Métodos matriciales en sistemas lineales funcionales sobre álgebras de Ore

César Augusto Rodríguez Duque

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo de 2011

Métodos matriciales en sistemas lineales funcionales sobre álgebras de Ore

César Augusto Rodríguez Duque

Director
Oswaldo Lezama
Profesor Titular

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo de 2011

Título en español

Métodos matriciales en sistemas lineales funcionales sobre álgebras de Ore

Title in English

Matrix methods in linear functional sistem over Ore algebras

Resumen: En el trabajo se estudian métodos matriciales y homológicos para dar interpretación a las propiedades estructurales de un sistema lineal funtional sobre álgebras de Ore. Primero se dan algunos conceptos básicos, se presentan algunas propiedades de las álgebras de Ore y ejemplos de esta clase de anillos no conmutativos. Se desarrolla el teorema de reducción Serre, versión matricial, y se da una generalización de éste; por último, se ilustra el teorema de Serre con ejemplos.

Abstract: In this work we consider matrix and homological methods for the study of sctructural properties of functional linear systems over Ore algebras. We start with some background preliminaries, next we present some ring and module theorethical properties of Ore algebras, including some examples of this class of non commutative rings. The matrix version of the Serre's reduction theorem is presented, and also we give a generalization of this result. Some ilustrative examples are included.

Palabras clave: Anillos y módulos, álgebra homológica, módulos establemente libres, sucesiones exactas, extensiones de módulos, anillos de polinomios torcidos, álgebras de Ore, álgebras de Weyl.

Keywords: Rings and modules, homological algebra, stably free modules, exact sequences, extension of modules, skew polynomial rings, Ore algebra, Weyl algebras.

Agradecimientos

Al profesor Oswaldo Lezama, por darme la oportunidad de trabajar con él, aportando así a mi formación académica y personal.

A mis padres, hermanos, Sandra L. y amigos, en quienes encontre apoyo incondicional durante esta experiencia.

Índice general

Índice general **I**

Introducción **II**

1. Preliminares **1**

1.1. Extensiones de $\mathcal{R}$-módulos 1

1.2. Anillos de polinomios iterados 18

1.2.1. Álgebras de Ore 21

2. Reducción de Serre para sistemas lineales funcionales **27**

2.1. Métodos matriciales para sistemas lineales funcionales 27

2.2. Teorema de Serre 38

2.3. El problema de la reducción de Serre 44

3. Ejemplos **52**

Bibliografía **58**

Introducción

El análisis algebraico estudia sistemas lineales funcionales (SLF) de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, ecuaciones en diferencias, ecuaciones diferenciales con retardo, etc., por medio de técnicas algebraicas del álgebra homológica, a través de módulos de presentación finita sobre anillos no conmutativos de tipo polinomial, tales como anillos de operadores diferenciales, anillos de polinomios con corrimiento, anillos de polinomios torcidos iterados, o de manera más general, dominios de Ore. Los orígenes del análisis algebraico se remontan a los trabajos de B. Malgrange ([15]), V. Palamodov ([18]), M. Sato ([21]), U. Oberst ([17]), M. Fliess ([10], [11]), J. Pommaret ([20], [19]) y M. Kashiwara ([12]).

Una de las principales ideas de los métodos homológicos del análisis algebraico es asociar a un SLF, $Ry = 0$, con $R \in D^{q\times p}$ una matriz de tamaño $q\times p$ con entradas en un dominio de Ore D, el D-módulo de presentación finita $M := D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$, donde $D^{1\times q}R := \{\lambda R | \lambda \in D^{1\times q}\}$. Las propiedades del sistema lineal se estudian entonces a través de propiedades homológicas del módulo M y de la manipulación algebraica de la matriz R, cambiando el sistema por otro equivalente con matriz R' del mismo tamaño, pero con aspecto canónico, como por ejemplo triangular en bloques o diagonal en bloques.

Otra idea central del análisis algebraico pertenece a Malgrange y consiste en lo siguiente: las soluciones de un SLF se toman en un D-módulo $\mathcal{F}$ de funciones, por ejemplo, el conjunto $\mathcal{F} := C^\infty(\Omega)$ de funciones suaves sobre Ω, donde Ω es un subconjunto convexo abierto de $\mathbb{R}^n$; el conjunto de soluciones del sistema $Ry = 0$ viene entonces dado por $\ker_{\mathcal{F}}(R.) := \{\eta \in \mathcal{F}^p | R\eta = 0\}$; Malgrange probó el isomorfismo de grupos abelianos $\ker_{\mathcal{F}}(R.) \cong Hom_D(M, \mathcal{F})$. Este isomorfismo permite demostrar cómo algunas propiedades de los sistemas lineales funcionales son traducidas en propiedades del módulo M y, a su vez, estas últimas pueden ser estudiadas calculando ciertas extensiones de la forma $Ext^i_D(N, D)$, $i \geq 1$, donde N es el transpuesto de M.

Sean D un dominio noetheriano, $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango pleno (e.d., las filas de la matriz R son linalmente independientes), con $q \leq p$ y $M = D^{1\times p}/\left(D^{1\times q}R\right)$ el D-módulo asociado al sistema $Ry = 0$, el cual es finitamente generado por los elementos $\{\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n)\}$, donde $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ forman la base canónica de $D^{1\times p}$ y $\pi : D^{1\times p} \longrightarrow M$ es la proyección canónica sobre M, e.d., $\pi(e_i) \in M$ es la clase del vector e_i para $1 \leq i \leq p$.

Para el homomorfismo definido por

$$\begin{aligned} .R : D^{1\times q} &\longrightarrow D^{1\times p} \\ \mu &\longmapsto \mu R \end{aligned}$$

tenemos

$$\ker(.R) = \{\mu \in D^{1\times q} \mid \mu R = 0\} = 0, \quad \text{entonces} \quad \mu R = 0 \Longleftrightarrow \mu = 0.$$

Debido a que las filas de R son L.I., resulta la presentación libre finita

$$0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

de el D-módulo M. Se ha probado que el D-módulo $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$ asociado al SLF $Ry = 0$ es finitamente generado por los elementos $\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n)$ y es de presentación finita.

En este orden de ideas, se analizará una de las técnicas matriciales más recientes (véase [8]) para el estudio de los SLF, la cual es basada en las generalizacion del siguiente teorema clásico debido a Serre:

Teorema 1. *Sea $D = \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$. $R \in D^{p\times p}$ de rango pleno, e.d., $rank(R) = p$. Existen V , $W \in D^{p\times p}$ matrices unimodulares tales que:*

$$VRW = \begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 \\ 0 & det(R) \end{pmatrix},$$

si y sólo si, existe $\Lambda \in D^p$ tal que la matriz $P = (R \quad -\Lambda)$ admita inversa a derecha.

El teorema anterior establece condiciones necesarias y suficientes para que el SLF $Ry = 0$ definido por la matriz de rango pleno (e.d., $\det(R) \neq 0$) $R \in D^{p\times p}$ sobre el anillo de polinomios conmutativo $D = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ resulte equivalente a la ecuación $\det(R)z_p = 0$, donde z_p es la última columna del vector $z = W^{-1}y$.

Observación 1. El sistema lineal $Wz = y$ con $y \in D^p$ tiene por solución $z = W^{-1}y$, la cual es única ya que la matriz W es invertible. Entonces:

$$Ry = 0 \Leftrightarrow (VRW)z = 0 \Leftrightarrow z_1 = \cdots = z_{p-1} = 0 \ y \ det(R)z_p = 0 \ , \tag{1}$$

con $y_p = W_{p\bullet}z_p$, tomando $W_{p\bullet}$ como la última fila de la matriz W.

Si consideramos $\pi : \ D^{1\times p} \longrightarrow M$ el homomorfismo canónica, tenemos que el D-módulo M es finitamente generado por $\pi(e_1), \ldots, \pi(e_p)$ y

$$\pi(R_{i.}) = \pi\left([R_{i1} \cdots R_{ip}]\right) = \pi(\sum_{j=1}^{p} R_{ij}e_j) = \pi(e_i.R) = \sum_{j=1}^{p} R_{ij}\pi(e_j) = 0.$$

En consecuencia $Ry = 0$ para $y = [y_1, \ldots, y_p]^T$ tomando $y_i = \pi(e_i)$, para $i = 1, \ldots, p$ y por (1) tenemos $\pi(e_1) = \cdots = \pi(e_{p-1}) = 0$, entonces el D-módulo M es cíclico y generado por $\pi(e_p)$.

Este teorema de Serre hace pensar en al menos dos posibilidades de generalización: por un lado extender el resultado a dominios D no conmutativos de tipo polinomial tal como las álgebras de Ore, y por otro, dar condiciones necesarias y suficientes para que una matriz $R \in D^{q\times p}$ con filas linealmente independientes sea equivalente a una matriz diagonal en

bloques $diag\left(I_r \mid \overline{R}\right)$, con $\overline{R} \in D^{(q-r)\times(p-r)}$. Esta generalización la cual fue planteada y estudiada en [8] es el problema a investigar en la tesis propuesta.

Salvo que se advierta la contrario en el presente trabajo R representa un anillo no conmutativo con unidad y D representa un dominio no conmutativo noetheriano, es decir, todo ideal de D izquierdo (derecho) es finitamente generado. Los R-módulos y los D-módulos seran considerados a izquierda. $R \in D^{q\times p}$ representa una matriz de rango pleno con $q \leq p$, e.d., sus filas son L.I.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este capítulo se desarrollará por medio de dos secciones, en la primera sección traduciremos la teoría referente a las extensiones de Baer entre dos $\mathcal{R}$-módulos M y N, denotadas como extensiones de N por M, donde $\mathcal{R}$ no necesariamente es un anillo conmutativo. En la segunda sección introduciremos los anillos de polinomios torcidos con sus propiedades más relevantes para el desarrollo e ilustración del siguiente capítulo, a continuación se definen las extensiones de Ore y para finalizar se dan algunos ejemplo de álgebras de Ore.

1.1. Extensiones de $\mathcal{R}$-módulos

Desarrollaremos las extensiones de Baer sobre un anillo $\mathcal{R}$ del $\mathcal{R}$-módulo M por el $\mathcal{R}$-módulo N, denotadas como extensiones de N por M, donde $\mathcal{R}$ no necesariamente es un anillo conmutativo. Al final de esta sección se establecerá el resultado más importante de las extensiones de Baer.

Definición 1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, una sucesión exacta de $\mathcal{R}$-módulos izquierdos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

es hendida si existe $\gamma: B \longrightarrow M$, tal que $\gamma\alpha = i_M$.

Teorema 2. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo, M, B y N $\mathcal{R}$-módulos izquierdos. Consideremos la sucesión exacata* (1.1), entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Existe $\alpha: B \longrightarrow M$ homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, tal que $\gamma\alpha = i_M$.

(2) La $Im(\alpha)$ es sumando directo de B. Para ser más exactos $B \cong \ker(\gamma) \oplus Im(\alpha)$.

(3) Existe $\mu: N \longrightarrow B$ homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, tal que $\beta\mu = i_N$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): sea $b \in B$, entonces

$$\gamma(\alpha(\gamma(b))) = \gamma(b) \;\Rightarrow\; \gamma(b - \alpha(\gamma(b))) = 0 \;\Rightarrow\; b - \alpha(\gamma(b)) \in \ker(\gamma),$$

en consecuencia $b - \alpha(\gamma(b)) + \alpha(\gamma(b)) = b$. Sea $\nu \in Im(\alpha) \cap \ker(\gamma)$, entonces $\alpha(m) = \nu$ para algún $m \in M$ y $\gamma(\nu) = 0$, lo cual prueba $B = \ker(\gamma) \oplus Im(\alpha)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Para cada $n \in N$ existe $b \in B$, tal que $\beta(b) = n$, por (2), tenemos $b = b_1 + \alpha(m_1)$, definiendo la función $\mu : N \longrightarrow B$, por $\mu(n) = b_1$.

Tomemos $b \in \ker(\beta)$, existe $m_1 \in M$ tal que $b = \alpha(m_1)$, lo cual implica $\mu(0) = 0$. Se ha probado que la función μ está bien definida, es claro que μ es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos.

Por otra parte para cada $n \in N$ se tiene: $n = \beta(b) = \beta(b_1 + \alpha(m_1)) = \beta(\mu(n))$ donde $b_1,\ b \in B$. Lo cual prueba $\beta\mu = I_N$

(3) $\Rightarrow$ (1): Supongamos $\mu : N \longrightarrow B$, tal que $\beta\mu = i_N$. Para cada $b \in B$ se tiene $\beta(b) = n$, entonces $\beta(\mu(n)) = \beta(b)$, en consecuencia existe un único $m \in M$ tal que $\alpha(m) = b - \mu(n)$. Supongamos $\alpha(m_1) + \mu(n_1) = \alpha(m_2) + \mu(n_2)$ se tiene $0 = \beta(\alpha(m_1 - m_2)) = n_2 - n_1$, lo cual implica $n_1 = n_2$ y $m_1 = m_2$, de aquí todo elemento de $b \in B$ tiene una única escritura de la forma $b = \alpha(m) + \mu(n)$. Definimos el homomorfismo $\gamma : B \longrightarrow M$ por $\gamma(b) = \gamma(\alpha(m) + \mu(n)) = m$, el cual está bien definido. De lo anterior se tiene $\gamma\alpha = i_M$ y $\gamma(\mu(n)) = 0$ para cada $\mu \in N$. □

Corolario 1. *La sucesión exacta* (1.1) *es hendida si, y sólo si, existen homomorfismos de $\mathcal{R}$-módulos $\mu : N \longrightarrow B$ y $\gamma : B \longrightarrow M$, tal que $\gamma\alpha = I_M$, $\beta\mu = I_N$, $\gamma\beta = 0$ y $\alpha\gamma + \mu\beta = I_B$.*

Demostración. $\Leftarrow$): evidente.

$\Rightarrow$): utilizando el teorema 2 resta ver $\alpha\gamma + \mu\beta = I_B$. Sea $b \in B$, entonces $\beta(\mu(\beta(b))) = \beta(b)$, en consecuencia existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) = b - \mu(\beta(b))$, se sigue

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma(b)) = \alpha(m) \Rightarrow\ & b = \mu(\beta(b)) + \alpha(\gamma(b)) \quad \forall b \in B \\ \Rightarrow\ & I_B = \mu\beta + \alpha\gamma. \end{aligned}$$

□

Definición 2. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo, M y N dos $\mathcal{R}$-módulos. Una extensión N de M, también denominada,* ***una extensión de M por N****, es una sucesión :*

$$e : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

exacta de $\mathcal{R}$-módulos.

Sea $E(M, N)$ ***el conjunto de todas las extensiones de M por N****. Decimos que dos extensiones*

$$e : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

y

$$e' : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

son ***extensiones equivalentes*** *si existe un homomorfismo* $f: B \longrightarrow B'$ *el cual hace que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow f & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

sea conmutativo, e.d., $f\alpha = \alpha'$ *y* $\beta' f = \beta$.

Observación 2. Dos extensiones equivalentes resultan isomorfas, e.d., $f: B \longrightarrow B'$ es un $\mathcal{R}$-isomorfismo.

Sea $b \in \ker(f)$, debido a que el diagrama es conmutativo tenemos $\beta(b) = 0$. Por la exactitud de la extensión existe un único $m \in M$ tal que $\alpha(m) = b$, entonces $f(\alpha(m)) = f(b) = \alpha'(b) = 0$, lo cual implica $b = 0$. Se ha probado que f un homomorfismo inyectivo.

Ahora sea $b' \in B'$, entonces existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = \beta'(b')$, debido a que el diagrama conmuta $\beta'(f(b)) = \beta'(b')$, por la exactitud de la sucesión existe $m \in M$ tal que $\alpha'(m) = f(b) - b' \Rightarrow f(b - \alpha(m)) = b'$, luego f es un $\mathcal{R}$-isomorfismo.

Sobre $E(M, N)$ definimos la relación $e \sim e'$, si y solamente si, son extensiones equivalentes. La relación definida anteriormente resulta ser una relación de equivalencia. El cojunto de todas las clases de equivalencia $E(M, N)/\sim$ lo denotaremos por $e_{\mathcal{R}}(M, N)$.

Proposición 1. *Dos extensiones cualesquiera de* M *por* N *hendidas son equivalentes.*

Demostración. Sean

$$e: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

y

$$e': \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

dos extensiones hendidas de M por N. Entonces existen $\gamma: B \longrightarrow M$ y $\theta: N \longrightarrow B'$ homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos tal que $\gamma\alpha = i_M$ y $\beta'\theta = i_N$, respectivamente. Definimos $h: B \longrightarrow B'$ por $h(b) = \alpha'(\gamma(b)) + \theta(\beta(b))$, h resulta ser un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos bien definido.

Para cada $m \in M$ se tiene $h(\alpha(m)) = \alpha'(\gamma(\alpha(m))) + \theta(\beta(\alpha(m))) = \alpha'(m)$, lo cual implica $h\alpha = \alpha'$. Tomando $b \in B$ se tiene $\beta'(h(b)) = \beta'(\alpha'(\gamma(b)) + \theta(\beta(b))) = \beta(b)$, en consecuencia el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow h & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es conmutativo, y las extensiones e y e' son equivalentes. □

Observación 3. Si dos extensiones de M por N son equivalentes y una de ellas es hendida, la otra resulta hendida.

Sean

$$e: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

y

$$e': \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

dos extensiones equivalentes, entonces existe $\mu: \ B \longrightarrow B'$ isomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es conmutativo. Dado que e es una sucesión hendida existe $\gamma: \ B \longrightarrow M$ tal que $\gamma\alpha = i_M$, entonces $(\gamma\mu^{-1})\alpha' = (\gamma\mu^{-1})(\mu\alpha) = \gamma(\mu^{-1}\mu)\alpha = \gamma\alpha = i_M$. Lo cual prueba que e' es hendida.

Proposición 2. *Dada una extensión*

$$e: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

de M por N y un homomorfismo $\lambda: \ M \longrightarrow M'$ de $\mathcal{R}$-módulos, entonces existe una extensión

$$\lambda e: \ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

de M' por N y un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\mu: \ B \longrightarrow B'$ que hacen el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad , \tag{1.3}$$

conmutativo.

Demostración: Definimos $K := \{(\lambda(m), -\alpha(m)) \mid m \in M\}$, K resulta ser un submódulo de $M' \oplus B$, tomamos $B' := (M' \oplus B)/K$ y definimos los $\mathcal{R}$-homomorfismos:

$$\begin{array}{rccc} \alpha': & M' & \longrightarrow & B' \\ & m' & \longmapsto & (m', 0) + K \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rccc} \beta': & B' & \longrightarrow & N \\ & (m', b) + K & \longmapsto & \beta(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mu: & B & \longrightarrow & B' \\ & b & \longmapsto & (0, b) + K \end{array}$$

es claro que α' y μ son homomorfismos bien definidos. Si $(m, b) \in K$ se tiene $m = \lambda(m_1)$ y $b = -\alpha(m_1)$ para algún $m_1 \in M$, lo cual implica $\beta'(b) = 0$. Esto muestra que β' es un homomorfismo bien definido.

Ahora, sea $m' \in M'$ tal que $\alpha'(m') = 0$, entonces $(m', 0) \in K$ y se sigue $m' = \lambda(m_0)$ y $0 = \alpha(m_0)$, dado que α inyectiva se tiene $m_0 = 0$ y a su ves $m' = 0$. Se ha demostrado que α' es un homomorfismo inyectivo, e.d., un monomorfismo.

Es claro que $Im(\alpha') \subseteq \ker(\beta')$. Ahora tomemos $(m', b) + K \in B'$ tal que $\beta'((m', b) + K) = 0$, e.d., $\beta(b) = 0$. Por la exactitud de la sucesión (1.2), se tiene $b = \alpha(m)$ para algún $m \in M$. Por otro lado $(\lambda(m), 0) + K = (0, \alpha(m)) + K$, lo cual implica:

$$\begin{aligned}(m', b) + K = (m', \alpha(m)) + K &= (m', 0) + (0, \alpha(m)) + K \\ &= (m' + \lambda(m), 0) + K \\ &= \alpha'(m' + \lambda(m)).\end{aligned}$$

Se ha probado; $Im(\alpha') = \ker(\beta')$.

Para cada $n \in N$ existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = n$, entonces $\beta'((0, b) + K) = \beta(b) = n$. Se ha probado que β' es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos sobreyectivo.

De lo anterior podemos afirmar que la sucesión

$$\lambda e: \ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

es exacta.

Veamos que el diagrama conmuta. Para cada $m \in M$ se tiene

$$\alpha'(\lambda(m)) = (\lambda(m), 0) + K = (0, \alpha(m)) + K = \mu(\alpha(m)).$$

Si tomamos $b \in B$

$$\beta'(\mu(b)) = \beta'((0, b) + K) = \beta(b)$$

luego el diagrama (1.3) es conmutativo.

Afirmación: Si una extensión de M' por N cumple las condiciones de la proposición anterior, entonces la extensión resulta equivalente a λe.

Sea

$$e'': \ \ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N \longrightarrow 0$$

otra extensión de M' por N tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \mu''} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

conmuta.

Definimos $\sigma: \ B' \longrightarrow B''$ como $\sigma((m', b) + K) = \alpha''(m') + \mu''(b)$. Tomando $(\lambda(m'), -\alpha(m')) \in K$ tenemos

$$\begin{aligned}\sigma((\lambda(m'), -\alpha(m')) + K) &= \alpha''(\lambda(m')) - \mu''(\alpha(m')) \\ &= \mu''(\alpha(m')) - \mu''(\alpha(m')) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lo cual muestra que σ es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos bien defiinido.

Ahora, para cada $m' \in M'$ $\sigma(\alpha'(m')) = \sigma((m',0)+K) = \alpha''(m')$ y

$$\begin{aligned}\beta''(\sigma((m',b)+K)) &= \beta''(\alpha''(\lambda(m')) + \mu''(\alpha(m'))) \\ &= \beta''(\mu''(\alpha(m')) \\ &= \beta(b) \\ &= \beta'((m',b)+K).\end{aligned}$$

Se ha probado que e'' y e' son extensiones de M' por N equivalentes. □

Proposición 3. *Sean*

$$e: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

una extensión de M por N y $\nu: \ N' \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, entonces existe una extensión

$$e\nu: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N' \longrightarrow 0$$

de M por N' y un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\nu' : B' \longrightarrow B$ que hacen el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \nu'} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} , \tag{1.4}$$

conmutativo.

Demostración. Consideremos $B' = \{(b,n') \in B \oplus N' \ \mid \ \beta(b) = \nu(n')\}$ submódulo de $B \oplus N'$ y definimos los homomorfismos de $\mathcal{R}$-módulos

$$\alpha': \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & B' \\ m & \longmapsto & (\alpha(m),0) \end{array} \quad ; \quad \beta': \begin{array}{ccc} B' & \longrightarrow & N' \\ (b,n') & \longmapsto & n' \end{array}$$

$$\nu': \begin{array}{ccc} B' & \longrightarrow & B \\ (b,n') & \longmapsto & b. \end{array}$$

De lo anterior se tiene que α', β' y ν' son homomorfismos de $\mathcal{R}$-módulos, y por su construcción están bien definidos.

