UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

La noción de función, un acercamiento a su comprensión

Nidia Mercedes Jaimes Gómez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

La noción de función, un acercamiento a su comprensión

Nidia Mercedes Jaimes Gómez

Trabajo de investigación presentado c omo requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Matemático, M.Sc en Educación, Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia, Crescencio Huertas Campos

Línea de Investigación:

Pensamiento variacional. Historia, epistemología y didáctica de la matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2012

A mi madre…

A mi esposo Arturo y a mi hija Catalina,

esencia de mi vida.

Agradecimientos

Al Politécnico Grancolombiano, Institución Universitaria por el apoyo económico en la realización de esta maestría.

Al profesor Crescencio Huertas Campos, matemático, M.Sc en educación, profesor asociado de la universidad Nacional de Colombia por sus correcciones, sugerencias y valiosos aportes.

Resumen

Pruebas diagnósticas aplicadas a estudiantes de primer semestre en el Politécnico Grancolombiano, Institución Universitaria, arrojan resultados poco alentadores respecto de nociones de dominio variacional, en particular, se aprecian serios inconvenientes en la comprensión del concepto de función, que es de suma importancia en diversas áreas del conocimiento que requieren de su aplicación. Mediante este trabajo se hace una propuesta didáctica alternativa con el propósito de generar un ambiente propicio para la comprensión del concepto de función a través de la modelación de situaciones reales, con base en las características y cualidades de los fenómenos, usando funciones elementales y consecuente con el desarrollo histórico y epistemológico. Con el fin de tener una visión más amplia acerca de las distintas definiciones, se hace una revisión pausada del desarrollo de la noción de función desde Euler hasta la teoría de conjuntos.

Palabras claves: cantidad, dependencia, función, modelación, variable.

Abstract

Entry test applied to first semester students at Institucion Universitaria Politécnico Grancolololombiano, show that pupils struggle with the variations of domain notions specially there can be noticed serious issues in the understanding of the concept of function, which is applied in different areas of the knowledge, and therefore, relevant. This paper presents an alternative didactic proposal which pretend to generate a proper environment to promote the understanding of the concept of function by modeling real solutions, based on the features of the phenomenon, using basic functions taking into account the epistemological and historical development. In order to obtain a wider perspective about the different definitions, a detailed review of the concept of function is presented, from Euler to the Set Theory.

Keywords: amount, dependence, function, modeling, variable.

Contenido

Introducción

La noción de función, catalogada como la más importante herramienta en el desarrollo del análisis matemático, se contempla hoy en día como tema de estudio en todos los programas de matemáticas de primeros semestres a nivel superior, por ser fundamental en diversas áreas del conocimiento que requieren de su aplicación, no sólo como lectura e interpretación de gráficos, sino porque se hace necesario determinar aproximaciones sobre cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras.

A pesar de ser un tema de gran importancia, investigaciones referentes al aprendizaje de funciones demuestran que los estudiantes presentan serias dificultades en su compresión. Una de las causas del problema, está relacionada en gran medida con la *ausencia del potencial modelizador de la noción de función, el excesivo hincapié en el registro algebraico, la falta de articulación entre registros, el oscurecimiento de los elementos fundamentales de variabilidad y dependencia, y el trabajo descontextualizado*, *tan frecuente en matemática* (Rey, 2009). Las falencias usualmente se centran en la misma forma de concebir la definición, en sus diversas representaciones y en la traducción de una a otra. Otras investigaciones acerca de concepciones de los docentes sobre enseñanza aprendizaje del tema, concluyen que los enfoques dados en ocasiones no son los apropiados; generalmente se enseña a partir de abstracciones y métodos formales, con insistencia en lo algorítmico, desconociendo las primeras definiciones dadas a través de la historia que tienen su origen en las nociones de variabilidad y dependencia (Ruiz, 1998).

Teniendo en cuenta los antecedentes en mención; a través de este trabajo se estructura una propuesta didáctica alternativa, no sin antes incursionar en la génesis del concepto tratado en los dominios histórico y epistemológico.

En la antigüedad, los matemáticos babilónicos, intuitivamente ya manejaban la noción de función, aspecto que se aprecia en los estudios concretos de astronomía, cuando recurrían a tablas de datos, interpolaciones y extrapolaciones en búsqueda de regularidades y proporciones. Los matemáticos griegos manejaron también la noción de función a través de las proporciones que permitían comparar variables de la misma naturaleza, luego el acercamiento de las matemáticas a las ciencias naturales, permitió relacionar cantidades variables a través de gráficos en cuyas formas se observaba el comportamiento de la variable dependiente. En el siglo XVII, Descartes y Fermat establecen conexiones entre la geometría y el álgebra, dando los primeros pasos hacia la geometría analítica, en la que se explicita la relación de dependencia entre dos cantidades variables y la noción de función se asocia a una curva que representa la trayectoria de puntos en movimiento. Euler, se encarga luego en el siglo XVIII de estudiar la función como expresión analítica, aparece la noción de función no continua, y Leibniz emplea por primera vez la notación "fx" para referirse a una función. Más adelante, Lagrange amplía la noción de función al cálculo, predominando el enfoque formal, en el que se entiende una función como una combinación de operaciones. A partir del problema de la cuerda vibrante, Euler se ve en la necesidad de ampliar la noción de función como una correspondencia arbitraria y finalmente; culminando el siglo XIX y principios del siglo XX, se llega a la noción de función como terna, trabajada desde la teoría de conjuntos, de carácter meramente formal y matemático, alejada de las nociones de variabilidad y dependencia y de problemas de fenómenos reales.

En este recorrido, también salen a la luz algunos obstáculos que retrasaron su evolución y se exponen los elementos y nociones que permitieron fortalecerlo, entre otros, el concepto de cantidad abstracta o universal, inmerso en el marco disciplinar que evoca el desarrollo de la noción de función desde Euler hasta la teoría de conjuntos, teniendo en cuenta los aportes previos de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz.

Sin duda alguna, la mayor contribución en la evolución de la noción de función se le debe a las nociones de variabilidad y dependencia, elementos que permitieron a los matemáticos introducir en la matemática la cuantificación de la causalidad, así como la estimación de su efecto y el cambio de comportamiento de una magnitud en el tiempo. Sin embargo, los textos y actividades escolares, sólo se remiten al concepto matemático del último siglo, desconociendo su génesis y evolución.

Esta manera de introducir el estudio de las funciones actualmente, como una correspondencia, desde un enfoque conjuntista, de acuerdo con los resultados que arrojan las investigaciones consultadas (Ruiz, 1998; Rey, 2009; Mesa, 2007), no han mostrado efectividad en el proceso de comprensión y apropiación del concepto. En muchas ocasiones se reduce a una fórmula, sobre la cual se halla el dominio (sin significado para el estudiante) y algunos elementos, concluyendo en una gráfica u otro tipo de representación o aplicación. Se repiten unos cuantos ejemplos de forma algorítmica lo cual conduce a ocultar el carácter modelador esencial en la solución de problemas de fenómenos reales.

Se presenta entonces una propuesta didáctica, a partir de la interpretación de la función como modelo, que se usa como alternativa, para explicar, verificar o predecir situaciones reales cercanas a la cotidianidad o fenómenos de estudio propios de otras ciencias; consecuente con el desarrollo histórico, teniendo en cuenta que la idea de función nace precisamente del estudio de fenómenos de cambio. Se proponen cinco talleres, para que sean desarrollados por los estudiantes de primer semestre y con los que se pretende generar un ambiente propicio para comprender el concepto de función, que permita conocer y manipular los lenguajes de representación (descripción verbal, tabulación, gráfica, ecuación), pasar de uno a otro, y que conduzca posteriormente a distinguir las características de los modelos elementales de las funciones.

Con este trabajo se espera una visión más amplia de las definiciones de función, no sólo como correspondencia sino como dependencia entre variables.

1. Capítulo 1. Aspectos relevantes en la historia de la génesis del concepto de función

En la época antigua, civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India comienzan a desarrollar implícitamente la noción de función, esta se aprecia en la acción de contar como una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de numerales.

Los babilonios (2.000 a.C-500a.C) quienes desarrollaron cosas importantes, en su intento de perfeccionar el calendario, estudiaron los movimientos del sol, hicieron observaciones directas de fenómenos y establecieron relaciones aritméticas que les permitieron hacer predicciones. Prueba de estos trabajos quedaron consignados en las tablillas cuneiformes encontradas por arqueólogos, como la que se ilustra en la Figura 1-1

Figura 1-1: tablilla cuneiforme que muestra registro de observaciones de los babilonios.

blogeducativojoaquin.blogspot.com

En este sentido se puede afirmar que en la antigüedad se hicieron estudios sobre casos concretos, relativos a la astronomía sin limitarse a la simple tabulación de datos empíricos, emplearon interpolaciones y extrapolaciones en búsqueda de regularidades y proporciones pero sin evidencia de algún tipo de generalización.

Más tarde (500 a.C.-500 d.C.) durante la época de la cultura helénica, el esfuerzo por solucionar problemas que no se podían resolver con regla y compás, a saber, la cuadratura del círculo (Anaxágoras), la duplicación del cubo (Menecmo), generó la creación de diferentes curvas.

Los griegos también estudiaron problemas que tenían implícita la noción de función, establecieron relaciones entre magnitudes geométricas variables, de la misma naturaleza; es decir relacionaban áreas con áreas, volúmenes con volúmenes, longitudes con longitudes; con éstas hicieron cálculos, hallaron centros de gravedad, desarrollaron tablas de senos similares a las actuales y compilaron tablas de cuerdas de un círculo, registrando la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, trabajos que se consideran como el comienzo de la trigonometría.

En la edad Media, la evolución de la noción de función se asocia al estudio del cambio, en particular del movimiento (fenómenos naturales como calor, luz, color, densidad, distancia, velocidad). Surgen interrogantes acerca del *¿por qué?* de los fenómenos naturales conduciendo a que las ideas se desarrollen alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, sin llegar a concretar fórmulas. La noción implícita de función se refleja en la descripción verbal de propiedades específicas o mediante la representación gráfica.

Los fundamentos filosóficos los buscan en las ideas de Aristóteles y Platón. Estos dos filósofos buscaban la causa de los cambios cualitativos del movimiento. Pero, mientras que para Platón las matemáticas podían servir para definir la causa, para Aristóteles, física y matemáticas eran bien distintas, las matemáticas eran la ciencia de la cantidad abstracta, y las causas del cambio, según él había que buscarlas en las cosas materiales. La historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función. (René de Cotret, 1985, p.58) (Ruiz, 1998)

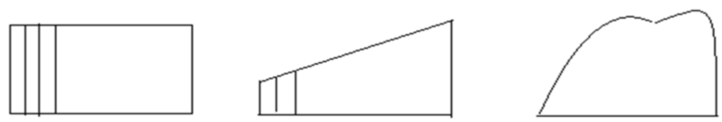
En el siglo XIV, a Nicolás Oresme (1323-1382), se le atribuyen las primeras representaciones geométricas de las cosas que varían, las cuales consiguió trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera y manteniendo los nombres de longitud y latitud, análogamente llamadas en la actualidad abscisa y ordenada respectivamente. Su objetivo era representar por una figura las *intensidades de una cualidad* que depende de otra. Aquí es importante anotar que similar al pensamiento griego, para Oresme la noción de número y de magnitud fueron diferentes, la primera la asociaba al conjunto de unidades mientras que la segunda se refería a lo medible. "*Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua*", afirmó Oresme.

En la forma de una figura, se esperaba observar el cambio de una cualidad, para ello, inicialmente la extensión del objeto la representó mediante un segmento horizontal y en forma vertical segmentos que indicaban la intensidad de la cualidad en un punto determinado y para representar el movimiento de un cuerpo como una unidad (todas sus partes tienen la misma velocidad, pero su velocidad varía con el tiempo), horizontalmente representó la duración del movimiento y con segmentos verticales las velocidades puntuales. En esta dirección, Oresme considera tres tipos de figuras (D'hombres, 1987):

a. Uniformemente Uniformes. La figura que se obtiene es un rectángulo, y se genera cuando la velocidad es constante debido a que las intensidades son iguales, indistintamente al tiempo que se tome. Figura 1.2 (a)

b. Uniformemente deformes. La figura que se obtiene es un triángulo o un trapecio, depende de la intensidad inicial de la cualidad. El movimiento es uniformemente acelerado, las líneas verticales crecen de manera uniforme. Figura 1.2 (b) *c. Deformemente deformes*. Movimiento de aceleración y velocidad no uniforme, la figura puede ser un semicírculo o una forma irregular. Figura 1.2 (c)

Figura 1-2: Representación de la intensidad de una cualidad, según Oresme (adaptación. Ruiz, 1998).



(a) (b) (c)

Oresme no grafica curvas en un sistema de coordenadas, pero su obra se constituyó en un paso importante para la invención de la geometría analítica y en la introducción del movimiento en la geometría, aspecto no considerado en la matemática griega.

En los siglos XV y XVI predominó el desarrollo y perfeccionamiento del simbolismo algebraico y la formación de la trigonometría como una rama independiente, aspectos que abonan el terreno para la simbolización futura de una función y el estudio de funciones trigonométricas respectivamente.

