importante cuando se considera el origen 2003:12, en el cual el AR presenta un menor EAM, superando a los modelos no lineales.

Comparaciones a partir de RECM reflejan también la superioridad del LSTAR cuando se considera el origen 1997:12. En la Tabla 9 se observa que a pesar de que el SETAR muestra mejor desempeño que el AR para $h = 1$, el primer modelo es superado por el segundo para otros horizontes. Las diferencias en la RECM entre el STAR y el SETAR resultaron estadísticamente significativas para varios horizontes de predicción, $h = 2, \dots, 8$, así como entre el AR y SETAR para $h = 6,7,8$. Diferencias en la RECM entre el STAR y AR no son estadísticamente significativas para ningún horizonte.

En contraste, para el origen 2003:12 el SETAR es preferido cuando se computan pronósticos 1 paso adelante, y el AR para pronósticos 2 a 10 pasos adelante. Además, el LSTAR muestra un mejor desempeño que el SETAR para $h = 2, \dots, 10$. Sin embargo, las diferencias entre los tres modelos no son estadísticamente significativas, excepto para $h = 2$ donde RECM del LSTAR y AR es significativamente menor que la del SETAR.

3.6. Comparación de los modelos

Existen importantes diferencias en los resultados de los dos modelos ajustados. Mientras el SETAR usa el índice de empleo rezagado un periodo como variable de umbrales, el LSTAR utiliza el segundo rezago del índice como variable de transición. En términos de ajuste no se encuentran mayores discrepancias entre los dos modelos estimados. Sin embargo, el LSTAR es más sencillo, dado el número de regímenes requeridos para modelar la serie. Esto puede ser explicado por la función de transición suave usada por este último modelo.

A pesar de que la varianza de los residuos es muy similar en los modelos STAR y AR, la inclusión de parámetros adicionales en el AR deja al STAR como el modelo preferido por los criterios de información AIC y BIC[16]. No se observan mayores diferencias entre la varianza de los residuos de los dos modelos no lineales, aunque los criterios de información sugieren al SETAR como el mejor modelo. Este resultado sin embargo, es engañoso debido a que hay una diferencia importante en el número de observaciones usadas para la estimación de los modelos, 243 frente a 232. En términos de desempeño de pronósticos, claramente el LSTAR supera al SETAR.

4. Conclusiones

En este documento se encontró evidencia de no linealidad en la serie crecimiento del índice de empleo industrial entre 1990 y 2010. El comportamiento dinámico de la serie es adecuadamente modelado por un SETAR de cuatro regímenes y un LSTAR de dos regímenes. Existen además importantes diferencias en los resultados de los dos modelos ajustados. Así por ejemplo, mientras el SETAR usa el índice de empleo rezagado un periodo como variable de umbrales, el LSTAR utiliza el segundo rezago del índice como variable de transición.

Los resultados muestran además la superioridad del LSTAR en capacidad predictiva. Este modelo no solo ofrece ganancias importantes en desempeño de pronósticos, sino también muestra ventajas frente a su rival en términos de facilidad de interpretación.

Referencias

- Blanchard, O. & S. Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge: MIT Press.
- Brown, B.W. & R.S. Mariano (1989) Predictors in dynamic nonlinear models: large sample behavior. *Econometric Theory 5,* 430-452.
- Burns, A. F. & W. C. Mitchell (1946) *Measuring Business Cycles*. New York: NBER.
- Canova F. (2007) *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Princeton: Princeton University Press.
- Clements, M.P. & J. Smith (1997) The performance of alternative forecasting methods for SETAR models. *International Journal of Forecasting 13,* 463-475.
- Chan, K.S. & H. Tong (1985) On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Advances in Applied Probability 17,* 666-678.
- Diebold, F.X. & R.S. Mariano (1995) Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics 13,* 253-263.
- Diebold, F.X. & G. Rudebusch (1996) Measuring Business Cycles: A Modern Perspective. *Review of Economics & Statistics 78,* 67 – 77.
- Eitrheim, O. & T. Teräsvirta (1996) Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models. *Journal of Econometrics 74,* 59-75.
- Franses, P.H. & van Dijk, D. (2000) *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gómez, V. & A. Maravall (1996) Programs TRAMO (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series). Instructions for the User. *Documento de Trabajo* 9628, Banco de España.
- Harding, D. & A. Pagan (2008) Business cycle measurement. In: Durlauf, S.N. & L.E. Blume (ed), *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Palgrave Macmillan.

[16] Los criterios de información para el AR(13) son -452.39 y -404.19 para AIC y BIC, respectivamente.

- Harvey, D., S. Leybourne & P. Newbold (1997) Testing the equality of prediction mean squared errors. *International Journal of Forecasting 13,* 281-291.
- Leybourne, S., P. Newbold & D. Vougas (1998) Unit roots and smooth transitions. *Journal of Time Series Analysis 19,* 83-97.
- Lin, J.-L. & C.W.J. Granger (1994) Forecasting from nonlinear models in practice. *Journal of Forecasting 13,* 1-9.
- Lundbergh, S. & T. Teräsvirta (2002) Forecasting with smooth transition autoregressive models. In: Clements, M.P. & D.F. Hendry (ed), *A Companion to Economic Forecasting*. Oxford: Blackwell.
- Teräsvirta, T. & H.M. Anderson (1992) Characterizing nonlinearities in business cycles using smooth transition autoregressive models. *Journal of Applied Econometrics 7*, S119-S136.
- Teräsvirta, T. (1994) Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *Journal of the American Statistical Association 89*, 208-218.
- Teräsvirta, T. (1998) Modelling economic relationships with smooth transition regressions. In: Ullah, A. & D.E.A. Giles (ed), *Handbook of Applied Economic Statistics*. New York: M. Dekker.
- Teräsvirta, T. (2006) Forecasting economic variables with nonlinear models. In: Elliott, G., C.W.J. Granger & A. Timmermann (ed), *Handbook of Economic Forecasting.* Amsterdam: North-Holland.
- Tong, H. (1978) On a threshold model. In: Chen, C.H. (ed), *Pattern Recognition and Signal Processing.* Amsterdam: Sijthoff & Noordhoff.
- Tong, H. (1990) *Non-linear Time Series, A Dynamical System Approach*. Oxford: Oxford University Press.
- Tsay, R.S. (1989) Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of the American Statistical Association 84,* 231-240.