Por otro lado se tiene $\beta'(\alpha'(m)) = \beta'(\alpha(m),0) = 0$ para cualquier $m \in M$.

Sea $(b,n') \in B'$ tal que $\beta'((b,n')) = 0$, entonces $n' = 0$ y $\beta(b) = 0$. Usando la exactitud de la sucesión (1.2) se tiene $\alpha(m) = b$ para algún $m \in M$, en consecuencia $\alpha'(m,0) = (b,0)$. Se ha probado que $Im(\alpha') = \ker(\beta')$.

Sea $m \in M$ tal que $\alpha'(m) = (0,0)$, dado que α es un monomorfismo se tiene $m = 0$, esto demuestra que α' es un monomorfismo.

Usando la exactitud de la sucesión (1.2), para cualquier $n' \in N'$ se tiene: $\beta(b) = \nu(n')$ para algún $b \in B$, en consecuencia $\beta'(b,n') = n'$. Se ha probado que β es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos sobreyectivo y a su ves que $e\nu$ es una extensión de M por N'.

Ahora $\nu'(\alpha'(m)) = \nu'((\alpha(m), 0)) = \alpha(m)$ para cualquier $m \in M$ y $\nu(\beta'(b, n')) = \nu(n') = \beta(b) = \beta(\nu'(b, n'))$ para cualquier $(b, n') \in B'$. Esto demuestra que el diagrama (1.4) es conmutativo.

Se verá que si una extensión de M por N' satisface la proposición anterior, entonces la extensión es equivalente a $e\nu$.

Sean

$$e'' : \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N' \longrightarrow 0,$$

una extensión de M por N' y $\nu'' : B'' \longrightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \nu''} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

conmuta.

Definimos $\phi : B'' \longrightarrow B'$ por $\phi(b'') = (\nu''(b''), \beta''(b''))$, para cada $b'' \in B''$. Es claro; $(\nu''(b''), \beta''(b'')) \in B'$ y además ϕ es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos bien definido.

Para todo $m \in M$ se tiene

$$\begin{aligned} \phi(\alpha''(m)) &= (\nu''(\alpha''(m)), \beta''(\alpha''(m))) \\ &= (\alpha(m), 0) \\ &= \alpha'(m) \end{aligned}$$

y para todo $b' \in B''$ se tiene $\beta'(\phi(b')) = \beta'((\nu''(b'), \beta''(b'))) = \beta''(b')$. De esta forma el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B' & \xrightarrow{\beta} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

resulta conmutativo. □

Se mostrará que $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ es un grupo abeliano definiendo una suma adecuada, y luego se establecerá un isomorfismo de grupos entre $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ y $ext^1_{\mathcal{R}}(N, M)$.

Sean

$$e : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

y

$$e' : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

dos extensiones de M por N y $e \oplus e'$ la extensión

$$e \oplus e' : \ 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} B \oplus B' \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} N \oplus N \longrightarrow 0$$

de $M \oplus M$ por $N \oplus N$. Definimos los homomorfismos de $\mathcal{R}$-módulos

$$\nabla: \begin{array}{ccc} M \oplus M & \longrightarrow & M \\ (m_1, m_2) & \longmapsto & m_1 + m_2 \end{array} \quad ; \quad \Delta: \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & N \oplus N \\ n & \longmapsto & (n, n) \end{array}$$

entonces $\nabla((e \oplus e')\Delta)$ y $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ son extensiones de M por N.

Proposición 4. *Las extensiones* $\nabla((e \oplus e')\Delta)$ *y* $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ *de* M *por* N *son equivalentes.*

Demostración. Consideremos la extensión

$$e \oplus e': \ 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} B \oplus B' \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} N \oplus N \longrightarrow 0$$

y $\nabla: \ M \oplus M \longrightarrow M$ homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos.

Definiendo $B'' = (M \oplus B \oplus B'')/K$, donde

$$K = \{(m_1 + m_2, -\alpha(m_1), -\alpha(m_2)) \ \mid \ m_1, m_2 \in M\},$$

y tomando los homomorfismos:

$$\begin{array}{l} \alpha'': \ M \longrightarrow B'', \text{ definida por } \alpha''(m) = (m, 0, 0) + K. \\ \beta'': \ B'' \longrightarrow N \oplus N, \text{ definida por } \beta''((m, b, b') + K) = (\beta(b), \beta(b')). \\ \mu'': \ B \oplus B' \longrightarrow B'', \text{ definida por } \mu((b, b')) = (0, b, b') + K. \end{array}$$

así obtenemos la sucesión exacta

$$\nabla(e \oplus e'): \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N \oplus N \longrightarrow 0,$$

en consecuencia el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} & B \oplus B' & \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} & N \oplus N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \mu''} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N \oplus N & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

conmuta.

Para la sucesión

$$\nabla(e \oplus e'): \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N \oplus N \longrightarrow 0$$

y el homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\Delta: \ N \longrightarrow N \oplus N$, existen

$(\nabla(e \oplus e'))\Delta: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} N \longrightarrow 0$ sucesión exacta y $\nu_1: \ B_1 \longrightarrow B''$

homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \nu_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N \oplus N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta, tomando:

$$B_1 = \{((m,b,b')+K,n) \mid (m,b,b')+K \in B'',\ n \in N \text{ y } \beta(b) = \beta'(b') = n\}.$$
$$\alpha_1 :\ M \longrightarrow B_1,\ \text{definida por } \alpha_1(m) = ((m,0,0)+K,0).$$
$$\beta_1 :\ B_1 \longrightarrow N,\ \text{definida por } \beta_1(((m,b,b')+K,n)) = n.$$
$$\nu_1 :\ B_1 \longrightarrow B'',\ \text{definida por } \nu_1(((m,b,b')+K,n)) = (m,b,b')+K.$$

Ahora consideremos la extensión

$$e \oplus e' :\ 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{\alpha\oplus\alpha'} B \oplus B' \xrightarrow{\beta\oplus\beta'} N \oplus N \longrightarrow 0$$

y el homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\Delta :\ N \longrightarrow N \oplus N$, existen:

$$B_2 = \{(b,b',n) \in B \oplus B' \oplus N \mid \beta(b) = \beta(b') = n\}.$$
$$\alpha_2 :\ M \oplus M \longrightarrow B_2,\ \text{ definido por } \alpha_2(m_1,m_2) = (\alpha(m_1),\alpha'(m_2),0).$$
$$\beta_2 :\ B_2 \longrightarrow N,\ \text{ definido por } \beta_2((b,b',n)) = n.$$
$$\nu_2 :\ B_2 \longrightarrow B \oplus B',\ \text{ definido por } \nu_2((b,b',n)) = (b,b').$$

tal que la sucesión

$$(e \oplus e')\Delta :\ 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} N \longrightarrow 0$$

es exacta y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \nu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \\
0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{\alpha\oplus\alpha'} & B \oplus B' & \xrightarrow{\beta\oplus\beta'} & N \oplus N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmuta.

Para la sucesión

$$(e \oplus e')\Delta :\ 0 \longrightarrow M \oplus M \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} N \longrightarrow 0$$

y el homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\nabla :\ M \oplus M \longrightarrow M$, existen la sucesión

$$\nabla((e \oplus e')\Delta) :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_3} B_3 \xrightarrow{\beta_3} N \longrightarrow 0$$

exacta y $\mu_2 :\ B_2 \longrightarrow B_3$ homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M \oplus M & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmuta.

Tomando

$$\begin{aligned} K_3 &= \{(\nabla(m_1, m_2), -\alpha_2((m_1, m_2)) \ \mid \ m_1,\ m_2 \in M\} \\ &= \{(m_1 + m_2, -\alpha(m_1), -\alpha'(m_2), 0) \ \mid \ m_1,\ m_2 \in M\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_3 = (M \oplus B_2)/K_3 \ \ ; \\ &\alpha_3 : \ M \longrightarrow B_3, \ \text{ gefinida por } \ \alpha_3(m) = (m, 0, 0, 0) + K_3. \\ &\beta_3 : \ B_3 \longrightarrow N, \ \text{ definida por } \ \beta_3((m, b, b', n) + K_3) = n. \\ &\mu_2 : \ B_2 \longrightarrow B_3, \ \text{ definida por } \ \mu_2((b, b', n)) = (0, b, b', n) + K_3. \end{aligned}$$

Definimos $\varphi : \ B_3 \longrightarrow B_1$ como $\varphi((m, b, b', n) + K_3) = ((m, b, b') + K, n)$.

Para todo $m \in M$ se tiene

$$\varphi(\alpha_3(m)) = \varphi((m, 0, 0, 0) + K_3) = ((m, 0, 0) + K, 0) = \alpha_1(m)$$

y

$$\beta_1(\varphi((m, b, b', n) + K_3)) = \beta_1(((m, b, b') + K, n)) = n = \beta_3((m, b, b', n) + K_3))$$

para cualquier $(m, b, b', n) + K_3 \in B_3$. Lo cual demuestra que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \varphi \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

es conmutativo. En consecuencia las extensiones $\nabla((e \oplus e')\Delta)$ y $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ de M por N son equivalentes. □

Si definimos en $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ la suma de dos clases $[e\,]$ y $[e']$ como:

$$[e\,] + [e'] := [\nabla((e \oplus e')\Delta)]$$

obtenemos $[e\,] + [e'] = [e'] + [e\,]$.

Veamos que $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ con la suma definida anteriormente es un grupo abeliano.

Proposición 5. *Si $[e']$ denota la clase de equivalencia de las extensiones de M por N hendidas, entonces para cualquier $[e\,] \in e_{\mathcal{R}}(M, N)$ se tiene $[e\,] + [e'] = [e\,]$.*

Demostración. Sea

$$e : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0,$$

una extensión de M por N y definimos la extensión

$$e' : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} M \oplus N \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0,$$

tomando $\alpha' :\ M \longrightarrow M \oplus N$ como la inyección canónica y $\beta' :\ M \oplus N \longrightarrow N$ como la proyección canónica.

Veremos que $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ y e son extensiones de M por N equivalentes.

Consideremos:

$$\begin{aligned}
K &= \{(m_1 + m_2, -\alpha(m_1), -\alpha'(m_2)) \ \mid \ m_1, m_2 \in M\} \\
&= \{(m_1 + m_2, -\alpha(m_1), -m_2, 0) \ \mid \ m_1, m_2 \in M\}, \\
B'' &= \{((m, b, m_1, n_1) + K, n) \ \mid \ \beta(b) = n_1 = n\} \\
&= \{((m, b, m_1, n) + K, n) \ \mid \ \beta(b) = n\}, \\
\alpha'' &:\ M \longrightarrow B''. \text{ Definido por } \alpha''(m) = ((m, 0, 0, 0) + K, 0), \\
\beta'' &:\ B'' \longrightarrow N. \text{ Definido por } \beta''(((m, b, m_1, n) + K, n)) = n,
\end{aligned}$$

se sigue la extensión

$$(\nabla(e \oplus e'))\Delta : \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N \longrightarrow 0$$

de N por M.

Definimos $\sigma :\ B \longrightarrow B''$ por $\sigma(b) = ((0, b, 0, \beta(b)) + K, \beta(b))$. El homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos σ está bien definido, ya que e' es hendida.

Debido a que $(m, -\alpha(m), 0, 0) \in K$, para cada $m \in M$ se tiene

$$\sigma(\alpha(m)) = ((0, \alpha(m), 0, 0) + K, 0) = ((m, 0, 0, 0) + K, 0) = \alpha''(m),$$

en consecuencia $\sigma\alpha = \alpha''$.

Para cada $b \in B$ se tiene $\beta''(\sigma(b)) = \beta''((0, b, 0, \beta(b)) + K, \beta(b)) = \beta(b)$. De esta forma tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

Se ha probado que las extensiones $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ y e son equivalentes. □

Proposición 6. *Sea*

$$e :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

una extensión de M por N. Definimos la extensión de M por N

$$\bar{e} :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\bar{\alpha}} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

donde $\bar{\alpha}(a) := -\alpha(a)$, entonces $\nabla((e \oplus \bar{e})\Delta)$ es hendida.

Demostración. La extensión de M por N; $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ está dada por

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha''} B'' \xrightarrow{\beta''} N \longrightarrow 0$$

Definiendo $B'' = \{((m, b, b') + K, n) \mid m \in M,\ b, b' \in B \text{ y } \beta(b) = \beta(b') = n\}$ y $K = \{(m_1 + m_2, -\alpha(m_1), \alpha(m_2))\}$.

Los homomorfismos α'' y β'' están definidos por $\alpha''(m) = ((m, 0, 0) + K, 0)$ y $\beta''(((m, b, b') + K, n)) = n$ respectivamente.

Para cada $n \in N$ existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = n$, entonces $\beta''(((0, b, b) + K, n)) = n$, induciendo el homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $\gamma : N \longrightarrow B''$ dado por $\gamma(n) = ((0, b, b) + K, n)$, veamos que está bien definido:

Supongamos $b' \in B$ tal que $\beta(b') = n$ entonces $\beta(b - b') = 0$, por la exactitud de la sucesión, existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) + b' = b$ induciendo

$$(0, b, b) + K = (0, \alpha(m), \alpha(m)) + (0, b', b') + K = (0, b', b') + K,$$

con esto se ha probado que el homomorfismo γ está bien definido.

Para cada $n \in N$ se tiene $\beta''(\gamma(n)) = \beta''((0, b, b) + K, n) = n$. Se ha probado que la extensión de M por N $(\nabla(e \oplus e'))\Delta$ es hendida. □

De igual manera se puede probar la propiedad asociativa, la cual enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 7. *Para* $[e_1]$, $[e_2]$, $[e_3]$ *extensiones de* M *por* N *se tiene*

$$([e_1] + [e_2]) + [e_3] = [e_1] + ([e_2] + [e_3]).$$

Los tres últimos resultados demuestran que $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ es un grupo abeliano.

Proposición 8. *Existe un isomorfismo de grupos entre* $ext^1_{\mathcal{R}}(N, M)$ *y los elementos de* $e_{\mathcal{R}}(M, N)$.

Demostración. Sean

$$e : \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

una extensión de M por N y

$$\mathbf{P} : \ \cdots P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de N.

Al ser P_0 un $\mathcal{R}$-módulo proyectivos y β sobreyectivo, existe $f_0 : P_0 \longrightarrow B$ tal que $\beta f_0 = d_0$, en consecuencia $\beta(f_0 d_1) = 0$. Dado que P_1 es un $\mathcal{R}$-módulo proyectivo existe $f_1 : P_1 \longrightarrow M$ que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmutativo. Se sigue:

$$\alpha(f_1 d_2) = (\alpha f_1) d_2 = (f_0 d_1) d_2 = f_0(d_1 d_2) = 0 \ \Rightarrow \ d_2^* f_1 = f_1 d_2 = 0.$$

Definimos

$$\psi:\ e_{\mathcal{R}}(M,N) \longrightarrow ext^{1}_{\mathcal{R}}(N,M) \text{ dado por } \psi([e\,]) = f_{1} + Im\ d_1^*.$$

Veamos que la función está bien definida:

Sean $f_1' : P_1 \longrightarrow M$ y $f_0' : P_0 \longrightarrow B$ tal que $\alpha f_1' = f_0' d_1$ y $\beta f_0' = d_0$, entonces $\beta(f_0 - f_0') = 0$ luego, para cada $x \in P_0$ existe un único $m_x \in M$ tal que $\alpha(m_x) = f_0(x) - f_0'(x)$.

Por otra parte $\alpha(f_1 - f_1') = (f_0 - f_0')d_1$, entonces para cada $y \in P_1$ existe un único $m_y \in M$ tal que $\alpha(m_y) = (f_0 - f_0')d_1(y)$.

Utilizando esto definamos el homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $h : P_0 \longrightarrow M$, donde $h(x) := m_x$, con $\alpha(m_x) = f_0(x) - f_0'(x)$. Para cada $y \in P_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha(f_1 - f_1')(y) = (f_0 - f_0')(d_1(y)) = \alpha(m_{d_1(y)}) &\Rightarrow (f_1 - f_1')(y) = m_{d_1(y)} \\ &\Rightarrow (f_1 - f_1')(y) = h(d_1(y)).\end{aligned}$$

Se ha probado $f_1 - f_1' = d_1^* h$, lo cual implica $f_1 + Im\ d_1^* = f_1' + Im\ d_1^*$.

Supongamos

$$e':\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

una extensión de M por N equivalente a e, entonces existe $\phi : B \longrightarrow B'$ isomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos tal que $\phi\alpha = \alpha'$ y $\beta'\phi = \beta$. Por lo tanto

$$\alpha' f_1 = \phi(\alpha f_1) = (\phi f_0)d_1 \text{ y } \beta'(\phi f_0) = \beta f_0 = d_0,$$

lo cual prueba la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi f_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

y a su ves la buena definición de ψ.

Veamos que ψ es una función inyectiva: sean

$$e':\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} N \longrightarrow 0$$

una extensión de M por N, $g_1 : P_1 \longrightarrow M$ y $g_0 : P_0 \longrightarrow B'$ homomorfismos tal que $\alpha' g_1 = g_0 d_1$ y $\beta' g_0 = d_0$. Por lo hecho anteriormente se tiene $\psi([e']) = g_1 + Im\ d_1^*$.

Supongamos $\psi([e\,]) = \psi([e'])$ entonces $f_1 + Im\ d_1^* = g_1 + Im\ d_1^*$, en consecuencia $f_1 - g_1 = d_1^* h$ para algún $h \in Im\ d_1^*$, donde $h : P_0 \longrightarrow M$.

Para cada $b \in B$ existe $x \in P_0$ tal que $\beta(b) = d_0(x) = \beta(f_0(x))$. En consecuencia existe un único $m \in M$ tal que $\alpha(m) = b - f_0(x)$, de aquí $b = \alpha(m) + f_0(x)$.

Si tomamos $y \in P_0$ y $m' \in M$, tal que $b = \alpha(m') + f_0(y)$, entonces $d_0(x) = d_0(y)$ y en consecuencia existe $z \in P_1$ tal que $x - y = d_1(z)$, se sigue $x = y + d_1(z)$.

Por otra parte tenemos $\alpha(m-m') = -f_0(x-y) = -f_0(d_1(z)) = \alpha(-f_1(z))$ implicando $m = m' - f_1(z)$.

Ahora, para m y x se tiene el elemento $b' = \alpha'(m) + g_0(x) \in B'$ y

$$\begin{aligned}\alpha'(m) + g_0(x) &= \alpha'(m' - f_1(z)) + g_0(y + d_1(z)) \\ &= \alpha'(m') - \alpha'(f_1(z)) + g_0(y) + g_0(d_1(z)) \\ &= \alpha'(m') - \alpha'(f_1(z)) + g_0(y) + \alpha'(g_1(z)) \\ &= \alpha'(m') + \alpha'(g_1(z) - f_1(z)) + g_0(y) \\ &= \alpha'(m') + \alpha'(-hd_1(z)) + g_0(y) \\ &= \alpha'(m') + \alpha'(-h(x-y)) + g_0(y),\end{aligned}$$

lo cual implica $\alpha'(m) + g_0(x) + \alpha'(h(x)) = \alpha'(m') + g_0(y) + \alpha'(h(y))$. Si definimos $\phi : B \longrightarrow B'$ por $\phi(b) = \alpha'(m) + g_0(x) + \alpha'(h(x))$, tenemos que ϕ es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos bien definido.

Sean $b_1, b_2 \in B$, entonces existen, $x_1, x_2, \bar{x} \in P_0$ tal que $\beta(b_1) = d_0(x_1)$, $\beta(b_2) = d_0(x_2)$ y $\beta(b_1 + b_2) = d_0(\bar{x})$, de donde $x_1 + x_2 - d_1(y) = \bar{x}$, para algun $y \in P_1$. Además existen; $m_1, m_2, \bar{m} \in M$ tal que $b_1 + b_2 = f_0(\bar{x}) + \alpha(\bar{m})$ y $b_i = f_0(x_i) + \alpha(m_i)$ para $i = 1, 2$. Entonces $\bar{m} = m_1 + m_2 + f_1(y)$, lo cual implica

$$\begin{aligned}\phi(b_1 + b_2) &= \alpha'(\bar{m}) + g_0(\bar{x}) + \alpha'(h(\bar{x})) \\ &= \alpha'(m_1 + m_2 + f_1(y)) + g_0(x_1 + x_2 - d_1(y)) + \alpha'(h(x_1 + x_2 - d_1(y))) \\ &= \alpha'(m_1) + \alpha'(m_2) + g_0(x_1) + g_0(x_2) + \alpha'(h(x_1)) + \alpha'(h(x_2)) \\ &= \phi(b_1) + \phi(b_2)\end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que $\phi(rb) = r\phi(b)$ para $r \in \mathcal{R}$ y $b \in B$. Se ha probado que ϕ es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos.

Si tomamos $x = 0$, se tiene $\phi(\alpha(m)) = \alpha'(m)$, para cada $m \in M$. Entonces $\phi(\alpha) = \alpha'$, y $\beta'(\phi) = \beta'(g_0) = \beta$, lo cual demuestra que e y e' son extensiones de M por N equivalentes, con esto se ha probado que el homomorfismo ψ es inyectivo.

Veamos que ψ es un homomorfismo sobreyectivo:

Sea $f + Im\ d_1^* \in ext^1_{\mathcal{R}}(N, M) = \ker\ d_2^*/Im\ d_1^*$, entonces $d_2^* f = f d_2 = 0$. Definimos $L := \{(f(z), -d_1(z)) \mid z \in P_1\}$ y tomamos el $\mathcal{R}$-módulo cociente $B = (M \oplus P_0)/L$.

Definimos $\alpha : M \longrightarrow B$ por $\alpha(m) = (m, 0) + L$, la cual resulta un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos bien definido. Si $\alpha(m) = L$ entonces $(m, 0) \in L$ lo que implica $d_1(z) = 0$ y $f(z) = m$ para algun $z \in P_1$. Como $d_1(z) = 0$ tenemos; $z = d_2(t)$ para algún $t \in P_2$, en consecuencia $f(z) = 0$. Se ha probado que el homomorfismo α es inyectivo.

Definimos $\beta : B \longrightarrow N$ por $\beta((m, x) + L) = d_0(x)$. Para cada $z \in P_1$ se tiene $(f(z), -d_1(z)) \in L$, implicando

$$\beta((f(z), -d_1(z))) = d_0(-d_1(z)) = 0,$$

con lo anterior de ha probado la buena definición del homomorfismo β. Para cada $n \in N$ existe $x \in P_0$ tal que $d_0(x) = n$, entonces $\beta((0, x) + L) = d_0(x) = n$, en consecuencia el homomorfismo β es sobreyectivo.