En 1461, Müller (1436-1476), hizo diversas tablas de funciones trigonométricas, entre ellas las que en el siglo XVII se denominarían tangente y cotangente. Galileo (1564-1642) a diferencia de Oresme, empleó la experimentación ayudándose de instrumentos de medida e incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones en su forma homogénea, introdujo lo cuantitativo en las representaciones gráficas donde antes solo tenía cabida la forma cualitativa y, expresó las leyes, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional. *Los gráficos de Galileo proceden de la experiencia y de la medida. Las relaciones de causa efecto están expresadas de forma cuantitativa verificable* (Ruiz, 1998).

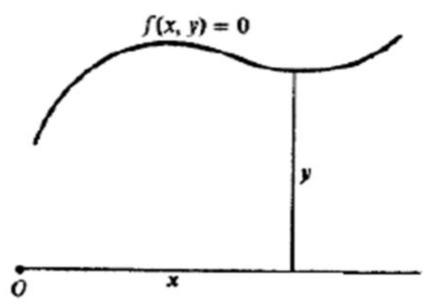
A finales del siglo XVI, los trabajos de Chuquet con progresiones, condujeron a la definición de logaritmo lo cual contribuyó en la gestación de la idea de función como correspondencia entre la variable independiente y dependiente. Neper en cambio acudió a la comparación de movimientos para llegar a los logaritmos, dejando entrever el sentido de la continuidad y una estrecha relación entre número y magnitud.

Otros trabajos que contribuyeron fuertemente al desarrollo del concepto de función fueron: la extensión del concepto de número al de números reales (Bombelli, Stifel), puesto que para esa época ya eran aceptados como números los reales y los complejos; la creación del álgebra simbólica (Vieta, Descartes) propone el uso de letras para representar las variables y el uso del álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes, proceso de varios siglos que inicia con el *álgebra retórica* (2000 a.C.- 1600 a.C.) donde los problemas se plantean en un lenguaje natural, seguido históricamente por el *álgebra sincopada* en el que los textos siguen escritos en vernáculo pero se emplean abreviaturas para algunos términos (Diofanto, siglo II), también fueron importantes los estudios del movimiento (Kepler, Galileo) del que ya se hizo mención y la unión entre el álgebra y la geometría (Fermat, Descartes).

Vieta escribe las magnitudes conocidas como consonantes B, D, etc. y las magnitudes desconocidas como vocales A, E, etc. Descartes en cambio, usa las últimas letras del alfabeto para las incógnitas y las primeras para los coeficientes, de la misma manera como las usamos actualmente.

Descartes usa el cálculo de segmentos a cambio del álgebra de magnitudes que usa Vieta, dentro de sus grandes aportes está el haber reducido áreas y volúmenes al manejo de segmentos, la suma de dos segmentos es otro segmento, el producto de dos segmentos es otro segmento, la división de dos segmentos es otro segmento. Él es el primero en utilizar x^2 y x^3 para multiplicar longitud por longitud igual a longitud, expresiones básicas en el álgebra. Descartes y Fermat estudiaron respectivamente, ecuaciones a través del significado de las curvas y el comportamiento de estas y sus propiedades definidas por ecuaciones. La geometría analítica dio origen a una gama de nuevas curvas en contraste con la escasez de curvas conocidas por los geómetras griegos, ahora una nueva curva se originaba por el simple hecho de obtener una nueva ecuación. En cuanto al método cartesiano, Descartes no habla de ejes, ni de abscisas, ni de ordenada. Para la representación de las curvas, escoge una recta, en posición horizontal, señala en ella un punto fijo; luego toma puntos en la curva, y a cada punto asocia otro en la línea horizontal, analiza cómo cambia la distancia entre los puntos correspondientes respecto a un punto fijo O. De esta manera la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados, tal como se muestra en la figura 1-3.

Figura 1-3: Correspondencia entre una ecuación *f(x,y) = 0* y los puntos *(x,y)* relativos a dos ejes fijos perpendiculares que satisfacen la ecuación[1] (Hernández, 2002).



Descartes quien buscaba darle sentido al álgebra por medio de la geometría fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica, fue el primero que puso en claro que una ecuación en *x* e *y* es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudiera calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable. Clasifica las curvas en “mecánicas” y “geométricas”, dentro de las primeras están la espiral y la cuadratriz y dentro de las

[1] Tanto para Fermat como para Descartes, las dos cantidades desconocidas en una ecuación eran segmentos lineales más que números.

segundas están aquellas que pueden expresarse mediante una ecuación algebraica, de grado mixto, en x, e, y (concoide, cisoide). Además clasificó las curvas algebraicas según sus grados.

La clasificación antes mencionada dio lugar a que Gregory realizara la distinción entre funciones “algebraicas” y “trascendentes”. Este matemático del siglo XVII, definió “función” como:

Una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable

El primer matemático en utilizar la palabra función en 1692 fue Leibniz (1646-1716), con esta palabra se refirió a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. También introdujo las palabras, constante, variable, coordenadas y parámetro en términos de un segmento (nombres utilizados actualmente)

Tanto Leibniz como Newton contribuyeron fuertemente al desarrollo del concepto de función. De Newton son conocidos sus tratados sobre fluxiones y sobre series infinitas. En el primero concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva, cada una de estas cantidades que aparece (variable) es un fluente y su velocidad es una “fluxión”. La idea de función era muy restringida, se reducía a funciones analíticas inicialmente con base en lo que se podía expresar mediante una ecuación algebraica y posteriormente las desarrollables en serie de potencias.

En el siglo XVIII, Euler define constante y cantidad variable y precisa la definición de función como una expresión analítica. Se enfrenta entonces al problema de que si a toda función le corresponde una curva también toda línea curva debería representarse por una función, en consecuencia, admite como funciones a las llamadas curvas mecánicas. Distingue luego funciones “continuas”, no en el mismo concepto actual, se refiere a aquellas que se representan por solo una ecuación, y llama “discontinuas” a las curvas mecánicas.

En este momento histórico, se continúan generando problemas que conectan la física y la matemática y es de gran relevancia el problema de la cuerda vibrante [dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma de alguna manera inicial y se suelta para que vibre], que consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. El problema origina controversia entre Dalambert y Euler centrando la discusión alrededor del significado de función. Dalambert entendía la función como cualquier expresión analítica mientras que Euler la entendía como cualquier curva. Esta discusión hace que el concepto de función evolucione y se cree una noción más general.

En el siglo XIX, después de los últimos trabajos de Euler referentes a *funciones arbitrarias,* Fourier hace grandes aportes acerca de series trigonométricas, que serán seguidos con trabajos acerca de números reales de Cauchy, Dedekin, Lobachevsky, Riemman y Dirichlet, entre otros.

En cuanto a la representación, para simbolizar la función se emplea la expresión f(x) o *y*. En las representaciones gráficas se emplean los ejes cartesianos, y aparecen los diagramas de Venn con fines didácticos.

Dirichlet (1805-1859) fue el primero en considerar la noción de función como una “correspondencia arbitraria” y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. A partir de los trabajos de Dirichlet, el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica.

A finales del siglo XIX y primeras décadas del siglo XX aparece la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos y se toma como base y fundamento de toda la matemática.

La definición de función sigue evolucionado a través de la historia, con los desarrollos en el campo del análisis, álgebra abstracta y de la topología. En 1939 el grupo Bourbaki formuló la definición de función como un subconjunto especial de un producto cartesiano, considerada con frecuencia en la enseñanza de funciones hoy en día.

2. Capítulo 2. Desarrollo epistemológico

Al incursionar en el desarrollo histórico y epistemológico de la noción de función se logran identificar distintas etapas en su evolución, de las que surge información relevante para comprender no sólo las dificultades que tienen los estudiantes, sino para sugerir metodologías alternativas a las usuales en las que se aborda la noción desde las últimas concepciones. En este recorrido se destacan distintos estadios que han fortalecido su evolución y otros que se han *considerado resistentes a su evolución y generalización y por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos* (Ruiz, 1998). También es importante resaltar que en el mismo sentido en que evoluciona el concepto de función, se aprecian cambios en su forma de representación.

2.1 **Análisis Epistemológico del Concepto de Función**

Luisa Ruiz (1998), asocia a la evolución histórica de la noción de función, siete concepciones fruto de las problemáticas abordadas en los distintos periodos históricos, las invariantes[1] usuales y las distintas representaciones simbólicas usadas:

2.1.1 Identificación de regularidades

Desde la época prehelénica y durante varios siglos, se han asumido situaciones ligadas a los fenómenos naturales en cuyos estudios se incorporan magnitudes físicas que cambian. Se usan tablas para registrar medidas de cantidades, sobre las que se consiguen relaciones entre cantidades de magnitudes variables, que permiten identificar regularidades en fenómenos sujetos al cambio

La invariante que se asocia a la caracterización de esta concepción es el establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa y efecto.

2.1.2 Razón o proporción

Desde la matemática Helénica, hasta los matemáticos como Oresme y Galileo, las proporciones se emplearon para establecer relaciones entre magnitudes variables del mismo tipo, pero posteriormente con la introducción de igualdades en el álgebra nace la posibilidad de formular una relación de dependencia entre variables. Se asocian

[1] En este contexto invariante se refiere a las concepciones que se mantienen durante un periodo es decir no varían.

situaciones relacionadas con magnitudes físicas, en particular en el campo de la geometría y la astronomía.

Las invariantes que caracterizan esta concepción son las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.

2.1.3 Gráfica (visión sintética)

Debido a que en el siglo XIV, no se disponía aún de un continuo numérico para representar el movimiento, Oresme utiliza la continuidad de los segmentos para representar los cambios de la intensidad de magnitudes cualitativas y así poderlos describir, comparar y analizar la dependencia.

Las invariantes asociadas a esta concepción son la proporcionalidad entre magnitudes y la relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende. Ver Figura 1-2.

2.1.4 Curva (analítico-geométrica)

Esta concepción se da en situaciones que conectan problemas de la geometría y el álgebra (s.XVIII). Descartes estudia las ecuaciones a través del significado de la curva, mientras que Fermat estudia el comportamiento de estas y sus propiedades definidas por ecuaciones. Nace la geometría analítica y con ella una amplia gama de nuevas curvas. Se gesta la noción de dependencia entre dos cantidades variables.

En cuanto al método cartesiano, Descartes no habla de ejes, ni de abscisas, ni de ordenada. Para la representación de las curvas, escoge una recta en posición horizontal, señala en ella un punto fijo O; luego toma puntos en la curva y a cada uno de estos puntos asocia otro en la línea horizontal y analiza cómo cambia la distancia entre los puntos correspondientes respecto al punto fijo O. De esta manera, la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados.

Invariantes: Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva (Descartes). Ver figura 1-3.

2.1.5 Expresión analítica

Descartes reduce áreas y volúmenes al manejo de segmentos obteniendo expresiones básicas del álgebra, más tarde Euler habla de expresión analítica, y Lagrange la ampliará a toda expresión del cálculo. Esta concepción se da en situaciones meramente matemáticas así como en situaciones externas a las matemáticas como por ejemplo en problemas de astronomía y física relacionadas con el estudio del movimiento curvilíneo y las fuerzas que lo afectan, este estudio continúa con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (s. XVII) en los inicios del cálculo infinitesimal y continúa con los trabajos de Bernoulli, Lagrange y Euler (s.XVII-XVIII).

Representación analítica (Leibniz, 1673): $f\ x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Invariantes: se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: "una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes"[2]

2.1.6 Correspondencia arbitraria: aplicación

La discusión del problema de la cuerda vibrante (s. XIX) crea la necesidad de una noción más general del concepto de función. Dirichlet (1805- 1859) fue el primero en considerar la noción de función como una "correspondencia arbitraria" y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. A partir de los trabajos de Dirichlet, el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica.

En cuanto a la representación, para simbolizar la función se emplea la expresión f(x) o y. En las representaciones gráficas se emplean los ejes cartesianos, y aparecen los diagramas de Venn con fines didácticos.

Invariantes: Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

2.1.7 Función como terna

En las primeras décadas del siglo XX, se llega a la determinación de una función como terna. *Se llama función a la terna f = (A, B, G), en donde A, B, G son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:*

i) G es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$

ii) Para todo $x\,en\,X$ *existe un* y *, solo un* $y\ en\ Y$ *, tal que* $(x, y)\ está\ en\ G$ *.*

La noción en mención se considera en cualquier dominio científico. En la representación se siguen empleando los ejes cartesianos y la notación empleada es:

$$f = (A, B, G)\ es\ una\ \ función\ \Leftrightarrow G \subset A \times B \wedge \forall x \in A,\ \exists y \in B\ tal\,que\ (x, y) \in G.$$
$$(x, y), (x, z) \in G \Rightarrow y = z$$

Invariantes: La definición y notación en mención.

[2] Permanece aún la idea de asignar la variación a las "cantidades". El cambio de la ley analítica o la existencia de leyes diferentes sobre dos intervalos o más de su dominio, para Euler y sus contemporáneos, determina una función, no continua que llamarían mixta (Ruiz, 1998)

2.2 **Obstáculos**

Dentro de los obstáculos que se consideran de mayor incidencia en el desarrollo del concepto de función están:

2.2.1 Proporciones homogéneas

Los griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas y las proporciones solamente fueron empleadas para relacionar magnitudes físicas y del mismo tipo, con las que ataban el concepto de variabilidad. La igualdad entonces, no tuvo cabida en estas razones, puesto que no estaban inmersas en la matemática, concepción que no permitió evidenciar la dependencia entre variables y se extendió hasta la época de Oresme, Newton y Leibniz.

