UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Pares coherentes generalizados de polinomios ortogonales en dos variables

Juan Esteban Cortés Garzón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2023

Pares coherentes generalizados de polinomios ortogonales en dos variables

Juan Esteban Cortés Garzón

Trabajo final presentado como requisito para optar al título de:
Magister en Ciencias Matemáticas

Director(a):
Dr. Natalia Camila Pinzón Cortés

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2023

Resumen

Título: Pares coherentes generalizados de polinomios ortogonales en dos variables
En este trabajo nos centraremos en la obtención de pares x_k-coherentes de polinomios ortogonales en varias variables a partir de un sistema de polinomios ortogonales escogido inicialmente, concepto introducido en [28] de 2019 por Francisco Marcellán, Misael Marriaga, Teresa Pérez y Miguel Piñar, mediante el uso de programación en el software *Wolfram Mathematica*.

Palabras clave: polinomios ortogonales; pares coherentes; varias variables, programación.

Abstract

Title: Generalized coherent pairs of orthogonal polynomials in two variables
In this work we will focus on obtaining x_k-coherent pairs of orthogonal polynomials in several variables from an initially chosen system of orthogonal polynomials, a concept introduced in [28] of 2019 by Francisco Marcellán, Misael Marriaga, Teresa Pérez and Miguel Piñar, by using programming in Wolfram Mathematica software.

Keywords: orthogonal polynomials; coherent pairs; several variables; programming.

Introducción

El presente trabajo tiene como principal objetivo la obtención de pares x_k-coherentes de polinomios ortogonales en varias variables a partir de un sistema de polinomios ortogonales escogido inicialmente, concepto que se introdujo muy recientemente en [28] de 2019 por Francisco Marcellán, Misael Marriaga, Teresa Pérez y Miguel Piñar. Esta búsqueda de pares se hace con el propósito de poder tener una mejor comprensión del comportamiento de dichos pares y así, para estudios posteriores, poder proponer y demostrar nuevos resultados o extensiones como ocurrió en el caso univariado. Para lograr una mejor estructuración y comprensión de los conceptos y resultados presentados se ha decidido dividir este trabajo en 5 capítulos, que a continuación enunciaré hablando brevemente de sus contenidos y del principal objetivo de cada uno de ellos.

El capítulo 1, *Marco Histórico*, es un recuento histórico, en el cual se presentan tanto las fechas como los hechos que llevaron al estudio de los polinomios ortogonales en una variable y en varias variables. El objetivo de este capítulo es mostrar la importancia que han tenido los polinomios ortogonales en el campo de las aplicaciones y es el por qué consideré importante hacer un estudio en los polinomios de varias variables ya que es un campo que aún tiene bastante por explorar.

El capítulo 2, *Marco Teórico*, es una introducción a la teoría general de polinomios ortogonales tanto en una como en varias variables. En él se introducen conceptos como la ortogonalidad, los funcionales lineales, las relaciones de recurrencia a tres términos, los polinomios clásicos y más; este capítulo tiene como objetivo permitir que el lector tenga una buena contextualización de los conceptos, y en particular, en el caso de varias variables, al ser un tema denso, se pueda tener un buen entendimiento de los conceptos que se emplearán durante el trabajo.

El capítulo 3, *Estado del Arte*, está dedicado a presentar los resultados que han sido obtenidos hasta el momento en el estudio de pares coherentes de polinomios ortogonales de una y varias variables. Este trabajo de grado se centra, en particular, en el estudio de la relación de x_k-coherencia presentada en la sección de pares coherentes de varias variables de este capítulo.

El capítulo 4 muestra el trabajo realizado para la obtención de pares x_k-coherentes, el cual incluye un repositorio en el que se presentan algunos ejemplos obtenidos programando en un software matemático y que, contrastados con la teoría obtenida en [28], garantizan que dicha programación es correcta y por ende aplicable para la obtención de nuevas familias de polinomios x_k-coherentes.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones junto con algunos problemas que quedan abiertos después de la elaboración de este trabajo.

Contenido

Introducción vi

1 Marco Histórico 2
1.1 Polinomios ortogonales clásicos . . . 2
1.1.1 Polinomios de Legendre . . . 2
1.1.2 Polinomios de Hermite . . . 4
1.1.3 Polinomios de Laguerre . . . 5
1.1.4 Polinomios de Jacobi . . . 6
1.2 Padres de la teoría de polinomios ortogonales . . . 6
1.3 Funciones generatrices . . . 9
1.4 Teoremas de caracterización . . . 10
1.5 Polinomios ortogonales en varias variables . . . 11

2 Marco Teórico 13
2.1 Polinomios Ortogonales en una variable . . . 13
2.2 Polinomios ortogonales en dos variables . . . 15

3 Estado del Arte 20
3.1 Pares coherentes de polinomios ortogonales en una variable . . . 20
3.2 Pares coherentes generalizados de polinomios ortogonales en una variable . . . 22
3.3 Pares coherentes de polinomios ortogonales en dos variables . . . 25

4 Obtención de pares x_k- coherentes 27
4.1 Producto de polinomios Jacobi-Jacobi . . . 29
4.1.1 Autocoherencia . . . 30
4.1.2 x_k-coherencia . . . 34
4.2 Producto de polinomios Jacobi-Laguerre . . . 36

5 Conclusiones y problemas abiertos 41
5.1 Conclusiones . . . 41
5.2 Algunos problemas abiertos . . . 42

Bibliografía 43

1 Marco Histórico

Para iniciar se realizará una breve introducción histórica acerca de los polinomios ortogonales en una y varias variables, con el fin de establecer la importancia del tema. Esta información es presentada de una forma más completa por Renato Álvarez en [1] (para el caso de una variable), y por Charles Dunkl y Yuan Xu en [11] y por Iván Area en [3] (para el caso de varias variables).

1.1. Polinomios ortogonales clásicos

Los polinomios Jacobi, Legendre, Laguerre y Hermite son conocidos en la actualidad como polinomios ortogonales clásicos, los cuales tienen ciertas características comunes dentro de las cuales se resalta un tipo de ecuación diferencial de segundo orden.

1.1.1. Polinomios de Legendre

La primera aparición de los polinomios de Legendre se encuentra en un artículo publicado en 1785 titulado *Sur l'attraction des sphèroides homogènes* [27], donde Adrien-Marie Legendre (1752-1833) trabajando con el problema de la búsqueda de las componentes de las fuerzas de atracción gravitacional entre cuerpos no esféricos, demostró un teorema que establece que, si se conoce el valor de la fuerza de atracción de un cuerpo de revolución homogéneo en un punto exterior situado en su eje, entonces se conoce en todo punto exterior. Resultado que le permitió reducir el problema al estudio de la componente radial

$$P(r,\theta,0) = \int\int\int \frac{(r-r')\cos\gamma}{(r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2)^{\frac{3}{2}}} r'^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi' dr',$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'$.

Esto que llevó a Legrende a una solución de la forma (conocida como la *función de las curvas meridianas*)

$$P(r,\theta,0) = \frac{4\pi}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-3}{2n-1}P_{2n}(\cos\theta)\frac{1}{r^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{2n+3}(\theta')P_{2n}(\cos\theta')\sin(\theta')d\theta',$$

donde $R(\theta')$ es el valor de r' en un valor θ' y las funciones $P_2(x), P_4(x), \ldots$ son polinomios de $\cos\gamma$, conocidos actualmente como *polinomios de Legendre*, cuya expresión es:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)}x^{n-4} + \ldots\right].$$

Dos años más tarde, en 1787, Legendre presentó algunas propiedades de las funciones $P_{2n}(x)$, entre las cuales están:

- los polinomios son ortogonales

$$\int_0^1 Q(x^2)P_{2m}(x)dx = 0, \qquad \text{grado } Q < m,$$

- los polinomios satisfacen la expresión

$$\int_0^1 x^n P_{2n}(x)dx = \frac{n(n-2)\ldots(n-2m+2)}{(n+1)(n+3)\ldots(2n+2m+1)}, \qquad n < 2m,$$

  de la cual se concluye la propiedad de ortogonalidad

$$\int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx = \frac{1}{4m+1}\delta_{n,m},$$

  siendo $\delta_{n,m}$ el símbolo de Kronecker definido por

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases},$$

- los ceros de los polinomios son reales, distintos entre sí, símetricos respecto al origen y menores en valor absoluto que 1.

En 1793, Legendre introdujo:

- los polinomios de grado impar,

- la noción general de ortogonalidad

$$\int_0^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m},$$

- la ecuación diferencial lineal que satisfacen los polinomios $P_n(x)$

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

- y los también conocidos *polinomios asociados de Legendre* $P_n^m(x)$ que se expresan de la forma
$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x),$$
donde $P_n^{(m)}(x)$ representa la m-ésima derivada de $P_n(x)$, los cuales son soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas al aplicar el método de separación de variables.

Finalmente, otro de los principales resultados fue presentado por Olinde Rodrigues (1794-1851), quien en *Mémoire sur l'attraction des sphèroides* publicado en 1826, presenta una fórmula que permite expresar los polinomios de Legrende de la forma
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$
conocida actualmente como *fórmula de Rodrigues*.

1.1.2. Polinomios de Hermite

Al parecer, su primera aparición fue en 1810, considerados por Laplace (1749-1827) quien en su tratado *Mécanique céleste* los utilizó en problemas asociados a la teoría de las probabilidades. Luego, en 1859, el ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821-1894) realizó un estudio detallado de estos en su artículo *Sur le développement des fonctions á une seule variable* [41]. Pero, los polinomios de Hermite fueron atribuidos principalmente a Charles Hermite (1822-1901) quien en 1864 en su ensayo *Sur un nouveau développement en série des fonctions* [16], interesado en el desarrollo de series de funciones en $\mathbb{R}$ de la forma:
$$F(x) = A_0 H_0(x) + A_1 H_1(x) + \cdots + A_n H_n(x) + \cdots, \qquad H_n \in \mathbb{P}_n,$$
logró los siguientes resultados:

- construir los polinomios $H_n(x)$ a partir de la expresión
$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} H_n(x),$$
fórmula análoga a la de Rodrigues, mediante la cual se obtuvo la expresión
$$(-1)^n H_n(x) = (2x)^n + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{(n-2k)!k!}(2x)^{n-2k} + \cdots,$$

- deducir la relación de recurrencia
$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$
con $H_0(x) = 1, H_{-1}(x) = 0$,

- plantear la ecuación diferencial lineal que satisfacen los polinomios

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0,$$

- y comprobar la ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{n,m}.$$

1.1.3. Polinomios de Laguerre

Estos polinomios deben su nombre a Edmond Nicolás Laguerre (1834-1886), pero estos ya eran parcialmente conocidos por Niels Henrik Abel (1802-1829) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), aunque al igual que en el caso anterior, Chebyshev fue el primero en realizar un estudio detallado de estos en su artículo de 1859 [41] y que posteriormente continuó el matemático ruso Konstantin Aleksandrovich Posse (1847-1928) en 1873. El caso general para $\alpha > -1$ fue estudiado por Yulian Vasilevich Sojotkin (1842-1827) en 1873, y no fue hasta 1879 que Laguerre los introduce, para el caso particular $\alpha = 0$, cuando trabajaba con la integral $\int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt$ mediante el uso de fracciones continuas.

Como resultado de esta investigación Laguerre demuestra que

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-x}\frac{\phi_n(x)}{L_n(x)} + (-1)^n \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt,$$

donde los polinomios $L_n(x)$ satisfacen la ecuación diferencial lineal

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Junto a este resultado, Laguerre presentó resultados como:

- la forma general de los polinomios, resultado obtenido mediante el uso de series de potencias

$$L_n(x) = x^n + n^2x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \cdots + \frac{n^2(n-1)^2\ldots(n-k+1)^2}{k!}x^{n-k} + \cdots + n!,$$

- la relación de recurrencia que cumplen

$$L_{n+1}(x) - (x+2n+1)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0,$$

- la ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!}\delta_{n,m},$$

- y que los ceros de $L_n(x)$ eran reales, no negativos y simples.

En 1880, Nikolai Yakovlevich Sonin (1849-1915) continuando con el estudio sobre los polinomios con $\alpha > -1$, presenta una relación de ortogonalidad más general

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{n,m},$$

junto con la generalización de la cuación diferencial

$$x(L_n^\alpha(x))'' + (\alpha+1-x)(L_n^\alpha)'(x) + nL_n^\alpha(x) = 0,$$

razón por la cual a los polinomios $L_n^\alpha(x)$ también se les conoce como polinomios Laguerre-Sonin.

1.1.4. Polinomios de Jacobi

Esta familia de polinomios es introducida por Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) como una generalización de los polinomios de Legendre a partir de la función hipergeométrica de Gauss, pero sin ningún interés en sus posibles aplicaciones (como sí lo fueron las familias anteriores, las cuales aparecieron de algún modo relacionadas con aplicaciones físicas o matemáticas). Dicha ecuación diferencial hipergeométrica es

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

cuya solución es de la forma:

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \gamma\end{array}\middle| x\right) = F(\alpha,\beta;\gamma|x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot(\gamma)(\gamma+1)}x^2 + \dots.$$

Además, Jacobi, en su artículo póstumo de 1859, *Untersunshungen über die Differentialgleichung de hypergeometrischen Reihe* [18], define los polinomios

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{array}\middle| \frac{1-x}{2}\right),$$

y para ellos demostró la ortogonalidad en el intervalo $[-1,1]$, para $\alpha > -1$ y $\beta > -1$, dada por:

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{n,m}.$$

1.2. Padres de la teoría de polinomios ortogonales

La teoría general sobre polinomios otrogonales nace debido a la estrecha relación que tienen los polinomios tanto con las ecuaciones diferenciales como con la teoría de aproximación (en particular, por su relación con las fracciones continuas), tal como lo vimos en las seccion 1.1.