Para cada $m \in M$, $\beta(\alpha(m)) = \beta((m,0)+L) = 0$, entonces $Im\ \alpha \subseteq \ker\ \beta$. Si tomamos $(m,x)+L \in B$ tal que $\beta((m,x)+L) = 0$ entonces $d_0(x) = 0$ y $x = d_1(z)$ para algún $z \in P_1$ implicando

$$\begin{aligned}(m,x)+L = (m,d_1(z))+L &= (m,0)+(0,d_1(z))+L \\ &= (m,0)+(-f(z),0)+L \\ &= (m-f(z),0)+L = \alpha(m-f(z)).\end{aligned}$$

Se ha probado la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0.$$

Definimos el homomorfismo $f_0 :\ P_0 \longrightarrow B$ por $f_0(x) = (0,x)+L$ el cual está bien definido. Para cada $z \in P_1$ se tiene

$$\alpha(f(z)) = (f(z),0)+L = (0,d_1(z))+L = \beta(d_1(z))$$

y para cada $x \in P_0$ se tiene

$$\beta(f_0(x)) = \beta((0,x)+L) = d_0(x),$$

demostrando la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha''} & B'' & \xrightarrow{\beta''} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y en consecuencia ψ es sobreyectivo.

Veamos que ψ es un homomorfismo de grupos.

Sea

$$\mathbf{P}: \quad \cdots P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de N. Consideremos dos extensiones de M por N

$$e_1 :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} N \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad e_2 :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} N \longrightarrow 0.$$

Tomemos los homomorfismos $f_0 :\ P_0 \longrightarrow B_1$, $f_1 :\ P_1 \longrightarrow M$ y $g_0 :\ P_0 \longrightarrow B_2$, $g_1 :\ P_1 \longrightarrow M$ los cuales hacen los diagramas

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

.

conmutativos.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2\oplus P_2 & \xrightarrow{d_2\oplus d_2} & P_1\oplus P_1 & \xrightarrow{d_1\oplus d_1} & P_0\oplus P_0 & \xrightarrow{d_0\oplus d_0} & N\oplus N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1\oplus g_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0\oplus g_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M\oplus M & \xrightarrow{\alpha_1\oplus\alpha_2} & B_1\oplus B_2 & \xrightarrow{\beta_1\oplus\beta_2} & N\oplus N & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

Consideramos la sucesión exacta

$$\nabla((e\oplus e')\Delta):\quad 0\longrightarrow M\xrightarrow{\alpha} B\xrightarrow{\beta} N\longrightarrow 0$$

y $K=\{(m_1+m_2,-\alpha_1(m_1),-\alpha_2(m_2))\ \mid\ m_1,\ m_2\in M\}$, donde :
$B=\{((m,b,b')+K,n)\ \mid\ b\in B_1,\ b'\in B_2\ \text{ y }\ \beta_1(b)=\beta_2(b')=n\}$,
$\alpha:\ M\longrightarrow B$ definida por $\alpha(m)=((m,0,0)+K,n)$ y
$\beta:\ B\longrightarrow N$ definida por $\beta(((m,b,b')+K,n))=n$.

Definimos el homomorfismo:

$$\hat{f}_0:\ P_0\longrightarrow B\ \text{ por }\ \hat{f}_0(x)=((0,f_0(x),g_0(x))+K,d_0(x)).$$

Para cualquier $z\in P_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{f}_0(d_1(z)) &= ((0,f_0(d_1(z)),g_0(d_1(z)))+K,d_0(d_1(z)))\\ &= ((0,\alpha_1(f_1(z)),\alpha_2(g_1(z)))+K,0)\\ &= ((f_1(z)+g_1(z),0,0)+K,0)=\alpha(f_1(z)+g_1(z))\\ &= \alpha(\nabla((f_1,g_1)\Delta)(z))\end{aligned}$$

Si tomamos el homomorfismo $\nabla((f_1\oplus g_1)\Delta:\ P_1\longrightarrow M$ tenemos:

$$\hat{f}_0d_1=\alpha\ \nabla((f_1,g_1)\Delta)$$

lo cual implica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nabla((f_1,g_1)\Delta)} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}_0} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Para cada $z\in P_1$ se tiene

$$\begin{aligned}\nabla((f_1,g_1)\Delta)(z) &= \nabla((f_1,g_1))(z,z)\\ &= \nabla(f_1(z),g_1(z))=f_1(z)+g_1(z)\end{aligned}$$

En consecuencia $\nabla((f_1,g_1)\Delta)=f_1+g_1$ y

$$\begin{aligned}\psi([e_1]+[e_2]) &= \nabla((f_1,g_1)\Delta)+Im\ d_1^*=f_1+g_1+Im\ d_1^*\\ &= (f_1+Im\ d_1^*)+(g_1+Im\ d_1^*)=\psi([e_1])+\psi([e_2]).\end{aligned}$$

Hemos demostrado que los grupos abelianos $ext^1_{\mathcal{R}}(N,M)$ y $e_{\mathcal{R}}(M,N)$ son isomorfos. □

Corolario 2. *$ext^1_D(N, M) = 0$ si, y sólo si, toda extensión de M por N es hendida.*

Demostración. Si $ext^1_D(N, M) = 0$ entonces $e_{\mathcal{R}}(M, N) = 0$, lo cual implica que la única clase de equivalencia ea la clase de las extensiones hendidas y en consecuencia toda extensión de M por N es hendida.

Si toda extensión de M por N es hendida, entonces $e_{\mathcal{R}}(M, N)$ tiene una única clase de equivalencia, en consecuencia $e_{\mathcal{R}}(M, N) = 0$, lo que a su vez implica $ext^1_D(N, M) = 0$. □

1.2. Anillos de polinomios iterados

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las álgebras de Ore, y los anillos de polinomios torcidos, las cuales son relevantes para el desarrollo del documento. Los anillos de polinomios torcidos consisten en anillos de polinomios creados a partir de un anillo $\mathcal{R}$ donde la variable x no conmuta con los elementos de $\mathcal{R}$

Definición 3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, definimos el anillo de polinomios torcidos $\mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$, bajo la regla*

$$ax = x\sigma(a) + \delta(a), \qquad \text{para cada } \ a \in \mathcal{R}$$

Observación 4. Sean $a, b \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$ el anillo de polinomios torcidoa asociado a $\mathcal{R}$, entonces:

1. $(a+b)x = x\sigma(a+b) + \delta(a+b)$, por otra parte $(a+b)x = ax + bx = x(\sigma(a) + \sigma(b)) + (\delta(a) + \delta(b))$. En consecuencia
$$\sigma(a+b) = (\sigma(a) + \sigma(b) \ \ y \ \ \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b).$$
2. $(ab)x = x\sigma(ab) + \delta(ab)$. Por otra parte
$$(ab)x = a(bx) = a(x\sigma(b) + \delta(b)) = (ax)\sigma(b) + a\delta(b) = x\sigma(a)\sigma(b) + \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b)$$
lo cual implica $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ y $\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b)$.
3. $\sigma \in \mathrm{End}(\mathcal{R})$ y δ es una σ-derivación.
4. $\sigma(1) = 1$, $\delta(1) = \delta(0) = \sigma(0) = 0$.

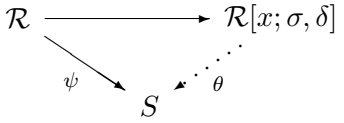
Todo elemento $f \in \mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$ puede escribirse de la forma, $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$. Si consideramos $S = \mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$, como un $\mathcal{R}$-módulo derecho, tenemos que S es un anillo libre, generado por x sobre $\mathcal{R}$, bajo la condición $ax = x\sigma(a) + \delta(a)$.

El grado de un polinomio $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ se define como n si $a_n \neq 0$, y escribiremos $deg(f) = n$, a_n se denomina el coeficiente principal de f y escribiremos, $lc(f) = a_n$; el monomio principal de f se notará por $lm(f) := x_n$; el término principal de f, $x_n a_n$ sera denotado por $lt(f)$. Si los coeficientes a_i del polinomio f son todos nulos diremos que f es el polinomio nulo y escribimos $f = 0$. En este caso definimos $lc(0) := 0$, $lm(0) := 0$ y $lt(0) := 0$.

Proposición 9. *(Propiedad Universal) Sea $\psi : \mathcal{R} \longrightarrow S$, homomorfismo de anillos, y sea $y \in S$ con la propiedad:*

$$\psi(a)y = y\psi(\sigma(a)) + \psi(\delta(a)), \qquad \text{para cada } \ a \in \mathcal{R},$$

entonces existe un único homomorfismo de anillos $\theta : \mathcal{R}[x;\sigma,\delta] \longrightarrow S$ tal que el diagrama



(1.5)

conmuta.

Demostración. Cada elemento de $\mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$ tiene la forma $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$, con $a_i \in \mathcal{R}$ para $i = 1, ..., n$, en consecuencia $\theta : \mathcal{R}[x;\sigma,\delta] \longrightarrow S$ definido por $\theta(a) = \psi(a)$ y $\theta(x) = y$, resulta ser un homomorfismo de anillos bien definido.

Veamos que θ es lineal con respecto a la suma:

$$\begin{aligned}\theta(\sum_{i=0}^{n} x^i a_i + \sum_{i=0}^{n} x^i b_i) &= \sum_{i=1}^{n} \theta(x^i(a_i + b_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y^i \psi(a_i + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y^i \psi(a_i) + \sum_{i=1}^{n} y^i \psi(a_i) \\ &= \theta(\sum_{i=1}^{n} x^i a_i) + \theta(\sum_{i=1}^{n} x^i b_i).\end{aligned}$$

Veamos que θ es lineal con respecto al producto, es decir, $\theta(x^n a x^m b)) = \theta(x^n a)\theta(x^m b)$. La demostración se hará por inducción sobre m. Para $m = 0$ es inmediato, supongamos el resultado valido para m. Entonces

$$\begin{aligned}\theta(x^n a x^{m+1}) &= \theta(x^n (ax) x^m b)) \\ &= \theta(x^n (x\sigma(a) + \delta(a)) x^m b)) \\ &= \theta(x^{n+1}\sigma(a)x^m b + x^n \delta(a) x^m b) \\ &= \theta(x^{n+1}\sigma(a)x^m b) + \theta(x^n \delta(a) x^m b) \\ &= \theta(x^{n+1}\sigma(a))\theta(x^m b) + \theta(x^n \delta(a))\theta(x^m b) \\ &= y^{n+1}\psi(\sigma(a)) y^m \psi(b) + y^n \psi(\delta(a)) y^m \psi(b) \\ &= y^n \psi(a) y^{m+1} \psi(b) \\ &= \theta(x^n a)\theta(x^{m+1} b).\end{aligned}$$

Resta probar la unicidad del homomorfismo θ. Supongamos $h : \mathcal{R}[x;\sigma,\delta] \longrightarrow S$ tal que el diagrama (1.5) conmuta y $h(x) = y$, entonces $h(a) = \psi(a) = \theta(a)$.

Sea $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \in R[x;\sigma,\delta]$, entonces

$$h(\sum_{i=0}^{n} x^i a_i) = \sum_{i=0}^{n} h(x^i a_i) = \sum_{i=0}^{n} y^i h(a_i) = \sum_{i=0}^{n} y^i \theta(a_i) = \theta(\sum_{i=0}^{n} x^i a_i)$$

□

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{R}$ un anillo y σ un automorfismo. Entonces $\mathcal{R}[x, x^{-1}, \sigma]$, denota los polinomios en las variables x y x^{-1}, con la condición $ax = x\sigma(a)$, el cual es llamado **el anillo de polinomios iterados de Laurent**. Cada elemento tiene la forma $\sum_{i\in\mathbb{Z}} x^i a_i$.

Proposición 10. *Sea $\mathcal{R}$ un dominio de integridad, consideramos $S = \mathcal{R}[x;\sigma,\delta]$. Entonces*

1. *$\mathcal{R}^{(1)} = \{a \in \mathcal{R} \mid \sigma(a) = a\}$, es un dominio, y es llmado el **Dominio invariante de** $\mathcal{R}$.*

2. $\mathcal{R}^{(0)} = \{a \in \mathcal{R} \mid \delta(a) = 0\}$, *es un dominio y es llamado el* ***Dominio constante de*** $\mathcal{R}$.

Demostración. 1. Supongamos $\sigma(a) = 0$, para algún $a \in \mathcal{R}$, entonces $ax = x\sigma(a)+\delta(a)$, en consecuencia $x \in \mathcal{R}$.

2. Sean $a, b \in \mathcal{R}^{(0)}$, entonces $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b = 0$ y $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$.

□

Definición 4. *Un anillo* $\mathcal{R}$ *es un* ***anillo primo*** *si para cada* $a, b \in \mathcal{R}$ *no nulos se tiene* $a\mathcal{R}b \neq 0$.

Teorema 3. *Sea* $\mathcal{R}$ *un anillo y* $S = \mathcal{R}[x; \sigma, \delta]$ *su anillo de polinomios iterados, entonces:*

1. *Si* $\mathcal{R}$ *es un dominio de integridad y* σ *es un monomorfismo* $\Rightarrow$ S *es un dominio de integridad..*
2. *Si* $\mathcal{R}$ *es un anillo de división y* σ *es un monomorfismo* $\Rightarrow$ S *es un PID.*
3. *Si* $\sigma \in Aut(\mathcal{R})$ *y* $\mathcal{R}$ *es un anillo primo* $\Rightarrow$ S *es primo.*
4. *Si* $\sigma \in Aut(\mathcal{R})$ *y* $\mathcal{R}$ *es un anillo noetheriano a derecha* $\Rightarrow$ S *es noetheriano a derecha.*

Demostración. 1. Sean $f, g \in S$ entonces $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ y $g = \sum_{i=0}^{m} x^i b_i$, donde a_n y b_m son distintos de cero. Tenemos $lt(f) = x^n a_n$ y $lt(g) = x^m b_m$, en consecuencia $lt(fg) = x^{m+n}\sigma^m(a_n)b_n$, donde $lc(fg) = \sigma^m(a_n)b_m \neq 0$. lo cual prueba que S es un DI.

2. Sea $I \lhd S$ un ideal derecho, consideremos $f \in I$; $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ de menor grado posible, sea $g = \sum_{i=0}^{m} x^i b_i \in I$, por el algoritmo euclidiano existen $h = \sum_{i=0}^{k} x^i a_i$ y $l = \sum_{i=0}^{r} x^i a_i$, tal que $g = fh + l$, donde $l = 0$ o $deg(l) < deg(f)$. En consecuencia $I = \langle f \rangle$.

3. Sean $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ y $g = \sum_{i=0}^{m} x^i b_i$ con $a_n, b_m \neq 0$. Dado que σ es inyectivo $\sigma^m(a_n) \neq 0$, como $\mathcal{R}$ es primo $\sigma^m(a)\mathcal{R}b_m \neq 0$. De otra forma se tiene $x^n a r x^m b_m = x^{n+m}\sigma^m(a_n)\sigma^m(r)b_m$, dado que σ es un automorfismo existe $r' \in \mathcal{R}$ tal que $\sigma^m(r) = r'$, por lo tanto cada elemento de $\sigma^m(a)\mathcal{R}b_m$ es el coeficiente líder de un elemento en $f\mathcal{R}g$. En consecuencia $fSg \neq 0$.

4. Sea $I \lhd S$ un ideal derecho. Dado que σ es un automorfismo cada elemento de S se puede escribir de la forma $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Sea $I'_n = \{lc(f) \mid f \in I \ \ y \ \ deg(f) \leq n\}$, donde $I_n \lhd_r \mathcal{R}$ y $I_0 \subseteq I_1 \ldots \subseteq I_n \ldots$.

   Supongamos $I' \lhd_r S$, tal que $I'_n = I_n$ y $I \subset I'$, entonces $I = I'$. Supongamos $f \in I' \setminus I$ del menor grado posible m, si $lc(f) \in I_m$ entonces existe $g \in I$ tal que $lc(g) = lc(f)$, en consecuencia $f - g \in I'$ y $f - g \notin I$ lo cual implica $I_m \neq I'_m$.

   Sea $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots$ una cadena se ideales derechos de S, y definimos $L_{in} = \{lc(f) \mid f \in L_i \ \ y \ \ deg(f) \leq n\}$. Consideremos $\{L_{in} \mid i, n \geq 0\}$. Para $i \geq m$ y $j \geq k$, se tiene

$L_{ij} \subset L_{km}$. Dado que R es noetheriano se tiene que la cadena $L_{00} \subseteq L_{11} \subseteq \ldots$, se estabiliza, e.d., existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $L_{nn} = L_{tt}$ para todo $n \leq t$.

Sea $n \geq t$ fijo y tomemos $i \geq t$, entonces $L_{tt} \subseteq L_{ni} \subseteq L_{i_n i_n}$ donde $i_n = \text{máx}\{n, i\}$, en consecuencia $L_{ni} = L_{nj}$ para $j, i \geq t$, si fijamos i tenemos; $L_{ni} = L_{mi}$ para cada $n, m \geq t$.

Para cada $0 \leq n \leq t-1$, existe t_n tal que en la cadena $L_{0n} \subseteq L_{1n} \subseteq \ldots$, se tiene $L_{mn} = L_{t_n n}$ para todo $m \geq t_n$. Si tomamos $\alpha = \text{máx}\{t_0, \ldots, t_t, t\}$. Sean $L_n \subseteq L_m$ tal que $m, n \geq \alpha$ entonces $L_{mi} = L_{ni}$, para $i \geq t$, de lo anterior tenemos $L_{mi} = L_{ni}$ para $i \leq t-1$, de esto podemos concluir $L_n = L_m$ para $n, m \geq \alpha$. Hemos demostrado que el anillo S es noetheriano.

□

1.2.1. Álgebras de Ore

Una extensión de Ore de un anillo $\mathcal{R}$ consiste en iterar la construcción de anillos de polinomios torcido para obtener una extensión de **polinomios torcidos iterados**, es decir sobre el anillo $A = \mathcal{R}[x_1; \sigma_1, \delta_1] \ldots [x_{i-1}; \sigma_{i-1}, \delta_{i-1}]$ construimos el anillo de polinomios torcidos $A[x_i; \sigma_i, \delta_i]$ donde $\sigma_i : A \longrightarrow A$ es un automorfismo y δ_i una σ_i-derivación, hasta obtener el anillo $\mathcal{R}[x_1; \sigma_1, \delta_1] \ldots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$, las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad 1 \leq i, j \leq n \tag{1.6}$$
$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \qquad 1 \leq i, j \leq n \tag{1.7}$$
$$\delta_i \sigma_j = \delta_j \sigma_i \qquad 1 \leq i \neq j \leq n \tag{1.8}$$
$$\sigma_i(x_j) = x_j \qquad j < i \tag{1.9}$$
$$\delta_i(x_j) = 0 \qquad j < i. \tag{1.10}$$

Ejemplo 2. Sea k un cuerpo, $A_n(k)$ la k-álgebra definida por $2n$ generadores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ con la relación:

$$x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = 0$$

y

$$x_i y_j = y_j x_i + \delta_{ij}, \qquad \text{donde } \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker.}$$

$A_n(k)$ es llamada la n-ésima **Álgebra de Weyl** sobre k.

Sea k un cuerpo, se tomará $\mathcal{R} = k[x_1, \ldots, x_n]$ como el anillo de polinomios conmutativo en las variables $x_1, \ldots, x_n$, el cual es un dominio de integridad. Consideremos la sucesión

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0[y_1; \partial/\partial x_1], \ldots, \ \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i[y_{i+1}; \partial/\partial x_{i+1}]$$

entonces, $\mathcal{R}_n$ es una k-álgebra con $2n$ generadores los cuales satisfacen la definición de Álgebra de Weyl. De lo anterior tenemos $A_n(k) \cong \mathcal{R}_n$. Sin pérdida de generalidad podemos definir $\mathcal{R}_n$ como la n-ésima álgebra de Weyl.

Observación 5. Si $aF(x) = F(x)a$ para cualquier polinomio, entonces $ax = xa$, $ab = ba$ para cada $b \in D$ y $\delta(a) = 0$, es decir $a \in Z(D) \cap D^{(0)} \cap D^{(1)}$ es decir $Z(S) = Z(D) \cap D^{(0)} \cap D^{(1)}$.

Definición 5. *Sea R un anillo.*

1. *Un subconjunto multiplicativo cerrado S de un anillo $\mathcal{R}$ tiene* ***la Condición de Ore*** *si para cada $r \in \mathcal{R}$ y $s \in S$ existen $r' \in \mathcal{R}$ y $s' \in S$ tal que $rs' = sr'$. Un conjunto cerrado con la condición de Ore es llamado un* ***conjunto de Ore****.*
2. *Un elemento $x \in \mathcal{R}$, es regular a derecha si $xa = 0$, implica $a = 0$. Definimos $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(0)$ como el conjunto de todos los elementos regulares de $\mathcal{R}$.*
3. *Sea R es un dominio de integridad, decimos que R es un* ***Dominio de Ore****, si $\mathcal{C}_R(0)$ es un conjunto de Ore.*

Proposición 11. *Si $\mathcal{R}$ es un dominio de integridad noetheriano a derecha entonces $\mathcal{R}$ es un dominio de Ore a derecha.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{R}\backslash 0$. Consideremos $a\mathcal{R}, b\mathcal{R}$, entonces $a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R} \neq 0$. Supongamos $a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R} = 0$, entonces $\sum_n b^n a\mathcal{R}$ es una suma directa de ideales derechos de $\mathcal{R}$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $a \in b^k a\mathcal{R} \cap \sum_{n\neq k} b^n a\mathcal{R}$ tal que $a = \sum_{n=1}^m b^n a r_n$ con m mínimo, entonces $b^k ar = \sum_{n=1}^m b^n a r_n$ para algún $r \in \mathcal{R}$, sea $\alpha = \text{mín}\{k, 1, \ldots, n\}$, entonces

$$b^\alpha \left(\sum_{n=1}^{m} b^{n-\alpha} a r_n - b^{k-\alpha} ar \right) = 0$$

de donde $\sum_{n=1}^m b^{n-\alpha} a r_n - b^{k-\alpha} ar = 0$, se sigue $a \in bR$ lo cual es contradictorio, en consecuencia, $\sum_n b^n aR$ es una suma directa, esto contradice el hecho de ser un anillo R noetheriano. Entonces existen $r, r' \in R$ tal que $ar = br'$ □

Definición 6. *Sea D un dominio noetheriano y $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$ el D-módulo presentado por la matriz $R \in D^{q\times p}$, finitamente generado. Entonces:*

1. *M es libre de rango $p \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $M \cong D^{1\times p}$*
2. *M es establemente libre si existen $p,\ q \in \mathbb{Z}$ con $q \leq p$, tal que $M \oplus D^{1\times q} \cong D^{1\times p}$. En tal caso decimos que el rango de M es $p - q$.*
3. *M es proyectivo si existen $p \in \mathbb{Z}^+$ y N un D-módulo tal que $M \oplus N \cong D^{1\times p}$*
4. *M es libre de torsión si el D-submódulo*

$$t(M) = \{m \in M \mid \exists d \in D - 0 :\ dm = 0\}$$

de M se reduce a cero. es decir $t(M) = 0$.

