Sobre la Superestabilidad en Q-Clases Elementales Abstractas

José Nicolás Nájar Salinas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

Agosto 2020

Sobre la Superestabilidad en Q-Clases Elementales Abstractas

José Nicolás Nájar Salinas

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Matemáticas.

Director:

Ph.D. Pedro Hernán Zambrano Ramirez

Línea de Investigación:

Teoría de Modelos

Grupo de Investigación:

Interacciones entre teoría de modelos, categorías, conjuntos y geometría algebraica

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

Agosto 2020

Al amor, esa fuerza que nos lleva a perseverar sin importar que parezca no existir una solución.

Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a la vida por permitirme conocer el hermoso mundo de las matemáticas y mostrarme lo gratificante que es entender un pequeño lugar de ese vasto mundo.

Quiero dar gracias a mis hermanos Nano y Cutu y a mis padres Yolanda y Carlos, quienes me apoyaron de manera incondicional y a quienes les debo mucho de este logro, pues fueron sus consejos los que guiaron este camino que parecía interminable. Quiero agradecer de manera especial a mi madre por darme la vida y enseñarme que con perseverancia se logra todo.

Especialmente quiero darle las gracias a mi compañera de camino María Alejandra Rojas Garzón, quien durante los últimos años me ha amado con la fuerza de un millón soles y ha sido este amor reconfortante en los momentos en los que he querido abandonar este trabajo. Ella me ha acompañado de manera incondicional en cada uno de los pasos que me llevaron a terminar esta tesis y siempre ha estado dispuesta a ayudarme con lo que necesite. Le doy las gracias por ser una constante inspiración en mi vida.

Quiero resaltar mi agradecimiento a Pedro Zambrano, quien me ha acompañado los últimos cinco años de mi recorrido académico y ha creído en mÃ incondicionalmente. También ha sido un gran maestro que nunca ha tenido problemas en decirme de frente cuales son mis falencias y mis fortalezas, que en los seminarios y cursos en los que interactuamos siempre me corrigió fuertemente y así me ayudó a crecer como matemático. Quiero agradecerle pues cuando se presentaron problemas en mi vida fue un amigo que me aconsejó y aopoyó para salir de estos.

Quiero agradecer a Andrés Villaveces por el tiempo que dedicó a discutir conmigo el resultado que tiene con Shelah, el teorema de Shelah-Villaveces, y que es fundamental en este trabajo. A John Goodrick por sus observaciones sobre el buen planteamiento de los axiomas de las Q-AECs y sus anotaciones del ejemplo base de Q-AEC. Al Juli, un gran amigo y colega con que me ha acompañado en los momentos buenos y malos, tanto personales como académicos, por los que pasé en estos cuatro años que duré en el programa y quien, junto con Raúl Figueroa, me aconsejó no cancelar retículos en mi primer semestre a pesar de haber sacado una muy mala nota. Quiero darle las gracias al Mechas, Alex, el viejo Javi, Wilson "el pescador" Forero, Andrés Rios, Marto y David Amaya por ser siempre grandes compañeros de estudio y compadres de ocio. Al profesor Reinaldo Montañéz de quien fui monitor de matemáticas básicas dónde conocí a Alejandra.

A Laura Carvajal, amiga incondicional desde hace veinte años y quien siempre ha estado pendiente de mi felicidad. A Laura Castellanos y Fabián Vega, grandes amigos que siempre me animaron a trabajar fuerte para terminar este trabajo. A los gaticos Nairo, Rigo y Moka, quienes me acompañaron en las largas noches de estudio.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por ser un lugar fenomenal para estudiar y por ayudarme con las monitorías que fueron una gran ayuda económica. Por último, quiero agradecer al grupo de investigación de interacciones entre teoría de modelos, categorías, conjuntos y geometría algebraica al que pertenezco y que me ayudó

económicamente durante el segundo semestre del 2018.

Resumen

En el presente trabajo estudiamos el concepto de Q-clase elemental abstracta y hacemos una aproximación a la superestabilidad en este contexto adaptando el teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.1 en [SV99]). Con ayuda de este teorema y basándonos en lo expuesto por Baldwin en el capítulo 15 de [Bal09], estudiamos la saturación de la unión de cadenas de modelos saturados como una noción débil de superestabilidad.

Palabras clave: Q-Clase Elemental Abstracta, superestabilidad, teorema de Shelah-Villaveces, saturación.

Abstract

In the present work we study the concept of Q-abstract elementary class and we do an approximation to superestability in this context, adapting Shelah-Villaveces theorem. With the help of this theorem and based on chapter 15 of [Bal09], we studied the saturation of the union of chains of saturated as a weak notion of superstability.

Keywords: Q-abstract elementary class, superstability, Shelah-Villaveces theorem, saturation.

Contenido

Agradecimientos **VII**

Introducción **XIV**

1 Q-AECs: algunos resultados básicos **1**

1.1 Q-clases elementales abstractas 2

1.2 Modelo-homogeneidad y homogeneidad 37

1.3 Tipos de Galois 47

1.4 Saturación 62

1.5 Modelos de Ehrenfeucht-Mostowski 74

2 Estabilidad y docilidad **86**

2.1 Estabilidad 88

2.2 Modelos universales y modelos límite 98

2.2.1 Modelos universales 98

2.2.2 Modelos límite 108

2.3 Docilidad 118

3 Ruptura y carácter local de la no ruptura **123**

3.1 Ruptura 124

3.2 Carácter local de la relación de ruptura 142

4 Superestabilidad en Q-AECs **178**

4.1 Una aproximación a la Superestabilidad en las Q-AECs 179

4.2 Uniones de cadenas de modelos saturados 181

4.3 Superestabilidad en Q-AECs: algunas preguntas 191

Índice alfabético **193**

Bibliografía **195**

Introducción

En el presente trabajo nosotros estudiamo por primera vez el concepto de superestabilidad en el contexto de las Q-Clases Elementales Abstractas, una variante de las Clases Elementales Abstractas. El concepto central de superestabilidad con el que trabajaremos es el de la saturación de la unión de una sucesión creciente continua de modelos saturados de una Q-Clase Elemental-Abstracta (teorema 4.2.4). Para ello, será necesario adaptar el teorema de Shelah-Villaveces (teorema 3.2.23) al contexto de las Q-Clases Elementales Abstractas.

La noción de Clase Elemental Abstracta (AEC por su sigla en inglés) es dada por primera vez por S. Shelah en [She87a] y [She87b] y corresponde a una generalización de la clase de modelos de una sentencia en la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ con la relación de ser subestructura sobre un fragmento adecuado de la lógica. El concepto de AEC axiomatiza varias propiedades que tiene la clase de modelos de una teoría de primer orden con la relación de ser subestructura elemental, tales como cerradura bajo $\prec$-cadenas crecientes y continuas, el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, cerraduras bajo isomorfismos, entre otras. Uno de los resultados más importantes de la lógica matemática es el teorema de transferencia de categoricidad de Morley para el cual el teorema de compacidad es una herramienta fundamental pues nos permite tener una versión ascendente del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski y con ayuda de la ω-estabilidad tener la transferencia de categoricidad. Una pregunta natural es si en una lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ se tiene un resultado de transferencia de categoricidad tipo Morley y por tanto puede ser adaptada al contexto de las AECs.

Conjetura 0.0.1 (Conjetura de categoricidad eventual para AECs de Shelah)**.** *Una AEC $\mathcal{K}$ categórica en algún cardinal lo suficientemente grande es categórica en todos los cardinales suficientemente grandes.*

Como sabemos que la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ no satisface compacidad, entonces adaptar el resultado de Morley a este contexto no es posible directamente y habría que buscar otro tipo de técnicas. M. Makkai y S. Shelah en [MS90] demuestran que en el contexto de las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ donde κ es un cardinal fuertemente compacto (donde $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface una versión débil de compacidad) se tiene un resultado de transferencia de categoricidad tipo Morley.

Hecho 0.0.1 (sumario 5.1 en [MS90])**.** *Sea κ un cardinal fuertemente compacto y sea ϕ una sentencia en $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$. Si ϕ es categórica en un cardinal suficientemente grande, entonces es categórica en cardinales arbitrariamente grandes.*

Para el contexto general de las AECs, R. Grossberg y M. VanDieren en [GV06b] responden parcialmente la conjetura bajo supuestos de categoricidad en un cardinal sucesor y docilidad, una propiedad local sobre tipos de Galois (una generalización de tipo sintáctico).

Hecho 0.0.2 (corolario 4.3 en [GV06b]). *Sea $\mathcal{K}$ una AEC con modelos arbitrariamente grandes, que satisface la propiedad de amalgamación y que es χ-dócil para $\chi \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$. Si $\lambda \geq \max\{\chi, \mathrm{LS}(\mathcal{K})^+\}$ y $\mathcal{K}$ es categórica en λ y λ^+, entonces $\mathcal{K}$ es categórica en todo $\mu \geq \lambda$.*

En [Bon14] W. Boney demuestra que la existencia de cardinales fuertemente compactos arbitrariamente altos implica que toda AEC es dócil.

Hecho 0.0.3 (teorema 4.5 en [Bon14]). *Si $\mathcal{K}$ es una AEC y κ un cardinal fuertemente compacto, entonces $\mathcal{K}$ es $(\kappa + \mathrm{LS}(\mathcal{K})^+)$-dócil.*

Al unir los hechos 0.0.2 y 3-4 tenemos entonces:

Corolario 0.0.4. *Si existe una clase propia de cardinales fuermente compactos y que $\mathcal{K}$ es una AEC λ y λ^+-categórica, para λ un cardinal lo suficientemente grande, entonces $\mathcal{K}$ es categórica en todo cardinal $\geq \lambda$.*

La ventaja de suponer categoricidad en un cardinal sucesor en el trabajo de R. Grossberg y M. VanDieren es que sólo trabajamos con modelos de un tamaño fijo como se ve en el argumento del teorema 4.1 en [GV06b], que es el resultado clave para la transferencia de categoricidad. Para dar respuesta completa a la conjetura 0.0.1, debemos ver qué pasa cuando suponemos categoricidad en un cardinal límite.

Como lo vimos en el corolario 0.0.4, una repuesta parcial de la conjetura de categoricidad eventual de Shelah requiere de hipótesis conjuntistas fuertes como lo es la existencia de cardinales fuertemente compactos y por tanto el resultado no se puede probar en ZFC. Esto nos hace pensar que para dar una repuesta completa a la conjetura 0.0.1 se deberían hacer supuestos conjuntistas fuertes[1] como la existencia de cardinales fuertemente compactos.

En [SV18], S. Vasey y S. Shelah demostraron la conjetura 0.0.1 bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo Débil (WGCH) que resulta ser consistente con ZFC.

Definición 0.0.5 (Definición 13.5 en [SV18], hipótesis generalizada del continuo débil (WGCH))**.** *Sea* S *una clase propia de cardinales.* $\mathsf{WGCH}(S)$ *si y sólo si para todo* $\lambda \in S$ *se cumple que* $2^{\lambda} < 2^{\lambda^+}$*. Escribiremos* WGCH *vale si la afirmación se cumple para todos los cardinales.*

El concepto fundamental de la prueba realizada por Shelah y Vasey en [SV18] es el de marco bueno, el cual puede ser entendido como una noción local de superestabilidad. Intuitivamente hablando, diremos que una AEC $\mathcal{K}$ tiene un marco bueno si $\mathcal{K}$ tiene propiedades *buenas* localmente, tales como amalgamación o modelos no maximales, y hay una noción de independencia para tipos de Golois sobre modelos.

Una condición para que una AEC $\mathcal{K}$ tenga un marco bueno, es que los modelos saturados de $\mathcal{K}$ de un tamaño dado formen una AEC. Para ver esto, lo que tiene más trabajo es demostrar que la subclase de los modelos saturados de cierto tamaño, es cerrada bajo sucesiones crecientes y continuas de dichos modelos. Esto último es una de las caracterizaciones de superestabilidad en el contexto de las AECs y por tal motivo, lo que haremos nosotros en el presente trabajo es estudiar el concepto de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs para así poder plantear algunas posibles soluciones a los problemas pre-

[1]En agosto de 2019, Christian Espíndola hace una demostración de la conjetura de categoricidad eventual de Shelah, con ayuda de la teoría de topos, para la cual sólo requiere la Hipótesis Generalizada del Continuo (corolario 5.2 en [Esp19]).

sentados en la trasferencia de categoricidad surgidos en [Cop06], donde se introduce el concepto de Q-AEC.

Como lo mencionamos en el párrafo anterior, el objeto de estudio de este trabajo serán las Q-clases elementales abstractas (Q-AEC por su sigla en inglés) y aproximaciones del concepto de superestabilidad en este contexto. Para hacer esto, nosotros utilizaremos la teoría de la superestabilidad existente en el contexto de las AECs y adaptaremos los resultados en esta materia a nuestro objeto de estudio. Así obtendremos las bases de los resultados de transferencia de categoricidad de R. Grossberg y M. VanDieren en [GV06b] y S. Shelah y S. Vasey en [SV18].

El concepto de Q-AEC es una variación al concepto de AEC que corresponde a una generalización natural para la clase de modelos de una sentencia en una lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}(Q)$, donde Q es el cuantificador "existen no contables tales que". Notemos que si una estructura $\mathcal{M}$ satisface la sentencia $\neg Qx\varphi(x)$, entonces en el universo de $\mathcal{M}$ hay a lo sumo finitos testigos para la fórmula $\varphi(x)$ y que si la estructura $\mathcal{N}$ satisface la sentencia $Qx\varphi(x)$, entonces en el universo de $\mathcal{N}$ deben haber no contables testigos de $\varphi(x)$; esto hace que los conjuntos *pequeños* o a lo sumo contables y los conjuntos *grandes* o no contables sean indispensables en el estudio de sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}(Q)$.

El concepto de Q-AEC es introducido por A. Coppola en [Cop06] basándose en [She75] y la diferencia esencial con el concepto de AEC está en que en una AEC trabajamos con una relación de orden parcial mientras que en una Q-AEC trabajamos con dos relaciones: un orden parcial, que no deja crecer los conjuntos *pequeños* de una estructura a otra, y otra que simplemente es transitiva, que hace que los conjuntos *grandes* crezcan de una estructura a otra. Notemos que si trabajamos sólo con la relación de orden parcial, no podríamos saber que es lo que sucede con los conjuntos grandes de un modeloa otro y podría suceder que un modelo crea que un conjunto contable sea no contalbe, esto hace la necesario definir la relación fuerte haciendo que los conjuntos grandes crezcan.

En su trabajo, A. Coppola hace un estudio de las Q-AECs motivado principalmente en el hecho que una AEC no se pueden *capturar* clases de modelos de sentencias de una lógica que tenga *cuantificadores cardinales* sin utilizar una relación *artificial* de submodelo. Para ello, A. Coppola introduce dos nociones de submodelo (una refinando a la otra) que resultan ser naturales en dicha clase.

El estudio realizado por A. Coppola en [Cop06], que será muy similar al que haremos en el presente trabajo, consiste en adaptar varios de los conceptos que se estudian en el contexto de las AECs y así obtener las herramientas en el contexto de las Q-AECs necesarias para demostrar un teorema de transferencia de categoricidad al estilo del resultado de R. Grossberg y M. VanDieren (véase [GV06b] corolario 0.2) en el contexto de las Q-AECs. La adaptación de dichos conceptos fue hecha por Coppola en su tesis doctoral y salvo algunas imprecisiones que se aclararán en el presente trabajo, dicha adaptación no tiene problemas. En cambio, el acondicionamiento del argumento de transferencia de categoricidad presentado en [GV06b] sí tiene problemas.

En [GV06b] el concepto principal para la construcción que realizan Grossberg y VanDieren es el de *tipo minimal* (definición 2.1 en [GV06b]); este concepto nos dice que dados una estructura $\mathcal{M}$ de una AEC $\mathcal{K}$ y un tipo de Galois p no algebraico sobre $\mathcal{M}$, esto quiere decir que no tiene realizaciones en $\mathcal{M}$, entonces p tiene una única extensión no algebraica a toda superestructura $\mathcal{M}'$ tal que $|M'| = |M|$. Después de definir el concepto de tipo minimal, Grossberg y VanDieren enuncian y demuestran algunas propiedades de esta clase especial de tipos para luego demostrar un resultado de transferencia de pares de Vaught para tipo minimales (teorema 3.3 en [GV06b]) que resulta ser indispensable al momento de demostrar la transferencia de categoricidad. El concepto de par de Vaught (definición 3.1 en [GV06b]) nos dice que para un tipo p en sobre estructura dada $\mathcal{M}$, existen dos estructuras $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ que extienden a $\mathcal{M}$ de tal manera que no hay nuevas realizaciones de p entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ si $\mathcal{M}_2$ extiende propiamente a $\mathcal{M}_1$. En la demostración del resultado de transferencia de pares de Vaught, es importante el hecho que bajo categoricidad no hay pares de Vaught (hecho 3.2 [GV06b]) y es acá donde Coppola encuentra problemas.

Como lo veremos en la primera sección del primer capítulo, una de las principales diferencias entre el concepto de AEC y el de Q-AEC es que en el primero tenemos sólo una manera de extender estructuras mientras que en el segundo hay dos, de manera débil y fuerte; esto último hace necesario definir los conceptos de par de Vaught débil y fuerte (definición 3.4.1 en [Cop06]) en el contexto de las Q-AECs y es acá donde se presenta la mayor dificultad pues para tener un resultado de transferencia de categoricidad al estilo de Grossberg-VanDieren se necesita que no existan pares fuertes de Vaught y Coppola solamente logra demostrar que no existen pares débiles de Vaught (lema 3.4.7 en [Cop06]). Para solucionar esto, Coppola propone en las páginas 88 y 89 de [Cop06] las siguientes tres condiciones **sin demostración**.

Condición 0.0.6 (condición 1 en [Cop06])**.** *Si no existen pares fuertes de Vaught, entonces no existen pares débiles de Vaught.*

Condición 0.0.7 (condición 2 en [Cop06]). *Se pueden encontrar, ad hoc, tipos minimales sin pares fuertes de Vaught.*

Condición 0.0.8 (condición 3 en [Cop06]). *Para toda estructura $\mathcal{M}$ en una Q-AEC $\mathcal{K}$, existe una superestructura fuerte $\mathcal{N}$ con el mismo tamaño de $\mathcal{M}$ con una cierta propiedad "$\flat$". Además, si α es un ordinal y $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ y $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ son dos sucesiones fuertes crecientes y continuas en $\mathcal{K}$, si $\mathcal{M}_i$ es una subestructura fuerte de $\mathcal{N}_i$ y $\mathcal{N}_i$ tiene la propiedad "$\flat$"para todo $i < \alpha$, entonces $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$ es una extensión fuerte de $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$.*

Coppola propone en las páginas 88 y 89 de [Cop06] que la propiedad "$\flat$"de la condición 0.0.8 sea la universalidad, una saturación delativa a una subestructura, y es esto lo que nos lleva a preguntarnos si la unión de cadenas de modelos saturados es también un modelo saturado. Esto último es lo que nos lleva a estudiar el concepto de superestabilidad en Q-AECs pues en primer orden esto es equivalente a que una teoría contable de primer orden sea superestable. También en el caso de una teoría contable, tenemos que la superestabilidad se sigue de la categoricidad en $\lambda \geq \aleph_1$.

En el contexto de las AECs no hay una definición unificada del concepto de superestabilidad pero se han estudiado varias aproximaciones de superestabilidad tales como: la unión de una cadena creciente de modelos saturados es saturada (capítulo 15 en [Bal09], [Van16]), unicidad de modelos límite ([Van06], [GVV16]) y existencia de marcos buenos ([Vas17c]). En [GV17] S. Vasey y R. Grossberg demuestran que, bajo hipótesis fuertes de estabilidad, estas aproximaciones de superestabilidad resultan ser equivalentes para cardinales muy grandes (corolario 1.3 en [GV17]). Las tres aproximaciones de superestabilidad que mencionamos anteriormente son implicaciones del Teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.2.1 en [SV99]) en el contexto de las AECs.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar una aproximación adecuada de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs y para ello nos guiaremos en el trabajo que S. Vasey presenta en su tesis doctoral ([Vas17c]) donde hace un trabajo detallado de la superestabilidad en AECs y estudia todas las nociones que se conocen de superestabilidad en AECs entre las que se encuentra la saturación de la unión de cadenas crecientes de modelos saturados.

En el primer capítulo nosotros haremos las adaptaciones de los conceptos básicos del contexto de las AECs que son necesarios para el estudio de la superestabilidad. Hacemos un estudio minucioso de los resultados básicos que utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Una de esas nociones es que es adaptada por Coppola es la de tipo *orbital* de Galois; para ser más precisos en algunas demostraciones hechas por Coppola, nosotros introducimos la noción de tipo de Galois como clases de equivalencia de triplas en la sección 1.3. En este capítulo también introducimos el concepto de saturación, clave en la aproximación a superestabilidad que trabajaremos en el capítulo cuatro, y los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski, fundamentales en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces (teorema 3.2.23).

El objeto de estudio del segundo capítulo es la estabilidad y la docilidad; estos conceptos también son estudiados por Coppola en [Cop06]. En este capítulo también introduciremos el concepto de modelo límite en el contexto de las Q-AECs y adaptaremos el resultado de Boney (hecho 3-4) a las Q-AECs tomándolas como ejemplos de categorías accesibles (véase [LR16]).

En el capítulo tres desarrollaremos todas las herramientas que necesitaremos para adaptar el resultado principal de la superestabilidad en AECs al contexto de las Q-AECs: el teorema de Shelah-Villaveces. Este teorema nos dice, de manera intuitiva, que si tenemos un tipo de Galois sobre la unión de una cadena creciente de modelos, entonces todos los cambios de información (la ruptura) que pueda tener dicho tipo sobre submodelos de dicha unión están atestiguados por algún nivel de la cadena. Comenzamos con el concepto de ruptura el cual, intuitivamente hablando, nos dice cuándo un tipo de Galois sobre un modelo dado tiene cambios *fuertes* sobre submodelos del modelo dado. En la sección 3.2 nosotros haremos una adaptación minuciosa del teorema de Shelah-Villaveces que estará basada el capítulo 2 de [SV99], [BGVV17] y [BVV16]; es importante resaltar que este teorema es la piedra angular de la aproximación de superestabilidad que adaptaremos en este trabajo y por tanto cumplirá el mismo papel en este trabajo pues de este teorema podremos deducir la noción de superestabilidad de la categoricidad.

Inspirados en los capítulos 6, 7, 10 y 23 [Vas17c] donde Vasey trabaja a fondo la noción de marco bueno, la cual nos dice que una "AEC $\mathcal{K}$ tiene algunas propiedades estructurales localmente (como amalgamación e inmersiones conjuntas) y existe una noción razonable de independencia para tipos de conjuntos unitarios sobre modelos" (introducción capítulo 6 en [SV18]); esta es una noción local de superestabilidad. En el cuarto capítulo nosotros adaptamos una definición de superestabilidad dada por Vasey en [Vas17b], la cual nos dice que localmente la clase tiene propiedades *buenas* como amalgamación, inmersiones conjuntas y que la relación de no ruptura satisface el teorema de Shelah-Villaveces, y concluimos que esta propiedad se deduce de la λ-categoricidad para Q-AEC. Después de esto, continuamos nuestro trabajo viendo que la noción de superestabilidad que introducimos implica que la unión de modelos saturados es saturada. Esta implicación la revisaremos lo más detalladamente posible y nos basaremos en el capítulo 15 de [Bal09] y en la sección 6 de [She99]. Terminamos nuestro trabajo haciéndonos algunas preguntas naturales sobre otras nociones de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs para continuar con el estudio de la superestabilidad.