2.2.2 Disociación entre magnitudes y números

En el pensamiento griego los números eran objetos discretos mientras que las magnitudes eran continuas. Este aspecto condujo a que las leyes físicas no fueran vistas como leyes matemáticas. La dificultad se supera en el siglo XIX, cuando se extienden los conjuntos numéricos al de números reales y se asocia a cualquier cantidad de una magnitud una medida numérica.

2.2.3 Concepción geométrica de las variables

El álgebra geométrica que construyeron los griegos, en la que la suma y resta de segmentos correspondía a otro segmento, la multiplicación de dos segmentos x, y a un rectángulo de lados x, y; el producto de tres segmentos a un paralelepípedo y la división de dos segmentos sólo tenía sentido cuando la dimensión del dividendo era mayor a la dimensión del divisor, se asume como un obstáculo hasta que Descartes y Fermat, tal como se menciona en la reseña histórica, dan un giro, al considerar todas las operaciones entre segmentos como otro segmento y de manera implícita se puede establecer una relación entre segmentos y números reales, lo que hace que el concepto de variable adquiera otro significado.

2.2.4 Concepción algebraica

En el siglo XVIII se llega a tener la idea de que las relaciones esenciales son aquellas que se describen por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. La definición de *función de una cantidad variable como una expresión analítica compuesta de alguna manera por esa cantidad variable y números o cantidades constantes* deja entrever una clara dependencia entre expresión analítica y función, aspecto que se constituye en un obstáculo puesto que las llamadas curvas mecánicas no se pueden tratar bajo este análisis, desvinculando las matemáticas de la física. Poco después, Newton descubrió el desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, reduciendo significativamente las restricciones de Descartes y posibilitando la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en esa época.

Más adelante el desarrollo de los números reales y la teoría de conjuntos eliminan esta dificultad.

2.2.5 Concepción mecánica de una curva

Para Galileo, Torricelli, Roberbal o Newton, las curvas eran consideradas como trayectoria de puntos en movimiento, lo cual significa que al concepto de función se le asociaba a la noción de curva y no se consideraba como un conjunto de puntos que satisfacen las condiciones de una relación funcional.

3. Capítulo 3. La noción de función desde Euler hasta la teoría de conjuntos

3.1 Desarrollo de la noción de función desde Euler

En el siglo XVII, los matemáticos se centraron en el estudio de las curvas y a partir de estas, estudiaron la relación entre cantidades geométricas variables, las cuales estaban estrechamente relacionadas con la longitud de los segmentos. Newton en sus trabajos relaciona por primera vez los conceptos de función y de variación a través del cálculo fluxional pero la idea de función surge de Leibniz cuando estudia las curvas y el problema de tangentes a través de la geometría y del cálculo. A mediados del siglo XVIII, Leonhard Euler llega a la generalización a partir de los trabajos de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz, e introduce el concepto de cantidad abstracta o universal como soporte para definir la noción de función, sin hacer referencia a la geometría. Euler trata en el primer tomo de su obra *Introductio in Analysin infinitorum (1748)* las cantidades variables. En el primer capítulo del tomo 1 hace referencia a las funciones en general y en el capítulo 1 del tomo 2 a las curvas en general, temas sobre los que se hará un recorrido por tratarse de los aspectos esenciales que generaron la evolución del concepto de función que hoy en día se estudia en las aulas universitarias.

3.1.1 Funciones en general

Inicialmente introduce los conceptos que hoy conocemos como constante y variable, llamando a la primera, *cantidad constante* y a la segunda *cantidad variable* las cuales define de la siguiente manera:

Una cantidad constante es una cantidad determinada la cual conserva siempre el mismo valor. Es decir se refiere a los números y para su representación usa las primeras letras del alfabeto a, b, c, etc.

Una cantidad variable es aquella que no es determinada o es universal, comprende en ella misma todos los posibles números[4] y de todos los tipos, es decir es un género en el cual están contenidas todas las cantidades determinadas. Se representan mediante las últimas letras del alfabeto x, y, z, etc.

---

[4] Cuando Euler habla de todos los posibles número se refiere tanto a números reales como complejos.

Una cantidad variable es determinada cuando algún valor definido es asignado a esta, puede ser sustituida absolutamente por todos los números, positivos y negativos, enteros y racionales, irracionales y transcendentales sin excluir el cero y los complejos.

De la misma manera, Euler define por primera vez una función de una cantidad variable como: *una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes*. La expresión analítica cuyas cantidades que la componen, excepto la variable z, son constantes. Son ejemplos de funciones en z:

$$a+4z; \quad az-5z^2; \quad b\sqrt{a^2-3z^2}; \; z^5$$

No son funciones: z^0; 1^z; $\dfrac{a^2-az}{a-z}$ se asumen como cantidades constantes.

Aquí es necesario resaltar que las funciones, surgen de las operaciones (adición, substracción, multiplicación, división, potencias, raíces), en las que se mantienen tanto las cantidades variables como las cantidades constantes, esa es la razón por la cual las últimas expresiones mencionadas no se asumen como funciones. Esto significa que las constantes no entran dentro del concepto de función para Euler y las funciones son expresiones (no ecuaciones) que contienen una cantidad variable.

Euler también plantea que cualquier expresión analítica es una función y a su vez una función de una cantidad variable en sí será una cantidad variable[5].

Desde las definiciones anteriores, se puede entonces afirmar que la expresión $\sqrt{4-z^2}$ es una cantidad variable, lo cual implica que puede asumir cualquier valor numérico (real o complejo) Esto tiene sentido puesto que se obtiene un número real o complejo al asignarle a z cualquier valor numérico, aún si no pertenece al intervalo [-2, 2] para los cuales la cantidad variable es real.

Euler divide las funciones en algebraicas y transcendentales, en las primeras están aquellas que surgen de una operación algebraica incluida la solución de una ecuación y surgen de un número finito de operaciones elementales mientras que las segundas surgen mediante un número infinito de operaciones elementales.

Las funciones algebraicas las subdivide, ademas, en los tipos de funciones que se muestran en el diagrama 3-1.

Son ejemplos de funciones no irracionales de z:

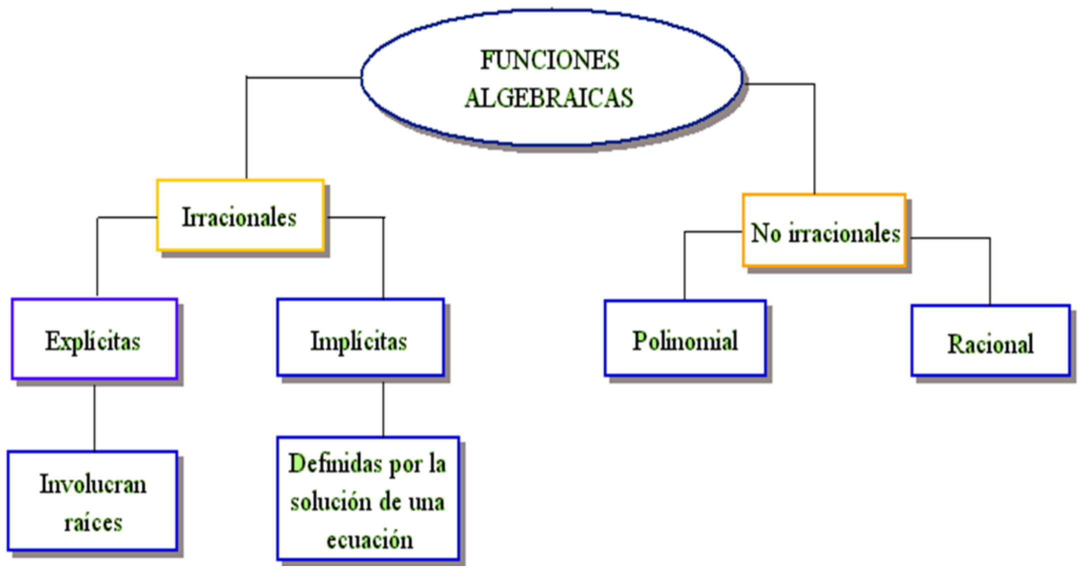
$$a+4z; \quad az-5z^2; \quad \frac{a^2+z^2}{a+z}$$

Funciones irracionales de z:

[5] Podría decirse que asume la función como una relación entre cantidades variables. Aún no se maneja la idea de imagen.

$a+\sqrt{a^2+4z^4}$; $\left(az-5z^2\right)^{1/3}$; $b\sqrt{a^2-3z^2}$

Diagrama 3-1: Clasificación de las funciones según Euler.



La fórmula general de la función polinomio de *z* es:

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\ldots$$

La función racional de *z* se expresa:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\ldots}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\ldots}$$

Otro concepto que introduce Euler es el relacionado con las funciones de un valor único (univaluadas) y de múltiples valores (multivaluadas), dentro de las primeras están las polinómicas y las racionales, puesto que al asignar una cantidad determinada a la variable z, se obtiene un único valor; en la segunda se refiere a aquellas que para un valor sustituido de la variable z la función determina varios valores. El análisis en este último caso se hace a través de una ecuación de la forma:

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - ... = 0$$ (Ecuación 3-1)[6]

P, Q, R, S, etc., cada una corresponde a una función univaluada de z. Esto significa que Z es entonces función implícita de *z* definida por la ecuación 3-1 y si Z es una función multivaluada de *z*, es porque, para cada valor de z se encuentran **n** valores de Z, donde **n** es un entero positivo. De esta manera, se puede afirmar que, una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones univaluadas.

Para mayor claridad, se consideran algunos casos particulares:

i) Z será una función bivaluada de z si está determinada por la ecuación: $Z^2 - PZ + Q = 0$, siendo *P* y *Q* funciones univaluadas de z, en tal caso:

$$Z = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

$$Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$$

Es claro que, para cada valor definido de z, se obtiene un par de valores para Z, los cuáles pueden ser ambos reales, ambos complejos o la suma de ambos es igual a P y el producto igual a Q. Ver figura 3-3

ii) Una función trivaluada se origina a partir de la ecuación cúbica: $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$, Donde *P, Q, R* son funciones univaluadas de z. Esto significa que a un valor determinado de z le corresponden tres valores de *Z*, los cuales pueden ser todos reales, o, uno real y los otros dos complejos. Ver figura 3-4

En este estudio, Euler concluye que el exponente mayor de Z indica el número de valores correspondientes a cada valor de z. Además, si n es un número impar siempre habrá por lo menos un valor real de Z y si n es un número impar es posible que no haya valores reales para Z.

Dentro de las categorías antes mencionadas, se relaciona también las funciones con exponente racional de la forma:

$$P^{\frac{m}{n}},\ m, n\ enteros\ y\ \frac{a}{b}\ irreducible$$

Si n es impar las asume como una función de valor único, pero si n es par, se considera como una función de dos valores.

---

[6] Nótese que 3-1 es una ecuación funcional dado que *P,Q,R*, etc., son funciones univaluadas de z. Cada valor determinado de z da origen a una única función definida por la ecuación en mención.

En el artículo 16[7] del capítulo 1, se infiere con claridad la presencia de la relación entre dos variables, con el siguiente enunciado:

Si y es una clase de función de z, se puede decir que z será una función de y

Si *y* es una función de *z*, de único valor o múltiples valores, se puede escribir una ecuación para la cual *y* está definida a través de *z* incluyendo cantidades constantes, de la misma ecuación, *z* puede ser definida a través de y, y cantidades constantes. Desde que *y* sea una cantidad variable, *z* será igual a una expresión compuesta de esa cantidad variable y cantidades constantes, razón por la cual z será una función de *y*. Por ejemplo si *y* está definida a través de *z* por la ecuación: $y^3 = ayz - bz^2$, *y* será una función de trivaluada de *z*, mientras que *z* es una función de dos valores de *y*.

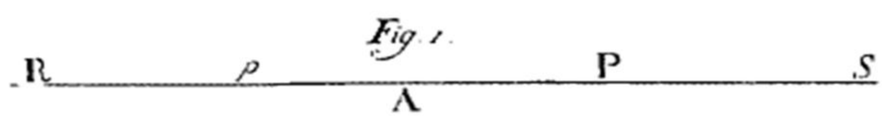
En el artículo 17, del capítulo 1, afirma que si *x*, e, *y* son ambas funciones de z, entonces, *y* es también función de *x*, y, *x* función de *y*, *y* función de z, z función de *y*, z función de *x*. Es evidente que con las dos ecuaciones que se deben considerar inicialmente, se conforme un sistema de ecuaciones en la cual una contiene a *y, z* y la otra *x,* z y que al eliminar z, se obtenga una ecuación en términos de *x,y.*

En el capítulo 1, Euler también se refiere a las funciones pares e impares así como a sus propiedades.

