UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse

Urías José Pérez Acuña

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá D.C., Colombia

Año 2014

Estrategia didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse

Urías José Pérez Acuña

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Matemático, Magister en Educación Crescencio Huertas Campos

Codirector:

Dr. José Reinaldo Montañez Puentes

Línea de Investigación:

Área de formación en ciencias

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Bogotá, Colombia

2014

A Dios por ser mi fortaleza espiritual.

A mis padres Luisa y Armando.

A mi esposa Lyda Sugey por su amor.

A mis hijos Mateo y Daniel.

Agradecimientos

Al profesor Crescencio Huertas Campos por las acertadas y pertinentes observaciones para el desarrollo de este trabajo.

Al profesor José Reinaldo Montañez Puentes por haber aceptado ser Codirector de este trabajo.

A la profesora Myriam Acevedo Caicedo por sus orientaciones para la elaboración de la propuesta inicial.

A los estudiantes de grado 11 promoción 2014 de la Institución Educativa Municipal Santiago Pérez, por su disposición para trabajar.

Resumen

El presente trabajo muestra una Unidad Didáctica para introducir las coordenadas polares a estudiantes de grado 11 de educación media, y la posterior aplicación del plano polar para representar y analizar la parábola y la elipse. La propuesta consta de cuatro grupos (4) de actividades en donde se articulan elementos de la Educación Matemática Realista y las teorías de Brousseau y Chevallard relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los conceptos básicos de coordenadas polares se tienen en cuenta en la estructuración de las guías, como único propósito para la comprensión de otro sistema de representación gráfica de curvas en donde se involucran elementos del pensamiento geométrico, métrico y variación propuestos por Ministerio de Educación Nacional. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes a través de actividades en donde relacionan el contexto diario, usan recursos y materiales lo cual les ayuda a comprender los elementos básicos del plano polar y su aplicación en la representación de algunas curvas.

Palabras claves: Educación Matemática Realista, Coordenadas polares, Cardioide, parábola y elipse.

Abstract

The following work shows a didactic unit to bring in the polar coordinates to eleventh grade students in Secondary School and their application in the polar plan to introduce and analyze the parable and ellipse. The proposal has got four groups of activities which articulate items of the realistic Mathematics Education and Brousseau and Chevallard´s theories related to the teaching and learning processes. The basic concepts of polar coordinates are taken into account in the working guides structures as an outcome in the comprehension of other system of graphic representation of curves where items of the geometric, metric and variational thought proposed by the Educational Secretary Ship are involved. The results show that the students through activities which relate the daily context use resources and materials that help them to understand the basic items of the polar plan and its application in the representation of some curves.

Keywords: Realistic Mathematics Education, Polar Coordinates, Cardioid, parable and ellipse.

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Introducción

En los grados 10 y 11 de educación media se evidencian dificultades en los estudiantes relacionadas con el manejo de coordenadas rectangulares y su aplicación en la representación de relaciones y funciones reales, como lo plantean Acuña [1], y Arce y Ortega [3] los estudiantes no solo tienen problemas en graficar y sino que esto dificulta la interpretación de dichas gráficas. El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares de Competencias en Matemáticas [22] afirma que “es importante señalar que un mismo contenido matemático puede y en ocasiones debe presentarse a través de diversas situaciones”.

En este trabajo se diseña e implementa una unidad didáctica para introducir las coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse como una alternativa para representar curvas en el plano. Algunas investigaciones plantean que trabajar con coordenadas polares resulta más sencillo para los estudiantes, como Sandberg, Huttenlocher y Newcambe (1996) citados por Jiménez [18] y Zambrano [31]. Por otra parte, Chau y Sánchez [12] en su trabajo “Coordenadas polares: curvas maravillosa” plantean que es posible trabajar este sistema de representación en el plano utilizando programas de computador. Con relación al uso de software educativo en el aula de clase, en la propuesta se emplea en una de las actividades el software Winplot en donde se evidencian las ventajas de usar estos programas de computador como ayuda al aprendizaje.

Para el diseño de la propuesta se tienen en cuenta diferentes aspectos de la educación matemática, primero se deben identificar etapas del desarrollo histórico y epistemológico de los sistemas de coordenadas, en particular los relacionados con los problemas que motivaron la introducción de las coordenadas polares, la parábola y la elipse. Tal como lo propone el MEN en los lineamientos curriculares de matemáticas “el conocimiento de la historia proporciona además una visión dinámica de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectadas con los avances de otras disciplinas, lo que trae importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevos conocimientos".

También, en el proceso de enseñanza-aprendizaje el docente debe poner en práctica su capacidad creativa, de innovación y explorar con los estudiantes espacios para el aprendizaje. Es importante brindarles a los estudiantes diferentes maneras como las matemáticas pueden ser contextualizadas y/o representadas en donde la interacción con otros, el uso materiales y recursos sean una oportunidad para aprender. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares de Competencias en Matemáticas propone que "es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos". Con relación a lo anterior, en la propuesta se tienen en cuenta algunos elementos de la Educación Matemática Realista propuesta por Hans Freudenthal [2] en donde el contexto diario del estudiante brinda la posibilidad de que los estudiantes lleguen a una "matemática para todos" y en los espacios creados para el desarrollo de las actividades se busca que los estudiantes puedan encontrar en el conocimiento la mejor manera de resolver una situación como lo dice Brousseau [8]. Este conocimiento según Chevallard [13] pasa por varios momentos en esta propuesta se toman dos, la protomatemática y la paramatemática.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente se diseña e implementa una unidad didáctica que se divide en cuatro (4) grupos de actividades.

El primer grupo contiene dos (2) guías, que buscan a través del juego tiro al blanco un acercamiento al sistema de coordenadas polares midiendo radios vectores y ángulos para luego representarlos en el plano polar estos elementos posibilitando la comprensión del plano polar.

El segundo grupo de actividades lo conforman tres (3) guías, en donde se hace la construcción mecánica de la Cardioide a través tejido y también se obtiene esta curva utilizando dos aros. Después se hace la representación en el plano polar utilizando la tabulación y la simetría de la curva.

El tercer grupo de actividades lo conforman cuatro (4) guías, que permiten observar algunos elementos de la parábola y la elipse que se obtienen a partir de cortes del cono y el cilindro. También se hace una construcción por medio de tejidos, se obtienen algunos elementos de estas curvas por construcción geométrica y posteriormente se representan en el plano polar.

El cuarto grupo contiene tres (3) guías en donde se utiliza el programa Winplot que permite graficar las curvas en coordenadas polares teniendo en cuenta los elementos de las curvas obtenidos en las anteriores actividades; se hace una aplicación de la propiedad reflectora de la parábola; se buscan aplicaciones de la elipse en el contexto de los estudiantes por medio de objetos e imágenes y se hace una lectura en donde se muestra la determinación teórica de las ecuaciones como modelo de la gráfica obtenida.

Las anteriores actividades brindan a los estudiantes la posibilidad de comprender los elementos del plano polar y la aplicación en la representación y análisis de la parábola y la elipse a través de situaciones significativas. Además, este trabajo puede servir para que los docentes se motivan y puedan introducir sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas en la educación media.

1. Propuesta de trabajo

1.1 Contexto institucional

La Institución Educativa Municipal Santiago Pérez se encuentra ubicada en la ciudad de Zipaquirá Cundinamarca, el establecimiento educativo es de carácter oficial mixto; calendario A; con jornada mañana y noche para adultos. Tiene 39 años de fundada. Cuenta con dos salas de informática donde trabajan tres estudiantes por cada computador. La institución tiene dos sedes: primaria con grados desde preescolar hasta cuarto (4) y la otra sede va desde grado quinto (5) hasta grado once (11). Se tiene en cuenta para la valoración de los desempeños de los estudiantes el saber, saber hacer y el ser. Los egresados de grado once (11) reciben el titulo de bachiller académico.

La implementación de la unidad didáctica se hace con un sólo curso del grado once (11) de los cinco (5) que hay en la institución; la edad de los estudiantes oscila entre los 15 y 17 años; el nivel del Sisbén esta entre 1 y 3; viven en su mayoria con los padres los cuales por lo menos uno trabaja, desempañandose en diferentes trabajos relacionados con empresas regionales, construcción, servicio doméstico, vendedores informales, profesionales entre otros. Se observa poco acompañamiento de los padres en las tareas y deberes de los estudiantes en casa.

Por otra parte, revisando el plan de estudios del área de matemáticas de la I.E.M Santiago Pérez se encuentra que en el conjunto de grados 10 y 11 (Educación media) no se plantea el tema de las coordenadas polares, debido posiblemente a la extensión del programa de matemáticas y al tiempo de que se dispone para desarrollar el programa, cuatro (4) horas semanales, tiempo que se ve reducido por las actividades programadas por la Institución. Además no se cuenta con textos que desarrollen el tema para el nivel medio.

Además de lo anterior es importante resaltar que en los Estándares básicos de competencias matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, en el conjunto de grados 10 y 11 del pensamiento espacial y sistemas geométricos se menciona la localización de objetos en diferentes sistemas de representación entre ellos el de coordenada polares.

El material que se construyó en la propuesta puede además servir a los docentes de enseñanza media como un recurso didáctico para introducir el trabajo con otros sistemas de coordenadas (cilíndricas y esféricas).

1.2 Definición de la pregunta

De lo planteado anteriormente surge entonces la pregunta: ¿Cuál puede ser una estrategia didáctica para estudiantes de educación media que permita introducir los conceptos básicos de coordenadas polares?

1.2.1 Objetivos de la propuesta

1.2.1.1. Objetivo general

Diseñar una unidad didáctica para los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Municipal Santiago Pérez para introducir conceptos básicos decoordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse.

1.2.1.2. Objetivos específicos

- Identificar etapas del desarrollo histórico de los sistemas de coordenadas en particular las relacionadas con los problemas que motivaron la introducción de las coordenadas polares.
- Seleccionar tópicos a incluir en la unidad a partir del análisis de conocimientos previos requeridos.
- Contrastar investigaciones didácticas o propuestas de aula relacionadas con las coordenadas polares para seleccionar las pertinentes a la unidad didáctica.
- Elaborar estructura y componentes de la unidad didáctica.

2. Metodología

Para el desarrollo de la propuesta se le da importancia al proceso de enseñanza-aprendizaje y es primordial planear y organizar las actividades de tal forma que le permitan al profesor identificar aspectos que pueden ser relevantes a la hora de llevarlas al aula de clase, lo que se pretende con este trabajo "…es la interrelación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza- aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un período de tiempo determinado" (Ibáñez: 1992, P 13)[17]. Y como base en esa "interrelación" se toman algunos elementos de la investigación acción en especial aquellos que "…desde el punto de vista metodológico y técnico no se diferencia mayormente de las características señaladas para la investigación de tipo cualitativo…deben estar explicitas todas aquellas acciones y actividades que a la postre van a servir para resolver el problema" (Cerda: 2000, P 100) [10].

Se analiza el desarrollo histórico y epistemológico de las coordenadas desde las primeras aproximaciones de Apolonio e Hiparco; pasando por las contribuciones de Descartes y Fermat con relación a la coordenadas cartesianas; los aportes de Cavaliere hasta llegar a los sistemas de representación propuestos por Newton en especial el de coordenadas polares, que surge buscando solucionar problemas relacionados con las tangentes y las curvas. Además, se incluye la aparición de algunas curvas obtenidas para dar solución a los tres problemas griegos de la antigüedad. En especial la parábola y la elipse, desde su primera aproximación que hace Menecmo buscando solucionar el problema de la duplicación del cubo hasta Apolonio y la utilización de los cortes que hace del cono a través de la inclinación del plano.

De lo anterior se toman los aspectos disciplinares que se trabajan en la propuesta y se aclara que no se pretende hacer un trato de coordenadas polares y su aplicación en la representación y análisis de la parábola y la elipse sino que se escogen aquellos conceptos que pueden ser trabajados por los estudiantes de grado 11 de educación media.

Se aborda en el trabajo aquellas investigaciones o experiencias de aula donde se evidencian las dificultades que tienen los estudiantes en el trazado de curvas en el plano. También se toman los escritos sobre las cónicas que hacen referencia a la representación de estas en el plano cartesiano o algunos procedimientos para su construcción; y se tienen en cuenta aquellas investigaciones que plantean que los estudiantes son capaces de trabajar con coordenadas polares.

Para el diseño de la unidad didáctica se aplica una prueba diagnóstica que nos permite evidenciar los saberes previos de los estudiantes como lo propone Ausubel "…el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que posee el alumno. Esto solo será posible si el estudiante utiliza los conocimientos que ya posee, aunque éstos no sean totalmente correctos" (Carretero: 1993, P 27) [9]. Además, se tienen en cuenta los cinco procesos generales de la actividad matemática propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en los lineamientos curriculares [23] y estándares de competencias en matemáticas [22]: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

La propuesta toma elementos de la Educación Matemática Realista (EMR) [2] propuesta por Hans Freudenthal en donde plantea que el contexto de la vida diaria y la experiencia real, deben permitir llegar a una "matemática para todos", en este sentido las actividades planteadas permite en los estudiantes la posibilidad de encontrar la manera de cómo afrontar la matemática, entonces "… se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones… que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas para su organización y solución" [2]. En este orden de ideas "…los contextos en la Educación Matemática Realista se constituyen en puntos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles luego avanzar hacia niveles de mayor formalización" [2].

A partir de lo anterior, se seleccionan los contenidos y se plantean los objetivos de aprendizaje; las actividades que permiten alcanzar esos objetivos; y los recursos y materiales que facilitan el aprendizaje. Se hace la aplicación de las actividades y se formulan unas conclusiones y recomendaciones.

Con la presente propuesta, los estudiantes de grado once (11) de la Institución Educativa Municipal Santiago Pérez, identifican, usan y describen los conceptos básicos de las coordenadas polares y los aplican en análisis y representación de curvas y en especial de la parábola y la elipse. A través de situaciones que se proponen en las actividades.

3. Desarrollo de la propuesta

3.1 Referentes Históricos y Epistemológicos

3.1.1. Primeras ideas de coordenadas

La manera como Apolonio (262 a.C-169 a. C) en su obra, Las Cónicas, le da un tratamiento a las secciones cónicas relacionándolas con áreas y longitudes es una técnica que habían utilizado los pitagóricos. Lo anterior, es uno de los primeros inicios relacionados con la utilización de coordenadas como lo afirma González [2003] Apolonio considera ciertas líneas de referencia –diámetros conjugados o diámetro –tangente-, que juegan un papel de coordenadas. También, en las observaciones astronómicas realizadas por los egipcios o desde Hiparco como lo dice Bell (Bell: 1949; P146) [4] como todo astrónomo que ha estudiado la posición de los planetas, Hiparco utilizó las coordenadas, y en particular la longitud y la latitud. Estas aproximaciones no representan por si solas el uso de un sistema de coordenadas, no parece presentarse ningún caso en la geometría antigua en el que se fije un sistema de coordenadas de referencia a priori, con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica o retórica [6].

3.1.2. Renato Descartes y la geometría analítica

Renato Descartes (1596-1650) hizo junto con Fermat unos de los aportes importantes en el desarrollo de las matemáticas al relacionar elementos del álgebra y la geometría en particular lo que se refiere a la representación en coordenadas cartesianas como lo afirma González [15], los trabajos de Euler sobre Geometría Analítica representan la consumación de las ideas de Fermat y Descartes en la aplicación de las ecuaciones del Álgebra a la resolución de problemas geométricos mediante sistemas de coordenadas. Esta poderosa herramienta solucionaría muchos de los problemas antiguos sobre lugares geométricos, curvas, tangentes entre otros. La disciplina que crearon Descartes y Fermat se llama geometría de coordenadas o analítica, y su idea central es asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies [19]. Los trabajos de Descartes y Fermat están relacionado con la forma de presentar la geometría analítica y difieren profundamente. Por un lado, Fermat para sus investigaciones sobre las curvas parte de las obras de los antiguos geómetras griegos en especial de las obras de Apolonio y por su parte Descartes en su obra La Géometrie hace una crítica de la tradición griega y proponía con sus métodos romper con ella [19].

En el sistema de coordenadas cartesiano, la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados. Con lo anterior, hallaba la ecuación, la resolvía, la interpretaba geométricamente (Sánchez: 2012) [29]. Con la invención de la geometría analítica se establecen las relaciones entre las letras como variables y las diferencias de estas con las constantes; de las curvas planas y sus ecuaciones y entre otras relaciones, las superficies y las ecuaciones de tres variables, entonces una circunstancia afortunada fue la aparición en el momento justo de la Geometría analítica, la gran creación del siglo XVII [5].

3.1.3. Isaac Newton y las coordenadas polares

Antes que Isaac Newton (1642-1727) inventara las coordenadas polares, una de las primeras aproximaciones la hace Bonaventura Cavaliere (1598-1647) cuando relaciona los puntos de la parábola de Apolonio con la espiral de Arquímedes, como lo afirma Boyer [6] la idea de comparar indivisibles rectilíneos con indivisibles curvilíneos. Cavaliere relaciona mediante una rotación alrededor del vértice O la parábola $x^2 = ay$, como se muestra en figura 3-1. Dando la forma de un espiral, que el punto O permanezca fijo, mientras que el punto P, pasa a ocupar la posición P´, entonces las ordenadas de los puntos de la parábola se consideran como transformadas en radios vectores por medio de las relaciones $x = r$ e $y = r\theta$, lo que ahora llamamos coordenadas cartesianas y polares [6].

Figura 3-1 Parábola y espiral

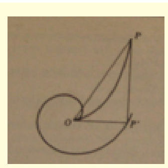


Figura 3-1. Parábola y espiral

Newton en su obra The Method of Fluxions and Infinite Series, escrita hacia el año 1671 pero publicada por primera vez en 1736, presenta una de las ideas originales el haber empleado nuevos sistemas de coordenadas [18] buscando dar solución a problemas relacionados con las curvas y las tangentes, según Boyer [7] se presentan en esta obra ocho nuevos sistemas de coordenadas la que llama Newton su séptima manera para espirales, es el que se conoce familiarmente hoy con el nombre de coordenadas polares, este sistema de coordenadas polares permite determinar la subtangentes de las espirales en especial la espiral de Arquímedes también se definen en esta obra las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares Boyer [6]. Newton en su obra emplea la geometría analítica, sobre todo el trazado de curvas a partir de sus ecuaciones. Los matemáticos de la época usaban generalmente un solo eje y trazaban los valores de “y” formando un ángulo recto u oblicuo con el eje, esto es lo que corresponde particularmente a nuestro sistema de coordenadas polares [19]

Las coordenadas polares establecidas por Newton toman la distancia y un ángulo para representar un punto del plano, el haber utilizado este ángulo es la característica esencial en el que los parámetros difieren de los adoptados por Descartes y Fermat [11]. En 1803 Carnot en su obra, Géometrie de position, se da cuenta que los sistemas de coordenadas cartesianos y polares podían modificarse de muchas maneras este hecho ya lo había formulado Newton. Carnot afirma que la ecuación de una curva depende del sistema de coordenadas que se utilice para representarla pero que las propiedades de dicha curva no dependen del sistema de ejes elegido [6].