Para iniciar, la relación existente entre los polinomios ortogonales y la teoría de las fracciones continuas fue principalmente trabajada por Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856-1894), quien consideró las fracciones continuas (conocidas actualmente como fracción continua de Stieltjes o S-fracción)

$$\cfrac{1}{c_1 z + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 z + \ldots + \cfrac{1}{c_{2n} + \cfrac{1}{c_{2n+1} z + \ddots}}}}},$$

con la condición $c_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Fracción que mediante un cambio de variable se puede transformar en la J-fracción

$$\cfrac{a_0^2}{z - b_0 - \cfrac{a_1^2}{z - b_1 - \cfrac{a_2^2}{z - b_2 - \ldots - \cfrac{a_{n-1}^2}{z - b_{n-1} - \cfrac{a_n^2}{z - b_n - \ddots}}}}},$$

con $a_0^2 = 1/c_1$, $b_0 = -1/(c_1 c_2)$ y

$$a_n^2 = \frac{1}{c_{2n-1} c_{2n}^2 c_{2n+1}}, \qquad b_n = -\frac{1}{c_{2n} c_{2n+1}} - \frac{1}{c_{2n+1} c_{2n+2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

En la cual, si suponemos que $a_k = 0$, para todo $k \geq n+1$ entonces obtendremos una función racional $f_n(x)$ de la forma

$$f_n(x) = \frac{1}{a_1} \frac{p_{n-1}^{(1)}}{p_n(z)},$$

donde los polinomios $p_n(z)$ y $p_{n-1}^{(1)}(z)$ son soluciones de la relación de recurrencia a tres términos

$$z r_n(z) = a_{n+1} r_{n+1}(z) + b_n r_n(z) + a_n r_{n-1}(z), \quad n \geq 0,$$

con las condiciones iniciales $r_{-1}(z) = 0$, $r_0(z) = 1$ y $r_{-1}(z) = 1$, $r_0(z) = 0$, respectivamente.

La teoría general de las S-fracciones cuando $c_k > 0$, para todo k, fue desarrollada por Stieltjes en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues* [37] (trabajo que también representó el primer estudio dedicado a la naciente teoría general de polinomios ortogonales) publicado póstumamente en dos partes en 1894 y 1895, ensayo en el cual

- mostró que los polinomios $p_n(x)$ formaban una sucesión de polinomios ortonormales (SPO), o sea, que la sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ con grado de p_n igual a n era tal que

$$\int_0^\infty p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = \delta_{n,m}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker y μ una medida positiva soportada en $[0, \infty)$.

- Demostró que en estos polinomios todos los ceros eran reales y simples, y además que los ceros de p_n entrelazaban con los ceros de $p_{n-1}^{(1)}$ y con los de p_{n-1}.

- A partir de la relación de recurrencia y para el caso de las J-fracciones, demostró que existía un funcional $\mathcal{L}$ lineal y positivo tal que, $\mathcal{L}(p_n p_m) = 0$ para $n \neq m$, resultado que puede ser interpretado como una versión primitiva del hoy conocido Teorema de Favard, presentado por Chihara en [6] como

  Teorema 1 (**Teorema de Favard** (1935)). *Supongamos que una sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma*

  $$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

  con $a_{k+1} > 0$ y $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ y las condiciones iniciales $p_{-1}(x) = 0$ y $p_0(x) = 1$. Entonces, existe un funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que es cuasi-definido y $\{p_n\}$ es su correspondiente SPO si y solo si, $a_n \neq 0$; mientras que $\mathcal{L}$ es definido positivo si y solo si b_n es real y $a_n > 0$.

- Introduce lo que se conoce actualmente como problema de momentos: dada una sucesión $\{\mu_n\}_n$, encontrar una medida $\mu(x)$ tal que $\mu_n = \int x_n d\mu(x)$.

- Plantea una extensión de la integral de Riemann (la integral de Riemann-Stieltjes) que le permitió un tratamiento más general de la ortogonalidad.

Otros trabajos que deben ser destacados son los del matemático ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev, el cual estudió una gran cantidad de problemas relacionados con los polinomios ortogonales, llegando a ellos al tratar de resolver problemas aplicados. Por ejemplo, en 1854 en su memoria *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* [40], Chebyshev llegó al problema de la mejor aproximación polinómica mediante sus investigaciones sobre algunos mecanismos que transformaban la energía de rotación en energía de traslación. En estas memorias, Chebyshev planteó el problema de encontrar la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua f, o sea, dada la función continua f definida en cierto intervalo (a, b), encontrar dentro del conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo sumo n, el polinomio p_n de grado n tal que el máximo de $|f(x) - p_n(x)|$ sea mínimo en dicho intervalo. De esa manera introdujo los hoy conocidos *polinomios de Chebyshev de primera especie* $T_n(x)$, los cuales son la solución al problema extremal de encontrar los polinomios mónicos $p_n(x) = x^n + \cdots$ tales que máx $|p_n(x)|$ en el intervalo $[-1, 1]$ sea mínimo. Estos polinomios forman un sistema ortogonal con respecto a la función peso $1/\sqrt{1-x^2}$ y coinciden con los polinomios de Jacobi $P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

Chebyshev también estudió el problema de momentos y fórmulas de cuadratura e introdujo la primera familia de polinomios discretos: los llamados *polinomios discretos de Chebyshev*.

Es por estas razones que tanto a Stieltjes como a Chebyshev se les considera los padres de la teoría de polinomios ortogonales. Teoría que queda consolidada en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* [39] de Gabor Szegö. Monografía en la cual, aparte de presentar una teoría general sobre polinomios ortogonales, se incluyen gran cantidad de resultados sobre las familias clásicas y se inicia la teoría de Szegö de polinomios sobre la circunferencia unidad.

1.3. Funciones generatrices

Las funciones generatrices permitieron descubrir muchas familias de polinomios ortogonales. Teniendo en cuenta que la función generatriz de la sucesión de polinomios $\{P_n\}_n$ es una función $\mathcal{F}$ de dos variables que se puede representar mediante una serie infinita de la forma

$$\mathcal{F}(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) w^n,$$

donde la sucesión $\{a_n\}_n$ es conocida.
Las funciones generatrices ya eran conocidas por Jacobi quien demostró que para los polinomios $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, se verificaba

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x) w^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-w+R)^{\alpha}(1+w+R)^{\beta}},$$

donde $R = \sqrt{1-2wx+w^2}$. Análogamente, para los polinomios de Laguerre y Hermite se tienen las expresiones

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) w^n = \frac{e^{-xw/(1-w)}}{(1-w)^{\alpha+1}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) w^n = e^{2xw-w^2},$$

respectivamente.
En 1934, J. Meixner consideró el problema de determinar todos los sistemas de polinomios ortogonales cuyas funciones generatrices tuvieran la forma

$$A(w)e^{xG(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) w^n, \quad A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n w^n, \tag{1-1}$$

donde $a_0 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ y f_n son polinomios de grado n con coeficientes principales $(n!)^{-1} a_0 g_1^n$.

De aquí en adelante, y sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que $a_0 = g_1 = 1$ y que P_n son los polinomios $P_n(x) = n!f_n(x)$. Meixner probó que a la sucesión $\{P_n\}_n$ le corresponde una función generatriz de la forma (1-1) si y solo si, los polinomios $\{P_n\}_n$ satisfacen una relación de recurrencia de la forma

$$P_{n+1}(x) = [x - (dn + f)]P_n(x) - n(gn + h)P_{n-1}(x), \quad n \neq 0, \tag{1-2}$$

donde $g \neq 0$, $g + h > 0$. Además demostró que existían cinco clases distintas de polinomios ortogonales que cumplían la condición (1-1), a saber:

- Los polinomios de Hermite ($d = f = g = 0$).
- Los polinomios de Laguere ($d \neq 0$, $d^2 - 4g = 0$, $f = (h + g)g^{\frac{1}{2}}$).
- Los polinomios discretos de Charlier ($d \neq 0$, $g = 0$, $f = h/d$), polinomios introducidos por Charlier en 1905 para estudios relacionados con mediciones astronómicas.
- Los polinomios discretos de Meixner ($d^2-4g > 0$, $f = (2(g+h))/(d+\rho)$, $\rho = \sqrt{d^2 - 4g}$).
- Los polinomios discretos de Meixner de segunda especie o polinomios de Meixner-Pollaczek ($d^2 - 4g < 0$).

1.4. Teoremas de caracterización

Las propiedades más importantes en la teoría de los polinomios ortogonales son los teoremas de caracterización, es decir, los teoremas que nos indican las principales propiedades que caracterizan a las familias clásicas de polinomios ortogonales.
Una de las primeras caracterizaciones hace referencia a la propiedad común que tiene las tres familias clásicas de polinomios ortogonales (Hermite, Laguerre y Jacobi) y es la ecuación diferencial de segundo orden que satisfacen. En 1929, S. Bochner demostró que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían una ecuación diferencial del tipo

$$\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x) + \tau(x)\frac{d}{dx}P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0,$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, y λ_n es una constante, eran los polinomios clásicos, o sea, los polinomios de Jacobi ($\sigma(x) = (1-x^2)$), Laguerre ($\sigma(x) = x$) y Hermite ($\sigma(x) = 1$) y, los polinomios de Bessel (presentados en 1949 por H. L. Krall y O. Frink en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* [25] y les dieron el nombre por su relación con las funciones de Bessel) ($\sigma(x) = x^2$).

Otra caracterización presentada por Sonin quien, en 1887, probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacen la propiedad de que sus derivadas P_n' también eran ortogonales

eran los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Esta propiedad fue trabajada nuevamente en 1935 por W. Hahn quien consideró también los polinomios de Bessel y además, dos años más tarde, presentó en [15] un resultado más general: *si la sucesión de polinomios ortogonales* $\{P_n\}_n$ *era tal que la sucesión de sus* k*-ésimas derivadas* $\left\{P_n^{(k)}\right\}_n$*, para cierto* $k \in \mathbb{N}$*, también era ortogonal, entonces* $\{P_n\}_n$ *era alguna de las sucesiones de polinomios ortogonales clásicos.*

Una tercera caracterización fue propuesta por F. Tricomi quien conjeturó y parcialmente demostró que solo los polinomios ortogonales clásicos se podían expresar en términos de una fórmula tipo Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\rho(x)\sigma^n(x)], \;\; n \geq 1,$$

donde ρ es una función no negativa en cierto intervalo y σ es un polinomio independiente de n. Esta caracterización que fue completamente demostrada por Cryer en 1969.

Otra caracterización nos dice que los únicos polinomios ortogonales, respecto a una función peso ρ, que son solución de la ecuación diferencial de Pearson

$$[\rho(x)\sigma(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad \text{grado } \sigma \leq 2, \text{grado } \tau = 1,$$

son los polinomios clásicos (Jacobi, Laguerre y Hermite). Caracterización probada por Hildebrandt en 1931. Gracias a llevar esta última caracterización al espacio dual de los funcionales, F. Marcellán y J. Petronilho lograron obtener una forma unificada de probar todas las caracterizaciones, además de poder proponer otras caracterizaciones nuevas no solo para los polinomios clásicos, sino también para el caso "discreto".

1.5. Polinomios ortogonales en varias variables

Los primeros estudios acerca de polinomios ortogonales en varias variables se remontan a 1926, donde P. Appell y J. Kampé de Fériet en su libro *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques* [2] presentaron algunas propiedades de las generalizaciones de polinomios de Hermite a varias variables.
En 1935, Zernike y Brinkman [43] introdujeron los polinomios en el disco los cuales permitieron evaluar la imagen puntual de un sistema óptico aberrado teniendo en cuenta los efectos de la difracción.
Posteriormente, Proriol en su artículo [36] de 1957 introdujo los polinomios ortogonales en una región triangular (simplex) los cuales fueron aplicados para resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de helio. Polinomios que también fueron trabajados de forma independiente por Karlin y McGregor en [20] de 1964 y [21] de 1975 donde se tomó un enfoque

relacionado a aplicaciones en genética.
En ese mismo año (1957), Koornwinder en su trabajo *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials* [22], analizó análogos de dos variables de los polinomios ortogonales clásicos, además presentó un método general de generación de polinomios ortogonales de dos variables a partir de polinomios ortogonales de una variable; este es probablemente el primer estudio sistemático acerca de los polinomios ortogonales en dos variables. Este método también fue presentado por Dunkl y Xu en su texto *Orthogonal Polynomials of Several Variables* [11].
Los trabajos en polinomios ortogonales multivariados a partir de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden fueron presentados:

- En 1967, por Krall y Sheffer [26], quienes estudiaron el problema de encontrar todas las funciones propias polinómicas de operadores diferenciales lineales de segundo orden en dos variables que tienen coeficientes polinómicos de grado igual al orden de la derivada bajo ciertas restricciones adicionales relacionadas con su simetrizabilidad y la ortogonalidad de sus funciones propias; además clasificaron todas las formas normales posibles de los operadores que satisfacían las propiedades requeridas.

- En 1974, por Engelis [12], quien proporcionó una lista detallada de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden para las cuales los polinomios ortogonales en dos variables son soluciones. Esta fue posteriormente estudiada y descrita por Suetin [38] en 1998.