3.1.2 Curvas en general

Con base en la teoría de funciones tratada en el tomo 1, Euler construye la teoría general de curvas, iniciando con el estudio de las coordenadas; para ello, hace énfasis en la definición de cantidad variable, considerada en general como una magnitud, que en consecuencia contiene todas las cantidades determinadas, en forma similar hace referencia a la forma de representación geométrica. Considera la línea recta *RS* de longitud indefinida (llamada eje o directriz), la cual se puede cortar en un número indeterminado de magnitudes, asociada intuitivamente a la cantidad variable. En primer lugar, elige un punto *A*[8] en la línea *RS* y asocia a una cantidad determinada un intervalo de esa magnitud cuyo punto inicial es este punto. De esta manera, una porción de la línea *AP* representa el valor determinado contenido en la cantidad variable. Ver figura 3-1

Figura 3-1: Representación de abscisas según Euler (traducción 1990)



[7] Euler, en su obra Introduction to Analysis of the Infinite, escrita en dos tomos, divide el texto en capítulos y cada capítulo en artículos.
[8] Desde el punto A son medidos los valores de x, se llama origen de las abscisas

a. Abscisa

Si x es una cantidad variable representada por la línea *RS* entonces un valor determinado real de x puede ser representado por un intervalo de la línea *RS.* En particular, si *P* es igual a *A,* el intervalo *AP* es vacío y representa el valor x=0.

El intervalo *AP* es llamado la abscisa, es decir las abscisas representan los valores determinados de x.

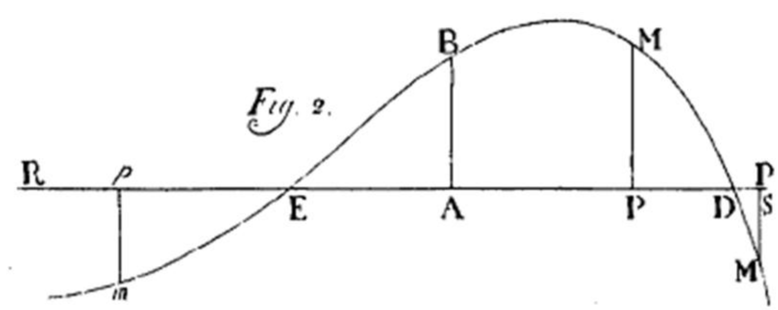
b. **Representación de valores positivos y negativos**

Si la línea recta se extiende indefinidamente en dirección opuesta desde el punto *A*, los valores negativos y positivos de x pueden ser representados. Los valores positivos se representan con cortes de intervalos a la derecha del punto *A* y los valores negativos con cortes de intervalos a la izquierda de *A*, además entre más lejos este el punto *P* a derecha de *A*, *x* será mayor, representado por el intervalo *AP*, mientras que entre más lejano esté el punto *P* a la izquierda de *A* el valor de x será mucho más reducido. Si *P* es idéntico a *A*, el valor de *x* es cero. Esa es la razón por la cual si P es movido a la izquierda, los valores de *x* serán menores que cero, es decir negativos, y los intervalos *AP* que se cortan a la izquierda de *A* representan valores negativos de *x* y los intervalos *AP* a la derecha de *A* son asignados por valores positivos. La dirección para representar los valores positivos de *x* es arbitraria, pero independiente de la dirección elegida, la dirección opuesta representará los valores negativos de *x*.

c. Representación de una función de x (ordenada)

Si la línea recta indefinida representa la variable *x*, *una función de x también puede representarse*. Sea *y* una función de x, por lo tanto *y* toma un valor determinado cuando se le asigna a *x* un valor determinado. Recuérdese que a un valor determinado de *x* le corresponde en la línea recta *RAS* un intervalo *AP* y una perpendicular *PM*, el intervalo *PM* corresponde al valor de *y* (ordenada). Si el valor de *y* es positivo, entonces *PM* se representará por encima de la línea *RAS* y si es negativo el intervalo se representará por debajo de esta línea. Ver figura 3-2.

Figura 3-2: Representación de ordenadas según Euler (traducción 1990)



Para todos los valores determinados de x sobre la línea *RS*, se podrá trazar una perpendicular *PM* que corresponde al valor de y. La forma de la función recta o curva depende entonces de la unión de todos los puntos extremos de esas perpendiculares. De otra manera, para cada punto P, la perpendicular PM es determinada y el punto M está sobre la curva, cada punto de la curva se obtiene de esta manera y si un punto no está en la curva, es porque no está definido por la función. Para cada punto de la curva hay un punto en la línea RS.

En el artículo 8, Euler dice que aunque diferentes curvas pueden ser descritas mecánicamente como un movimiento continuo de un punto que "presenta a los ojos la curva en su conjunto", es mejor considerarla a partir de una función pues es más apto el tratamiento analítico y se adapta más al cálculo.

En el artículo 14, similar al pensamiento de Descartes, afirma que *la naturaleza de una curva es expresada por una ecuación en dos variables x, y* de los cuales *x* denota la abscisa sobre el eje que tiene como origen el punto A, e, *y* es el ordinal perpendicular al eje[9]. Las abscisas y las ordenadas en su conjunto son llamadas *coordenadas ortogonales*.

En general, reduce el tratamiento de las curvas al de funciones. Divide las curvas entre algebraicas y transcendentales. La curva la llama algebraica si la naturaleza de la curva se puede expresar por una ecuación algebraica en las coordenadas (también se suele llamar geométrica) y la curva la denomina transcendental si su naturaleza es expresada por una ecuación transcendental en *x, y* o en una ecuación en la cual *y* es igual a una función transcendental de *x*. Esta es la principal división de las funciones continuas.

d. Tipos de curvas

- Continuas. Distinto al concepto que se tiene hoy en día, Euler hacía referencia a este tipo de curvas como aquellas que pueden ser expresadas como una sola función de *x.*

- Discontinuas o mixtas. Son aquellas que requieren de varias partes, diferentes funciones de *x* son requeridas en la expresión, se conforma de varias partes continuas.

e. Funciones univaluadas y multivaluadas

Iniciando este capítulo, se definieron las funciones univaluadas y multivaluadas; vistas ahora como curvas, una función univaluada es aquella para la cual un valor determinado de x, genera un único ordinal, es decir a cada abscisa le corresponde un único ordinal, por consiguiente a cada punto en el eje le corresponde un único punto en la curva y si el eje se extiende indefinidamente en ambas direcciones, entonces la curva también se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Para las curvas de funciones multivaluadas a continuación se muestran algunos casos.

[9] A diferencia del plano cartesiano que se conoce actualmente, en el que se utilizan dos ejes ortogonales de referencia, aquí solo se utiliza un eje de referencia.

Dada $y^2 = 2Py - Q, \quad y = P \pm \sqrt{P^2 - Q}$ (*P y Q* en función de x), para cada abscisa x corresponden dos ordinales *y*, ya sean reales ($P^2 > Q$), o complejos ($P^2 < Q$). Si $P^2 = Q$ los dos ordinales coinciden. En la figura 3-3, se observa que los ordinales son complejos entre *AC* y *AE*, en *E* los ordinales son iguales y en *A* los ordinales son reales diferentes. La curva consiste de partes y tienen la propiedad de que en cada punto del eje hay una perpendicular *MM* para el cual no corta la curva o la corta en dos puntos, excepto cuando estos coinciden. Figura 3-3.

Si la función es trivaluada, definida por la ecuación: $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$; *P, Q, R* en función de x, para cualquier valor de *x*, el ordinal *y* tiene tres valores con la característica de que todos son reales o solamente uno es real y los otros dos complejos. En este caso cada ordinal corta la curva en tres puntos o en solamente uno excepto cuando dos o incluso los tres puntos de intersección coinciden. En las figuras 3-4-a y 3-4-b se muestran curvas de este tipo, las cuales constan de una sola parte y dos partes respectivamente.

Figura 3-3: Representación de funciones bivaluadas, según Euler (traducción 1990)

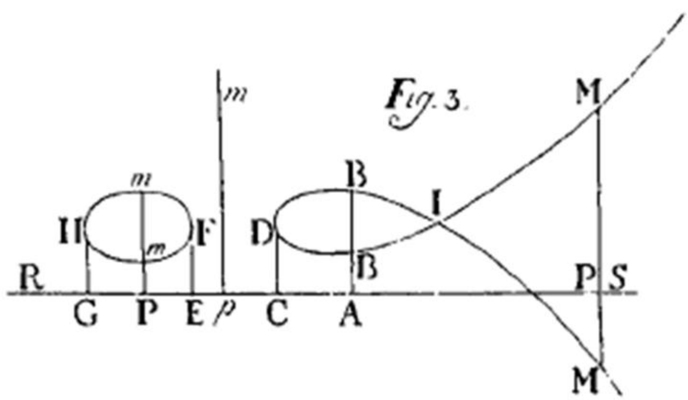
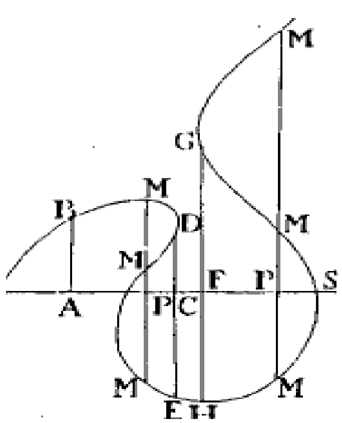
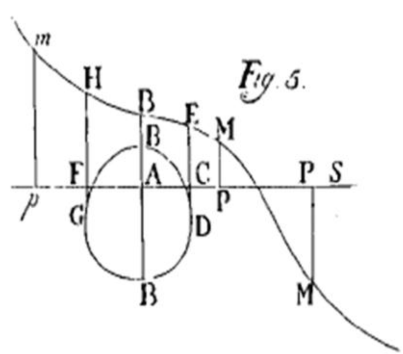


Figura 3-4: Representación de funciones trivaluadas según Euler (traducción 1990)



a



b

En coherencia con la ecuación cúbica $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$, para los que cada *P, Q, R (en función de z)* generan una única ecuación, se da el caso de que esta tenga una solución real y dos complejas (en la figura 3-4 corresponde a las abscisas con una sola ordenada), o, que las tres soluciones sean reales, en este caso corresponde a las abscisas de la figura 3-4 con tres ordenadas; en particular, en la figura 3-4 (a) se observa que hay tres ordenadas con la misma abscisa *AP*.

Mediante el estudio de estas ecuaciones y curvas, Euler llega a la conclusión de que si *y* es una función multivaluada o definida por una ecuación de la forma y^n entonces el número de valores reales de *y* será n, n-2, n-4, n- 6, etc.

f. Cambio de coordenadas

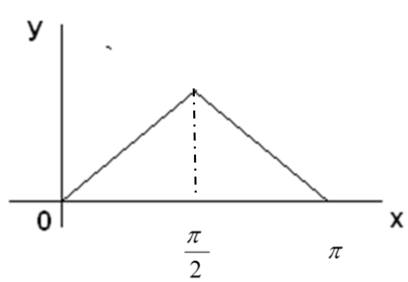
Debido a la arbitrariedad del eje de coordenadas y el origen de las abscisas, habrá un número infinito de ecuaciones que representan la misma curva. Por esta razón, se logra obtener la misma curva de ecuaciones diferentes, aunque, diferentes curvas siempre tienen ecuaciones distintas.

Euler muestra que *dada la ecuación de una curva, se puede encontrar respecto de otro eje cualquiera y otro origen de abscisas, una ecuación entre las coordenadas, que expresa la naturaleza de la misma curva: se encontrará de esta manera todas las ecuaciones que corresponden a la misma curva y será así más fácil juzgar la diversidad de las líneas curvas por medio de las ecuaciones.*

3.1.3 Función como una correspondencia arbitraria

El problema de la cuerda vibrante, relacionado con vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada en sus dos extremos, trabajo de física-matemática, muy significativo para Euler, conlleva a que generalice el concepto de función con el fin de que existiera una correspondencia biunívoca entre las funciones y las curvas. Recordemos que para Euler, las funciones discontinuas en general no se pueden expresar analíticamente y por consiguiente la definición dada inicialmente era demasiado limitada para encontrar solución a este problema. El tipo de función que mediaba en la solución de la ecuación del problema de las cuerdas vibrantes, no estaba necesariamente definido por expresiones analíticas, sino tal como lo expresara Euler *por un gráfico obtenido por el trazo libre de la mano.* Ver figura 3-5

Figura 3-5: Representación de una *función arbitraria* según Euler (Adaptación, Ruiz 1998)



$$y = x \quad en \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \pi - x \quad en \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Euler se ve entonces en la necesidad de construir una nueva noción de función de manera más general, vista como una correspondencia entre pares de elementos, enunciándola como sigue:

Aquellas cantidades que dependen de otras, es decir, aquellas cantidades que experimentan un cambio cuando otras cambian, se llaman funciones de estas cantidades; esta definición se aplica ampliamente e incluye todas las maneras en las que una cantidad puede estar determinada por otras. Si por lo tanto, x denota a una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependan de x de cualquier manera o estén determinadas por ella son llamadas funciones de ella.

3.2 Continuidad en la noción de función

La idea de función "mixta" o discontinua para Euler eran aquellas que no se podían representar por una única expresión algebraica, se refería a aquellas funciones definidas por expresiones analíticas distintas en regiones diferentes de un intervalo finito o infinito[10].

Cauchy en 1844, muestra que hay funciones de este tipo que se pueden representar por una sola ecuación, lo cual hace rebatible la discriminación de Euler entre funciones continuas y mixtas. En 1822, Fourier asegura que una serie trigonométrica puede ser usada para representar toda función mixta, llegando finalmente a demostrar que cualquier función y = f(x) se puede representar mediante una serie trigonométrica, serie que se conoce hoy en día con el nombre de *serie de Fourier.* Surge entonces un nuevo interrogante: ¿en qué condiciones es convergente la serie trigonométrica asociada a una función dada?, esta crea entonces la necesidad de hacer una nueva mirada a la noción de función independiente de toda forma de expresión analítica.