1 Q-clases elementales abstractas y algunos resultados básicos

La noción de Clase Elemental Abstracta (AEC por su sigla en inglés) es dada por primera vez por Shelah en [She87a] y [She87b] y corresponde a una generalización de la clase de modelos de una sentencia en la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Lo que se busca con esta noción es demostrar un resultado tipo de transferencia de categoricidad tipo Morley. Como lo que se busca con las Q-AECs es hacer algo similar pero con sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$, es conveniente recordar que una estructura $\mathcal{M}$ satisface $Qx\varphi(x)$ ($\mathcal{M} \vDash Qx\varphi(x)$) si y sólo si $|\{a \in M : \mathcal{M} \vDash \varphi(a)\}| > \aleph_0$.

A continuación introduciremos la noción de Q-AEC introducida por Andrew Coppola en su tesis doctoral [Cop06] y en la cual demuestra algunos los resultados básicos (capítulos 1 y 2 y secciones 3.1 y 3.2) que reproduciremos acá haciendo las demostraciones en detalle. Además de esto, haremos un desarrollo minucioso de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski de los cuales Coppola hace mención al final de la sección 2.1 de [Cop06]; el trabajo que haremos sobre estos modelos está basado en su mayoría en el trabajo de Baldwin en [Bal05]. Además de esto, al final del capítulo haremos una pequeña discusión del resultado de la consistencia conjuntista de la docilidad en AECs expuesto por Boney en [Bon14].

1.1. Q-clases elementales abstractas

Un contraejemplo natural del concepto de AEC es la clase de modelos de una sentencia en la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ con la relación $\prec_\Delta$, que es una generalización de la relación *ser subestructura elemental* que sólo involucra las fórmulas que estén en Δ, donde Δ es un fragmento contable de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ (es decir, $\Delta \subsetneq \mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ es cerrado bajo conectivos lógicos, cuantificación y reemplazo de términos). En efecto, considere $\mathcal{L}$ un vocabulario contable que contiene un símbolo relacional R de aridad 1, φ una sentencia completa de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ y Δ un fragmento contable de $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ que contiene a φ tal que $\neg QxR(x) \in \Delta$. Sea $(\mathcal{M}_i : i < \omega_1)$ una $\prec_\Delta$-cadena creciente continua tal que para cada $i < \omega_1$ tenemos que $\mathcal{M}_i \vDash \varphi$, $\mathcal{M}_i \vDash \neg QxR(x)$ y para $i < j < \omega_1$ se cumple que $M_i, M_j \vDash \neg QxR(x)$, entonces $\{a \in M_i : \mathcal{M}_i \vDash R(a)\} \subsetneq \{a \in M_j : \mathcal{M}_j \vDash R(a)\}$. Claramente para cada $i < \omega_1$, $|\{a \in M_i : \mathcal{M}_i \vDash R(a)\}| \leq \aleph_0$ pero

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i<\omega_1}\{a \in M_i : \mathcal{M}_i \vDash R(a)\}\right| &= \left|\left\{a \in \bigcup_{i<\omega_1} M_i : \bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i \vDash R(a)\right\}\right| \\ &> \aleph_0,\end{aligned}$$

es decir $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i \vDash QxR(x)$, esto implica que para todo $i < \omega_1$ tenemos que $\mathcal{M}_i \not\prec_\Delta \bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$ pues $\neg QxR(x) \in \Delta$ y por tanto $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i \vDash QxR(x)$, esto es $(Mod(\varphi), \prec_\Delta)$ no es una AEC pues por el axioma de cadenas de Tarski-Vaught se debe cumplir que $\mathcal{M}_i \prec_\Delta \bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$ para todo $i < \omega_1$. Para solucionar esto, se propone una nueva relación $\prec^*_\Delta$ sobre los modelos de la sentencia φ definida de la siguiente manera (definición 5.1.2.1 en [Bal09]):

$$\mathcal{M} \prec^*_\Delta \mathcal{N} \text{ sii } \begin{cases} \mathcal{M} \prec_\Delta \mathcal{N} \text{ y} \\ \\ \text{Si } \mathcal{M} \vDash \neg Qx\psi(x,\overline{a}), \text{ entonces } \psi(\mathcal{M},\overline{a}) = \psi(\mathcal{N},\overline{a}), \text{ con } \overline{a} \in M^{lg(\overline{a})}, \end{cases}$$

donde $\varphi\left(\mathcal{M},\overline{a}\right) := \{b \in M : \mathcal{M} \vDash \varphi\left(b,\overline{a}\right)$. No es difícil ver que $(\mathrm{Mod}(\varphi), \prec^*_\Delta)$ es una AEC con número de Löwenheim-Skolem $\aleph_1$ (ejecicio 5.1.3 en [Bal09]). Notemos que la relación $\prec^*_\Delta$ implícitamente dice que los conjuntos pequeños no crecen de una estructura a otra pero esta relación no nos da información sobre los conjuntos grandes.

Como el cuantificador Q nos dice “existen por lo menos no contables”, entonces saber el comportamiento de los conjuntos grandes o no contables es importante al momento de estudiar la clase de modelos de una sentencia en la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$. Para ello es necesario introducir una relación que nos permita saber que es lo que sucede con los conjuntos grandes de una estructura a otra (definición 5.1.2.2 en [Bal09]).

$$\mathcal{M} \prec^{**}_\Delta \mathcal{N} \text{ sii } \begin{cases} \mathcal{M} \prec^*_\Delta \mathcal{N} \text{ y} \\ \\ \text{Si } \mathcal{M} \vDash Qx\psi(x,\overline{a}), \text{ entonces } \psi(\mathcal{M},\overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{N},\overline{a}), \text{ con } \overline{a} \in M^{lg(\overline{a})}. \end{cases}$$

Esta relación nos dice implícitamente que los conjuntos grandes crecen de una estructura a otra. Si tenemos una $\prec^{**}_\Delta$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ de modelos de φ tales que $\mathcal{M}_i \vDash Qx\psi(x,\overline{a})$ para todo $i < \alpha$, con $\overline{a} \in M_0^{\overline{a}}$, y si $\mathcal{N} \vDash \varphi$ es tal que $\mathcal{N} \vDash Qx\psi(x,\overline{a})$, $\mathcal{M}_i \prec^{**}_\Delta \mathcal{N}$ para todo $i < \alpha$ y $\psi(\mathcal{N},\overline{a}) = \bigcup\limits_{i<\alpha} \psi(\mathcal{M}_i,\overline{a})$, entonces $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \prec^*_\Delta \mathcal{N}$, pues en particular $\mathcal{M}_i \prec^*_\Delta \mathcal{N}$ para todo $i < \alpha$, pero $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \not\prec^{**}_\Delta \mathcal{N}$, pues

$$\begin{aligned} \psi\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i, \overline{a}\right) &= \bigcup_{i<\alpha} \psi(\mathcal{M}_i, \overline{a}) \\ &= \psi(\mathcal{N}, \overline{a}), \end{aligned}$$

y por tanto $(\mathcal{K}, \prec^{**}_\Delta)$ no es una AEC.

En esencia, las relaciones $\prec^*_\Delta$ y $\prec^{**}_\Delta$ están inspiradas en la definición 3.3 de [She75] donde Shelah aborda la existencia de un modelo de tamaño $\aleph_2$ de sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ e inspirado en este trabajo, Coppola busca generalizar la clase de modelos de una sentencia en $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ con las relaciones que en esencia dicen lo mismo que $\prec^*_\Delta$ y $\prec^{**}_\Delta$ pero con modelos no estándar contables (ejemplo 1.1.3).

Una Q-AEC será entonces una tripla $(\mathcal{K}, \prec_\mathcal{K}, \prec^u_\mathcal{K})$ donde $\mathcal{K}$ es una clase de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructuras, $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ un lenguaje de primer orden, $\prec_\mathcal{K}$ es una relación de orden parcial y $\prec^u_\mathcal{K}$ es una relación transitiva. En [Cop06] después de definir el concepto de Q-AEC, Coppola introduce los supuestos I (densidad de $\prec^u_\mathcal{K}$-extensiones), II (densidad II) y III (coherencia top sobre $\prec^u_\mathcal{K}$) que son naturales en las Q-AECs y por tal motivo nosotros los incluimos en los ítems 4*b*, 4*c*, 7*b* y 7*a* de nuestra definición. Además de esto, nosotros cambiamos la forma en la que enunciamos el axioma de Löwenheim-Skolem descendente y densidad II, ítems 5 y 7*a* de la siguiente definición, poniendo como restricción que las estructuras con las que trabajemos tengan tamaño por encima del número de Löwenheim-Skolem de la clase.

Definición 1.1.1 (Q-AEC, definición 1.3.1, supuestos I, II y III en [Cop06])**.** *Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructuras, donde $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ es un lenguaje de primer orden. Diremos que $(\mathcal{K}, \prec_\mathcal{K}, \prec^u_\mathcal{K})$ es una **Q-AEC** si y sólo si:*

1. *$\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$ es una relación transitiva sobre $\mathcal{K}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial sobre $\mathcal{K}$.*

2. *$\prec_{\mathcal{K}}$ refina $\subseteq_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$ refina $\prec_{\mathcal{K}}$.*

3. *(Axioma de isomorfismos) Dado $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ y $\mathrm{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un isomorfismo, entonces $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$. Además, si $\mathcal{M}_1 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ entonces $\mathrm{f}[\mathcal{M}_1] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $\mathrm{f}[\mathcal{M}_2] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.*

4. *(Axiomas de coherencia) Dados $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M} \in \mathcal{K}$ entonces*

   a) *$\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, implica $\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\subseteq_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}"] \arrow[ur, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{entonces} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, dashed, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd}$$

   b) *$\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}_1 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{entonces} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd}$$

   c) *$\mathcal{M}_1 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}_2 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{entonces} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & \end{tikzcd}$$

5. *(Axioma de Löwenheim-Skolem descendente) Existe un cardinal $\mathrm{LS}(\mathcal{K})$, denominado el número de Löwenheim-Skolem de la clase $\mathcal{K}$, tal que para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ de tamaño $> \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ y $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$, existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}$ con $|\mathrm{N}| \leq \mathrm{LS}(\mathcal{K}) + |\mathrm{A}|$ y $\mathcal{N} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$.*

6. *(Axioma de cadenas de Tarski-Vaught) Sea* $\langle \mathcal{M}_i : i < \alpha \rangle$ *una* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-cadena creciente continua, entonces*

   a) $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$,

   b) $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *para todo* $i < \alpha$,

   c) *si para todo* $i < \alpha$, $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, *entonces* $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

7. *(Axiomas de densidad)*

   a) *Si* $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y* $|N| > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, *entonces existe* $\mathcal{N}'$ *tal que* $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y* $|M| = |N'|$.

   b) *Si* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y* $M \neq N$, *entonces existe* $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ *tal que* $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$.

Observación 1.1.2. *Las relaciones* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ *son en esencia las relaciones* $\prec^{*}_{\Delta}$ *y* $\prec^{**}_{\Delta}$, *donde* $\prec^{*}_{\Delta}$ *y* $\prec^{**}_{\Delta}$ *son las definidas en el ejemplo con el que iniciamos esta sección. Por la forma en la que se definieron las relaciones* $\prec^{*}_{\Delta}$ *y* $\prec^{**}_{\Delta}$, *podemos decir que las propiedades sobre las relaciones* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ *en las partes 1, 2 y 4*a *de la definición 1.1.1 son naturales. Además, por como se definió la relación* $\prec^{**}_{\Delta}$ *y como veremos más adelante, en los ejemplos interesantes esta relación no es reflexiva.*

Las partes 6a, 4b *y* 4c *de la definición 1.1.1 están inspiradas en el lema 3.3 de [She75].* 4b *y* 4c *nos dicen que si en algún nivel de una cadena de tres estructuras los conjuntos grandes crecen, entonces estos conjuntos deben crecer del primer al tercer nivel de dicha cadena.*

*A diferencia de lo enunciado por Coppola en la definición 1.3.1.A4 de su tesis [Cop06], nosotros ponemos la condición que las estructuras a las que les podemos aplicar el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) estén por encima del número de Löwenheim-Skolem de la clase. De alguna manera, la primera parte de los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*), nos* *ayuda a solucionar esto encontrando una estructura intermedia de tamaño* $\mathrm{LS}(\mathcal{K})$ *pero de nuevo, a diferencia de como lo enunció Coppola en el supuesto II (densidad II) de su tesis (página 16 de [Cop06]), nosotros debemos suponer que el tamaño de la superestructura sea mayor que el número de Löwenheim-Skolem de la clase. En el ejemplo 1.1.3 se hace muestra detalladamente la necesidad de estos cambios en la definición que acá presentamos.*

Estos cambios son necesarios pues, como veremos en el ejemplo 1.1.3, si nosotros tenemos dos modelos no estándar de una sentencia en la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\mathrm{Q})$*, es decir modelos contables, no hay forma de garantizar que los conjuntos* ***grandes*** *crezcan de una estructura a otra pues no hay una forma efectiva de encontrar realizaciones nuevas de las fórmulas que los definen. Esto es, encontrar nuevas realizaciones para fórmulas que tengan el cuantificador* Q*.*

*La segunda parte de los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*b*) no dice simplemente que siempre que tengamos una súperestrctura* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{M}$ *donde los conjuntos pequeños se quedan estáticos de una subestructura a otra, nosotros podemos siempre encontrar una súper estructura* $\mathcal{N}'$ *de* $\mathcal{M}$ *donde los conjuntos grandes crecen. A priori, entre* $\mathcal{N}$ *y* $\mathcal{N}'$ *no existe relación alguna.*

Es importante mencionar que las dificultades en el axioma de Löwenheim-Skolem fueron detectadas por el profesor John Goodrick y gracias a sus observaciones, hicimos las modificaciones necesarias para que la definición fuera coherente.

En el siguiente ejemplo, nosotros tomaremos modelos de una sentencia φ de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(\mathrm{Q})$ y como comentamos antes, lo que buscamos es que $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) = \aleph_0$. Este será nuestro ejemplo canónico de Q-AEC. En primer lugar notemos que como el cuantificador Q nos dice “existen no contables elementos tales que”, entonces a priori la clase $\mathcal{K}$ podría no tener modelos contables. Los modelos contables de dicha clase serán *aproximaciones no* *estándar* de modelos de la sentencia.

Ejemplo 1.1.3 (Sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$, ejemplo 1.4.3 en [Cop06], cf. ejemplo 3.12 en [SV18])**.** *Sean* L *un vocabulario,* φ *una sentencia de la lógica* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ *tal que cada modelo de* ψ *realiza sólo realiza contables* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$*-tipos. Esta condición es natural para nosotros pues así podemos garantizar que la sentencia tiene menos de* $2^{\aleph_1}$ *modelos de tamaño* $\aleph_1$ *(lema 2.4 en [She75]). Por el lema 2.5 de [She75], existe un fragmento contable* Δ *de la lógica* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$ *que contiene a* φ *tal que la sentencia* $\varphi_0 : \bigwedge\{\theta \in \Delta : \varphi \vDash \theta\}$ *es* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$*-completa, esto quiere decir que en* φ_0 *se encuentran codificados todos los* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}(Q)$*-tipos omitidos por modelos de* φ*. Es inmedito de la definición de* φ_0 *que si* $\mathcal{M} \vDash \varphi$*, entonces* $\mathcal{M} \vDash \varphi_0$ *y si* $\mathcal{M} \vDash \varphi_0$*, entonces* $\mathcal{M} \vDash \varphi$ *pues* $\varphi \in \Delta$*.*

Hecho 1.1.4. $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\varphi_0)$.

Sea $L' = L \cup \{R_{\phi(\overline{x})}(\overline{x}) : \phi(\overline{x}) \in \Delta\}$ *una expansión de* L *donde para cada* $\phi(\overline{x}) \in \Delta$*,* $R_{\phi(\overline{x})}(\overline{x})$ *es un símbolo relacional de aridad* $\lg(\overline{x})$ *tal que* $\varphi \vDash \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow R_{\phi(\overline{x})}(\overline{x}))$*. Defina* $\varphi' : \varphi_0 \wedge \bigwedge_{\phi(\overline{x})\in\Delta} \forall\overline{x}\phi(\overline{x}) \leftrightarrow R_{\phi}(\overline{x})$*. Como* Δ *es contable, entonces tenemos que* φ' *es una sentencia de la lógica* $\mathcal{L}'_{\omega_1,\omega}(Q)$*. Notemos que si una* L'*-estructura* $\mathcal{M}'$ *es modelo de* φ'*, entonces es en particular modelo de* φ_0 *y por tanto el* L*-reducto* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{M}'$ *modela* φ_0*. Además, como el lenguaje* L' *es una expansión por definiciones de* L*, entonces toda* L*-estructura* $\mathcal{M}$ *tiene una única expansión a una* L'*-estructura* $\mathcal{M}'$ *y por tanto si* $\mathcal{M} \vDash \varphi_0$*,* $\mathcal{M}' \vDash \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow R_{\psi(\overline{x})})(\overline{x})$ *pues todo modelo de* φ_0 *es modelo de* φ *(hecho 1.1.4). En consecuencia* $\mathcal{M}' \vDash \varphi'$*. Por lo anterior, también tenemos que* φ' *es* $\mathcal{L}'_{\omega_1,\omega}$*-completa pues* φ_0 *lo es.*

Hecho 1.1.5. *[Lema 3.1.(A).(2) en [She75]] El* L*-reducto de todo modelo de* φ' *es modelo de* φ *y cada modelo de* φ *puede ser expandido de manera única a un modelo de* φ'*.*

Definimos la teoría $T(\varphi') := \{\psi \in \mathcal{L}'_{\omega,\omega} : \varphi' \vDash \psi\}$ *de todas las sentencias de primer orden que son consecuencia de* φ'*. Diremos que* $\mathcal{M}$ *se aproxima a un modelo de* φ' *o es un modelo no estándar de* φ' *(definición 3.2 en [She75]), si* $\mathcal{M}$ *es un modelo atómico de primer orden de* $T(\varphi)$ *y* $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi'$*.*

Sea $\mathcal{A} := \{\mathcal{M} \text{ contable} : \mathcal{M} \text{ es un modelo no estándar de } \varphi'\}$*. Claramente la clase* $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo isomorfismos y sus elementos son* L'*-estructuras. Notemos que si* $\psi(y, \overline{x})$ *es un elemento de* Δ *y* $\varphi \vDash \forall\overline{x}Qy\psi(y, \overline{x})$*, entonces* $\mathcal{M} \vDash \forall\overline{x}R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{x})$ *para todo* $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$*. Esto quiere decir que para todo* $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ *que **piense** tiene conjuntos grandes no contables, estos conjuntos se interpretan en* $\mathcal{M}$ *como* $R_{Qx(x=x)}$*.*

Basándonos en la motivación dada al principio del capítulo, definiremos dos relaciones $\prec^*$ *y* $\prec^{**}$ *de manera similar a como se definieron las relaciones* $\prec^*_\Delta$ *y* $\prec^{**}_\Delta$*. Para ello sean* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{A}$*. Diremos que* $\mathcal{M} \prec^* \mathcal{N}$ *si y solo si* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ *como* L'*-estructuras y para toda* $\psi(x, \overline{y}) \in \Delta$*, si* $\mathcal{M} \vDash R_{\neg Qx\psi(x,\overline{y})}(\overline{a})$ *con* $\overline{a} \in M^{lg(\overline{y})}$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}, \overline{a}) = \psi(\mathcal{N}, \overline{a})$*; esta relación nos dice que en los modelos no estándar de* φ*, los conjuntos pequeños no crecen de una estructura contable a otra. Diremos que* $\mathcal{M} \prec^{**} \mathcal{N}$ *si y sólo si* $\mathcal{M} \prec^* \mathcal{N}$ *y para toda* $\psi(x, \overline{y}) \in \Delta$*, si* $\mathcal{M} \vDash R_{Qx\psi(x,\overline{y})}(\overline{a})$ *con* $\overline{a} \in M^{lg(\overline{y})}$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}, \overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{N}, \overline{a})$*; esta relación nos dice que los conjuntos grandes que son **vistos** como no contables por los modelos no estándar, crecen de una estructura a otra.*

Notemos que si $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega_1}$ *es una* $\prec^{**}$*-sucesión creciente continua de elementos de* $\mathcal{A}$*, entonces* $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i \vDash T(\varphi')$ *y es atómico pues en particular* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\aleph_1}$ *es una* $\prec$*-sucesión creciente continua. Como los conjuntos que los modelos no estándar **piensan** que son no contables crecen de una estructura a otra en una* $\prec^{**}$*-cadena, entonces dichos conjuntos son no contables en* $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$*.*

Sea $\mathcal{K}_1$ *la clase de uniones de* $\prec^{**}$*-sucesiones crecientes y continuas de elementos de* $\mathcal{A}$ *de longitud* $\aleph_1$*. Como* $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo isomorfismos, entonces* $\mathcal{K}_1$ *también lo es y como los elementos de* $\mathcal{A}$

son modelos atómicos de $\mathsf{T}(\varphi')$, entonces todos los elementos de $\mathcal{K}_1$ también lo son.

Hecho 1.1.6. $\{\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_1 : |M'| = \aleph_1\} = \{\mathcal{M}' \restriction_L \models \varphi : |M| = \aleph_1\}$.

Demostración. Si $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_1$ tiene tamaño $\aleph_1$, entonces $\mathcal{M}' = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$ donde $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega_1}$ es una $\prec^{**}$-sucesión creciente continua de modelos en $\mathcal{A}$ y además $\mathcal{M}' \models \mathsf{T}(\varphi')$. Esto implica que si $\psi(\overline{x}) \in \Delta$ tiene ocurrencias del cuantificador Q, entonces los predicados del lenguaje L' introducidos para cada una de esas fórmulas $\psi(\overline{x})$, tienen nuevas realizaciones o se quedan fijos por la definición de la relación $\prec^{**}$. Por último notemos que como en particular $\varphi' \models (\varphi \leftrightarrow R_\varphi)$ pues $\varphi \in \Delta$, entonces $\varphi' \models R_\varphi$ y en consecuencia $R_\varphi \in \mathsf{T}(\varphi')$. Por tanto $\mathcal{M}' \models (\varphi \leftrightarrow R_\varphi)$, esto es $\mathcal{M}' \models \varphi$ y en consecuencia $\mathcal{M}' \restriction_L \models \varphi$.