La relación de tres términos y el teorema de Favard en varias variables fueron estudiados por primera vez en 1982 por Kowalski [23], [24], en el que se usó la notación vectorial en la forma $x\mathbb{P}_n = (x_1\mathbb{P}_n^T \ \ldots \ x_d\mathbb{P}_n^T)$.
La estructura de polinomios ortogonales en orden lexicográfico, más que en orden lexicográfico graduado, fue estudiada en 2006 por Delgado, Geronimo, Iliev y Marcellán en [8].
En 2010, Barrio, Peña y Sauer en su artículo [5] presentaron una relación de recurrencia de tres términos para el cálculo de polinomios ortogonales mónicos multivariables, junto con una aplicación de estas fórmulas para evaluar series finitas de dichos polinomios. El cálculo de algunas matrices en las relaciones de tres términos para polinomios ortogonales de dos variables fue presentado en 2012 por Area, Godoy, Ronveaux y Zarzo en [4].

2 Marco Teórico

2.1. Polinomios Ortogonales en una variable

Denotaremos por Π_n^d el subespacio lineal de polinomios con coeficientes reales en d variables de grado total a lo más n y $\Pi^d = \bigcup_{n\geq 0} \Pi_n^d$ como el espacio lineal de polinomios con coeficientes reales en d variables. En particular, cuando $d = 1$, escribiremos simplemente Π_n y Π. A continuación daremos algunos conceptos generales de polinomios ortogonales en una variable, los cuales tomaremos de [6].
Consideremos un funcional lineal $\mathcal{U}$ en el espacio dado Π. Denotamos por $\langle \mathcal{U}, p\rangle$ la acción del funcional $\mathcal{U}$ sobre un polinomio $p \in \Pi$, e introducimos la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 0}$ de *momentos* asociados a el funcional $\mathcal{U}$, donde $u_n = \langle \mathcal{U}, x^n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Con lo cual, si consideramos un polinomio $p_n(x) \in \Pi$ de la forma $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ entonces:

$$\langle \mathcal{U}, p_n(x)\rangle = \left\langle \mathcal{U}, \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \langle \mathcal{U}, x^k\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k u_k.$$

Además, definiremos la derivada distribucional y el producto izquierdo por un polinomio $\phi(x) \in \Pi$ del funcional lineal $\mathcal{U}$ como dos nuevos funcionales lineales $D\mathcal{U}$ y $\phi\mathcal{U}$, respectivamente, tales que:

$$\langle D\mathcal{U}, p(x)\rangle = -\langle \mathcal{U}, p'(x)\rangle, \qquad p(x) \in \Pi,$$

$$\langle \phi\mathcal{U}, p(x)\rangle = \langle \mathcal{U}, \phi(x)p(x)\rangle, \qquad p(x) \in \Pi.$$

Decimos que el funcional lineal $\mathcal{U}$ es *cuasi-definido* o *regular* si las submatrices principales de la matriz de Hankel $H = (u_{i+j})_{i,j=0}^{n}$ son no singulares. En tal caso existe una sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}_{n\geq 0}$ tal que:

1. $deg(P_n) = n$.

2. $\langle \mathcal{U}, P_n(x)P_m(x)\rangle = K_n\delta_{n,m}$, con $K_n \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Se dice entonces que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM)* con respecto al funcional lineal $\mathcal{U}$.
Como consecuencia inmediata, se tiene que $\{P_n\}_{n=0}^{m}$ resulta ser una base para el espacio Π_m.
También, decimos que el funcional $\mathcal{U}$ es *definido positivo* si $\langle \mathcal{U}, p^2\rangle \geq 0$, para todo $p \in \Pi$,

con $p \neq 0$. En este caso, existe una medida positiva de Borel μ con soporte en la recta real, tal que:

$$\langle \mathcal{U}, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} p d\mu, \qquad p \in \Pi.$$

Además, tenemos que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una SPOM con respecto a un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{U}$ si y solamente si existen sucesiones de números reales $\{c_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, con $\lambda_n \neq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x).$$

Esta ecuación es llamada la *relación de recurrencia a tres términos (RRTT).*
En este estudio de polinomios ortogonales son de interés aquellos que se llaman clásicos y semi-clásicos, los cuales se definirán a través de su funcional de momentos como sigue:
Un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{U}$ se dice *clásico* si existen polinomios ϕ y ψ no nulos, con $\phi \in \Pi_2$ mónico y $deg(\psi) = 1$, tales que se verifica la ecuación

$$D(\phi\mathcal{U}) + \psi\mathcal{U} = 0. \tag{2-1}$$

Dicha ecuación se denomina ecuación distribucional de Pearson asociada al funcional clásico $\mathcal{U}$. Dentro de los resultados de los polinomios clásicos es importante mencionar que si $\mathcal{U}$ es clásico, $\{p_n(x)\}$ es su correspondiente SPO, $q_n(x) = \dfrac{p_n'(x)}{n}$ y $\mathcal{V} = \phi\mathcal{U}$ con ϕ el polinomio definido en la ecuacion distribucional,

$$p_n(x) = q_{n+1}(x) + b_n q_n(x) + c_n q_{n-1}(x),$$

donde $b_n = a_{n,n-1}$ y $c_n = a_{n,n-2}$ con

$$a_{n,m} = \frac{\langle \mathcal{V}, p_n(x) q_m(x) \rangle}{\langle \mathcal{V}, q_m^2(x) \rangle}.$$

Si en la relación (2-1) debilitamos las condiciones sobre los polinomios, obtenemos una generalización del concepto de funcional clásico. Para ello, consideremos $\phi(x) = a_k x^k + \cdots$ y $\psi(x) = b_l x^l + \cdots$ dos polinomios de grados $k \geq 0$ y $l \geq 1$, respectivamente. Diremos que (ϕ, ψ) es un *par admisible* si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. $k - 1 \neq l$.
2. Si $k - 1 = l$, entonces $na_k \neq b_l$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con lo cual, diremos que un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{U}$ es *semi-clásico* si existe un par admisible de polinomios (ϕ, ψ) con ϕ mónico y $deg(\psi) \geq 1$, tales que se verifica (2-1).
Decimos además, que el funcional semi-clásico $\mathcal{U}$ es de *clase s* si:

$$s = min\left\{t \in \mathbb{N} : \exists(\phi, \psi) \in X_{\mathcal{U}},\ t = max\left\{deg(\phi - 2), deg(\psi - 1)\right\}\right\},$$

siendo $X_{\mathcal{U}} = \{(\phi, \psi) \colon (\phi, \psi)$ es par admisible con ϕ mónico y $D(\phi\mathcal{U}) + \psi\mathcal{U} = 0\}$.

2.2. Polinomios ortogonales en dos variables

Ahora hablaremos de algunas nociones básicas para el trabajo en polinomios ortogonales en dos variables, las cuales se tomaron de [11] y [13].
Para el trabajo en polinomios de dos variables se usarán monomios de la forma $x^{n-k}y^k$ con $n \geq 0$ y $0 \leq k \leq n$ y donde n es llamado el grado total del monomio. Así, un polinomio $p(x, y)$ en dos variables es una combinación lineal de monomios de la forma:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{ij} x^{i-j} y^j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

El grado de este polinomio está dado por el mayor de los grados totales de los monomios tales que $a_{ij} \neq 0$. Recordando la notación mencionada en la sección 2-1, denotamos por Π^2 el espacio de polinomios bivariados con coeficientes reales y para cada $n \geq 0$, Π_n^2 denota el subespacio de Π^2 generado por

$$\left\{1, x, y, \ldots, x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n\right\}.$$

Se define la base canónica $\{\mathbb{X}_n\}_{n\geq 0}$ de Π^2, como la colección de vectores columna de tamaño $(n+1) \times 1$ de la forma,

$$\mathbb{X}_n = \begin{pmatrix} x^n \\ x^{n-1}y \\ \vdots \\ xy^{n-1} \\ y^n \end{pmatrix},$$

y de esta manera cada polinomio $p \in \Pi^2$ de grado n puede ser representado como

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{n} C_k \mathbb{X}_k,$$

donde C_k es una matriz de tamaño $1 \times (k+1)$ con entradas reales.
Dada $\{P_{n,m}(x, y) : 0 \leq m \leq n\}$ una base de Π_n^2, definimos un *sistema de polinomios* (SP) como la sucesión de vectores columnas $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$, cuyas entradas son polinomios linealmente independientes de grado total n,

$$\mathbb{P}_n = \left(P_{n,0}(x, y), P_{n,1}(x, y), \ldots, P_{n,n}(x, y)\right)^T,$$

donde T representa la transpuesta. Como consecuencia directa, el conjunto de entradas de todos los polinomios $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$, es una base para Π^2. Además, para cada $n \geq 0$, el vector $\mathbb{P}_n$ puede ser escrito como

$$\mathbb{P}_n = G_n^n \mathbb{X}_n + G_n^{n-1} \mathbb{X}_{n-1} + \cdots + G_n^0 \mathbb{X}_0,$$

donde G_n^k es una matriz de tamaño $(n+1)\times(k+1)$ con entradas reales que se conoce como matriz de coeficientes, y G_n^n es no singular y es llamado coeficiente líder del polinomio $\mathbb{P}_n$. El SP $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ es llamado *sistema de polinomios mónicos* (SPM), si el coeficiente líder $C_n^n = I_{n+1}$, donde I_{n+1} representa la matriz identidad de tamaño $n+1$.
Dada una sucesión de números reales $\{\mu_{n,k}\}_{n,k\geq 0}$, podemos definir un funcional lineal $\mathcal{U}$ como

$$\langle \mathcal{U}, x^h y^k\rangle = \mu_{h,k}.$$

Para el funcional lineal $\mathcal{U}$, se definen las derivadas distribucionales parciales por:

$$\langle \partial_k \mathcal{U}, p(x,y)\rangle = -\langle \mathcal{U}, \partial_k p(x,y)\rangle, \qquad \forall p\in\Pi^2,$$

para $k=1$ ó 2, donde $\partial_1 = \partial_x = \partial/\partial_x$ y $\partial_2 = \partial_y = \partial/\partial_y$.
Como un SP $\left\{\mathbb{P}_n = (P_{n,0}(x,y), P_{n,1}(x,y), \cdots, P_{n,n}(x,y))^T\right\}_{n\geq 0}$, es una base algebraica para Π^2, entonces existe una base en el espacio dual $(\Pi^2)^*$

$$\{\mathbf{u}_{h,k} : 0\leq k\leq h\},$$

tal que:

$$\langle \mathbf{u}_{h,k}, P_{n,m}(x,y)\rangle = \delta_{h,n}\delta_{k,m}.$$

Esta base dual podemos escribirla como una sucesión de vectores de la forma

$$\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_{n,0}, \cdots, \mathbf{u}_{n,n}), \qquad n\geq 0,$$

que satisfacen la condición de dualidad

$$\langle \mathbf{U}_n, \mathbb{P}_m^T\rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_{n,0}, P_{m,0}\rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_{n,0}, P_{m,m}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_{n,n}, P_{m,0}\rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_{n,n}, P_{m,m}\rangle \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & n\neq m, \\ I_{n+1}, & n=m, \end{cases}$$

donde 0 es la matriz cero de tamaño adecuado e I_{n+1} es la matriz identidad de tamaño $n+1$.
Esta sucesión de vectores de funcionales lineales $\{\mathbf{U}_n\}_{n\geq 0}$ se dice que es la *base dual* asociada al SP $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$.
Diremos que un SP $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ es un *sistema de polinomios ortogonal* (SPO) con respecto a un funcional lineal $\mathcal{U}$ si, para $n,m\in\mathbb{N}$:

$$\langle \mathcal{U}, \mathbb{P}_n\mathbb{P}_m^T\rangle = \begin{cases} 0, & n\neq m, \\ H_n, & n=m, \end{cases}$$

donde 0 es la matriz cero de tamaño adecuado y H_n es una matriz real simétrica y no singular de tamaño $(n+1)\times(n+1)$. Cuando cada matriz H_n es diagonal, decimos que $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ es un *sistema mutuamente ortogonal*. Si en esta definición anterior consideramos que $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ es un SPM, entonces diremos que este es un *sistema de polinomios ortogonales mónicos* (SPOM).

Decimos que un funcional lineal $\mathcal{U}$ es *cuasi-definido* o *regular* si existe un SPO asociado a este, y al igual que en el caso de una variable, $\mathcal{U}$ es *definido positivo* si $\langle \mathcal{U}, p^2 \rangle \geq 0$, para todo $p \in \Pi^2$ con $p \neq 0$. Otros resultados que se extienden de los resultados de una variable son la relación de recurrencia a tres términos y el teorema de Favard presentados por Dunkl y Xu en [11] de la siguiente forma

Teorema 2 (**Relación de recurrencia a tres términos (RRTT)**). *Dada una SPO* $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$, *para cada* $n \geq 0$, *existen matrices* $G_{n,i} : (n+1) \times (n+1)$, $H_{n,i} : (n+1) \times (n+2)$ *y* $F_{n,i} : (n+1) \times n$ *tales que*

$$x_i \mathbb{P}_{n,k} = G_{n,i}\mathbb{P}_{n,k} + H_{n,i}\mathbb{P}_{n+1,k} + F_{n,i}\mathbb{P}_{n-1,k}, \quad 1 \leq i \leq 2, \tag{2-2}$$

donde $\mathbb{P}_{-1} = 0$ *y* $F_{-1,i} = 0$ *. Más aún, el rango de* $H_{n,i}$ *es* $n+1$ *y el de* $F_{n,i}$ *es* n.