Se proponen nuevas definiciones, a saber:

Cauchy (1827): *Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las llamadas funciones de esta variable.*

Dirichlet en 1837 define función de una manera más general: *si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.* Puso a prueba su definición con la siguiente función que es discontinua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} c, \ si \ x \ es \ racional \\ d, \ si \ x \ es \ irracional \end{cases} \quad c, d \ \ dos \ reales \ \ distintos$$

[10] Hoy en día llamadas funciones a trozos

El ejemplo dado por Dirichlet, no es representable ni mediante una expresión analítica ni tampoco mediante una gráfica, se rompe entonces la idea de función como expresión analítica o curva, dando paso a la función como una correspondencia entre variables.

Con definiciones como estas, mucho más amplias y generales, se pierde el sentido geométrico, conllevando a que el análisis construya un nuevo marco teórico que sustente su propio rigor. De esta crisis nace la teoría de conjuntos.

3.3 La noción de función desde la teoría de conjuntos

A finales del siglo XIX nace la teoría de conjuntos con Cantor y comienza a tener una alta incidencia en el desarrollo de las matemáticas. Su impacto se extiende al desarrollo de la topología, el álgebra y el análisis funcional entre otros.

En cuanto a su influencia en la noción de función, se llega a una definición formal, como una aplicación, la cual predomina actualmente en los textos universitarios:

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y.

En 1939 el grupo de matemáticos Nicolás Bourbaki, le imprime un carácter de mayor formalidad, con la siguiente definición:

Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia a cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función[11].

Son varios los esfuerzos por precisar aún más la definición. De estos resulta la función como terna:

Se llama función a la terna f = (G, X, Y), en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

i) $G \subset X \, x \, Y$

ii) Para todo $x \in X$ *existe un y, solo un* $y \in Y$*, tal que* $(x, y) \in G$*. G es la gráfica de la función f.*

[11] Se pueden establecer algunas diferencias entre las definiciones dadas por Dirichlet y Bourbaki. Dirichlet, asume la función como una correspondencia entre variables, se infiere que el dominio y codominio se restringe al conjunto de números reales, mientras que Bourbaki, se refiere a una correspondencia entre dos conjuntos y el dominio y codominio no necesariamente son de números reales.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ *se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo y = f(x). Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma* $(x, f(x))$ *donde* $x \in X$*, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.*

$A \subset X$ *se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f. (Godement, 1971, p.63-64)*

Más adelante, Bourbaki llega a la definición de función como un conjunto de pares ordenados: *Una función* G *del conjunto* G *en el conjunto* F *se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF,* esto es que satisface: $G \subset E\text{x}F \text{ es una función } \Leftrightarrow (x, y) \in G \text{ y } (x, z) \in G \Rightarrow y = z$.

3.4 Sucesiones

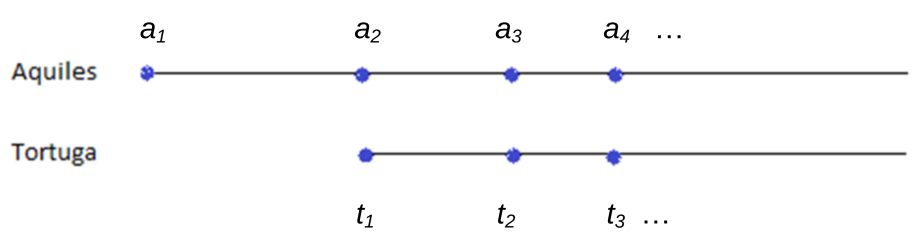
Se hace un breve recorrido sobre este tema dado que están inmersas nociones tales como: variable discreta, patrón[12] y distintas formas de representación, elementos que constituyen una buena herramienta didáctica para introducir la noción de función.

La época de la matemática griega se caracterizó por estar estrechamente relacionada con la geometría. Los matemáticos no solo se preocuparon por profundizar en estos estudios sino que también tuvieron presente aspectos estéticos y religiosos. Los pitagóricos (siglo VI a.C.) trabajaron sucesiones a partir de los números figurados, esto es, sucesiones de números representables geométricamente mediante una disposición de puntos, dentro de los que se destacan las sucesiones de números poligonales a los que se les asocia formas geométricas a partir de puntos que semejan polígonos regulares.

Más adelante, Zenón de Elea (495 a.C.- 430 a.C.), propuso cuatro problemas, actualmente conocidos como las *paradojas de Zenón*. La segunda paradoja se refiere a la carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se le ha dado una ventaja inicial, Zenón argumentaba que Aquiles no podría alcanzar a la tortuga. Supóngase que Aquiles arranca en la posición a_1 y la tortuga en la posición t_1, cuando Aquiles llega al punto $a_2 = t_1$ la tortuga se encuentra más adelante en la posición t_2, cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. El proceso continúa indefinidamente, de modo que la tortuga siempre estará adelante. Ver representación en la figura 3-6 (Stewart, 2008).

Sin duda alguna en esta paradoja está implícita la noción de sucesión, y la enésima posición de Aquiles, a_n corresponde a la fórmula: $a_n = \dfrac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Figura 3-6: Representación de la segunda paradoja de Zenón (Stewart, 2008)



Aunque los matemáticos de esa época no llegan a generalizaciones relacionadas con las sucesiones, en el siglo XVII Fermat deduce algunas propiedades y más tarde se convierten en interés de estudio de Pascal, Euler y Lagrange, pero sólo hasta el siglo XIX se obtienen las primeras demostraciones generales con Cauchy.

Actualmente, los textos universitarios que tratan el tema coinciden en definiciones, inicialmente poco formales, para luego llegar a la noción como función, lo cual permite que el lector estudiante haga una aproximación de manera natural. A continuación se exponen algunas de estas.

La palabra sucesión se utiliza para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n *entonces se dice que el conjunto ordenado* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ *define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del primer término* a_1*, del segundo término* a_2 *y en general del término* a_n (Apostol, 1988).

Un conjunto ordenado de números se llama una sucesión, en la sucesión $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $a_1 : primer\ número,\ a_2 : Segundo\ número, ... a_n : n - ésimo\ número$ *, el número* a_n *que ocupa el n-ésimo puesto se llama el n-ésimo elemento o n-ésimo término de la sucesión. La sucesión se nota abreviadamente* $A = \{a_n\}$*. Así una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto* ***N*** *de todos los números naturales, al número natural* $n \in N$ *le corresponde el n-ésimo término de la sucesión* (Takeuchi, 1990).

En el lenguaje sencillo, una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, ...$ *es un arreglo ordenado de números reales, uno para cada entero positivo. Formalmente una sucesión infinita es una función cuyo dominio e s el conjunto de enteros positivos y cuyo rango es el conjunto de números reales. En algunos casos, se extiende el concepto permitiendo que el dominio conste de todos los enteros positivos mayores o iguales a un entero específico como por ejemplo:* $b_0, b_1, ...$ *ó* $c_8, c_9, c_{10}, ...$ (Purcell, 2007).

Se puede considerar que una sucesión es una lista de números escritos en un orden definido: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ *El número* a_1 *recibe el nombre de primer término,* a_2 *es el segundo término y, en general,* a_n *es el n-ésimo término. Por tratarse de sucesiones infinitas* a_n *tiene un sucesor* a_{n+1}*. Para todo entero positivo n hay un número correspondiente* a_n *por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por lo regular se escribe* a_n *en lugar de f(n) para el valor de la función en el número n. La sucesión* $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ *se denota* $\{a_n\}$ *o* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(Stewart, 2008).*

Dentro de la teoría de conjuntos se formaliza la definición de sucesión en los números reales como una función especial del conjunto de los números naturales sobre el conjunto de los números reales (*N* en *R*), de la siguiente manera:

Sea $A \subseteq R$ un subconjunto de número reales y $f: N \rightarrow A$ una función, es decir $para\ todo\ n \in N,\ existe\ f(n)\ y\ f(n) \in A$. Al conjunto $\{f(n)\} \subseteq A$ se le llama una sucesión en A.

Se afirma también desde la teoría de conjuntos que sí $f(n) \in A$, entonces $f(n) = a_n$, y, a_n se le llama n-ésimo término de la sucesión.

Históricamente una de las sucesiones más reconocidas es la sucesión de Leonardo de Pisa[13] (siglos, XII y XIII) en la que está implícita la noción de recurrencia, actualmente definida como sigue:

Una relación de recurrencia para una sucesión $\{X_n\}$ es una fórmula que permite obtener cada elemento X_n de la sucesión, a partir de cierto $n_0 \in N$, en función de uno o más de los términos que lo preceden[14]

Se propone entonces recurrir a la noción de sucesión como un conjunto ordenado de números para hacer una aproximación al concepto de función. Desde este punto de vista, el estudiante se verá en la necesidad de identificar patrones, describir y construir el término genérico a través de una expresión algebraica, acciones estas que generan procesos de abstracción y de generalización, fundamentales no sólo en la comprensión del concepto de función sino en el desarrollo del pensamiento matemático.

---

[13] Llamada sucesión de Fibonacci $\{1,1,2,3,5,8,\ldots\}$

[14] Ejemplos particulares de una relación de recurrencia son la progresión aritmética en la que $a_n=a_0+dn$ (d constante) y la progresión geométrica en la que su elemento genérico es de la forma $a_n=a_0r^n$.

4. Capítulo 4. La noción de función en el aula de clase

La tendencia actual en el aula de clase es dar prioridad a la noción de función como una correspondencia entre dos variables o una correspondencia entre dos conjuntos. Se plantea una definición que, generalmente se respalda con ejemplos que parten del registro algebraico, para luego obtener una tabla de datos que sirve como soporte para construir la gráfica. Posteriormente, se estudian algunas generalidades[15] y finalmente se abordan las funciones elementales y se concluye con aplicaciones.

Prueba del enfoque dado al tema, se aprecia en las definiciones que se encuentran en diversos textos universitarios, entre otras:

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto E. (Stewart, 2008).

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto –denominado dominio- un solo valor f(x) de un segundo conjunto. (Purcell, 2007).

Una función es una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A, exactamente un objeto en un conjunto B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el conjunto de objetos asignados en B se denomina Rango. (Hoffman, 2001).

Intuitivamente consideramos que una cantidad y es una función de otra cantidad x si existe una regla por medio de la cual se asigne un único valor a ***y*** *para cada valor correspondiente de* ***x*** (Leithold, 1988).

Aunque éstas definiciones conforman solo una pequeña muestra de la manera como se incursiona en el tema, con certeza, hay buena probabilidad de que gran parte de los textos que se sugieren para el desarrollo de la materia, coincidan en abordar la noción de función de una manera formal, distanciada del desarrollo histórico y epistemológico en el que los conceptos de variabilidad y cambio son los que constituyen su fundamento. En muchos de estos, se observa también énfasis a través de ejemplos que incluyen únicamente variables continuas[16], descartando la posibilidad de manipular variables

[15] Dentro de las generalidades de funciones en una variable, se encuentran los conceptos de: dominio, rango, ceros, imagen y pre-imagen.

[16] Intuitivamente una variable es continua cuando su conjunto de referencia es el conjunto de los números reales.

discretas[17] sobre las que, su desarrollo histórico muestra una trascendencia significativa en las llamadas sucesiones y progresiones, conceptos que juegan un papel importante en la evolución de la noción de función. Según Martínez (2008), Euler antes de definir función define “término general” (1730-31) en un texto dedicado al estudio de las progresiones como: *una fórmula que no sólo involucra cantidades constantes sino también otra cantidad no constante, digamos n, que da el orden o índice de los términos.*

Uno de los objetivos de Luisa Ruiz (1998) en su investigación es evaluar las concepciones[18] de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. En esa dirección concluye que *el sistema de enseñanza no promueve el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos*. Además concluye que, dentro de las concepciones que tienen los estudiantes acerca de la noción, están: la función como algoritmo de cálculo, expresión algebraica, gráfica (construida a partir de una fórmula, ideograma (algebraico y gráfico), correspondencia entre dos conjuntos numéricos y transformación.

En particular, los resultados de las pruebas diagnósticas aplicadas a los estudiantes de primeros semestres del Politécnico Grancolombiano, institución universitaria muestran que hay concepciones similares a las mencionadas por Ruiz (1998) y se detectan claramente falencias relacionadas con la competencia de dominio variacional, esencial en la solución de problemas en distintas áreas del conocimiento. Dentro de las mayores dificultades que presentan los estudiantes está la traducción de un tipo de representación a otra, especialmente cuando se trata de conseguir el modelo algebraico de una situación específica a partir de la tabla, o la gráfica.

Hacer una primera mirada a los objetos que cambian y como cambian, con seguridad abren el camino para comprender la noción de función. Vale la pena invertir parte del tiempo para que los estudiantes afronten problemas de situaciones matemáticas y extra-matemáticas, iniciando con la manipulación de variables discretas, de manera natural y consecuente con el desarrollo histórico para luego pasar a lo continuo. Se trata de fortalecer el concepto de variabilidad y dependencia, como ambientación previa a la noción formal de función. En este sentido, se apuesta a la modelación matemática, de la cual se hablará en el siguiente capítulo, como herramienta para alcanzar tal fin.