La invención de las coordenadas también se le atribuye a Jacques Bernoulli porque hace una publicación de un artículo antes que Newton en el Acta Eruditorum de 1691 [19]. Newton y Jacques Bernoulli introducen y emplean lo que son esencialmente las coordenadas polares para curvas especiales, otros autores como Jacob Hermann en 1729 no solamente proclamó su utilidad general, sino que también las aplicó al estudio de curvas, proporcionando transformaciones de coordenadas polares a rectangulares usando las notaciones de $sen\theta \ y \ cos\theta$. Por su parte Euler extendió el uso de las coordenadas polares y utilizó claramente la notación trigonométrica y es él, quien prácticamente implanta el sistema moderno [20].

3.1.4. Las Cónicas y otras curvas

Algunos problemas planteados en la antigüedad generaron importantes contribuciones a las matemáticas en lo que se refiere a la generación de curvas y las secciones cónicas, los tres problemas griegos de la antigüedad como se conocen, los presenta Bell [4], así: problema uno. Trisección del ángulo; problema dos. Construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del de otro dado; y el problema tres. Construir un cuadrado de igual área que un círculo dado. Para dar solución a estos tres problemas fue necesario la construcción de curvas como por ejemplo la concoide de Nicomedes (siglo II a. c) se inventó para resolver el problema de la trisección y la cuadratriz, de Hipias (siglo V a. c) para la rectificación y la cuadratura del círculo. Es preciso indicar que estas curvas son representadas, entre otros sistemas, a lo que hoy se conoce como sistema de coordenadas polares.

Los griegos clasificaron las curvas teniendo en cuenta los criterios establecidos por Pappus según Kline [1992-1] la clasificación que hacen los griegos es la siguiente: los lugares planos o curvas planas eran los que se podían construir a partir de líneas rectas y círculos; las cónicas recibían el nombre de lugares sólidos puesto que se originaban a partir del cono; las curvas lineales, como cuadratrices, concoides, cisoides y espirales formaban la tercera clase. Curvas como la cuadratriz de Hipias, la concoide de Nicomedes y la cisoide de Diocles quedaron como algo marginal de la geometría; recibieron, en este caso, el calificativo de mecánicas, más que geométricas.

Entre las curvas también se destacan la lemniscata introducida por Bernoulli en 1694, que es un caso particular de las curvas llamadas óvalos de Cassini o lemniscatas generales. El propio Descartes introdujo la espiral logarítmica, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = a^{\theta}$[19].

Con relación a las cónicas el primero que hace mención a estas curvas es Menecmo (375 a.C-325 a.C) como lo afirma Bourbaki [5] los primeros ejemplos de cónicas (distintos de la circunferencia) que se introduce a propósito del problema de la duplicación del cubo, son las curvas de Menecmo discípulo de Eudoxio a mediados del siglo IV. Menecmo había encontrado la manera de generar unas curvas por el mismo método buscando dar solución al problema de la duplicación del cubo utilizando cortes sobre un cono tal como lo afirma Boyer [6] cortando un cono circular recto por un plano perpendicular a un elemento o generatriz del cono, lo que se le atribuye a Menecmo es precisamente el descubrimiento de las curvas que recibieron más tarde los nombres de parábolas y elipse, entre otras.

Sin embargo, fue Apolonio en su obra Las Cónicas el que presenta por primera vez una sistematización de las secciones cónicas en su obtención y propiedades, al respecto Bell [4] dice que, uno de los resultados decisivos que consiguió Apolonio fue reemplazar las tres especies de conos que usaban sus predecesores para obtener las diferentes cónicas, por el cono circular recto del que todas son secciones. Para la parábola y la elipse. Ver figura3-2.

Figura 3-2 La Parábola y la elipse de Apolonio

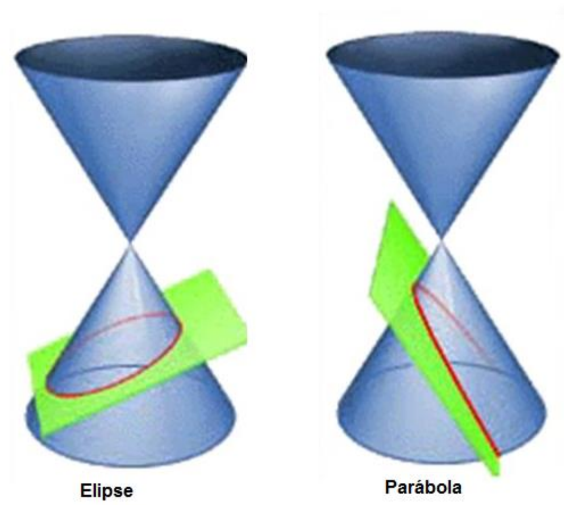


Figura 3-2. La parábola y la elipse de Apolonio

Las Cónicas de Apolonio según Kline [19] es una obra que consta de ocho libros que contienen 487 proposiciones, se conservan las cuatro primeras reproducidos en manuscritos griegos de los siglos XII y XIII, y los tres siguientes en una traducción al árabe escrita en 1920 y el octavo libro se ha perdido. Con relación a Las Cónicas Guzmán [16] hace un resumen, así:

I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
II. Diámetros, ejes y asíntotas.
III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Norma, evouta, centro de curvatura.
VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica hallar el cono.
VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
VIII. (Se desconoce su contenido. Tal vez problemas sobre diámetros conjugados).

El libro I, comienza con la generación del cono circular oblicuo de dos hojas que, seccionado por un plano, dará lugar a los diferentes tipos de cónicas. Apolonio ha captado cómo esta consideración de un solo cono permite la obtención de las tres cónicas según la inclinación diversa del plano e introduce el lado recto, considera el centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes… y ataca el problema de construcción de la cónica dados diversos elementos.

El libro II, estudia fundamentalmente las propiedades de las asíntotas de la hipérbola. El lenguaje de Apolonio es, por supuesto, un lenguaje sintético, utilizando a la perfección los viejos procedimientos pitagóricos de la aplicación de las áreas. Los resultados sin embargo son fácilmente traducibles al lenguaje de la geometría analítica.

El libro III, se dedica primero a estudiar las relaciones de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados. Obtiene la relación armónica sobre los cuatro puntos determinados en una secante a la cónica que pasa por un punto, su polar y los dos de intersección de la secante con la cónica. En la proposición 41 se establece cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón y así resulta la parábola como envolvente de las rectas con esta propiedad.

El libro IV, es de bastante menos valor. En él estudia el número de puntos de intersección de las cónicas. Es interesante desde el punto de vista lógico que de sus 57 proposiciones, las 23 primeras se demuestren por reducción al absurdo.

El libro V, que consta de 77 proposiciones es, con gran diferencia, el más sorprendente de todos. Se puede decir que en él Apolonio, 20 siglos antes que Huygens (en su Horologium Oscillatorium, 1763) introduce ya, a su modo, con instrumentos puramente sintéticos, nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura, etc.,… y que logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.

En el libro VI, dedicado fundamentalmente a la igualdad y semejanza de cónicas aparece el problema interesante siguiente: dada la cónica y dado el cono circular recto hallar una sección del cono que sea igual a la cónica dada.

Las proposiciones del libro VII, nuevas en su mayor parte, como Apolonio mismo señala, contiene numerosas relaciones métricas entre diámetros conjugados, áreas, etc…

Con relación a libro VIII, Kline [19] afirma que sea perdido, aunque en el siglo XVII Halley llevó a cabo una reconstrucción basándose en las indicaciones de Pappus.

Los sucesos históricos y epistemológicos descritos anteriormente, orientan la estructura de la propuesta que inicia con un tablero de tiro al blanco que da la idea de medición de ángulo y radio vector para establecer la ubicación de un punto, recreando el plano polar inventado por Newton. La construcción mecánica de la parábola y la elipse muestran un acercamiento a lo que Menecmo y Apolonio hicieron. Luego, las cónicas y otras curvas con el pasar de los siglos son representadas en un sistema de coordenadas, para el caso de esta propuesta son representadas en el plano polar. Los estudiantes experimentan estos procedimientos en una secuencia de actividades que son desarrolladas a la luz de la teoría de Brousseau [8] que dice, "para hacer posible semejante actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que pueden vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como solución óptima y descubrible en los problemas planteados".

Así mismo, para cumplir con el propósito de estas situaciones en este trabajo los objetos matemáticos deben pasar por dos de los momentos que plantea Chevallard [13] primero, la protomatemática, en donde los conceptos son usados en forma implícita en actividades del ser humano, se determinan condiciones de uso y manejo, pero no hay conciencia de la existencia como objeto abstracto y después la paramatemática, en donde la toma de conciencia de la existencia del concepto generado por la familiaridad de uso, a pesar de que estudian sus relaciones, propiedades, organizaciones, aún no hay teoría que lo sustente.

3.2. Referentes disciplinares

Los aspectos disciplinares que se desarrollan en la unidad didáctica no pretenden ser un tratado sobre el sistema de coordenadas polares y la aplicación de este en la representación de curvas sino que se toman elementos que permiten hacer una introducción a este sistema de coordenadas con estudiantes de grado 11 de educación media.

Con relación a los textos escolares de enseñanza media consultados, la mayoría no tienen en sus contenidos las coordenadas polares, por ejemplo: Conexiones matemáticas 10 de grupo editorial norma; Nueva Matemática Constructiva 10 de libro y libro S.A; Matemáticas Prentice Hall Trigonometría de Prentice Hall; Trigonometría y Geometría Analítica de Santillana e Hipertexto matemáticas de Santillana. Los anteriores textos presentan el tema sobre secciones cónicas con dibujos de cortes de cono y la definición del lugar con sus ecuaciones cartesianas que se deducen a partir de la definición utilizando el plano cartesiano. En el texto escolar Desempeños Matemáticos 10 de editorial educativa hacen una breve presentación de coordenadas polares, dan una definición y de inmediato muestran una relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas y sus conversiones. Por último muestran una tabla y la gráfica de una curva en el plano polar sin mencionar por ejemplo, las simetrías de las curvas que son importantes a la hora de graficar. En este sentido la propuesta didáctica se convierte en una buena alternativa para el docente de enseñanza media, si pretende introducir estos temas en coordenadas polares.

En los libros de texto de enseñanza universitaria revisados se tiene que, el Cálculo y Geometría Analítica de Stein y Barcellos y el Cálculo de Edwards definen el plano polar y la relación con los elementos del plano cartesiano, grafican curvas en el plano polar pero no hacen mención de las cónicas en este sistema de coordenadas. En el Cálculo con Geometría Analítica de Swokowski [30] hacen una presentación similar con relación al plano polar y la representación de curvas, con la diferencia que en este cálculo incluyen una sección de las cónicas en coordenadas polares. Para la propuesta se toman como base de los aspectos disciplinares el Cálculo con Geometría Analítica de Leithold [21] y el Cálculo Multivariable de Stewart, estos libros hacen referencia del sistema de coordenadas polares y las cónicas en el plano polar con sus ecuaciones de forma detallada en comparación con los libros mencionados anteriormente.

3.2.1. Sistema de coordenadas polares

El método para especificar la posición de un punto en el plano se llama un sistema de coordenadas, existen diferentes sistemas de coordenadas para fijar la posición de un punto en el plano, los dos sistemas más aceptados son principalmente el sistema de coordenadas cartesiano y el sistema de coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas son números, la abscisa y la ordenada, y tales números son distancias desde dos rectas fijas. El sistema de coordenadas polares es importante debido a que proporciona ecuaciones más simples para algunas curvas. En coordenadas polares las cónicas por ejemplo tienen una ecuación. Esta ecuación se aplica en la deducción de las leyes de Kepler de la física y al estudio de los movimientos planetarios en astronomía.

Las coordenadas polares consisten en una distancia dirigida y un ángulo respecto a un punto fijo y a un rayo fijo (o semirrecta). El punto fijo recibe el nombre de polo (u origen) y se designa con la letra O. Al rayo fijo se le llama eje polar (o recta polar) y se designa como OA. El rayo OA suele trazarse horizontalmente y se prolonga en forma indefinida. Ver figura 3-3.

Figura 3-3 Plano sistema coordenadas polares

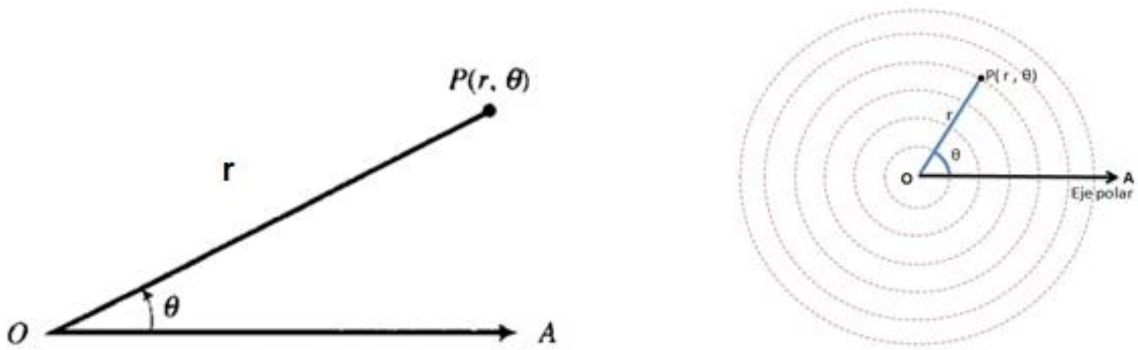


Figura 3-3. Plano sistema coordenadas polares

El ángulo θ se mide en radianes y es positivo si se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, partiendo del eje polar, y negativo si se toma en la dirección en que giran las manecillas del reloj. Ver figura 3-4.

Figura 3-4 Ángulos positivos y negativos

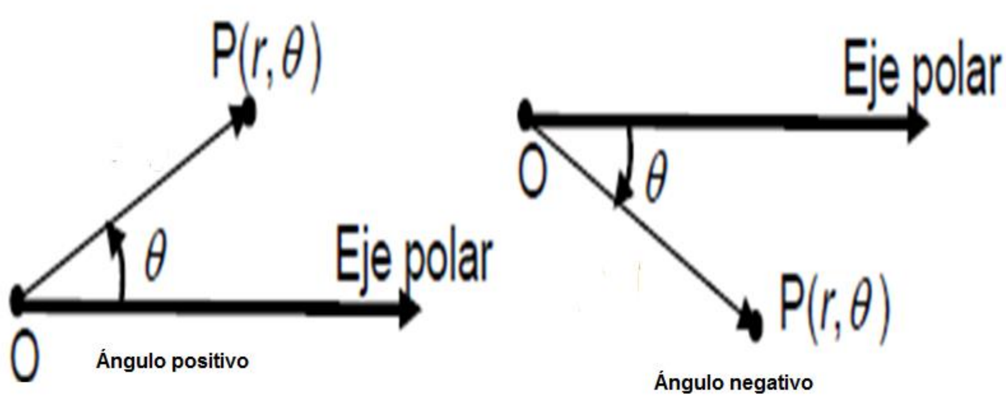


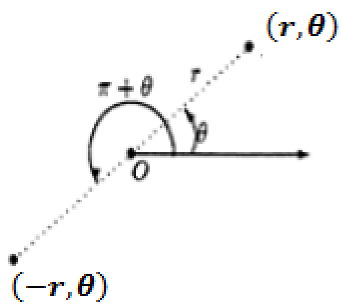
Figura 3-4. Ángulos positivos y negativos

Sea P cualquier punto en el plano de coordenadas polares, distinto de O y θ medido en radianes del ángulo dirigido AOP, teniendo su lado el rayo OA como su lado inicial y el rayo OP como su lado terminal. Entonces, si r es la distancia no dirigida desde O a P (es decir $r = |\overline{OP}|$), un conjunto de coordenadas polares de P está dado por r y θ y se escriben estas coordenadas como (r, θ).

En el sistema de coordenadas polares un punto dado tiene un número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares a diferencia del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en donde existe una correspondencia uno a uno entre el sistema de coordenadas cartesiana rectangulares y la posición de los puntos en el plano.

Ahora si tomamos las coordenadas polares para r negativo. En este caso, en lugar de que el punto se encuentre en el lado terminal del ángulo, se halla en la prolongación del lado terminal, que es el rayo desde el polo en dirección opuesta al lado terminal. Entonces, si P está en la prolongación del lado terminal del ángulo θ medido en radianes, un conjunto de coordenadas polares de P es (r, θ), donde $r = -|\overline{OP}|$. Ver figura 3-5.

Figura 3-5 Representación Punto para r negativo



Se mencionó anteriormente que a un punto particular se le puede asignar un número ilimitado de conjunto de coordenadas polares. Pero si se hace una restricción para un punto P que no es el polo, y r y θ se toman de tal forma que $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces existe un conjunto único de coordenadas polares para P. Como el ángulo por lo general se mide en radianes se tiene que un conjunto de coordenadas polares de un punto es un par ordenado de números reales. A cada uno de los pares ordenados le corresponde un único punto que tiene este conjunto de coordenadas polares.

3.2.2. Gráfica de una ecuación en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares r y θ, consiste en todos aquellos (y sólo aquellos) puntos P que tengan por lo menos un par de coordenadas que satisfagan la ecuación. La ecuación de una gráfica en coordenadas polares se le llama ecuación polar. A continuación se muestra como se determinan las ecuaciones que se trabajan en la propuesta, estos pasos generalmente no se hacen en el aula en donde las ecuaciones se les dan a los estudiantes sin mostrar de donde se obtienen. Se puede empezar preguntando previamente ¿qué condición cumple un punto (r,θ) para que sea punto de la curva? Se considera un punto arbitrario (r,θ), luego, se somete a las propiedades geométricas de la curva obteniéndose como respuesta la ecuación. Partiendo de la gráfica a la ecuación.

3.2.3. Ecuación de una recta en coordenadas polares

Si una línea recta pasa por el polo, su ecuación polar es de la forma:

$$\theta = C$$

Donde C es una constante que representa el ángulo polar de cualquier punto de la recta. Ver figura 3-6.

Figura 3-6 Gráfica línea recta que pasa por el polo

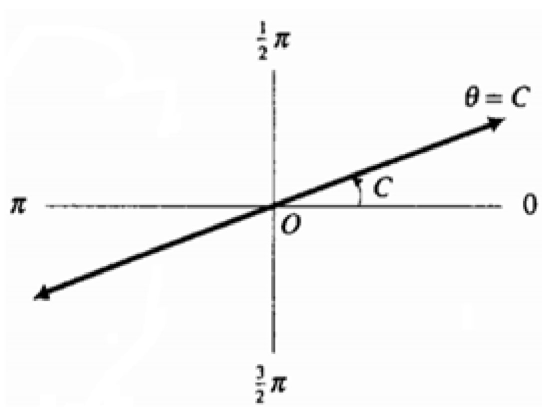


Figura 3-6. Gráfica línea recta que pasa por el polo.

Se considera el caso en que la recta no pase por el polo. Para esto se debe estudiar las posibilidades, como se muestra en la figura 3-7, la recta L no sea paralela al eje polar o al eje a 90°o ($\frac{1}{2}\pi$); o bien, para el caso en que L sea paralela o perpendicular al eje polar.