Supongamos ahora que $\mathcal{M} \models \varphi$. Como ya vimos, esto implica que existe una única expansión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ al lenguaje L' tal que $\mathcal{M} \models \varphi'$ (hecho 1.1.5), por tanto $\mathcal{M}' \models \mathsf{T}(\varphi')$. Por como se supuso φ, tenemos que φ_0 codifica todos los $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$-tipos no realizados por los modelos de φ y por tanto φ' también lo codifica. Esto es en $\mathsf{T}(\varphi')$ se encuentran codificados todos los $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$-tipos omitidos por los modelos de φ y por tanto $\mathcal{M}'$ debe ser atómico. Al ser $\mathcal{M}'$ un modelo atómico de $\mathsf{T}(\varphi')$, tenemos que existe una $\prec^{**}_{\mathcal{K}}$ sucesión creciente continua de modelos atómicos y contables de $\mathsf{T}(\varphi')$ cuya unión es $\mathcal{M}'$. Así, $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_1$. $\boxed{1.1.6}$

Notemos que el hecho 1.1.6 no dice que los modelos estándar de ψ de tamaño $\aleph_1$ están en correspondencia biunívoca con los elementos de $\mathcal{K}_1$.

Definamos ahora $\overline{\mathcal{K}}$ como la clausura de $\mathcal{K}_1$ bajo uniones de $\prec^*$-sucesiones crecientes continuas de longitud arbitraria. Como $\mathcal{K}_1$ es cerrada bajo isomorfismos, entonces $\overline{\mathcal{K}}$ también lo es y todos los elementos de $\overline{\mathcal{K}}$ son modelos atómicos de $\mathsf{T}(\varphi')$ pues toda $\prec^*$-sucesión es en particular una $\prec$-sucesión.

Notemos que la definición de las relaciones $\prec^*$ y $\prec^{**}$ fueron dadas solo para las estructuras de la clase $\mathcal{A}$ y por tanto, si queremos definir sobre $\overline{\mathcal{K}}$ una Q-AEC, nosotros debemos extender estas definiciones a todos los modelos de la clase $\overline{\mathcal{K}}$. Para ello, sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \overline{\mathcal{K}}$. Diremos que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y solo si $\mathcal{M} \prec^* \mathcal{N}$ y que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si

$$\begin{cases} \mathcal{M} \prec^{**} \mathcal{N} \text{ si } \mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{A}, \\ \mathcal{M} \prec^{*} \mathcal{N} \text{ si } \mathcal{M} \text{ es no contable o } \mathcal{N} \text{ es no contable.} \end{cases}$$

De manera similar a como se demuestra que $(\mathrm{Mod}(\varphi), \prec^*_{\Delta})$ es una AEC con número de Löwenheim-Skolem $\aleph_1$, pordemos demostrar que la clase $(\overline{\mathcal{K}}', \prec^{u}_{\mathcal{K}})$, donde $\overline{\mathcal{K}}'$ es la subclase de todos los elementos no contables de $\overline{\mathcal{K}}$, es una AEC con número de Löwenheim-Skolem $\aleph_1$ y en consecuencia tenemos que los moldeos estándar no contables de φ están en correspondencia biunívoca con los elementos de la clase $\overline{\mathcal{K}}'$.

Veamos ahora que $(\overline{\mathcal{K}}, \prec_{\mathcal{K}}, \prec^{u}_{\mathcal{K}})$ es una Q-AEC. Revisaremos uno por uno los axiomas de la definición 1.1.1.

1.1.1.1 Sean $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \overline{\mathcal{K}}$. Veamos que $\prec_{\mathcal{K}}$ es una relación de orden parcial. En primer lugar notemos que como $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_0$ como L'-estructura y para toda $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$, si $\mathcal{M}_0 \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$, entonces $\psi(\mathcal{M}_0, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_0, \overline{a})$, es claro que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y por tanto $\prec_{\mathcal{K}}$ es una relación transitiva. Si $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_0 \neq \mathcal{M}_1$, entonces $M \subsetneq N$ y por tanto $\mathcal{M}_1 \not\prec \mathcal{M}_0$ como L' estructuras, en consecuencia $\mathcal{M}_1 \not\prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0$. Por último, si $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$, entonces $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ y para todo $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$, si $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ con $\overline{a} \in M_0^{\lg(\overline{x})}$, entonces $\psi(\mathcal{M}_0, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_1, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_1, \overline{a})$. Como la relación $\prec$ es una relación transitiva, entonces $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_2$ y en consecuencia $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$ pues $\psi(\mathcal{M}_0, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_2, \overline{a})$, por tanto la relación $\prec_{\mathcal{K}}$ transitiva. Todo esto implica que la *relación $\prec_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial.*

Para ver que la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ es transitiva, sean $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \overline{\mathcal{K}}$ son tales que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$. En primer lugar notemos que si $\mathcal{M}_0$ es no contable o $\mathcal{M}_1$ es no contable, entonces por definición tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_1 \prec^{*} \mathcal{M}_2$ y por tanto $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_2$, esto es $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$ pues $\mathcal{M}_2$ es no contable. Si $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ son contables y $\mathcal{M}_2$ no lo es, entonces tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{**} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_1 \prec^{*} \mathcal{M}_2$ y en consecuencia tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_1$ por definición de la relación $\prec^{**}$, por tanto $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_2$ y como $\mathcal{M}_2$ es no contable, tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$. Por último, si $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son contables, entonces tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{**} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_1 \prec^{**} \mathcal{M}_2$; por tanto $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1 \prec^{*} \mathcal{M}_2$ y para toda $\psi(y,\overline{x}) \in \Delta$, si $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ para $\overline{a} \in M_0^{lg(\overline{x})}$, entonces $\psi(\mathcal{M}_0,\overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}_1,\overline{a})$ y $\psi(\mathcal{M}_1,\overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}_2,\overline{a})$. En consecuencia tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{*} \mathcal{M}_2$ y $\psi(\mathcal{M}_2,\overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}_2,\overline{a})$, esto es $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$ y por tanto la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ es transitiva. Notemos que la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ no es transitiva pues en particular tenemos que si $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \overline{\mathcal{K}}$ son contables y $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces para toda $\psi(y,\overline{x}) \in \Delta$, si $\mathcal{M} \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$, entonces se agregan realizaciones de la fórmula $\psi(y,\overline{a})$ en $\mathcal{N}$ y por tanto la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ no puede ser reflexiva.

1.1.1.2 *Como la relación de ser L'-subestructura elemental extiene a la relación de ser L'-subestructura, entonces $\prec_{\mathcal{K}}$ refina a $\subseteq_{L'}$. Como $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ refina a $\prec_{\mathcal{K}}$ para modelos contables y $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ es $\prec_{\mathcal{K}}$ en modelos no contables, entonces la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ refina a la relación $\prec_{\mathcal{K}}$.*

1.1.1.3 *La clase $\overline{\mathcal{K}}$ es cerrada bajo L'-isomorfismos pues $\mathcal{A}$ lo es. Sea $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un L'-isomofismo y supongamos que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Por definición de la relación $\prec_{\mathcal{K}}$, tenemos que $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}$ como L'-estructuras y si para toda $\psi(y,\overline{x}) \in \Delta$ se cumple que $\mathcal{M}' \vDash R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$, entonces*

$\psi(\mathcal{M}', \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$ *y por tanto* $|\psi(\mathcal{M}', \overline{a}) \backslash \psi(\mathcal{M}, \overline{a})| = 0$. *Notemos que como* f *es un* L'-*isomorfismo, entonces* $f[\mathcal{M}'] \prec f[\mathcal{M}] = \mathcal{N}$ *como* L'-*estructuras,* $f[\mathcal{M}'] \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(f(\overline{a}))$ *y* $|\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) \setminus \psi(f[\mathcal{M}], f(\overline{a}))| = |\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) \setminus \psi(\mathcal{N}, f(\overline{a}))| = 0$, *en consecuencia* $\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) = \psi(\mathcal{N}, f(\overline{a}))$ *y por tanto* $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

Si tenemos que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ *y alguna de las dos estructuras es no contable, entonces aplicando el mismo argumento de antes tenemos que* $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$. *Si* $\mathcal{M}'$ *y* $\mathcal{M}$ *son contables, entonces tenemos que* $\mathcal{M}' \prec^{**} \mathcal{M}$, *esto es* $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ *y para toda* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *tal que* $\mathcal{M}' \models R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$, *entonces* $\psi(\mathcal{M}', \overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$ *y en consecuencia* $|\psi(\mathcal{M}', \overline{a}) \backslash \psi(\mathcal{M}, \overline{a})| \neq 0$. *Como* f *es un* L'-*isomorfismo, entonces* $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, $f[\mathcal{M}'] \models R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(f(\overline{a}))$ *y* $|\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) \setminus \psi(f[\mathcal{M}], f(\overline{a}))| = |\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) \setminus \psi(\mathcal{N}, f(\overline{a}))| \neq 0$, *en consecuencia* $\psi(f[\mathcal{M}'], f(\overline{a})) \subsetneq \psi(\mathcal{N}, f(\overline{a}))$ *y por tanto* $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$.

Para los axiomas de coherencia, sean $\mathcal{M}, \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \in \overline{\mathcal{K}}$.

*1.1.1.4*a *Si* $\mathcal{M}_0 \subseteq_{L'} \mathcal{M}_1$ *y* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, *entonces en particular* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ *como* L'-*estrtructuras y como la relación* $\prec$ *satisface coherencia, entonces* $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$. *Además, si* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *es tal que* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *con* $\overline{a} \in M^{lg(\overline{x}}$, *entonces* $\psi(\mathcal{M}_0, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$ *y* $\psi(\mathcal{M}_1, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$, *en consecuencia* $\psi(\mathcal{M}_0, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_1, \overline{a})$ *y como* $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$, *tenemos que* $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$.

*1.1.1.4*b *Supongamos que* $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$. *Como* $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$ *refina a* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y esta última es un orden parcial, entonces tenemos que* $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. *Si alguna de las tres estructuras es no contable, hemos terminado pues en ese caso tenemos que* $\prec_{\mathcal{K}} = \prec_{\mathcal{K}}^{u}$. *Si las tres estructuras son contables, entonces tenemos que para toda* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *si* $\mathcal{M}_0 \models R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$, *entonces*

$\mathcal{M}_1 \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *y como* $\mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*, concluimos que* $\psi(\mathcal{M}_1,\overline{a}) \subseteq \psi(\mathcal{M},\overline{a})$*. Por último, notemos que como* $\psi(\mathcal{M}_0,\overline{a}) \subseteq \psi(\mathcal{M}_1,\overline{a})$ *pues en particular* $M \subseteq N$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}_0,\overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M},\overline{a})$*. Por tanto* $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*.*

1.1.1.4c *Si* $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*, entonces utilizando un argumento similar al de ítem anterior tenemos que* $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*.*

Para el axioma de Löwenheim-Skolem descendente, sea $\mathcal{N} \in \overline{\mathcal{K}}$ *no contable y* $A \subset N$*.*

1.1.1.5 *Lo que haremos es crear una sucesión* $\prec$*-creciente* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega}$ *tal que para toda* $\overline{a} \in M_i^{lg(\overline{a})}$*, si* $\psi(y,\overline{x}) \in \Delta$ *es tal que* $\mathcal{M}_i \vDash R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}_i,\overline{a}) \subset M_{i+1}$*. Lo haremos de manera recursiva. Para la base aplicaremos el teorema de Löwenheim-Skolem descendente para encontrar* $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}$ *tal que* $|M_0| \leq |A| + \aleph_0$ *y* $A \subset M_0$*.*

Supongamos que tenemos construido $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}$*, para* $i < \omega$*, tal que* $A \subset M_i$*,* $|M_i| \leq |A|+\aleph_0$*. Defina* $A_i := M_i \cup \bigcup_{\overline{b}\in M_i^{<\omega}} \left\{ \bigcup_{\psi(y,\overline{x})\in\Delta} \left\{\psi(\mathcal{N},\overline{b}) : \mathcal{N} \vDash R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})\right\} \right\}$*. Claramente*

$A_i \subseteq N$. *Notemos que*

$$\begin{aligned}
|A_i| &= \left| M_i \cup \bigcup_{\overline{b} \in M_i^{<\omega}} \left\{ \bigcup_{\psi(y,\overline{x}) \in \Delta} \left\{ \psi(\mathcal{N}, \overline{b}) : \mathcal{N} \vDash R_{\neg Q y \psi(y,\overline{x})}(\overline{a}) \right\} \right\} \right|, \\
&= |M_i| + \left| \bigcup_{\overline{b} \in M_i^{<\omega}} \left\{ \bigcup_{\psi(y,\overline{x}) \in \Delta} \left\{ \psi(\mathcal{N}, \overline{b}) : \mathcal{N} \vDash R_{\neg Q y \psi(y,\overline{x})}(\overline{a}) \right\} \right\} \right|, \\
&= |M_i| + |M_i^{<\omega}| \cdot \sup_{\overline{b} \in M_i^{<\omega}} \left\{ \left| \bigcup_{\psi(y,\overline{x}) \in \Delta} \left\{ \psi(\mathcal{N}, \overline{b}) : \mathcal{N} \vDash R_{\neg Q y \psi(y,\overline{x})}(\overline{a}) \right\} \right| \right\}, \\
&\leq |M_i| \cdot \sup_{\overline{b} \in M_i^{<\omega}} \left\{ |\Delta| \cdot \sup_{\psi(y,\overline{x}) \in \Delta} \left\{ |\psi(\mathcal{N}, \overline{b})| : \mathcal{N} \vDash R_{\neg Q y \psi(y,\overline{x})}(\overline{a}) \right\} \right\} \text{ pues } |M_i^{<\omega}| = |M_i|, \\
&\leq |M_i| \cdot \sup_{\overline{b} \in M_i^{<\omega}} \left\{ \aleph_0 \cdot \sup_{\psi(y,\overline{x}) \in \Delta} \{\aleph_0\} \right\} \text{ pues } |M_i^{<\omega}| = |M_i|,\ |\Delta| \leq \aleph_0 \text{ y como} \\
&\quad\ \mathcal{N} \vDash R_{\neg Q y \psi(y,\overline{x})}(\overline{b}),\ |\psi(\mathcal{N}, \overline{b})| \leq \aleph_0, \\
&= |M_i| \cdot \aleph_0, \\
&\leq (|A| + \aleph_0) \cdot \aleph_0 \text{ pues } |M_i| \leq |A| + \aleph_0, \\
&= |A| + \aleph_0.
\end{aligned}$$

Por el teorema de Löwenheim-Skolem descendente, existe $\mathcal{M}_{i+1} \prec \mathcal{N}$ *tal que* $A_i \subseteq M_{i+1}$ *y* $|M_i| \leq |A_i| + \aleph_0$ *y como tenemos que* $|A_i| \leq |A| + \aleph_0$*, entonces* $|M_{i+1}| \leq |A| + \aleph_0$. *Como* $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1} \prec \mathcal{N}$ *y* $\mathcal{M}_i \subseteq_{L'} \mathcal{M}_{i+1}$*, entonces es claro que* $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_{i+1}$. *Definamos* $\mathcal{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$. *Por construcción claramente tenemos que* $A \subset M$ *y como para todo* $i < \omega$

se cumple que $|M_i| \leq |A| + \aleph_0$*, entonces*

$$\begin{aligned} |M| &= \left|\bigcup_{i<\omega} M_i\right|, \\ &= \aleph_0 \cdot \sup_{i<\omega}\{|M_i|\}, \\ &\leq \aleph_0 \cdot \sup_{i<\omega}\{|A| + \aleph_0\}, \\ &= \aleph_0 \cdot (|A| + \aleph_0), \\ &= |A| + \aleph_0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{N}$ *es no contable, entonces sólo nos resta ver que* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *pues en este caso las dos relaciones coinciden. Por construcción es inmediato que* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$*. Sea* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *tal que* $\mathcal{M} \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$*. Como por construcción existe* $i_0 < \omega$ *tal que* $\overline{a} \in M_{i_0}^{lg(\overline{x})}$ *y* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$*, entonces* $\mathcal{N} \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *y por tanto* $\psi(\mathcal{N}, \overline{a}) \subset M_{i_0+1} \subseteq M$*, esto es* $\psi(\mathcal{M}, \overline{a}) = \psi(\mathcal{N}, \overline{a})$ *y así* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*.*

Notemos que la condición que $\mathcal{N}$ *sea no contable es necesaria pues de no ser así, no hay manera de garantizar que los conjuntos grandes que* $\mathcal{N}$ ***piense*** *que son no contables tengan menos elementos en* $\mathcal{M}$*.*

Para ver que $(\overline{\mathcal{K}}, \prec_{\mathcal{K}}^{u}, \prec_{\mathcal{K}})$ *satisface los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught, sea* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ *una* $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$*-sucesión creciente continua de elementos de* $\overline{\mathcal{K}}$*.*

*1.1.1.6*a *La clase* $\overline{\mathcal{K}}$ *es cerrada bajo* $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$*-sucesiones crecientes y continuas por definición.*

*1.1.1.6*b *En primer lugar notemos que como en particular una* $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$*-sucesión es una* $\prec$*-sucesión, entonces es inmediato que* $\mathcal{M}_i \prec \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *para todo* $i < \alpha$*. Si* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *es tal que* *para algún* $j < \alpha$ *tenemos que* $\mathcal{M}_j \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$*, entonces para todo* $k > j$ *tenemos que* $\mathcal{M}_k \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *pues* $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_k$*. Como toda* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-sucesión es en particular una* $\prec_{\mathcal{K}}$*-sucesión, tenemos entonces que* $\psi(\mathcal{M}_j, \overline{a}) = \psi(\mathcal{M}_k, \overline{a})$ *para todo* $k > j$ *y como* $\psi\left(\bigcup : i < \alpha \mathcal{M}_i, \overline{a}\right) = \bigcup\limits_{i<\alpha} \psi(\mathcal{M}_i, \overline{a})$*, entonces* $\psi\left(\mathcal{M}_j, \overline{a}\right) = \psi\left(\bigcup : i < \alpha \mathcal{M}_i, \overline{a}\right)$*. Por tanto* $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *para todo* $i < \alpha$*.*

Si para alguín $i < \alpha$ *tenemos que* $\mathcal{M}_i$ *es no contable, entonces no hay algo más que demostrar pues en ese caso tedríamos que* $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *es no contable y por en consecuencia las relaciones* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ *coinciden. Lo mismo sucede si* $\alpha \geq \omega_1$*. Si* $\alpha < \omega_1$ *y* $\mathcal{M}_i$ *es contable para todo* $i < \alpha$*, entonces claramente* $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *es contable. Además si* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *es tal que* $\mathcal{M}_j \models R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *para algún* $j < \alpha$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}_j, \overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}_{j+1}, \overline{a})$ *y como* $\psi(\mathcal{M}_{j+1}, \overline{a}) \subseteq \bigcup\limits_{i<\alpha} \psi(\mathcal{M}_i, \overline{a}) = \psi\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i, \overline{a}\right)$*, concluimos que* $\psi\left(\mathcal{M}_j, \overline{a}\right) \subsetneq \psi\left(\bigcup : i < \alpha \mathcal{M}_i, \overline{a}\right)$*. Así* $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ *para todo* $i < \alpha$*.*

1.1.1.6c *Supongamos que para todo* $i < \alpha$ *tenemos que* $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*. Notemos que como toda* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-sucesión es en particular una* $\prec$*- sucesión y la relación* $\prec_{\mathcal{K}}$ *refina a* $\prec$ *por definición, entonces tenemos que* $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}$*. Sea* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *tal que* $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$*, esto último implica que existe* $j < \alpha$ *tal que* $\overline{a} \in M_j^{lg(\overline{x})}$*. Por tanto* $\mathcal{M}_j \models R_{\neg Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ *pues en particular tenemos que* $\mathcal{M}_j \prec \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$*. Como por hipótesis* $\mathcal{M}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y por lo visto en el ítem anterior en particular también se cumple que* $\mathcal{M}_j \prec_{\mathcal{K}} \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$*, entonces* $\psi(\mathcal{M}_j, \overline{a}) = \psi(\mathcal{N}, \overline{a})$ *y* $\psi(\mathcal{M}_j, \overline{a}) = \psi\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i, \overline{a}\right)$*, por tanto* $\psi(\mathcal{N}, \overline{a}) = \psi\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i, \overline{a}\right)$*. Por tanto* $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*.*

Para verificar los axiomas de densidad, sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \overline{\mathcal{K}}$*.*

1.1.1.7b *Supongamos que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$. Si $\mathcal{M}$ es no contable o $\mathcal{N}$ es no contable, entonces las relaciones $\prec_{\mathcal{K}}$ y $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}}$ coinciden y basta tomar $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$. Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son contables. Aplicando el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente a $\mathsf{T}(\varphi')$, encontramos $\mathcal{N}_0$ no contable tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}_0$ como L'-estructura.*

Para encontrar la estructura $\mathcal{N}'$ lo que nosotros haremos es construir una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}}$-sucesión creciente de estructuras contables $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega}$ tal que $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}} \mathcal{N}'$. Supongamos que para $i < \omega$ tenemos construido $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}} \mathcal{N}_0$ y sea $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ tal que $\mathcal{M}_i \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$. Como en particular $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{N}_0$ por hipótesis, entonces $\mathcal{N}_0 \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ y por tanto $\psi(\mathcal{N}_0, \overline{a})$ es no contable pues $\mathcal{N}_0$ lo es. Como $\mathcal{M}_i$ es contable, entonces $\psi(\mathcal{M}_i, \overline{a})$ tiene que ser contable y en consecuencia $\psi(\mathcal{N}_0, \overline{a}) \setminus \psi(\mathcal{M}_i, \overline{a})$ es no vacío. Para cada $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ tal que $\mathcal{M}_i \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$ escoja $b_\psi(y, \overline{x}) \in \psi(\mathcal{N}_0, \overline{a}) \setminus \psi(\mathcal{M}_i, \overline{a})$ y defina $B_i := M_i \cup \{b_\psi(y, \overline{x}) \in N_0 : \psi(y, \overline{x}) \in \Delta \text{ y } \mathcal{M}_i \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})\}$. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
|B_i| &= \left| M_i \cup \{b_\psi(y, \overline{x}) \in N_0 : \psi(y, \overline{x}) \in \Delta \text{ y } \mathcal{M}_i \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})\} \right|, \\
&= |M_i| + |\{b_\psi(y, \overline{x}) \in N_0 : \psi(y, \overline{x}) \in \Delta \text{ y } \mathcal{M}_i \vDash R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})\}|, \\
&\leq \aleph_0 + \aleph_0 \text{ pues } \Delta \text{ y } \mathcal{M}_i \text{ son contables,} \\
&= \aleph_0
\end{aligned}
$$

y como $M_i \subseteq B_i$ es contable, tenemos entonces que $|B_i| = \aleph_0$. Como ya lo demostramos, la clase satisface el axioma de Löwenheim-Skolem descendente y en consecuencia existe $\mathcal{M}_{i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}} \mathcal{N}_0$ tal que $B_i \subseteq M_{i+1}$ y $|M_{i+1}| \leq |B_i| + \aleph_0$, esto último implica que $\mathcal{M}_{i+1}$ es contable. Como la relación $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}}$ refina a la relación $\prec_{\mathcal{K}}$, entonces $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$ y como $\mathcal{M}_i \subseteq_{L'} \mathcal{M}_{i+1}$, tenemos que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$ pues la clase satisface coherencia. Ahora bien, *si* $\psi(y, \overline{x}) \in \Delta$ *es tal que* $\mathcal{M}_i \models R_{Qy\psi(y,\overline{x})}(\overline{a})$*, entonces* $b_{\psi(y,\overline{x})} \in B_i$ *y en consecuencia* $b_{\psi(y,\overline{x})} \in M_{i+1}$*. Esto último implica que* $\psi(\mathcal{M}_i, \overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{M}_{i+1}, \overline{a})$ *y así* $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$*.*