---

[17] Intuitivamente una variable es discreta cuando su conjunto de referencia es el conjunto de los números enteros.

[18] Acción de concebir. Formar o empezar a tener ciertas cosas en la mente

5. Capítulo 5. Desarrollo didáctico

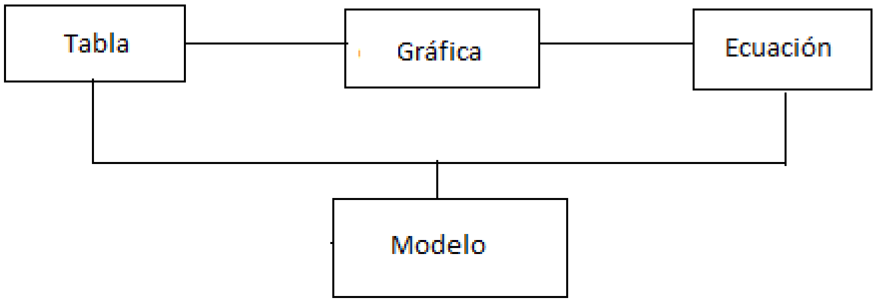
Distintas definiciones de función se han generado a lo largo de varios siglos, y cada una de ellas ha permitido resolver problemas de la época (Ruiz, 1998). En este largo trayecto se observa con claridad que su génesis está relacionada con el movimiento, y que los esfuerzos iniciales se orientaron a dar respuesta a problemas relacionados con fenómenos reales, privilegiando la noción como una dependencia, donde el tiempo siempre es la variable independiente. Se emplea luego el cálculo diferencial para estudiar estos mismos problemas, dando paso a las expresiones analíticas y finalmente se llega a la noción conjuntista que es la que se implementa actualmente con mayor fuerza en los primeros semestres de educación superior.

Las investigaciones revisadas en cuanto al aprendizaje de las funciones, hablan de las dificultades que presentan los estudiantes, las cuales están relacionadas, en primer lugar, con el enfoque distanciado del análisis de la variabilidad y de fenómenos sujetos a cambio, sin considerar sus orígenes epistemológicos; en segundo lugar con los procesos algorítmicos implementados que conllevan a considerar una función como una fórmula mecánica, a construir tablas sin significado, a hallar dominios como un simple requisito, o, a graficar sin interpretar; y en tercer lugar con la carencia de una herramienta que amplíe la capacidad de visión, de precisión, de representación y traducción de una a otra.

Explotar el carácter modelizador de la noción de función en diversas situaciones, dando cabida a un proceso más dinámico, puede reducir esas dificultades y posibilitar un mejor acercamiento a la noción de función de tal manera que los estudiantes se encaminen hacia la generalización y desarrollen un mejor pensamiento matemático. Para tal fin, se empleará como soporte el diagrama de representación (figura 5-1) en el que la modelación se usará como herramienta para este aprendizaje.

Los talleres que se proponen incluyen estas representaciones y tienen presente las nociones de cambio, variabilidad y dependencia. Se inicia con el manejo de tablas, por ser de fácil interpretación desde el punto de vista de una correspondencia (Azcárate, 1996) y se emplean variables discretas, cuyas instancias resultan (ver primera actividad de cada taller) de la observación de regularidades de figuras. Con estas actividades se pretende un primer acercamiento a la notación simbólica, gráfica, noción de variable discreta, noción de función mediada por la definición de sucesión y la construcción de una fórmula con base en la noción de término general, que para sucesiones polinómicas resulta del análisis de diferencias finitas[19].

Diagrama 5-1 Representaciones usadas para obtener el modelo (adaptación. Azcárate, 1996)



En la actividad 5-2, además de obtener el modelo de la situación planteada, se pretende también analizar cómo incide la variación de los parámetros: *a, b* en la fórmula y en la gráfica de la sucesión lineal (definición 5-1). En la actividad 5-3, se da paso al manejo de variables continuas y se espera encontrar diferencias entre una relación lineal y una relación directamente proporcional así como una aproximación a la función a trozos. Las actividades 5-6 y 5-7 fueron diseñadas en un contexto geométrico, dando prioridad a la noción de variación así como a distintas formas de representación en los que se usan elementos y propiedades de la geometría para construir el modelo matemático.

En los últimos talleres se sugiere una práctica de ambientación a las funciones exponencial y de recurrencia. En cuanto a la primera, en la actividad 5-9 se retoman las sucesiones para llegar a un modelo exponencial y observar el comportamiento gráfico, en la actividad 5-10 se induce la construcción de la función que modela la situación a través de la linealización de los datos suministrados en una tabla y en la actividad 5-11 se da una ecuación general para que a través de la información dada se establezcan relaciones y se calculen las constantes que definen el modelo correspondiente. En cuanto a la segunda, en la actividad 5-12, a través de la información que se extrae de la figura y de cálculos apropiados se hace una aproximación al significado de variable implícita y en el problema 5-13 se expone una situación particular de la sucesión de Fibonacci para encontrar la ecuación general.

---

[19] Si $\{X_n\}$ es una sucesión de números reales, se llama una sucesión de primeras diferencias a la sucesión cuyo término enésimo está definido por la igualdad $D_{1n} = X_{n+1} - X_n,\ con\ n = 0,1,2,3...$

Si $\{X_n\}$ y $\{D_{1n}\}$ son sucesiones de números reales y primeras diferencias respectivamente, se llama una sucesión de *k*- diferencia a la sucesión dada por la relación de recurrencia: $D_{kn} = D_{k-1\ n+1} - D_{k-1\ n},\ con\ n = 0,1,2,3...;\ k\ el\ orden\ de\ la\ diferencia,\ k \geq 2$

5.1 Modelación

La matemática en la construcción de modelos

Según Blomhoj (2004), *un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Esto implica, en primer lugar, que cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. En segundo lugar, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados.*

De acuerdo con este criterio[20], en cada modelo se establece una estrecha relación entre la matemática y una situación real. Usualmente se presentan situaciones que no son fáciles de analizar desde del punto de vista de tendencias y comportamientos, y es aquí donde la matemática interviene con las relaciones y sus propiedades para comprender o construir modelos, que permitan verificar los datos, predecir y explicar una realidad. La modelación se convierte entonces en una herramienta poderosa para motivar el aprendizaje de las funciones, dado que a partir de situaciones matemáticas o extra-matemáticas surge la necesidad de relacionar variables, generalizar y predecir, procesos estos fundamentales en la comprensión de la noción de función.

Cuando se hace referencia a los modelos de funciones elementales, vienen a colación distintas formas de representación como son una tabla de valores, una gráfica o una fórmula. A partir de la tabla, se logra construir fácilmente una gráfica mediante la cual se puede hacer un reconocimiento del modelo, sin desconocer que la información es insuficiente para precisar aspectos generales de la función; en el caso de los comportamientos polinómicos, el concepto de diferencias (Huertas, 1996) es una buena herramienta para acercarse con precisión tanto al modelo como a la ecuación. La gráfica aunque nos brinda una visión más amplia y general que la tabla, sigue siendo una aproximación, con la característica de que se pueden estimar valores de la variable dependiente para valores específicos de la variable independiente, intervalos de crecimiento y decrecimiento, continuidad, periodicidad, etc. Si se conoce la ecuación general, se requiere del conocimiento algebraico para obtener los elementos o parámetros que definen el modelo. Una vez construida la fórmula se logran con precisión los elementos que se estiman desde la gráfica, pero sigue siendo la representación más compleja y abstracta (Azcárate, 1996).

En los talleres que se proponen a continuación, se pretende hacer un acercamiento a la noción de función como modelo, dando prioridad al concepto de variable, coherente con

[20] Vale la pena diferenciar los conceptos de modelación y modelización. El último es un proceso más general que incluye varias etapas previas a la modelación, como son la formulación del problema que se obtiene mediante un proceso que permita identificar las características de la realidad percibida que será modelizada, sistematización (selección de los objetos relevantes y relaciones), traducción de los objetos y relaciones al lenguaje matemático, uso de métodos matemáticos, interpretación y evaluación de la validez del modelo (Blomhoj, 2004)

el desarrollo histórico y antagónico a la forma usual en el aula de clase de hoy en día, cuyas limitaciones se generan cuando se presentan las diferentes representaciones del concepto de función, no siempre veraces y distanciadas de problemas de fenómenos reales imposibilitando el análisis del concepto de cambio a través de la noción de dependencia y variabilidad (Ruiz, 1998).

La propuesta consiste en inducir el concepto de función a través de problemas matemáticos y extra-matemáticos, teniendo en cuenta el comportamiento de los valores de una tabla, la gráfica o la ecuación y usando como herramienta la modelación matemática. Se espera crear el ambiente propicio para que en cursos posteriores se llegue a su formalización, en contraposición a lo que usualmente se hace, partiendo de la formalización y la teoría de conjuntos se trabaja el concepto para llegar posteriormente a la aplicación.

5.2 Taller 1. Acercamiento a la función lineal

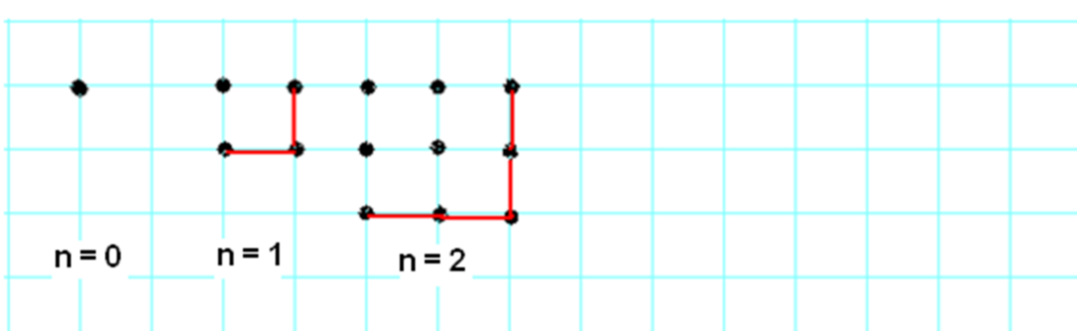
Se propone iniciar en un contexto discreto, de la tabla de datos a la fórmula para luego llegar a la ecuación como modelo. En cuanto al modelo lineal, se hace énfasis en la interpretación y definición de los parámetros teniendo presente la noción de cambio.

5.2.1 Actividad 5-1

Objetivos específicos:

- Determinar la regularidad (ley) que siguen los términos de la sucesión planteada.
- Aplicar la ley encontrada para hallar otros elementos de la sucesión.
- Usar diferencias para encontrar el valor real **a** que define el comportamiento lineal de la forma $\mathbf{X_n = an + b}$
- Encontrar el elemento genérico
- Emplear distintas formas de representación de una sucesión

a. Observe las figuras, dibuje las dos figuras que siguen.



b. Complete las tablas, si se sabe que **n** representa el lugar que ocupa la figura, n=0,1,2,3,…, y, X_n la cantidad de puntos de la figura (posición n) en la última fila y última columna (sobre la línea roja).

n	0	1	2	7		22
X_n	1	3			15	

Algunos elementos de esta sucesión son:

Notación de elementos particulares	En palabras
X_0 =	
X_2 =	Número de puntos de la figura de la posición 2 que cumplen la condición
X_7 =	
X_{11} =	

c. Empleando la definición de diferencia[21], complete las siguientes tablas:

Algunas diferencias	Describir procedimiento en palabras
D_{10}=	
D_{11}=	
D_{15} =	
D_{18}=	

N	1	2	3	4		
X_n	1	3				
D_{1n}	2					

Definición 5-1. Si la sucesión de las primeras diferencias es constante, el enésimo término de la sucesión inicial, es de la forma: $\mathbf{X_n = an + b}$; n = 0,1,2,3,…; donde a y b son números reales fijos[22].

---

[21] Los elementos calculados mediante la fórmula $D_{1n} = X_{n+1} - X_n,\ con\ n = 0,1,2,3...$ conforman la sucesión llamada de primeras diferencias.

d. Si **b** representa el punto inicial $\mathbf{X_0}$ de la sucesión y **a** el cambio[23] que experimenta la variable $\mathbf{X_n}$ cada vez que se aumenta una posición, ¿cuáles son los valores de **a** y **b** para esta sucesión? Justifique.

e. Utilizando los valores de a, b y n, calcule X_{21}, X_{22}

f. Halle el elemento genérico X_n

g. ¿Se puede afirmar que la variable[24] X_n depende de la variable independiente n? Explique.

h. En un plano cartesiano represente los elementos de esta sucesión. ¿Tiene sentido unir estos puntos?, ¿cuál es la naturaleza de estas variables?

i. ¿Quedan representados los valores de a y de b en esta gráfica? Indíquelos.

5.2.2 Actividad 5-2

Objetivos específicos:

- Determinar e interpretar los valores de a y b, en un contexto específico, cuando la relación entre las variables (independiente y dependiente) es de tipo lineal, $\mathbf{X_n = an + b}$

- Variando los parámetros a y b, en el contexto del problema, hacer interpretaciones y observar la incidencia tanto en la fórmula como en la gráfica.