Figura 3-7 Rectas que no pasan por el polo

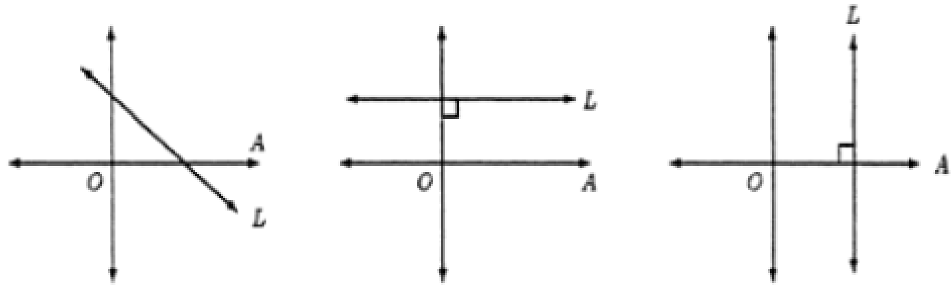


Figura 3-7. Rectas que no pasan por el polo

- Sea L una recta no paralela ni perpendicular al eje polar. Desde el polo se traza la normal ON a L. Sean P (r, θ) un punto cualquiera de L y (p, ω) el par principal $p > 0 \; y \; 0 \leq \theta < 360°$ o $(0 \leq \theta < 2\pi)$ de coordenadas polares de N, ver figura 3-8.

Figura 3-8 Construcción para obtener la ecuación recta

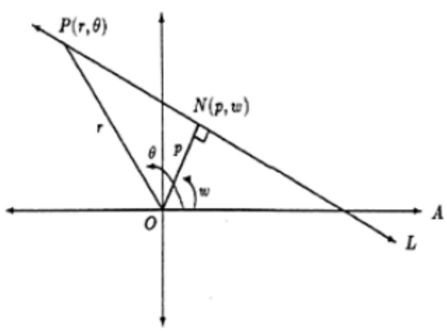


Figura 3-8. Construcción para obtener la ecuación recta que no es paralela ni perpendicular al eje polar.

El triángulo ΔONP es un triángulo rectángulo, recto en N, uno de cuyos ángulos agudos es $(\theta - \omega)$ y de hipotenusa r. Por lo tanto:

$$cos(\theta - \omega) = \frac{p}{r}$$

es decir:

$$rcos(\theta - \omega) = p$$

que representa la ecuación polar de L.

- Si la recta L es perpendicular al eje polar y se encuentra a $p > 0$ unidades del polo, como se muestra en la figura 3-9, entonces, de acuerdo con el análisis del primer caso, $\omega = 0$ y la ecuación polar de L es de la forma:

$$r cos\theta = \pm p; \ \ (p > 0)$$

tomando el signo positivo o negativo según si la recta esté a la derecha o a la izquierda del polo respectivamente.

Figura 3-9 Construcción para obtener la ecuación de la recta perpendicular al eje polar

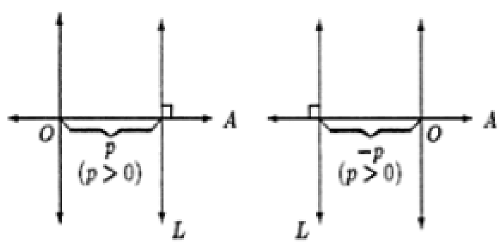


Figura 3-9. Construcción para obtener la ecuación de la recta perpendicular al eje polar

- Ahora, se considera el caso en que la recta L sea paralela al eje polar, como se muestra en figura 3-10, donde L se encuentra a $p > 0$ unidades del polo.

Figura 3-10 Construcción para obtener la ecuación de la recta paralela al eje polar

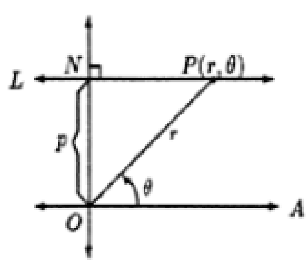


Figura 3-10. Construcción para obtener la ecuación de la recta paralela al eje polar.

Si P (r, θ) es un punto genérico de L, ΔOPN es un triángulo rectángulo, recto en N, de hipotenusa r.

Se sabe que $< NPO \approx \theta$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Así, en ΔNPO:

$$sen\theta = \frac{p}{r}$$

es decir:

$$rsen\theta = p$$

Para el caso en que L esté por abajo del eje polar:

$$rsen\theta = -p; (p > 0)$$

Los resultados obtenidos se resumen en la tabla 3-1.

Tabla 3-1 Ecuación de la recta en coordenadas polares

Enunciado	Ecuación polar de la recta
Si (p, ω) es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a una recta L en el plano coordenado polar.	$rcos(\theta - \omega) = p$
Si la recta pasa por el polo	$\theta = C$ donde C es una constante que puede restringirse a valores no negativos menores de 180°
Si la recta es perpendicular al eje polar y se encuentra a p unidades del polo	$rcos\theta = \pm p, (p > 0)$ donde se elige el signo positivo o el negativo según si la recta esté a la derecha o a la izquierda del polo
Si la recta es paralela al eje polar y se encuentra a p unidades de él	$rsen\theta = \pm p, (p > 0)$ donde se elige el signo positivo o el negativo según si la recta esté sobre o debajo del eje polar

Tabla 3-1. Ecuación de la recta en coordenadas polares.

3.2.4. Simetrías de gráficas de ecuaciones polares

Para verificar la simetría de puntos con puntos y puntos con rectas, se tienen en cuenta las siguientes definiciones:

Dos puntos P y Q son simétricos con respecto a una recta, si y sólo si la recta es la perpendicular bisectriz del segmento PQ; y que dos puntos P y Q son simétricos con respecto a un tercer punto si y sólo si el tercer es el punto medio del segmento de recta.

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto a una recta l si y sólo si para todo punto P en la gráfica hay un punto Q, también situado en la gráfica, tal que P y Q sean simétricos con respecto a l.

Simetría respecto al eje polar:

Si la curva es simétrica con respecto al eje polar, para cada punto P existe un punto P´, también de la curva, tal que el segmento PP´ es bisecado perpendicularmente por el eje polar, como se muestra en la figura 3-11.

Figura 3-11 Simetría respecto al eje polar

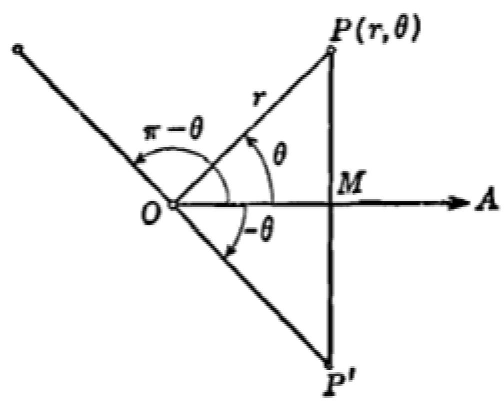


Figura 3-11. Simetría respecto al eje polar

Si M es el punto medio del segmento PP´, de los triángulos rectángulos OPM y OP´M se deduce que las coordenadas de P’ $(r,-\theta)$ y $(-r,\pi-\theta)$. De lo anterior se tiene que: si se obtiene una ecuación equivalente para una ecuación en coordenadas polares cuando (r,θ) se sustituye por $(r,-\theta)$ o bien $(-r,\pi-\theta)$, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje polar. Las demostraciones para las dos siguientes

Simetría respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$: Si para una ecuación en coordenadas polares se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, \pi - \theta)$ o bien $(-r, -\theta)$, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$.

Simetría respecto al polo: Si para una ecuación en coordenadas polares se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se reemplaza por $(-r, \theta)$ o bien $(r, \pi + \theta)$, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al polo.

Cuando se traza una gráfica y se quiere saber si el polo está dentro de la gráfica se debe sustituir 0 por r se resuelve para θ.

3.2.5. La Cardioide

A continuación se muestra como se obtiene la ecuación de la Cardioide. Es importante resaltar que en los textos para enseñanza escolar muy pocos muestran este tipo de procedimientos. Como se menciona anteriormente, las ecuaciones se dan y los estudiantes no tienen la oportunidad de reflexionar sobre las construcciones geométricas, de cómo pasar de la gráfica a la ecuación. Esto permite desarrollar procesos de modelación y tener la idea de generalización, fundamental en matemáticas.

Sea $r = acos\theta$ la ecuación de una circunferencia, $a > 0$ y B es un punto cualquiera de la circunferencia. Sobre el radio vector OB se toma un punto tal que $BP = a$. Se debe hallar el lugar geométrico de P, como se indica en la figura 3-12.

Figura 3-12 Construcción ecuación polar Cardioide

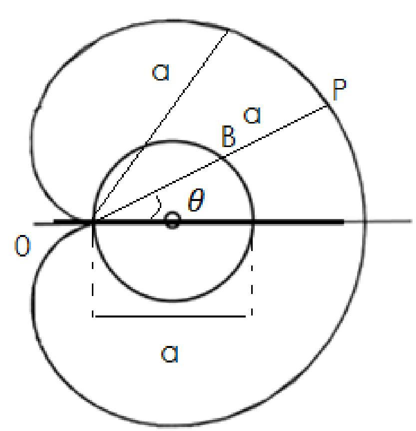


Figura 3-12. Construcción ecuación polar cardioide.

Se representan las coordenadas de B por (r_1, θ) y las P por (r, θ), según el enunciado, se tiene:

$$\theta = \theta_1; \;\; OB = r_1 = acos\theta \text{ y}$$

$$OP = OB + a, \text{ por lo tanto}$$

$$r = acos\theta + a = a(cos\theta + 1)$$

$$r = a(cos\theta + 1)$$

Ahora, si tenemos que $r = acos\theta$, $a < 0$ y las coordenadas de los puntos $B(-r_1, \theta_1 - 180°)$ y $P(r, \theta - 180°)$, como se muestra en la figura 3-13.

Figura 3-13 Construcción ecuación polar Cardioide

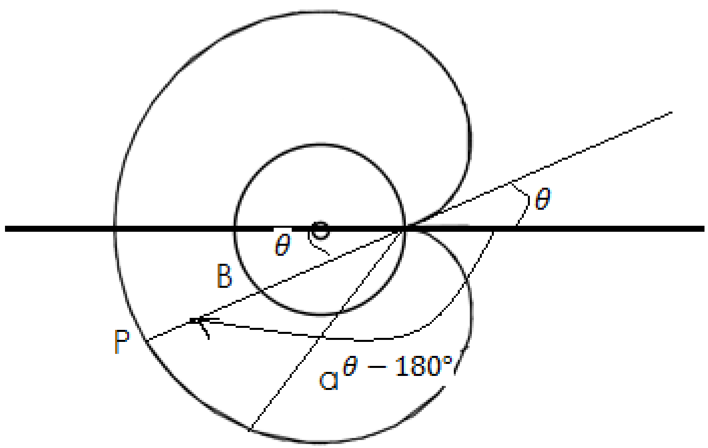


Figura 3-13. Construcción ecuación polar cardioide.

Se tiene que:

$$\theta_1 - 180° = \theta - 180°$$
$$\theta_1 = \theta$$

$$OB = r_1 = \text{acos}(\theta - 180°) \, y \;\; OP = OB + a;$$

Por lo tanto $$r = \text{acos}(\theta - 180°) + a;$$

Por identidades trigonométricas

$$r = acos\theta cos180° + sen\theta sen180° + a$$
$$r = -acos\theta + a$$
$$r = a - acos\theta$$

$$r = a(1 - cos\theta)$$

Otras ecuaciones para la Cardioide que se pueden deducir, con procedimientos similares, son: $r = a(1 + sen\theta)\ y\ r = a(1 - sen\theta)$

3.2.6. La Elipse y la Parábola en coordenadas polares

Una sección cónica se puede definir como el conjunto de todos los puntos P en un plano de manera que la razón de la distancia no dirigida de P desde un punto fijo a la distancia no dirigida de P desde una recta fija que no contenga el punto fijo sea una constante positiva e. Además, si $e = 1$, la sección del cono es una parábola y $0 < e < 1$, se trata de una elipse.

Demostración. Si $e = 1$, por la definición anterior y la definición de parábola (una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano, equidistante de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se llama foco, la recta fija, directriz).

Supongamos ahora que $e \neq 1$ y F denota el punto fijo y l, la recta fija.
Se toma F como el polo y el eje polar su prolongación perpendicular a l. Consideremos el caso cuando la recta l está a la izquierda del punto F. Sea D el punto de intersección de l con la prolongación del eje polar y sea que d represente la distancia no dirigida de F a l.Ver figura 3-14.

Figura 3-14 Construcción para obtener cónica

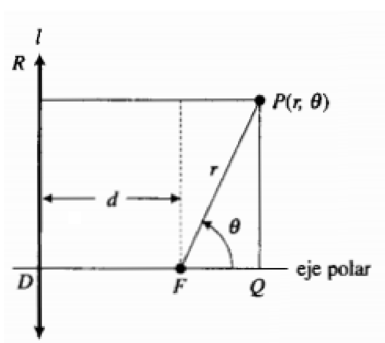


Figura 3-14. Construcción para obtener cónica

Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera del conjunto situado a la derecha de l y en el lado final del ángulo que mide θ. Se trazan las perpendiculares PQ y PR al eje polar y recta l, respectivamente.

El punto P está en el conjunto descrito si y sólo si

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \qquad (1)$$

Como P está a la derecha de l, $\overline{RP} > 0$; así, $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Además, $|\overline{FP}| = r$ ya que $r > 0$. De manera que, de (1) se tiene

$$r = e(|\overline{RP}|) \qquad (2)$$

Sin embargo, $\overline{RP} = \overline{DQ}$ y como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, se tiene

$$\overline{RP} = d + rcos\theta$$

Al sustituir esta expresión de RP en (2)obtenemos

$$r = e(d + rcos\theta)$$

$r = ed + ercos\theta$ .Transponiendo términos.

$$r - ercos\theta = ed$$

$$r(1 - ecos\theta) = ed$$

$$r = \frac{ed}{1 - ecos\theta} \qquad (3)$$

Donde e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente. Esta ecuación representa las cónicas. Entre las cónicas que puede representar esta la parábola o la elipse, como se muestra en la figura 3-15.

Figura 3-15 Elipse y parábola en el plano polar

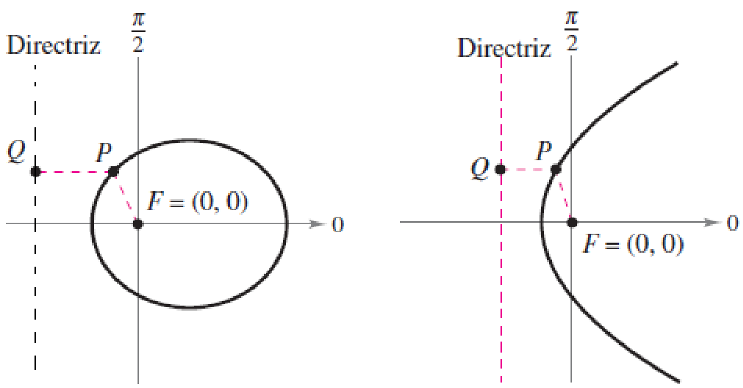


Figura 3-15. Elipse y parábola en el plano polar

Con procedimientos similares se pueden obtener las ecuaciones de la parábola $(e = 1)$ y la elipse $(0 < e < 1)$, según la ubicación directriz $d > 0$, con respecto al polo (foco). Estas ecuaciones se muestran en la tabla 3-2.

Tabla 3-2 Ecuaciones polares de las cónicas

Enunciado	Ecuación polar cónicas, $d > 0$
Directriz horizontal arriba del polo	$r = \dfrac{ed}{1 + esen\theta}$
Directriz horizontal abajo del polo	$r = \dfrac{ed}{1 - esen\theta}$
Directriz vertical a la derecha del polo	$r = \dfrac{ed}{1 + ecos\theta}$
Directriz vertical a la izquierda del polo	$r = \dfrac{ed}{1 - ecos\theta}$

Figura 3-2. Ecuaciones polares de las cónicas.

3.2.7. Aplicaciones de la parábola y la elipse

La parábola y la elipse son utilizadas en las estructuras y diseños de muchos objetos, en construcciones arquitectónicos, en aparatos tecnológicos utilizados en la navegación, en astronomía, medicina, entre otros. Para describir movimientos de objetos y en algunas propiedades ópticas.

3.2.8. Algunas aplicaciones de la parábola

A continuación se mencionan algunas aplicaciones de la parábola.

En las antenas de discos que reciben señales de radio, televisión, internet, entre otros.

La trayectoria de un proyectil, en el cable de un puente colgante, entre otros.

En el espejo parabólico de un faro buscador, los reflectores parabólicos de los faros de los automóviles, entre otros.

La propiedad de reflexión de la parábola se utiliza en el diseño de espejos parabólicos que tienen la forma de la superficie obtenida al girar sobre el eje de simetría de una parábola. Ver figura 3-16.

Figura 3-16 Reflector parabólico

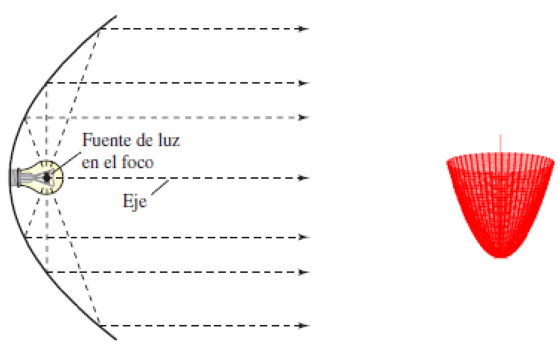


Figura 3-16. Reflector parabólico

La propiedad de reflexión de una parábola se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea P un punto de una parábola. Ver figura 3-17. La tangente a la parábola en el punto P produce ángulos iguales con las dos rectas siguientes:

- La recta que pasa por P y por el foco.
- La recta paralela al eje de la parábola que pasa por P.

Figura 3-17 Propiedad parábola

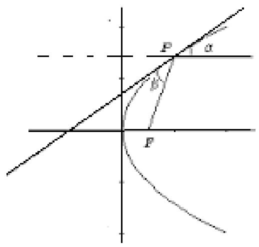


Figura 3-17. Propiedad parábola.

3.2.9. Algunas aplicaciones de la elipse

En la astronomía, porque las órbitas de planetas y satélites describen trayectorias elípticas.

En la construcción de engranajes para máquinas.

En la forma de bases en envases, el los logos de algunos automóviles, en algunos engranajes de las bicicletas de carreras entre otros.

En las actividades propuestas los estudiantes exploran algunas de las aplicaciones de estas curvas, con el propósito de relacionar las matemáticas con el diario vivir y con otras ciencias para que el aprendizaje sea significativo y genere cierta disposición por esta disciplina.

3.3. Referentes Didácticos

3.3.2. Dificultades en la enseñanza de coordenadas

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es importante bindarles a los estudiantes las diferentes maneras en las que pueden ser contextualizadas y/o representadas, "…entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial"(MEN: 2006, P61) [22].

Los estudiantes de los grados 10 y 11 evidencian aún dificultades con el sistema de coordendas rectángulares, y su aplicación en la representación gráfica de las relaciones o funciones reales en el plano. Dificultades que más tarde se manifiestan en la comprensión del concepto de función, como lo plantean: Acuña "dicha graficación es desarrollada con frecuencia y casi exclusivamente a través del método del punteo o tabulación, lo que representa una fuente de error en el aprendizaje e interpretación de las gráficas"(Acuña: 2001)[1]; y Arce y Ortega quienes identifican "deficiencias en el trazado de graficas de funciones de estudiantes de bachillerato" (Arce y Ortega: 2013)[3]. Además de la situación mencionada en este ciclo se introducen en este nivel los conceptos básicos de trigonometría.