Defina $\mathcal{N}' := \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$*. Claramente* $\mathcal{N}'$ *es contable pues es la unión contable de estructuras contables. Como la clase satisface los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught, entonces tenemos que* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ *pues* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega}$ *es una* $\prec^u_{\mathcal{K}}$*-sucesión creciente continua.*

1.1.1.7a *Supongamos que* $\mathcal{M} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y que* $|N| > \aleph_0 = LS(\mathcal{K})$*. Notemos que como* $\mathcal{N}$ *es no contable, entonces las relaciones* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y* $\prec^u_{\mathcal{K}}$ *coinciden y por tanto basta tomar* $\mathcal{N}' = \mathcal{M}$*. Si* $\mathcal{M}$ *es contable, se debe porceder como en el ítem anterior pero construyendo la* $\prec^u_{\mathcal{K}}$*-sucesión dentro de* $\mathcal{N}$*, así habremos construido* $\mathcal{N}' \succ^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ *contable y haría falta ver que* $\mathcal{N}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*. Para demostrar esto, notemos en primer lugar que como la relación* $\prec^u_{\mathcal{K}}$ *refiana a* $\prec_{\mathcal{K}}$*, entonces tenemos que* $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *para todo* $i < \omega$ *y como la clase satisface los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught, entonces* $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*. Como* $\mathcal{N}$ *es no contable, entonces por definición las relaciones* $\prec_{\mathcal{K}}$ *y* $\prec^u_{\mathcal{K}}$ *coinciden y por tanto* $\mathcal{N}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*.*

Notemos que la condición que $\mathcal{N}$ *sea no contable es fundamental al momento de hacer que los conjuntos que* $\mathcal{M}$ ***piensa*** *que son no contables crezcan.*

Observación 1.1.7. *Notemos que si consideramos* $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ *y tomamos una sucesión* $\prec_{\mathcal{K}}$*-creciente continua* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\omega}$ *de modelos contables no estándar de* φ*, entonces en* $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$ *lo único que podemos garantizar es que los conjuntos pequeños no crezcan y en consecuencia, podría suceder que* $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$ *sea un modelo no estándar de* φ *pues no hay forma de garantizar que los conjuntos grandes que los modelos* $\mathcal{M}_i$ *piensan que son no contables ganen nuevas realizaciones y por tanto* $\bigcup_{i<\omega_1} \mathcal{M}_i$ *puede pensar que tiene conjuntos no contables que son contables. Esto contradice 1.1.5.*

A continuación enunciaremos otros ejemplos de Q-AEC. Los detalles de estos ejemplos se encuentran en la sección 1.4 de [Cop06]

Ejemplo 1.1.8. *1. Sea $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ una AEC, entonces $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}, \prec_{\mathcal{K}})$ es una Q-AEC.*

2. (Ejemplo 1.4.1 en [Cop06]) Sean T una teoría completa de primer orden y

$$\mathcal{K} := \{\mathcal{M} \models T : \text{ todo subconjunto definible de } \mathcal{M} \text{ tiene cardinalidad } |M|\}.$$

*Los elementos de $\mathcal{K}$ son conocidos como los **modelos de Gross** de la teoría T.*

- *$\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.*
- *$\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si, $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y si para $\overline{a} \in M^{lg(\overline{a})}$ tenemos que $|\psi(\mathcal{M}, \overline{a})| \geq \aleph_0$, entonces $\psi(\mathcal{M}, \overline{a}) \subsetneq \psi(\mathcal{N}, \overline{a})$.*

$(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}, \prec^{u}_{\mathcal{K}})$ es una Q-AEC con número de Löwenheim-Skolem $\aleph_0$.

3. (Ejemplo 1.4.6 en [Cop06]) Sea $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = \{E\}$ donde E es un símbolo de relación binaria. Definimos $\mathcal{K}$ como la clase de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructuras infinitas que interpretan a E como una relación de equivalencia tal que cada elemento $\mathcal{M}$ de $\mathcal{K}$ tiene $|M|$ clases de equivalencia cada una de tamaño $|M|$.

- *$\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{M} \subseteq_{\mathcal{L}} (\mathcal{K})\mathcal{N}$.*
- *$\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si $\mathcal{N}$ tiene una nueva clase de equivalencia y cada clase de equivalencia de $\mathcal{M}$ tiene nuevos elementos en $N \setminus M$.*

$(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}, \prec^{u}_{\mathcal{K}})$ es una Q-AEC con número de Löwenheim-Skolem $\aleph_0$.

Notación 1.1.9. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC y Θ una clase de cardinales. $\mathcal{K}_\Theta$ notará la Q-AEC $\mathcal{K} \restriction_{\{\mathcal{M}\in\mathcal{K}:|M|\in\Theta\}}$ restringinedo relacines en $\mathcal{K}$. Escribiremos $\mathcal{K}_\lambda$ en vez de $\mathcal{K}_{\{\lambda\}}$ y $\mathcal{K}_{\leq\lambda}$ es vez de $\mathcal{K}_{[LS(\mathcal{K}),\lambda]}$.*

El dominio de $\mathcal{K}$ es:

$$\mathrm{dom}(\mathcal{K}) = \{\lambda \textit{ cardinal} : \mathcal{K}_\lambda \neq \emptyset\}$$

Las $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructuras las notaremos con letras caligráficas como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$, entonces el universo de $\mathcal{M}$ lo notaremos M y su cardinal lo notaremos como $|M|$.

En la siguiente definición incluiremos tres propiedades que serán muy útiles en el desarrollo de este trabajo y que son las propiedades que se suponen normalmente en el trabajo clásico de las AECs. Las definiciones que acá daremos serán las dadas por Coppola y en el momento que necesitemos una equivalencia la enunciaremos en el momento que la necesitemos.

Definición 1.1.10 (definiciones 3.1.1 y 3.1.2 en [Cop06])**.** *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC.*

1. *Diremos que $\mathcal{K}$ satisface la **propiedad de amalgamación** (AP por su sigla en inglés, amalgamation property) si para toda tripla de modelos $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que $\mathcal{M}_3 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y f fija puntualmente a $\mathcal{M}_1$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_3 \arrow[r, "f"] & \mathcal{N} \\ \mathcal{M}_1 \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}_2 \arrow[u, hook, "\prec^u_{\mathcal{K}}"'] \end{tikzcd}$$

2. *Diremos que $\mathcal{K}$ tiene la **propiedad de inmersiones conjuntas** (JEP por su sigla en inglés, joint embedding property) si para todo par de modelos $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{K}$, existen $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y una*

$\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathrm{f} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que $\mathcal{M}_1 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[dr, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] & \\
& \mathcal{N} \\
\mathrm{M}_2 \arrow[ur, "\mathrm{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

3. *Diremos que $\mathcal{K}$ tiene* ***modelos arbitrariamente grandes*** *(MAG) si para todo cardinal λ existe un cardinal $\lambda' > \lambda$ tal $\mathcal{K}_{\lambda'} \neq \emptyset$.*

Observación 1.1.11. *Notemos que si $\mathcal{K}$ tiene MAG, entonces para todo cardinal $\lambda \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ existe $\lambda' > \lambda$ tal que $\mathcal{K}_{\lambda'} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\lambda'}$ y sea $\mathrm{A} \supset \mathrm{M}$ de tamaño λ, por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) tenemos que existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{N} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}$ y $|\mathrm{N}| = |\mathrm{A}| + \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, estas dos últimas cosas implican que $|\mathrm{N}| = |\mathrm{A}|$ y por tanto $\mathcal{K}_\lambda \neq \emptyset$.*

En los trabajos realizados por Shelah, Villaveces y Vasey ([SV99], [Vas17c] entre otros), en los cuales están basados muchos de los resultados del trabajo acá expuestos, AP y JEP son deducidas de otras condiciones. Como en el trabajo que haremos siempre las tendremos como supuestos, la siguiente proposición nos permitirá trabajar con mayor facilidad. No se encuentra enunciada en el trabajo de Coppola.

Proposición 1.1.12. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP y tiene MAG. Sea Θ una clase de cardinales. Entonces $\mathcal{K}_\Theta$ satisface AP, JEP y no tiene modelos maximales.*

Demostración. Sean $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{K}_\Theta$ tales que $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. Como $\mathcal{K}$ satisface AP, entonces existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathrm{f} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que $\mathcal{M}_1 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y f fija puntualmente a $\mathcal{M}_0$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición

1.1.1.5), existe $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $M_1 \cup f(M_2) \subseteq N_0$ y $|N_0| \leq LS(\mathcal{K}) + |M_1 \cup f(M_2)|$, esto último implica que $|N_0| = \sup\{|M_1|, |f(M_2)|\}$. De la definición de subestructura es inmediato que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \subseteq \mathcal{N}_0$ y como $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2], \mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, en particular tenemos que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2], \mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ (definición 1.1.1.2) y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$. Ahora, por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*), existe $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $|N'| = |N_0|$; esto último implica que $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}_\Theta$ pues $|N_0| = \sup\{|M_1|, |f(M_2)|\} \in \Theta$; además, al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ pues $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$. Por último $f' : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}'$ definida por $f'(a) = f(a)$ para todo $a \in M_2$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión que fija puntualmente a $\mathcal{M}_0$ pues f lo hace. En conclusión, $\mathcal{K}_\Theta$ satisface AP.

Para ver que $\mathcal{K}_\Theta$ satisface JEP, sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{K}_\Theta$. Como $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces existen $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) existe $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $M_1 \cup f(M_2) \subseteq N_0$ y $|N_0| \leq LS(\mathcal{K}) + |M_1 \cup f(M_2)|$, esto último implica que $|N_0| = \sup\{|M_1|, |f(M_2)|\}$ y por la definición de subestructura tenemos que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \subseteq \mathcal{N}_0$. Por el argumento utilizado en el párrafo anterior, tenemos que existe $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}_\Theta$ tal que $\mathcal{M}_1, f[\mathcal{M}_2] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$; es claro que $f' : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}'$ definida como $f'(a) = f(a)$ para todo $a \in M_2$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues f lo es. Por tanto $\mathcal{K}_\Theta$ satisface JEP.

Por último, sea $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\Theta$. Como $\mathcal{K}$ tiene MAG, existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tal que $|N| > |M|$ y como $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces existen $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$. Claramente $|N'| \geq |N| > |M|$ pues en particular f es una función inyectiva, por tanto existe $a \in N' \setminus M$ y al aplicar el lema 1.1.13, existe $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $|M| = |N'|$, $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y

$\{a\} \subset N'$. Como $|M| \in \Theta$ y $|N'| = |M|$, entonces $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}_\Theta$ y en consecuencia $\mathcal{K}_\Theta$ no tiene modelos maximales. $\boxed{1.1.12}$

A continuación mostramos que la relación $\prec_{\mathcal{K}}$ puede ser cambiada por la relación $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$ bajo una condición de tamaño sobre los modelos que se encuentren relacionados. Coppola enuncia y demuestra el lema; la demostración acá expuesta está hecha con todo detalle.

Lema 1.1.13 (lema 1.3.7 en [Cop06])**.** *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC. Si $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ son tales que $|N| < |M|$, entonces $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$.*

Demostración. En primer lugar notemos que si $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces $N \subseteq M$ y como $|N| < |M|$ existe $A \subset M \setminus N$ tal que $|A| = |N|$. Por la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), existe $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ tal que $N \cup A \subsetneq N'$ y $|N'| \leq |N \cup A| + LS(\mathcal{K}) = |N|$ y por tanto $|N'| = |N|$, esto último implica que $N \subsetneq N' \subsetneq M$. No es difícil ver que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$ y por la definición 1.1.1.2 $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$; al aplicar la definición 1.1.1.4*a* (axiomas de coherencia) tenemos que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ esto es $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ y por la definición 1.1.1.4*b* (axiomas de coherencia) concluimos que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$. $\boxed{1.1.13}$

El siguiente es otro resultado importante para nosotros pues nos permitirá definir diferentes nociones, como estabilidad y universalidad, independientemente de la relación que utilicemos para definirlas teniendo en cuenta que debemos suponer que la Q-AEC satisfaga JEP y tenga MAG. Coppola enuncia de manera explícita el siguiente lema en su trabajo pero no lo demustra y por tal motivo nosotros incluimos dicha demostración acá.

Lema 1.1.14 (lema 1.3.6 en [Cop06])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC y $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Si $\mathcal{K}$ satisface JEP y tiene MAG, existe $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}$ de tal manera que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_0$, $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_0$ y $|N_0| = |N|$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[dr, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & & \mathcal{N} \arrow[dl, hook', dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \\ & \mathcal{N}_0 & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Primero que todo note que como $\mathcal{K}$ tiene MAG, existe $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ tal que $|\mathrm{N}'| > |\mathrm{N}|$ y como $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces existen $\mathcal{N}''$ y una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathrm{f} : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}''$ tal que $\mathcal{N} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$; es inmediato que $|\mathrm{N}''| \geq |\mathrm{N}'|$ pues f es en particular una función inyectiva.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N} \arrow[dr, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] & \\ & & \mathcal{N}'' \\ & \mathcal{N}' \arrow[ur, "\mathrm{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad), existe $\mathcal{N}_0'$ tal que $\mathcal{N}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$ $\mathcal{N}_0 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$ y $|\mathrm{N}'| = |\mathrm{N}_0|$ y por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1. 4*b*) tenemos que $\mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$ pues $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$. $\boxed{1.1.14}$

El siguiente lema es una herramienta importante en las construcciones que haremos más adelante en el dasarrollo de este trabajo. El resultado aparece con su demostración en la tesis de Coppola pero para la completez del documento nosotros incluimos la demostración poniendo aquellos detalles que son omitidos en [Cop06].

Lema 1.1.15 (lema 1.3.5 en [Cop06])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC y $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ con $|\mathrm{M}| < |\mathrm{N}|$. Entonces para todo $\mathrm{A} \subsetneq \mathrm{N}$ con $|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{M}|$, existe $\mathcal{N}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $|\mathrm{M}| = |\mathrm{N}'|$, $\mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}'$.*

Demostración. Sea $B = A \cup M$. Por la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente) existe $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $B \subseteq N_0$ y $|N_0| \leq LS(\mathcal{K}) + |B|$, esto último nos dice que $|N_0| = |B| = |M|$. Ahora bien, por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad) existe $\mathcal{N}'$ tal que $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $|N'| = |N_0|$. Ahora bien, es inmediato de la definición de ser subestructura que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_0$ y como $\mathcal{M}, \mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tenemos que $\mathcal{M}, \mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ (definición 1.1.1.2) y por la definición 1.1.1.4*a* (axiomas de coherencia), $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$; al aplicar ahora la definición 1.1.1.4*b* (axiomas de coherencia) tenemos que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ pues $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$. $\boxed{1.1.15}$

Como en el caso de primer orden, en este contexto tenemos un lema de renombramiento que nos permitirá extender isomorfismos bajo condiciones adecuadas y es una herramienta útil al momento de utilizar la técnica de *back and forth* en el contexto de las Q-AECs. Este lema es simplemente enunciado por Coppola en su trabajo y acá haremos la demostración completa.

Lema 1.1.16 (lema de renombramiento, hecho 1.3.3 en [Cop06])**.** *Si $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $f : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0$ un isomorfismo, entonces existen $\mathcal{N}_1$ y $\bar{f} \supset f$ tales que $\bar{f} : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_1$ es un isomorfismo y $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$. Similarmente se tiene para la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\prec_{\mathcal{K}}(\prec^{u}_{\mathcal{K}})"'] & \mathcal{N}_0 \arrow[d, hook, dashed, "\prec_{\mathcal{K}}(\prec^{u}_{\mathcal{K}})"] \\
\mathcal{M}_1 \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & \mathcal{N}_1
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} (\prec^{u}_{\mathcal{K}}) \mathcal{N}_0$ y por tanto tenemos que $\mathcal{M}_0 \subseteq$

$\mathcal{N}_0$ (definición 1.1.1.2). Sean $N_1 := (M_1 \setminus M_0) \sqcup N_0$ y $\overline{f} : M_1 \longrightarrow N_1$ definida como

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \notin M_0 \\ \\ f(x) \text{ si } x \in M_0. \end{cases}$$

Es inmediato de la definición de la forma como se definió $\overline{f}$ que es una función biyectiva que extiende claramente a la función f. Definiendo de manera natural la interpretación de los símbolos del lenguaje tenemos que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1$ y que $\overline{f}$ es un isomorfismo entre las $LS(\mathcal{K})$-estructuras $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N}_1$. De lo anterior y de la definición 1.1.1.3 (cerradura bajo isomorfismos) tenemos que $\mathcal{N}_0 = \overline{f}(\mathcal{M}_0) \prec_{\mathcal{K}} (\prec^{u}_{\mathcal{K}})\mathcal{N}_1$ pues $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} (\prec^{u}_{\mathcal{K}})\mathcal{M}_1$ y $\overline{f}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{N}_1$. $\boxed{1.1.16}$

Uno de los primeros resultados en AECs es el teorema de Presentación de Shelah el cual nos permitirá hablar del número de Hanf de la clase y es la herramienta que nos permite hablar de modelos de Ehrenfeucht-Mostowski en Q-AECs, fundamentales en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces. En su tesis doctoral [Cop06] Coppola enuncia y demuestra un resultado análogo (teorema 2.1.1 en [Cop06]). A continuación nosotros demostraremos dicho resultado haciendo cuidadosamente las construcciones previas, resaltamos que estas construcciones no se encuentran demostradas en el trabajo de Coppola y en la mayoría de documentos de AECs no se hacen con todos los detalles, cosa que acá haremos. Comenzaremos con una definición técnica.

Definición 1.1.17. *1. Sea $(I, \leq)$ un orden parcial. Diremos que $(I, \leq)$ es un orden λ-dirigido, para λ un cardinal, si para todo $J \subset I$ de tamaño $< \lambda$, existe $a \in I$ tal que $b \leq a$ para todo $b \in J$. Diremos que $(I, \leq)$ es dirigido si es $\aleph_0$-dirigido.*

2. *Diremos que* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i\in I}$ *es un* λ*-sistema dirigido si* $(I, <)$ *es un orden* λ*-dirigido.*

El siguiente hecho es una herramienta clave en la demostración del teorema de Presentación de Shelah para el contexto de las Q-AECs y como su demostración es similar que en el caso de las AECs, nosotros la omitimos.

Hecho 1.1.18 (hecho 1.3.4 en [Cop06])**.** *Sean* $\mathcal{K}$ *una Q-AEC,* $(I, <)$ *un orden dirigido y* $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}\rangle_{i\in I}$ *tal que* $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_j$ *si* $i < j$*. Entonces:*

1. $\bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}$.
2. *Para cada* $i \in I$, $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

A continuación presentamos la versión del teorema de Presentación de Shelah en este contexto. La demostración es hecha por Coppola en [Cop06] y es una adaptación de la que se hace en el contexto de las AECs y por tanto acá no la incluimos.

Hecho 1.1.19 (teorema de Presentación para Q-AECs, teorema 2.1.1 en [Cop06])**.** *Sea* $\mathcal{K}$ *una Q-AEC con* $|\mathcal{L}(\mathcal{K})| \leq \mathsf{LS}(\mathcal{K})$*. Entonces existen* $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}(\mathcal{K})$ *con* $|\mathcal{L}'| = \mathsf{LS}(\mathcal{K})$, T' *una* $\mathcal{L}'$*-teoría de primer orden y un conjunto* Γ *de* $\mathcal{L}'$*-tipos tales que*

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} : \mathcal{M}' \vDash \mathsf{T}' \textit{ y } \mathcal{M}' \textit{ omite todos los tipos de } \Gamma\}.$$

Además, si $\mathcal{M}', \mathcal{N}' \vDash \mathsf{T}'$ *omiten todos los elementos de* Γ *y* $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{N}'$*, entonces* $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$.

Notación 1.1.20.

$$\mathsf{PC}(\mathcal{L}(\mathcal{K}), \mathsf{T}', \Gamma) := \{\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} : \mathcal{M}' \vDash \mathsf{T}' \textit{ y } \mathcal{M}' \textit{ omite todos los tipos de } \Gamma\}$$

Como lo comentamos en la introducción, el concepto de docilidad es clave en los resultados de transferencia de categoricidad dados en [GV06b] y [SV18]. También comentamos en la introducción de Boney demuestra en [Bon14] que la existencia de una clase propia de cardinales fuertemente compactos implica la docilidad de las AECs. En [LR16], Lieberman y Rosický generalizan este resultado al contexto de las categorías accesibles. Como el norte de este trabajo es plantear posibles soluciones al problema en el resultado de transferencia de categoricidad en el contexto de las Q-AECs que se tiene en [Cop06] y donde la docilidad es una hipótesis fundamental, a continuación presentaremos los análogos de algunos resultados expuestos en [LR16], [Lie11] y [BR12] que nos dicen que las AECs son un ejemplo de *categorías accesibles* y así veremos en la última sección que las Q-AECs son ejemplos de categorías accesibles para no tener que adaptar el argumento de Boney a nuestro contexto. Lo que haremos nosotros es adaptar dichos resultados con sus demostraciones al contexto de las Q-AECs. Para ello, definiremos el tipo de morfismos con los que trabajaremos en este contexto.

Definición 1.1.21. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y $\mathsf{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersión.*

(i) Diremos que f es una $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión si $\mathsf{f}[\mathcal{M}] \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

(ii) Diremos que f es una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión si $\mathsf{f}[\mathcal{M}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

El siguiente resultado nos dice que al ver una Q-AEC $\mathcal{K}$ como una categoría cuyos objetos son las estructuras de la clase y cuyos morfismos son las $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersiones, entonces dicha categoría es cerrada bajo colímites dirigidos. Nosotros no utilizamos el lenguaje técnico de la teoría de categorías en el enunciado del lema.

Lema 1.1.22 (cf. lema 4.5 en [Lie11]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $(I, \leq)$ un orden λ-dirigido con $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un ordinal regular y $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i \in I}$ en $\mathcal{K}$ tal que:*

(i) si $i < j$ entonces existe una única $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_{ij} : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_j$ y

(ii) si $i < j$ y $j < k$, entonces $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$.

Entonces existen $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ y una colección de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $\{c_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}\}_{i \in I}$ tales que:

(a) si $i < j$, entonces $c_j \circ f_{ij} = c_i$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "c_i"'] & & \mathcal{M}_j \arrow[dl, "c_j"] \\ & \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

(b) si existe otra colección de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $\{c'_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}'\}_{i \in I}$, con $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}$ que cumpla (a), entonces existe una única $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ tal que para cada $i \in I$ se cumple que $c'_i = F \circ c_i$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "c_i"'] \arrow[ddr, bend right, "c'_i"'] & & \mathcal{M}_j \arrow[dl, "c_j"] \arrow[ddl, bend left, "c'_j"] \\ & \mathcal{M} \arrow[d, dashed, "F"] & \\ & \mathcal{M}' & \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.23. *La estructura $\mathcal{M}'$ junto con la familia de morfismos $\{c'_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}'\}_{i \in I}$ se denomina el colímite de $\{f_{ij} : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_j\}_{i,j \in I}$.*

Para demostrar el lema 1.1.22 nosotros una serie de resultados técnicos que demostramos con todos los detalles a continuación. La demostración la haremos por etapas y comenzaremos definiendo una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ estructura con ayuda de las hipótesis del hecho 1.1.22.