Si los costos totales de producción C_n, en pesos, de producir **n** cajitas decorativas se comportan linealmente, significa que a partir de unos costos iniciales fijos **b**, los costos totales varían en **a** pesos por cada cajita adicional producida.

a. Construya una tabla que relacione las variables C_n y n, si los costos fijos son de $30000 y cada vez que se produce una cajita adicional, los costos totales se aumentan en $5000.

b. Construya un gráfico que represente la anterior situación.

---

[22] Si la sucesión tiene este comportamiento, se dice que es de tipo lineal y cada par de valores a, b define una sucesión en particular.
[23] Se define el cambio de la variable $\mathbf{X_n}$ de una posición **k** a una posición **j, j >k** como la diferencia: $\mathbf{X_j - X_k}$**;** j, k=0,1,2,3,…,n
[24] Intuitivamente una variable es una cualidad susceptible de asumir distintos valores. En términos algebraicos es un símbolo (generalmente una de las últimas letras del alfabeto) mediante el cual representa los elementos de un conjunto de referencia.

c. ¿Qué representa $C_{n+1} – C_n$?, ¿cómo se comportan estas diferencias?, en el contexto del problema, ¿qué significa?

d. Para el caso dado, ¿cuál es la fórmula que determina los costos totales en función de las cajitas que se producen?

e. Si se mantienen los costos fijos y los costos totales de producir una cajita adicional ahora disminuyen en $5000, ¿cuál es la nueva fórmula? y ¿cuál la nueva gráfica? (sugerencia: construir una tabla).

f. Manteniendo los costos variables por unidad en $5000, y considerando que los costos fijos son de $15000, complete la tabla y grafique. Escriba la nueva fórmula y verifique.

N	0	1	2	3	7	15
C_n						

h. Compare las distintas gráficas, escriba sus conclusiones.

5.2.3 Actividad 5-3

Definición 5-2. Si $x_1, x_2, x_3,...$ son valores de la variable *X*, y, $y_1, y_2, y_3,...$ son valores de la variable *Y*, se dice que la relación entre las variables *Y, X* es directamente proporcional si se cumple la relación: $\frac{y_j}{x_j} = k$, o bien, $y_j = kx_j$ para todo *j, j* =1,2,3,…; *k* es llamada constante de proporcionalidad.

Objetivos específicos:

- Considerando incrementos no constantes de la variable independiente, determinar valores específicos de la variable dependiente.

- A partir de los datos de la tabla, identificar los valores de los parámetros a y b, en el modelo lineal.

- Establecer diferencias entre una relación lineal y una relación directamente proporcional.

- Condicionar la variable independiente para construir una fórmula que contemple todas las posibilidades.

Un ciclista hace un entrenamiento en una pista, en tres tramos, de la siguiente manera: durante la primera hora y media avanza aumentando la velocidad en forma constante; durante los siguientes 24 minutos mantiene la velocidad que alcanzó al finalizar la primera parte y finalmente para terminar su entrenamiento disminuye la velocidad en forma constante durante 30 minutos, hasta quedar quieto.

Tramo 1

a. La siguiente tabla suministra información acerca de la velocidad (Km/h) respecto al tiempo t en horas, durante la primera parte del entrenamiento, complete la tabla.

T	0	0,2	0,4	0,8	1,1	1,5
V_t	0	8				

b. Determine si la velocidad se comporta linealmente respecto al tiempo. Explique el criterio empleado.

c. ¿Cuál es la fórmula para encontrar la velocidad que lleva el ciclista en cualquier instante?, ¿cuál es la naturaleza de las variables V_t y t?

d. ¿Cuál es la velocidad del ciclista cuando ha transcurrido media hora?

e. ¿Aproximadamente en qué momento el ciclista alcanza una velocidad de 38 km/h?

f. Si la fórmula es de tipo lineal, ¿cuál es el valor del parámetro a y cómo se interpreta en este contexto?

g. En este primer tramo es correcto afirmar que la velocidad es directamente proporcional al tiempo?, explique. Si así es ¿cuál es la constante proporcionalidad?

Tramo 2

Construya una tabla que relacione las variables en mención para la segunda parte del recorrido. Haga la prueba de diferencias de velocidades, ¿qué concluye?

a. Construya una fórmula para la segunda parte del recorrido.

b. ¿Cuál es el cambio en la velocidad? Explique.

c. En este segundo tramo ¿es correcto afirmar que la velocidad es directamente proporcional al tiempo?, explique.

Tramo 3

a. Construya una tabla y una fórmula para la última parte del recorrido. Haga la prueba de diferencias de velocidades, ¿qué concluye?

b. En este tramo ¿es correcto afirmar que la velocidad es directamente proporcional al tiempo?, explique.

c. Indistintamente de los casos considerados, ¿qué nombre le daría al parámetro a? ¿por qué?

d. ¿Qué diferencias encuentra entre una relación lineal y una relación directamente proporcional?

e. Haga un gráfico que represente la velocidad en función del tiempo mostrando las tres partes del entrenamiento. Escriba una fórmula que contemple todas las posibilidades.

5.3 Taller 2. Acercamiento a la función cuadrática

Se inicia con el manejo de tablas de variables discretas, cuyas instancias se generan a partir de la observación de regularidades, para obtener luego el modelo y la fórmula general utilizando el concepto de cambio (diferencias). Se proponen también actividades en un contexto geométrico, donde intervienen variables continuas, dando prioridad a la noción de variación así como a distintas formas de representación que requieren de propiedades de la geometría.

Definición 5-3. Una sucesión polinomial cuadrática es aquella cuyo término enésimo está definido por la igualdad $X_n = an^2 + bn + c$ donde *a, b, c* son números reales cualesquiera fijos, $a \neq 0$.

Definición 5-4. Si $\{X_n\}$ es una sucesión de números reales, se llama una sucesión de segundas diferencias[25] a las diferencias de la sucesión $\{D_{1n}\}$. El término enésimo de esta sucesión se nota $\{D_{2n}\}$.

5.3.1 Actividad 5-4

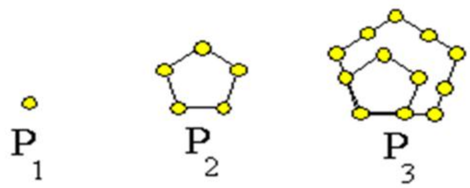
Objetivos específicos:

---

[25] Caso particular de la definición general: si $\{X_n\}$ y $\{D_{1n}\}$ son sucesiones de números reales y primeras diferencias respectivamente, se llama una sucesión de *k*- diferencia a la sucesión dada por la relación de recurrencia: $D_{kn} = D_{k-1\ n+1} - D_{k-1\ n},\ con\ n = 0,1,2,3...;\ k\ el\ orden\ de\ la\ diferencia,\ k \geq 2$

- Usar el concepto de diferencia para construir un modelo cuadrático
- Emplear la fórmula para calcular otros elementos de la sucesión

a. Dibuje las dos figuras siguientes



N	1	2	3	4	6	10
P_n	1	5				
D_{1n}	4					
D_{2n}						

¿Qué diferencia hay entre las dos últimas sucesiones $\{D_{1n}\}$ y $\{D_{2n}\}$? ¿De qué tipo son? Si se sabe que $\{P_n\}$ es una sucesión cuadrática, ¿qué diferencias encuentra con la sucesión lineal?

c. Para la sucesión $\{P_n\}$, ¿cuál es el término enésimo P_n? (sugerencia: plantee un sistema de ecuaciones lineales con 3 ecuaciones, variando n en la fórmula: $P_n = an^2 + bn + c$)[26]

d. Emplee la fórmula para hallar P_{20}. Explique con palabras a que figura corresponde.

5.3.2 Actividad 5-5

Objetivos específicos

- A partir de una tabla construir el modelo, y luego emplear el modelo para encontrar otros datos.
- Emplear distintas formas de representación

[26] Cada terna (a, b, c) solución de este sistema, genera una única sucesión cuadrática

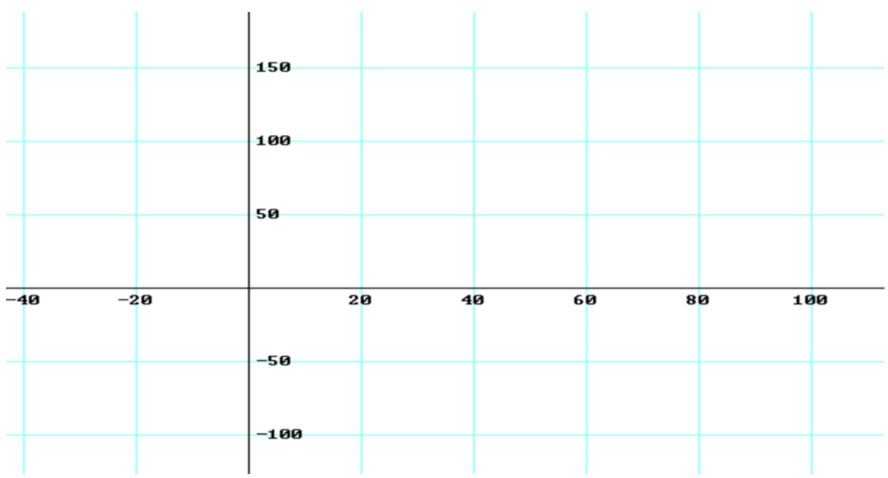
Un productor agrícola, registró en una tabla las utilidades (en millones de pesos) de producir y vender **x** toneladas de trigo.

Bultos de trigo: x	1	2	3	4	5	6	7
Utilidades en millones de pesos: U(x)	-1.6	6.6	14.6	22.4	30	37.4	44.6

a. Utilizando el criterio de las diferencias expuesto en el punto anterior, encuentre el modelo (fórmula) que relaciona la utilidad total dependiendo de las toneladas de trigo.

b. Halle e interprete $U(_0)$ y $U(_{70})$.

c. En el plano cartesiano dado, grafique la función de utilidad. Halle e interprete los valores de x tales que U(x) = 0.



d. Estime el nivel de producción y venta donde se obtiene la mayor utilidad.

5.3.3 Actividad 5-6

Objetivo específico

Desde el contexto geométrico, emplear el concepto de variación y distintas formas de representación, y a partir de estas lograr deducir una fórmula que relacione las variables que intervienen.

a. Se desea que el perímetro de un rectángulo sea de 36 cm. Estime:

- Que pasa con el ancho del rectángulo mientras se disminuye el largo.
- Que ocurre con el área del rectángulo a medida que se disminuye el largo y se aumenta el ancho.

b. Para una dimensión dada **a** del rectángulo, escriba la dimensión **b**, el perímetro y el área que corresponde.

Dimensión: a	Dimensión: b	Perímetro	Área
1.5	16.5	36	24.75

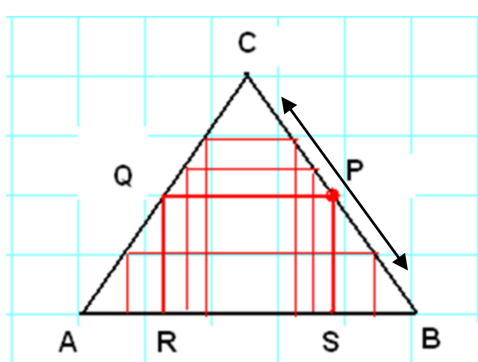
- Trace una gráfica que evidencie la relación entre la longitud a de un lado.
- De acuerdo con la información de la tabla y la gráfica, plantee un modelo matemático que relacione el perímetro con la longitud **a** del rectángulo.
- Trace la gráfica que evidencie la relación entre la longitud a de un lado con el área A del rectángulo correspondiente.
- Escriba la fórmula que relaciona el área del rectángulo con la dimensión **a** del rectángulo.

5.3.4 Actividad 5-7

Objetivo específico:

Usar elementos y propiedades de la geometría para construir un modelo matemático.

Dado un triángulo equilátero, ABC, de lado 20 cm, al marcar un punto cualquiera P sobre uno de los lados, se obtiene el rectángulo PQRS



a. Haga una gráfica que represente la variación del área del rectángulo según la posición del punto P.
b. Encuentre una fórmula que represente la variación anterior.

5.4 TALLER 3. Acercamiento a funciones polinómicas

Objetivos específicos:

- Emplear el criterio de diferencias para encontrar un modelo polinómico.
- Dar una definición general de la sucesión de diferencias $\{D_{kn}\}$ a partir de una sucesión $\{ X_n \}$

Definición 5-5*.* Una sucesión polinomial de grado k, es aquella cuyo término enésimo es de la forma: $X_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$, a_k no nulo.

5.4.1 Actividad 5-8

El crecimiento durante los primeros estadios de desarrollo de larvas de peces marinos es influenciado por la disponibilidad de alimento adecuado posterior al agotamiento de vitelo (Lasker, 1965)[27]. En la siguiente tabla se suministra información acerca de la tasa de crecimiento (longitud L en milímetros) a la edad de t días.