Por otra parte, investigaciones como Sandberg, Huttenlocher y Newcambe (1996) plantean que trabajar con el sistema de coordenadas polares resulta más sencillo para los estudiantes debido a "…que son capaces de organizar jerárquicamente el espacio en dos dimensiones de un círculo, al menos a lo largo de la dimensión de la distancia radial"(JIMÉNEZ:2007) [18]; se debe tener en cuenta que los niños pueden ubicar puntos en el plano de coordenadas polares, aunque esto "…implica que debe estar presente alguna capacidad de manejar métricamente relaciones dimensionales, incluso si el niño no es consciente de ello y no emplea medidas evidentes" (JIMÉNEZ:2007) [18]. También Zambrano en su trabajo para estudiantes de grado sexto dice que "…en el plano hay principalmente dos sistema de coordenadas de gran aceptación…las coordenadas rectangulares… coordenadas polares"(Zambrano;2011) [31].

En la revisión de algunos trabajos de grado de la Maestría y artículos de revistas virtuales en los que se abordan las cónicas, se observa al igual que en la mayoría de los textos escolares de educación media consultados que trabajan con coordenadas cartesianas o hacen referencia al trazado de las curvas a partir de diferentes procedimientos, Murillo, J(2013) [24]; Pérez, R (2011) [25]; Pérez, I (2012) [26] y Real, M (2004) [27]. En el texto "Desempeños matemáticos" de editorial educativa (2012) aparece entre las páginas 168 a 170 una rápida mirada de las coordenadas polares sin mencionar por ejemplo aplicaciones en otras áreas, curvas especiales ni tampoco hacer referencia a las cónicas. En la revista electrónica en Blanco y Negro que trata sobre docencia universitaria en el artículo "Coordenadas polares: curvas maravillosas" (Chau y Sánchez:2010)[12], hacen una propuesta didáctica de la aplicación de las coordenadas polares "…con el uso de cumputadoras, se debería enseñar en el colegio las coordenadas polares para poder graficarlas y luego explicar a los alumnos las distintas formas que adopta la naturaleza: la forma de la flores, de los caracoles, etc." (Chau y Sánchez:2010)[12]
.

Como se comentó anteriormente se debe brindar a los estudiantes situaciones que permitan "el desarrollo del pensamiento espacial", y en este sentido aporta el análisis de las coordenadas polares que permite además modelar y describir fenómenos en otras ciencias , como en astronomía por ejemplo, la descripción de las trayectorias planetarias y en física la posición de un punto para especificar el vector.

3.3.3. Referentes del Ministerio de Educación Nacional

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los lineamientos curriculares de matemáticas [23] propone para el dominio del espacio, brindar a los estudiantes alternativas donde puedan hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. En este orden propone el MEN en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos que lo anterior implica el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos;… con la observación y reproducción de patrones…, entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadores para el desarrollo del pensamiento espacial. Este proceso es muy importante y es lo que se pretende con las actividades didácticas , como es la construcción de los objetos matemáticos a partir de elementos de la realidad, este trabajo muy pocas veces se hace cuando se aborda un conocimiento nuevo, sobre todo en cursos superiores de la educación media secundaria.

Para alcanzar lo anterior el MEN en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas [22] propone tres momentos para el favorecer el desarrollo del pensamiento espacial del estudiante, en primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio; para el segundo momento se hace necesario la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué lejos está. Esto hace aperecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos, y un tercer momento son el estudio de las propiedades espaciales que involucran la métrica,… se convertirán en conocimiento formal de la geometría. Y permite el desarrollo de otros pensamientos métrico y variacional. Lo anterior forma parte de la base conceptual de la propuesta. Cada grupo de actividades inicia con la construccción mecánica de las curvas y los materiales para su elaboración, después los estudiantes toman medidas de ángulos y radios vectores, que luego se representan en el plano polar. Finalmente, hacen lecturas de las ecuaciones de las curvas involucradas, utilizan un software educativo involucrándolos en el buen uso de las TIC.

Además, en los lineamientos curriculares y los estándares de competencias en matemáticas se proponen cinco procesos generales de la actividad matemática, que son:

- La formulación, tratamiento y resolución de problemas: esto es un proceso a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del curriculo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la mediada en que las situaciones que se aborden esten ligadas a experiencia cotidianas y, por ende, sean más significativa para el estudiante.
- Modelación: un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible.
- La comunicación: a pesar que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se habla y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolización, para tomar conciencia de

las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

- El razonamiento: El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.
- La formulación, comparación y ejercitación de procedimeintos: este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos", procurando la práctica necesaria para aumentar la velocidad y presición de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, puedan modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sotituidas por otras (MEN) [22].

Los estándares propuesto para cumplir lo anterior para el conjunto de grados 10 y 11, según el Ministerio de Educación Nacional [22], son:

- Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricas, y esféricas) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de estas figuras.
- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Reconcer y describir curvas y lugares geométricos.
- Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas.

Según lo anterior, se plantean actividades en la unidad didáctica donde el estudiante puede interactuar con materiales y recursos que permiten el desarrollo del pensamiento espacial, métrico y variacional.

3.4. Elaboración prueba diagnóstica

En la propuesta didáctica se introducen los conceptos básicos de coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse a partir de los elementos fundamentales de la trigonometría elemental. Para ello se identificaron los tópicos previos(prerequisitos) y los conceptos básicos que a este nivel se pueden trabajar. Con relación a los conocimientos previos de los estudiantes se encontró que manejan la representación de ángulos positivos y negativos en posición normal; convierten medidas de ángulos de grados a radianes y viceversa; hacen uso de las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos. Se encontró que en el manejo de las identidades y ecuaciones trigonométricas ellos tienen algunos vacíos conceptuales y procedimentales respecto a las soluciones de identidades y ecuaciones y fué necesario hacer un refuerzo en estos temas antes de implementar la unidad didáctica. En la elaboración de la prueba diagnóstica es necesario plantear ejercicios o situaciones problemas donde el estudiante haga uso de procedimientos y estrategias que permitan identificar este tipo de dificultades.

3.5. Elaboración de guías

3.5.2. Contenidos y conceptos fundamentales

Sistema de coordenadas polares, simetría en coordenadas polares, graficas en coordenadas polares, Cardioide, parábola y elipse.

3.5.3. Objetivos de aprendizaje

1. Reconocer y usar el sistema de coordenadas polares
2. Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas obtenidas por distintos procedimientos.
3. Identificar y aplicar características de localización de objetos geométricos en el sistema de coordenadas polares en particular de la Cardioide, la parábola y la elipse

4. Reconocer aplicaciones de la parábola y la elipse.

3.5.4. Descripción general de la propuesta

La propuesta está compuesta de 12 guías que forman cuatro (4) grupos de actividades que son situaciones diseñadas para la enseñanza-aprendizaje de conceptos básicos de coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse. Las situaciones se agrupan de la siguiente manera:

- Tiro al blanco y Ubicación de punto en papel polar guías 1 y 2 respectivamente, la construcción de un tablero de tiro al blanco y sus dardos. Luego, medir radios vectores y ángulos para conocer su ubicación de los dardos. Después representar en papel polar la ubicación de los dardos por medio de puntos en coordenadas polares. Estas actividades permiten que los estudiantes se familiaricen con el sistema de coordenadas polares con el objetivo de reconocerlo y usarlo. Objetivo de aprendizaje 1.
- Tejiendo parte I, Tejiendo parte I-A y Aro ula ula guías 3, 4 y 5 respectivamente, en estas actividades el estudiante encuentran la curva llamada cardioide por dos procedimientos distintos y es representada en coordenadas polares teniendo en cuenta el registro de datos y la simetría de la curva, haciendo uso de papel polar. Con estas actividades se cumple el objetivo de aprendizaje 2.
- Obteniendo cónicas; Buscando el foco; La parábola y la elipse en papel polar y Tejiendo la parábola y la elipse guías 6, 7, 8, y 9 respectivamente, con estas actividades se obtienen la parábola y la elipse por diferentes procedimientos, se representan y analizan en el sistema de coordenadas. Cumpliendo con los objetivos de aprendizaje 2 y 3 y fortaleciendo el objetivo de aprendizaje 1.
- Algunas aplicaciones de la parábola, Winplot y lectura guías 10, 11 y 12 respectivamente, son actividades que buscan que los estudiantes afiancen y utilicen los conceptos desarrollados durante las anteriores actividades con la búsqueda de objetos elípticos, aplicación de la propiedad reflectora de la parábola, el uso de un programa como Winplot y la obtención de algunas ecuaciones. Alcanzado el objetivo de aprendizaje 4.

3.6. Metodología

En cada una de las actividades se disponen espacios donde los estudiantes pueden: formar equipos (trabajo en equipo), participar (participa: ¿qué vamos hacer? ¿Y ahora qué?), debatir (Debate), reflexionar y concluir (reflexión y conclusión), y por último socializar (Socializa las conclusiones) las conclusiones del trabajo realizado.

- **Trabajo en equipo**: los estudiantes saben que deben formar equipos de trabajo para desarrollar las actividades.

- **Participa**: participación en cada una de las situaciones planteadas buscando que los integrantes de los equipos se involucren y puedan aportar en la solución de la situación de manera planificada y secuencial.

- **Debate**: teniendo en cuenta las preguntas que se formulen buscando desarrollar la capacidad de argumentar, analizar, concluir y fomentar la sana convivencia. Los estudiantes pueden expresar su punto de vista en donde evidencian sus logros o dificultades y revisan su propio progreso.

- **Reflexión y conclusión**: permite a los integrantes del equipo llegar a acuerdos, pueden reconocer su error, enriquecerlo con otras ideas o mantener su punto de vista.

- **Socializa las conclusiones**: expresa tus conocimientos a la clase. Donde tus ideas como equipo, conclusiones, reflexiones, descubrimientos, aciertos, desaciertos, dificultades y argumentos son presentadas al grupo en general. Estos espacios se desarrollan de manera secuencial.

3.6.1 Evaluación de la unidad didáctica

La evalución se realiza de manera continua en cada uno de los momentos de la clase, es decir, se centra en el aula, se toman como criterios la evalución cualitativa y formativa. Los instrumentos para la recolección de información se inician con una prueba diagnóstica que permite evidenciar los saberes previos de los estudiantes, como se menciona anteriormente; las actividades en el aula, el debate, las conclusiones y la socialización de los resultados son elementos que permiten evidenciar los avences y dificultades de los estudiantes.

El diario del estudiante proporciona información sobre el desarrollo de la clase y el aprendizaje, aspectos que el profesor aprovecha para mejorar las siguientes clase. Se hacen preguntas como:

¿Qué se hizo hoy?

¿Qué aprendí hoy?

¿Cuáles fueron mis dificultades?

Sugerencias

Además, la observación directa del profesor, el diario de clase y el diálogo permanente con los estudiantes, permite analizar lo que sucede con el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Como complemento en la última guía (12) “lectura”, se resuelve una prueba final para concluir la unidad didáctica, porque ayuda al seguimiento de los educandos y se puede observar aspectos relacionados con los objetivos de aprendizaje.

3.6.2 Principios para el desarrollo de la propuesta en el aula

- **Trabajo con materiales y recursos significativos**: se crea una necesidad para trabajar con objetos significativos durante el desarrollo de la propuesta que permita a los estudiantes manipular objetos, observar sus relaciones e interactúar con situaciones de la vida cotidiana en donde relacionan el arte, la decoración, la construcción de elementos para juegos y la aplicación de la recursos tecnológicos con el aprendizaje en el aula. Estas situaciones buscan generar un aprendizaje duradero porque al ser significativo despierta el interés por el conocimiento, por la exploración y la reflexión de los estudiantes y así logran una participación activa durante el desarrollo de las clases.
- **Conformar equipos de trabajos**: en el desarrollo de la propuesta los estudiantes forman equipos de trabajo que van desde 2 hasta 8 integrantes según las indicaciones de cada guía. Estos equipos se conforman para generar ambientes de debate y participacón donde se respete el punto de vista del otro, se desarrolle la capacidad de argumentar, de analizar, de llegar a acuerdos y así poder construir relaciones y propiedades entre los

objetos significativos para generar conceptos que son los conocimientos formales. Esto va a permitir tener estudiantes críticos, capaces de tomar decisiones, que se puedan comunicar de manera asertivay convivir de manera pacífica.

- **Organización de la propuesta**: La propuesta presenta situaciones que se organizan de manera secuencial. Las actividades son diseñadas para alcanzar los objetivos de aprendizaje, se estructuran y se interconectan con relación a situaciones significativas. Para el desarrollo de cada guía se debe disponer de sesiones de clase de mínimo de dos (2) horas.

3.7. Desarrollo metodológico de la propuesta

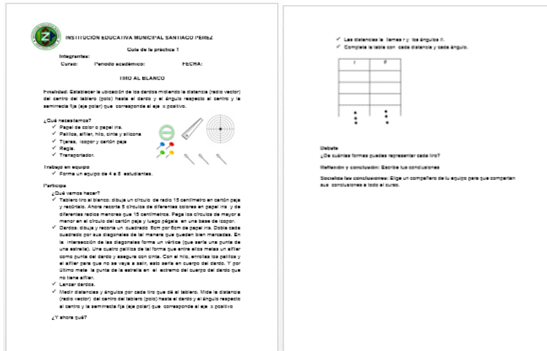
Se presentan a continuación las 12 prácticas que se elaboran para introducir conceptos básicos de coordenadas polares y sus aplicaciones en la representación y análisis de la parábola y la elipse. Estas actividades se encuentran en el Anexo A.

3.7.1 Práctica 1: Tiro al blanco

Tiro al blanco es una actividad que se presenta para iniciar la introducción al sistema de coordenadas polares, en donde los estudiantes pueden construir los elementos necesarios para el desarrollo de la práctica se usa un tablero de tiro al blanco y los dardos. La finalidad de esta situación lleva a alcanzar de manera implícita el objetivo de aprendizaje 1.

- **Finalidad**: Establecer la ubicación de los dardos, midiendo la distancia (radio vector) del centro del tablero (polo) hasta el dardo y el ángulo respecto al centro y la semirrecta fija (eje polar) que corresponde al eje x positivo.

- **Durante la clase:** En el desarrollo de esta primera actividad se hace la presentación de la propuesta, los principios y metodología a seguir. Se explica la estructura de la práctica y los momentos en que se divide. Luego se les pide a los estudiantes que conformen equipos como lo sugiere la guía de la práctica 1. Con los materiales construyen el tablero de tiro al blanco y los dardos. Luego, realizan lanzamientos, mediciones y se registran los datos en la tabla. Se pregunta por las dificultades que hasta ese momento tengan. Por último se escucha la socialización de los grupos y el profesor hace las orientaciones y las preguntas adecuadas para aclarar las posibles dudas. El acompañamiento del profesor es importante no solo en esta actividad sino es todas.


INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ

Guía de la práctica 1

Integrantes:

Curso: Periodo académico: FECHA:

TIRO AL BLANCO

Finalidad: Establecer la ubicación de los dardos midiendo la distancia (radio vector) del centro del tablero (polo) hasta el dardo y el ángulo respecto al centro y la semirrecta fija (eje polar) que corresponde al eje x positivo.

¿Qué necesitamos?
- ✓ Papel de color o papel iris.
- ✓ Palillos, alfiler, hilo, cinta y silicona
- ✓ Tijeras, icopor y cartón paja
- ✓ Regla.
- ✓ Transportador.

Trabajo en equipo
- ✓ Forma un equipo de 4 a 6 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?
- ✓ Tablero tiro al blanco: dibuja un círculo de radio 15 centímetro en cartón paja y recórtalo. Ahora recorta 5 círculos de diferentes colores en papel iris y de diferentes radios menores que 15 centímetros. Pega los círculos de mayor a menor en el círculo del cartón paja y luego pégalo en una base de icopor.
- ✓ Dardos: dibuja y recorta un cuadrado 8cm por 8cm de papel iris. Dobla cada cuadrado por sus diagonales de tal manera que queden bien marcadas. En la intersección de las diagonales forma un vértice (que sería una punta de una estrella). Une cuatro palillos de tal forma que entre ellos metas un alfiler como punta del dardo y asegura con cinta. Con el hilo, enrollas los palillos y el alfiler para que no se vaya a salir, esto sería en cuerpo del dardo. Y por último mete la punta de la estrella en el extremo del cuerpo del dardo que no tiene alfiler.
- ✓ Lanzar dardos.
- ✓ Medir distancias y ángulos por cada tiro que dé al tablero. Mide la distancia (radio vector) del centro del tablero (polo) hasta el dardo y el ángulo respecto al centro y la semirrecta fija (eje polar) que corresponde al eje x positivo

¿Y ahora qué?

- ✓ Las distancias la llamas r y los ángulos θ.
- ✓ Complete la tabla con cada distancia y cada ángulo.

r	θ
⋮	⋮

Debate

¿De cuántas formas puedes representar cada tiro?

Reflexión y conclusión: Escribe tus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan sus conclusiones a todo el curso.

3.7.2 Práctica 2: Ubicación de puntos en papel polar

La actividad se presenta como una continuación de la actividad anterior donde los estudiantes van a representar los datos recolectados en la práctica 1en papel polar. Identificaran el conjunto de puntos que puede representar la ubicación de un dardo; la ubicación de algunos valores negativos y como se obtiene un línea recta. La finalidad de esta situación es ir consolidando el uso del sistema de coordenadas polares y de manera implícita fortalecer objetivo de aprendizaje 1.

- **Finalidad**: Graficar puntos en el sistema de coordenadas polares utilizando papel polar.

- **Durante la clase**: En el desarrollo de esta actividad se les pide a los estudiantes que hagan uso de los datos registrados en la práctica 1, como se establece en la guía de la práctica 2. Durante la clase se pregunta por sus avances o dificultades. Se les pide a los estudiantes que socialicen las conclusiones. Es importante que queden claros los elementos que permiten el manejo adecuado de sistema de coordenadas polares y es aquí donde la actuación del profesor es importante, debe formular preguntas que contribuyan a identificar el grado de adquisición de los conceptos. Cuando la actividad haya concluido y falten uno pocos minutos se les pide a los estudiantes que hagan equipos entre 4 a 6 estudiantes para acordar la entrega de materiales de la próxima actividad (práctica 3).

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ
Guía de la práctica 2

Integrantes: ______________________
Curso: ___ **Periodo académico:** __________ **Fecha:** _____

UBICACIÓN DE PUNTOS EN PAPEL POLAR

Finalidad: Graficar puntos en el sistema de coordenadas polares utilizando papel polar.
¿Qué necesitamos?
- ✓ Papel polar
- ✓ Regla.

Trabajo en equipo
- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa
¿Qué vamos hacer?
- ✓ Graficar puntos.

¿Y ahora qué?
- ✓ Las distancias r y los ángulos θ tomados en la actividad de "TIRO AL BLANCO" grafícalas en el papel polar.
- ✓ Bebes considerar una escala para la distancias (si es necesario).

Debate
- ✓ ¿De cuántas formas puedes representar cada tiro?
- ✓ Ahora toma sólo valores para los ángulos de 0 a 2π ¿De cuántas formas puedes representar cada tiro? Represéntalos gráficamente y escribe las coordenadas (r, θ).
- ✓ Si tomas un punto (r, θ) y consideramos r negativo, ¿cómo se representaría ese punto, ahora de coordenadas $(-r, \theta)$?
- ✓ ¿De cuántas formas puedes representar el punto de coordenadas $(-r, \theta)$ en el intervalo 0 a 2π? Represéntalos gráficamente y escribe las coordenadas (r, θ).
- ✓ Toma un punto y varía la distancia r dejando el ángulo constante y represéntalos gráficamente. ¿Qué observas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan sus conclusiones a todo el curso.