Proposición 1.1.24. *Si* $(i, \leq)$ *es un orden* λ*-dirigido y* $M := \bigsqcup_{i \in I} M_i / \sim$*, donde* $\bigsqcup_{i \in I} M_i$ *es la unión disjunta de los universos de las estructuras* $\mathcal{M}_i$ *con* $i \in I$ *y la relación* $\sim$ *está definida como:* $(a, i) \sim (b, j)$ *si y sólo si existe* $k \in I$*,* $i, j < k$ *y* $f_{ik}(a) = f_{jk}(b)$[1]*. Entonces* M *es el universo de una* $\mathcal{L}(\mathcal{K})$*-estructura* $\mathcal{M}$*.*

Demostración. Veamos que los símbolos del vocabulario $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ se pueden interpretar de una manera adecuada.

- Sea $c \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ un símbolo de constante. Como $c^{\mathcal{M}_i} \in M_i$ para todo $i \in I$, entonces $[(c^{\mathcal{M}_i}, i)] \in M$. Sean $(c^{\mathcal{M}_i}, i), (c^{\mathcal{M}_j}, j) \in \bigsqcup_{i \in I} M_i$. Como I es un orden λ-dirigido, en particular es ω-dirigido y por tanto existe $k \in D$ tal que $j, i \leq k$, luego como f_{ik} y f_{jk} son en particular $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersiones, entonces $f_{ik}(c^{\mathcal{M}_i}) = c^{\mathcal{M}_k} = f_{jk}(c^{\mathcal{M}_j})$ y por tanto $(c^{\mathcal{M}_i}, i) \sim (c^{\mathcal{M}_j}, j)$. Entonces es natural definir $c^{\mathcal{M}} := [(c^{\mathcal{M}_i}, i)]$ para algún $i \in I$.

[1] La relación $\sim$ es de equivalencia:

- Reflexividad: $(a, i) \sim (a, i)$ pues $f_{ii} = 1_{M_i}$ tiene sentido pues I es un orden parcial.
- Simetría: es consecuencia de la simetria de la igualdad.
- Transitividad: suponga que $(a, i) \sim (b, j)$ y $(b, j) \sim (c, k)$, entonces existen $l, l' \in I$ tales que $f_{il}(a) = f_{jl}(b)$ y $f_{jl'}(b) = f_{kl'}(c)$; al ser I λ-dirigido, existe l_0 tal que $l \leq l_0$ y $l' \leq l_0$ y $f_{ll_0}(f_{il}(a) = f_{ll_0}(f_{jl}(b)) = f_{l'l_0}(f_{jl'}(b)) = f_{l'l_0}(f_{kl}(c))$ y por tanto $(a, i) \sim (c, k)$. La última igualdad se tiene pues el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{l_0} & & \\
 & M_l \arrow[ur, "f_{ll_0}"] & & M_{l'} \arrow[ul, "f_{l'l_0}"'] & \\
M_i \arrow[ur, "f_{il}"] & & M_j \arrow[ul, "f_{jl}"'] \arrow[ur, "f_{jl'}"] & & M_k \arrow[ul, "f_{kl'}"']
\end{tikzcd}$$

- Sea $G \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ un símbolo de función n-ario y $[(a_{i_1}, i_1)], \cdots, [(a_{i_n}, i_n)] \in M$, note que $a_{i_j} \in M_{i_j}$ para todo $1 \leq j \leq n$.

  Sean $[(b_{i'_1}, i'_1)], \cdots, [(b_{i'_n}, i'_n)] \in M$ tales que $[(a_{i_j}, i_j)] = [(b_{i'_j}, i'_j)]$, entonces existe $k_j \in I$ tal que $i_j, i'_j \leq k_j$ y $f_{i_j k_j}(a_{i_j}) = f_{i'_j k_j}(b_{i'_j})$ por definición de $\sim$. Como I es un diagrama λ-dirigido, existe $k \in I$ tal que $k_j \leq k$ para todo j y

$$f_{k_j k}(f_{i_j k_j}(a_{i_j})) = f_{k_j k}(f_{i'_j k_j}(b_{i'_j}))$$

  con $f_{i_j k}(a_{i_j}) = f_{i'_j k}(b_{i'_j})$, entonces

$$G^{\mathcal{M}_k}(f_{i_1 k}(a_{i_1}), \cdots, f_{i_n k}(a_{i_n})) = G^{\mathcal{M}_k}(f_{i'_1 k}(b_{i'_1}), \cdots, f_{i'_n k}(b_{i'_n})),$$

  por tanto

$$[(G^{\mathcal{M}_k}(f_{i_1 k}(a_{i_1}), \cdots, f_{i_n k}(a_{i_n})), k)] = [(G^{\mathcal{M}_k}(f_{i'_1 k}(b_{i'_1}), \cdots, f_{i'_n k}(b_{i'_n})), k)].$$

  Lo anterior nos lleva a definir la interpretación de G en $\mathcal{M}$ como

$$G^{\mathcal{M}}([(a_{i_1}, i_1)], \cdots, [(a_{i_n}, i_n)]) := [(G^{\mathcal{M}_k}(f_{i_1 k}(a_{i_1}), \cdots, f_{i_n k}(a_{i_n})), k)]$$

  para algún $k \in I$.

- Sean $R \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ un símbolo de relación n-ario y $[(a_{i_1}, i_1)], \cdots, [(a_{i_n}, i_n)] \in M$. Entonces $([(a_{i_1}, i_1)], \cdots, [(a_{i_n}, i_n)]) \in R^{\mathcal{M}}$ si y sólo sí $(f_{i_1 k}(a_{i_1}), \cdots, f_{i_n k}(a_{i_n})) \in \mathcal{M}^k$ para algún $k \in I$. De manera análoga al ítem anterior se puede demostrar que está bien definida.

  Por tanto, $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructura.

$\boxed{1.1.24}$

Construyamos ahora las $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{U}}$-inmersiones c_i. Para ello primero veamos que existen $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersiones y en base a estas construyamos las $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{U}}$-inmersiones c_i para cada $i \in I$ del lema 1.1.22.

Proposición 1.1.25. *Si definimos* $c_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}$ *como* $c_i(m) = [(m, i)]$, *entonces* c_i *es una* $\mathcal{L}(\mathcal{K})$*-inmersión para todo* $i \in I$.

Demostración. Es claro que para todo $i \in I$, las c_i definidas anteriormente son funciones, veremos ahora que son $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersiones.

- Sean $i \in I$, $m, n \in M_i$ tales que $c_i(m) = c_i(n)$, entonces $[(m, i)] = [(n, i)]$ y por tanto existe $j \in I$ tal que $f_{ij}(m) = f_{ij}(n)$ y como f_{ij} es una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersión, esta es inyectiva y por tanto $m = n$, en consecuencia c_i es una función inyectiva para todo $i \in d$.

- Si $c \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es un símbolo de constante, entonces tenemos que $c_i(c^{\mathcal{M}_i}) = [(c^{\mathcal{M}_i}, i)] = c^{\mathcal{M}}$.

- Sean $G \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ un símbolo de función n-ario y $a_1, \cdots, a_n \in M_i$, entonces

$$\begin{aligned}
c_i(G^{\mathcal{M}_i}(a_1, \cdots, a_n)) &= [(G^{\mathcal{M}_i}(a_1, \cdots, a_n), i)] \\
&= [(G^{\mathcal{M}_i}(f_{ii}(a_1), \cdots, f_{ii}(a_n)), i)] \text{ pues } f_{ii} = 1_{\mathcal{M}_i} \\
&= G^{\mathcal{M}}([(a_1, i)], \cdots, [(a_n, i)]) \\
&= G^{\mathcal{M}}(c_i(a_1), \cdots, c_i(a_n)).
\end{aligned}$$

- Si $R \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es un símbolo ralacional n-ario y $a_1, \cdots, a_n \in M_i$, entonces

$$\begin{aligned}(a_1, \cdots, a_n) \in R^{\mathcal{M}_i} \quad & \text{sii} \quad (f_{ii}(a_1), \cdots, f_{ii}(a_n)) \in R^{\mathcal{M}_i} \text{ pues } f_{ii} = 1_{\mathcal{M}_i} \\ & \text{sii} \quad ([(a_1, i)], \cdots, [(a_n, i)]) \in R^{\mathcal{M}} \text{ definición de la interpretación de } R^{\mathcal{M}} \\ & \text{sii} \quad (c_i(a_1), \cdots, c_i(a_n)) \in R^{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Por tanto, c_i es una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersión para todo $i \in I$. $\boxed{1.1.25}$

Notemos que como cada c_i es una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersión, entonces $c_i(\mathcal{M}_i) \cong \mathcal{M}_i$ y, por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3), tenemos que $c_i(\mathcal{M}_i) \in \mathcal{K}$. Además, si $i \leq j$ y $m \in M_i$, entonces $c_i(m) \in c_i(\mathcal{M}_i)$ y $c_j(f_{ij}(m)) \in c_j(\mathcal{M}_j)$; por otro lado tenemos que $f_{ij}(m) = f_{ii}(f_{ij}(m))$ y por tanto $[(m, i)] = [(f_{ij}(m), j)]$. Lo anterior implica que $c_i(\mathcal{M}_i)$ está contenido en $c_j(\mathcal{M}_j)$.

Proposición 1.1.26. *Para todo* $i, j \in I$ *tales que* $i < j$, $c_i(\mathcal{M}_i) \prec^{u}_{\mathcal{K}} c_j(\mathcal{M}_j)$.

Demostración. Como por hipótesis tenemos que f_{ij} para todos $i, j \in I$ tales que $i < j$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión, entonces $f_{ij}(\mathcal{M}_i) \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_j$ y por tanto al aplicar los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) $c_j(f_{ij}(\mathcal{M}_i)) \prec^{u}_{\mathcal{K}} c_j(\mathcal{M}_j)$, pues $c_j : \mathcal{M}_j \longrightarrow c_j(\mathcal{M}_j)$ es un isomorfismo, en consecuencia $c_i(\mathcal{M}_i) \prec^{u}_{\mathcal{K}} c_j(\mathcal{M}_j)$ debido que $c_j(f_{ij}(\mathcal{M}_i)) = c_i(\mathcal{M}_i)$. Entonces $\langle c_i(\mathcal{M}_i)\rangle_{i \in I}$ es un $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sistema λ-dirigido. $\boxed{1.1.26}$

Demostración lema 1.1.22. Por la construcción hecha en los hechos 1.1.24, 1.1.25 y 1.1.26 es inmediato que la condición (a) del lema 1.1.22 se satisface, esto es que para todos $i, j \in I$ tales que $i < j$, entonces $c_j \circ f_{ij} = c_i$ y por tanto lo único que necesitamos ver es que $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{i \in I} c_i(\mathcal{M}_i)$ y así aplicando el lema 1.1.18 tenemos que $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$. Para ello sea $[(a, i)] \in M$, por tanto existe M_i tal que $a \in M_i$ y en consecuencia $c_i(a) = [(a, i)] \in c_i(\mathcal{M}_i) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} c_i(\mathcal{M}_i)$; recíprocamente, sea $[(a, j)] \in \bigcup\limits_{i \in I} c_i(\mathcal{M}_i)$, entonces $[(a, j)] \in c_i(\mathcal{M}_j)$ para algún $j \in I$ y por definición de c_i, $[(a, j)] \in M$.

Para demostrar la condición (b), sea $\{c'_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}'\}_{i \in I}$ una colección de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones donde $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}$, que cumpla la condición (a) del lema 1.1.22, esto es que $c'_j \circ f_{ij} = c'_i$ para todos $i, j \in I$ tales que $i < j$. En primer lugar notemos que si $a \in M$, entonces, por la definición de M existe $i \in I$ tal que $a = [(m, i)]$ con $m \in \mathcal{M}_i$ y por tanto, al definir $F : M \longrightarrow M'$ como $F(a) = c'_i(m)$ es inmediato que F es una función inyectiva y además es la única tal que $F \circ c_i = c'_i$. $\boxed{1.1.26}$

En el siguiente lema nosotros capturaremos la noción de tamaño en una Q-AEC $\mathcal{K}$ mediante morfismos de manera similar a lo hecho por Lieberman y Rosický para el contexto de las AECs y MAECs en [Lie11] y [LR17]; el concepto en categorías es conocido como *presentabilidad*.

Lema 1.1.27 (cf. lema 4.2 en [Lie11]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC $\lambda > LS(\mathcal{K})$ un cardinal regular y $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{<\lambda}$. Supongamos que $(I, \leq)$ es un orden λ-dirigido y que $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i \in I}$ satisfacen las hipótesis y la conclusión del lema 1.1.22. Si $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión donde $\mathcal{M}$ es el colímite del sistema λ-dirigido $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i \in I}$, entonces existen $j \in I$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}_j$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} & \\
\mathcal{N} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "g"'] & \mathcal{M}_j \arrow[u, "c_j"'] \arrow[r, "f_{jk}"'] & \mathcal{M}_k \arrow[ul, "c_k"']
\end{tikzcd}$$

donde c_j, c_k son las $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones dadas por la conclusión del lema 1.1.22 y $k \geq j$. Además, si

$g' : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}_j$ *es una* $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$*-inmersión tal que* $f = c_j \circ g = c_j \circ g'$, *entonces existe* $k \geq j$ *tal que* $f_{jk} \circ g = f_{jk} \circ g'$.

Si una estructura $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ cumple el enunciado del lema 1.1.27, diremos que $\mathcal{N}$ es λ-presentable.

Demostración. Por la demostración del lema 1.1.22 tenemos que $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i / \sim$ donde $(a, i) \sim (b, k)$ si y sólo si existe $l \in I$ tal que $i, k \leq k$ y $f_{il}(a) = f_{jl}(b)$. Como $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión, tenemos en particular que $f(N) \subseteq M$ y por tanto para todo $n \in N$ existe $i_n \in I$ tal que $f(n) \in c_{i_n}[M_{i_n}]$; además como $|N| < \lambda$ e I es un orden λ-dirigido, entonces existe $j' \in I$ tal que $j' \geq i_n$ para todo $n \in N$ y por tanto $c_{i_n}[\mathcal{M}_{i_n}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}]$. De lo anterior podemos concluir que $f[N] \subset c_{j'}[M_{j'}]$ pues $f(n) \in c_{j'}[M_{j'}]$ para todo $n \in N$ y por tanto $f[\mathcal{N}] \subseteq c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}]$.

Por la demostración del lema 1.1.22 tenemos en particular que $c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y como f es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión tenemos en particular que $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}]$. Como $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i / \sim$, entonces $M \setminus M_{j'} \neq \emptyset$; por tanto existen $m \in M \setminus M_{j'}$ y $j'' \in I \setminus (\{i_n\}_{n \in N} \cup \{j'\}$ tales que $m \in c_{j''}[M_{j''}]$. Como I es un orden λ-dirigido, entonces existe $j \geq j', j''$ y por tanto $c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}], c_{j''}[\mathcal{M}_{j''}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_j$. Como $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} c_{j'}[\mathcal{M}_{j'}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} c_j[\mathcal{M}_j]$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} c_j[\mathcal{M}_j]$. Como $c_j^{-1} : c_j[\mathcal{M}_j] \longrightarrow \mathcal{M}_j$ es un isomorfismo podemos aplicar los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) y concluir que $c_j^{-1}[f[\mathcal{N}]] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_j$ pues $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} c_j[\mathcal{M}_j]$. Defina entonces $g := c_j^{-1} \circ f$ que claramente es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}_j$. Es inmediato de la definición de g que $f = c_j \circ g$ y como para $K \geq j$ tenemos por la conclusión del lema 1.1.22 que

$c_j = c_k \circ f_{jk}$, entonces podemos concluir que $f = c_k \circ f_{jk} \circ g$ y así haciendo así el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{M} & \\
\mathcal{N} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "g"'] & \mathcal{M}_j \arrow[u, "c_j"] \arrow[r, "f_{jk}"'] & \mathcal{M}_k \arrow[ul, "c_k"']
\end{tikzcd}$$

Por último, notemos que si $g' : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}_i$ es una $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-inmersión tal que $f = c_j \circ g = c_j \circ g'$ y para todo $k > j$ tenemos que $f_{jk} \circ g \neq f_{jk} \circ g'$, entonces

$$\begin{aligned}
c_k \circ (f_{jk} \circ g) &\neq c_k \circ (f_{jk} \circ g') \text{ pues } c_k \text{ es en particular una función inyectiva,} \\
(c_k \circ f_{jk}) \circ g &\neq (c_k \circ f_{jk}) \circ g' \text{ por la asociatividad de la composición} \\
c_j \circ g &\neq c_j \circ g' \text{ pues por hipótesis } c_j = c_k \circ f_{jk}
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues $f = c_j \circ g = c_j \circ g'$. $\boxed{1.1.27}$

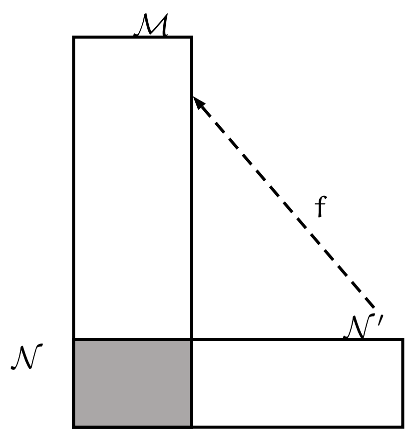
1.2. Modelo-homogeneidad y homogeneidad

El concepto de *modelo-homogeneidad* es importante al definir los tipos de Galois como órbitas bajo la acción del grupo de automorfismos de un modelo lo *suficientemente rico*, que conoceremos como *modelo monstruo*, en el sentido que tenga copias isomorfas de todos los modelos pequeños y que todo isomorfismo entre cosas pequeñas se pueda extender a un automorfismo de dicho *modelo monstruo*.

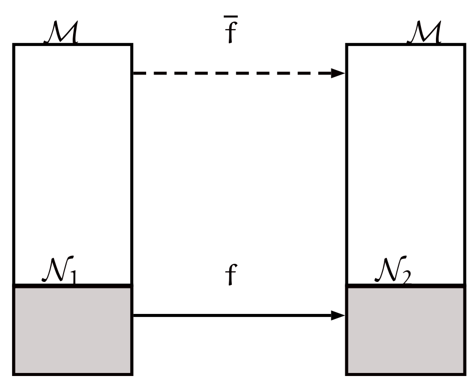
A lo largo es de esta sección $\mathcal{K}$ será una Q-AEC a menos que se diga lo contrario y todas las estructuras de las que hablemos estarán dentro de una Q-AEC fija.

Definición 1.2.1 (definiciones 3.1.5 y 3.1.6 en [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC.*

1. *Diremos que $\mathcal{M}$ es μ-**modelo-homogéneo** si para todo par $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{K}_{<\mu}$ tales que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}} \mathcal{N}'$, existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}}$-inmersión $\mathsf{f} : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que $\mathsf{f} \upharpoonright_{\mathcal{N}} = 1_{\mathcal{N}}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es **modelo-homogéneo** si es $|M|$-homogéneo.*



2. *Diremos que $\mathcal{M}$ es μ-**homogéneo** si para todo par isomorfo $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}_{<\mu}$ tales que $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}} \mathcal{M}$, el isomorfismo entre $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ se puede extender a una automorfismo de $\mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es **homogéneo** si es $|M|$-homogéneo.*



Observación 1.2.2.

- *Notemos que si $\mathcal{M}$ es modelo-homogéneo y $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ es de tamaño $< |M|$, entonces por el lema 1.1.13 tenemos que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}} \mathcal{M}$ y por tanto en la definición 1.2.1.1 podemos tomar cualquier tipo de subestructura ($\prec_{\mathcal{K}}^{\mathsf{u}}$ o $\prec_{\mathcal{K}}$) de $\mathcal{M}$. Además, si $\mathcal{K}$*

satisface JEP, tiene MAG, $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ *es* μ*-modelo-homogéneo y* $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ *con* $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}_{<\mu}$*, entonces al aplicar el lema 1.1.14 existe* $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_{|N'|}$ *tal que* $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$ *y* $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$*; como* $\mathcal{M}$ *es* μ*-modelo-homogéneo, tenemos que existe una* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-inmersión* $f : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ *tal que* $f \restriction_{\mathcal{N}} = 1_{\mathcal{N}}$ *y al ser* $f : \mathcal{N}_0 \longrightarrow f[\mathcal{N}_0]$ *un isomorfismo, entonces* $f[\mathcal{N}'] \prec^{u}_{\mathcal{K}} f[\mathcal{N}_0] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*; por tanto* $f \restriction_{\mathcal{N}'} : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ *es una* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-inmersión pues la relación* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ *es transitiva (definición 1.1.1.1). En consecuencia, en la definición 1.2.1 podemos tomar independientemente* $\prec_{\mathcal{K}}$*-superestructuras o* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-supertructuras de* $\mathcal{N}$*.*

- *Por otro lado si* $\mathcal{M}$ *es homogéneo, entonces por el lema 1.1.13, cualquier isomorfismo entre* $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{K}_{<\mu}$ *tales que* $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ *puede ser extendido a un automorfismo de* $\mathcal{M}$ *pues en este caso tendríamos que* $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$*.*

A continuación veremos que si una Q-AEC $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces toda estructura modelo-homogénea $\mathcal{M}$ tiene copias isomorfas de cualquier estructura $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{<|M|}$. Este hecho es enunciado y demostrado en [Cop06] (corolario 3.1.18) pero en términos del concepto de saturación.

Lema 1.2.3 (cf. corolario 3.1.18 en [Cop06])**.** *Sea* $\mathcal{K}$ *una Q-AEC que satisface JEP. Si* $\mathcal{M}$ *es una estructura modelo-homogénea y* $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{<|M|}$*, entonces existe una* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-inmersión* $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$*.*

Demostración. Sean $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ modelo-homogéneo, $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{|M|}$ y $A \subset N$ tal que $|A| = |N|$. Al aplicar el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), tenemos que existe $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ tal que $A \subset N'$ y $|N'| = |N|$; por JEP tenemos que existen $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}$ y una

$\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{N}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} & \mathcal{M}' \\
\mathcal{N}' \arrow[u, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N} \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) tenemos que existe $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}_{|N|}$ tal que $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ y $f[N] \cup N' \subseteq N''$. Como en particular tenemos que $N', f[N] \subseteq N''$, entonces tenemos que $\mathcal{N}', f[\mathcal{N}] \subseteq \mathcal{N}''$ y como $\mathcal{N}', f[\mathcal{N}], \mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.14*a*) tenemos que $\mathcal{N}', f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$. Como $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, entonces por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) tenemos que existe $\mathcal{M}'' \in \mathcal{K}_{|N''|}$ tal que $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Notemos además que por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $\mathcal{N}', f[\mathcal{N}] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$ pues $\mathcal{N}', f[\mathcal{N}'] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$.