5. *M es de torsión si $t(M) = M$.*

Corolario 3. *Si $\mathcal{R}$ es un dominio de integridad y $\sigma \in Aut(\mathcal{R})$ entonces $S = \mathcal{R}[x; \sigma, \delta]$ es un dominio de Ore.*

Lema 1. *Sean a, b elementos regulares a derecha de un anillo R. Entonces*

$$a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R} \cong \{x \in \mathcal{R} \mid ax \in b\mathcal{R}\}.$$

Si $a\mathcal{R} + \mathcal{R} = \mathcal{R}$ entonces $a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R}$ es establemente libre.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R} \xrightarrow{\alpha} a\mathcal{R} \oplus b\mathcal{R} \xrightarrow{\beta} a\mathcal{R} + b\mathcal{R} \longrightarrow 0$$

donde $\alpha(ax) = (ax, ax)$; $\beta(ax, by) = ax - by$. α es un homomorfismo inyectivo ya que a es un elemento regular a derecha de $\mathcal{R}$, $\beta(\alpha(ax)) = 0$ y β es un homomorfismo sobreyectivo. Como R es un $\mathcal{R}$-módulo libre tenemos $(a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R}) \oplus \mathcal{R} = a\mathcal{R} \oplus b\mathcal{R} \cong \mathcal{R}^2$, en consecuencia $a\mathcal{R} \cap b\mathcal{R}$ es establemente libre con rango igual a 1 □

Definición 7. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Decimos que un $\mathcal{R}$-módulo derecho M tiene una presentación libre finita (FFR) de* ***longitud*** $\leq n$ *si la sucesión*

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \ldots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es exacta y cada F_i es libre.

Lema 2 (lema de shanuel)**.** *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, si la sucesiones de $\mathcal{R}$-módulos*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P'_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

son exactas donde cada P_i es proyectivo entonces

$$K \oplus P'_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \ldots \cong K' \oplus P_{n-1} \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \ldots$$

Teorema 4. *Todo $\mathcal{R}$-módulo proyectivo M es establemente libre si, y sólo si, M tiene resolución libre finita. Si la FFR de M tiene longitud $\leq n$, se tiene $rank(M) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i rank(F_i)$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es claro.

($\Leftarrow$) Por inducción sobe la longitud de la FFR. Supongamos que la FFR tiene longitud ≤ 1, entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

con F_0, F_1 libres, es exacta. En consecuencia $M \oplus F_1 \cong F_0$.

Supongamos que la FFR tiene longitud $\leq n+1$, entonces existe una sucesión

$$0 \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \ldots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

exacta, tal que F_i es libre. Ahora como M es proyectivo y cada F_i es libre tenemos las sucesión exactas

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{d_n} F_n \xrightarrow{\alpha_{n+1}} F_{n+1} \longrightarrow 0$$

si n es par tenemos la sucesión exacta y

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_n \longrightarrow 0 \ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_n \longrightarrow 0.$$

(si n es impar en la sucesión anterior tomamos $n-1$ copia de F_n y la completamos con ceros a la izquierda.) Utilizando el lema de Shanuel tenemos

$$M \oplus F_n \oplus F_1 \oplus F_n \oplus 0 \ldots \cong F_n \oplus F_0 \oplus 0 \oplus F_2 \oplus F_n \ldots$$

En consecuencia M es un $\mathcal{R}$-módulo establemente libre y

$$rank(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i rank(F_i)$$

□

Observación 6. Si $\mathcal{R}$ es un DIP entonces todo submódulo de un $\mathcal{R}$-módulo libre es libre.

Sea F un $\mathcal{R}$-módulo libre, entonces $F \cong \bigoplus_{k\in I} \mathcal{R}_k$, donde $\mathcal{R} = \mathcal{R}_k$, si $M \lhd_r F$, entonces $M \cong \bigoplus_{k\in I} \mathcal{C}_k$ donde $\mathcal{C}_k$ es un ideal de $\mathcal{R}$. En consecuencia $\mathcal{C}_k = 0$ o $\mathcal{C}_k \cong \mathcal{R}$.

Proposición 12. *Si $\mathcal{R}$ es un anillo conmutativo noetheriano y todo $\mathcal{R}$-módulo tiene resolución libre finita FFR, entonces todo $\mathcal{R}[x]$-módulo tiene resolución libre finita.*

Demostración. Véase [1]. □

Teorema 5. ***(Serre)*** *Si k es un cuerpo, entonces todo módulo proyectivo f.g. sobre $D = k[t_1, \ldots, t_n]$ es establemente libre.*

Demostración. Se mirará que todo D-móduló proyectivo f.g. tiene una resolución libre finita, la demostración se hará por inducción inducción sobre el número de variables.

Para $n = 1$ se tiene que el anillo $D = R[t]$ es un dominio de ideales principales, dado que estamos en un DIP todo submódulo de un módulo libre es libre, lo cual implica que todo D-módulo f.g. y proyectivo tiene resolución libre finita.

Por el teorema de las bases de Hilbert el anillo $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$ es noetheriano, por hipótesis todo $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_{n-1}]$-módulo tiene resolución libre finita y por la proposición (12) todo $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_n]$-módulo tiene resolución libre finita. □

Teorema 6. *Se tienen los siguientes resultados.*

1. *Si D es un dominio de ideales principales, entonces todo D-módulo libre de torsión es libre.*

2. *Si $D = k[x_1, \ldots, X_n]$ es un anillo de polinomios conmutativos sobre un cuerpo k, entonces todo D-módulo proyectivo finitamente generado es libre.* (Teorema de Quillin-Suslin)

3. Si k es un cuerpo de característica 0 (e.,d. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) y $D = A_n$ (respectivamente B_n) es la primera (respectivamente la segunda) álgebra de Weyl de operadores diferenciales parciales en $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$ con coeficientes en $k[x_1, \ldots, x_n]$, (resp. $(k[x_1, \ldots, x_n)$) entonces todo D-módulo proyectivo de rango mayor a 2 es libre. (Teorema de stafford)

4. Si D es el anillo de operadores diferenciales ordinarios con coeficientes en el anillo de series formales $k[[t]]$, donde k es un cuerpo de característica 0, o el anillo de series convergentes con coeficientes en $k = \mathbb{R}$, *o* $\mathbb{C}$, entonces todo D-módulo proyectivo de rango mayor a 2 es libre.

Demostración. 1. La prueba se hará por inducción sobre n, donde $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. Supongamos $n = 1$, entonces M es cíclico y podemos escribir $M = Dm$, para algún $m \in M$. Como M es libre de torsón se tiene $M \cong D$. Lo cual demuestra que el D-módulo M es libre.

Tomemos $M = \langle m_1, \ldots, m_n, m_{n+1} \rangle$, libre de torsión y supongamos el resultado para $M' = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/M' \longrightarrow 0$$

es exacta, donde π es el homomorfismo natural. El D-módulo M/M' es cíclico generado por $\pi(x_{n+1}) + M'$ y por lo tanto es libre, de donde la sucesión exacta es hendida y $M \cong M' \oplus M/M'$. En consecuencia el D-módulo M es libre.

2. Teorema de Quillen-Suslin.

3. Teorema de Stafford.

4. Véase [16].

□

Definición 8. *1. Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo y sea $\mathcal{R}^n$ el $\mathcal{R}$-módulo libre de rango n. Una columna con elementos $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}^n$ es una* ***columna Unimodular*** *si existe $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{R}^n$ tal que $\alpha\beta^T = 1$.*

2. Un anillo conmutativo $\mathcal{R}$ tiene la propiedad de ***la columna unimodular*** *si toda columna unimodular $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ es la primera columna de alguna matriz invertible sobre $\mathcal{R}$.*

Teorema 7. *Si $\mathcal{R}$ tiene la propiedad de la columna unimodular entonces todo $\mathcal{R}$-módulo M establemente libre es libre.*

Demostración. Por inducción sobre el rango del complemento libre de M. Para $t = 1$ tenemos $P \oplus \mathcal{R} = \mathcal{R}^n$. Sea $\pi : P \oplus \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^n$ la proyección canónica en la segunda componente con $\ker(\pi) = P$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base estandar de $\mathcal{R}^n$. Entonces existe $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}^n$ tal que $1 = \pi(\alpha) = (a_1, \ldots, a_n)(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n))^T$. Dado que $\mathcal{R}$ tiene la propiedad de la columna unimodular, existe una matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ invertible sobre $\mathcal{R}$ tal que $\alpha = Ae_1$. Sean $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las columnas de la matriz A, definimos el isomorfismo $T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ por $T(e_j) = Ae_j$ para $j \geq 1$, si $\pi(\alpha_j) = 0$ para cada $j \geq 2$ tenemos $T|_{\langle x_2, \ldots, x_n \rangle} = T' : \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \longrightarrow P$ es inyectivo ya que $\{x_2, \ldots, x_n\}$ es una base. Para cada $\beta \in P$, se tiene $\beta = T(r_1 e_1 + \delta)$ donde $\delta = \sum_{i=2}^{n} r_i e_i$ por lo tanto $\beta - T(\delta) = r_1 \alpha \in P$, en consecuencia $r_1 = 0$ y $\beta = T(\delta)$.

Supongamos $T(\alpha_j) = \lambda_j$ para $j \geq 2$, entonces la matriz M' con columnas α, α'_j definiendo $\alpha'_j = \alpha_j - \lambda_j \alpha$, tiene columnas L.I. en consecuencia es invertible y $\pi(\alpha'_j) = \pi(\alpha_j) - \lambda_j \pi(\alpha) = 0$. Aplicando el proceso anterior a la matriz M', se tiene lo deseado. □

Las álgebras de Weyl son un ejemplo de álgebras de Ore.

Ejemplo 3. Un caso de álgebra polinomial de Ore son los polinomios de corrimiento. para $h \in \mathbb{R}$, definimos $s_h = \mathbb{R}[x][\delta_h; \delta_h]$ por:

$$\delta_h(a(x)) = a(x-h) \; ; \quad \delta(a) = 0$$

entonces, tenemos la regla de multiplicación: $a(x)\delta_h = a(x-h)$. Esto representa la acción de corrimiento sobre un polinomio.

Ejemplo 4. Definimos el álgebra de Ore: $D_h = k[x][\partial; \sigma_1, \delta_1][\delta_h, \sigma_2, \delta_2]$, donde k es un cuerpo por:

$$\sigma_1 = i_{k[x]}, \quad \delta_1 = \frac{d}{dx}; \qquad \forall a(x) \in k[x] \;\; \sigma_2(a(x)) = \delta_h(a(x)) = a(x-h), \quad \delta_2 = 0$$

Ejemplo 5. En los sistemas multilineales discretos definimos el álgebra de Ore: $D = k[x_1, \ldots, x_n][\partial_1; \sigma_1, \delta_1] \ldots [\partial_n, \sigma_n, \delta_n]$, donde k es un cuerpo por:

$$\sigma_i(a(x_1, \ldots, x_n)) = a(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n), \quad \delta_i = 0 \quad \text{para cada} \;\; 1 \leq i \leq n.$$

Sean k un cuerpo, $D = k[x][\partial; \sigma, \delta]$ y $q \in k$ entonces:

Operador	$\sigma(a(x))$	$\delta(a(x))$	conmutación	acción de ∂
Diferenciación	$a(x)$	$a'(x)$	$x\partial = \partial x + 1$	$f(x) \longrightarrow f'(x)$
Corrimiento	$a(x+1)$	0	$x\partial = \partial(x+1)$	$f(x) \longrightarrow f(x+1)$
Diferencia	$a(x+1)$	$a(x+1) - a(x)$	$x\partial = \partial(x+1) + 1$	$f(x) \longrightarrow f(x+1) - f(x)$
q-Dilatación	$a(qx)$	0	$x\partial = q\partial x$	$f(x) \longrightarrow f(qx)$
q-Diferencia	$a(qx)$	$a(qx) - a(x)$	$x\partial = q\partial(x) + (q-1)x$	$f(x) \longrightarrow f(qx) - f(x)$
q-Diferenciación	$a(qx)$	$\frac{a(qx)-a(x)}{(q-1)x}$	$x\partial = q\partial x + 1$	$f(x) \longrightarrow \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$
Operador de Elurian	$a(x)$	$xa(x)$	$x\partial = \partial x + x$	$f(x) \longrightarrow xf'(x)$
e^t-Diferenciación	$a(x)$	$xa(x)$	$x\partial = \partial x + x$	$f(x) \longrightarrow f'(x) \;\; (x = e^t)$
Operador de Mahlerian	$a(x^p)$	0	$x\partial = \partial x^p$	$f(x) \longrightarrow f(x^p) \;\; (p \geq 2)$.

CAPÍTULO 2

Reducción de Serre para sistemas lineales funcionales

2.1. Métodos matriciales para sistemas lineales funcionales

Sea D un dominio noetheriano (y en consecuencia, un dominio de Ore), $R \in D^{q\times p}$ una matriz de tamaño $q \times p$ con entradas en D y M el D-módulo izquierdo asociado a la matriz R (de aquí en adelante tomaremos el D-módulo M como un módulo a izq). Consideremos la sucesión exacta de D-módulos

$$0 \longrightarrow \ker(.R) \xrightarrow{.R} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Dado que D es un dominio noetheriano a derecha, se tiene que el $\ker(.R)$ es un D-módulo finitamente generado, en consecuencia existe un D-módulo libre $D^{1\times q_1}$ y un homomorfismo de D-módulos g_1 el cual envía los vectores de la base canónica de $D^{1\times q_1}$ en los generadores del módulo $\ker(.R)$, así se define la sucesión exacta

$$D^{1\times q_1} \xrightarrow{.R} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Repitiendo este proceso, tenemos la resolución libre

$$\cdots D^{1\times q_2} \xrightarrow{g_2} D^{1\times q_1} \xrightarrow{g_1} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Consideremos

$$\cdots D^{1\times q_2'} \xrightarrow{g_2'} D^{1\times q_1'} \xrightarrow{g_1'} D^{1\times p} \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0,$$

otra resolución libre del D-módulo M. Existen $f_0, f_1, \ldots$ y $f_0', f_1', \ldots$ homomorfismos de D-módulos tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{g_2} & D^{1\times q_1} & \xrightarrow{g_1} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \| & & \\
\cdots & \xrightarrow{g_2'} & D^{1\times q_1'} & \xrightarrow{g_1'} & D^{1\times p} & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{g_2'} & D^{1\times q_1'} & \xrightarrow{g_1'} & D^{1\times p} & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1'} & & \downarrow{\scriptstyle f_0'} & & \| & & \\
\cdots & \xrightarrow{g_2} & D^{1\times q_1} & \xrightarrow{g_1} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmutan. Definimos H, H' y R' como las matrices de representación de los homomorfismos f_0, f_0' y f respectivamente, se sigue $RH' = R'$ y $R'H = R$. Con esto se ha demostrado que el D-módulo M no depende la matriz que representa el sistema.

Describiremos el D-módulo izquierdo $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$ en términos sus generadores y las relaciones entre ellos. Tomando $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango pleno, asumiendo $q \leq p$ (si $q \geq p$, aplicando el algoritmo de la división de la teoría de las bases de Gröbner en las filas de la matriz R, el sistema es llevado a un sistema de tamaño $q' \times p$ equivalente al sistema inicial, donde $q' \leq p$) y el D-módulo $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$, el módulo asociado al SLF $Ry = 0$, el cual es finitamente generado con presentación libre finita:

$$0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

La idea central del presente capítulo, y en general de la tesis, es desarrollar herramientas para generalizar el teorema de Serre.

Consideremos $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ la base canónica de $D^{1\times p}$ y $y_i = \pi(e_i) \in M$ para todo $i = 1, ..., p$. Dado $m \in M$ tenemos $m = \pi(\lambda)$ para un cierto $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in D^{1\times p}$ luego

$$m = \pi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \pi\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i.$$

Si $R_{i\bullet}$ denota la i-esima fila de la matriz R, entonces $\pi(R_{i\bullet}) = 0$, para ser más exactos, si tomamos $\{f_i\}_{1\leq i\leq q}$ como la base canónica de $D^{1\times q}$ entonces:

$$0 = \pi(f_{\mathrm{j}}.R) = \sum_{1\leq i\leq p} R_{ji}\pi(e_i) = \sum_{1\leq i\leq p} R_{ji}y_i \qquad \text{para} \quad j = 1, ..., q,$$

de esta forma podemos observar que los generadores $\{y_i\}_{1\leq i\leq p}$ de M y cualquier combinación lineal de ellos satisfacen el sistema lineal funcional $Ry = 0$.

Sean $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$; $0 \leq r \leq q$, $P = (\ R\ \ -\Lambda\ ) \in D^{q\times(p+q-r)}$, consideremos el D-módulo $E := D^{1\times(p+q-r)} \setminus (D^{1\times q}P)$ finitamente presentado por la matriz de rango pleno P y la siguiente sucesión exacta corta de D-módulos

$$0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.P} D^{1\times(p+q-r)} \xrightarrow{\pi'} E \longrightarrow 0,$$

tomando $\pi' : D^{1\times(p+q-r)} \longrightarrow E$ como la proyección canónica sobre E.

Nos centraremos en estudiar la relación entre los D-módulos M y E.

Por la definición de la matriz P tenemos; $R = PX$ para $X = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix} \in D^{(p+q-r)\times p}$,

induciendo el siguiente diagrama conmutativo de D-módulos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{\cdot P} & D^{1\times(p+q-r)} & \xrightarrow{\pi'} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \cdot X\downarrow & & \beta\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{\cdot R} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

El homomorfismo de D-módulos $\beta:\ E \longrightarrow M$ se define por:

$$\beta(\pi'(\mu_1,\mu_2)) = \pi((\mu_1,\mu_2).X) = \pi(\mu_1)\ ;\ \ \forall \mu_1 \in D^{1\times p},\ \ \forall \mu_2 \in D^{1\times q-r}.$$

de lo anterior β es un homomorfismo de D-módulos, veamos que está bien definido y luego probaremos que es sobreyectivo: supongamos $\pi'(\mu_1,\mu_2) = \pi'(\alpha_1,\alpha_2)$, entonces para algún $\lambda \in D^{1\times q}$ se tiene $(\mu_1-\alpha_1,\mu_2-\alpha_2) = \lambda P \ \Rightarrow\ (\mu_1-\alpha_1) = \lambda R$, luego $\pi(\mu_1) = \pi(\alpha_1)$.

Para cada $m \in M$ existe $\mu \in D^{1\times p}$ tal que $\pi(\mu) = m$. Tomando $(\mu,0) \in D^{1\times(p+q-r)}$ tenemos $\beta(\pi'(\mu,0)) = \pi(\mu) = m$. Se ha probado, $Im\beta = M$.

Así obtenemos la siguiente sucesión exacta de D-módulos

$$0 \longrightarrow \ker(\beta) \xrightarrow{\widehat{i}} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Estudiaremos el $\ker(\beta)$. Un elemento $\pi'(\mu_1,\mu_2) \in \ker(\beta)$ satisface $\pi(\mu_1) = 0$ es decir $\mu_1 = uR$ para algún $u \in D^{1\times q}$. Supongamos $\pi'(uR,\mu_2) = \pi'(\delta_1,\delta_2)$ entonces

$$\pi'(uR,\mu_2) = \pi'(\delta_1,\delta_2)\ \Rightarrow\ (uR-\delta_1,\mu_2-\delta_2) = \lambda P \Rightarrow \delta_1 = u'R,$$

debido a $\pi(\delta_1) = 0$, se tiene que δ_1 y 0 están en la misma clase en el D-módulo M, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer $\delta_1 = 0$. En consecuencia $\lambda = u$ y $\delta_2 = \mu_2 - u\Lambda$, obteniendo la siguiente caracterización

$$\begin{aligned} \ker(\beta) &= \{\pi'(uR,\mu_2-u\Lambda) = 0 \ \mid\ u \in D^{1\times q},\ \mu_2 \in D^{1\times(q-r)}\} \\ &= \{\pi'(0,\mu_2-u\Lambda) = 0 \ \mid\ u \in D^{1\times q},\ \mu_2 \in D^{1\times(q-r)}\} \\ &= \{\pi'(0,\nu) = 0 \ \mid\ \ \nu \in D^{1\times(q-r)}\}. \end{aligned}$$

Si definimos el homomorfismo $\zeta:\ D^{1\times(q-r)} \longrightarrow \ker\beta$ por $\zeta(v) := \pi'(0,v)$ para cada $v \in D^{1\times(q-r)}$, resulta claro apartir de lo anterior que ζ es un homomorfismo de D-módulos sobreyectivo. Sea $v \in D^{1\times(q-r)}$ tal que

$$\zeta(v) = 0\ \Rightarrow\ \pi'(0,v) = 0\ \Rightarrow\ 0 = uR \text{ y }\ v = -u\Lambda,$$

dado que las filas de la matriz R son L.I. $u = 0$ y $v = 0$. Se ha probado que ζ es un isomorfismo, lo que implica la sucesión de exacta de D-módulos

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\zeta} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

La sucesión (2.2) es llamada una ***extensión de Baer*** de $D^{1\times(q-r)}$ por M o también la llamaremos simplemente una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M.

Para $\Theta \in D^{p\times(q-r)}$ se introducen las siguientes matrices:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + R\Theta \in D^{q\times(q-r)}, \qquad \bar{P} = \begin{pmatrix} R & -\bar{\Lambda} \end{pmatrix} \in D^{q\times(p+q-r)}.$$

Sean $\bar{E} = D^{1\times(p+q-r)}/\left(D^{1\times q}\bar{P}\right)$ el D-módulo finitamente presentado por la matriz $\bar{P}$ y $\bar{\pi} : D^{q\times(p+q-r)} \longrightarrow \bar{E}$ el homomorfismo canónico sobre $\bar{E}$ definido por $\bar{\pi}(v) = v + D^{1\times q}\bar{P}$ la clase del elemento $v \in D^{1\times(p+q-r)}$.

De acuerdo a la construcción anterior el D-módulo $\bar{E}$ define la extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M

$$\bar{e} : \quad 0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\bar{\zeta}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\beta}} M \longrightarrow 0,$$

donde $\bar{\zeta} : D^{1\times(q-r)} \longrightarrow \ker\bar{\beta}$ está definida por $\bar{\zeta}(v) = \bar{\pi}(0, v),\ v \in D^{1\times(q-r)}$ y $\bar{\beta} : \bar{E} \longrightarrow M$ está definida por $\bar{\beta}(\pi'(\mu_1, \mu_2)) = \pi((\mu_1, \mu_2).X) = \pi(\mu_1)$ para cada $\mu_1 \in D^{1\times p}$ y $\mu_2 \in D^{1\times(q-r)}$.

La identidad $\bar{P}V = P$ con $V = \begin{pmatrix} I_p & \Theta \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{\cdot\bar{P}} & D^{1\times(p+q-r)} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \cdot V} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{\cdot P} & D^{1\times(p+q-r)} & \xrightarrow{\pi'} & E & \longrightarrow & 0\ ,
\end{array}$$

el D-homomorfismo $\tau : \bar{E} \longrightarrow E$ está definido por

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{\pi}(\mu_1, \mu_2)) &= \pi'((\mu_1, \mu_2).V) \\
&= \pi'(\mu_1 \quad \mu_1\Theta + \mu_2), \qquad \forall\mu_1 \in D^{1\times p}, \quad \forall\mu_2 \in D^{1\times(q-r)}.
\end{aligned}$$

Observación 7. Veamos que el homomorfismo D-módulos τ está bien definido: sean $(\mu_1, \mu_2), (\mu_1', \mu_2') \in D^{1\times(p+q-r)}$ tales que $\bar{\pi}(\mu_1, \mu_2) = \bar{\pi}(\mu_1', \mu_2')$, entonces $(\mu_1 - \mu_1', \mu_2 - \mu_2') = \lambda\bar{P}$ para algún $\lambda \in D^{1\times q}$. De la identidad $\bar{P}V = P$ tenemos $(\mu_1 - \mu_1', \mu_2 - \mu_2').V = \lambda P$, entonces $\pi'((\mu_1, \mu_2).V) = \pi'((\mu_1', \mu_2').V)$.