Teorema 3 (**Teorema de Favard**). *Sea* $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de polinomios. Si* $\mathbb{P}_n$ *satisface la RRTT* (2-2), *entonces existe un funcional lineal* $\mathcal{U}$ *cuasi-definido para el cual* $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ *es su correspondiente SPO.*

Una de las maneras de determinar SPO en dos variables, esta dada por el producto de polinomios ortogonales de una variable de la siguiente forma. Dados $u^{(x)}$ y $v^{(y)}$ dos funcionales cuasi-definidos univariados que actúan sobre las variables x y y, respectivamente, definimos el funcional de momento bivariado $\mathbf{w}$ por

$$\langle \mathbf{w}, p(x,y) \rangle = \langle u^{(x)}, \langle v^{(y)}, p(x,y) \rangle \rangle, \quad p \in \Pi^2,$$

el cual es un funcional de momentos cuasi-definido. En efecto, si $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{q_n(y)\}_{n\geq 0}$ son SPO con respecto a $u^{(x)}$ y a $v^{(y)}$, respectivamente, entonces la sucesión $\{P_{n,m}(x,y) : 0 \leq m \leq n, n \geq 0\}$, donde

$$P_{n,m}(x,y) = p_{n-m}(x)q_m(y), \quad 0 \leq m \leq n,$$

constituye un sistema ortogonal con respecto a $\mathbf{w}$. De hecho,

$$\langle \mathbf{w}, P_{n,m}P_{h,k} \rangle = h_{n-m}\tilde{h}_m \delta_{n,h}\delta_{m,k},$$

donde

$$h_{n-m} = \langle u^{(x)}, p^2_{n-m}(x) \rangle, \tilde{h}_m = \langle v^{(y)}, q^2_m(y) \rangle, \quad 0 \leq m \leq n.$$

Un funcional de momentos $\mathcal{U}$ cuasi-definio se dice *clásico*, si existen polinomios $a_k(x,y)$, $b(x,y)$, $d_k(x,y)$, $k = 1,2$, tales que $\mathcal{U}$ satisface una ecuación matricial tipo Pearson como sigue:

$$\begin{cases} \partial_1(a_1\mathcal{U}) + \partial_2(b\mathcal{U}) = d_1\mathcal{U} \\ \partial_1(b\mathcal{U}) + \partial_2(a_2\mathcal{U}) = d_2\mathcal{U} \end{cases} \quad \text{y} \quad det \begin{pmatrix} \langle \mathcal{U}, a_1 \rangle & \langle \mathcal{U}, b \rangle \\ \langle \mathcal{U}, b \rangle & \langle \mathcal{U}, a_2 \rangle \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2-3}$$

donde $deg(a_k(x,y)) \leq 2$, $deg(b(x,y)) \leq 2$ y $deg(d_k(x,y)) = 1$.
Si para el funcional de momentos $\mathcal{U}$ cuasi-definido existen polinomios $a_k(x,y)$, $b(x,y)$, $d_k(x,y)$,

$k = 1, 2$, que satisfacen (2-3) con $deg(a_k(x, y)) \geq 0$, $deg(b(x, y)) \geq 0$ y $deg(d_k(x, y)) \geq 1$, diremos que el funcional es *semi-clásico*.
Por otro lado, para $n \geq 0$, definimos las matrices

$$L_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{n,2} = \begin{pmatrix} 0 & | & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & | & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

de tamaño $(n + 1) \times (n + 2)$, y las matrices

$$\Omega_{n,1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{n,2} = \begin{pmatrix} 0 & | & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \tag{2-4}$$

de tamaño $n \times (n + 1)$. Con lo cual tenemos que

- $x\mathbb{X}_n = L_{n,1}\mathbb{X}_{n+1}$,
- $y\mathbb{X}_n = L_{n,2}\mathbb{X}_{n+1}$,
- $\Omega_{n,1}\partial_1\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_{n-1}$, donde $\partial_1 = \partial_x = \partial/\partial_x$,
- $\Omega_{n,2}\partial_2\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_{n-1}$, donde $\partial_2 = \partial_y = \partial/\partial_y$.

Podemos construir un par de SPM asociado con cada derivada parcial de un SP dado. En efecto, para un SP $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ definimos:

$$\mathbb{P}_n^{(1)} = \Omega_{n+1,1}(C_{n+1}^{n+1})^{-1}\partial_1\mathbb{P}_{n+1} \;\; y \;\; \mathbb{P}_n^{(2)} = \Omega_{n+1,2}(C_{n+1}^{n+1})^{-1}\partial_2\mathbb{P}_{n+1},$$

donde C_{n+1}^{n+1} es el coeficiente líder de $\mathbb{P}_{n+1}$ y $\Omega_{n+1,1}$, $\Omega_{n+1,2}$ están dadas por (2-4).
En particular, si $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ es un SPM entonces,

$$\mathbb{P}_n^{(1)} = \Omega_{n+1,1}\partial_1\mathbb{P}_{n+1} \;\; y \;\; \mathbb{P}_n^{(2)} = \Omega_{n+1,2}\partial_2\mathbb{P}_{n+1}. \tag{2-5}$$

Además, para $k = 1, 2$, si consideramos los SP $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$, $\left\{\mathbb{P}_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$, y sus correspondientes bases duales $\{\mathbf{U}_n\}_{n\geq 0}$ y $\left\{\mathbf{U}_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$, podemos establecer que

$$\partial_k\mathbf{U}_n^{(k)} = -\mathbf{U}_{n+1}\Gamma_{n+1,k},$$

donde $\Gamma_{n+1,k}$ son matrices reales de tamaño $(n + 2) \times (n + 1)$.
Finalmente, diremos que un funcional lineal $\mathcal{U}$ cuasi-definido es $\mathcal{D}$-*clásico*, si este es clásico y satisface una ecuación de la forma

$$\partial_k(a_k(x, y)\mathcal{U}) = d_k(x, y)\mathcal{U},$$

para $k = 1, 2$, donde $a_k(x, y)$ y $d_k(x, y)$ son polinomios de grado menor igual a 2, e igual a 1, respectivamente.

Teorema 4. *Para un funcional lineal cuasi-definido* $\mathcal{U}$ *con SPOM asociado* $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ *y* $k=1$ *o* $k=2$ *fijo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\partial_k(a_k(x,y)\mathcal{U}) = d_k(x,y)\mathcal{U}$.

2. *Para cada* $n \geq 0$, *existen matrices cuadradas reales* $\Lambda_n^{(k)}$ *de tamaño* $n+1$ *tales que:*

$$a_k\partial_k^2\mathbb{P}_n + d_k\partial_k\mathbb{P}_n = \Lambda_n^{(k)}\mathbb{P}_n,$$

   donde $rango(\Lambda_n^{(k)}) = n$, *para* $n \geq 0$.

3. $\mathcal{U}^{(k)} = a_k(x,y)\mathcal{U}$ *es cuasi-definido y* $\left\{\mathbb{P}_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$ *es su correspondiente SPOM.*

4. *Existen matrices reales* $M_{n,k}$, $n \geq 1$, *y* $N_{n,k}$, $n \geq 2$, *de tamaños* $(n+1)\times n$ *y* $(n+1)\times(n-1)$ *respectivamente, tales que:*

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{P}_{n-1}^{(k)} + N_{n,k}\mathbb{P}_{n-2}^{(k)}, \quad n \geq 1.$$

Aquí $\left\{\mathbb{P}_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$ *es el SPM definido en* (2-5).

Si este resultado se tiene para $k=1$ y $k=2$, entonces es equivalente al carácter $\mathcal{D}$-clásico para $\mathcal{U}$.

3 Estado del Arte

3.1. Pares coherentes de polinomios ortogonales en una variable

El primer trabajo realizado sobre los pares coherentes de polinomios ortogonales en una variable fue presentado en 1991 por Iserles, Koch, Nørsett y Sanz-Serna en [17], en donde se considera el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} p'(x)q'(x)d\mu_1(x), \tag{3-1}$$

con μ_0, μ_1 medidas de Borel positivas con soporte en la recta real, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $p, q \in \Pi$.
El par de medidas (μ_0, μ_1) se llamará *par coherente* si las correspondientes SPOM $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisfacen

$$Q_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \;\; n \geq 1, \tag{3-2}$$

con $b_n \neq 0$, para $n \geq 0$.
Si se tiene esta coherencia, entonces la SPOM $\{S_n(x;\lambda)\}_{n\geq 0}$ asociada al producto interno de Sobolev (3-1) y la SPOM $\{P_n\}_{n\geq 0}$ asociada a μ_0 satisfacen

$$S_n(x;\lambda) + a_{n-2}(\lambda)S_{n-1}(x;\lambda) = P_n(x) + \frac{n}{n-1}b_{n-2}P_{n-1}(x), \;\; n \geq 2, \tag{3-3}$$

para algunos $a_n(\lambda) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
El par de medidas (μ_0, μ_1) se llamará *par coherente simétrico* si las medidas son simétricas (es decir, invariantes bajo la transformación $x \mapsto -x$) y las correspondientes SPOM $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisfacen

$$Q_{n+1}(x) = \frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + c_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \;\; n \geq 1,$$

con $c_n \neq 0$ para $n \geq 0$.
Trabajando con estas definiciones de coherencia y coherencia simétrica se logró:

1. Obtener propiedades de los ceros de los polinomios ortogonales de Sobolev asociados al producto (3-1). Este resultado fue presentado por Meijer en [34] de 1993, donde además, presentó algunos ejemplos para pares coherentes y pares coherente simétricos.

2. Asumiendo $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM clásica dada, se logró caracterizar todas las SPOM $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ y todas las sucesiones de parámetros $\{b_n\}_{n\geq 0}$ de modo que satisfacieran (3-2). Trabajo que iniciaron Iserles, Koch, Nørsett y Sanz-Serna en [17] considerando familias clásicas definidas positivas y que extendieron Marcellán y Petronilho en [30].

3. Asumiendo $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM clásica dada, se caracterizaron todas las SPOM $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y todas las sucesiones de parámetros $\{b_n\}_{n\geq 0}$ de modo que satisfagan (3-2). Resultado que obtuvieron en 1995 Marcellán y Petronilho en [30].

4. Asumiendo $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una SPOM dada, encontrar $\{b_n\}_{n\geq 0}$ tal que la sucesión $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ dada en (3-2) sea ortogonal. Recíprocamente, dado una SPOM $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$, encontrar $\{b_n\}_{n\geq 0}$ tal que la sucesión $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ dada en (3-2) sea ortogonal. Además, se logró obtener la coherencia en los casos simétricos como consecuencia de la coherencia usual en términos del proceso de simetrización. Resultados que fueron presentados en 1995 por Marcellán, Petronilho, Peréz y Piñar en [31].

5. Mostrar que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos funcionales lineales cuasi-definidos correspondientes a las medidas μ_0 y μ_1 respectivamente, y si (μ_0, μ_1) es un par coherente, entonces ambos funcionales son semi-clásicos y el funcional $\mathcal{U}$ resulta ser una modificación racional de $\mathcal{V}$. Resultado que presentaron Marcellán, Pérez y Piñar en 1995 en [29].

6. Presentar una caracterización de los pares coherentes y pares coherentes simétricos. En particular se prueba que si (μ_0, μ_1) es un par coherente o par coherente simétrico, entonces alguno de los dos funcionales asociados ($\mathcal{U}$ ó $\mathcal{V}$) es clásico. También se determinan todos los posibles pares coherentes y pares coherentes simétricos de medidas positivas con soporte en la recta real. Trabajo que presentó Meijer en 1997 en [35].

Por otro lado, la noción más general de par coherente fue introducida en 2014 por M.N. de Jesus, F. Marcellán, J. Petronilho y N.C. Pinzón-Cortés en [19] como sigue:
Un par de funcionales lineales regulares $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ se dice que es un *par* (M, N)*-coherente de orden* (m, k) si sus correspondientes familias de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisfacen una relación de estructura

$$\sum_{i=0}^{M} a_{i,n} P_{n+m-i}^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{N} b_{i,n} Q_{n+k-i}^{(k)}(x), \qquad n \geq 0, \tag{3-4}$$

donde M, N, m y k son enteros no negativos, $\{a_{i,n}\}_{n\geq 0}$, $0 \leq i \leq M$, y $\{b_{i,n}\}_{n\geq 0}$, $0 \leq i \leq N$, son sucesiones de números complejos tales que $a_{M,n} \neq 0$ si $n \geq M$, $b_{N,n} \neq 0$ si $n \geq N$, y $a_{i,n} = b_{i,n} = 0$ si $i > n$, y $p^{(m)}$ indica la derivada m-ésima de p.
Cuando $k = 0$, $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ se denomina un *par* (M, N)*-coherente de orden* m, y cuando $(m, k) = (1, 0)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ se dice que es un *par* (M, N)*-coherente*.
A partir de esta noción de coherencia se tienen los siguientes resultados:

- La relación (M,N)-coherente de orden (m,k) permite establecer que los funcionales lineales están relacionados por una expresión de tipo racional.
- Se prueba que el carácter semiclásico de los funcionales lineales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ es una condición necesaria para la condición de (M,N)-coherente de orden (m,k) del par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$, siempre que se $m \neq k$.
- Considerando un producto interno tipo Sobolev definido en el espacio de polinomios Π, como

$$\langle p,q\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} p^{(m)}(x)q^{(m)}(x)d\mu_1(x), \qquad p,q \in \Pi,$$

  donde λ es un real positivo, m es un entero positivo y (μ_0,μ_1) es un par (M,N)-coherente de orden m de medidas positivas de Borel soportadas en un subconjunto infinito de la recta real, lo que significa que las SPOM $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ con respecto a μ_0 y μ_1, respectivamente, satisfacen una relación de estructura como (3-4) con $k=0$, se muestra cómo calcular los coeficientes de los desarrollos de Fourier de funciones en espacios de Sobolev apropiados, en términos de la SPO de Sobolev $\{S_n(x;\lambda)\}_{n\geq 0}$.
- Se demuestran propiedades adicionales para los casos particulares cuando $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ es un par $(1,0)$ ó $(1,1)$-coherente de orden m, ó cuando uno de los funcionales lineales es un par (M,N)-coherente de orden (m,k) es clásico.