T	0	1	2	3	4	5
L(t)	0.7	2.0	2.8	3.2	3.3	3.2

a. Pruebe que estos datos corresponden a una sucesión polinomial de grado 3, para ello construya las sucesiones de diferencia $\{D_{1n}\}$, $\{D_{2n}\}$, $\{D_{3n}\}$.

b. Encuentre la fórmula y determine los días en que la larva aumenta su desarrollo o disminuye su desarrollo.

c. ¿Qué tipo de variables intervienen en el modelo?

d. Haga una conjetura general que relacione las sucesiones polinomiales de grado k con las sucesiones de diferencias $\{D_{1n}\}$, $\{D_{2n}\}$, $\{D_{3n}\}$,...$\{D_{kn}\}$

[27] http://www.calcofi.org/publications/calcofireports/v27/Vol_27_Quinonez___Gomez.pdf. 1986

5.5 TALLER 4. Acercamiento a la función exponencial

Para estudiar las características del modelo exponencial se proponen tres problemas. En el primero se parte de la observación de regularidades en una secuencia de figuras para obtener la fórmula y la gráfica, en el segundo, se usa el concepto de linealización para obtener el modelo algebraico y gráfico, y en el tercero se espera que a través de la ecuación dada y la información suministrada en una tabla de datos se construya el modelo y se interpreten las constantes calculadas.

5.5.1 Actividad 5-9

Objetivos específicos:

- Por medio de la observación de la secuencia de las figuras y la regularidad que se establezca a través de la tabla de datos, determinar el elemento genérico.

- Estudiar el comportamiento de una relación exponencial.

a. Completar la tabla relacionando la cantidad de triángulos blancos, con la posición que ocupa la figura.

Posición 1 Posición 2 Posición 3

Cartilla matemáticas. Politécnico Grancolombiano, 2011

Posición	1	2	3	4	5	6
Cantidad de triángulos blancos	1	3				

b. Analizar y responder:

- ¿Qué tipo de números y cantidades se usaron?

- Encuentre la fórmula que relaciona la cantidad de triángulos blancos con la posición que ocupa la figura.

- Utilizar la anterior relación para determinar X_{10}, ¿qué representa esta cantidad?

- ¿Qué nombre recibe este tipo de sucesión? ¿512 pertenece a esta sucesión? Justifique.

c. Construya una gráfica que relacione las variables

5.5.2 Actividad 5-10

Objetivos específicos

- Obtener un modelo exponencial que relacione las variables que intervienen en el problema.

- Usar el concepto de logaritmo para obtener una linealización de los datos y finalmente determinar el modelo exponencial.

Definición 5-6. Dos variables *x, y* se relacionan exponencialmente si $y = a^x$, *a* real positivo, y, $a \neq 1$

La siguiente tabla suministra información acerca de un experimento realizado en el laboratorio para reproducir la ley de Torricelli [Se toma un recipiente con un volumen determinado de agua, se hace un agujero en el fondo. Se toman los tiempos de vaciado][28]

Unidades de Volumen	1	2	3	4	5
Tiempo de vaciado (seg)	29,33	51,68	68,42	86	103,27

a. Realice una gráfica del tiempo de vaciado respecto al volumen. ¿Cuál es el comportamiento de esta gráfica?

b. Bajo el supuesto de que los datos se ajustan a un modelo exponencial[29], se sugiere hacer una linealización, que consiste en considerar los logaritmos de los datos experimentales y a partir de estos encontrar la función lineal para luego obtener el modelo exponencial. Construya la tabla de logaritmos y halle el modelo lineal, corrobore con una gráfica.

[28] El experimento se realizó directamente en el laboratorio, considerando un orificio de 3.5 mm de diámetro en la parte inferior de la botella y considerando diferentes volúmenes de llenado. La tabla muestra solo algunos de los registros del experimento.
[29] Se recomienda utilizar papel semi-logarítmico para representar los datos experimentales, corroborar la linealización y validar el modelo.

c. ¿Cuál es la expresión exponencial que relaciona el tiempo de vaciado con el volumen del llenado cuando el diámetro del orificio permanece constante?

5.5.3 Actividad 5-11

Objetivos específicos:

- Usar la información de la tabla para encontrar los elementos necesarios que definen el modelo del rendimiento de un atleta.
- Encontrar nuevos datos.
- Interpretar las constantes del modelo.

Desde el momento en que un atleta efectúa el primer paso hasta el momento en el cual ya no puede incrementar más su velocidad de carrera, es considerada la fase más importante en el rendimiento de un deportista. Está determinado que cuanto más larga es la capacidad de aceleración, tanto mejor es el registro del deportista. De acuerdo con análisis matemáticos (Henry y Trafton 1951), la curva de la velocidad en una carrera de 100 m, tiene un comportamiento exponencial de la forma:

$$V(t) = V_{\max}(1 - e^{kt}), \quad k < 0$$

La siguiente tabla registra los datos de la velocidad de un atleta en el instante t, en una carrera de los 100 metros llanos.

Tiempo en segundos: t (seg)	0	4	8	10.5
Velocidad en el instante t (m/seg)	0	8.4	10.9	

a. Construir el modelo para este atleta.

b. Si este atleta hizo su carrera en 10.5 seg, ¿a qué velocidad llegó a la meta?

c. Interprete la constante k. en el contexto del problema.

d. ¿Cuál es la naturaleza de las variables que intervienen en el problema?

e. Identifique la variable dependiente y el conjunto de valores donde queda definida.

5.6 TALLER 5. Acercamiento a funciones de recurrencia

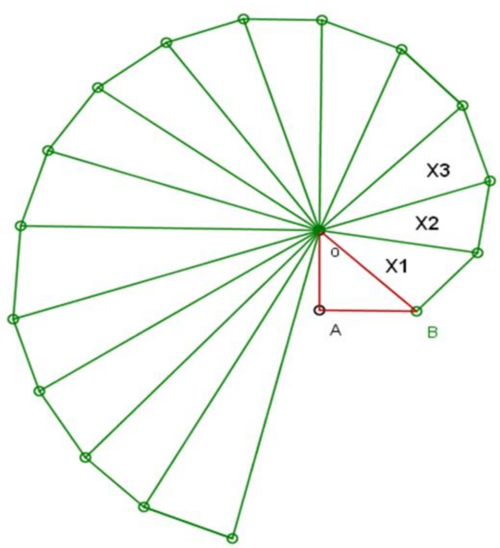
Con este taller se propone un primer acercamiento a la noción de variable implícita mediada por las ecuaciones de recurrencia. Con el primer problema, en un contexto geométrico, se espera obtener el modelo y con el segundo problema se espera además de construir el modelo, determinar cómo cambia cuando se hacen cambios en las variables que intervienen.

5.6.1 Actividad 5-12

Objetivos específicos:

- Distinguir el significado de variable implícita.
- Encontrar un modelo para la situación planteada.

En la siguiente figura, la longitud de los catetos del triángulo rectángulo OAB, son iguales y cada uno mide una unidad. A partir de este se ha construido la figura, de tal manera que todos los triángulos que la conforman son rectángulos y la medida del cateto externo es igual para todos.



a. Halle X_1, X_2, X_3

b. Halle X_{n+1}. ¿Qué diferencia encuentra entre este término y los que se habían calculado en talleres anteriores?

c. Consulte acerca de la definición de una ecuación de recurrencia y confróntela con el ejercicio.

5.6.2 Actividad 5-13

Objetivos específicos:

- Encontrar el modelo de recurrencia para la situación planteada.
- Al hacer cambios en las variables, determinar cómo se afecta el modelo.

Un granjero compra una pareja de conejos adultos. Un mes más tarde tiene tres conejos. Al mes siguiente tiene cinco. En general, el granjero nota que el número de conejos en su criadero está dado por la siguiente tabla:

Mes	1	2	3	4	5	…
Número Conejos	2	3	5	8	13	…

a. Si el comportamiento de la población de los conejos no cambia, hallar la fórmula para la cantidad de conejos X_n en el mes n.

b. ¿Para cuántos conejos, el granjero debe comprar comida en el décimo mes?

c. Suponiendo que el comportamiento general de una población de conejos sigue el comportamiento mencionado, construya una tabla si el granjero en vez de comprar una pareja, compra dos parejas y después de un mes tiene 8 conejos. Hallar la nueva fórmula. ¿En qué cambio el nuevo modelo? Explique.

6. Capítulo 6.
Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

A través de los documentos históricos revisados, se puede constatar que la noción de variable antecede a la noción de función, considerándose esta última, inicialmente como una relación entre variables, luego como cantidades que dependen de una variable y finalmente como correspondencia entre variables o como correspondencia entre conjuntos. Actualmente la noción más empleada para introducir el concepto de función es la de correspondencia, enfoque meramente matemático que se desliga de fenómenos reales y elimina su potencial modelizador, convirtiéndose en la causa de mayor incidencia en las dificultades para la comprensión de la noción por parte de los estudiantes.

Al hacer un acercamiento al concepto de función por medio de la modelación de situaciones reales cercanas a la cotidianidad, se torna consecuente con el desarrollo histórico, se convierte en un tema de interés y conduce a obtener una visión más amplia de las definiciones construidas en los últimos siglos. El desarrollo de los talleres conduce a crear un ambiente propicio para la comprensión del concepto de función, su simbología y diferentes lenguajes de representación, distanciado de procesos algorítmicos tan usuales en las aulas de clase de hoy en día.

Sin duda alguna, se hace necesario que los docentes, responsables de orientar las materias de matemáticas incursionen en la historia y epistemología de las nociones que se involucran en los programas académicos, puesto que en estos se encuentra la respuesta a muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en la conceptualización matemática. Es hora de afrontar los errores didácticos que persisten años tras años, con cientos de estudiantes y sobre quienes generalmente recae la culpabilidad.

6.2 Recomendaciones

Por ser el concepto de función uno de los más importantes en la historia de las matemáticas, merece toda su atención desde el punto de vista didáctico. Su carácter modelador y su utilidad como herramienta para solucionar problemas matemáticos y extra-matemáticos dotan de significado la noción y permiten potenciar la competencia de pensamiento variacional.

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo, se recomienda ejecutarla en un primer curso a nivel superior, con la intención de que los estudiantes manipulen procesos concernientes a la modelación matemática como herramienta para la comprensión de la noción de función y de la misma manera logren generalizaciones que permitan el desarrollo del pensamiento matemático. Con este se espera crear un ambiente propicio para que en futuros cursos se logren comprender definiciones más abstractas.

Bibliografía

[1] APOSTOL, Tom M. CALCULUS. Editorial Reverté Colombiana S.A. Volumen 1. 1988. 813 p.

[2] AZCÁRATE, Carmen. DEULOFET, Jordi. Funciones y gráficas, Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis, S.A. Madrid, 1996. 176 p.

[3] BLOMHØJ, M. "Modelización Matemática – Una Teoría para la Práctica". {En línea} {2004, 16p} disponible en:
(http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf.)

[4] CASTRO, Nora y otros. Concepciones de docentes sobre enseñanza – aprendizaje del tema de funciones. CIEMAC. Universidad de la Pampa, Argentina. {PDF} 2009, 10 p.

[5] EULER. Introduction to Analysis of the Infinite. Traducción John D Blanton. Book 1. Springer- Verlag New York. 1988, 363 p.

[6] EULER. Introduction to Analysis of the Infinite. Traducción John D Blanton. Book 2. Springer- Verlag New York. 1990, 532 p.

[7] GARCIA, Laura. VÁSQUEZ, Rosa. HINOJOSA, Moisés. Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. {En línea} {2004, 8p} disponible en:
(http://ingenierias.uanl.mx/24/pdfs/24_dificultades_en_el_aprendizaje.pdf)

[8] GONZÁLEZ, Pedro Miguel. Orígenes de la Geometría Analítica. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Materiales de Historia de las Ciencias, Enero de 2004. 173 p.

[9] GONZALEZ, Pedro Miguel. Revista Sigma. Artículo: "La geometría analítica de la introduction in analysin infinitorum de Euler", N31, Noviembre de 2007, p.169-193.

[10] HERNÁNDEZ, Víctor. La geometría analítica de Descartes y Fermat. Apuntes de historia de las matemáticas. V1, N1, {En línea} {2002, 14p} disponible en:
(http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf.)

[11] HOFFMANN, Laurence D. Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales. McGraw Hill. Séptima edición, 2001. 808 p.

[12] HUERTAS, Crescencio. Una aproximación al concepto de función. Documento coloquio distrital de matemáticas y estadística. Diciembre de 1996. 38 p.

[13] LEITHOLD, Louis. Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales. Editorial Alfaomega, México, 1988. 672 p.

[14] MARTINEZ A, Carmen. El concepto de función en la obra de Euler. Universidad Nacional Autónoma de México {En línea} {2008, 19p} disponible en:

(http://www.miscelaneamatematica.org/Misc46/Martinez.pdf.)

[15] MESA, Yadira Marcela, VILLA O, Jhony Alexánder. "Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática". Artículo, revista virtual Universidad Católica del Norte. Edición N21, Mayo-Agosto de 2007, 9 p.

[16] PURCELL, Edwin. Cálculo. Novena edición. Pearson Educación, 2007. 774 p.

[17] REY, G. SASTRE, P. BOUBÉE, C. CAÑIBANO, A. Aportes didácticos para abordar el concepto de función. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No 20. 2009, p. 153-162.

[18] RUIZ, Luisa. La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. universidad de Jaén. 1998. 320 p.

[19] SASTRE, P; Rey, G.; Boubée, C. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No 16. 2008, p. 141-155.

[20] STEWART, James. CÁLCULO. Editorial CENGAGE Learning, México. Sexta edición. 2008, 763 p.

[21] TAKEUCHI, Yu. Sucesiones y series. Editorial Limusa S.A.. Tomo 1. 1990, 220 p.