El D-homomorfismo τ induce el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\bar{\zeta}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\zeta} & E & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Veamos que el diagrama es conmutativo:

Para todo $\xi \in D^{1\times q}$, $\tau(\bar{\zeta}(\xi)) = \tau(\bar{\pi}(0, \xi)) = \pi'(0, \xi) = \zeta(\xi)$.

Ahora si $\bar{\pi}(\mu_1, \mu_2) \in \bar{E}$ entonces;

$$\begin{aligned}
\beta(\tau(\bar{\pi}(\mu_1, \mu_2))) = \beta(\pi'(\mu_1, \mu_2).V) &= \pi((\mu_1, \mu_2).V.X) \\
&= \pi((\mu_1, \mu_2).X) \\
&= \pi(\mu_1) = \bar{\beta}(\bar{\pi}(\mu_1, \mu_2)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto las extensiones de $D^{1\times(q-r)}$ por M e y $\bar{e}$ son equivalentes y generan la misma clase de equivalencia en $e_{_D}(D^{1\times q}, M)$, en consecuencia τ es un isomorfismo de D-módulos.

El resultado anterior muestra que los D-módulos E y $\bar{E}$ definidos por las matrices Λ y $\bar{\Lambda} = \Lambda + R\Theta$ respectivamente, definen extensiones que pertenecen a la misma clase de equivalencia en $e_{_D}(M, D^{1\times(q-r)})$, para todo $\Theta \in D^{p\times(q-r)}$.

Ahora nos concentraremos en estudiar otra relación entre $e_{_D}(D^{1\times q}, M)$ y las matrices Λ y $\bar{\Lambda}$.

Si al complejo definido por la sucesión exacta (2.1) aplicamos el funtor contravariante $Hom(-, D^{1\times(q-r)})$ tenemos

$$ext^{1}_{_D}(M, D^{1\times(q-r)}) \cong D^{q\times(q-r)}\backslash(RD^{p\times(q-r)}). \tag{2.3}$$

En consecuencia el $ext^{i}_{_D}(M, D^{1\times(q-r)}) = 0$ para $i \geq 2$, dado que la matriz R es de rango pleno, e.d., sus filas son L.I.

Observación 8. Si consideramos el D-módulo $ext^{i}_{_D}(N, D)$ para $i \in \mathbb{N}$, donde el D-módulo $N := D^q/(RD^p)$ es llamado el aniquilador (anulador) transpuesto del D-módulo $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$, el cual caracteriza las propiedades del módulo M ([6]), para ser más exactos, si $\mathfrak{F}$ es un D-módulo a izquierda, consideremos M el D-módulo asociado al sistema $Ry = 0$ y definimos $\ker_{\mathfrak{F}}(R.) := \{\eta \in \mathfrak{F}^p \mid R\eta = 0\}$, las soluciones del sistema $Ry = 0$ para $y \in \mathfrak{F}$. Esto implica que el $\ker_{\mathfrak{F}}(R.)$ es isomorfo al D-módulo generado por todos los homomorfismo de M en $\mathfrak{F}$, e.d., $ker_{\mathfrak{F}}(R.) \cong Hom(M, \mathfrak{F})$. Dado que M tiene presentación libre finita tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D^{1\times p_l} \xrightarrow{.R_l} \ldots \longrightarrow D^{1\times p_1} \xrightarrow{.R_1} D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times p} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

tomando el complejo generada por esta sucesión y aplicando el funtor contravariante $Hom(_\,, \mathfrak{F})$ se sigue

$$ext^{0}_{_D}(M, \mathfrak{F}) = Hom(M, \mathfrak{F}) \cong ker_{\mathfrak{F}}(R.) = \{\eta \in \mathfrak{F}^p \mid Reta = 0\}.$$

Este resultado clásico, de álgebra homológica, fue desarrollado por Malgrange, véase [15]. En particular, tenemos el isomorfismo de D-módulos $\omega : \ker_{\mathfrak{F}}(R.) \longrightarrow Hom(M, \mathfrak{F})$ definido por $\omega(\eta)(\pi(\lambda)) := \lambda\eta$, con inverso $\omega^{-1} : Hom(M, \mathfrak{F}) \longrightarrow \ker_{\mathfrak{F}}(R.)$ definido por $\omega^{-1}(f) := [f(\pi(e_1)), \ldots, f(\pi(e_1))]^T$. Podemos observar que las soluciones del sistema lineal están totalmente definidas por los D-módulos M y $\mathfrak{F}$. En consecuencia el D-módulo aniquilador N caracteriza las propiedades estructurales del módulo $\ker_{\mathfrak{F}}(R.)$, véase [6].

Sea $\rho : D^{q\times(q-r)} \longrightarrow ext^{1}_{_D}(M, D^{1\times(q-r)}) = D^{q\times(q-r)}/(RD^{p\times(q-r)})$ el homomorfismo canónico, es decir $\rho(\Lambda) = \Lambda + RD^{p\times(q-r)}$ para $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ entonces

$$\rho(\Lambda + R\Theta) = \rho(\Lambda) + \rho(R\Theta) = \rho(\Lambda),$$

para ser más exactos Λ y $\bar{\Lambda}$ pertenecen a la misma clase en $ext^{1}_{_D}(M, D^{1\times(q-r)})$.

Se ha probado que $\rho(\Lambda) \in ext^{1}_{_D}(M, D^{1\times(q-r)})$ define una única clase de equivalencia $[e\,]$, donde e es una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M y se tiene

$$e: \quad 0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\zeta} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Veamos el recíproco, e.d., si

$$e' : \quad 0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\theta} F \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

es una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M, entonces existen $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$, y $\eta : \ E \longrightarrow F$ con $E = D^{1\times(p+q-r)}/\left(D^{1\times q}P\right)$, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\zeta} & E & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\theta} & F & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

conmuta, e.d., e y e' son extensiones de $D^{1\times(q-r)}$ por M equivalentes.

Considerando $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ la base canónica de $D^{1\times p}$. Para cada $\pi(e_i) \in M$ existe $\upsilon_i \in F$ tal que $\epsilon(\upsilon_i) = \pi(e_i)$, entonces

$$\epsilon(\sum_{i=1}^{p} R_{ji}\upsilon_i) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\epsilon(\upsilon_i) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\pi(e_i) = \pi(\sum_{i=1}^{p} R_{ji}e_i) = \pi(R_{j\bullet}) = 0$$

para $j = 1, ..., q$, donde $R_{j\bullet}$ denota la fila j-ésima de la matriz R.

Dado que $Im(\theta) = \ker(\epsilon)$ y θ es un homomorfismo inyectivo, existe un único $\lambda_j \in D^{1\times(q-r)}$ para cada $j = 1, ..., q$ tal que $\theta(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\upsilon_i$. Escribiendo cada λ_j como columna se define la matriz $\Lambda := (\lambda_1^T, ..., \lambda_q^T)^T \in D^{q\times(q-r)}$ y tenemos la clase $\rho(\Lambda) \in ext_D^1(M, D^{1\times(q-r)})$.

Ahora veremos que la clase de Λ en $ext_D^1(M, D^{1\times(q-r)})$ está bien definida, es decir, $\rho(\Lambda)$ no depende de la selección de las preimágenes de los elmentos del conjunto $\{\pi(e_i)\}_{1\leq i\leq p}$.

Sea $\bar{\upsilon}_i \in F$ tal que $\epsilon(\bar{\upsilon}_i) = \pi(e_i)$ para $1 \leq i \leq p$. Usando el argumento anterior, existe $\bar{\lambda}_j \in D^{1\times(q-r)}$ tal que $\theta(\bar{\lambda}_j) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\epsilon(\bar{\upsilon}_i)$ para $1 \leq j \leq q$. Como $\epsilon(\upsilon_i) = \epsilon(\bar{\upsilon}_i) \Rightarrow \epsilon(\bar{\upsilon}_i - \upsilon_i) = 0$, es decir $\bar{\upsilon}_i - \upsilon_i \in \ker(\epsilon) = Im(\theta)$, esto implica la existencia de $\gamma_i \in D^{1\times(q-r)}$ tal que $\bar{\upsilon}_i = \upsilon_i + \theta(\gamma_i)$ para $1 \leq i \leq p$ y

$$\begin{aligned}
\theta(\bar{\lambda}_j) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\bar{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}(\upsilon_i + \theta(\gamma_i)) &= \sum_{i=1}^{p} R_{ji}(\upsilon_i) + \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\theta(\gamma_i) \\
&= \theta(\lambda_j) + \theta(\sum_{i=1}^{p} R_{ji}\gamma_i) \\
&= \theta(\lambda_j + \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\gamma_i).
\end{aligned}$$

Si introducimos las matrices

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_q \end{pmatrix} \in D^{q\times(q-r)}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \in D^{p\times(q-r)}$$

dado que θ es inyectiva, se tiene $\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\gamma_i$, para $j = 1, ..., q$, luego $\bar{\Lambda} = \Lambda + R\Gamma$ y en consecuencia $\rho(\bar{\Lambda}) = \rho(\Lambda)$. De lo anterior se tiene la unicidad del elemento $\rho(\Lambda) \in ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$ definido por una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M.

Veamos que dos extensiones de $D^{1\times(q-r)}$ por M equivalentes definen el mismo elemento $\rho(\Lambda) \in ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$.

Sea e'' una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M equivalente a e', entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\theta} & F & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\theta'} & F' & \xrightarrow{\epsilon'} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde $\psi : \ F \longrightarrow F'$ es un D-isomorfismo. Del diagrama tenemos $\epsilon' \circ \psi = \epsilon$, entonces $\epsilon'(\psi(\upsilon_i)) = \epsilon(\upsilon_i) = \pi(e_i) \qquad i = 1, ...p$, y

$$\theta'(\lambda_j) = \psi(\theta(\lambda_j)) = \psi(\sum_{i=1}^{p} R_{ji}\upsilon_i) = \sum_{i=1}^{p} R_{ji}\psi(\upsilon_i) \qquad \text{para todo } \ 1 \leq j \leq q,$$

lo cual define la misma matriz $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ y por lo tanto la misma clase de equivalencia $\rho(\Lambda) \in ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$ [22].

Se ha probado probado que toda clase de equivalencia $[e\ ] \in e_{D}(D^{1\times(q-r)}, M)$ define un único $\rho(\Lambda) \in ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$.

Lo realizado anteriormente implica la existencia de una correspondencia biyectiva entre los elementos del D-módulo $ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$ y $e_{D}(D^{1\times(q-r)}, M)$ (el conjunto formado por las clases de equivalencia de $D^{1\times(q-r)}$ por M.

Una consecuencia importante del resultado anterior, es que toda clase de equivalencia definida por una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M contiene una extensión definido por la sucesión exacta

$$e: \quad 0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\zeta} E_{\rho(\Lambda)} \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

donde $E_{\rho(\Lambda)} := D^{1\times(p+q-r)} / \left(D^{1\times q}\,(R \mid -\Lambda)\right)$.

Teorema 8. *El conjunto de las clases de equivalencia de las extensiones de $D^{q\times(q-r)}$ por M, $e_{D}(D^{1\times(q-r)}, M)$, tiene estructura de grupo abeliano.*

Esto ya se estableció de manera general en el primer capitulo.

Teorema 9. *Los grupos abelianos $e_{D}(D^{1\times(q-r)}, M)$ y $ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)})$ son isomorfos.*

Demostración. Véase la proposición 4. □

Observación 9. Un resultado conocido de álgebra homológica

$$ext^1_{D}(M, D^{1\times(q-r)}) \cong ext^1_{D}(M, D) \otimes_{D} D^{1\times(q-r)} \cong ext^1_{D}(M, D)^{1\times(q-r)}.$$

Si hacemos $r = q - 1$ en (2.3) tenemos $ext^1_{D}(M, D) = D^q/(RD^p)$.

Corolario 4. *$ext^1_D(M, D^{1\times(q-r)}) = 0$ si, y solamente si, toda extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M es hendida.*

Observación 10. El D-módulo $E_{\rho(0)} = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}\,(R\ \ 0)) = D^{1\times(q-r)} \oplus M$ define la extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\zeta} M \oplus D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Si definimos el homomorfismo $\omega:\ M \oplus D^{1\times(q-r)} \longrightarrow D^{1\times(q-r)}$ por $\omega(b,\nu) = \nu$, tenemos $\omega\zeta = i_M$. Se ha probado que la sucesión es hendida, en consecuencia cualquier extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M hendida es equivalente a $E_{\rho(0)}$.

Lema 3. *Sean $R \in D^{q\times p}$, $R' \in D^{q'\times p}$ dos matrices las cuales satisfacen $D^{1\times q}R \subseteq D^{1\times q'}R'$ y $R'' \in D^{q\times q'}$, $T \in D^{r\times q'}$ tal que $R = R''R'$ y $\ker_D(.R') = D^{1\times r}T$. Consideremos las proyecciones canónicas*

$$\pi_1:\ D^{1\times q'}R' \longrightarrow M_1 = D^{1\times q'}R'/(D^{1\times q}R) \tag{2.5}$$

$$\pi_2:\ D^{1\times q'} \longrightarrow M_2 = D^{1\times q'}/(D^{1\times q}R'' + D^{1\times r}T). \tag{2.6}$$

Entonces el D-homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi:\ M_2 & \longrightarrow & M_1 \\ m_2 = \pi_2(\lambda) & \longmapsto & \psi(m_2) = \pi_1(\lambda R') \end{array}$$

es un isomorfismo y su inverso está definido por

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1}:\ M_1 & \longrightarrow & M_2 \\ m_1 = \pi_1(\lambda R') & \longmapsto & \psi(m_1) = \pi_2(\lambda). \end{array}$$

Es decir, se tiene el isomorfismo de D-módulos:

$$(D^{1\times q'}R')/(D^{1\times q}R) \cong D^{1\times q'}/(D^{1\times q}R'' + D^{1\times r}T) \tag{2.7}$$

Demostración. Miremos la buena definición del homomorfismo ψ.

Sean $m_2 \in M_2$ y $\lambda,\ \lambda' \in D^{1\times q'}$ tales que $m_2 = \pi_2(\lambda) = \pi_2(\lambda')$. Entonces $\lambda - \lambda' \in D^{1\times q}R'' + D^{1\times r}T$, lo que a su vez implica $\lambda - \lambda' = uR'' + vT$ para algún $u \in D^{1\times q}$ y algún $v \in D^{1\times r}$. Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda')R' = u(R''R') + v(TR') = uR \ &\Rightarrow\ \pi_1(\lambda R' - \lambda' R') = 0 \\ &\Rightarrow\ \pi_1(\lambda R') = \pi_1(\lambda' R'). \end{aligned}$$

Se ha probado que ψ está bien definido.

Veamos que su inverso ψ^{-1} está bien definido.

Sea $m_1 \in M_1$. Supongamos $\mu,\ \mu' \in D^{1\times q'}$ tal que $m_1 = \pi_1(\mu R') = \pi_1(\mu' R')$, en consecuencia $(\mu - \mu')R' \in D^{1\times q}R$, entonces existe $u \in D^{1\times q}$ tal que $(\mu - \mu')R' = uR = (uR'')R'$, lo cual implica $\mu - \mu' - uR'' \in \ker R'$.

De lo anterior, existe $v \in D^{1\times r}$ tal que

$$\mu - \mu' - uR'' = vT \ \Rightarrow\ \mu - \mu' = uR'' + vT \Rightarrow \pi_2(\mu) = \pi_2(\mu')$$

demostrando la buena definición de ψ^{-1}.

Por la definición de los homomorfismos ψ y ψ^{-1}, se tiene $\psi^{-1}\psi = i_{M_1}$ y $\psi\psi^{-1} = i_{M_2}$. □

Ejemplo 6. Sea $R \in D^{q\times p}$. Si escribimos la matriz R de la forma:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \qquad R_1 \in D^{r\times p}, \qquad R_1 \in D^{(q-r)\times p},$$

tenemos $D^{1\times r}R_1 \subseteq D^{1\times q}R = D^{1\times r}R_1 + D^{1\times(q-r)}R_2 \subseteq D^{1\times p}$, utilizando el teorema fundamental de isomorfismos tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (D^{1\times q}R)/(D^{1\times r}R_1) \xrightarrow{\alpha} M_1 = D^{1\times p}/(D^{1\times r}R_1) \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

donde α está definida por $\alpha(\pi_1(\mu R)) = \pi_1(\mu R)$, tomando

$$\pi_1 : \ D^{1\times p} \longrightarrow M_1 = D^{1\times p}/(D^{1\times r}R_1)$$

como la proyección canónica y $\beta : \ M_1 \longrightarrow M$ definida por $\beta(\pi_1(\lambda)) = \pi(\lambda)$.

Sea $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \end{pmatrix} \in D^{s\times q}$, donde $S_1 \in D^{s\times r}$ y $S_2 \in D^{s\times(q-r)}$, tal que $\ker_D(.R) = D^{1\times s}S$ y sea $T = \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} \in D^{(r+s)\times q}$, con $L = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in D^{r\times q}$.

Para cada $\lambda = (\lambda_r \ \ \lambda_s)$ con $\lambda_r \in D^{1\times r}$ y $\lambda_s \in D^{1\times s}$ tenemos

$$(\lambda_r \ \ \lambda_s)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix} = (\lambda_r - \lambda_s S_1 \ \ \lambda_s)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

entonces $\left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\right)$

Para cada $\lambda = (\lambda_r \ \ \lambda_s)$ con $\lambda_r \in D^{1\times r}$ y $\lambda_s \in D^{1\times s}$ tenemos

$$(\lambda_r \ \ \lambda_s)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} = (\lambda_r - \lambda_s S_1 \ \ \lambda_s S_2)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix},$$

se sigue $\left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix}\right) = \left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\right)$ De lo anterior $R_1 = LR$, por el lema (3) tenemos

$$\begin{aligned}
(D^{1\times q}R)/(D^{1\times r}R_1) &\cong D^{1\times q}/\left(D^{1\times r}L + (D^{1\times s}S)\right) \\
&\cong D^{1\times q}/\left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\cong D^{1\times q}/\left(D^{1\times(r+s)}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\cong D^{1\times(q-r)}/(D^{1\times}S_2).
\end{aligned}$$

Sea $\psi : \ Q := D^{1\times(q-r)}/(D^{1\times}S_2) \longrightarrow (D^{1\times q}R)/(D^{1\times r}R_1)$ el isomorfismo de D-módulos definido en la parte anterior, entonces tenemos la extensión de Q por M

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha\circ\psi} M_1 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Si la matriz R es de rango pleno, e.d., $\ker_D(.R) = 0$, entonces $Q = D^{1\times(q-r)}$, lo cual define la siguiente extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\alpha\circ\psi} M_1 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0. \tag{2.8}$$

Veamos el dual del ejemplo anterior.

Ejemplo 7. Sea $R \in D^{q\times p}$ una matriz con $R = (R_1 \;\; R_2)$, donde $R_1 \in D^{q\times r}$ y $R_2 \in D^{q\times(p-r)}$. Definimos $Q_1 \in D^{t\times q}$ una matriz tal que $\ker_D(.R_1) = D^{1\times t}Q_1$. Repitiendo el proceso anterior para los D-módulo $N_1 = D^{1\times r}/(D^{1\times q}.R_1)$ (resp., $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$) y M (resp.,E), tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \ker(\beta) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\beta} N_1 \longrightarrow 0.$$

Donde β es el homomorfismo definido por $\beta(\pi(\lambda_1 \;\; \lambda_2)) = \kappa_1(\lambda_1)$ para todo $\lambda_1 \in D^{1\times r}$ y $\lambda_2 \in D^{1\times(p-r)}$, con $\kappa_1 :\; D^{1\times r} \longrightarrow N_1$ el homomorfismo canónico sobre N_1. Ahora,

$$\begin{aligned}\ker(\beta) &= \{\pi(\lambda_1 \;\; \lambda_2) \mid \lambda_1 \in D^{1\times r},\ \lambda_2 \in D^{1\times(p-r)} \text{ y } \kappa_1(\lambda_1) = 0\}\\ &= \{\pi(\mu R_1 \;\; \lambda_2) \mid \mu \in D^{1\times q} \text{ y } \lambda_2 \in D^{1\times(p-r)}\}.\end{aligned}$$

Sean $R' = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & I_{(p-r)} \end{pmatrix} \in D^{(q+t)\times(q+p-r)}$, $R'' = (I_q \;\; R_2)$ tal que $R = R''R'$. Aplicando el Lema 3 tenemos:

$$\begin{aligned}\ker(\beta) &= D^{q+p-r}\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & I_{(p-r)} \end{pmatrix} / \left(D^{1\times q}R\right)\\ &\cong D^{q+p-r} / \left(D^{1\times q}R'' + D^{1\times t}(Q_1 \;\; 0_{p-r})\right)\\ &\cong D^{q+p-r} / \left(D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & R_2 \\ Q_1 & 0 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Si tomamos el D-homomorfismo

$$\begin{aligned}\varepsilon :\; D^{1\times(q+p-r)} &\longrightarrow D^{1\times(q+p-r)} / \left(D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ Q_1 & Q_1R_2 \end{pmatrix}\right)\\ (\nu_1 \;\; \nu_2) &\longmapsto (\nu_1 \;\; \nu_2)\begin{pmatrix} I_q & R_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix} + D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ Q_1 & Q_1R_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

este resulta sobreyectivo debido a la existencia de la matriz inversa $\begin{pmatrix} I_q & -R_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ y $\ker(\varepsilon) = D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & R_2 \\ Q_1 & 0 \end{pmatrix}$, en consecuencia

$$D^{1\times(q+p-r)} / \left(D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ Q_1 & Q_1R_2 \end{pmatrix}\right) \cong D^{1\times(q+p-r)} / \left(D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & R_2 \\ Q_1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

lo que a su ves implica

$$\begin{aligned}\ker(\beta) &\cong D^{1\times(q+p-r)} / \left(D^{1\times(q+t)}\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ Q_1 & Q_1R_2 \end{pmatrix}\right)\\ &\cong D^{1\times(q+p-r)} / \left(D^{1\times q} \;\; D^{1\times t}Q_1R_2\right)\\ &\cong D^{1\times(p-r)} / \left(D^{1\times t}Q_1R_2\right).\end{aligned}$$

Si $L = D^{1\times(p-r)}/\left(D^{1\times t}Q_1R_2\right)$, denota el D-módulo finitamente presentado por la matriz Q_1R_2, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N_1 \longrightarrow 0 \ ,$$

donde $\alpha = i \circ \psi$ y $\psi : L \longrightarrow \ker(\beta)$ es el isomorfismo de la parte anterior. Finalmente si R_2 es una matriz de rango pleno, e.d., $\ker(.R_2) = 0$, entonces $L = D^{1\times(p-r)}$. En consecuencia M es una extensión de $D^{1\times(p-r)}$ por N_1.