Por último como tenemos que $|N''| = |N|$, entonces $|M''| = |N|$ y como $\mathcal{N}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces por la modelo-homogeneidad de $\mathcal{M}$ existe una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} & \mathcal{M}'' \arrow[l, dashed, "g"'] \\
N' \arrow[u, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[ur, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & f[\mathcal{N}] \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] \\
 & \mathcal{N} \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Definamos $F := g \restriction_{f[\mathcal{N}]} \circ f$. Claramente $F : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$. Además, como en particular $g : \mathcal{M}'' \longrightarrow g[\mathcal{M}'']$ es un isomorfismo y $f[\mathcal{N}] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$, entonces por los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) podemos concluir que $g[f[\mathcal{N}]] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} g[\mathcal{M}''] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y por la transitividad de la relación $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$ (definición 1.1.1.1), tenemos que $g[f[\mathcal{N}]] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$; en conclusión F es una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión. $\boxed{1.2.3}$

El siguiente hecho nos muestra que la propiedad de μ-modelo-homogeneidad implica la propiedad de μ-homogeneidad. Este hecho es demostrado en [Cop06] sin muchos detalles. Presentamos la prueba detallada aquí.

Lema 1.2.4 (lema 3.1.15 en [Cop06]). *Suponga que $\mathcal{M}$ es modelo-homogéneo. Si $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ es un isomorfismo con $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $|M_1|, |M_2| < |M|$, entonces f se extiende a un automorfismo de $\mathcal{M}$; esto es, $\mathcal{M}$ es homogéneo.*

Demostración. En primer lugar notemos que por el lema 1.1.13, tenemos que $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues $|M_1|, |M_2| < |M|$. Para construir el automorfismo de $\mathcal{M}$ haremos un *back and forth* tomando como base el isomorfismo $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$, esto es $f_0 := f$, $\mathcal{M}^0_1 := \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}^0_2 := \mathcal{M}_2$.

Sean $\langle b_i \rangle_{i<|M|}$ una enumeración de $M \setminus M_1$ y $\langle a_i \rangle_{i<|M|}$ una enumeración de $M \setminus M_2$.

Forth (para ordinales impares). Supongamos que para $\beta < |M|$ tenemos construidos $\mathcal{M}^{\beta}_1, \mathcal{M}^{\beta}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y el isomorfismo $f_\beta : \mathcal{M}^{\beta}_1 \longrightarrow \mathcal{M}^{\beta}_2$ con $|M^{\beta}_1|, |M^{\beta}_2| < |M|$. Sea $\beta = \min\{i < |M| : b_i \notin M^{\beta}_1\}$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe $\mathcal{M}'^{\beta+1}_1$ tal que $\{b_\beta\} \cup M^{\beta}_1 \subseteq M'^{\beta+1}_1$ y $|M'^{\beta+1}_1| \leq LS(\mathcal{K}) + |M^{\beta}_1|$, esto último implica que $|\mathcal{M}'^{\beta+1}_1| = |M^{\beta}_1| < |M_1|$ y al aplicar los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) tenemos que existe $\mathcal{M}^{\beta+1}_1$ tal que $\mathcal{M}'^{\beta+1}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^{\beta+1}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $|M'^{\beta+1}_1| = |M'^{\beta+1}_1|$. Es claro que $\mathcal{M}^{\beta}_1 \subseteq \mathcal{M}'^{\beta+1}_1$ y como por la definición 1.1.1.2 tenemos que en particular $\mathcal{M}^{\beta}_1, \mathcal{M}'^{\beta+1}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$, entonces aplicando los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) deducimos que $\mathcal{M}^{\beta}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'^{\beta+1}_1$ y como $\mathcal{M}^{\beta}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'^{\beta+1}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^{\beta+1}_1$, entonces utilizando los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) podemos concluir que $\mathcal{M}^{\beta}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^{\beta+1}_1$.

Como tenemos que $f_\beta : \mathcal{M}^{\beta}_1 \longrightarrow \mathcal{M}^{\beta}_2$ es un isomorfismo $\mathcal{M}^{\beta}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^{\beta+1}_1$, entonces podemos aplicar el lema de renombramiento (lema 1.1.16) y encontrar $\mathcal{M}_2'^{\beta+1} \succ^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2^{\beta}$ y un isomorfismo $f'_{\beta+1} : \mathcal{M}_1^{\beta+1} \longrightarrow \mathcal{M}_2'^{\beta+1}$ tal que $f'_{\beta+1} \supset f_\beta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1^{\beta+1} \arrow[r, dashed, "f'_{\beta+1}"] & \mathcal{M}_2'^{\beta+1} \\
\mathcal{M}_1^{\beta} \arrow[u, hook, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "f_\beta"'] & \mathcal{M}_2^{\beta} \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $\mathcal{M}$ es modelo-homogéneo y $|M_2'^{\beta+1}| = |M_1^{\beta+1}| < |M|$, entonces existe una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $h_{\beta+1} : \mathcal{M}_2'^{\beta+1} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que $h_{\beta+1} \restriction_{\mathcal{M}_2^\beta} = 1_{\mathcal{M}_2^\beta}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} & h_{\beta+1}[\mathcal{M}_2'^{\beta+1}] \arrow[l, hook', dashed, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"'] \\
\mathcal{M}_1^{\beta+1} \arrow[u, hook, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "f'_{\beta+1}"] & \mathcal{M}_2'^{\beta+1} \arrow[u, dashed, "h_{\beta+1}"'] \\
\mathcal{M}_1^{\beta} \arrow[u, hook, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "f_\beta"'] & \mathcal{M}_2^{\beta} \arrow[u, hook, "\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Definamos entonces $\mathcal{M}_2^{\beta+1} := h_{\beta+1}[\mathcal{M}_2'^{\beta+1}]$ y $f_{\beta+1} : \mathcal{M}_{\beta+1} \longrightarrow \mathcal{M}_2^{\beta+1}$ como $f_{\beta+1} := h_{\beta+1} \circ f'_{\beta+1}$. Claramente tenemos que $f_{\beta+1} \supset f_\beta$ pues $f'_{\beta+1} \supset f_\beta$ y $h_{\beta+1} \restriction_{\mathcal{M}_2^\beta} = 1_{\mathcal{M}_2^\beta}$.

Back (para ordinales impares). La construcción es análoga a la hecha en el paso forth pero comenzando con $\beta = \min\{i < |M| : a_i \notin M_2^\beta\}$.

Cuando $\beta < |M|$ sea un ordinal límite y tengamos definidos $\mathcal{M}_1^\alpha, \mathcal{M}_2^\alpha \mathcal{M}$ e isomorfismos $f_\alpha : \mathcal{M}_1^\alpha \longrightarrow \mathcal{M}_1^\alpha$ para todo $\alpha < \beta$, definamos $f_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} f_\alpha$, $\mathcal{M}_1^\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{M}_1^\alpha$ y $\mathcal{M}_2^\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{M}_2^\alpha$. Por construcción resulta inmediato que $\mathcal{M} = \bigcup_{\beta<|M|} \mathcal{M}_1^\beta = \bigcup_{\beta<|M|} \mathcal{M}_2^\beta$ y por tanto $F := \bigcup \beta < |M| f_\beta$ es el automorfismo de $\mathcal{M}$ buscado pues $f = f_0 \subset F$. $\boxed{1.2.4}$

La siguiente proposición nos muestra que los modelos que son modelo-homogéneos del mismo tamaño son únicos salvo isomorfismo bajo JEP. Coppola enuncia el resultado en su trabajo pero no lo demuestra, nosotros incluimos la demostración del resultado para completez del documento.

Proposición 1.2.5 (hecho 3.1.13 in [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface JEP. Si $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ son ambos μ-modelo-homogéneos tales que $|M_0| = |M_1| = \mu$ y $\mu > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ son isomorfos.*

Demostración. Para hacer la demostración tenemos dos opciones: $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ tienen una $\prec_{\mathcal{K}}$-subestructura común pequeña.

1. Si existe $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_0$ -notemos que por el lema 1.1.13 esto implica que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_0$-, con $|N| < \mu$, el isomorfismo se obtiene mediante *back and forth* de la siguiente manera.

   Base. Tome $\mathcal{M}_0^0 = \mathcal{M}_1^0 = \mathcal{N}$ y $f_0 : \mathcal{M}_0^0 \longrightarrow \mathcal{M}_1^0$ como la identidad de $\mathcal{N}$. Claramente f_0 es un isomorfismo parcial entre $\mathcal{M}_0^0$ y $\mathcal{M}_1^0$.

   Sean $\{m_i : i < |M_0|\} = M_0 \setminus N$ y $\{m_i : i < |M_1|\} = M_1 \setminus N$.

   Back (para ordinales impares). Suponga construidos $\mathcal{M}_0^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y el isomorfismo parcial $f_\beta : \mathcal{M}_0^\beta \longrightarrow \mathcal{M}_1^\beta$ construidos. Sea $\beta + 1 = \text{mín}\{i < |M_0| : m_i \notin M_0^\beta\}$. Por la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), existe $\mathcal{M}_1'^{\beta+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ tal que $\{m_{\beta+1}\} \cup M_1^\beta \subseteq M_1'^{\beta+1}$; es fácil ver que $\mathcal{M}_1^\beta \subseteq \mathcal{M}_1'^{\beta+1}$ y por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*), existe $\mathcal{M}_1^{\beta+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1'^{\beta+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1^{\beta+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$; por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) esto último implica que $\mathcal{M}_1^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1^{\beta+1}$. Ahora bien, por el lema 1.1.16 (lema de renombramiento) existen $\mathcal{N}'$ y un isomorfismo $g : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\beta+1}$ tales que $\mathcal{M}_0^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y

$f_\beta \subseteq g$ y al utilizar la μ-modelo-homogeneidad de $\mathcal{M}_0$, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g' : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\beta+1}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}_0^{\beta}$. Definamos $\mathcal{M}_0^{\beta+1} := g'(\mathcal{N}')$ y $f_{\beta+1} = g \circ g'$. Claramente tenemos que $f_\beta \subseteq f_{\beta+1}$ pues si $a \in M_0^\beta$ entonces

$$\begin{aligned} f_{\beta+1}(a) &= g \circ g^{-1}(a) \\ &= g(g^{-1}(a)) \\ &= g(a) \text{ pues g fija puntualmete a } \mathcal{M}_0^\beta \\ &= f_\beta(a) \text{ pues g extiende a } f_\beta. \end{aligned}$$

Forth (para ordinales pares) Suponga construidos $\mathcal{M}_0^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1^\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y el isomorfismo parcial $f_\beta : \mathcal{M}_0^\beta \longrightarrow \mathcal{M}_1^\beta$ construidos. Sea $\beta+1 = \text{mín}\{j < |M_1| : m_j \notin M_0^\beta\}$. Puede hacer la misma construcción que en el caso anterior intercambiando los papeles de $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$.

(Para ordinales límites) Si $\beta < |M_0| = |M_1|$ es un ordinal límite y tenemos construidos $\mathcal{M}_0^{\beta'} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1^{\beta}$, $\mathcal{M}_1^{\beta'} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ e isomorfismos $f_\alpha : \mathcal{M}_0^{\beta'} \longrightarrow \mathcal{M}_1^{\beta'}$ están definidos para todo $\beta' < \beta$. Definimos $\mathcal{M}_0^\beta := \bigcup \bigcup_{\beta'<\beta} \mathcal{M}_0^{\beta'}, \mathcal{M}_1^\beta := \bigcup_{\beta'<\beta} \mathcal{M}_1^{\beta'}$ y $f_\beta := \bigcup_{\beta'<\beta} f_{\beta'}$.

De la anterior construcción resulta inmediato que el isomorfismo buscado es $f = \bigcup_{\beta<|M_0|} f_\beta$ pues $\mathcal{M}_0 = \bigcup_{\beta<|M_0|} \mathcal{M}_0^\beta$ y $\mathcal{M}_1 = \bigcup_{\beta<|M_1|} \mathcal{M}_1^\beta$.

2. Si $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ no tienen una subestructura pequeña común, tome $a \in M_0$ y $b \in M_1$; por la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente) existen $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}}$

$\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ tales que $|N_0| = |N_1| = LS(\mathcal{K})$ y $\{a\} \subseteq N_0, \{b\} \subseteq N_1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 & \mathcal{M}_1 \\
\mathcal{N}_0 \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_1 \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Por JEP existen una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $h_0 : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ y $\mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 & & \mathcal{M}_1 \\
\mathcal{N}_0 \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[dr, dashed, "h_0"] & & \mathcal{N}_1 \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dl, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \\
& \mathcal{N}_2 &
\end{tikzcd}$$

Como $h_0^{-1} : h_0[\mathcal{N}_0] \longrightarrow \mathcal{N}_0$ es un isomorfismo y $h_0[\mathcal{N}_0] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2$, entonces por el lema de renombramiento (el Lema 1.1.16), existen $\mathcal{N}_2' \in \mathcal{K}$ y un isomorfismo $h : \mathcal{N}_2' \longrightarrow \mathcal{N}_2$ tales que $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2'$ y $h_0^{-1} \subseteq h^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 & & \mathcal{M}_1 \\
\mathcal{N}_0 \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[dr, "h_0"] \arrow[dd, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & & \mathcal{N}_1 \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dd, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \\
& h_0[N_0] \arrow[dr, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \\
\mathcal{N}_2' \arrow[rr, dashed, "h"'] & & \mathcal{N}_2
\end{tikzcd}$$

Utilizando los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), densidad (definición 1.1.1.7*b*) y coherencia (definiciones 1.1.1.4*a* y 1.1.1.4*c*) podemos suponer que $|N_2| = |N_2'| < \mu$ y como $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{M}_1$ son μ-modelo homogéneos, existen $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $g_0 : \mathcal{N}_2' \longrightarrow \mathcal{M}_0$ y $g_1 : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ que fijan puntualmente a $\mathcal{N}_0$ y a $\mathcal{N}_1$ respectivamente. Notemos que como $\mathcal{N}_2$ y $\mathcal{N}_2'$ son isomorfos, entonces $g_0[\mathcal{N}_2']$ y

$g_1[\mathcal{N}_2]$ son isomorfos y podemos tomar este último isomorfismo como base para el back and forth como el que hicimos en el ítem anterior.

$\boxed{1.2.5}$

El siguiente teorema es enunciado por Coppola en [Cop06] pero la conclusión a la que él llega es la existencia de una extensión saturada. Debido que no es muy clara la forma en la que Coppola demuestra dicha afirmación, nosotros mostramos que siempre encontramos una extensión μ-modelo homogénea, lo cuál es equivalente a lo que demuestra Coppola gracias al teorema 1.4.3.

Teorema 1.2.6 (cf. lema 3.1.4 en [Cop06])**.** *Si $\mathcal{K}$ es una Q-AEC que satisface AP, entonces todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ tiene una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-extensión $|M|$-modelo homogénea.*

Demostración. Sean $\lambda = |M|$ y $\mathcal{M}', \mathcal{M}'' \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}, \mathcal{M}''$ y $|M''| < \lambda$. Por AP, existen $\mathcal{N}_0'$ y una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_0 : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{N}_0$ de tal manera que $\mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0'$ y por la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), existe $\mathcal{N}_0 \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0'$ de tal que $M \cup f[M''] \subseteq N_0$ y $|N_0| = |M| + |f[M'']| < \lambda$. Si Suponemos que $\mathcal{N}_\beta$ está construido para $\beta < \lambda$, entonces utilizando la misma idea anterior, podemos construir $\mathcal{N}_{\beta+1}$. Para el caso en que $\beta < \lambda$ sea un ordinal límite, defina $\mathcal{M}_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{N}_\alpha$. Definamos $\mathcal{N} := \bigcup_{\beta<\lambda+1} \mathcal{N}_\beta$. Por la construcción de $\mathcal{N}$ es claro que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$; veamos que es λ-modelo-homogéneo. Sean $\mathcal{M}', \mathcal{N}'$ tales que $\mathcal{M}' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ con $|N'| < \lambda$; por la regularidad de $\lambda + 1$ y la definición 1.1.1.4*a* (axioma de Coherencia), existe $\beta < \lambda + 1$ de tal maneta que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_\beta$ y por la construcción de $\mathcal{N}$ existe una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta+1}$ y por la transitividad de $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$, podemos afirmar que $f[\mathcal{N}'] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, por tanto $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$. En consecuencia $\mathcal{N}$ es λ-modelo-homogéneo. $\boxed{1.2.6}$

El siguiente teorema nos permitirá construir modelos lo suficientemente *ricos* el el sentido que realizarán todos los tipos sobre modelos más pequeños y nos permitirán extender cualquier isomorfismo entre modelos pequeños a automorfismos. La demostración es hacer una construcción al estilo límites de Fraïssé y es similar a la prueba en el contexto de las AECs. En el capítulo 3 de [Cop06] Coppola hace la demostración del siguiente teorema y por tanto nosotros la omitimos acá.

Teorema 1.2.7 (cf. teorema 3.3 en [Bal05])**.** *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP y JEP, tiene MAG y sea μ un cardinal tal que $\mu^{<\mu} = \mu$ y $\mu \geq 2^{LS(\mathcal{K})}$. Entonces existe un modelo $\mathbb{C} \in \mathcal{K}$ de cardinalidad μ que es homogéneo y modelo-homogéneo, esto último implica que $\mathbb{C}$ tiene copias isomorfas de todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{<\mu}$.*

Notación 1.2.8. *Un modelo dado por el teorema 1.2.7 es llamado* ***modelo monstruo*** *y lo notaremos $\mathbb{C}$, su universo se notará $|\mathbb{C}|$ y su tamaño $\|\mathbb{C}\|$.*

Observación 1.2.9. *Notemos que por el lema 1.2.3 podemos afirmar que para toda estructura $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\|\mathbb{C}\|}$ existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ es decir, para toda $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ existen un modelo monstruo $\mathbb{C} \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{M} \approx \mathcal{N}$.*

1.3. Tipos de Galois

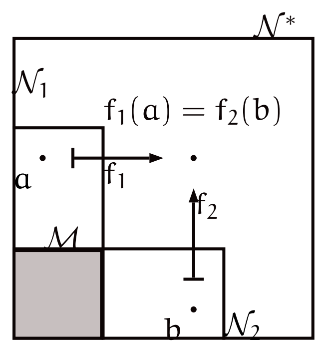
Como ocurre en el caso de las AECs, en este contexto queremos evitar el uso de una lógica específica y por tanto introduciremos la noción de *tipo de Galois*. Dicha noción es adaptada del caso de las AECs al caso de las Q-AECs por Coppola en [Cop06] como tipos *orbitales*. En esta sección nosotros introduciremos las dos formas de definir los *tipos de*

Galois como lo hacen, por ejemplo, Baldwin en [Bal09] y VanDieren en [Van06]. La primera presentación que hacemos acá de los tipos de Galois, usando relaciones de equivalencia entre ciertas triplas como en [She99], no es mencionada por Coppola en [Cop06] pero será de gran ayuda en algunas construcciones que haremos más adelante. Comenzaremos definiendo una relación que bajo AP resulta ser de equivalencia, esta adaptación de tipo de Galois es mencionada por primera vez en este trabajo.

Notación 1.3.1. *La tripla* $(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N})$ *denota* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y* $\overline{a} \in \mathcal{N}^{lg(\overline{a})}$.

Definición 1.3.2. *Definimos la* ***relación*** $\sim$ *entre triplas* $(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N}_1)$ *y* $(\mathcal{M}, \overline{b}, \mathcal{N}_2)$ *de la siguiente manera:*

$(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N}_1) \sim (\mathcal{M}, \overline{b}, \mathcal{N}_2)$ *sí y solamente si existen* $\mathcal{N}^*$ *y* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-inmersiones* $f_1 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}^*$, $f_2 : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}^*$ *tales que* $f_i \upharpoonright_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ *y* $f_1(\overline{a}) = f_2(\overline{b})$.



Observación 1.3.3. *1. Por definición,* $\sim$ *es una relación simétrica y para ver que es reflexiva basta tomar* $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}^*$ *y las inmersiones* f_1 *y* f_2 *como la identidad .*

2. *Sea* $(\mathcal{M}, a, \mathcal{N})$. *Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe* $\mathcal{N}_a \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *tal que* $M \cup \{a\} \subset N_a$ *y* $|N_a| = |M|$. *Notemos además que como* $M \cup \{a\} \subset N_a'$, *entonces* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_a$ *y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4a)* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_a$ *pues en particular tenemos que* $\mathcal{M}, \mathcal{N}_a \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *y* $\mathcal{N}_a \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. *Al aplicar los axiomas de coherencia de nuevo (definición 1.1.1.4b) tenemos que* $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ *pues* $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_a' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. *Lo anterior indica que la relación tomada en la tripla puede ser cualquiera de las dos:* $\prec_{\mathcal{K}}$ *o* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$.

La siguiente observación es una forma equivalente de AP y es necesaria para explicar la razón por la cual definimos la relación $\sim$ en términos de $\prec_{\mathcal{K}}$, esto se hará explícito en la proposición 1.3.5.

Observación 1.3.4. *Notemos que* $\mathcal{K}$ *tiene AP si y sólo si dados cualesquiera* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{K}$ *tales que* $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, *entonces existen* $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ *y dos* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-*inmersiones* $f_1 : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{N}$ *y* $f_2 : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$ *tales que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_2 \arrow[r, dashed, "f_2"] & \mathcal{N} \\
\mathcal{M}_0 \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}_1 \arrow[u, dashed, "f_1"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si $\mathcal{K}$ satisface AP, entonces para todo $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ tales que $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, esiste $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que $\mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[r, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N} \\
\mathcal{M}_0 \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}_2 \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Siendo así, la inclusión $in : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{N}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión y al tomar $f_1 = in$ y $f_2 = f$ tenemos el resultado. El recíproco se sigue del lema de renombramiento (lema 1.1.16).

$\boxed{1.3.4}$

La siguiente proposición nos muestra que bajo AP la relación $\prec$ resulta ser transitiva, las ideas de la demostración las tomamos de [Van06] y la adaptación que presentamos no es hecha en [Cop06].