Finalmente, la noción de par coherente de funcionales lineales regulares también fue extendida a la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y a la teoría de polinomios ortogonales de una variable discreta como se puede ver en [14], [33] y [32].

3.2. Pares coherentes generalizados de polinomios ortogonales en una variable

Posteriormente, se presenta una generalización tanto a la noción de par coherente, como a la noción de par coherente simétrico en [9], dada por Delgado y Marcellán de la siguiente manera:
Un *par coherente generalizado* es una pareja de funcionales lineales cuasi-definidos $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ para los cuales las correspondientes SPOM, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ están relacionadas mediante la expresión:

$$Q_n(x) + a_{n-1}Q_{n-1}(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \;\; n \geq 1, \tag{3-5}$$

siendo $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Un *par coherente simétrico generalizado* es una pareja de funcionales lineales simétricos cuasi-definidos $(\mathcal{U},\mathcal{V})$, para los cuales existen sucesiones de

números reales $\{s_n\}_{n\geq 0}$ y $\{u_n\}_{n\geq 0}$, con $u_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$, de modo que se verifica la relación:

$$Q_{n+1}(x) + s_{n-1}Q_{n-1}(x) = \frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1, \tag{3-6}$$

donde $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n\}_{m\geq 0}$ son las correspondientes SPOM de los funcionales lineales simétricos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente. A partir de estas nociones de coherencia, se obtienen algunas relaciones entre los funcionales cuasi-definidos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ presentadas en [9] y en [7] como sigue: Si $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un par coherente generalizado entonces:

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los funcionales están relacionados por

$$D[r_n\mathcal{V}] + \varphi_{n+1}\mathcal{U} = 0,$$

   con r_n un polinomio mónico de grado n y φ_{n+1} un polinomio de grado a lo más $n+1$.

2. Existen polinomios $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ con $deg(A(x)) = 2$, $deg(B(x)) \leq 4$ y $deg(C(x)) \leq 3$, tales que
   - $A(x)\mathcal{V} = B(x)\mathcal{U}$,
   - $C(x)\mathcal{V} = B(x)D\mathcal{U}$,
   - $A(x)D\mathcal{V} = C(x)\mathcal{U}$.

Estos resultados les permitieron obtener caracterizaciones de los funcionales como:

- Si el polinomio $A(x)$ tiene un cero doble $\xi \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{U}$ es semi-clásico de clase menor o igual que 1. Además, existe un polinomio $\phi(x)$ de grado a lo sumo 3 de modo que:

$$(x-\xi)\mathcal{V} = \phi(x)\mathcal{U}.$$

  Los pares coherentes que satisfacen esta condición se llaman *pares coherentes generalizados del tipo I.*

- Si el polinomio $A(x)$ tiene dos ceros simples, $\xi_1 \neq \xi_2$, entonces $\mathcal{V}$ es semi-clásico de clase menor o igual que 1. Además, existe un polinomio $\phi(x)$ de grado a lo sumo 3 de modo que

$$\phi(x)\mathcal{U} = (x-\xi)\mathcal{V}, \quad \text{con } \xi \in \{\xi_1, \xi_2\}.$$

  Los pares coherentes que satisfacen esta condición se llaman *pares coherentes generalizados del tipo II.*

Además, Delgado y Marcellán:

- en [9]
  1. Obtuvieron todos los pares de medidas coherentes generalizados (μ_0, μ_1), donde μ_0 y μ_1 son las medidas de Borel asociadas a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente.

2. Mostraron que (3-5) es una consecuencia de suponer (3-3) cierta para medidas de Borel positivas μ_0 y μ_1.

- en [10]
  1. Proporcionaron ejemplos de pares coherentes simétricos generalizados $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.
  2. Mostraron que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son definidos positivos y μ_0 y μ_1 son sus respectivas medidas de Borel positivas simétricas entonces (3-6) es una condición necesaria para:

     $$S_{n+1}(x;\lambda) + d_{n-2}(\lambda)S_{n-1}(x;\lambda) = P_{n+1} + \frac{n+1}{n-1}u_{n-2}P_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

     donde $\{d_n(\lambda)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión real no nula y $\{S_n(x;\lambda)\}_{n\geq 0}$ es la SPOM asociada al producto interno de Sobolev (3-1).

Si el par $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un par coherente simétrico generalizado entonces:

1. Para el caso de polinomios de grado par en (3-6) tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, existen constantes $A_{2m} \in \mathbb{R}$ tales que para los polinomios $r_{2m}(x) = Q_{2m}(x) + A_{2m}$ se verifica

   $$D[r_{2m}\mathcal{V}] + \varphi_{2m+1}\mathcal{U} = 0, \;\; m \geq 1,$$

   con φ_{2m+1} un polinomio impar de grado $2m+1$.
   Y para el caso de polinomios de grado impar en (3-6) tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, existen constantes $A_{2m+1} \in \mathbb{R}$ tales que para los polinomios $r_{2m+1}(x) = Q_{2m+1}(x) + A_{2m+1}Q_1(x)$ se verifica

   $$D[r_{2m+1}\mathcal{V}] + \varphi_{2m+2}\mathcal{U} = 0, \;\; m \geq 1,$$

   con φ_{2m+2} un polinomio par de grado $2m+2$.

2. Existen polinomios $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, con $A(x)$ un polinomio par de grado 4, $B(x)$ un polinomio impar de grado menor o igual que 5 y $C(x)$ un polinomio par de grado menor o igual que 6 tales que
   - $A(x)D\mathcal{V} = B(x)\mathcal{U}$,
   - $B(x)\mathcal{V} = C(x)D\mathcal{V}$,
   - $xC(x)\mathcal{U} = xA(x)\mathcal{V}$.

Estos resultados permitieron obtener una caracterización de los funcionales lineales simétricos como:

- Si el polinomio $A(x)$ tiene dos pares de ceros diferentes, $A(x) = 2(x^2 - \zeta_1^2)(x^2 - \zeta_2^2)$, con $\zeta_1^2 \neq \zeta_2^2$, entonces $\mathcal{V}$ es semi-clásico de clase menor o igual que 2, y se satisface la igualdad

  $$x\phi(x)\mathcal{U} = x(x^2 - \zeta^2)\mathcal{V},$$

  donde ϕ es un polinomio par de grado a lo sumo 4 y $\zeta \in \{\zeta_1, \zeta_2\}$.

3.3. Pares coherentes de polinomios ortogonales en dos variables

La noción de coherencia en la teoría de polinomios ortogonales de dos variables fue presentada en 2019 en [28] como sigue:
Sea $k = 1$ o $k = 2$ fijo. Dados dos SPM $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$, decimos que constituyen un *par x_k-coherente parcial* si satisfacen la relación

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_{n,k} = \mathbb{P}_n^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{P}_{n-1}^{(k)} + N_{n,k}\mathbb{P}_{n-2}^{(k)}, \;\; n \geq 1, \\ &\mathbb{Q}_{0,k} = \mathbb{P}_0^{(k)}, \end{aligned} \tag{3-7}$$

donde $\{\mathbb{P}_n^{(k)}\}_{n\geq 0} = \{\Omega_{n+1,k}\partial_k\mathbb{P}_{n+1}\}_{n\geq 0}$, con $\Omega_{n+1,k}$ dado por (2-4) y $M_{n,k}$, para $n \geq 1$, $N_{n,k}$, $n \geq 2$, son matrices reales de tamaño $(n+1)\times n$ y $(n+1)\times(n-1)$, respectivamente.
Si en esta relación

- $N_{n,k} \equiv 0$ para $n \geq 2$, se dice que forman un *par x_k-coherente parcial estándar.*
- $M_{n,k} \equiv 0$ para $n \geq 1$, se dice que forman un *par x_k-coherente parcial simétrico.*

Cuando $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$ son SPOM con respecto a los funcionales lineales regulares $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_k$, y satisfacen (3-7), diremos que $(\mathcal{U}, \mathcal{V}_k)$ es un *par x_k-coherente parcial* de funcionales de momentos.
A partir de esta relación de coherencia parcial, se logra establecer que:

1. Si los SPM $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$ constituyen un par x_k-coherente parcial entonces sus correspondientes bases duales $\{\mathbf{U}_n\}_{n\geq 0}$, $\{\mathbf{V}_{n,k}\}_{n\geq 0}$ y la base dual $\{\mathbf{U}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ asociada al SPM $\{\mathbb{P}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$, satisfacen, para $n \geq 0$ y $k = 1, 2$:
   - $\mathbf{U}_n^{(k)} = \mathbf{V}_{n+2,k}N_{n+2,k} + \mathbf{V}_{n+1,k}M_{n+1,k} + \mathbf{V}_{n,k}$,
   - $-\mathbf{U}_{n+1}\Gamma_{n+1,k} = \partial_k(\mathbf{V}_{n+2,k}N_{n+2,k} + \mathbf{V}_{n+1,k}M_{n+1,k} + \mathbf{V}_{n,k})$,

   donde $N_{n,k}$ y $M_{n,k}$ son las matrices dadas por (3-7) y $\Gamma_{n+1,k}$ es una matriz real de tamaño $(n+2)\times(n+1)$.

2. Si los SPOM $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$ constituyen un par x_k-coherente parcial entonces:
   a) Los correspondientes funcionales lineales cuasi-definidos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_k$, satisfacen, para $n \geq 0$:
      - $\mathbf{U}_n^{(k)} = \mathbb{C}_{n+2,k}(x,y)\mathcal{V}_k$,
      - $\mathbb{B}_{n+1,k}(x,y)\mathcal{U} = \partial_k(\mathbb{C}_{n+2,k}(x,y)\mathcal{V}_k)$,

      donde $\mathbb{B}_{n+1,k}$ es un vector polinomial de tamaño $1\times(n+1)$ de grado $n+1$ y $\mathbb{C}_{n+2,k}$ es un vector polinomial de tamaño $1\times(n+1)$ de grado $n+2$.

b) Para los correspondientes funcionales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}_k$, existen polinomios $a_k(x,y)$, $d_k(x,y)$, $\lambda_k(x,y)$, $\rho_k(x,y)$, $\alpha_k(x,y)$ y $\delta_k(x,y)$ con $deg(a_k) \leq 4$, $deg(d_k) = 3$, $deg(\lambda_k) \leq 2$, $deg(\rho_k) \leq 4$, $deg(\alpha_k) = 8$ y $deg(\delta_k) = 7$ tales que:

- $\mathbf{U}_0^{(k)} = \lambda_k(x,y)\mathcal{V}_k$,
- $\partial_k(a_k(x,y)\mathcal{V}_k) = d_k(x,y)\mathcal{V}_k$, es decir, $\mathcal{V}_k$ es un funcional lineal semi-clásico,
- $a_k(x,y)\mathcal{U} = \rho_k(x,y)\mathcal{V}_k$,
- $\partial_k(\alpha_k(x,y)\mathcal{U}) = \delta_k(x,y)\mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U}$ es un funcional lineal semi-clásico.

c) Si $rango(M_{1,k}) = rango(N_{2,k}) = 0$, entonces $M_{n,k} \equiv 0$, $n \geq 1$ y $N_{n,k} \equiv 0$, $n \geq 2$. Con lo cual,

$$\mathbb{Q}_{n,k} = \mathbb{P}_n^{(k)}, \quad n \geq 0.$$

d) Si $\mathcal{U}$ es $\mathcal{D}$-clásico, es decir, $\{\mathbb{P}_n^{(k)}\}_{n\geq 0}$ es SPO, entonces $rango(N_{n,k}) = n-1$, $n \geq 2$ si y solamente si $deg(\lambda_k) = 2$.
Por otra parte, $rango(N_{n,k}) = 0$, $n \geq 2$, $rango(M_{n,k}) = n$, $n \geq 1$ si y solamente si $deg(\lambda_k) = 1$.

Si las SPOM $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$ constituyen un par x_k-coherente estándar entonces:

- En el resultado (2.*a*) el vector polinomial $\mathbb{C}_{n+2,k}$ es de grado total $n+1$.
- En el resultado (2.*b*) se tiene que $deg(a_k) \leq 3$, $deg(d_k) \leq 2$, $deg(\lambda_k) \leq 1$, $deg(\rho_k) \leq 2$, $deg(\alpha_k) \leq 6$ y $deg(\delta_k) \leq 4$.

Finalmente, se define la coherencia completa como sigue:
Sea $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ un par de funcionales cuasi-definidos y supongamos que existen dos polinomios no nulos $\theta_1(x,y)$ y $\theta_2(x,y)$ tales que los funcionales $\mathcal{V}_1 = \theta_1\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_2 = \theta_2\mathcal{V}$ son cuasi-definidos. Decimos que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es un *par coherente completo* si $(\mathcal{U}, \mathcal{V}_1)$ y $(\mathcal{U}, \mathcal{V}_2)$ son ambos pares x_k-coherentes parciales, para $k = 1, 2$.
Bajo estas condiciones, decimos que $\mathcal{U}$ es *auto-coherente* si:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2,$$

con lo cual, la relación de coherencia (3-7) es:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{P}_{n-1}^{(k)} + N_{n,k}\mathbb{P}_{n-2}^{(k)}, \;\; n \geq 1. \tag{3-8}$$

Además, se logró establecer que un funcional lineal cuasi-definido $\mathcal{U}$ es auto-coherente si y solamente si $\mathcal{U}$ es $\mathcal{D}$-clásico.