2.2. Teorema de Serre

En la presente sección estableceremos ciertas condiciones sobre los D-módulos M y $E = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P)$, donde $P = (R \ \ -\Lambda)$ y $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$, para obtener el teorema reducción de Serre, e.d., se establecerán condiciones sobre los D-módulos M y E para que la matriz P resulte invertible.

Proposición 13. *Sea D un dominio noetheriano, $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango pleno, es decir $\ker_D(.R) = 0$ y $M = D^{1\times q}/(D^{1\times p}R)$ el D-módulo finitamente presentado por la matriz R. Entonces:*

1. *M es un D-módulo proyectivo si, y solamente si, M es un D-módulo establemente libre de rango $p-q$.*
2. *M es un D-módulo establemente libre de rango $p-q$ si, y solamente si, R admite inversa a derecha sobre D, es decir, existe una matriz $S \in D^{p\times q}$ tal que $RS = I_q$.*
3. *M es un D-módulo libre de rango $p-q$ si, y solamente si, existe una matriz $U \in GL_p(D)$ tal que*

$$RU = (I_q \ \ 0)$$

Si escribimos $U = (S \ \ Q)$, donde $S \in D^{p\times q}$ y $Q \in D^{p\times(p-q)}$ entonces

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M & \longrightarrow & D^{1\times(p-q)} \\ & \pi(\lambda) & \longmapsto & \lambda Q \end{array}$$

es un D-isomorfismo, con isomorfismo inverso $\varphi^{-1}: D^{1\times(p-q)} \longrightarrow M$ definido por $\varphi^{-1}(\mu) = \pi(\mu T)$. La matriz $T \in D^{(p-q)\times p}$ está definida por

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} \in D^{p\times p}$$

Observación 11. Si el D-módulo M es proyectivo se tiene: toda extensión de $D^{1\times(p-r)}$ por M es hendida si, y sólo si, el D-módulo $E = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P)$ finitamente presentado por la matriz $P = (R \ \ -\Lambda)$ con $\Lambda \in D^{q\times r}$ es establemente libre de rango $p-r$ si, y sólo si, la matriz P es invertible.

Demostración. 1. ($\Leftarrow$): Todo D-módulo establemente libre es proyectivo.

($\Rightarrow$): Supongamos que el D-módulo M es proyectivo, entonces la sucesión exacta

$$e: \quad 0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times q} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

resulta hendida, en consecuencia $M \oplus D^{1\times q} \cong D^{1\times p}$ lo cual demuestra que el D-módulo M es establemente libre de rango $p-q$.

2. ($\Rightarrow$): Dado que el D-módulo M es establemente libre, la sucesión

$$e: \quad 0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times q} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

resulta hendida. En consecuencia existe $\phi: D^{1\times p} \longrightarrow D^{1\times q}$ tal que $\phi(vR) = v$ para cada $v \in D^{1\times q}$. Si consideramos $\{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ y $\{f_i\}_{1\leq i\leq q}$ la base canónica de $D^{1\times p}$ y $D^{1\times q}$ respectivamente, entonces

$$f_i = \phi(f_i R) = \phi\left([R_{i1}, R_{i2}, ..., R_{ip}]\right) = R_{i1}\phi(e_1) + R_{i2}\phi(e_2) + ... + R_{ip}\phi(e_p),$$

lo cual implica $I_q = RS$ donde $S = \begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \vdots \\ \phi(e_p) \end{pmatrix}$

($\Leftarrow$): Supongamos $RS = I_q$. Definimos $\phi: D^{1\times p} \longrightarrow D^{1\times q}$ por $\phi(u) = uS$, entonces $\phi(vR) = (vR)S = v$. En consecuencia la sucesión exacta

$$e: \quad 0 \longrightarrow D^{1\times q} \xrightarrow{.R} D^{1\times q} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

es hendida, luego $M \oplus D^{1\times q} = D^{1\times p}$. Hemos demostrado que M es un D-módulos establemente libre de rango $p-q$.

3. ($\Rightarrow$): Supongamos M un D-módulo libre de rango $p-q$, entonces existen $S \in D^{p\times q}$ y $\phi: M \longrightarrow D^{1\times(p-q)}$ isomorfismo de D-módulos, tales que $RS = I_q$ y $R\begin{pmatrix} \phi(y_1) \\ \phi(y_2) \\ \vdots \\ \phi(y_p) \end{pmatrix} = 0$, donde $y_i = \pi(e_i)$ para $1 \leq i \leq p$.

   Tenemos que $\{\phi(y_i)\}_{1\leq i\leq p}$ es un conjunto de generadores para el D-módulo $D^{1\times(p-q)}$. Usando la teoría del algoritmo de la división de las bases de Gröbner podemos extraer una base de $\{\phi(y_i)\}_{1\leq i\leq p}$, sin perdida de generalidad podemos suponer $\{\phi(y_i)\}_{1\leq i\leq p-q}$ una base para $D^{1\times(p-q)}$.

   Consideremos $\{g_i\}_{1\leq i\leq p-q}$ la base canónica de $D^{1\times(p-q)}$, para cada g_i con $1 \leq i \leq p-q$ existe $v \in D^{1\times(p-q)}$ tal que

$$Av = \begin{pmatrix} \phi(y_1) \\ \vdots \\ \phi(y_{(p-q)}) \end{pmatrix} v = g_i,$$

   en consecuencia A es invertible. Sea B tal que $BA = AB = I_{(p-q)}$, así se define la matriz invertible a derecha $Q := \begin{pmatrix} \phi(y_1) \\ \phi(y_2) \\ \vdots \\ \phi(y_p) \end{pmatrix}$, con inversa $T = (B \;\; 0) \in D^{(q-r)\times p}$.

   La matriz $U \in D^{p\times p}$ definida por $U = (S \;\; Q)$ es invertible con inversa $U^{-1} = \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix}$, a su ves implica $RU = (I_q \;\; 0)$.

   ($\Leftarrow$): Supongamos $U = (S \;\; Q) \in GL_p(D)$ tal que $RU = (I_q \;\; 0)$, con inversa $U^{-1} = \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix}$.

Definimos el homomorfismo de D-módulos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M & \longrightarrow & D^{1\times(p-q)} \\ & \pi(\lambda) & \longmapsto & \lambda Q. \end{array}$$

Supongamos $\pi(\lambda_1),\ \pi(\lambda_2) \in M$, tal que $\pi(\lambda_1) = \pi(\lambda_2)$, entonces $\lambda_1 - \lambda_2 = \nu R$, en consecuencia $(\lambda_1 - \lambda_2)Q = 0$, esto demuestra la buena definición del homomorfismo φ. Tomemos $\pi(\lambda) \in M$, tal que $\lambda Q = 0$ entonces

$$\lambda U = \lambda \begin{pmatrix} S & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = (\lambda S \ \ 0) \begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = (\lambda S)R,$$

lo caul implica $\pi(\lambda) = 0$. Se ha probado que φ es un monomorfismo.

Para cada $\mu \in D^{1\times(p-q)}$ se tiene $\mu = \mu(TQ) = (\mu T)Q$, en consecuencia $\varphi(\pi(\mu T)) = \mu$. Se ha probado que φ es un isomorfismo y con esto el D-módulo M resulta libre de rango $p - q$.

□

Observación 12. Se tiene el isomorfismo de D-módulos

$$M \cong D^{1\times p}Q \cong D^{1\times(p-q)},$$

Q **es llamada una parametrización inyectiva de** M. Denotaremos por $T_{i\bullet}$ para $1 \leq i \leq (p-q)$ la fila i-ésima de la matriz T.

De la identidad $U^{-1}U = I_p$ se sigue $QT + SR = I_p$, en consecuencia $\pi(\lambda) = \pi((\lambda Q)T)$ para cada $\lambda \in D^{1\times p}$. Si hacemos $\mu = \lambda Q$ tenemos:

$$\pi(\lambda) = \mu_1\pi(T_{1\bullet}) + \mu_2\pi(T_{2\bullet}) + \ldots + \mu_{p-q}\pi(T_{(p-q)\bullet}),$$

de donde, $\{\pi(T_{i\bullet})\}_{1\leq i\leq(p-q)}$ forman una base para el D-módulo M.

De la anterior proposición tenemos un teorema importante, el cual se enuncia a continuación:

Teorema 10. (Teorema de Quillen-Suslin) Sea A un dominio de ideales principales y $D = A[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios con coeficientes en A. Ademas, sea $R \in D^{q\times p}$ una matriz con inversa a derecha $S \in D^{p\times q}$, e.d., $RS = I_q$. Entonces, existe una matriz unimodular $U \in GL_p(D)$ la cual satisface $RU = (I_q \ \ 0)$.

Lema 4. *El* $ext^1_D(E, D) = 0$ *si, y solamente si, el* $ext^1_D(M, D)$ *es un* D*-módulo cíclico generado por el* $\rho(\Lambda)$

Demostración. Tenemos

$$ext^1_D(M, D) = D^q/(RD^p), \qquad ext^1_D(E, D) = D^q/(RD^{p+1}).$$

Usando las siguientes contenencias $RD^p \subseteq PD^{p+1} \subseteq D^q$ y el teorema fundamental de isomorfismos, se sigue la sucesión exacta de D-módulos

$$0 \longrightarrow (PD^{p+1})/(RD^p) \xrightarrow{j} ext^1_D(M, D) = D^q/(RD^p) \xrightarrow{\pi} ext^1_D(E, D) \longrightarrow 0,$$

entonces $ext^1_D(E, D) = 0$ si, y solamente si, $ext^1_D(M, D) = (PD^{p+1})/(RD^p)$. Por la definición de la matriz $P = (R \ \ -\Lambda)$ se tiene, que el D-módulo $ext^1_D(M, D) = (PD^{p+1})/(RD^p)$ es generado por la clase residual de $\Lambda \in D^q$, e.d., por $\rho(\Lambda) \in ext^1_D(M, D)$. □

Tomamos D como un anillo de polinomios no conmutativo sobre el cual existe la teoría de las bases de Gröbner (es decir ciertas álgebras de Ore clásicas, [24]), con un algoritmo constructivo para establecer si un D-módulo M finitamente presentado es de torsión, libre de torsión, proyectivo o establemente libre, los cuales son obtenidos en ([24]).

Si R es una matriz de rango pleno, las bases de Gröbner a derecha nos dicen cuando el $ext^1_D(E,D)=0$ o lo que es equivalente cuando, la matriz $P=(R \ \ -\Lambda)$ admite inversa a derecha sobre D.

En [6],[23] se da un algoritmo para calcular la obstrucción de un D-módulo finitamente presentado y así decidir cuando este D-módulo es establemente libre o libre.

Nos gustaría saber cuándo existe $\rho(\Lambda) \in ext^1_D(M, D^{1\times(q-r)})$ tal que el D-módulo $E_{\rho(\Lambda)}$ finitamente presentado por la matriz $P=(R \ \ -\Lambda)$ y el cual define una extensión de $D^{1\times(p-q)}$ por M, resulta libre de torsión, proyectivo, establemente libre o libre. En [25], J. P. Serre estudia cuando el D-módulo $E_{\rho(\Lambda)}$ resulta proyectivo o libre, suponiendo que el D-módulo M tiene dimensión proyectiva igual a 1 sobre el anillo de polinomios $D=k[x_1,\ldots,x_n]$ conmutativos, donde k es un cuerpo. Si D es un anillo tal que todo D-módulo finitamente generado admite una resolución libre finita, entonces la hipótesis del teorema de Serre es equivalente a la existencia de una matriz R de rango pleno tal que $M \cong D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$.

Lema 5. *El $ext^1_D(E,D)=0$ si, y solamente si, E es un D-módulo establemente libre de rango $p-r$.*

Demostración. Dado que $ext^1_D(E,D)=0$ se tiene $D^q = PD^{p+q-r}$, entonces existe $S \in D^{(p+q-r)\times q}$ tal que $PS=I_q$. En consecuencia el D-módulo E es establemente libre de rango $p-r$ (proposición 13) □

Teorema 11. *Sean D un dominio noetheriano, $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango pleno, es decir* $\ker(.R)=0$, $\Lambda \in D^{q-r}$, $P=(R \ \ -\Lambda)$ *y* $M=D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$ $(E=D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P))$ *el D-módulo finitamente presentado por R (resp., P), lo cual genera la extensión de D^{q-r} por M*

$$0 \longrightarrow D^{q-r} \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

entonces, los siguientes resultados son equivalentes:

1. *El D-módulo E es establemente libre de rango $p-r$.*
2. *La matriz $P=(R \ \ -\Lambda) \in D^{q\times(p+q-r)}$ admite inversa a derecha sobre D.*
3. *El D-módulo $ext^1_D(E,D)=D^q/(PD^{p+q-r})=0$.*
4. *El D-módulo $ext^1_D(M,D)=D^q/(RD^p)$, es generado por $\{\tau(\Lambda_{\bullet i})\}_{1\le i\le q-r}$ y $\tau: D^q \longrightarrow ext^1_D(M,D)$ se define como el homomorfismo canónica sobre $ext^1_D(M,D)$.*

   De lo anterior se puede concluir que que el teorema de reducción de Serre sólo dependen de la clase de equivalencia $\rho(\Lambda)$, para $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ y $\rho(\Lambda)$ en el D-módulo:

$$ext^1_D(M, D^{1\times(q-r)}) \cong ext^1_D(M,D)^{1\times(q-r)}$$

es decir sólo depende el vector fila

$$[\tau(\Lambda_{\bullet 1}), \ldots, \tau(\Lambda_{\bullet q-r})] \in ext^1_D(M, D)^{1\times(q-r)}.$$

Demostración. Si probamos (3) $\Leftrightarrow$ (4) el teorema queda demostrado por lo desarrollado en la parte anterior.

De las contenencias de D-módulos

$$RD^p \subseteq PD^{(p+q-r)} = RD^p - \Lambda D^{(q-r)} \subseteq D^q$$

se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow PD^{(p+q-r)}/(RD^p) \xrightarrow{j} ext^1_D(M, D) \xrightarrow{\sigma} ext^1_D(E, D) \longrightarrow 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}
ext^1_D(E, D) = 0 &\Leftrightarrow ext^1_D(M, D) = PD^{(p+q-r)}/(RD^p) \\
&\Leftrightarrow ext^1_D(M, D) = (RD^p - \Lambda D^{(q-r)})/(RD^p) \\
&\Leftrightarrow ext^1_D(M, D) = \left(RD^p - \sum_{i=1}^{p-q}(\Lambda_{\bullet i} D)\right)/(RD^p) \\
&\Leftrightarrow ext^1_D(M, D) = \sum_{i=1}^{p-q}(\Lambda_{\bullet i} D + RD^p) \\
&\Leftrightarrow ext^1_D(M, D) = \sum_{i=1}^{p-q}\tau(\Lambda_{\bullet i})D.
\end{aligned}$$

En consecuencia $ext^1_D(E, D) = 0$ si, y sólo si, el D-módulo izquierdo $ext^1_D(M, D)$ es generado por la familia $\{\tau(\Lambda_{\bullet i})\}_{1\leq i\leq q-r}$ de $q - r$ elementos. □

Observación 13. El resultado anterior fue obtenido por J. P. Serre en [25] para $r = q - 1$, tomando D como un anillo conmutativo. En este caso se obtiene que el D-módulo $ext^1_D(M, D)$ es cíclico y generado por el elemento $\tau(\Lambda)$, donde $\Lambda \in D^q$.

Observación 14. $D = k[x_1, x_2]$ denota el anillo de polinomios conmutativo sobre un cuerpo k. Sean $R \in D^{q\times p}$ y $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$, entonces el submódulo de M, $t(M)$ puede ser distinto de cero, ser libre de torsión o proyectivo, en tales casos el D-módulo M resulta libres por el teorema de Quillen-Suslin. Para más detalles ver [1].

Ejemplo 8. Consideremos la ecuación conjugada de Beltrami con $\sigma = x^{-1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial v}{\partial y} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} & = 0. \end{cases}$$

Sea $D = A_2(\mathbb{Q}(a, b)) = \mathbb{Q}(a, b)[x, y]\langle\partial_x, \partial_y\rangle$ el anillo de polinomios no conmutativo en ∂_x, ∂_y, x y y con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}(a, b)$, los cuales satisfacen:

$$xy = yx, \quad \partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x, \quad \partial_x x = x\partial_x + 1, \quad \partial_y y = y\partial_y + 1.$$

El sistema está definido por la matriz:

$$R = \begin{pmatrix} \partial_x & -x\partial_y \\ \partial_y & x\partial_x \end{pmatrix} \in D^{2\times 2}$$

y el D-módulo $M = D^{1\times 2}/(D^{1\times 2}R)$ finitamente presentado por la matriz R. Si consideramos el vector $\Lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y el D-módulo $E = D^{1\times 3}/(D^{1\times 2}P)$ finita mente presentado por la matriz $P = \begin{pmatrix} R & -\Lambda \end{pmatrix} \in D^{2\times 3}$, para a y b distintos de cero P resulta invertible a derecha con inversa

$$S = \begin{pmatrix} x(ax\partial_x + bx\partial_y + a)/a & -x(ax\partial_x + bx\partial_y + a)/b \\ -(ax\partial_y - bx\partial_x - 2b)/a & (ax\partial_y - bx\partial_x - 2b)/b \\ x(x\partial_x^2 + x\partial_y^2 - 3\partial_x)/a & -(x\partial_x^2 + x\partial_y^2 - 3x\partial_x + 1)/b \end{pmatrix} \in D^{3\times 2},$$

entonces el D-módulo $ext^1_D(M, D) = D^2/(RD^2)$ es cíclico generado por $\tau(\Lambda)$, donde $\tau : D^2 \longrightarrow ext^1_D(M, D) = D^2/(RD^2)$ es la proyección canónica, además el D-módulo E resulta estable mente libre de rango 1 es decir $E \oplus D \cong D^2$.

Corolario 5. *Sean A un anillo conmutativo, $D = A[x]$, $F \in A^{p\times p}$, $R = xI_p - F \in D^{p\times p}$ y $M = D^{1\times p} = (D^{1\times p}R)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe $\Lambda \in D^{p\times(p-r)}$ tal que el D-módulo $E = D^{1\times(2p-r)}/(D^{1\times p}(R \ -\Lambda))$ es estable mente libre de rango $p - r$.*
2. *$\{\tau(\Lambda_{\bullet i})\}_{i=1,\ldots,p-r}$ generan los siguientes D-módulos finitamente presentado:*

$$ext^1_D(M, D) = D^p/(RD^p) \cong D^{1\times p}/(D^{1\times p}R^T).$$

3. *Existe una matriz $\bar{\Lambda} \in A^{p\times(p-r)}$ tal que la matriz*

$$\Omega := \begin{pmatrix} \bar{\Lambda} & F\bar{\Lambda} & F^2\bar{\Lambda} & \ldots & F^{p-1}\bar{\Lambda} \end{pmatrix} \in A^{p\times p(p-r)}$$

admite inversa sobre A.

En particular, si $\bar{\Lambda} \in A^{p\times(p-r)}$ y satisface (2) del corolario anterior entonces $\Lambda = \bar{\Lambda}$ satisface (1).

Demostración. El teorema (11) nos da la equivalencia entre (1) y (2). Para ser más exactos este teorema nos muestra que la propiedad de ser estable mente libre para el D-módulo E depende de las clases residuales $\{\tau(\Lambda_{\bullet i})\}_{i=1,\ldots,p-r}$, e.d., las clases residuales de las columnas del vector $\Lambda \in ext^1_D(M, D)$. Dado que $R = xI_p - F$, sin pérdida de generalidad podemos asumir $\Lambda_{\bullet i} \in A^p$, es decir $\lambda \in A^{p\times(p-r)}$ ya que el D-módulo M está completamente determinado por $\{\tau(\Lambda_{\bullet i})\}_{i=1,\ldots,p-r}$ y

$$\tau(\Lambda_{\bullet i}) = \tau(x\Lambda'_{\bullet i} + \bar{\Lambda}_{\bullet i}) = \tau(x\Lambda'_{\bullet i}) + \tau(\bar{\Lambda}_{\bullet i}) = \tau(\bar{\Lambda}_{\bullet i} + F\Lambda'_{\bullet i})$$

para algún $\Lambda' \in D^{p\times(p-r)}$ y $\bar{\Lambda} \in A^{p\times(p-r)}$. Dado que $P = (R \ -\Lambda)$, se tiene:

$$ext^1_D(E, D) = D^p/(PD^{(2p-r)}) \cong D^{1\times p}/(D^{1\times(2p-r)}P^T),$$

generado por $\{y_i\}_{i=1,\ldots,p}$ las clases de los vectores canónicos $\{e_i\}_{i=1,\ldots,p}$ de $D^{1\times p}$ en $D^{1\times p}/(D^{1\times(2p-r)}P^T)$, los cuales satisfacen $P^T\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = 0$, es decir satisfacen la relación D-lineal

$$\begin{cases} xy - F^T y & = 0 \\ \Lambda^T y & = 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos la segunda ecuación por x y utilizamos la primera, tenemos $\Lambda^T xy = \Lambda^T F^T y = 0$. Si repetimos este paso inductivamente k-veces, tenemos $\Lambda^T F^{T^k} y = 0$.

Por el teorema Caley-Hamilton, existe un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + x^p \in A[x]$ tal que $p(F) = 0$ en consecuencia $F^p = \sum_{k=1}^{p} b_k F^k$, con $b_k \in A$, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} xy - F^T y & = 0 \\ \begin{pmatrix} \Lambda^T \\ \Lambda^T F^T \\ \vdots \\ \Lambda^T F^{T^{p-1}} \end{pmatrix} y & = 0 \end{cases}$$

El D-módulo E es establemente libre de rango $p-r$ si, y solamente si, existe una matriz $S \in D^{(2p-r)\times p}$ tal que $PS = I_p$ si, y solamente si, $y = 0$, ya que $S^T(P^T y) = (PS)^T y = 0$ implica $y = 0$. Por otro lado la Matriz $\begin{pmatrix} \Lambda & F\Lambda & \ldots & F^{p-1}\Lambda \end{pmatrix}^T$ es invertible en A si, y sólo si, $y = 0$. En consecuencia la matriz

$$\begin{pmatrix} \Lambda & F\Lambda & \ldots & F^{p-1}\Lambda \end{pmatrix}$$

es invertible si, y sólo si, $y = 0$. □

2.3. El problema de la reducción de Serre

Daremos algunos teoremas previos encaminados a la generalización del problema de reducción de Serre, al final del documento se dará la generalización del problema de reducción de Serre, la cual resulta como un corolario del teorema (11).