3.7.3 Práctica 3: Tejiendo parte I

Tejiendo parte I, es una actividad donde los estudiantes construyen el material de trabajo. Los resultados van a permitir observar la simetría de la curva Cardioide. El objetivo de la actividad permite ir alcanzando el objetivo de aprendizaje 2.

- **Finalidad:** obtener curvas a partir de tejidos y observar su simetría

- **Durante clase**: Para el desarrollo de la actividad los estudiantes deben construir una circunferencia sobre una tabla de madera. Donde se divide la circunferencia en 72 partes iguales en cada marca se clava una puntilla como se establece en la guía de la práctica 3. El acompañamiento por parte del docente debe ser constante. El material para la actividad debe pedirse con anterioridad para no tener dificultades con su desarrollo. La actividad permite traer al aula elementos del arte y la decoración con el propósito de vincular espacios de la clase matemática con el vivir de los estudiantes; generar en ellos una visión distinta del contexto escolar y extraescolar y con esto puedan aprender.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ
Guía de la práctica 3

Integrantes:
Curso: Periodo académico: FECHA:

Tejiendo parte I

Finalidad: obtener curvas a partir de tejidos
¿Qué necesitamos?
- ✓ Madera, 72 puntillas y martillo
- ✓ Lana, transportador, lápiz y compás

Trabajo en equipo
- ✓ Forme un equipo de 4 a 5 estudiantes.

Participe
¿Qué vamos hacer?
- ✓ Dibujar una circunferencia en la tabla. Divídela en 72 partes iguales y marca con lápiz sobre la circunferencia los 72 puntos, numéralos del 1 al 72 en sentido contrario a las manecillas del reloj. En cada punto clava una puntilla.
- ✓ Tejer

¿Y ahora qué?
- ✓ Ahora une cada puntilla con lana, cada número con su doble por ejemplo 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, 4 con 8,… Ver tabla.

Debate
- ✓ ¿Qué observas?
- ✓ ¿Cómo llamarías la figura que observaste?
- ✓ ¿Qué características tiene?
- ✓ ¿Es simétrica?
- ✓ ¿Cuántos ejes de simetrías se pueden trazar?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

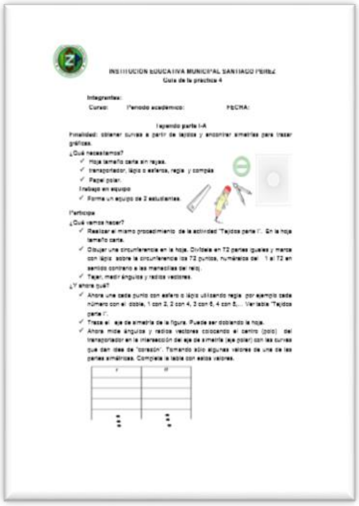
Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que comparten sus conclusiones a todo el curso.

3.7.4 Práctica 4: Tejiendo parte I-A

Esta actividad es la continuación de la práctica 3, se propone para que el estudiante pueda manipular mejor los elementos que se van a medir y pasen de la observación a la medición de relaciones y propiedades de la curva. El objetivo real de la actividad es fortalecer el objetivo de aprendizaje 2.

- **Finalidad:** obtener curvas a partir de tejidos y encontrar simetrías para trazar gráficas.

- **Durante la clase:** se forman equipos de dos (2) estudiantes para construir la curva en la hoja tamaño carta sin rayas, siguiendo el procedimiento descrito en la práctica 3. Los estudiantes hacen mediciones, determinan relaciones y observan algún patrón o propiedad que permita llevar esa representación a coordenadas polares como lo propone la guía de la práctica. En la socialización se debe prestar atención a los procedimientos distintos a los propuestos en la guía, que contribuyen a alcanzar el logro del objetivo de aprendizaje y que estos puedan ser analizados por los demás compañeros en favor de sus aprendizajes.



3.7.5 Práctica 5: Aro ula ula

En esta actividad se muestra otro procedimiento para obtener la Cardioide para que los estudiantes tengan la posibilidad de visualizar, analizar y comparar los patrones, relaciones y propiedades que se cumplen, sin importar la forma como lo hacen. El objetivo como en la actividad anterior es fortalecer el objetivo de aprendizaje 2.

- **Finalidad**: Construir una curva con dos circunferencias

- **Durante la clase:** los estudiantes van a obtener la Cardioide con dos aros de ula ula y van medir el diámetro de cada circunferencia; comparar los procedimientos con los de la práctica 4; los patrones, relaciones, propiedades y los elementos que caracterizan esta curva. Esto se evidenciará en el trabajo desarrollado y en la socialización.

3.7.6 Práctica 6: Obteniendo cónicas

En esta actividad los estudiantes van a construir el cono y el cilindro para generar la elipse y la parábola y puedan redescubrir la manera como se obtuvieron las primeras cónicas. El objetivo de la actividad es consolidar y poner en evidencia el objetivo de aprendizaje 2.

- **Finalidad**: obtener cónicas a través de cortes de conos y cilindros para determinar figuras planas que resultan de sus bordes como la parábola y la elipse.

- **Durante la clase**: los estudiantes construyen el cono y el cilindro con plastilina según las indicaciones de la práctica. Luego, cortan el cono y el cilindro con una espátula (en lo posible plástica) que dará la noción de plano según las indicaciones de la guía. Observan las características de cada curva obtenida y calcan los cortes en hojas tamaño carta sin rayas. En la socialización es importante hacer preguntas que permitan evidenciar los logros o dificultades de los estudiantes.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ

Guía de la práctica 6

Integrantes:

Curso: Periodo académico: FECHA:

Obteniendo cónicas

Finalidad: obtener cónicas a través de cortes de conos y cilindros para determinar figuras planas que resultan de sus bordes como la parábola y la elipse.

¿Qué necesitamos?

- Barras de plastilina.
- Espátula (plástica).
- Regla o escuadra.
- Hojas tamaño carta sin rayas.

Trabajo en equipo

- Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- Construir un cono y un cilindro de plastilina.

¿Y ahora qué?

- Con la espátula hacer cortes al cono y al cilindro.
- Corta el cono paralelo a una generatriz del cono que atraviese su base.
- Corta oblicuamente el eje del cono y a todas sus generatrices, sin pasar por el vértice.
- Corta el cilindro no perpendicular al eje, que no pase por las bases.
- En la hoja traza cada una de las curvas que forman los cortes del cono y el cilindro.
- Traza o dobla la hoja para obtener el eje o los ejes de simetría (s)

Debate

- ¿Cuáles son las características de cada curva? ¿Cuánto(s) eje(s) de simetría(s) se pueden trazar a cada curva?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que comparten sus conclusiones a todo el curso.

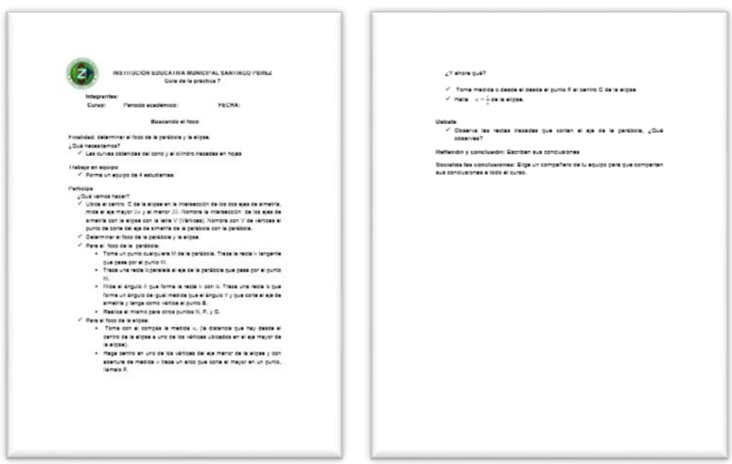
.

3.7.7 Práctica 7: Buscando el foco

Esta actividad es continuación de la práctica 6, donde los estudiantes buscan el foco de cada una de las cónicas (parábola y elipse) obtenidas en la actividad anterior. Se aprovechan las gráficas que resultan de los bordes del cono y cilindro. El estudiante pasa de observar a determinar elementos importantes propios de estas curvas que favorecen un desarrollo formal de los conceptos involucrados, con el propósito de alcanzar el objetivo de aprendizaje 3.

- **Finalidad**: determinar el foco de la parábola y la elipse.

- **Durante la clase:** los estudiantes forman equipos de 4, y van a determinar el foco con las construcciones geométricas que se plantean en la guía y la excentricidad con las mediciones que se indican también en la guía. En la socialización es importante orientar al grupo en general en el manejo de estos elementos de la parábola y la elipse.


INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ
Guía de la práctica 7

Integrantes:
Curso: Periodo académico: FECHA:

Buscando el foco

Finalidad: determinar el foco de la parábola y la elipse.
¿Qué necesitamos?
- Las curvas obtenidas del cono y el cilindro trazadas en hojas

Trabajo en equipo
- Forme un equipo de 4 estudiantes.

Participa
¿Qué vamos hacer?
- Ubica el centro C de la elipse en la intersección de los dos ejes de simetría, mide el eje mayor 2a y el menor 2b. Nombra la intersección de los ejes de simetría con la elipse con la letra V (Vértices). Nombra con V de vértices el punto de corte del eje de simetría de la parábola con la parábola.
- Determinar el foco de la parábola y la elipse.
- Para el foco de la parábola:
  - Toma un punto cualquiera M de la parábola. Traza la recta tangente que pasa por el punto M.
  - Traza una recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto M.
  - Mide el ángulo que forma la recta con . Traza una recta que forme un ángulo de igual medida que el ángulo y que corte el eje de simetría y tenga como vértice el punto B.
  - Realiza el mismo para otros puntos N, P, y Q.
- Para el foco de la elipse:
  - Toma con el compás la medida (la distancia que hay desde el centro de la elipse a uno de los vértices ubicados en el eje mayor de la elipse).
  - Haga centro en uno de los vértices del eje menor de la elipse y con abertura de medida traza un arco que corte al mayor en un punto, llámelo F.

¿Y ahora qué?
- Toma medida c desde el desde el punto F al centro C de la elipse
- Halla $e = \frac{c}{a}$ de la elipse.

Debate
- Observa las rectas trazadas que cortan el eje de la parábola, ¿Qué observas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

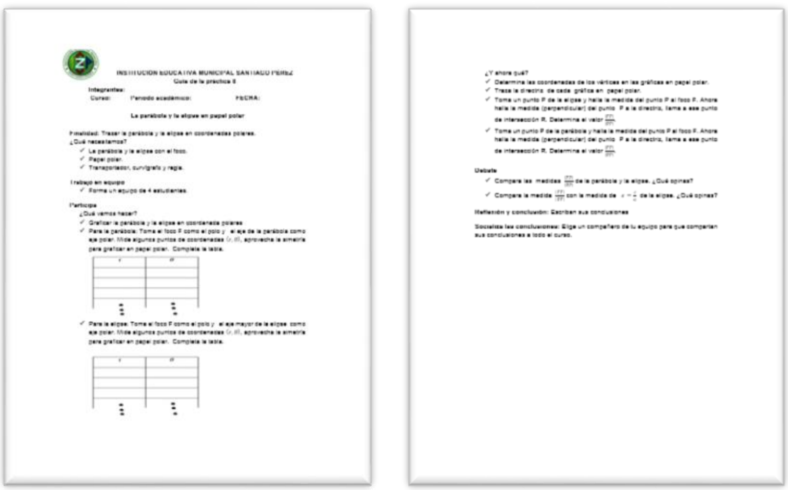
Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que comparta sus conclusiones a todo el curso.

3.7.8 Práctica 8:La parábola y la elipse en papel polar

Para el desarrollo de esta actividad se necesitan las cónicas (parábola y elipse) con el foco obtenido en prácticas anteriores, se hacen medidas de distancias y ángulos y con aplicación de simetrías representan estas curvas en el sistema de coordenadas polares. Esto permite que el estudiante pueda reconocer la importancia de usar diferentes métodos o procedimiento para llegar a solucionar una situación. Esta es una manera de afianzar el objetivo de aprendizaje 3.

- **Finalidad**: Trazar la parábola y la elipse en coordenadas polares.

- **Durante la clase**: se forman equipos de cuatro (4) estudiantes, se toman las cónicas parábolas y elipse a las que se les determinó el foco por construcción geométrica. Luego, se hacen medidas de ángulos y distancias tomando el foco como el centro para la medición con el transportador. Con estos datos y con aplicación de la simetría de estas curvas se representan en el sistema de coordenadas polares, como se indica en la guía. Se espera que el estudiante resalte la importancia del foco como elemento de la parábola y la elipse y como uso en la representación en coordenadas polares.


INSTITUCION EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PEREZ
Guía de la práctica 8
Integrantes:
Curso: Periodo académico: FECHA:
La parábola y la elipse en papel polar
Finalidad: Trazar la parábola y la elipse en coordenadas polares.
¿Qué necesitamos?
- La parábola y la elipse con el foco.
- Papel polar.
- Transportador, curvígrafo y regla.
Trabajo en equipo
- Forma un equipo de 4 estudiantes.
Participa
¿Qué vamos hacer?
- Graficar la parábola y la elipse en coordenada polares
- Para la parábola: Toma el foco F como el polo y el eje de la parábola como eje polar. Mide algunos puntos de coordenadas (r, θ), aprovecha la simetría para graficar en papel polar. Complete la tabla.

r	θ

- Para la elipse: Toma el foco F como el polo y el eje mayor de la elipse como eje polar. Mide algunos puntos de coordenadas (r, θ), aprovecha la simetría para graficar en papel polar. Complete la tabla.

r	θ

¿Y ahora qué?
- Determina las coordenadas de los vértices en las gráficas en papel polar.
- Traza la directriz de cada gráfica en papel polar.
- Toma un punto P de la elipse y halla la medida del punto P al foco F. Ahora halla la medida (perpendicular) del punto P a la directriz, llama a ese punto de intersección R. Determina el valor $\frac{|FP|}{|PR|}$.
- Toma un punto P de la parábola y halla la medida del punto P al foco F. Ahora halla la medida (perpendicular) del punto P a la directriz, llama a ese punto de intersección R. Determina el valor $\frac{|FP|}{|PR|}$.

Debate
- Compara las medidas $\frac{|FP|}{|PR|}$ de la parábola y la elipse. ¿Qué opinas?
- Compara la medida $\frac{|FP|}{|PR|}$ con la medida de $e = \frac{c}{a}$ de la elipse. ¿Qué opinas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

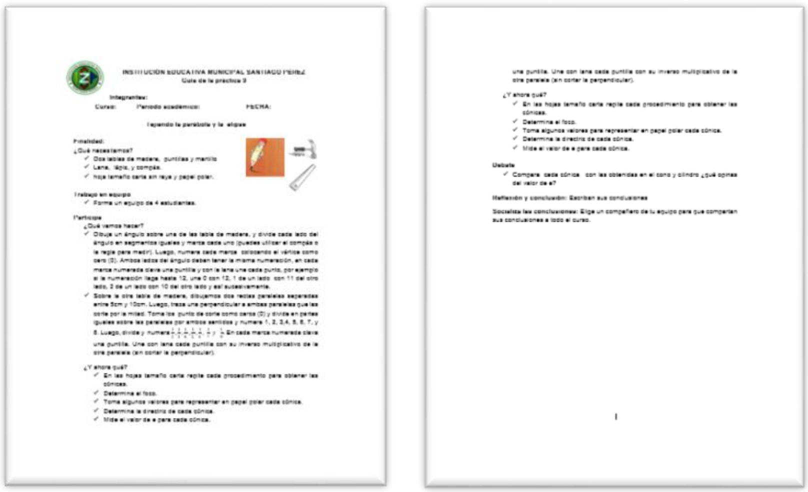
Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que comparten sus conclusiones a todo el curso.

3.7.9 **Práctica 9:Tejiendo la parábola y la elipse**

Con el desarrollo de esta actividad el estudiante tiene la oportunidad nuevamente de construir, manipular y observar cómo se puede obtener la parábola y la elipse con un procedimiento distinto. Con esto el estudiante puede reflexionar, buscar nuevos caminos, comparar y tener la capacidad de aplicar los conocimientos a situaciones nuevas. Esto permite entre otras cosas afianzar los objetivos de aprendizaje 2 y 3.

- **Finalidad**: Construir con base en tejidos la parábola y la elipse.

- **Durante la clase**: para el desarrollo de esta práctica se debe pedir a los estudiantes con anterioridad que traigan por equipos tabla de madera, puntillas, regla, martillo y todos los elementos que aparecen en la guía. El estudiante pone a prueba su capacidad de construcción y de establecer una estrategia para no cometer errores con base en la experiencia de anteriores construcciones.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ
Guía de la práctica 9

Integrantes:
Curso: Periodo académico: FECHA:

Tejendo la parábola y la elipse

Finalidad:
¿Qué necesitamos?
- Dos tablas de madera, puntillas y martillo
- Lana, lápiz, y compás.
- hoja tamaño carta sin raya y papel polar.

Trabajo en equipo
- Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa
¿Qué vamos hacer?
- Dibuja un ángulo sobre una de las tabla de madera, y divide cada lado del ángulo en segmentos iguales y marca cada uno (puedes utilizar el compás o la regla para medir). Luego, numera cada marca colocando el vértice como cero (0). Ambos lados del ángulo deben tener la misma numeración, en cada marca numerada clava una puntilla y con la lana une cada punto, por ejemplo si la numeración llega hasta 12, une 0 con 12, 1 de un lado con 11 del otro lado, 2 de un lado con 10 del otro lado y así sucesivamente.
- Sobre la otra tabla de madera, dibujamos dos rectas paralelas separadas entre 5cm y 10cm. Luego, traza una perpendicular a ambas paralelas que las corte por la mitad. Toma los punto de corte como cero (0) y divide en partes iguales sobre las paralelas por ambos sentidos y numera 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, y 8. Luego, divide y numera [illegible] En cada marca numerada clava una puntilla. Une con lana cada puntilla con su inverso multiplicativo de la otra paralela (sin cortar la perpendicular).

¿Y ahora qué?
- En las hojas tamaño carta repite cada procedimiento para obtener las cónicas.
- Determina el foco.
- Toma algunos valores para representar en papel polar cada cónica.
- Determina la directriz de cada cónica.
- Mide el valor de e para cada cónica.

Debate
- Compara cada cónica con las obtenidas en el cono y cilindro ¿qué opinas del valor de e?

Reflexión y conclusión: Escriben sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan sus conclusiones a todo el curso.

3.7.10 Práctica 10: Algunas aplicaciones de la parábola y la elipse

La ejecución de esta actividad permite a los estudiantes encontrarse con situaciones de la realidad y comprender que el conocimiento adquirido en el aula de clase tiene sentido y puede aplicarse para solucionar problemas del diario vivir. Aquí los objetivos de aprendizaje se han alcanzado, en particular el 4.