4 Obtención de pares x_k- coherentes

Para la obtención de colecciones de polinomios ortogonales $\mathbb{Q}_{n,k}$ que sean pares x_k-coherentes de sucesiones de polinomios ortogonales $\mathbb{P}_n$ conocidos, haremos uso de la deficinión de x_k-coherencia, para $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_{n,k} = \mathbb{P}_n^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{P}_{n-1}^{(k)} + N_{n,k}\mathbb{P}_{n-2}^{(k)}, \;\; n \geq 1, \\ &\mathbb{Q}_{0,k} = \mathbb{P}_0^{(k)}, \end{aligned} \tag{4-1}$$

donde $M_{n,k}$ y $N_{n,k}$ son matrices de tamaño $(n+1) \times n$ y $(n+1) \times (n-1)$ respectivamente. Esta ecuación nos permitirá determinar los polinomios $\mathbb{Q}_{n,k}$ de forma que $(\{\mathbb{P}_n\}, \{\mathbb{Q}_{n,k}\})$ es un par x_k-coherente. También tendremos en cuenta la relación de recurrencia a tres términos, para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2$,

$$x_i\mathbb{Q}_{n,k} = G_{n,i}\mathbb{Q}_{n,k} + H_{n,i}\mathbb{Q}_{n+1,k} + F_{n,i}\mathbb{Q}_{n-1,k}, \tag{4-2}$$

donde $G_{n,i}$, $H_{n,i}$ y $F_{n,i}$ son matrices de tamaño $(n+1)\times(n+1)$, $(n+1)\times(n+2)$ y $(n+1)\times n$ respectivamente. Además, el rango de $H_{n,i}$ es $n+1$ y el de $F_{n,i}$ es n. Esta relación, nos permitirá garantizar que los polinomios $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}$ obtenidos sean ortogonales, como se presento en la sección 2.2.
El proceso realizado para determinar los polinomios $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$, mediante el uso del software *Wolfram Mathematica* [42], cumplío los siguientes pasos:

1. Iniciamos con la elección de una sucesión de polinomios ortogonales $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 0}$ conocida.

2. Calculamos la sucesión de polinomios $\left\{\mathbb{P}_n^{(k)}\right\}_{n\geq 0}$ como se define en (2-5).

3. Expresamos los polinomios $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$, en términos de las matrices $M_{n,k}$ y $N_{n,k}$ haciendo uso de la ecucación (4-1).

4. Ya que esta sucesión de polinomios a calcular debe ser ortogonal, implementamos la relación de recurrencia a tres términos (4-2), la cual al ser satisfecha, garantiza que la sucesión $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}$ es ortogonal.

5. Resolvemos para cada n las ecuaciones obtenidas, teniendo en cuenta las condiciones para el rango de las matrices $H_{n,i}$ y $F_{n,i}$.

6. Finalmente, con las matrices halladas en el paso anterior, determinamos la sucesión de polinomios buscada.

Debemos tener en cuenta que para cada n, el sistema de ecuaciones obtenido está constituido por $n+1$ ecuaciones y $(n+1)(5n+4)$ incógnitas, el cual cuenta con infinitas soluciones y por ello puede obtenerse diversas colecciones de polinomios ortogonales que sean pares coherentes para la suceción considerada inicialmente.

Como ejemplo de la metodología mencionada anteriormente, consideraremos los polinomios ortogonales de dos variables obtenidos del producto de polinomios ortognonales clásicos de una variable, los cuales por los resultados presentados en [28] son auto-coherentes, es decir, satisfacen la ecuación (3-8).
Sean $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ y $\{q_n(y)\}_{n\geq 0}$ dos SPOM clásicos, con sus funcionales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente. Como se mencionó en la sección 2.1, si consideramos los polinomios $P_n(x) = \dfrac{p'_{n+1}(x)}{n+1}$ y $Q_n(y) = \dfrac{q'_{n+1}(y)}{n+1}$, existen números reales $b_n = a_{n,n-1}$, $c_n = a_{n,n-2}$, $\widetilde{b}_n = \widetilde{a}_{n,n-1}$, $\widetilde{c}_n = \widetilde{a}_{n,n-2}$ tales que:

$$p_n(x) = P_n(x) + b_n P_{n-1}(x) + c_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

$$q_n(y) = Q_n(y) + \widetilde{b}_n Q_{n-1}(y) + \widetilde{c}_n Q_{n-2}(y), \quad n \geq 2,$$

donde $a_{n,m} = \dfrac{\langle \phi\mathcal{U}, p_n P_m\rangle}{\langle \phi\mathcal{U}, P_m^2\rangle}$ y $\widetilde{a}_{n,m} = \dfrac{\langle \phi\mathcal{V}, q_n Q_m\rangle}{\langle \phi\mathcal{V}, Q_m^2\rangle}$.

Si para $n \geq 0$, definimos los polinomios bivariados como se define en la sección 2.2

$$R(x,y) = p_{n-m}(x) q_m(y), \quad 0 \leq m \leq n,$$

entonces el sistema de polinomios dado por

$$\mathbb{R}_n(x,y) = (R_{n,0}(x,y), R_{n,1}(x,y), \ldots, R_{n,n}(x,y))^T,$$

es ortogonal y además auto-coherente, y por lo tanto satisface la ecuación

$$\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_n^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{R}_{n-1}^{(k)} + M_{n,k}\mathbb{R}_{n-2}^{(k)}, \quad k = 1, 2,$$

donde

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{n,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \widetilde{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{b}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{b}_n \end{pmatrix},$$

y

$$N_{n,1} = \begin{pmatrix} c_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{n,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \widetilde{c}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{c}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{c}_n \end{pmatrix}. \tag{4-3}$$

Conocido este resultado, nuestro objetivo es usar el método presentado al inicio de este capítulo y obtener la misma conclusión. Luego de su programación y de ser aplicada a algunos ejemplos principales se puede garantizar, de acuerdo a la teoría mencionada anteriormente, que dicha programación es correcta y por ende, aplicable a otras familias de polinomios ortogonales bivariados.

A continuación presentamos los resultados obtenidos de la programación para el caso de productos de polinomios Jacobi-Jacobi (sección 4.1) y Jacobi-Laguerre (sección 4.2); resultados adicionales y que complementan el trabajo realizado pueden revisarse en los siguientes enlaces:

- ***Laguerre-Laguerre:*** `https://www.wolframcloud.com/obj/juan.cortes0/Published/EjemploLaguerrexLaguerre.nb`
- ***Jacobi-Hermite:*** `https://www.wolframcloud.com/obj/juan.cortes0/Published/EjemploJacobiXHermite.nb`

4.1. Producto de polinomios Jacobi-Jacobi

Para este ejemplo se consideraron las siguientes familias de polinomios de Jacobi de la forma

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! k_n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right),$$

$$q_n^{(\gamma,\delta)}(y) = \frac{(-1)^n}{2^n n! K_n}(1-y)^{-\gamma}(1+y)^{-\delta}\frac{d^n}{dy^n}\left((1-y)^{\gamma+n}(1+y)^{\delta+n}\right),$$

donde $k_n = \dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, $K_n = \dfrac{\Gamma(2n+\gamma+\delta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\gamma+\delta+1)}$.

En este caso, se considerón parámetros $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1/2$ y $\delta = 0$, con los cuales se obtuvo la familia de polinomios ortogonales $\{\mathbb{R}_n(x,y)\}_{n\geq 0}$, cuyos primeros miembros son:

$$\left\{(1), \begin{pmatrix} x+\frac{1}{7} \\ y+\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2+\frac{2x}{11}-\frac{7}{33} \\ xy+\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{1}{35} \\ y^2+\frac{2y}{9}-\frac{17}{63} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3+\frac{x^2}{5}-\frac{29x}{65}-\frac{27}{715} \\ x^2y+\frac{x^2}{5}+\frac{2xy}{11}+\frac{2x}{55}-\frac{7y}{33}-\frac{7}{165} \\ xy^2+\frac{2xy}{9}-\frac{17x}{63}+\frac{y^2}{7}+\frac{2y}{63}-\frac{17}{441} \\ y^3+\frac{3y^2}{13}-\frac{75y}{143}-\frac{23}{429} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x^4+\frac{4x^3}{19}-\frac{222x^2}{323}-\frac{28x}{323}+\frac{215}{4199} \\ x^3y+\frac{x^2y}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{25}-\frac{29xy}{65}-\frac{29x}{325}-\frac{27y}{715}-\frac{27}{3575} \\ x^2y^2+\frac{2x^2y}{9}-\frac{17x^2}{63}+\frac{2xy^2}{11}+\frac{4xy}{99}-\frac{34x}{693}-\frac{7y^2}{33}-\frac{14y}{297}+\frac{17}{297} \\ xy^3+\frac{3xy^2}{13}-\frac{75xy}{143}-\frac{23x}{429}+\frac{y^3}{7}+\frac{3y^2}{91}-\frac{75y}{1001}-\frac{23}{3003} \\ y^4+\frac{4y^3}{17}-\frac{66y^2}{85}-\frac{124y}{1105}+\frac{827}{12155} \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

4.1.1. Autocoherencia

Iniciamos usando la ecuación de la *RRTT* (4-2) para determinar las matrices $G_{n,i}$, $H_{n,i}$ y $F_{n,i}$, para $i = 1, 2$, que satisfacen la *RRTT* para los polinomios $\mathbb{R}_n$, teniendo en cuenta que deseamos concluir la auto-coherencia, estas matrices serían las mismas matrices que satisfacen la *RRTT* (4-2) para los polinomios $\mathbb{Q}_{n,k}$ tanto para $k = 1$ como $k = 2$. Las matrices obtenidas son:

$$\{F_{n,1}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{32}{147} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1120}{4719} & 0 \\ 0 & \frac{32}{147} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1344}{5525} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1120}{4719} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{147} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{10560}{42959} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1344}{5525} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1120}{4719} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32}{147} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} \frac{4576}{18515} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10560}{42959} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1344}{5525} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1120}{4719} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{147} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2912}{11745} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4576}{18515} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10560}{42959} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1344}{5525} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1120}{4719} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{32}{147} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{G_{n,1}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{77} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{77} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{95} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -\frac{3}{437} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{95} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{207} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{437} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{95} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{H_{n,1}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{F_{n,2}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{48}{175} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{48}{175} & 0 \\ 0 & \frac{1600}{6237} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{48}{175} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1600}{6237} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2352}{9295} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{48}{175} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1600}{6237} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2352}{9295} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6912}{27455} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{48}{175} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1600}{6237} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2352}{9295} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6912}{27455} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48400}{192717} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{48}{175} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1600}{6237} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2352}{9295} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6912}{27455} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{48400}{192717} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10816}{43125} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{G_{n,2}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{45} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{117} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{117} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{221} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{117} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{221} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{357} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{117} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{357} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{525} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{H_{n,2}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Ahora procedemos a calcular las matrices $M_{n,k}$ y $N_{n,k}$ para $k = 1, 2$ haciendo uso de la ecuación de coherencia (4-1) y las matrices anteriormente calculadas. Al hacerlo las matrices calculadas son:

$$\{M_{n,1}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{77} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{165} & 0 \\ 0 & \frac{4}{77} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{95} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{165} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{77} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{16}{437} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{95} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{165} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{77} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{20}{621} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{437} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{95} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{165} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{77} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{279} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{621} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{437} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{95} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{165} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{77} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{N_{n,1}\}_{n\geq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{320}{4719} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1792}{16575} & 0 \\ 0 & -\frac{320}{4719} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5760}{42959} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1792}{16575} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{320}{4719} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} -\frac{2816}{18515} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5760}{42959} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1792}{16575} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{320}{4719} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{M_{n,2}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{45} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{45} & 0 \\ 0 & \frac{8}{117} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{45} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{117} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{221} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{117} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{221} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{357} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{117} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{357} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{105} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{117} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{221} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{357} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{105} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{725} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{N_{n,2}\}_{n\geq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{640}{6237} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{640}{6237} & 0 \\ 0 & -\frac{1344}{9295} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{640}{6237} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1344}{9295} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4608}{27455} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{640}{6237} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1344}{9295} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4608}{27455} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{35200}{192717} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Se puede ver que estas matrices cumplen la condición dada en la ecuación (4-3), y que además al calcular los primeros miembros del sistema de polinomios $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$, como se muestra a