Teorema 12. *Sean D un dominio noetheriano, $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango pleno, $0 \leq r \leq q-1$ y $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ una matriz tal que existe $U \in GL_{p+q-r}(D)$ la cual satisface: $(R \ \ -\Lambda)U = (Iq \ \ 0)$.*

Si descomponemos la matriz unimodular U, como

$$U = \begin{pmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Donde $S_1 \in D^{p\times q}$, $S_2 \in D^{(q-r)\times q}$, $Q_1 \in D^{p\times(p-r)}$, $Q_2 \in D^{(q-r)\times(p-r)}$, si introducimos el D-módulo izquierdo $L = D^{1\times p-r}/(D^{1\times(q-r)}Q_2)$ finitamente presentado por la matriz Q_2, es decir el D-módulo definido por la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\cdot Q_2} D^{1\times(p-r)} \xrightarrow{\kappa} L \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

tomando κ como la proyección canónica sobre L tenemos:

$$M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R) \cong L = D^{1\times(p-r)}/(D^{1\times(q-r)}Q_2). \tag{2.10}$$

Recíprocamente, si se tiene que los D-módulos M y L son isomorfos, es decir $M \cong L$, con L el D-módulo definido por la sucesión exacta (2.9) para algúna matriz $Q_2 \in D^{(q-r)\times(p-r)}$, entonces existen $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ y $U \in GL_{p+q-r}(D)$ tal que $(R \ \ -\Lambda)U = (Iq \ \ 0)$.

Observación 15. Si definimos la matrices $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$ y $U^{-1} = \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix}$, entonces:

$$PQ = 0,\ PS = I_q,\ TS = 0,\ TQ = I_{p-r} \quad \text{y} \quad SP + QT = I_{p+q-r}.$$

Donde $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$, con $T_1 \in D^{(p-r)\times p}$ y $T_2 \in D^{(p-r)\times(q-r)}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos $PU = (I_q \ \ 0)$, aplicando la proposición (13) a la extensión $E = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P)$ de $D^{1\times(q-r)}$ por M, se tiene que el D-módulo E es libre de rango $p-r$, entonces $(D^{1\times q}P)U \cong D^{1\times q}$, e.d., existe un isomorfismo $\phi : E \longrightarrow D^{1\times(p-r)}$. Para definir el isomorfismo ϕ, tomamos $\mu_1 \in D^{1\times p}$, $\mu_2 \in D^{1\times(q-r)}$ y se tiene $\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2)) = (\mu_1 \ \ \mu_2) + D^{1\times q}P$. Si multiplicamos la igualdad anterior por U a la derecha se tiene $\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2))U = (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + D^{1\times q} \quad \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2) = (D^{1\times q} \quad \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2)$, entonces $\phi(\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2))) = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2$.

Veamos que ϕ está bien definido, sean $(\mu_1 \ \ \mu_2)$, $(\mu_1' \ \ \mu_2') \in D^{1\times(p+q-r)}$ tal que $\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2)) = \pi'((\mu_1' \ \ \mu_2'))$, entonces $(\mu_1 \ \ \mu_2) - (\mu_1' \ \ \mu_2') = \nu P$, con $\nu \in D^{1\times q}$, por lo tanto $(\mu_1 \ \ \mu_2)Q = (\mu_1' \ \ \mu_2')Q$, es decir $\phi(\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2))) = \phi(\pi'((\mu_1' \ \ \mu_2')))$.

Ahora, si tomamos $(\mu_1 \ \ \mu_2) \in D^{1\times(p+q-r)}$, tal que $(\mu_1 \ \ \mu_2)Q = 0$ entonces $(\mu_1 \ \ \mu_2) - ((\mu_1 \ \ \mu_2)S)P = 0$, lo cual implica $\pi'((\mu_1 \ \ \mu_2)) = 0$, esto demuestra que el homomorfismo ϕ es inyectivo.

Tomemos $\lambda \in D^{1\times(p-r)}$ entonces $(\lambda T)Q = \lambda$, con esto demostramos que ϕ es un isomorfismo de D-módulos.

Dado que E es una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Como los homomorfismos α y ϕ son inyectivos, entonces $\phi\alpha$ resulta un homomorfismo inyectivo y $\phi(\alpha(\mu)) = \phi(\pi'((0 \ \ \mu))) = \mu Q_2$ para $\mu \in D^{1\times(q-r)}$, de aquí se tiene que Q_2 es una matriz de rango máximo. En consecuencia se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{.Q_2} D^{1\times(p-r)} \xrightarrow{\kappa} L \longrightarrow 0$$

Donde $L = D^{1\times(p-r)}/(D^{1\times(q-r)}Q_2)$. De lo anterior tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{\phi\alpha} & D^{1\times(p-r)} & \xrightarrow{\beta\phi^{-1}} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} M \cong D^{1\times(p-r)}/\ker(\beta\phi^{-1}) &\cong D^{1\times(p-r)}/Im(\phi\alpha) \\ &\cong D^{1\times(p-r)}/(D^{1\times(q-r)}Q_2) \\ &= L. \end{aligned}$$

Sean $\gamma:\ L \longrightarrow M$, un isomorfismo de D-módulos, $L = D^{1\times(p-r)}/(D^{1\times(q-r)}Q_2)$, y $Q_2 \in D^{(q-r)\times(p-r)}$ una matriz de rango pleno, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow D^{1\times(q-r)} \xrightarrow{.Q_2} D^{1\times(p-r)} \xrightarrow{\gamma\kappa} M \longrightarrow 0$$

es exacta. Por el teorema (9), $D^{1\times(p-r)}$ es una extensión de $D^{1\times(q-r)}$ por M, definiendo un único $\rho(\Lambda) \in ext^1_D(D^{1\times(q-r)}, M)$ y este a su vez define una extensión $E = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P)$ tal que $E \cong D^{1\times(p-r)}$, entonces el D-módulo E resulta libre de rango $p-q$ y por la proposición (13), existe una matriz $U \in GL_{p+q-r}$, tal que

$$(R \quad -\Lambda)U = (I_q \quad 0) \in D^{q\times(p+q-r)}$$

□

Observación 16. El homomorfismo inyectivo $\psi:\ M \longrightarrow L$, definido por $\psi(\pi(\mu)) = \phi(\pi'(\mu\ \ 0)) = \kappa(\mu Q_1)$, con $\mu \in D^{1\times p}$ y $0 \in D^{q-r}$ es homomorfismo de D-módulos izquierdos.

Corolario 6. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, el D-isomorfismo está explícitamente definido por:*

$$\begin{aligned} \psi:\ M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R) &\longrightarrow L = D^{1\times(p-r)}/(D^{1\times(q-r)}Q_2) \\ \pi(\lambda) &\longmapsto \kappa(\lambda Q_1) \end{aligned}$$

con inversa $\psi^{-1}:\ L \longrightarrow M$ definida por $\phi^{-1}(\kappa(\mu)) = \pi(\mu T_1)$, donde. $U^{-1} = \begin{pmatrix} R & -\Lambda \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix}$ $\in GL_{p+q-r}(D)$.

Este resultado sólo depende de la clase $\rho(\Lambda)$, con $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ y el D-módulo izquierdo

$$\begin{aligned} ext^1_D(M, D^{1\times(q-r)}) &= D^{q\times(q-r)}/(RD^{p\times(q-r)}) \\ &\cong D^{(q-r)\times(q-r)}/(Q_2D^{(p-r)\times(q-r)}). \end{aligned}$$

Demostración. Veamos que ψ está bien definido. Sea $\lambda \in D^{1\times P}$ tal que $\pi(\lambda) = 0$, entonces $\lambda = \mu R$ para algún $\mu \in D^{1\times q}$. Dado que $RU^{-1} = (I_q\ \ 0)$ se tiene $\lambda Q_1 = \mu(RQ_1) = (\mu\Lambda)Q_2$ lo cual implica $\kappa(\lambda Q_1) = 0$, con esto se ha probado la buena definición del D-isomorfismo ψ.

Usando la identidad $UU^{-1} = I_{p+q-r}$ se tiene la ecuación $T_1Q_1 + T_2Q_2 = I_{p-r}$, entonces $\mu - (\mu T_2)Q_2 = (\mu T_1)Q_1$ para cada $\mu \in D^{1\times(p-r)}$, en consecuencia $\kappa(\mu) = \kappa((\mu T_1)Q_1)$, lo cual genera el D-homomorfismo $\gamma:\ L \longrightarrow M$ definido por $\gamma(\kappa(\mu)) = \pi(\mu T_1)$.

Sea $\mu \in D^{1\times(p-r)}$, tal que $\kappa(\mu) = 0$, en consecuencia $\mu = \nu Q_2$, donde $\nu \in D^{1\times(q-r)}$. Usando la identidad $UU^{-1} = I_{p+q-r}$ se tiene $Q_2T_1 + S_2R = 0$, lo cual implica

$$\gamma(\kappa(\mu)) = \pi(\mu T_1) = \pi((\nu Q_2)T_1) = \pi((\nu S_2)R) = 0.$$

Con esto se ha probado la buena definición del homomorfismo γ.

Ahora, si usamos $UU^{-1} = I_{p+q-r}$, tenemos:

$$(\psi \circ \gamma)(\kappa(\mu)) = \psi(\pi(\mu T_1)) = \kappa((\mu T_1)Q_1) = \kappa(\mu),$$

Para todo $\mu \in D^{1\times(q-r)}$, e.d., $\psi \circ \gamma = I_L$. Por otra parte, de la ecuación $S_1R + Q_1T_1 = I_p$ se tiene

$$(\gamma \circ \psi)(\pi(\lambda)) = \gamma(\kappa(\lambda Q_1)) = \pi((\lambda Q_1)T_1) = \pi(\lambda - (\lambda S_1)R) = \pi(\lambda),$$

para cada $\lambda \in D^{1\times p}$, lo cual demuestra que ψ es un isomorfismo y $\gamma = \psi^{-1}$.

Finalmente el hecho de que este resultado dependa solo de $\rho(\Lambda)$ la clase de $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ en $ext^1_D(M, D^{1\times(q-r)})$, es debido a que toda extensión E' de $D^{1\times(q-r)}$ por M equivalente a E, es isomorfa a E, y es de la forma $E' = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}\bar{P})$ con $\bar{P} = (R \ \ -(\lambda + R\Theta))$, como se vio en la **sección 1**. En consecuencia E' resulta libre de rango $p - r$, lo cual se puede interpretar por la equivalencia:

$$\begin{pmatrix} R & -\Lambda \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{pmatrix} = I_{p+q-r}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R & -(\Lambda + R\Theta) \\ T_1 & T_2 - T_1\Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 + \Theta S_2 & Q_1 + \Theta Q_2 \\ S_2 & Q_2 \end{pmatrix} = I_{p+q-r}.$$

□

Observación 17. Si $M = \langle y_1, \ldots, y_p\rangle$, donde $R[y_1 \ \ldots \ y_p]^T = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} R.[f(y_1) \ \ldots \ f(y_p)]^T &= [f(R_{11}y_1 + \ldots + R_{1p}y_p) \ \ldots \ f(R_{q1}y_1 + \ldots + R_{qp}y_p)]^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

para cada $f \in Hom(M, \mathcal{F})$, en consecuencia la función $\theta : \ Hom(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \ker_{\mathcal{F}}(R.)$ definido por $\theta(f) = [f(y_1) \ \ldots \ f(y_p)]^T$ es un homomorfismo bien definido. Por el lema delos cinco y el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom(M,\mathcal{F}) & \xrightarrow{R.} & \mathcal{F}^p & \xrightarrow{\pi^*} & \mathcal{F}^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{i}_{\mathcal{F}^p}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{i}_{\mathcal{F}^q}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\mathcal{F}}(R.) & \xrightarrow{R.} & \mathcal{F}^p & \longrightarrow & \mathcal{F}^q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se tiene $Hom(M, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R.)$.

Corolario 7. *Sea $\mathcal{F}$ un D-módulo a izquierda. Consideremos lo siguientes sistemas lineales:*

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = \{\eta \in \mathcal{F}^p \mid R\eta = 0\} \ ; \quad \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) = \{\zeta \in \mathcal{F}^{(p-r)} \mid Q_2\zeta = 0\}.$$

Entonces tenemos el isomorfismo de grupos abelianos $\ker_{\mathcal{F}}(R.) \cong \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.)$ *y*

$$\ker_{\mathcal{F}}(R.) = Q_1 \ker_{\mathcal{F}}(Q_2) \ ; \quad \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) = T_1 \ker_{\mathcal{F}}(R.)$$

Demostración. Del corolario (6) se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{.R} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle .\Lambda} & & \downarrow{\scriptstyle .Q_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{.Q_2} & D^{1\times(p-r)} & \xrightarrow{\kappa} & L & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & D^{1\times q} & \xrightarrow{.R} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle .S_2} & & \uparrow{\scriptstyle .T_1} & & \uparrow{\scriptstyle \psi^{-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & D^{1\times(q-r)} & \xrightarrow{.Q_2} & D^{1\times p} & \xrightarrow{\pi} & L & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si $\mathcal{F}$ es un D-módulo izquierdo, se tiene $Hom(M,\mathcal{F}) = \ker_{\mathcal{F}}(R.)$ y aplicando el funtor contravariante y exacto a izquierda $Hom_D(-,\mathcal{F})$ a los anteriores diagramas, se obtienen los diagramas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{F}^q & \xleftarrow{R.} & \mathcal{F}^p & \xleftarrow{\pi^*} & \ker_{\mathcal{F}}(R.) & \longleftarrow & 0 \\
\uparrow{\scriptstyle \Lambda.} & & \uparrow{\scriptstyle Q_1.} & & \uparrow{\scriptstyle \psi^*} & & \\
\mathcal{F}^{(q-r)} & \xleftarrow{Q_2.} & \mathcal{F}^{(p-r)} & \xleftarrow{\kappa^*} & \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{F}^q & \xleftarrow{R.} & \mathcal{F}^p & \xleftarrow{\pi^*} & \ker_{\mathcal{F}}(R.) & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle S_2.} & & \downarrow{\scriptstyle T_1.} & & \downarrow{\scriptstyle (\psi^{-1})*} & & \\
\mathcal{F}^{(q-r)} & \xleftarrow{Q_2.} & \mathcal{F}^{(p-r)} & \xleftarrow{\kappa^*} & \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

lo cual muestra que ψ^* es el isomorfismo de grupos abelianos definido por:

$$\begin{array}{ll}
\psi^* : \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) \longrightarrow \ker_{\mathcal{F}}(R.) & (\psi^{-1})^* : \ker_{\mathcal{F}}(R.) \longrightarrow \ker_{\mathcal{F}}(Q_2.) \\
\zeta \longmapsto Q_1\zeta & \eta \longmapsto T_1\eta
\end{array}$$

□

Corolario 8. *Sea $R \in D^{q\times p}$ una matriz de rango máximo y $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ una matriz tal que $P = (R \ \ -\Lambda) \in D^{q\times(p+q-r)}$ admite inversa a derecha sobre D. Entonces el teorema* (12) se tiene cuando D tiene alguna de las siguientes propiedades:

1. D es un dominio de ideales principales (e.d., el anillo de operadores diferenciales ordinarios con coeficientes en un cuerpo diferenciable, tal como $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}(t)$).
2. $D = k[x_1, \ldots, x_n]$, el anillo de polinomios conmutativos sobre un cuerpo k.

3. D es una de las álgebras de Weyl $A_n(k)$ o $B_n(k)$, donde k es un cuerpo de característica 0 (e.d., $k = \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$), y $p - r \geq 2$.

4. D es el anillo de operadores diferenciales ordinarios con coeficientes en el anillo de las series de potencias formales $k\|x\|$, Donde k es un cuerpo de característica 0, o en el anillo de series de potencias convergentes $k\{x\}$, con coeficientes en $k = \mathbb{R}$, o $k = \mathbb{C}$, y $p - r \geq 2$.

Observación 18. El Corolario anterior puede interpretarse de la siguiente forma: Si D es un dominio de Hermite, e.d., todo D-módulo finitamente generado establemente libre es libre, y $M = D^{1\times p}/(D^{1\times q}R)$ el D-módulo izquierdo finitamente presentado por la matriz $R \in D^{q\times p}$, entonces M puede ser generado por $p - r$ elementos si y solamente si el $ext^1_D(E, D) = D^q/(RD^{p+q-r}) = 0$ y esto ocurre si y solamente si el D-módulo anulador transpuesto $ext^1_D(M, D) = D^q/(RD^p)$, es generado por $q - r$ elementos.

Demostración. Si el dominio D satisface una de las cuatro condiciones, se tiene que el D-módulo establemente libre de rango $p-r$ E, resulta libre de rango $p-r$ por el Teorema 6. Por la proposición 13 existe una matriz $U \in GL_{p+q-r}$ tal que $PU = (I_q\ \ 0)$, con lo cual se tiene el teorema 12. □

1. De la identidad $UU^{-1} = I_{p+q-r}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} R & -\Lambda \\ T_1 & T_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & Q_1 \\ S_2 & Q_2 \end{pmatrix} = I_{p+q-r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} RS_1 & = I_q + \Lambda S_2 \\ RQ_1 & = \Lambda Q_2 \\ T_1S_1 & = -T_2S_2 \\ T_1Q_1 & = I_{p-r} - T_2Q_2 \end{cases}, \tag{2.11}$$

   entonces $-\Gamma RQ_1 = Q_2$ y

$$I_{p-r} = T_1Q_1 + T_2Q_2 = T_1Q_1 - T_2\Gamma RQ_1 = (T_1 - T_2\Gamma R)Q_1$$

   en consecuencia la matriz Q_1 admite inversa a izquierda $T_1 - T_2\Gamma R \in D^{(p-r)\times p}$.

2. Como $(Q_3\ \ Q_1)\begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_1 \end{pmatrix} = I_p$, entonces $Q_3Y_3 = I_p - Q_1Y_1$, multiplicando a la derecha por la matriz S_1, a la izquierda por R y utilizando las igualdades $RS_1 = I_q + \Lambda S_2$ y $RQ_1 = -\Lambda Q_2$ tenemos:

$$R(Q_3Y_3)S_1 = RS_1 - R(Q_1Y_1)S_1 = I_q + \Lambda S_2 - R(Q_1Y_1)S_1,$$

   en consecuencia $(RQ_3)(Y_3S_1) + \Lambda(Q_2Y_1S_1 - S_2) = I_q$ lo cual implica $(RQ_3\ \ -\Lambda)\begin{pmatrix} Y_3S_1 \\ Q_2Y_1S_1 - S_2 \end{pmatrix} = I_q$, e.d., la matriz $X = (RQ_3\ \ -\Lambda)$ admite inversa a derecha $V = \begin{pmatrix} Y_3S_1 \\ Q_2Y_1S_1 - S_2 \end{pmatrix} \in D^{q\times q}$

Corolario 9. *Con la notación del teorema* (12) y el corolario (6), si la matriz $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ admite inversa a izquierda $\Gamma \in D^{(q-r)\times q}$, e.d., $\Gamma\Lambda = I_{q-r}$, entonces la matriz Q_1 admite inversa a izquierda $T_1 - T_2\Gamma R \in D^{(p-r)\times p}$ y el D-módulo izquierdo $\ker_D(.Q_1)$ es establemente libre de rango r.

Finalmente, si el D-módulo izquierdo $\ker_D(.Q_1)$ resulta libre de rango r, entonces existe $Q_3 \in D^{p\times r}$ tal que $W := (Q_3 \;\; Q_1) \in GL_p(D)$. Si escribimos $W^{-1} = \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_1 \end{pmatrix}$, donde $Y_3 \in D^{r\times p}$ y $Y_1 \in D^{(p-r)\times p}$, entonces la matriz $X := (RQ_3 \;\; \Lambda)$ es unimodular, e.d., $X \in GL_q(D)$ y

$$V = \begin{pmatrix} Y_3S_1 \\ Q_2Y_1S_1 - S_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz R es equivalente a la matriz $X\mathrm{diag}(I_r, \; Q_2)W^{-1}$ e.d.,

$$VRW = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado el D-módulo $\ker_D(.Q_1)$ es libre de rango r si el dominio D satisface la condición 1 o 2 del Coralario 8, o si D es $A_n(k)$ o $B_n(k)$ sobre un cuerpo k de característica 0 y $r \geq 2$ o si D es el anillo de operadores diferenciales ordinarios con coeficientes en el anillo de series de potencias formales $k\|x\|$, donde k es un cuerpo de característica 0, o con coeficientes en $k\{x\}$, donde $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y $r \geq 2$.

Demostración. La sucesión

$$0 \longrightarrow \ker_D(.Q_1) \xrightarrow{i} D^{1\times p} \xrightarrow{.Q_1} D^{1\times(p-r)} \longrightarrow 0 \tag{2.12}$$

es exacta y hendida, en consecuencia $\ker(.Q_1) \oplus D^{1\times p-r} = D^{1\times p}$, e.d., $\ker_D(.Q_1)$ es un D-módulo a izquierda establemente libre de rango r.

Supongamos que el D-módulo izquierdo $\ker_D(.Q_1)$ es libre de rango r, entonces existe un D-isomorfismo $\varphi : \; D^{1\times r} \longrightarrow \ker_D(.Q_1)$, sea $Y_3 = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_r) \end{pmatrix}$. De la sucesión 2.13 se tiene la sucesión

$$0 \longrightarrow D^{1\times r} \xrightarrow{.Y_3} D^{1\times p} \xrightarrow{.Q_1} D^{1\times(p-r)} \longrightarrow 0 \tag{2.13}$$

exacta y hendida, en consecuencia existen $.Q_3 : \; D^{1\times p} \longrightarrow D^{1\times r}$ tal que $Y_3Q_3 = I_r$ y $.Y_1 : \; D^{1\times(p-r)} \longrightarrow D^{1\times p}$ tal que $Y_1Q_1 = I_{p-r}$, y $Y_1Q_3 = 0$, lo cual implica

$$\begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_1 \end{pmatrix}(Q_3 \;\; Q_1) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{pmatrix} \; ; \quad I_p = Q_3Y_3 + Q_1Y_1 = (Q_3 \;\; Q_1)\begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando lo anterior y la ecuación 2.11 se tiene:

$$\begin{aligned} VR = \begin{pmatrix} Y_3S_1 \\ Q_2Y_1S_1 - S_2 \end{pmatrix} R &= \begin{pmatrix} Y_3S_1R \\ Q_2Y_1S_1R - S_2R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_3 + Y_3Q_1T_1 \\ Q_2Y_1(I_q - Q_1T_1) - S_2R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_3 \\ Q_2Y_1 - Q_2T_1 - S_2R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_3 \\ Q_2Y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y $\begin{pmatrix} Y_3 \\ Q_2Y_1 \end{pmatrix}(Q_3 \;\; Q_1) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$, en consecuencia $VRW = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ □

Veamos el reciproco del corolario anterior.