- **Finalidad**: Observar algunas aplicaciones de la parábola y la elipse y comprobar sus propiedades

- **Durante la clase**: se les pide a los estudiantes que comprueben las propiedades de las cónicas parábola y elipse. Para la parábola se construye un artefacto reflector parabólico que se sobrepone a las parábolas construidas en anteriores actividades para verificar la propiedad de reflexión. Para la elipse se toman fotografías, imágenes u objetos elípticos y se comprueba si se cumplen las propiedades. El acompañamiento del docente es importante porque el estudiante se ve enfrentado a aplicar lo aprendido en situaciones reales y pone a prueba los conocimientos adquiridos en el aula. El éxito de esto lleva al estudiante a reflexionar sobre su aprendizaje. Lo anterior se ver reflejado en la socialización que hace cada equipo de trabajo.


INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÉREZ
Guía de la práctica 10
Integrantes:
Curso: Periodo académico: FECHA:

Algunas aplicaciones de la parábola y la elipse

Finalidad: Observar algunas aplicaciones de la parábola y la elipse y comprobar sus propiedades.
¿Qué necesitamos?
- Láser y papel reflectivo.
- Fotos, imágenes impresas o algunos objetos de forma elíptica.
- Regla, escuadra y cinta de enmascarar.
- Regla flexible y tijeras.
- Hojas tamaño carta sin rayas.

Trabajo en equipo
- Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa
¿Qué vamos hacer?
- Para la parábola:
  - Trazar rectas paralelas al eje de simetría de las parábolas obtenidas en las actividades anteriores.
  - Cortar papel reflectivo del ancho y largo de la regla flexible, pegar cinta a lo largo del papel reflectivo. Luego, pegar a la regla flexible.
- Para la elipse:
  - Tomar las fotos, imágenes o el contorno de alguna figura elíptica.

¿Y ahora qué?
- Toma las parábolas y sobre su contorno coloca la regla flexible con el papel reflectivo y sobre las paralelas coloca los láseres.
- Comprueba las propiedades de las figuras elípticas.

Debate
- ¿Qué observas cuando los láseres se reflejan en el papel reflectivo?
- ¿Qué puedes decir de las propiedades de las figuras elípticas?

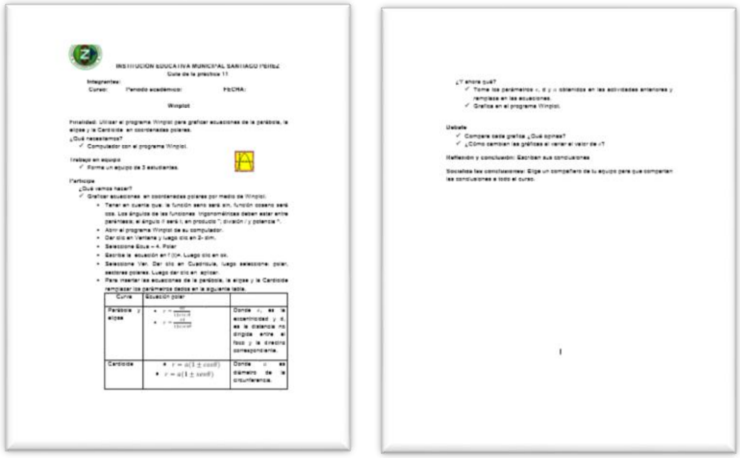
Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.
Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que comparten las conclusiones a todo el curso.

3.7.11 Práctica 11: Winplot

Esta actividad permite que el estudiante compruebe los resultados obtenidos en el transcurso de las actividades, haciendo uso del programa como Winplot

- **Finalidad**: Utilizar el programa Winplot para graficar ecuaciones de la parábola, la elipse y la Cardioide en coordenadas polares

- **Durante la clase**: se forman equipos de tres (3) estudiantes por computador, siguen las indicaciones que aparecen en la guía para comprobar las propiedades de la Cardioide, la parábola y la elipse. Y al modificar los valores observar las características de cada curva y así poder predecir en futuras representaciones el manejo de las coordenadas polares y las cónicas, en especial la parábola y la elipse. Para el uso del programa el acompañamiento del profesor es primordial para éxito de la actividad.



3.7.12 Práctica 12: Lectura

En esta actividad el estudiante tiene la oportunidad de determinar teóricamente la ecuación a partir de la gráfica.

- **Finalidad**: Determinar teóricamente las ecuaciones como modelo de las gráficas obtenida.

- **Durante la clase**: se forman equipos de cuatro (4) estudiantes, se hace lectura de la guía para que los estudiantes puedan interpretar como se determinan teóricamente la ecuación de la recta, de la Cardioide y la cónica a partir de la gráfica. El acompañamiento del profesor es primordial para éxito de la actividad. Esta actividad se complementa con una prueba final escrita. Está prueba ayuda al seguimiento de los estudiantes y a la conclusión de la unidad didáctica.

4. Aplicación y análisis de resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos, ver también evidencias fotográficas (Anexo B) del trabajo de los estudiantes en la aplicación de la propuesta.

- Tiro al blanco y ubicación de puntos en papel polar guías 1 y 2 respectivamente.

Los estudiantes muestran mucho interés por participar en estas actividades generando un ambiente propicio para el aprendizaje, donde el trabajo en equipo se ve fortalecido. La construcción de un tablero de tiro al blanco y sus respectivos dardos permite una participación activa en donde algunos estudiantes asumen un rol de líderes, buscando agilizar los procedimientos para la construcción. La idea inicial de terminar "rápido", la elaboración de los materiales es con el propósito de jugar, se les permite que jueguen un tiempo prudente hasta que los otros equipos terminen la construcción del tablero y los dardos, así los estudiantes pueden practicar.

Estas actividades permiten un acercamiento de los estudiantes con el plano polar en donde midiendo la ubicación de los dardos, completando tablas y utilizando papel polar son capaces de identificar los elementos del sistema de coordenadas polares; hacen representaciones de las rectas que pasan por el polo variando el radio vector dejando el ángulo constante, pasando de la tabla al gráfico. Afianzando el pensamiento geométrico y métrico. Encuentran que la representación de un radio vector negativo implica que se halla en la prolongación del lado terminal del ángulo. También determinan que si al radio vector y al ángulo se le hacen algunas restricciones, los puntos del plano polar se convierten en puntos únicos.

Las actividades propuestas en donde uno de los componentes es la socialización, permite que los estudiantes tengan la necesidad de comunicarse y puedan desarrollar esta competencia argumentando sus hallazgos o dificultades. En resumen los estudiantes hacen una comprensión del plano polar a través de un juego como actividad inicial partiendo del contexto de los estudiantes como lo establece la Educación Matemática Realista [2].

- Tejiendo parte I, Tejiendo parte I-A y Aro ula ula que son las guías 3, 4 y 5 respectivamente (Anexo A), son actividades que permiten encontrar por construcción mecánica la curva llamada Cardioide por dos procedimientos distintos. También al representar la gráfica en papel polar, ir de la tabla al gráfico permite evidenciar un manejo del plano polar e identificar el uso de propiedades geométricas de esta curva. En la construcción de los materiales para este grupo de actividades los estudiantes asumen un papel responsable y de compromiso. Tejiendo parte I, genera en los estudiantes un reto mayor porque requiere de mucha concentración, precisión y paciencia para poder completar la construcción, pero a la vez se observan los estudiantes divirtiéndose; repitiendo procedimientos, cada uno de los integrantes de los equipos de trabajo intenta unir los puntos tratando de no equivocarse y finalmente la estrategia de trabajar como un verdadero equipo, logran obtener una curva que ellos llaman "corazón". La competencia de razonamiento se afianza con este tipo de actividades en donde se potencia la capacidad de pensar y le encuentran sentido a las matemáticas.

Al empezar la actividad hay dificultad para trazar la circunferencia debido a que los estudiantes traen tablas grandes y los compases son pequeños y no permitían que se aprovechara toda la superficie de las tablas de madera. Fue necesario traer utensilios de cocina (del colegio) o cualquier otro que permitiera hacer circunferencias. Algunos grupos intentaron con los cordones de los zapatos pero no quedaban satisfechos con el trazo. Estas situaciones generan en el estudiante la posibilidad de buscar soluciones a los problemas cotidianos que se les puedan presentar de manera creativa y rápida porque el tiempo juega un papel importante, en este caso para completar la actividad. El estudiante se pone a prueba y fortalece la formulación, la comparación y ejercita los procedimientos que a este momento ha adquirido y soluciona la situación que se plantea desarrollando estas competencias.

- Obteniendo cónicas, Buscando el foco, la parábola y la elipse en papel polar y Tejiendo la parábola y la elipse guías 6, 7, 8, y 9 respectivamente, buscan la construcción mecánica de la parábola y la elipse; la determinación del foco y la excentricidad y la representación de las cónicas mencionadas en el plano polar.

En esta actividad la manipulación de plastilina y la posterior construcción de un cono y un cilindro genera la participación de todos los estudiantes, las cónicas obtenidas (parábola y elipse) se trabaja en el curso anterior (grado 10). En esa ocasión se hace mención teórica del porque se les llama cónicas y se muestran los cortes tal como aparecen en los libros de texto escolares, pero no se hace una construcción mecánica de las mismas como sucede en esta oportunidad, por dos procedimientos distintos. En grado 10 se les da una definición sobre el lugar geométrico, se determinan las ecuaciones, algunos estudiantes aprenden procedimientos y determinan sus elementos. Llama la atención que los estudiantes no pueden predecir los tipos de curvas que se va a obtener al cortar el cono y el cilindro siguiendo las indicaciones dadas en la guía, porque, después de observar los cortes y plasmar en el papel el contorno de las curvas obtenidas, algunos de ellos no identifican por ejemplo la parábola, esta se observa en las hojas trazadas como curva cerrada. Con relación a la elipse hacen una mejor identificación.

Se menciona antes que en grado 10 la determinación de los elementos de la parábola y la elipse (foco, excentricidad, vértices, ejes de simetrías, directriz, etc.) se hace mediante un procedimiento algebraico. En esta propuesta estos elementos se determinan por medio de una construcción geométrica y se toman las curvas obtenidas por procedimientos mecánicos realizados por los estudiantes, luego se comparan las medidas con las representaciones en el plano polar, para finalmente abordar las ecuaciones algebraicas permitiendo el desarrollo del pensamiento variacional. Tal como lo propone el MEN: primero no se tienen en cuenta las mediciones sino las relaciones entre los objetos, después se hacen mediciones y se pasa de lo cualitativo a lo cuantitativo en donde aparecen nuevas relaciones y propiedades.

En el desarrollo de la actividad tejiendo la parábola y la elipse, se observan los avances del proceso que tienen los estudiantes con relación al manejo de plano polar y la representación de las curvas. Las construcciones las realizan más rápido, identifican la parábola y la elipse, determinan los elementos que permiten hacer su representación en el plano polar. En las construcciones que hacen los estudiantes se observa mejor la curva de la parábola que la curva de la elipse. Esto no es impedimento para que los estudiantes mencionen la formación de la elipse.

- Algunas aplicaciones de la parábola y la elipse, Winplot y lectura, guías 10, 11 y 12 respectivamente. Con el desarrollo de estas actividades los estudiantes identifican, las aplicaciones de la elipse en objetos como latas de algunos alimentos, logos de marcas de algunos automóviles, fotografías de estadios, etc. Para la aplicación de la parábola se construye un arco parabólico donde se observa la propiedad reflectora, se recomienda para una mejor observación de esta propiedad un cuarto oscuro. También usan el software Winplot para graficar las curvas pasando de la ecuación a la gráfica utilizando los valores obtenidos en las actividades anteriores. En esta actividad los estudiantes tienen la oportunidad de variar los parámetros de las ecuaciones y observar cómo influye por ejemplo, la excentricidad en la forma de la curva. Winplot es un software de uso libre que se utiliza entre otras, como una herramienta para la elaboración de gráficas de funciones. El manejo del software por parte los estudiantes en el desarrollo de la actividad se hace sin dificultad porque el software está diseñado para este fin. El enlace para la descarga es: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Cabe resaltar, el hecho de tener una ecuación con la misma forma y al variar los parámetros generen cónicas distintas. Algunos estudiantes hacen esa comparación, en el curso anterior cada cónica tiene una ecuación particular en sistema de coordenadas cartesiana o rectangular, y en este caso no. En el caso de la elipse los estudiantes no hacen mención del uso de dos focos que trabajan en grados anteriores en el sistema de coordenadas rectangulares. Finalmente, los estudiantes hacen lectura de cómo se obtienen las ecuaciones a partir de la gráfica observando y reflexionando sobre las construcciones geométricas en donde se pregunta por ejemplo ¿qué condición cumple un punto para que sea punto de la curva?

Para la actividad propuesta en la guía 12, no se desarrolla como aparece en la propuesta, sino que se hace una explicación de la obtención de la ecuación a partir de la curva en el tablero. Se hacen las preguntas pertinentes antes de continuar con cada paso de la construcción geométrica. El estudiante se muestra interesado y participa. La investigación acción permite hacer este tipo de modificaciones, en donde el docente reflexiona y toma decisiones en busca de mejorar su labor diaria.

Con relación a la prueba final, esta se aplica tal como aparece en la propuesta. Los resultados obtenidos concuerdan con lo evidenciado en el transcurso de la propuesta, es decir, se observa un manejo en las coordenadas polares en la mayoría de los estudiantes.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

- Los aspectos históricos-epistemológicos que dieron lugar a la construcción de los conceptos de parábola, elipse y coordenadas polares sugiere brindar a los estudiantes la posibilidad de llegar a ellos de diferentes maneras. Inicialmente el intento de resolver los tres problemas griegos de la antigüedad dan lugar a numerosas construcciones geométricas que después son representadas en sistemas de coordenadas; explican fenómenos de la naturaleza, permiten el desarrollo de las matemáticas y el avance de la ciencia y la tecnología.

- Tomar sucesos históricos-epistemológicos es un importante recurso didáctico, porque le permite al profesor reflexionar la forma como el hombre construye los conceptos en matemáticas y otras ciencias, y las dificultades que tienen en el transcurrir del tiempo para poder fortalecerse como en nuestros días.

- Tener en cuenta la experiencia(los saberes previos) de los estudiantes, es fundamental en el proceso de aprendizaje tal como lo establece el aprendizaje significativo, esto implica que el docente tome decisiones importantes en el momento de planear y ejecutar la propuesta. El docente debe reflexionar sobre lo que observa y si es posible reconstruir la propuesta inicial, teniendo en cuenta los fundamentos básicos de la investigación acción.

- Aprovechar el contexto diario en que los estudiantes interactúan, es una oportunidad para cambiar la manera como se desarrollan las clases y esto tal vez permite que tengan un aprendizaje con sentido. Esto implica que los docentes deben poner en práctica su capacidad creativa, de innovación, de exploración y estar dispuesto a cambiar su quehacer diario poniendo en práctica los principios de la Matemática Realista.

- La construcción de materiales y la utilización de estos para alcanzar un concepto es una herramienta que facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aquí el papel del docente es importante porque debe convertir cada momento en situaciones de aprendizaje, tal como lo propone Brousseau. Además, se observa en los estudiantes desarrollo de competencias o procesos generales de la enseñanza de las matemáticas escolares en concordancia con los aspectos de la protomatemática y la paramatemática.
- El trabajo en equipo y los espacios para la socialización fomenta en los estudiantes, respeto por el otro, la necesidad de comunicarse, saber escuchar diferentes puntos de vista y debatir dentro de una convivencia sana y pacífica, potencia el desarrollo de las competencias establecidas por el MEN en la enseñanza de las matemáticas.

- El uso del software Winplot, brinda la oportunidad para acercar a los estudiantes al buen uso de la tecnología, y realizar procedimientos de verificación de las curvas obtenidas con lápiz y papel, y por construcciones mecánicas.

- Es posible que las actividades diseñadas facilite el aprendizaje de las coordenadas polares y el uso en la representación y análisis de la parábola y la elipse, entonces se hace la propuesta en el anexo A.

5.2 Recomendaciones

- Para verificar la propiedad reflectora de la parábola, se recomienda desarrollar la actividad en cuarto o salón oscuro.

- Los aspectos históricos y epistemológicos pueden ser visto en películas o videos.

A. Anexo A: Propuesta didáctica

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

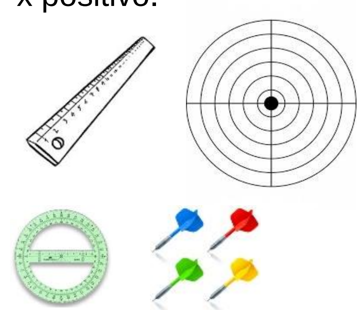
Guía de la práctica 1

Integrantes: ____

Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

TIRO AL BLANCO

Finalidad: Establecer la ubicación de los dardos midiendo la distancia (radio vector) del centro del tablero (polo) hasta el dardo y el ángulo respecto al centro y la semirrecta fija (eje polar) que corresponde al eje x positivo.



¿Qué necesitamos?

- ✓ Papel de color o papel iris.
- ✓ Palillos, alfiler, hilo, cinta y silicona
- ✓ Tijeras, icopor y cartón paja
- ✓ Regla.
- ✓ Transportador.

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 a 8 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Tablero tiro al blanco: dibuja un círculo de radio 15 centímetro en cartón paja y recórtalo. Ahora recorta 5 círculos de diferentes colores en papel iris y de diferentes radios menores que 15 centímetros. Pega los círculos de mayor a menor en el círculo del cartón paja y luego pégala en una base de icopor.
- ✓ Dardos: dibuja y recorta un cuadrado 6cm por 6cm de papel iris. Dobla cada cuadrado por sus diagonales de tal manera que queden bien marcadas. En la intersección de las diagonales forma un vértice (que sería una punta de una estrella). Une cuatro palillos de tal forma que entre ellos metas un alfiler como punta del dardo y asegura con cinta. Con el hilo, enrollas los palillos y

el alfiler para que no se vaya a salir, esto sería en cuerpo del dardo. Y por último mete la punta de la estrella en el extremo del cuerpo del dardo que no tiene alfiler.

- ✓ Lanzar dardos.
- ✓ Medir distancias y ángulos por cada tiro que dé al tablero. Mide la distancia (radio vector) del centro del tablero (polo) hasta el dardo y el ángulo respecto al centro y la semirrecta fija (eje polar) que corresponde al eje x positivo

¿Y ahora qué?

- ✓ Las distancias la llamas r y los ángulos θ.
- ✓ Completa la tabla con cada distancia y cada ángulo.

r	θ
⋮	⋮

Debate

¿De cuántas formas puedes representar cada tiro?

Reflexión y conclusión: Escribe tus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 2

Integrantes: ____

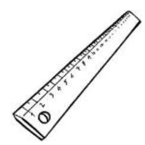
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**Fecha:** ______

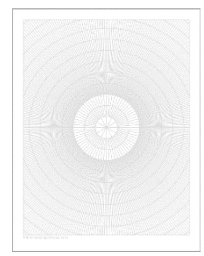
UBICACIÓN DE PUNTOS EN PAPEL POLAR

Finalidad: Graficar puntos en el sistema de coordenadas polares utilizando papel polar.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Papel polar
- ✓ Regla.





Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Graficar puntos.

¿Y ahora qué?

- ✓ Las distancias r y los ángulos θ tomados en la actividad de “TIRO AL BLANCO” grafícalas en el papel polar.
- ✓ Bebes considerar una escala para la distancias (si es necesario).