Proposición 1.3.5. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC. Si $\mathcal{K}$ tiene AP, entonces $\sim$ es una relación transitiva.*

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{M}, a, \mathcal{N}_1) \sim (\mathcal{M}, b, \mathcal{N}_2)$ y $(\mathcal{M}, a, \mathcal{N}_2) \sim (\mathcal{M}, c, \mathcal{N}_3)$, entonces por definición existen $\mathcal{N}_{12}, \mathcal{N}_{23} \in \mathcal{K}$ y $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_1 : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_{12}$, $f_2 : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}_{12}$, $g_2 : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}_{23}$ y $g_3 : \mathcal{N}_3 \longrightarrow \mathcal{N}_{23}$ con $f_1(a) = f_2(b)$ y $g_2(b) = g_3(c)$ tales que $f_i \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ para $i = 1, 2$, $g_j \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ para $j = 2, 3$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{N}_{12} \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] \arrow[d, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[d, "g_2"] \\
\mathcal{N}_3 \arrow[r, "g_3"'] & \mathcal{N}_{23}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{K}$ satisface AP, entonces por la observación 1.3.4 existen $\mathcal{N}^*$ e $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $h_1 : \mathcal{N}_{12} \longrightarrow \mathcal{N}^*$, $h_2 : \mathcal{N}_{23} \longrightarrow \mathcal{N}^*$ tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{N}_{12} \arrow[dr, "h_1"] & \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] \arrow[d, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[d, "g_2"] & \mathcal{N}^* \\
\mathcal{N}_3 \arrow[r, "g_3"'] & \mathcal{N}_{23} \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

De nuevo por la obsevación 1.3.4 y utilizando el lema de renombramiento (lema 1.1.16) podemos suponer que $f_2,\ g_2,\ h_2$ son inclusiones y por tanto nosotros tenemos que para todo $m \in M$.

$$\begin{aligned} h_1 \circ f_1(m) &= h_1 \circ f_2(m) \\ &= h_2 \circ g_3(m) \\ &= h_2 \circ g_2(m) = 1_{\mathcal{M}}(m) = m. \end{aligned}$$

Entonces $h_1 \circ f_1 \restriction_{\mathcal{M}} = h_2 \circ g_3 \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ y para a tenemos que

$$\begin{aligned} (h_1 \circ f_1)(a) &= h_1(f_1(a)) \\ &= h_1(f_2(b)) \\ &= h_2(g_2(b)) \\ &= h_2(g_3(c)) \\ &= (h_2 \circ g_3)(c). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_1 \arrow[r, "h_1 \circ f_1"] & \mathcal{N}^* \\ \mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}_3 \arrow[u, "h_2 \circ g_3"'] \end{tikzcd}$$

Por tanto $(\mathcal{M}, a, \mathcal{N}_1) \sim (\mathcal{M}, c, \mathcal{N}_3)$. $\boxed{1.3.5}$

De manera análoga a como lo hace Shelah en [She99], la proposición anterior nos permite definir los tipos de Galois como relaciones de equivalencia entre triplas de la forma $(\mathcal{M}, \bar{a}, \mathcal{N})$.

Definición 1.3.6. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC con AP, JEP y MAG. El* ***tipo de Galois*** *de $\overline{a}$ sobre $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ se define como*

$$ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}\right) := [(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N})]_{\sim}.$$

La clase de los tipos de Galois sobre *$\mathcal{M}$ se denotará por $ga - S\left(\mathcal{M}\right)$.*

Observemos que si $ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1\right) = ga - tp\left(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_2\right)$, entonces existen $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ y dos $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_1 : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}'$ y $f_2 : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}'$ tales que $f_1(\overline{a}) = f_2(\overline{b})$ y $f_1 \upharpoonright_{\mathcal{M}} = f_2 \upharpoonright_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] & \mathcal{N}' \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[u, dashed, "f_2"']
\end{tikzcd}$$

Por definición de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión tenemos que $f_2[\mathcal{N}_2] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y como $f_2^{-1} : f_2[\mathcal{N}_2] \longrightarrow \mathcal{N}_2$ es un isomorfismo, podemos aplicar el lema de renombramiento (lema 1.1.16) y encontrar $\mathcal{N}^* \in \mathcal{K}$ y un isomorfismo $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}^*$ tales que $\mathcal{N}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$ y $f_2^{-1} \subseteq f$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}' \arrow[r, dashed, "f"] & \mathcal{N}^* \\
f_2[\mathcal{N}_2] \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "f_2^{-1}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que $f \circ f_1 : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}^*$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues como $f_1[\mathcal{N}_1] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}^*$ es un isomorfismo, entonces por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3) tenemos que $f \upharpoonright_{f_1[\mathcal{N}_1]} [f_1[\mathcal{N}_1]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$. Por otra parte tenemos que si $m \in N_2$ entonces

$$\begin{aligned}
(f \circ f_2)(m) &= f(f_2(m)), \\
&= f_2^{-1}(f_2(m)), \\
&= m = 1_{\mathcal{N}_2}(m)
\end{aligned}$$

y por tanto $1_{\mathcal{N}_2} = f \circ f_2$. Además

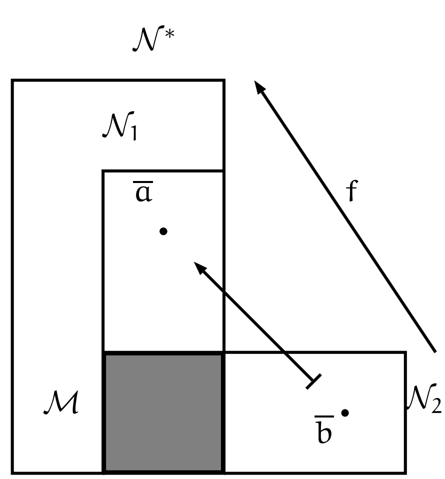
$$\begin{aligned} f \circ f_1(\overline{a}) &= f(f_1(\overline{a})), \\ &= f(f_2(\overline{b})) \text{ pues } f_1(\overline{a}) = f_2(\overline{b}) \text{ por hipótesis,} \\ &= 1_{\mathcal{N}_2}(\overline{b}) \text{ pues } \overline{b} \in N_2^{lg(\overline{b})} \text{ y } f \circ f_2 = 1_{\mathcal{N}_2} \\ &= \overline{b}. \end{aligned}$$

En conclusión $\mathcal{N}^*$ y $f \circ f_1$ junto con la inclusión de $\mathcal{N}_2$ en $\mathcal{N}^*$ atestiguan que $ga-tp\,(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1)$ $= ga - tp\,(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_2)$.

Recíprocamente es inmediato de la definición de tipo de Galois (definición 1.3.6) que dados $\mathcal{M}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}$ con $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$, $\overline{a} \in N_1^{lg(\overline{a})}$ y $\overline{b} \in N_2^{lg(\overline{b})}$; si existen $\mathcal{N}^* \succ_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_1$ y una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}^*$ tal que $f(\overline{b}) = \overline{a}$, entonces $ga - tp\,(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1) = ga - tp\,(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_2)$.

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.7. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP y $\mathcal{M}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}$. Diremos que $\overline{b} \in N_2^{lg(\overline{b})}$ realiza $ga - tp(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1)$, lo cual notaremos por $\overline{b} \models ga - tp(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{N}_1)$, si existen $\mathcal{N}^*$ y una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f : \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}^*$ tales que $\mathcal{N}_1 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}^*$ y $f(\overline{b}) = \overline{a}$.*



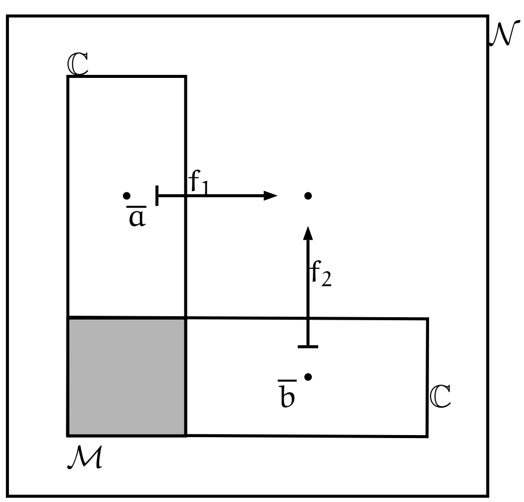
Notemos que el teorema 1.2.7 nos da un modelo monstruo por cada cardinal μ que satisfaga $\mu^{<\mu} = \mu$; el siguiente lema nos permitirá definir el concepto de tipo de Galois como son definidos en el capítulo 3 de [Cop06] y nos muestra que las dos formas de definir tipo de Galois coinciden. Este resultado es adaptado por vez primera al contexto de las Q-AEC en este trabajo. Las ideas de la demostración las tomamos de [Van06].

Proposición 1.3.8. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP y tiene MAG.* $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathbb{C})$ *si y sólo si existe* $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ *tal que* $f(\overline{a}) = \overline{b}$.

Demostración. Sea $f \in \mathrm{aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ tal que $f(\overline{a}) = \overline{b}$. Notemos que como $f \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ y $f(\overline{a}) = \overline{b}$, entonces $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathbb{C})$ y el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathbb{C} \arrow[u, "1_{\mathbb{C}}"']
\end{tikzcd}$$

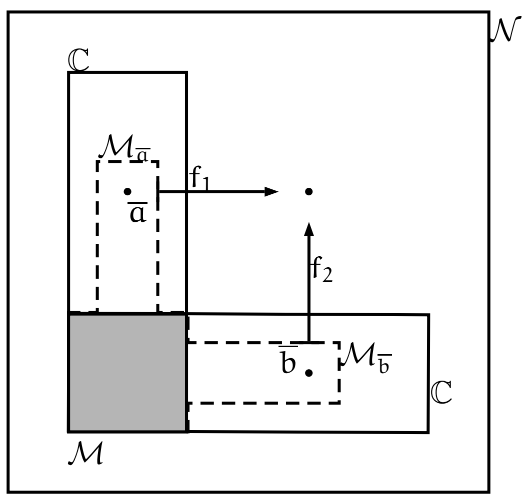
Recíprocamente, suponga que $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \mathrm{ga}-\mathrm{tp}(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Entonces existen $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ e $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_1, f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ tales que $f_1 \restriction_{\mathcal{M}} = f_2 \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$, $f_1(\overline{a}) = f_2(\overline{b})$.



Como en construcciones anteriores, al utilizar los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), de densidad (definición 1.1.1.7*b*) y de coherencia (definición

1.1.1.4*c*) podemos construir $\mathcal{M}_{\overline{a}}, \mathcal{M}_{\overline{b}}, \mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ tales que

- $\{\overline{a}\} \cup M \subseteq M_{\overline{a}}$,
- $\{\overline{b}\} \cup M \subseteq M_{\overline{b}}$,
- $\mathcal{M}_{\overline{a}}, \mathcal{M}_{\overline{b}} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$,
- $f_1[M_{\overline{a}}] \cup f_2[M_{\overline{b}}] \subseteq N'$,
- $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y
- $|M_{\overline{a}}|, |M_{\overline{b}}|, |N'| < \|\mathbb{C}\|$.



Como $f_2 : \mathcal{M}_{\overline{b}} \longrightarrow f_2[\mathcal{M}_{\overline{b}}]$ es un isomorfismo y $f_2[\mathcal{M}_{\overline{b}}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, entonces al aplicar el lema de renombramiento (lema 1.1.16) existen $\mathcal{N}'' \succ^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\overline{b}}$ y un isomorfismo $g : \mathcal{N}'' \longrightarrow \mathcal{N}'$ tal que $g \supset f_2$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}'' \arrow[r, dashed, "g"] & \mathcal{N}' \\
\mathcal{M}_{\overline{b}} \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, "f_2"'] & f_2[\mathcal{M}_{\overline{b}}] \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto $f_{\overline{a}} : \mathcal{M}_{\overline{a}} \longrightarrow \mathcal{N}''$ definida como $f_{\overline{a}}(x) := g^{-1}(f_1(x))$ y $f_{\overline{b}} : \mathcal{M}_{\overline{b}} \longrightarrow \mathcal{N}'$ definida como $f_{\overline{b}}(y) := g^{-1}(f_2(y))$ son $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones y como por construcción tenemos que $g \restriction_{\mathcal{M}} = f_2 \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\overline{a}} \restriction_{\mathcal{M}} &= (g^{-1} \circ f_1) \restriction_{\mathcal{M}} \\ &= g^{-1} \restriction_{\mathcal{M}} \circ f_1 \restriction_{\mathcal{M}} \\ &= 1_{\mathcal{M}} \circ 1_{\mathcal{M}} \\ &= 1_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} f_{\overline{b}} \restriction_{\mathcal{M}} &= (g^{-1} \circ f_2) \restriction_{\mathcal{M}} \\ &= g^{-1} \restriction_{\mathcal{M}} \circ f_2 \restriction_{\mathcal{M}} \\ &= 1_{\mathcal{M}} \circ 1_{\mathcal{M}} \\ &= 1_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

además como

$$\begin{aligned} f_{\overline{a}}(\overline{a}) &= (g^{-1} \circ f_1)(\overline{a}) \text{ por definición.} \\ &= g^{-1}(f_1(\overline{a}). \\ &= g^{-1}(f_2(\overline{b}) \text{ por la escogencia de } f_1 \text{ y } f_2, \\ &= \overline{b} \text{ pues } f_2 \subseteq g. \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que $ga - tp(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathcal{M}_{\overline{a}}) = ga - tp(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathcal{M}_{\overline{b}})$. Debido que $\mathcal{M}_{\overline{b}} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$, $|M_{\overline{b}}|, |N''| < \|\mathbb{C}\|$ y $\mathbb{C}$ es modelo-homogéneo, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}'' \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(y) = y$ para todo $y \in M_{\overline{b}}$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\overline{a}} \arrow[r, "f_{\overline{a}}"] & \mathcal{N}'' \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}_{\overline{b}} \arrow[u, "f_{\overline{b}}"'] \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathbb{C}.
\end{tikzcd}$$

Ahora como $\mathcal{M}_{\overline{a}} \cong f[f_{\overline{a}}[\mathcal{M}_{\overline{a}}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $f \circ f_{\overline{a}}$ fija puntualmente a $\mathcal{M}$, entonces existe $F \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ tal que $F \supset f \circ f_{\overline{a}}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
F(\overline{a}) &= f(f_{\overline{a}}(\overline{a})), \\
&= f(f_{\overline{b}}(\overline{b})) \text{ por la escogencia de } f_{\overline{a}} \text{ y de } f_{\overline{a}}, \\
&= \overline{b} \text{ pues } f \text{ fija puntualmente a } \mathcal{M}_{\overline{b}}.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $F \in \mathrm{aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ y $F(\overline{a}) = \overline{b}$. $\boxed{1.3.8}$

Basados en la proposición anterior, podemos re-definir la noción de tipo de Galois en términos de automorfismos.

Notación 1.3.9. *Sea $\mathbb{C}$ un modelo monstruo y $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. $\mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ denotará el conjunto de automofismos de $\mathbb{C}$ que fijan puntualmente a $\mathcal{M}$.*

Definición 1.3.10. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC con AP, JEP y MAG, $\overline{a} \in |\mathbb{C}|^{lg\overline{a}}$ y $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ tal que $|M| < \|\mathbb{C}\|$. Definimos*

$$ga - tp(a/\mathcal{M}) := \{f(\overline{a}) : f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})\}.$$

Definición 1.3.11. *1. Sea $n \in \mathcal{N}$. Definimos*

$$ga - S^{n}(\mathcal{M}) = \{ga - tp((a_i)_{i<n+1}/\mathcal{M}, \mathcal{N}) : \mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}\}.$$

2. *Diremos que $p \in ga - S^{n}(\mathcal{M})$ es realizado en $\mathcal{N}$ si y sólo si existen $\mathcal{M}^*$ y $\overline{a} \in N^n$ tales que $\mathcal{M}^* \succ^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ $p = [(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{M}^*)]_{\sim}$. En términos de la definición de órbitas bajo la acción del*

grupo de automorfismos de un modelo monstruo, diremos que $\mathcal{N}$ *realiza a* p *si* $p \cap N \neq \emptyset$*.*
En este caso diremos que $\overline{a}$ *realiza a* p *y lo notaremos* $\overline{a} \vDash p$*.*

3. *Sean* $q = ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}^*, \mathbb{C}\right) \in ga - S^n\left(\mathcal{M}^*\right)$ *y* $\mathcal{M} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^*$*. Definimos la restricción de* q *a* $\mathcal{M}$ *como* $q \restriction_{\mathcal{M}} := ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}\right)$*.*

4. *Similarmente, decimos que* $q \in ga - S^n\left(\mathcal{M}^*\right)$ *extiende a* $p \in ga - S^n\left(\mathcal{M}\right)$ *si* $q \restriction_{\mathcal{M}} = p$*.*

La siguiente afirmación nos muestra que dos tipos son diferentes si ya eran diferentes en alguna subestructura. El enunciado lo hace Coppola en términos de la relación $\prec_{\mathcal{K}}$ pues la reflexividad de esta relación es de utilidad al momento de aplicarlo. Hacemos una demostración detallada.

Proposición 1.3.12 (cf hecho 3.1.8 en [Cop06])**.** *Sean* $\mathcal{M}_0, \mathcal{M} \in \mathcal{K}$ *tales que* $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ *y* $p, q \in ga - S\left(\mathcal{M}\right)$*. Si* $p \restriction_{\mathcal{M}_0} \neq q \restriction_{\mathcal{M}_0}$*, entonces* $p \neq q$*.*

Demostración. Sean $\overline{a}, \overline{b} \in |\mathbb{C}|$ tales que $p = ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}\right)$ y $q = ga - tp\left(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathbb{C}\right)$. Si tenemos que $p = q$, entonces $ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C}\right) = ga - tp\left(\overline{b}/\mathcal{M}, \mathbb{C}\right)$ y por tanto existe $f \in Aut_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ tal que $f(\overline{a}) = \overline{b}$; como $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces en particular $f \in Aut_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{C})$ y por tanto tenemos que $ga - tp\left(\overline{a}/\mathcal{M}_0, \mathbb{C}\right) = ga - tp\left(\overline{b}/\mathcal{M}_0, \mathbb{C}\right)$. Como $(p \restriction_{\mathcal{M}}) \restriction_{\mathcal{M}_0} = p \restriction_{\mathcal{M}_0}$ y $(q \restriction_{\mathcal{M}}) \restriction_{\mathcal{M}_0} = p \restriction_{\mathcal{M}_0}$ concluimos que $p \restriction_{\mathcal{M}_0} = q \restriction_{\mathcal{M}_0}$ pues $ga - tp\left(a/\mathcal{M}_0, \mathbb{C}\right) = p \restriction_{\mathcal{M}_0}$ y $ga - tp\left(b/\mathcal{M}_0, \mathbb{C}\right) = q \restriction_{\mathcal{M}_0}$ obteniendo así un absurdo. $\boxed{1.3.12}$

A continuación definiremos la noción de cadena coherente de tipos. Este concepto Coppola lo define en su tesis pero es impreciso con los subíndices. Basándonos en la noción de cadena coherente de tipos en el contexto de las AECs, nosotros corregimos la imprecisión de Coppola.

Definición 1.3.13 (cf. definición 11.2 en [Bal09], cf. definición 3.1.9 en [Cop06]). *Sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$ una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{U}}$-cadena creciente continua de modelos en $\mathcal{K}$ y $p_i \in ga - S(\mathcal{M}_i)$ para cada $i < \delta$.*

1. *Diremos que $\langle p_i \rangle_{i<\delta}$ es una **cadena de tipos de Galois** sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$ si:*

   a) $p_{i+1} \upharpoonright \mathcal{M}_i = p_i$ *para* $i < \delta$ *y*

   b) $p_j \upharpoonright \mathcal{M}_i = p_i$ *para todo* $i < j$ *con* $j < \delta$ *un ordinal límite.*

2. *Diremos que $\langle p_i \rangle_{i<\delta}$ es una **cadena coherente** sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$ si es una cadena de tipos de Galois y además existen $a_i \in |\mathbb{C}|$, $f_{i,j} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}_i}(\mathbb{C})$ para $i < j < \delta$ tales que:*

   a) $p_i = ga - tp(a_i/\mathcal{M}_i, \mathbb{C})$,

   b) $f_{i,j}(a_j) = a_i$ *y*

   c) $f_{i,k} \circ f_{k,j} = f_{i,j}$ *para todo* $i < k < j < \delta$.

Debido a la imprecisión cometida por Coppola en la definición de cadena coherente de tipos, la demostración que él hace de la siguiente proposición también tiene imprecisiones. Para solucionar esto, nosotros nos hemos basado en el trabajo de Baldwin para corregir dichas imprecisiones.

Proposición 1.3.14 (Proposición 3.1.10 en [Cop06]). *Sea $\langle p_i \rangle_{i<\delta}$ una cadena coherente sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$. Entonces existe $p_\delta \in ga - S(\mathcal{M}_\delta)$, donde $\mathcal{M}_\delta = \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i$, tal que $\langle p_i \rangle_{i<\delta+1}$ es una cadena coherente sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta+1}$.*

Demostración. Sean $\langle a_i \rangle_{i<\delta}$ y $\langle f_{i,j} \rangle_{i<j<\delta}$ quienes atestiguan que $\langle p_i \rangle_{i<\delta}$ es una cadena coherente sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$. Definamos ahora para todo $i < \delta$ $g_i := f_{0,i} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i}$ y veamos que es una cadena creciente continua de $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersiones. Notemos en primer lugar que $\mathrm{Dom}(g_i) = \mathcal{M}_i$ para todo $i < \delta$ y por tanto $\langle \mathrm{Dom}(g_i) \rangle_{i<\delta}$ es una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua. Ahora bien, sean $i, j < \delta$ tales que $0 \leq i < j$ y $a \in M_i$, entonces

$$\begin{aligned}
g_i(a) &:= f_{0,i} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i} (a), \\
&= (f_{0,i} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i} (f_{i,j} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i} (a)) \text{ pues } f_{i,j} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}_i}(\mathbb{C}) \text{ y } a \in M_i, \\
&= (f_{0,i} \circ f_{i,j}) \upharpoonright_{\mathcal{M}_i} (a) \text{ por la condición (iii) de cadena coherente}, \\
&= f_{0,j} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i} (a) \text{ pues } a \in M_i, \\
&= f_{0,j} \upharpoonright_{\mathcal{M}_j} (a), \\
&= g_j(a).
\end{aligned}$$

Notemos por último que lo anterior implica, aplicando la definición 1.1.1.3 (axiomas de isomorfismo), que $g_i(\mathcal{M}_i) \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} g_j(\mathcal{M}_j)$ para todos $i \leq j < \delta$ y en consecuencia $\langle g_i \rangle_{i<\delta}$ es una cadena creciente continua de isomorfismos, la continuidad la tenemos pues $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta}$ es una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente y continua.

Ahora bien, como $\mathbb{C}$ es una estructura homogénea y $g := \bigcup_{i<\delta} g_i : \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i \longrightarrow \bigcup_{i<\delta} g_i(\mathcal{M}_i)$ es un isomorfismo, entonces existe $\widehat{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $\widehat{g} \upharpoonright_{\bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i} = g$. Definamos entonces $a_\delta := \widehat{g}^{-1}(a_0)$, $p_\delta := ga-tp\left(a_\delta / \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i, \mathbb{C}\right)$ y $f_{i,\delta} := f_{0,i}^{-1} \circ \widehat{g}$ para todo $i < \delta$ y veamos que $\langle p_i \rangle_{i<\delta+1}$ es una cadena coherente sobre $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\delta+1}$, donde $\mathcal{M}_\delta := \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i$, que es atestiguada por $\langle a_i\rangle_{i<\delta+1}$ y $\langle f_{i,j}\rangle_{i<j<\delta+1}$. Además, $f_{i,\delta} \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{M}_i}(\mathbb{C})$ pues para $a \in \mathcal{M}_i$ tenemos que

$$\begin{aligned}
f_{i,\delta}(a) &= f_{0,i}^{-1} \circ \widehat{g}(a), \\
&= f_{0,i}^{-1} \circ g_i(a) \text{ pues } \widehat{g} \supseteq \bigcup_{i<\delta} g_i, \\
&= f_{0,i}^{-1}(f_{0,i}(a)) \text{ pues } g_i = f_{0,i} \restriction_{\mathcal{M}_i}, \\
&= a.
\end{aligned}$$

Es inmediato de la escogencia de los a_i que $p_i = ga - tp(a_i/\mathcal{M}_i, \mathbb{C})$ para todo $i < \delta + 1$. Ahora sea $i < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
f_{i,\delta}(a_\delta) &= f_{0,i}^{-1} \circ \widehat{g}(a_\delta), \\
&= f_{0,i}^{-1}(\widehat{g}(\widehat{g}^{-1}(a_0)) \text{ pues } a_\delta = \widehat{g}^{-1}(a_0), \\
&= f_{0,i}^{-1}(a_0), \\
&= a_i \text{ pues } f_{0,i}(a_i) = a_0,
\end{aligned}$$

por tanto el segundo ítem de la definición de cadenas coherentes de tipos se cumple. El tercer ítem de la definición de cadenas coherentes de tipos se cumple pues para todos $i < j < \delta$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
f_{i,j} \circ f_{j,\delta} &= f_{i,j} \circ (f_{0,j}^{-1} \circ \widehat{g}), \\
&= (f_{i,j} \circ f_{0,j}^{-1}) \circ \widehat{g}, \\
&= f_{0,i}^{-1} \circ \widehat{g} \text{ pues por hipótesis } f_{0,j} = f_{0,i} \circ f_{i,j} \text{ implica } f_{0,i}^{-1} = f_{i,j} \circ f_{0,j}^{-1} \\
&= f_{i,\delta}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\langle p_i\rangle_{i<\delta+1}$ es una cadena coherente sobre $\langle \mathcal{M}_i\rangle_{i<\delta+1}$. $\boxed{1.3.14}$

1.4. Saturación

En esta sección nosotros estudiaremos las estructuras que realizan todos los tipos sobre subestructuras pequeñas, estas estructuras son llamadas saturadas. El concepto de saturación es crucial en el resultado de transferencia de categoricidad demostrado en [SV18] por Shelah y Vasey pues para poder hacer las construcciones que necesitan, se debe garantizar que todos los modelos saturados de $\mathcal{K}_\mu$, donde $\mu \leq LS(\mathcal{K})$ es un cardinal, formen una AEC. El axioma que resulta más engorroso de demostrar para este caso es el de cadenas de Tarski-Vaught y lo estudiaremos en el capítulo 4 de este trabajo.