continuación, coinciden con los polinomios $\mathbb{R}_n$

$$\text{para } k=1,\ \left\{(1), \begin{pmatrix} x+\frac{1}{7} \\ y+\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2+\frac{2x}{11}-\frac{7}{33} \\ xy+\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{1}{35} \\ y^2+\frac{2y}{9}-\frac{17}{63} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3+\frac{x^2}{5}-\frac{29x}{65}-\frac{27}{715} \\ x^2y+\frac{x^2}{5}+\frac{2xy}{11}+\frac{2x}{55}-\frac{7y}{33}-\frac{7}{165} \\ xy^2+\frac{2xy}{9}-\frac{17x}{63}+\frac{y^2}{7}+\frac{2y}{63}-\frac{17}{441} \\ y^3+\frac{3y^2}{13}-\frac{75y}{143}-\frac{23}{429} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x^4+\frac{4x^3}{19}-\frac{222x^2}{323}-\frac{28x}{323}+\frac{215}{4199} \\ x^3y+\frac{x^2y}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{25}-\frac{29xy}{65}-\frac{29x}{325}-\frac{27y}{715}-\frac{27}{3575} \\ x^2y^2+\frac{2x^2y}{9}-\frac{17x^2}{63}+\frac{2xy^2}{11}+\frac{4xy}{99}-\frac{34x}{693}-\frac{7y^2}{33}-\frac{14y}{297}+\frac{17}{297} \\ xy^3+\frac{3xy^2}{13}-\frac{75xy}{143}-\frac{23x}{429}+\frac{y^3}{7}+\frac{3y^2}{91}-\frac{75y}{1001}-\frac{23}{3003} \\ y^4+\frac{4y^3}{17}-\frac{66y^2}{85}-\frac{124y}{1105}+\frac{827}{12155} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\text{para } k=2,\ \left\{(1), \begin{pmatrix} x+\frac{1}{7} \\ y+\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2+\frac{2x}{11}-\frac{7}{33} \\ xy+\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{1}{35} \\ y^2+\frac{2y}{9}-\frac{17}{63} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3+\frac{x^2}{5}-\frac{29x}{65}-\frac{27}{715} \\ x^2y+\frac{x^2}{5}+\frac{2xy}{11}+\frac{2x}{55}-\frac{7y}{33}-\frac{7}{165} \\ xy^2+\frac{2xy}{9}-\frac{17x}{63}+\frac{y^2}{7}+\frac{2y}{63}-\frac{17}{441} \\ y^3+\frac{3y^2}{13}-\frac{75y}{143}-\frac{23}{429} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x^4+\frac{4x^3}{19}-\frac{222x^2}{323}-\frac{28x}{323}+\frac{215}{4199} \\ x^3y+\frac{x^2y}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{25}-\frac{29xy}{65}-\frac{29x}{325}-\frac{27y}{715}-\frac{27}{3575} \\ x^2y^2+\frac{2x^2y}{9}-\frac{17x^2}{63}+\frac{2xy^2}{11}+\frac{4xy}{99}-\frac{34x}{693}-\frac{7y^2}{33}-\frac{14y}{297}+\frac{17}{297} \\ xy^3+\frac{3xy^2}{13}-\frac{75xy}{143}-\frac{23x}{429}+\frac{y^3}{7}+\frac{3y^2}{91}-\frac{75y}{1001}-\frac{23}{3003} \\ y^4+\frac{4y^3}{17}-\frac{66y^2}{85}-\frac{124y}{1105}+\frac{827}{12155} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Para mas detalle, dirigirse a `https://www.wolframcloud.com/obj/juan.cortes0/Published/EjemploJacobiXJacobi.nb`.

4.1.2. x_k-coherencia

Para este caso, debido a que no conocemos ninguna de las matrices involucradas, tanto en la coherencia (4-1) como en la $RRTT$ (4-2), procedemos a plantear y resolver los sistemas de ecuaciones obtenidos en términos de los coeficientes de $M_{n,k}$, $N_{n,k}$, $F_{n,i}$, $G_{n,i}$ y $H_{n,i}$, que como se mencionó anteriormente, son sistemas de $(n+1)(5n+4)$ incógnitas y $n+1$ ecuaciones. Debido a la complejidad de los sistemas de ecuaciones obtenidos, se decidió trabajar con la x_1-coherencia (para el otro caso, se trabaja de manera equivalente) y además suponemos que la matriz $G_{n,i}$ era la matriz identidad de orden $n+1$; cabe aclarar que $G_{n,i}$ podría ser cualquier otra matriz, lo cual cambiaría el resultado. Con este supuesto se procede a resolver los sistemas de ecuaciones generados, obteniendo los siguientes resultados:

- Para $n = 1$,

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{11} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}, \quad M_{2,1} = \begin{pmatrix} -\frac{32}{15} & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{12}{11} \\ 0 & -\frac{20}{9} \end{pmatrix}, \quad H_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_{2,1} = \begin{pmatrix} \frac{192}{143} - F_{1,1}(1,1) \\ F_{2,1}(2,1) + \frac{11}{10}F_{2,1}(2,2) - \frac{24}{143} \\ F_{2,1}(3,1) + \frac{11}{10}F_{2,1}(3,2) \end{pmatrix}, \quad F_{1,1} = \begin{pmatrix} F_{1,1}(1,1) \\ -F_{2,1}(2,1) - \frac{11}{10}F_{2,1}(2,2) + \frac{96}{65} \end{pmatrix},$$

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} -F_{2,1}(2,1) - \frac{11}{10}F_{2,1}(2,2) + \frac{96}{65} \\ -F_{2,1}(3,1) - \frac{11}{10}F_{2,1}(3,2) + \frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

- Para $n = 2$,

$$M_{3,1} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{19} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{32}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{20}{9} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{42}{13} \end{pmatrix}, \quad H_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  junto con condiciones para las matrices $N_{3,1}$, $F_{2,1}$ y $F_{2,2}$ en términos de los coeficientes de las matrices $F_{n,1}$.

- Para $n = 3$, en este punto se observa que las matrices $H_{n,k}$ tienen un comportamiento de la forma

$$H_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{n,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

  por lo cual se procede a asignar dichos valores a todas las matrices $H_{n,k}$. Además se generan condiciones para $N_{4,1}$, $F_{3,1}$ y $F_{3,2}$ y se obtiene,

$$M_{4,1} = \begin{pmatrix} -\frac{96}{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{60}{19} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{9} & -\frac{32}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{42}{13} & -\frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{72}{17} \end{pmatrix}.$$

- Para $n \geq 4$, los sistemas de ecuaciones generados se vuelven muy grandes y la capacidad de cómputo del equipo con el que se contaba no lograba solucionarlo, por lo cual se procedió a tomar algunos fijos y de esta manera poder generar algunos miembros del sistema de polinomios buscado.

Realizado esto, los miembros obtenidos hasta este momento son:

$$\left\{\{1\}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2-2x-\frac{49}{143} \\ xy-x-y+1 \\ y^2-2y+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3-3x^2+\frac{237x}{143}-\frac{1280y}{4719}+\frac{2897}{4719} \\ x^2y-x^2-2xy+2x-\frac{49y}{143}+\frac{49}{143} \\ xy^2-2xy+x-y^2+\frac{34y}{77}+\frac{43}{77} \\ y^3-3y^2+\frac{7y}{9}+\frac{11}{9} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x^4-4x^3+\frac{2341590x^2}{600457}-\frac{146944xy}{94809}+\frac{185492x}{105963}+\frac{1322496y^2}{1738165}+\frac{146944y}{5214495}+\frac{1123216759}{1287980265} \\ x^3y-3x^2y-x^3+\frac{399x^2}{221}+\frac{53xy}{39}+\frac{683x}{663}+\frac{25y}{39}-\frac{1997}{8619} \\ x^2y^2-2x^2y-\frac{5x^2}{7}-2xy^2+4xy+\frac{10x}{7}-\frac{49y^2}{143}+\frac{98y}{143}+\frac{35}{143} \\ -\frac{45x^2}{22}+xy^3-3xy^2+\frac{437xy}{99}+\frac{166x}{99}-y^3+\frac{27y^2}{121}+\frac{1241y}{1089}+\frac{9575}{28314} \\ -\frac{105x^2}{52}+\frac{140xy}{39}+\frac{35x}{78}+y^4-4y^3+\frac{102y^2}{143}+\frac{1280y}{429}-\frac{113}{22308} \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

Para ver el resultado y proceso con más detalle, puede dirigirse al enlace: `https://www.wolframcloud.com/obj/juan.cortes0/Published/EjemploGeneral.nb`

4.2. Producto de polinomios Jacobi-Laguerre

Para este ejemplo, se consideró una familia de polinomios tipo Jacobi y otra de polinomios tipo Laguerre de la forma

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! k_n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right),$$

$$q_n^{(\gamma)}(y) = (-1)^n y^{-\gamma} e^y \frac{d^n}{dy^n}\left(y^{n+\gamma}e^{-y}\right),$$

donde $k_n = \dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$.

En este caso, se usaron los parámetros $\alpha = 0$, $\beta = 2$ y $\gamma = 1/2$, con los cuales se obtuvo la familia de polinomios ortogonales $\{\mathbb{R}_n(x,y)\}_{n\geq 0}$, cuyos primeros miembros son:

$$\left\{(1), \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2} \\ y-\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2-\frac{2x}{3}-\frac{1}{15} \\ xy-\frac{3x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{3}{4} \\ y^2-5y+\frac{15}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3-\frac{3x^2}{4}-\frac{3x}{14}+\frac{3}{28} \\ x^2y-\frac{3x^2}{2}-\frac{2xy}{3}+x-\frac{y}{15}+\frac{1}{10} \\ xy^2-5xy+\frac{15x}{4}-\frac{y^2}{2}+\frac{5y}{2}-\frac{15}{8} \\ y^3-\frac{21y^2}{2}+\frac{105y}{4}-\frac{105}{8} \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x^4-\frac{4x^3}{5}-\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{15}+\frac{1}{105} \\ x^3y-\frac{3x^2y}{4}-\frac{3x^3}{2}+\frac{9x^2}{8}-\frac{3xy}{14}+\frac{9x}{28}+\frac{3y}{28}-\frac{9}{56} \\ x^2y^2-5x^2y+\frac{15x^2}{4}-\frac{2xy^2}{3}+\frac{10xy}{3}-\frac{5x}{2}-\frac{y^2}{15}+\frac{y}{3}-\frac{1}{4} \\ xy^3-\frac{21xy^2}{2}+\frac{105xy}{4}-\frac{105x}{8}-\frac{y^3}{2}+\frac{21y^2}{4}-\frac{105y}{8}+\frac{105}{16} \\ y^4-18y^3+\frac{189y^2}{2}-\frac{315y}{2}+\frac{945}{16} \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

Como estudiaremos una relación de autocoherencia en (4-1), los SPO involucrados $\{\mathbb{Q}_{n,1}\}$, $\{\mathbb{Q}_{n,2}\}$ y $\{\mathbb{P}_n\}$ son el SPO $\{\mathbb{R}_n\}$ ya calculado. Por lo tanto, obtenemos las matrices $G_{n,i}$, $H_{n,i}$

y $F_{n,i}$, $i = 1, 2$, usando la ecuación de $RRTT$ (4-2) que deben satisfacer los polinomios $\mathbb{R}_n$. Las matrices obtenidas son:

$$\{F_{n,1}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{20} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{64}{315} & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{25}{112} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{64}{315} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{64}{275} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{315} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{1225}{5148} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{64}{275} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{64}{315} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{768}{3185} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1225}{5148} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{275} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{112} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{64}{315} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{G_{n,1}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{H_{n,1}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{F_{n,2}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{G_{n,2}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\{H_{n,2}\}_{n\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Ahora procedemos a calcular las matrices $M_{n,k}$ y $N_{n,k}$ para $k = 1, 2$ haciendo uso de la ecuación de autocoherencia (4-1) y las matrices anteriormente calculadas. Al hacerlo las

matrices obtenidas son:

$$\{M_{n,1}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -\frac{5}{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{28} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{N_{n,1}\}_{n\geq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{16}{315} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{56} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{315} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{32}{275} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{56} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{315} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -\frac{175}{1287} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{275} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{315} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{M_{n,2}\}_{n\geq 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\{N_{n,2}\}_{n\geq 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

matrices que cumplen la condición dada en la ecuación (4-3), y que además al calcular los primeros miembros del sistema de polinomios $\{\mathbb{Q}_{n,k}\}_{n\geq 0}$, $k = 1, 2$, como se muestra a continuación, coinciden con los polinomios $\mathbb{R}_n$

$$\text{para } k = 1, \left\{ (1), \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{1}{15} \\ xy - \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{3}{4} \\ y^2 - 5y + \frac{15}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{14} + \frac{3}{28} \\ x^2y - \frac{3x^2}{2} - \frac{2xy}{3} + x - \frac{y}{15} + \frac{1}{10} \\ xy^2 - 5xy + \frac{15x}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{5y}{2} - \frac{15}{8} \\ y^3 - \frac{21y^2}{2} + \frac{105y}{4} - \frac{105}{8} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} x^4 - \frac{4x^3}{5} - \frac{2x^2}{5} + \frac{4x}{15} + \frac{1}{105} \\ x^3y - \frac{3x^2y}{4} - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} - \frac{3xy}{14} + \frac{9x}{28} + \frac{3y}{28} - \frac{9}{56} \\ x^2y^2 - 5x^2y + \frac{15x^2}{4} - \frac{2xy^2}{3} + \frac{10xy}{3} - \frac{5x}{2} - \frac{y^2}{15} + \frac{y}{3} - \frac{1}{4} \\ xy^3 - \frac{21xy^2}{2} + \frac{105xy}{4} - \frac{105x}{8} - \frac{y^3}{2} + \frac{21y^2}{4} - \frac{105y}{8} + \frac{105}{16} \\ y^4 - 18y^3 + \frac{189y^2}{2} - \frac{315y}{2} + \frac{945}{16} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\text{para } k = 2, \left\{ (1), \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 - \frac{2x}{3} - \frac{1}{15} \\ xy - \frac{3x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{3}{4} \\ y^2 - 5y + \frac{15}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{14} + \frac{3}{28} \\ x^2y - \frac{3x^2}{2} - \frac{2xy}{3} + x - \frac{y}{15} + \frac{1}{10} \\ xy^2 - 5xy + \frac{15x}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{5y}{2} - \frac{15}{8} \\ y^3 - \frac{21y^2}{2} + \frac{105y}{4} - \frac{105}{8} \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} x^4 - \frac{4x^3}{5} - \frac{2x^2}{5} + \frac{4x}{15} + \frac{1}{105} \\ x^3y - \frac{3x^2y}{4} - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} - \frac{3xy}{14} + \frac{9x}{28} + \frac{3y}{28} - \frac{9}{56} \\ x^2y^2 - 5x^2y + \frac{15x^2}{4} - \frac{2xy^2}{3} + \frac{10xy}{3} - \frac{5x}{2} - \frac{y^2}{15} + \frac{y}{3} - \frac{1}{4} \\ xy^3 - \frac{21xy^2}{2} + \frac{105xy}{4} - \frac{105x}{8} - \frac{y^3}{2} + \frac{21y^2}{4} - \frac{105y}{8} + \frac{105}{16} \\ y^4 - 18y^3 + \frac{189y^2}{2} - \frac{315y}{2} + \frac{945}{16} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Más detalles en,
`https://www.wolframcloud.com/obj/juan.cortes0/Published/EjemploJacobiXLaguerre.nb`

5 Conclusiones y problemas abiertos

Para finalizar, se presentarán algunas conclusiones del desarrollo de este trabajo, y algunos problemas que quedan abiertos luego de la elaboración de este.