Debate

- ✓ ¿De cuántas formas puedes representar cada tiro?
- ✓ Ahora toma sólo valores para los ángulos de 0 a 2π ¿De cuántas formas puedes representar cada tiro? Represéntalos gráficamente y escribe las coordenadas (r, θ).
- ✓ Si tomas un punto (r, θ) y consideramos r negativo, ¿cómo se representaría ese punto, ahora de coordenadas $(-r, \theta)$?
- ✓ ¿De cuántas formas puedes representar el punto de coordenadas $(-r, \theta)$ en el intervalo 0 a 2π?Represéntalos gráficamente y escribe las coordenadas (r, θ).
- ✓ Toma un punto y varia la distancia r dejando el ángulo constante y represéntalos gráficamente. ¿Qué observas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ
Guía de la práctica 3

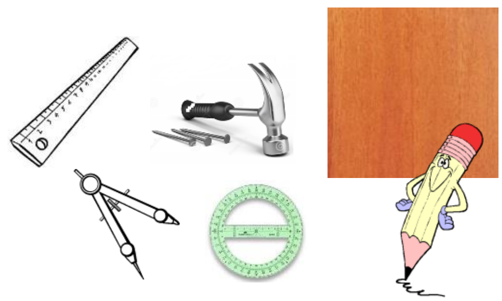
Integrantes: ____
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Tejiendo parte I

Finalidad: obtener curvas a partir de tejidos y observar su simetría.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Tabla de madera, 72 puntillas y martillo
- ✓ Lana, transportador, lápiz y compás



Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 a 6 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Dibujar una circunferencia en la tabla. Divídela en 72 partes iguales y marca con lápiz sobre la circunferencia los 72 puntos, numéralos del 1 al 72 en sentido contrario a las manecillas del reloj. En cada punto clava una puntilla.
- ✓ Tejer

¿Y ahora qué?

- ✓ Ahora une cada puntilla con lana, cada número con su doble por ejemplo 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, 4 con 8,… Ver tabla.

1	2	19	38	37	2	55	38
2	4	20	40	38	4	56	40
3	6	21	42	39	6	57	42
4	8	22	44	40	8	58	44
5	10	23	46	41	10	59	46
6	12	24	48	42	12	60	48
7	14	25	50	43	14	61	50
8	16	26	52	44	16	62	52
9	18	27	54	45	18	63	54
10	20	28	56	46	20	64	56
11	22	29	58	47	22	65	58
12	24	30	60	48	24	66	60
13	26	31	62	49	26	67	62
14	28	32	64	50	28	68	64
15	30	33	66	51	30	69	66
16	32	34	68	52	32	70	68
17	34	35	70	53	34	71	70
18	36	36	0	54	36	72	0

Debate

- ✓ ¿Qué observas?
- ✓ ¿Cómo llamarías la figura que observaste?
- ✓ ¿Qué características tiene?
- ✓ ¿Es simétrica?
- ✓ ¿Cuántos ejes de simetrías se pueden trazar?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ
Guía de la práctica 4

Integrantes: ____
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Tejiendo parte I-A

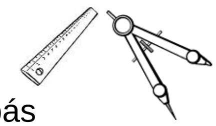
Finalidad: obtener curvas a partir de tejidos y encontrar simetrías para trazar gráficas.

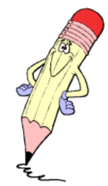
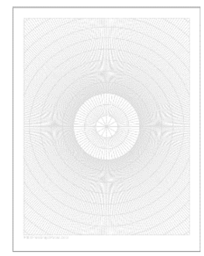
¿Qué necesitamos?

- ✓ Hoja tamaño carta sin rayas.
- ✓ transportador, lápiz o esferos, regla y compás
- ✓ Papel polar.

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 2 estudiantes.



Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Realizar el mismo procedimiento de la actividad "Tejidos parte I". En la hoja tamaño carta.
- ✓ Dibujar una circunferencia en la hoja. Divídela en 72 partes iguales y marca con lápiz sobre la circunferencia los 72 puntos, numéralos del 1 al 72 en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- ✓ Tejer, medir ángulos y radios vectores.

¿Y ahora qué?

- ✓ Ahora une cada punto con esfero o lápiz utilizando regla por ejemplo cada número con el doble, 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, 4 con 8,… Ver tabla "Tejidos parte I".
- ✓ Traza el eje de simetría de la figura. Puede ser doblando la hoja.
- ✓ Ahora mide ángulos y radios vectores colocando el centro (polo) del transportador en la intersección del eje de simetría (eje polar) con las curvas que dan idea de "corazón". Tomando sólo algunas valores de una de las partes simétricas. Completa la tabla con estos valores.

r	θ
⋮	⋮

- ✓ Representa en el papel polar estos puntos, marca los puntos simétricos puede ser doblando el papel y con el curvígrafo traza toda la gráfica.
- ✓ Mide la distancia desde el polo hasta el punto de corte del eje polar con la curva. Divide esta distancia entre dos (2) y llámala a.
- ✓ Traza una circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ que pase por el polo y el diámetro este sobre el eje polar. Traza otra circunferencia igual que pase por el punto de corte del eje polar con la curva y el diámetro este sobre el eje polar.

Debate

- ✓ ¿Qué puedes decir de las dos gráficas?
- ✓ ¿Qué opinas de los procedimientos para trazar cada gráfica?
- ✓ ¿Qué opinas de conocer las simetrías de las gráficas para graficarlas en papel polar?
- ✓ ¿Las circunferencias que se trazaron se cortan entre ellas en cuántos puntos?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 5

Integrantes: ____

Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Aro ula ula

Finalidad: Construir una curva con dos circunferencias.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Dos aro ula ula del mismo tamaño
- ✓ Tiza y cinta de enmascarar

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Trazar una curva: con la cinta fijar una tiza en la parte de exterior de un aro ula ula. Dibujar el rastro que deja la tiza en el piso cuando se pone a girar un aro ula ula sobre el otro aro ula ula fijo en el piso. El aro que gira alrededor del otro también debe girar sobre sí mismo.

¿Y ahora qué?

- ✓ Dibujar el rastro que deja la tiza en el piso cuando se pone a girar un aro ula ula sobre el otro aro ula ula fijo en el piso. El aro que gira alrededor del otro también debe girar sobre sí mismo.
- ✓ Mide el diámetro de cada aro ula ula. La medida del diámetro llámala a.

Debate

- ✓ ¿Qué observas?
- ✓ ¿Qué opinas de este procedimiento para obtener la curva?
- ✓ ¿Por qué los diámetros de las circunferencias son importantes?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan sus conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 6

Integrantes: ____

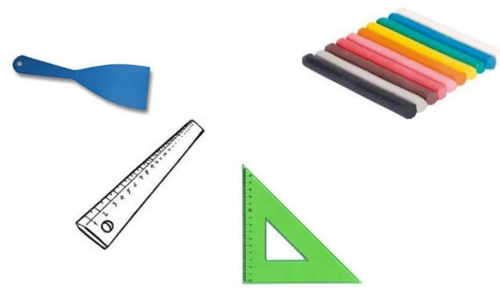
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Obteniendo cónicas

Finalidad: obtener cónicas a través de cortes de conos y cilindros para determinar figuras planas que resultan de sus bordes como la parábola y la elipse.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Barras de plastilina.
- ✓ Espátula (plástica).
- ✓ Regla o escuadra.
- ✓ Hojas tamaño carta sin rayas.



Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Construir un cono y un cilindro de plastilina.

¿Y ahora qué?

- ✓ Con la espátula hacer cortes al cono y al cilindro.
- ✓ Corta el cono paralelo a una generatriz del cono que atraviese su base.
- ✓ Corta oblicuamente al eje del cono y a todas sus generatrices, sin pasar por el vértice.
- ✓ Corta al cilindro no perpendicular al eje, que no pase por las bases.
- ✓ En la hoja traza cada una de las curvas que forman los cortes del cono y el cilindro.
- ✓ Traza o dobla la hoja para obtener el eje o los ejes de simetría (s)

Debate

- ✓ ¿Cuáles son las características de cada curva? ¿Cuánto(s) eje(s) de simetría(s) se pueden trazar a cada curva?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 7

Integrantes: ____

Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Buscando el foco

Finalidad: determinar el foco de la parábola y la elipse.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Las curvas obtenidas del cono y el cilindro trazadas en hojas

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Ubica el centro C de la elipse en la intersección de los dos ejes de simetría, mide el eje mayor $2a$ y el menor $2b$. Nombra la intersección de los ejes de simetría con la elipse con la letra V (Vértices). Nombra con V de vértices el punto de corte del eje de simetría de la parábola con la parábola.
- ✓ Determinar el foco de la parábola y la elipse.
- ✓ Para el foco de la parábola:
  - Toma un punto cualquiera M de la parábola. Traza la recta l_1 tangente que pase por el punto M.
  - Traza una recta l_2 paralela al eje de la parábola que pasa por el punto M.
  - Mide el ángulo θ que forma la recta l_1 con l_2. Traza una recta l_3 que forme un ángulo de igual medida que el ángulo θ y que corte el eje de simetría y tenga como vértice el punto B.
  - Realiza el mismo para otros puntos N, P, y Q.
- ✓ Para el foco de la elipse:
  - Toma con el compás la medida a, (la distancia que hay desde el centro de la elipse a uno de los vértices ubicados en el eje mayor de la elipse).
  - Haga centro en uno de los vértices del eje menor de la elipse y con abertura de medida a traza un arco que corte al eje mayor en un punto, llámalo F.

¿Y ahora qué?

- ✓ Toma medida c desde el desde el punto F al centro C de la elipse
- ✓ Halla $e = \frac{c}{a}$ de la elipse.

Debate

- ✓ Observa las rectas trazadas que cortan el eje de la parábola, ¿Qué observas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ
Guía de la práctica 8
Integrantes: ____
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

La parábola y la elipse en papel polar

Finalidad: Trazar la parábola y la elipse en coordenadas polares.
¿Qué necesitamos?

- ✓ La parábola y la elipse con el foco.
- ✓ Papel polar.
- ✓ Transportador, curvígrafo y regla.

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Graficar la parábola y la elipse en coordenada polares
- ✓ Para la parábola: se necesitan las parábolas que se les construyó el foco. Toma el foco F como el polo y el eje de la parábola como eje polar. Mide algunos puntos de coordenadas (r, θ), aprovecha la simetría para graficar en papel polar. Completa la tabla.

r	θ
⋮	⋮

- ✓ Para la elipse: Toma el foco F como el polo y el eje mayor de la elipse como eje polar. Mide algunos puntos de coordenadas (r, θ), aprovecha la simetría para graficar en papel polar. Completa la tabla.

r	θ
$\vdots$	$\vdots$

¿Y ahora qué?

- ✓ Determina las coordenadas de los vértices en las gráficas en papel polar.
- ✓ Traza la directriz de cada gráfica en papel polar.
- ✓ Toma un punto P de la elipse y halla la medida del punto P al foco F. Ahora halla la medida (perpendicular) del punto P a la directriz, llama a ese punto de intersección R. Determina el valor $\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|}$.
- ✓ Toma un punto P de la parábola y halla la medida del punto P al foco F. Ahora halla la medida (perpendicular) del punto P a la directriz, llama a ese punto de intersección R. Determina el valor $\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|}$.

Debate

- ✓ Compara las medidas $\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|}$ de la parábola y la elipse. ¿Qué opinas?
- ✓ Compara la medida $\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|}$ con la medida de $e = \frac{c}{a}$ de la elipse. ¿Qué opinas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 9

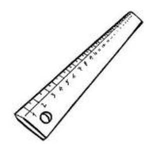
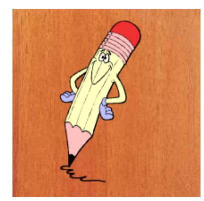
Integrantes: ____

Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Tejiendo la parábola y la elipse

Finalidad: Construir con base en tejidos la parábola y la elipse.
¿Qué necesitamos?

- ✓ Dos tablas de madera, puntillas y martillo
- ✓ Lana, lápiz, y compás.
- ✓ hoja tamaño carta sin raya y papel polar.

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Dibuja un ángulo sobre una de las tabla de madera, y divide cada lado del ángulo en segmentos iguales y marca cada uno (puedes utilizar el compás o la regla para medir). Luego, numera cada marca colocando el vértice como cero (0). Ambos lados del ángulo deben tener la misma numeración, en cada marca numerada clava una puntilla y con la lana une cada punto, por ejemplo si la numeración llaga hasta 12, une 0 con 12, 1 de un lado con 11 del otro lado, 2 de un lado con 10 del otro lado y así sucesivamente.
- ✓ Sobre la otra tabla de madera, dibujamos dos rectas paralelas separadas entre 5cm y 10cm. Luego, traza una perpendicular a ambas paralelas que las corte por la mitad. Toma los punto de corte como ceros (0) y divide en partes iguales sobre las paralelas por ambos sentidos y numera 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, y 8. Luego, divide y numera $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ y $\frac{1}{8}$. En cada marca numerada clava una puntilla.Une con lana cada puntilla con su inverso multiplicativo de la otra paralela (sin cortar la perpendicular).

¿Y ahora qué?

- ✓ En las hojas tamaño carta repite cada procedimiento para obtener las cónicas.
- ✓ Determina el foco.

- ✓ Toma algunos valores para representar en papel polar cada cónica.
- ✓ Determina la directriz de cada cónica.
- ✓ Mide el valor de e para cada cónica.

Debate

- ✓ Compara cada cónica con las obtenidas en el cono y cilindro ¿qué opinas del valor de e?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 10

Integrantes: ____

Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Algunas aplicaciones de la parábola y la elipse

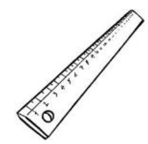
Finalidad: Observar algunas aplicaciones de la parábola y la elipse y comprobar sus propiedades.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Láser y papel reflectivo.
- ✓ Fotos, imágenes impresas o algunos objetos de forma elíptica.
- ✓ Regla, escuadra y cinta de enmascarar.
- ✓ Regla flexible y tijeras.
- ✓ Hojas tamaño carta sin rayas.

Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.



Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Para la parábola:
  - Trazar rectas paralelas al eje de simetría de las parábolas obtenidas en las actividades anteriores.
  - Cortar papel reflectivo del ancho y largo de la regla flexible, pegar cinta a lo largo del papel reflectivo. Luego, pegar a la regla flexible.
- ✓ Para la elipse:
  - Tomar las fotos, imágenes o el contorno de alguna figura elíptica.

¿Y ahora qué?

- ✓ Toma las parábolas y sobre su contorno coloca la regla flexible con el papel reflectivo y sobre las paralelas coloca los láseres.
- ✓ Comprueba las propiedades de las figuras elípticas.

Debate

- ✓ ¿Qué observas cuando los láseres se reflejan en el papel reflectivo?
- ✓ ¿Qué puedes decir de las propiedades de las figuras elípticas?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Guía de la práctica 11

Integrantes: ____

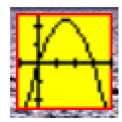
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

Winplot

Finalidad: Utilizar el programa Winplot para graficar ecuaciones de la parábola, la elipse y la Cardioide en coordenadas polares.

¿Qué necesitamos?

- ✓ Computador con el programa Winplot.



Trabajo en equipo

- ✓ Forma un equipo de 3 estudiantes.

Participa

¿Qué vamos hacer?

- ✓ Graficar ecuaciones en coordenadas polares por medio de Winplot:
  - Tener en cuenta que: la función seno será sin, función coseno será cos. Los ángulos de las funciones trigonométricas deben estar entre paréntesis; el ángulo θ será t; en producto *; división / y potencia ^.
  - Abrir el programa Winplot de su computador.
  - Dar clic en Ventana y luego clic en 2- dim.
  - Seleccione Ecua – 4. Polar
  - Escriba la ecuación en f (t)=. Luego clic en ok.
  - Seleccione Ver. Dar clic en Cuadricula, luego seleccione: polar, sectores polares. Luego dar clic en aplicar.
  - Para insertar las ecuaciones de la parábola, la elipse y la Cardioide remplazar los parámetros dados en la siguiente tabla.

Curva	Ecuación polar	
Parábola y elipse	• $r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ • $r = \frac{ed}{1 \pm e\,sen\theta}$	Donde e, es la excentricidad y d, es la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente.

Cardioide	• $r = a(1 \pm cos\theta)$ • $r = a(1 \pm sen\theta)$	Donde a es diámetro de la circunferencia.

¿Y ahora qué?

- ✓ Tome los parámetros e, d y a obtenidos en las actividades anteriores y remplaza en las ecuaciones.
- ✓ Grafica en el programa Winplot.

Debate

- ✓ Compara cada grafica ¿Qué opinas?
- ✓ ¿Cómo cambian las gráficas al variar el valor de e?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones.

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ
Guía de la práctica 12
Integrantes: ____
Curso: ___ **Periodo académico:** ____________**FECHA:** ______

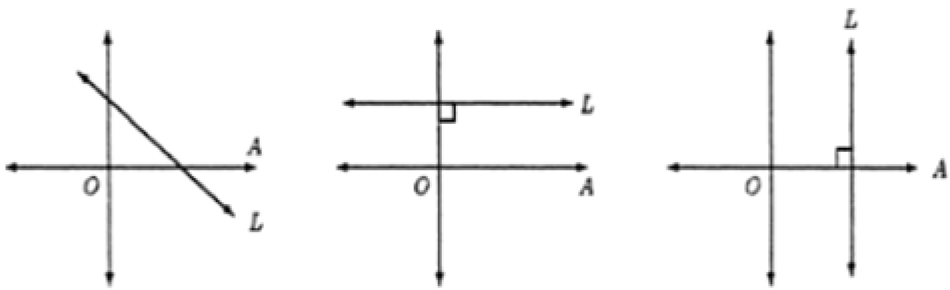
Lectura

Finalidad: Determinar teóricamente las ecuaciones como modelo de las gráficas obtenida.
¿Qué necesitamos?
- ✓ Construcciones geométricas

Trabajo en equipo
- ✓ Forma un equipo de 4 estudiantes.

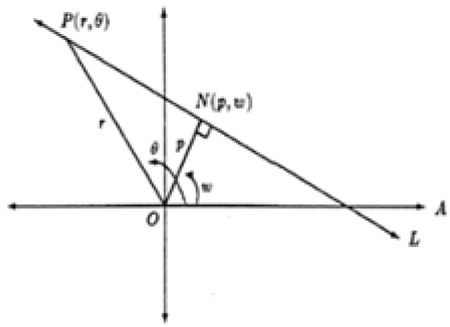
Participa
¿Qué vamos hacer?
- ✓ Hacer lectura de la guía donde se determinan las ecuaciones a partir de la gráfica.

¿Y ahora qué?
- ✓ Determinación teórica de curvas en coordenadas polares
- Se considera el caso en que la recta no pase por el polo. Para esto se debe estudiar las posibilidades, como se muestra en la figura, la recta L no sea paralela al eje polar o al eje a 90°o $(\frac{1}{2}\pi)$; o bien, para el caso en que L sea paralela o perpendicular al eje polar.



Sea L una recta no paralela ni perpendicular al eje polar. Desde el polo se traza la normal ON a L. Sean P (r,θ) un punto cualquiera de L y (p,ω) el par principal

$p > 0$ y $0 \leq \theta < 360°$ o $(0 \leq \theta < 2\pi)$ de coordenadas polares de N, ver figura a continuación. ¿Qué condición cumple el punto P para que sea punto de la curva?