Corolario 10. *Sean $R \in D^{d\times p}$ una matirz de rango máximo y $V \in GL_q(D)$ y $W \in GL_p(D)$ dos matrices tales que $VRW = diag\,(I_qQ_2)$, donde $1 \leq r \leq q-1$ y $Q_2 \in D^{(q-r)\times(p-r)}$. Entonces, existe $U \in GL_{p+q-r}(D)$ y $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ con inversa $\Gamma \in D^{(q-r)\times q}$ tal que $(R \;\; -\Lambda)\,U = (I_q \;\; 0)$ y $\ker_D(.Q_1)$ es un D-módulo libre de rango r, donde $W = (Q_3 \;\; Q_1)$, $Q_3 \in D^{p\times r}$ y $Q_1 \in D^{p\times(p-r)}$. En particular, $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$ es una submatriz de la matriz $V^{-1} = (X_1 \;\; \Lambda)$, donde $X_1 \in D^{q\times r}$.*

Demostración. De la identidad $VRW = diag(I_r, Q_2)$ se tiene

$$RW = (RQ_3 \;\; RQ_1) = V^{-1}diag(I_r, Q_2) = (X_1 \;\; \Lambda Q_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} X_1 = RQ_3, \\ RQ_1 = \Lambda Q_2. \end{cases}$$

Ahora, si escribimos $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$, donde $V_1 \in D^{r\times q}$ y $V_2 \in D^{(q-r)\times q}$, de las relaciones $VV^{-1} = I_q$ y $V^{-1}V = I_q$, tenemos $V_2\Lambda = I_{q-r}$ y $X_1V_1 + \Lambda V_2 = I_q$, en consecuencia $R(Q_3V_1) - \Lambda(-V_2) = I_q$, lo cual muestra que la matriz $P = (R \;\; -\Lambda) \in D^{q\times(p+q-r)}$ admite inversa por derecha $S = (Q_3V_1 \;\; -V_2) \in D^{(p+q-r)\times q}$, se sigue que el D-módulo izquierdo $E = D^{1\times(p+q-r)}/(D^{1\times q}P)$ es libre de rango r.

Ahora, supongamos $W^{-1} = \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_1 \end{pmatrix}$, donde $Y_3 \in D^{r\times p}$ y $Y_1 \in D^{(p-r)\times p}$ y consideramos la identidad $W^{-1}W = I_p$, tenemos $Y_3Q_3 = I_r$, $Y_3Q_1 = 0$, $Y_1Q_3 = 0$ y $Y_1Q_1 = I_{p-r}$, entonces

$$\begin{pmatrix} R & -\Lambda \\ Y_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_3V_1 & Q_1 \\ -V_2 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p - r \end{pmatrix} \in GL_{p+q-r}(D).$$

Lo cual prueba la existencia de una matriz $U \in GL_{p+q-r}(D)$ tal que $(R \;\; -\Lambda)\,U = (I_q \;\; 0)$. Finalmente de las identidades $Y_3Q_3 = I_r$, $Y_3Q_1 = 0$ y $Q_3Y_3 + Q_1Y_1 = I_p$ se tiene la sucesión hendida

$$0 \longrightarrow D^{1\times r} \xrightarrow{Y_3} D^{1\times p} \xrightarrow{.Q_1} D^{1\times(p-r)} \longrightarrow 0,$$

lo cual muestra $\ker(.Q_1) = D^{1\times r}Y_3 \cong D^{1\times r}$, se sigue que el $\ker(.Q_1)$ es libre de rango r. □

Los corolarios (9) y (10), nos dan la generalización del teorema de Serre.

CAPÍTULO 3

Ejemplos

Daremos un algoritmo de lo desarrollado en el capitulo anterior y a travez de dos ejemplos ilustraremos la teoria desarrollada en la cual se baso la generalización del teorema de reducción de Serre. Los calculos referentes a las bases de Gröbner seran omitidos.

Algoritmo. Entrada: Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado calculable e.d., $D = Bn(k), R \in D^{q\times p}$ a una matriz de rango pleno y tres enteros no negativos $\alpha,\ \lambda$ y γ.

Salida: Un conjunto (posiblemente vacio) $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ tal que la matriz $(R\ \ -\Lambda)$ admite inversa a derecha sobre D.

1. consideremos la matriz $\Lambda \in D^{q\times(q-r)}$, tomando las entradas en las variables ∂_i de orden total α y fijando el total β (resp., γ) para los polinomios del númerador en las variables x_j (resp., denominador), en las entradas de Λ
2. Calcule la base de Gröbner para el D-módulo RD^p.
3. Calcule la forma normal $\bar{\Lambda}_{\bullet i} \in D^q$, para la i-ésima columna $\Lambda_{\bullet i}$ de la matriz Λ en el D-módulo derecho $ext^1_D(M, D) = D^p/(RD^p)$ para cada $i = 1, \ldots, q - r$
4. Calcule la obstrucción para el D-módulo proyectivo

$$\bar{E} = D^{1\times(p+q-r)/(D^{1\times q}(R\ \ -\Lambda))}.$$

   (e.d., calcule una base de Gröbner para el D-módulo $\bar{E}$)
5. resuelver el sistema en los arbitrarios coeficientes de la matriz Λ mediente el aniquilador.
6. Retorna el conjunto de soluciones para Λ.

Ejemplo 9. Consideremos el siguiente sistema lineal funcional de corrimiento

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + ax_1(t) - kax_2(t-h) = 0, \\ \dot{x}_2 - x_3(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) + \omega^2 x_2(t) + 2\zeta\omega x_3(t) - \omega^2 u(t) = 0; \end{cases} \tag{3.1}$$

Tomando $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sea $D = \mathbb{Q}(a,k,\omega,\zeta)[\partial; id, \frac{d}{dt}][\delta, \alpha, 0]$ un anillo de polinomios conmutativo de operadores de corrimiento diferenciales en las variables $\partial,\ \delta$, y $h \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\mathbb{Q}(h)$ sea un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 1, entonces definimos

$$\partial y(t) = \dot{y}(t),\ \ \delta y(t) = y(t-h),$$

la operación de un elemento de D sobre el D-módulo $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Cosideremos el vector $x = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ x_3(t)]$ y la matriz

$$R = \begin{pmatrix} \partial + a & -ka\delta & 0 & 0 \\ 0 & \partial & -1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \partial + 2\zeta\omega & -\omega^2 \end{pmatrix}.$$

Veamos que R es de rango pleno, e.d., $\ker_D(.R) = 0$. Sea $V = [b_1\ b_2\ b_3] \in D^{1\times 4}$ tal que $VR = 0$, entonces

$$\begin{aligned} b_1 a = 0 &\ \Rightarrow\ b_1 = 0, \\ -b_3\omega^2 = 0 &\ \Rightarrow\ b_1 = 0, \\ -b_2 + b_3(\partial + 2\zeta\omega) = 0 &\ \Rightarrow\ b_2 = 0. \end{aligned}$$

Si tomamos $M = D^{1\times 4}/(D^{1\times 3}R)$ el D-módulo asociado al sistema (3.1) tenemos la resolución libre finita

$$0 \longrightarrow D^{1\times 3} \xrightarrow{.R} D^{1\times 4} \xrightarrow{\pi} M = D^{1\times 4}/(D^{1\times 3}R) \longrightarrow 0.$$

además tenemos $ext^1_D(M,D) = D^3/(RD^4)$ debido a que R es una matriz de rango pleno. Describiendo $ext^1_D(M,D) = D^3/(RD^4)$ en terminos de sus generadores y la relación, tenemos

$$\begin{aligned} [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ] &= R\begin{bmatrix} ka\delta & a+\partial & \partial^2 + a\partial - 1 & \dfrac{1}{\omega^2}(\omega^2 + \partial^2 + 2\zeta\omega\partial)(\partial + a) - \dfrac{\partial + 2\zeta\omega}{\omega^2} \end{bmatrix} \\ [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ] &= R\begin{bmatrix} ka\delta & a+\partial & \partial^2 + a\partial & \dfrac{1}{\omega^2}(\omega^2 + \partial^2 + 2\zeta\omega\partial)(\partial + a) - \dfrac{1}{\omega^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia el D-módulo $ext^1_D(M,D) = D^3/(RD^4)$ es un $\mathbb{Q}(a,k,\omega,\zeta)$-espacio vectorial de dimensión 1 con base $\tau([\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T)$, tomando $\tau:\ D^3 \longrightarrow ext^1_D(M,D) = D^3/(RD^4)$ como el homomorfismo canónica sobre $ext^1_D(M,D) = D^3/(RD^4)$. Por el teorema (11) tenemos que la matriz $P = (R\ \ -\Lambda)$ es invertible para $\Lambda \in \{[\ a\ \ 0\ \ 0\ ]^T \mid a \in D \setminus \{0\}\}$. En particular, si tomamos el vector columna $\Lambda = [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]^T$, podemos observar que la matriz $P \in D^{3\times 5}$ admita inversa a derecha sobre D:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial + 2\zeta\omega}{\omega^2} & -\dfrac{1}{\omega^2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el D-módulo $E = D^{1\times 5}/(D^{1\times 3}P)$ es establemente libre de rango 2 y el D-módulo $ext^1_D(M, D)$ es ciclico y generado por $\tau(\Lambda)$. Por el teorema de Quillen-Suslin, tenemos que el D-módulo E es libre de rango 2.

Calculáremos una parametrización del D-módulo E (e.d., una matriz $Q \in D^{2\times 5}$ tal que $\ker(.Q) = D^{1\times 3}P$). Utilizando los generadores del D-módulo E y las relación entre las matrices Q y P, tenemos la siguiente rlación para un elemento $[\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ ] \in \ker(.Q)$

$$\begin{aligned} b_3 &= b_2\partial, \\ b_4 &= b_2\left(1 + \frac{\partial^2 + 2\partial\zeta\omega}{\omega^2}\right), \\ b_5 &= b_1(\partial + a) - b_2 ka\delta, \end{aligned}$$

si hacemos $b_1 = -1$ y $b_2 = \omega^2$ se genera la parametrización inyectiva de el D-módulo E

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2\partial \\ 0 & \omega^2 + \partial^2 + 2\partial\zeta\omega \\ -\partial - a & -\omega^2 ka\delta \end{pmatrix}.$$

Escribiendo $Q = (Q_1^T \ \ Q_2^T)^T$, donde

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2\partial \\ 0 & \omega^2 + \partial^2 + 2\partial\zeta\omega \end{pmatrix} \in D^{4\times 2} \ \text{ y } \ Q_2 = \begin{pmatrix} -\partial - a & -\omega^2 ka\delta \end{pmatrix} \in D^{1\times 2}$$

y usando el corolario (7) tenemos el isomorfismo de D-módulos $\ker_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}(R.) \cong \ker_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}(Q_2.)$, en consecuencia el sistema lineal funcional (3.1) es equivalente al sistema

$$-y_1(t) - ay_1(t) - \omega^2 kay_2(t-h) = 0, \quad y_1(t),\ y_2(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Podemos verificar que la matriz Q admite inversa a derecha sobre D:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces Q es una parametrización inyectiva de el D-módulo E y las clases reciduales de las filas de la matriz T definen la base del D-módulo libre de rango 2 E.

Ahora verificaremos el teorema de reduccción de Serre para la matriz R, e.d., encontráremos matrices unimodulares $V \in GL_3(D)$ y $W \in GL_4(D)$ tal que $VRW = diag(I_2, Q_2)$. El vector Λ admite inversa $[\ 1\ 0\ 0\ ]$.

Demostráremos que $\ker(.Q_1)$ es un D-módulo libre de rango 2. Si tomamos un vector $v = (b_i)_{1\le i\le 5} \in \ker(.Q_1)$ e.d., $vQ_1 = 0$, entonces $b_1 = 0$ y $b_2\omega^2 + b_3\omega^2\partial + b_4(\omega^2 + \partial^2 + 2\partial\zeta\omega) = 0$ de aquí se tiene la matriz

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & \partial + 2\zeta\omega & -\omega^2 \\ 0 & \partial & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual satiface $\ker(.Q_1) = D^{1\times 2}K$, donde K es una matirz de rango pleno, se sigue $\ker(.Q_1) \cong D^{1\times 2}$, por lo tanto $\ker(.Q_1)$ es un D-módulo libre de rango 2. Por el corolario (9) existe una matriz $W = (Q_3 \;\; Q_1) \in GL_4(D)$, con Q_3 la inversa a derecha de K, e.d.,

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\omega^{-2} & -\dfrac{\partial + 2\zeta\omega}{\omega^2} \end{pmatrix}.$$

La matriz $W = (Q_3 \;\; Q_1)$ esta definida por

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & -1 & 0 & \omega^2\partial \\ -\omega^{-2} & -\dfrac{\partial + 2\zeta\omega}{\omega^2} & 0 & \omega^2 + \partial^2 + 2\partial\zeta\omega \end{pmatrix},$$

con inversa

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & \partial + 2\zeta\omega & -\omega^2 \\ 0 & \partial & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo al corolario (9), la matriz $X = (RQ_3 \;\; \Lambda)$ definida por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos $V = X^{-1}$, tenemos la reducción de Serre para la matriz $VRW = (I_2 \;\; Q_2)$.

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ el conjunto de las funciones de Ω en $\mathbb{C}$ de clase C^∞ con soporte compacto, e.d., $C_0^\infty(\Omega)$, con la topología inducida por la normas $\rho_{K,\alpha}(\varphi) := sup_{x\in K}\{\partial^\alpha\varphi(x)\}$, donde $K \subseteq \Omega$. Recordemos que el soporte de una función φ se denota por *supp* f y se define como el menor conjunto cerrado tales que, la función f es idénticamente nula fuera de el.

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ el subconjunto de $\mathcal{D}(\Omega)$ formado por las funciones continuas y lineales de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$. Tomaremos $\Omega = \mathcal{R}$

Ejemplo 10. Sean $\phi_1,\ \phi_2,\ \psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Consideremos el sistema lineal funcional definido por

$$\begin{cases} \phi_1(t) + \psi_1(t) - \phi_2(t) - \psi_2(t) = 0 \\ \dot{\phi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) + \eta_1\phi_1(t) - \eta_1\psi_1(t) - \eta_2\phi_2(t) + \eta_2\psi_2(t) = 0 \\ \phi_1(t - 2h_1) + \psi_1(t) - u(t - h_1) = 0 \\ \phi_2(t) - \psi_2(t - h_2) - v(t - h_2) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Donde $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q}h_1 + \mathbb{Q}h_2$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $\eta_1,\ \eta_2$ dos para metros constantes(e.d., constantes reales). Denotaremos por $D = \mathbb{Q}(t)[\partial\,; \sigma_1, \sigma_2]$

($\mathbb{Q}(\eta_1,\ \eta_2)$ es un cuerpo de extensión del cuerpo $\mathbb{Q}$), el álgebra de polinomios conmutativos de opradores diferenciales de corrimiento en ∂ y $\sigma_1,\ \sigma_2$, tales que

$$\partial f(t) = \dot{f}(t), \quad \sigma_1 f(t) = f(t-h_1), \quad \sigma_2 f(t) = f(t-h_2),$$

Esta es la acción de un elemento del anillo sobre el D-módulo $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, .e.d., σ_1 y σ_2 son independientes y D es un anillo de polinomios conmutativo.

Sea $M = D^{1\times 4}/(D^{1\times 4}R)$ el D-módulo finitamente presentado por la matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \partial-\eta_1 & \partial-\eta_1 & -\eta_2 & \eta_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1^2 & 1 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sigma_2^2 & 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \in D^{4\times 6},$$

asociada al sistema (3.2). tenemos que el $ext^1_D(M,D) = D^4/(RD^6)$, debido a que R es una matriz de rango pleno. Calculando una base de Gröbner para el D-módulo $ext^1_D(M,D) = D^4/(RD^6)$, obtenemos que el $ext^1_D(M,D) = D^4/(RD^6)$ es un $\mathbb{Q}(\eta_1,\ \eta_2)$-espacio vectorial de dimensión 1 con base $\tau([\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T)$, tomando $\tau:\ D^4 \longrightarrow ext^1_D(M,D) = D^4/(RD^6)$ como la proyección canónica sobre $ext^1_D(M,D) = D^4/(RD^6)$. Por el teorema (11) tenemos que la matriz $P = (R\ \ -\Lambda)$ es invertible para $\Lambda \in \{[\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ a\ ]^T \mid a \in D \setminus \{0\}\}$. En particular, si tomamos el vector columna $\Lambda = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ]^T$, podemos observar que la matriz $P \in D^{4\times 7}$ admite inversa a derecha sobre D:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\eta_2} & \frac{1}{\eta_2} & 0 & \frac{1}{\eta_2}\sigma_2 & -\frac{1}{\eta_2} \\ -1 & 1 & -\frac{\eta_1}{\eta_2} & \frac{\eta_1}{\eta_2} & -\sigma_1 & \frac{\eta_1}{\eta_2}\sigma_2 & -\frac{\eta_1}{\eta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \in D^{7\times 4},$$

En consecuencia el D-módulo $E = D^{1\times 7}/(D^{1\times 4}P)$ es establemente libre de rango 3 y el D-módulo $ext^1_D(M,D)$ es cíclico y generado por $\tau(\Lambda)$. Por el teorema de Quillen-Suslin, tenemos que el D-módulo E es libre de rango 3. Usando el algoritmo constrctivo del teorema de Quillen-Suslin, implementado en el paquete QuillenSuslin [27] y OreModules, obtenemos que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 & 0 & -\sigma_1 & 1-\sigma_1^2 & 0 \\ -\sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_2 & -\sigma_2 & 0 & 1-\sigma_2^2 \\ \eta_2 & 1 & 2\eta_1 & 2\eta_2 & \partial+\eta_2+\eta_1 & 2\eta_1\sigma_1 & 2\eta_2\sigma_2 \end{pmatrix} \in GL_7(D)$$

satisface $(R \;\; -\Lambda)U = (I_4 \;\; 0)$, en consecuencia $Q_2 \in D^{1\times 3},\ Q_1 \in D^{6\times 3}$ y tenemos

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \partial + \eta_2 + \eta_1 & 2\eta_1\sigma_1 & 2\eta_2\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \\ -1 & 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_1 & 1-\sigma_1^2 & 0 \\ -\sigma_2 & 0 & 1-\sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Usando el corolario (7) tenemos el isomorfismo de D-módulos $\ker_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}(R.) \cong \ker_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}(Q_2.)$, en consecuencia el sistema (3.2) es equivalente al sistema de corrimiento:

$$\dot{x}(t) + (\eta_1 + \eta_2)x(t) + 2\eta_1 x_2(t-h_1) + 2\eta_2 x_3(t-h_2) = 0. \tag{3.3}$$

Esta resultado fue obtenido despues de solucionar la ecuación algebraica de Riccati de la forma $XRX = X$. Pero la reducción de Serre nos da una forma inmediata para obtener este resultado.

Usando el algoritmo constrctivo del teorema de Quillen-Suslin, implementado en el paquete QuillenSuslin [27] y OreModules, podemos llevar la matriz $Q_1 \in D^{6\times 3}$ a una matriz unimodular

$$W = (Q_3 \;\; Q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_1 & 1-\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & -\sigma_2 & -\sigma_2 & 0 & 1-\sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Podemos verificar que la matriz

$$X = (RQ_3 \;\; \Lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial + \eta_1 & -\partial + \eta_1 + \eta_2 & -2\eta_2 & -1 \\ \sigma_1^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es unimodular sobre D, e.d., $X \in GL_4(D)$, se tiene la reducción de Serre

$$XRW = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in D^{4\times 6}$$

lo cual finalmente prueba que R es equivalente a $\mathrm{diag}(I_3, Q_2)$.

Bibliografía

[1] **Rotman, J.J.** *An Introduction to Homological Algebra*. Springer. New York (2009).

[2] **Hideyuki, M.** *Commutative Algebra*. The Benjamin/Cummings Publishing Company. Massachusetts (1980).

[3] **Goodearls, K., R. & Warfield JR., R., B.** *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. London Mathematical Society (2004).

[4] **Stentröem, B.** *Rings of Quotients. An introduction to Methods of Ring Theory*. Spring- Verlag. Berlin Heidelberg New York (1975).

[5] **Gallego, C.** *Bases de Gröbner no Conmutativas en Extensiones de Poincaré-Birkhoff-Witt*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2009.

[6] **Chyzak, F., Quadrat, A., and Robertz, D.**, *Effective algorithms for parametrizing linear control systemsover Ore algebras*, Springer, 2005.

[7] **Cluzeau, T. and Quadrat, A.**, *Factoring and decomposing a class of lineal funtional system*, Linear Algebra and Its Application, 425, 2008, 324-381.

[8] **Boudellioua, M. and Quadrat, A.**, *Serre's reduction of linear functional systems*, INRIA rapport 7214, February 2010.

[9] **Kailath, T.** , *Linear system*, Englewood Cliffs: Prentice-hall, 1980.

[10] **Fliess, M.**, *Some basic structural properties of generalized linear systems*, Systems & Control Letters, 15, 1990, 391-396.

[11] **Fliess, M. and Mounier, H.**, *Controllability and observability of linear delay systems: an algebraic approach*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 3, 1998, 301-314.

[12] **Kashiwara, M.**. *D-modules and Microlocal Calculus*, volume 217 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[13] **Levandouvskyy, V.**, *Non-commutative Elimination in Ore Algebras Proves Multivariate Identities*, Journal Symbolic Computation, z26, 1998, 187–227.

[14] **Kandri-Rody, A. and Weispfenning. V.**, *Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type*, Journal Symbolic Computations, 9, 1990, 1–26.

[15] **Malgrange, B.**, Systèmes à coefficients constants, Séminaire Bourbaki 1962/1963, 1-11.

[16] **McConnell, J. and Robson, J.**, *Noncommutative Noetherian Rings*, Graduate Studies in Mathematics 2001, American Mathematical Society.

[17] **Oberst, U.**, *Multidimensional constant linear systems*, Acta Appl. Math., 20, 1990, 1-175.

[18] **Palamodov, V.**, *Linear Differential Operators with Constant Coefficients*, Springer, 1970.

[19] **Pommaret, J.**, *Partial Differential Control Theory*, volume 530 of Mathematics and Its Applications, Kluwer, 2001.

[20] **Pommaret, J. and Quadrat, A.**, *Algebraic analysis of linear multidimensional control systems*, IMA Journal of Control and Information, 16, 1999, 275-297.

[21] **Sato, V., Kawai, T. and Kashiwara, M.**, *Microfunctions and pseudo-differential equations*. In Komatsu, editor, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973, pages 265-529.

[22] **R. Baer**,*Erweiterung von gruppen und ihren Isomoiphismen*, Mathematische Zeitschrift **38**, (1934), 375-416.

[23] **A. Quadrat, D. Robertz**, *Computation of bases of free modules over the Weyl algebras*. J. Symbolic Comput. 42 (2007), 1113-1141, STAFFORD project: http://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules.

[24] **F. Chyzak, B. Salvy**, *Non.conmutative elimination in Ore algebras proves muiltivariate identitis*, Journal Symbolic Computation **26**(1998), 187-227.

[25] **J.P. Serre**, *Sur les modules projectifs*. Séminaire Dubreil-Pisot, vol. 2, 1960/1961, in Oeu- vres, Collected Papers, Vol. II 1960-1971, Springer, 1986, 23-34.

[26] **H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, AND P. Rouchon**, *Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as Delay System*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. September 1998, Vol. 3, 315-321. URL: http://www.emath.fr/cocv/.

[27] **A. Fabiańska, A. Quadrat**, *Applications of the Quillen-Suslin theorem in multidimensional systems theory*. Gröbner Bases in Control Theory and Signal Processing, H. Park and G. Regensburger (Eds.), Radon Series on Computation and Applied Mathematics 3, de Gruyter publisher, 2007, 23-106, QuillenSuslin project: http://wwwb.math.rwth-aachen.de/QuillenSuslin.