5.1. Conclusiones

Durante la elaboración de este trabajo se presentaron diversas problemáticas, las cuales considero relevantes mencionarlas, ya que pueden ser de ayuda para posteriores estudios.
Para iniciar, se intentó realizar un estudio más formal de la coherencia, pero durante este intento se observó que había una gran dificultad al momento de abordar el estudio, y por ende, se planteó y se enfocó el trabajo a un estudio de la obtención de ejemplos, que nos permitiera tener una mejor comprensión de la relación de coherencia en los polinomios de dos variables y de ésta manera poder, como problema futuro, analizar y formalizar una generalización de la noción de x_k-coherencia.
Posteriormente, durante la programación en el software, se presentaron problemas como falta de capacidad de la máquina, esto debido a que los sistemas de ecuaciones a analizar son grandes y la computadora con la que se contaba no lograba dar solución a estos sistemas para valores de $n \geq 3$. Como intento para solucionar este problema, se hicieron consideraciones respecto a los valores de las matrices de la relación de recurrencia a tres términos, $F_{n,i}$, $G_{n,i}$, $H_{n,i}$, como por ejemplo que fueran matrices diagonales, algunas con filas de cero, o, valores semejantes entre el caso n y el $n-1$ (estas se tomaron basados en los ejemplos del caso de la auto-coherencia). Lastimosamente, estas consideraciones no lograron disminuir en gran medida la cantidad de variables, pero si permitió un análisis de valores de n superiores.
Al momento de trabajar con estos sistemas y las consideraciones tomadas bajo el limitante mencionado, se intentó fijar inicialmente algunos valores para las matrices $F_{n,i}$, $G_{n,i}$ y $H_{n,i}$, pero esto hizo que en algunos momentos se obtuvieran sistemas que no tuvieran solución; por ello, se descartó esta idea y se decidio tomar valores fijos solamente en casos donde la capacidad de cómputo nos limitara y de este modo poder simplificar las ecuaciones y lograr avanzar.
Otra dificultad surgió al momento de intentar "automatizar" el método, es decir, realizar la programación de modo que el programa solucionara el sistema de ecuaciones y de manera automática fuera realizando el reemplazo de los valores obtenidos. Esto sólo se obtuvo para el caso de la auto-coherencia, pero no para los demás, lo cual hace que la programación dependa de una persona que tome los valores que se obtienen en la soluciones y haga las

sustituciones manualmente.
Finalmente, más allá de los diversos inconvenientes por los que se pasaron durante el desarrollo del trabajo, podemos decir que la programación realizada, como se observó en el capítulo anterior y bajo las condiciones mencionadas, nos permite la obtención de familias de polinomios x_k-coherentes a partir de alguna familia de polinomios ortogonales escogida inicialmente.

5.2. Algunos problemas abiertos

Luego de la realización de este trabajo, nos quedaron los siguientes problemas que pueden ser revisados en trabajos posteriores:

- Elaboración de un software que permita determinar de manera sistemática pares x_k-coherentes dado un sistema de polinomios ortogonales.
- Generar un código que permita estudiar una posible relación de x_k-coherencia generalizada para el caso de dos variables.
- Plantear y formalizar, si la hay, una generalización de la relación de x_k-coherencia en dos variables, de manera similar a la que existe para la coherencia en el caso de una variable.

Bibliografía

[1] Álvarez-Nodarse, Renato: *Monogr. Semin. Mat. García Galdeano.* Vol. 26: *Polinomios hipergeométricos clásicos y q-polinomios*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza, 2003. – ISBN 84–7733–637–7.

[2] Appell, P. ; Kampé de Fériet, J.: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite.* 1926.

[3] Area, Iván: Hypergeometric multivariate orthogonal polynomials. En: *Orthogonal polynomials. Proceedings of the 2nd AIMS-Volkswagen Stiftung workshop on introduction to orthogonal polynomials and applications, Douala, Cameroon, October 5–12, 2018.* Cham: Birkhäuser, 2020. – ISBN 978–3–030–36743–5; 978–3–030–36746–6; 978–3–030–36744–2, p. 165–193.

[4] Area, Iván. ; Godoy, E. ; Ronveaux, A. ; Zarzo, A.: Bivariate second-order linear partial differential equations and orthogonal polynomial solutions. En: *J. Math. Anal. Appl.* 387 (2012), Nr. 2, p. 1188–1208. – ISSN 0022–247X.

[5] Barrio, Roberto ; Peña, Juan M. ; Sauer, Tomas: Three term recurrence for the evaluation of multivariate orthogonal polynomials. En: *Journal of Approximation Theory* 162 (2010), Nr. 2, p. 407–420. – ISSN 0021–9045.

[6] Chihara, T.S.: *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, 1978.

[7] Delgado, Antonia M.: *Ortogonalidad no estándar: Problemas Directos e Inversos*, Doctoral Dissertation, Universidad Carlos III de Madrid. In Spanish, Tesis de Grado, 2006.

[8] Delgado, Antonia M. ; Geronimo, Jeffrey S. ; Iliev, Plamen ; Marcellán, Francisco: Two variable orthogonal polynomials and structured matrices. En: *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 28 (2006), Nr. 1, p. 118–147. – ISSN 0895–4798.

[9] Delgado, Antonia M. ; Marcellán, Francisco: Companion linear functionals and Sobolev inner products: a case study. En: *Methods Appl. Anal.* 11 (2004), Nr. 2, p. 237–266.

[10] Delgado, Antonia M. ; Marcellán, Francisco: On an extension of symmetric coherent pairs of orthogonal polynomials. En: *J. Comput. Appl. Math.* 178 (2005), Nr. 1-2, p. 155–168.

[11] Dunkl, Charles F. ; Xu, Yuan: *Orthogonal polynomials of several variables.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001 (Encycl. Math. Appl.). ISSN 0953–4806.

[12] Engelis, G. K.: On some two-dimensional analogues of the classical orthogonal polynomials. En: *Latv. Mat. Ezheg.* 15 (1974), p. 169–202. – ISSN 0321–2270.

[13] Fernández, Lidia ; Pérez, Teresa E. ; Piñar, Miguel A.: Classical orthogonal polynomials in two variables: a matrix approach. En: *Numer. Algorithms* 39 (2005), Nr. 1-3, p. 131–142. – ISSN 1017–1398.

[14] Garza, Luis ; Marcellán, Francisco ; Pinzón-Cortés, Natalia C.: $(1,1)$-coherent pairs on the unit circle. En: *Abstr. Appl. Anal.* 2013 (2013), p. 8. – Id/No 307974. – ISSN 1085–3375.

[15] Hahn, Wolfgang: Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen. En: *Mathematische Zeitschrift* 39 (1935), p. 634–638.

[16] Hermite, M. ; des sciences (France), Académie: *Sur Un Nouveau Développement en Série Des Fonctions.* Imprimerie de Gauthier-Villars, 1864.

[17] Iserles, Arieh ; Koch, P. E. ; Nørsett, Syvert P. ; Sanz-Serna, J. M.: On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. En: *J. Approx. Theory* 65 (1991), Nr. 2, p. 151–175. – ISSN 0021–9045.

[18] Jacobi, C.G.J.: Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. 1859 (1859), Nr. 56, p. 149–165.

[19] de Jesus, M. N. ; Marcellán, Francisco. ; Petronilho, J. ; Pinzón-Cortés, N. C.: (M,N)-coherent pairs of order (m,n) and Sobolev orthogonal polynomials. En: *J. Comput. Appl. Math.* 256 (2014), p. 16–35. – ISSN 0377–0427.

[20] Karlin, S. ; McGregor, J. *On some stochastic models in genetics.* Stochastic Models Med. Biol., Proc. Sympos. Univ. Wisconsin 1963, 245-279. 1964.

[21] Karlin, S. ; McGregor, J.: Linear Growth Models with Many Types and Multidimensional Hahn Polynomials. En: Askey, Richard A. (Ed.): *Theory and Application of Special Functions.* Academic Press, 1975. – ISBN 978–0–12–064850–4, p. 261–288.

[22] Koornwinder, Tom: Two-Variable Analogues of the Classical Orthogonal Polynomials. En: Askey, Richard A. (Ed.): *Theory and Application of Special Functions.* Academic Press, 1975. – ISBN 978–0–12–064850–4, p. 435–495.

[23] Kowalski, M. A.: Orthogonality and recursion formulas for polynomials in n variables. En: *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), p. 316–323. – ISSN 0036–1410.

[24] Kowalski, M. A.: The recursion formulas for orthogonal polynomials in n variables. En: *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), p. 309–315. – ISSN 0036–1410.

[25] Krall, H. L. ; Frink, Orrin: A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials. En: *Trans. Am. Math. Soc.* 65 (1949), p. 100–115. – ISSN 0002–9947.

[26] Krall, H. L. ; Sheffer, I. M.: Orthogonal polynomials in two variables. En: *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 76 (1967), p. 325–376. – ISSN 0373–3114.

[27] Legendre, Adrien M.: Recherches sur l'attraction des spheroides homogenes. En: *Mémoires de mathématique et de physique : prés. á l'Académie Royale des Sciences, par divers savans, et lûs dans ses assemblées* 1785 (2007), p. 411 – 434.

[28] Marcellán, Francisco ; Marriaga, Misael E. ; Pérez, Teresa E. ; Piñar, Miguel A.: Coherent pairs of bivariate orthogonal polynomials. En: *J. Approx. Theory* 245 (2019), p. 40–63. – ISSN 0021–9045.

[29] Marcellán, Francisco ; Pérez, Teresa E. ; Piñar, Miguel A.: Orthogonal polynomials on weighted Sobolev spaces: The semiclassical case. En: *Ann. Numer. Math.* 2 (1995), Nr. 1-4, p. 93–122. – ISSN 1021–2655.

[30] Marcellán, Francisco ; Petronilho, J.: Orthogonal polynomials and coherent pairs: The classical case. En: *Indag. Math., New Ser.* 6 (1995), Nr. 3, p. 287–307. – ISSN 0019–3577.

[31] Marcellán, Francisco ; Petronilho, José C. ; Pérez, Teresa E. ; Piñar, Miguel A.: What is beyond coherent pairs of orthogonal polynomials? En: *J. Comput. Appl. Math.* 65 (1995), Nr. 1-3, p. 267–277. – ISSN 0377–0427.

[32] Marcellán, Francisco ; Pinzón-Cortés, Natalia C.: (1, 1)-q-coherent pairs. En: *Numer. Algorithms* 60 (2012), Nr. 2, p. 223–239. – ISSN 1017–1398.

[33] Marcellán, Francisco ; Pinzón-Cortés, Natalia C.: $(1,1)$-D_ω-coherent pairs. En: *J. Difference Equ. Appl.* 19 (2013), Nr. 11, p. 1828–1848. – ISSN 1023–6198.

[34] Meijer, H. G.: Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials. En: *Indag. Math., New Ser.* 4 (1993), Nr. 2, p. 163–176. – ISSN 0019–3577.

[35] Meijer, H. G.: Determination of all coherent pairs. En: *J. Approx. Theory* 89 (1997), Nr. 3, p. 321–343. – ISSN 0021–9045.

[36] Proriol, Joseph: Sur une famille de polynômes à deux variables orthogonaux dans un triangle. En: *C. R. Acad. Sci., Paris* 245 (1957), p. 2459–2461. – ISSN 0001–4036.

[37] Stieltjes, T.-J.: Recherches sur les fractions continues. En: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques* 8 (1894), Nr. 4, p. J1–J122.

[38] Suetin, P. K.: *Anal. Methods Spec. Funct.*. Vol. 3: *Orthogonal polynomials in two variables. Transl. from the 1988 Russian original by E. V. Pankratiev*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1999. – ISBN 90–5699–167–1.

[39] Szegő, Gábor: *Colloq. Publ., Am. Math. Soc.*. Vol. 23: *Orthogonal polynomials.* American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1939 ISSN 0065–9258.

[40] Tchebychev, Pafnutii L.: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1853.

[41] Tchebyshev, Pafnutii L.: Sur le développement des fonctions à une seule variable. En: *Bull. Acad. Sci. St. Petersb* 1 (1859), Nr. 193-200, p. 124.

[42] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 12.1.* Champaign, Illinois, (2020).

[43] Zernike, F. ; Brinkman, H. C.: Hypersphärische Funktionen und die in sphärischen Bereichen orthogonalen Polynome. En: *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 38 (1935), p. 161–170. – ISSN 0370–0348.