El triángulo ΔONP es un triángulo rectángulo, recto en N, uno de cuyos ángulos agudos es $(\theta - \omega)$ y de hipotenusa r. Por lo tanto:

$$cos(\theta - \omega) = \frac{p}{r}$$

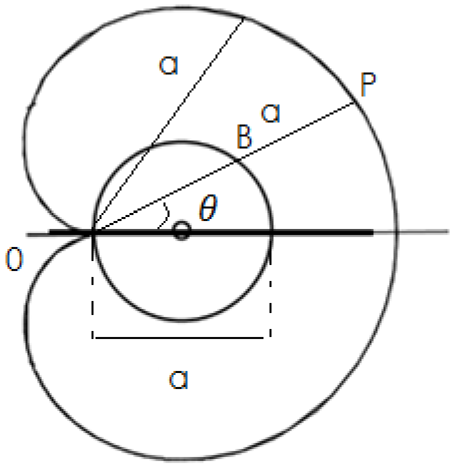
es decir:

$$rcos(\theta - \omega) = p$$

que representa la ecuación polar de L.

- La Cardioide: para determinar la ecuación de la Cardioide se toma un punto P. ¿qué condición cumple el punto P para que sea punto de la curva?

Sea $r = acos\theta$ la ecuación de una circunferencia, $a > 0$ y B es un punto cualquiera de la circunferencia. Sobre el radio vector OB se toma un punto talque $BP = a$. Se debe hallar el lugar geométrico de P, como se indica en la figura.



Se representan las coordenadas de B por (r_1, θ) y las P por (r, θ), según el enunciado, se tiene:

$$\theta = \theta_1;\ \ OB = r_1 = acos\theta \text{ y}$$

$$OP = OB + a, \text{ por lo tanto}$$

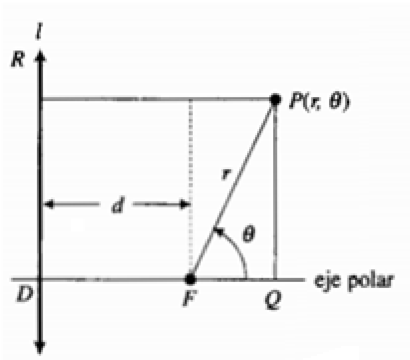
$$r = acos\theta + a = a(cos\theta + 1)$$

$$r = a(cos\theta + 1)$$

- Ecuación para las cónicas.

Si $e = 1$, por la definición anterior y la definición de parábola (una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano, equidistante de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se llama foco, la recta fija, directriz).

Supongamos ahora que $e \neq 1$ y F denota el punto fijo y l, la recta fija.
Se toma F como el polo y el eje polar su prolongación perpendicular a l. Consideremos el caso cuando la recta l está a la izquierda del punto F. Sea D el punto de intersección de l con la prolongación del eje polar y sea que d represente la distancia no dirigida de F a l. Ver figura.



Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera del conjunto situado a la derecha de l y en el lado final del ángulo que mide θ¿Qué condición cumple el punto P para que sea punto de la curva? Se trazan las perpendiculares PQ y PR al eje polar y recta l, respectivamente.

El punto P está en el conjunto descrito si y sólo si

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \qquad (1)$$

Como P está a la derecha de l, $\overline{RP} > 0$; así, $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Además, $|\overline{FP}| = r$ ya que $r > 0$. De manera que, de (1) se tiene

$$r = e(|\overline{RP}|) \qquad (2)$$

Sin embargo, $\overline{RP} = \overline{DQ}$, y como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, se tiene

$$\overline{RP} = d + rcos\theta$$

Al sustituir esta expresión de RP en (2) obtenemos

$$r = e(d + rcos\theta)$$

$r = ed + ercos\theta$ .Transponiendo términos.

$$r - ercos\theta = ed$$

$$r(1 - ecos\theta) = ed$$

$$r = \frac{ed}{1 - ecos\theta} \qquad (3)$$

Donde e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente. Esta es la ecuación de la cónica con directriz vertical a la izquierda del foco.

Debate

- ✓ ¿Qué opinas de este procedimiento para determinar la ecuación de una curva?

Reflexión y conclusión: Escriban sus conclusiones

Socializa las conclusiones: Elige un compañero de tu equipo para que compartan las conclusiones a todo el curso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL SANTIAGO PÈREZ

Prueba final- Coordenadas polares

Estudiante: ____

Curso: _______**Periodo académico:** ___________

Docente: Urías J. Pérez Acuña.

1. Ubica cada punto cuyas coordenadas polares son:

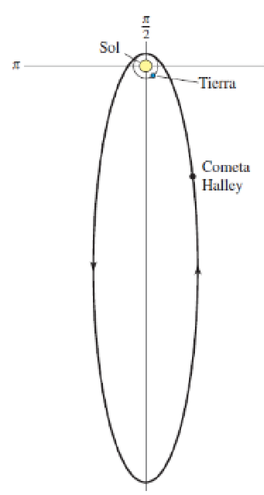
   a. $(1, \frac{5\pi}{4})$ b. $(2, \frac{-2\pi}{3})$ c. $(\frac{5}{2}, -\pi)$ d. $(3, \frac{7\pi}{6})$

2. Determina la simetría y traza la curva cuya ecuación polar es $r = 2 + 2cos\theta$

3. La ecuación de una cónica es $r = \frac{8}{1-cos\theta}$, determina la excentricidad, identifica la cónica, obtener vértice (s) y trazar la curva.

4. Una sección cónica está representada por la ecuación polar $r = \frac{10}{3-2cos\theta}$. Determina la excentricidad, identifique qué cónica es, trace la gráfica y la directriz.

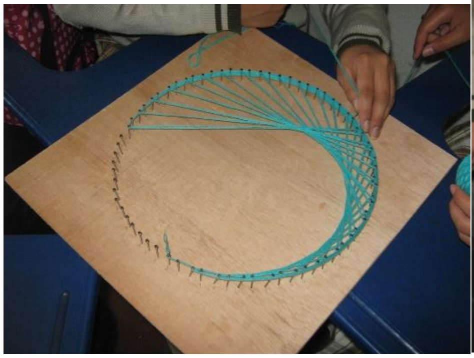
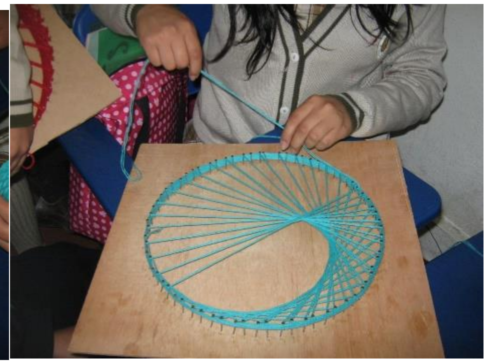
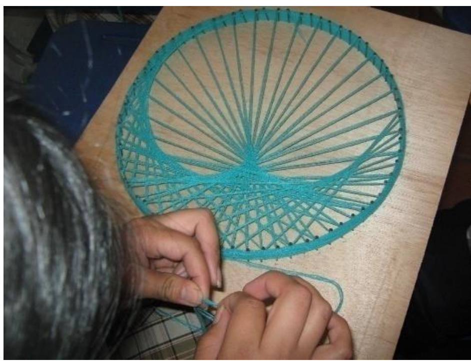
5. El cometa Halley tiene una órbita elíptica con el Sol como foco, como se muestra en la figura. ¿Qué forma tiene la ecuación polar para esta curva?



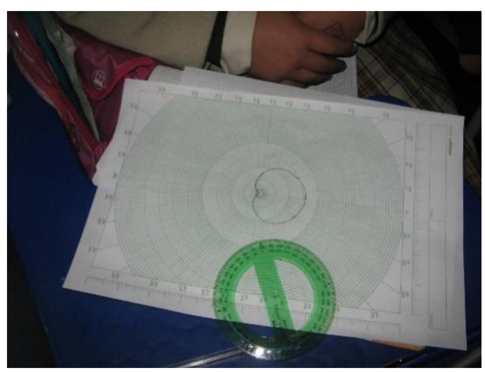
B. Anexo B: Evidencias fotográficas

Práctica 1: Tiro al blanco y Práctica 2: Ubicación de puntos en papel polar

Práctica 3: Tejiendo parte I

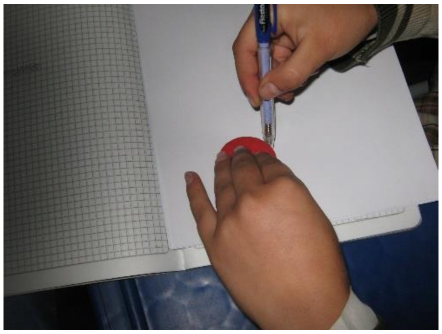

Práctica 4: Tejiendo parte I-A

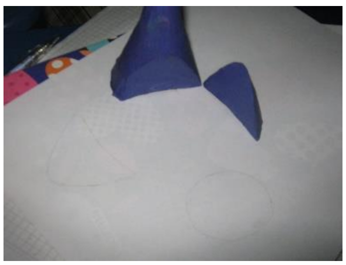



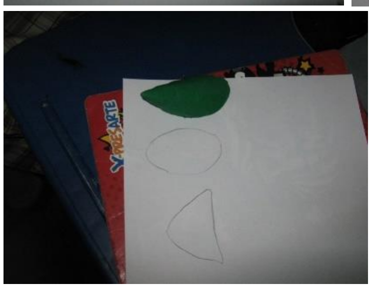
Práctica 5: Aro ula ula



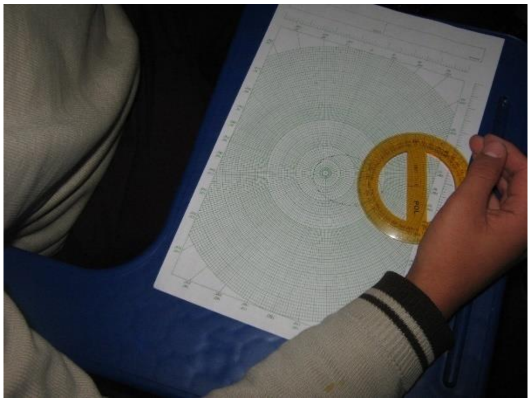

Práctica 6: Obteniendo cónicas

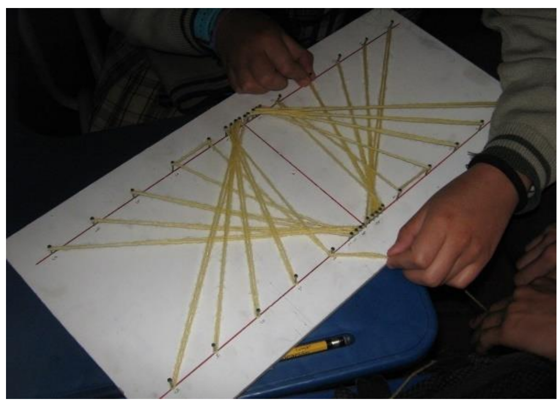


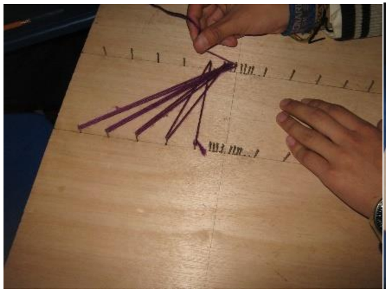
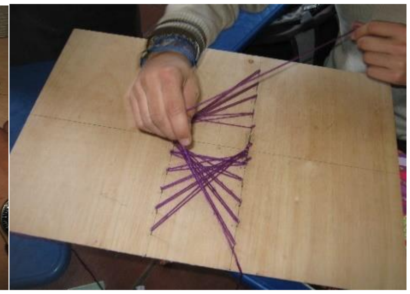
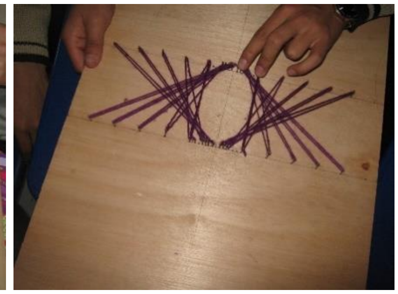
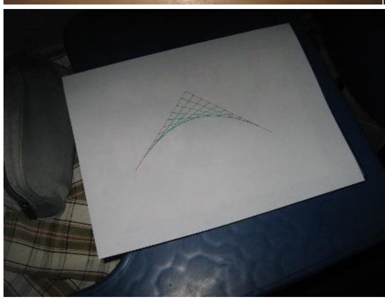
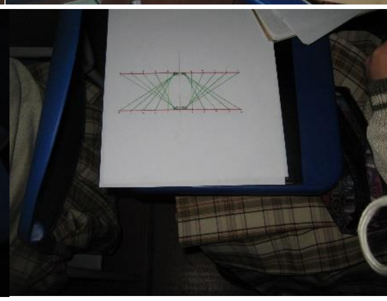
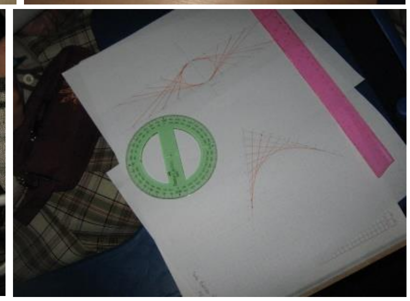


Práctica 7: Buscando el foco y Práctica 8: La parábola y la elipse en papel polar



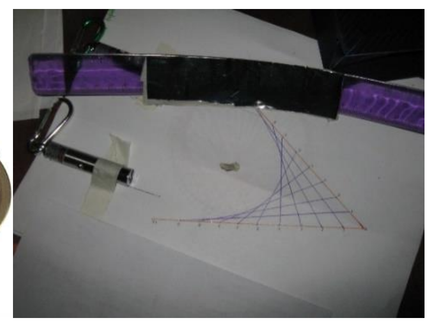
Práctica 9: Tejiendo la parábola y la elipse

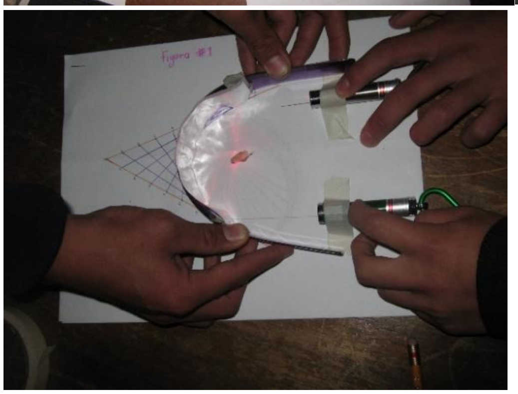


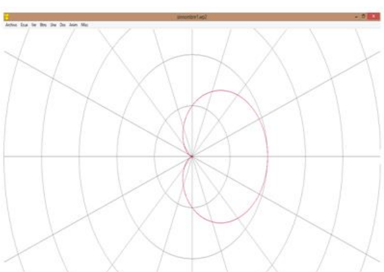
Práctica 10: Algunas aplicaciones de la parábola y la elipse

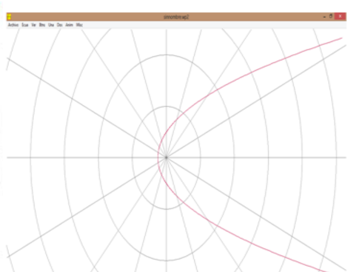


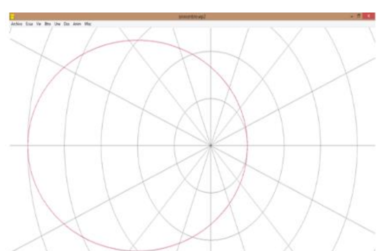


Práctica 11: Winplot







Bibliografía

[1] Acuña, C (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. Recuperado de http://www.redaly.org/articulo.oa?id=33540301

[2] Alagia, Bressan y Sadosvky(2005). Reflexiones teóricas para la Educación Matemática: Los principios de la Educación Matemática Realista.
Libros del Zorzal. Buenos Aires.

[3] Arce, M y Ortega, T (2013). Deficiencias en el trazado de graficas de funciones de estudiantes de bachillerato. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/29576/1/2_Deficiencias.pdf

[4] Bell, E.T. (1949). Historia de las matemáticas.
Ed. Fondo cultura economica, México.

[5] Bourbaki, N. (1976). Elementos de la historia de las matemáticas.
Ed. Cast: Alianza Editorial. Madrid.

[6] Boyer, C.B. (2003). Historia de la matemática.
Editorial: Alianza Editorial, Madrid.

[7] Boyer, C.B. (1949). Newton as an Originator of Polar Coordinates, en American Mathematical Montly, 16 págs. 73-78. Recuperado de: http://www.jstor.org/discover/10.2307/2306162?uid=2&uid=4&sid=21104711302077

[8] Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, en Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 7. No. 2.

[9] Carretero, M (1993). Constructivismo y Educación.
Editorial: Luis Vives, Argentina.

[10] Cerda, H. (2000). Los elementos de la investigación.
Editorial: El buho, Bogotá.

[11] Coolidge, J.L. (1949). The origin of polar coordinates
Recuperado: http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/js/geometry/polar.pdf

[12] Chau, P.N y Sánchez, G. R (2010). Coordenadas polares: curvas maravillosas.Recuperado de http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/view/2191/2122

[13] Chevallard, Y.(1997). Trasnposición didáctica.
Ed. Aique, Buenos Aires.

[14] González, P.M (2003). Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: La geometría de Descartes. Recuperado de: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf

[15] González, P.M (2007). La geometría analítica de la introductio in analysin infinitorum de Euler. Recuperado de:http://www.izenpe.com/s15-4812/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_31/13_geo_analitica.pdf

[16] Guzmán,M. (1986). Legado: Historia de las matemáticas. Apolonio.
Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apolonio/

[17] Ibáñez, G. (1992). Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formación. Aula de Innovación Educativa, 1, pp. 13-15.

[18] Jiménez, G.E y Guirao, M.J(2007). La conceptuación de la posición por los alumnos de 11 a 16 años. Propuesta de dominio de instrucción. Enseñanza de las ciencias. Investigación didáctica. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/87861/216395

[19] Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I
Ed. Cast: Alianza Editorial. Madrid.

[20] Kline, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, II
Ed. Cast: Alianza Editorial. Madrid.

[21] Leithold, L. (1994). El Cálculo con Geometría Analítica.
Ed. Harla. México.

[22] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Documento: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.
Editor: Ministerio de Educación Nacional. Bogotá.

[23] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas.
Editorial. Delfín Ltda. Bogotá.

[24] Murillo, J (2013). Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la Astronomía. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia.

[25] Pérez, R (2011). Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia.

[26] Pérez, I (2012). Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica. Tesis maestría, Universidad Nacional de Colombia.

[27] Real, M (2004). Las cónicas: método de aprendizajes constructivos. Recuperado de http://www.revistasuma.es/IMG/pdf/46/071-077.pdf

[28] Rodríguez, S.P y Beltrán, B. W. (2012). Desempeños matemáticos
Editorial: educativa. Bogotá.

[29] Sánchez, C.H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los elementos de Euclides. Recuperado de http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/1860/1836

[30] Swokowsky, E. W. (1989). *Cáculo con geometría analítica.*
Editorial: Iberoamericana, México.

[31] Zambrano, E. (2011). La cinemática lineal y su conceptualización a partir del razonamiento de situaciones problemas; una propuesta didáctica con estudiantes de grado sexto de la Escuela Normal Superior de Villavicencio (E.N.S.V). Tesis maestría, Universidad Nacional de Colombia.