Comenzaremos demostrando que un modelo que es saturado es modelo-homogéneo, hecho que Coppola enuncia pero no demuestra en su tesis, y haremos una adaptación al contexto de las Q-AECs de un resultado de Boney y Grossberg dado en [BG17] de un teorema de omisión de tipos para AECs que será de importancia al adaptar el resultado de tranferencia de categoricidad de Shelah y Vasey ([SV18]) al contexto de las Q-AECs.

Definición 1.4.1. *Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$.* ***Diremos que $\mathcal{M}$ es μ-saturado o saturado en*** μ *si para todo $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ de tamaño menor que μ (notemos que esto último implica que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ por el lema 1.1.13), todo $p \in ga - S(\mathcal{N})$ tiene al menos una realización en $\mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es saturado si es $|M|$-saturado.*

Notación 1.4.2. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC. La subclase de todos los modelos μ-saturados de $\mathcal{K}$ ordenado por la restricción las relaciones $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ y $\prec_{\mathcal{K}}$ será denotada por $\mathcal{K}^{\mu-sat}$. Si tomamos todos los modelos saturados de $\mathcal{K}$, la subclase será denotada $\mathcal{K}^{sat}$.*

A continuación demostramos que los conceptos de modelo-homogeneidad y saturación son equivalentes en Q-AECs como en el contexto de las AECs. Coppola presenta el resultado como un hecho en [Cop06] y no hace la demostración para el contexto de las Q-AECs, nosotros hacemos la demostración con todos los detalles para la completez del documento.

Teorema 1.4.3 (hecho 3.1.12 en [Cop06]). *Sean $\lambda > LS(\mathcal{K})$ y $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\geq\lambda}$. $\mathcal{M}$ es λ-saturado si y sólo si es λ-modelo-homogéneo.*

Demostración. Comencemos suponiendo que $\mathcal{M}$ es λ-saturado. Para demostrar que $\mathcal{M}$ es λ-modelo-homogéneo debemos probar que dados $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{K}_{<\lambda}$ tales que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}$. Para construir la inmersión f, lo que haremos es construir de manera recursiva una cadena creciente continua de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $\langle f_\beta : \mathcal{N}_\beta \longrightarrow \mathcal{M}\rangle_{\beta<|N'|}$ que fijan puntualmente a $\mathcal{N}$ de la siguiente manera.

Para la base tomemos $\mathcal{N}_0 := \mathcal{N}$ y $f_0 = 1_{\mathcal{N}}$, como por hipótesis tenemos que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces claramente f_0 es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión que fija puntualmente a $\mathcal{N}$.

Para continuar con la construcción, consideremos una enumeración $\{a_i : i < |N'|\}$ de $N' \setminus N$.

Supongamos que para $\beta < |N'|$ tenemos construidos $\mathcal{N}_\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ de tamaño $< \lambda$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_\beta : \mathcal{N}_\beta \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}$. Utilizando el lema 1.2.3 podemos suponer que $\mathcal{M}, \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y como $f_\beta : \mathcal{N}_\beta \longrightarrow f_\beta[\mathcal{N}_\beta]$ es un isomorfismo, entonces por la homogeneidad de $\mathbb{C}$ existe $F \in Aut_{\mathcal{N}}(\mathbb{C})$ tal que $F \supset f_\beta$. F fija puntualmente a $\mathcal{N}$ pues f_β lo fija puntualmente. Sea $j = \text{mín}\{i < |N'| : a_i \notin N' \setminus N_\beta\}$, notemos que como f_β es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión, entonces $F[\mathcal{N}_\beta] = f_\beta[\mathcal{N}_\beta] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y al ser $\mathcal{N}_\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ tenemos que $|f_\beta[N_\beta]| < \lambda$

pues $\mathcal{N}_\beta \in \mathcal{K}_{<\lambda}$, por tanto existe $b \in M$ tal que $b \vDash ga - tp\left(F\left(a_j\right)/F\left[\mathcal{N}_\beta\right], \mathbb{C}\right)$ pues $\mathcal{M}$ es λ-saturado; esto último implica que existe $G \in Aut_{F[\mathcal{N}_\beta]}(\mathbb{C})$ tal que $G\left(F\left(a_\beta\right)\right) = b$.

Al aplicar los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición1.1.1.5), de densidad (definición 1.1.1.7*b*) y de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) podemos encontrar $\mathcal{M}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ tal que $F[N_\beta] \cup \{b\} \subseteq M'$, $|M'| = |N_\beta|$, y $F\left[\mathcal{N}_\beta\right] \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Definamos ahora $H := G \circ F$, $\mathcal{N}_{\beta+1} := H^{-1}[\mathcal{M}']$ y $f_{\beta+1} := H \restriction_{\mathcal{N}_{\beta+1}}$. Por la transitividad de la relación $\prec^u_{\mathcal{K}}$ tenemos que $\mathcal{M}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y como G es en particular un automorfismo de $\mathbb{C}$, entonces $G^{-1}[\mathcal{M}'] = \mathcal{N}_{\beta+1} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. Además

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\beta &= F^{-1}[F[\mathcal{N}_\beta]], \\
&= F^{-1}[G^{-1}[F[\mathcal{N}_\beta]]] \text{ pues } G \in Aut_{F[\mathcal{N}_\beta]}(\mathbb{C}), \\
&= H^{-1}[F[\mathcal{N}_\beta]] \text{ por definición de } H, \\
&\prec^u_{\mathcal{K}} H^{-1}[\mathcal{M}'] \text{ aplicando los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) a } F[\mathcal{N}_\beta] \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \\
&= \mathcal{N}_{\beta+1},
\end{aligned}$$

en consecuencia $\mathcal{N}_\beta \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\beta+1} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. Como por definición $H[\mathcal{N}_{\beta+1}] = \mathcal{M}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces $f_{\beta+1} : \mathcal{N}_{\beta+1} \longrightarrow \mathcal{M}$ es una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersión. Notemos que como $F \in Aut_{\mathcal{N}}(\mathbb{C})$ (pues $F \supset f_\beta$) y como $G \in Aut_{\mathcal{N}}(\mathbb{C})$ (pues G fija puntualmete a $F[\mathcal{N}_\beta]$ y $\mathcal{N} \prec^u_{\mathcal{K}} F[\mathcal{N}_\beta]$), entonces $H \in Aut_{\mathcal{N}}(\mathbb{C})$.

Si $\beta < |N'|$ es un ordinal límite y para todo $\alpha < \beta$ tenemos definidos los $\mathcal{N}_\alpha$ y las $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_\alpha : \mathcal{N}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}$ que fijan puntualmente a $\mathcal{N}$ con $\mathcal{N}_\alpha \in \mathcal{K}_{<\lambda}$, definimos $N_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{N}_\alpha$ y $f_\beta := \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Por construcción tenemos que $\langle \mathcal{N}_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$ es una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua y por tanto al utilizar los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3), tenemos que $\langle f_\alpha[\mathcal{N}_\alpha]\rangle_{\alpha<\beta}$ tanbién es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua tal que $f_\alpha \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y aplicando los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*), deducimos que $f_\beta[\mathcal{N}_\beta] = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} f_\alpha[\mathcal{N}_\alpha] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Notemos además que para todo $\alpha < \beta < |N'| < \lambda$, tenemos que $|N_\alpha| < \lambda$ y como $|N'| < \lambda$, entonces $|N_\beta| < \lambda$ y al aplicar el lema 1.1.13, tenemos que $f_\beta[\mathcal{N}_\beta] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues $f\beta[\mathcal{N}_\beta] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\geq\lambda}$; en consecuencia $f_\beta : \mathcal{N}_\beta \longrightarrow \mathcal{M}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión que fija puntualmente a $\mathcal{N}$.

Definimos $\mathcal{N}_{|N'|} := \bigcup\limits_{\beta<|N'|} \mathcal{N}_\beta$ y $g := \bigcup\limits_{\beta<|N'|} f_\beta : \mathcal{N}_{|N'|} \longrightarrow \mathcal{M}$. Como f_β fija puntualmente a $\mathcal{N}$ para todo $|\beta| < |N|$, entonces g fija puntualmente a $\mathcal{N}$ pues es la unión de las f_β. Además por construcción tenemos que $N' \subset N_{|N'|}$ y por tanto $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}_{|N'|}$. Como $\mathcal{N}_\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ para todo $\beta < |N'|$, entonces por los axiomas de cadenas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\mathcal{N}_{|N'|} := \bigcup\limits_{\beta<|N'|} \mathcal{N}_\beta \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$; ahora bien, como $\mathcal{N}', \mathcal{N}_{|N'|} \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}_{|N'|}$ concluimos con ayuda de los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) que $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{|N'|}$. Además tenemos que $f_\beta[\mathcal{N}_\beta] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ para todo $\beta < |N'|$, entonces $\bigcup\limits_{\beta<|N'|} \mathcal{M}$, esto último nos dice que $g[\mathcal{N}_{|N'|}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues $g[\mathcal{N}_{|N'|}] = \bigcup\limits_{\beta<|N'|} \mathcal{N}_\beta$. Notemos que como $\mathcal{N}_\beta \in \mathcal{K}_{\leq|N'|}$, entonces $\mathcal{N}_{|N'} \in \mathcal{K}_{\leq|N'|}$ y como $|N'| < \lambda = |M|$ podemos aplicar el lema 1.1.13 y concluir que $g[\mathcal{N}_{|N'|}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues $g[\mathcal{N}_{|N'|}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $|g[N_{|N'|}]| = |N_{|N'|}|$.

Sea $f := g \restriction_{\mathcal{N}'}$. Claramente $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ es una inmersión. Además

$$
\begin{aligned}
f[\mathcal{N}] &= g\restriction_{\mathcal{N}'}[\mathcal{N}'] \text{ por definición,}\\
&= g[\mathcal{N}'],\\
&\prec_{\mathcal{K}} g[\mathcal{N}_{|N'|}] \text{ por el axioma de isomorfismos pues } g:\mathcal{N}_{|N'|}\longrightarrow g[\mathcal{N}_{|N'|}]\\
&\quad \text{es un isomorfismo,}\\
&\prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior concluimos que $f[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} g[\mathcal{N}_{|N'|}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $f[\mathcal{N}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$; por tanto $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión que fija puntualmente a $\mathcal{N}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es λ-modelo-homogéneo y sean $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ de tamaño $< \lambda$ y $p \in ga{-}S\,(\mathcal{N})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. Por definición de tipo de Galois, existe $a \in |\mathbb{C}|$ tal que $p = ga - tp\,(a/\mathcal{N}, \mathbb{C})$ y al utilizar los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), de densidad (definición 1.1.1.7*b*) y de coherencia (definiciones 1.1.1.4*a* y 1.1.1.4*c*), podemos encontrar $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ tal que $N \cup \{a\} \subseteq N'$, $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y $|N'| = |N| < \lambda$. Como $\mathcal{M}$ es λ-modelo-homogéneo y $|N'| < \lambda$, entonces existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}$ y como en particular $f : \mathcal{N}' \longrightarrow f[\mathcal{N}']$ es un isomorfismo, entonces por la homogéneidad de $\mathbb{C}$ existe $F \in Aut_{\mathcal{N}}(\mathbb{C})$ tal que $F \supseteq f$ y por tanto $b = F(a) = f(a)$ realiza p, así $\mathcal{M}$ es λ-saturado. $\boxed{1.4.3}$

El teorema que presentamos a continuación es la versión del teorema de omisión de tipos de Morley para Q-AECs, lo que nosotros haremos es adaptar un resultado estudiado por

Boney y Grossberg en [BG17] al contexto de las Q-AECs. La demostración que presentaremos es una amalgama entre la demostración hecha por Vasey en [Vas17a] y la hecha por Boney y Grossberg en [BG17]. A comparación de lo hecho en [BG17], nosotros demostraremos con detalle que la clase auxiliar construida es una Q-AEC.

Teorema 1.4.4 (cf. hecho 9.2 en [Vas17a], teorema 5.4 en [BG17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP y tiene MAG y $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$. Si todo modelo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\lambda$ es $\mathrm{LS}(\mathcal{K})^+$-saturado, entonces existe $\chi < \beth_{2^{(\mathrm{LS}(\mathcal{K}))^+}}$ tal que todo modelo en $\mathcal{K}_{\geq\chi}$ es $\mathrm{LS}(\mathcal{K})^+$-saturado.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo, es decir supongamos que para todo $\chi \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \beth_{2^{(\mathrm{LS}(\mathcal{K}))^+}})$ existe $\mathcal{M}_\chi \in \mathcal{K}_{\geq\chi}$ que no es $\mathrm{LS}(\mathcal{K})^+$-saturado, i.e. existe $\mathcal{M}_{0,\chi} \in \mathcal{K}_{\mathrm{LS}(\mathcal{K})}$ y $p_\chi \in ga-S\ (\mathcal{M}_{0,\chi})$ tales que $\mathcal{M}_{0,\chi} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_\chi$ y no hay una realización de p_χ en M_χ. Notemos que como a lo sumo hay $2^{\mathrm{LS}(\mathcal{K})}$ estructuras no isomorfas de tamaño $\mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entonces como $\chi \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \beth_{(2^{\mathrm{LS}(\mathcal{K})})^+})$ y $\mathrm{cf}(\beth_{(2^{\mathrm{LS}(\mathcal{K})})^+}) = (2^{\mathrm{LS}(\mathcal{K})})^+$ tenemos que existe un conjunto no acotado $S \subset [\mathrm{LS}(\mathcal{K}).\beth_{(2^{\mathrm{LS}(\mathcal{K})})^+})$ tal que para todo $\chi \in S$ los $\mathcal{M}_{0,\chi}$ son isomorfos y por tanto todos los p_χ son iguales. De lo anterior concluimos que existen $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{\mathrm{LS}(\mathcal{K})}$ y $p \in ga-S\ (\mathcal{N})$ tal que para todo $\chi \in S$, p es igual a p_χ y $\mathcal{N}$ es isomorfo a $\mathcal{M}_{0,\chi}$.
Sean $\mathcal{L}^+ := \mathcal{L}(\mathcal{K}) \cup \{c_m : m \in \mathrm{N}\}$ una expansión de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{K}^+$ la siguiente clase:

$$\mathcal{K}^+ := \{\mathcal{N}' : \mathcal{N}' \text{ es una } \mathcal{L}^+\text{-estructura tal que } \mathcal{N} \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K} \text{ y existe una } \prec^{u}_{\mathcal{K}}\text{-inmersión } h :$$
$$\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \text{ tal que } h(m) = (c_m)^{\mathcal{N}} \text{ para todo } m \in \mathrm{N} \text{ y } \mathcal{N}' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \text{ no realiza } h(p)\}.$$

A diferencia de Boney-Grossberg y Vasey definimos sobre $\mathcal{K}^+$ un orden parcial $\prec^{+}_{\mathcal{K}}$ y una relación transitiva $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera. Dados $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}^+$, definimos:

$$\mathcal{N}_1 \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2 \text{ si y sólo si } \mathcal{N}_1 \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2 \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \text{ y } \mathcal{N}_1 \subset_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}_2.$$

$$\mathcal{N}_1 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2 \text{ si y sólo si } \mathcal{N}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \text{ y } \mathcal{N}_1 \subset_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}_2.$$

Veamos que la tripla $(\mathcal{K}^+, \prec^{u+}_{\mathcal{K}}, \prec^+_{\mathcal{K}})$ es una Q-AEC.

1. Como $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ está definida en términos de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$, entonces $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ es un relación transitiva. Como $\prec_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial y $\prec^+_{\mathcal{K}}$ está definida en términos de $\prec_{\mathcal{K}}$, entonces $\prec^+_{\mathcal{K}}$ es un orden parcial.

2. Por definición, $\prec^+_{\mathcal{K}}$ extiende a $\subseteq_{\mathcal{L}^+}$ y como $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ extiende a $\prec_{\mathcal{K}}$ y $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ está definida en términos de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$, entonces $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ extiende a $\prec^+_{\mathcal{K}}$.

3. (Axiomas de isomorfismo) Sean $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$ y $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}'$ un $\mathcal{L}^+$-isomorfismo. Por definición de $\mathcal{K}^+$ tenemos que $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}$ y que existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}'_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ tal que $h(m) = (c_m)^{\mathcal{M}'}$ para todo $m \in N$ y $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ no realiza $h(p)$.

   Veamos ahora que $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}^+$. En efecto, como f es un $\mathcal{L}^+$-isomorfismo, en porticular es un isomorfismo y por tanto al aplicar los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3), tenemos que $\mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}$; además, como $h[\mathcal{N}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$, entonces de nuevo por los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3), tenemos que $f[h[\mathcal{N}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ pues $f[\mathcal{M}'] = \mathcal{N}'$ y por tanto $f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \circ h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión. Además como

$$\begin{aligned}
\left(f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \circ h\right)(m) &= f \restriction_{h[\mathcal{N}]} (h(m)) \\
&= f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \left((c_m)^{\mathcal{M}'}\right) \text{ por la escogencia de } h \\
&= (c_m)^{\mathcal{N}'} \text{ pues } f \text{ es un } \mathcal{L}^+\text{-isomorfismo,}
\end{aligned}$$

   tenemos que $\left(f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \circ h\right)(m) = (c_m)^{\mathcal{N}'}$ para todo $m \in N$. Por último, notemos que si

$\mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \circ h(p)$, entonces $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models h(p)$ pues f es en particular un isomorfismo; esto último sería contradictorio con el hecho que $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$ y en consecuencia tenemos que $\mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ no realiza $f \restriction_{h[\mathcal{N}]} \circ h(p)$. Así podemos concluir que $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}^+$.

Sea ahora $\mathcal{M}_1 \prec^+_{\mathcal{K}} (\prec^{u+}_{\mathcal{K}})\mathcal{M}'$, entonces por definición de $\prec^+_{\mathcal{K}}$ $(\prec^{u+}_{\mathcal{K}})$ tenemos que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} (\prec^{u}_{\mathcal{K}})\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$. Notemos que al ser f un isomorfismo tenemos que $f[\mathcal{M}_1] \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}'$ y por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3) podemos concluir que $f[\mathcal{M}_1] \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} (\prec^{u}_{\mathcal{K}})\mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. Por tanto tenemos que $f[\mathcal{M}_1] \prec^+_{\mathcal{K}}$ $(\prec^{u+}_{\mathcal{K}})\mathcal{N}'$.

Hemos demostrado así que $\mathcal{K}^+$ satisface el axioma de isomorfismos.

4. (Axiomas de coherencia) Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$.

   a) Supongamos que $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}_2$ y que $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Por definición de la relación $\prec^+_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ significa que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}, \mathcal{M}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq_{\mathcal{L}} \mathcal{M}'$. Como $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}_2$, entonces en particular tenemos que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \subseteq_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. En consecuencia $\mathcal{M}_1 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2$.

   b) Supongamos que $\mathcal{M}_1 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, entonces por definición de las relaciones $\prec^+_{\mathcal{K}}$ y $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ tenemos que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}_2 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$; al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) lo anterior implica que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y puesto que $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$, entonces $\mathcal{M}_1 \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$.

   c) Supongamos ahora que $\mathcal{M}_1 \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ esto es, $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_2 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}}$

$\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}_2 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$ por definición de las relaciones $\prec_{\mathcal{K}}^{+}$ y $\prec_{\mathcal{K}}^{u+}$. Por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $\mathcal{M}_1 \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y como la relación $\subseteq_{\mathcal{L}^+}$ es en particular transitiva, tenemos que $\mathcal{M}_1 \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$ y en consecuencia $\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}}^{u+} \mathcal{M}'$.

Los tres ítems anterior nos muestran que $\mathcal{K}^+$ satisface los tres axiomas de coherencia.

5. (Axioma de Löwenheim-Skolem descendente) Sea $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$ y $A \subset M'$. En primer lugar notemos que por definición de $\mathcal{K}^+$ tenemos que $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}$ y existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ tal que $h(m) = (c_m)^{\mathcal{M}'}$ y $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ no realiza $h(p)$. Sea $B = A \cup h(N)$, entonces al aplicar el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) tenemos que existe $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ tal que $B \subseteq N'$, $|N| \leq LS(\mathcal{K}) + |B|$ y $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. Notemos que como $h(N) \subseteq N'$, entonces $h[\mathcal{N}] \subseteq_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \mathcal{N}'$ y como $h[\mathcal{N}], \mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$, tenemos en particular que $h[\mathcal{N}], \mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) podemos concluir que $h[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$; además por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*), tenemos que existe $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}_{|N'|}$ tal que $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}'' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}'$ pues $\mathcal{N}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}'$.

   Notemos que como $h[N] \subset N''$, entonces en particular tenemos que $(c_m)^{\mathcal{M}'} = h(m) \in N''$ para todo $m \in N$ y por tanto podemos definir una $\mathcal{L}^+$-estructura $\mathcal{N}'''$ con el mismo universo de $\mathcal{N}''$ interpretando $(c_m)^{\mathcal{N}'''} := (c_m)^{\mathcal{M}'}$, de esto último se puede inferir inmediatamente que $\mathcal{N}''' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$ y que $\mathcal{N}''' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} = \mathcal{N}''$; además al definir $h' : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}''' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ como $h'(m) = h(m)$ para todo $m \in N$, tenemos que h'

es una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues $h[\mathcal{N}] \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'' = \mathcal{N}''' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y que

$$\begin{aligned} h'(m) &= h(m) \\ &= (c_m)^{\mathcal{M}'} \text{ por como se escogió } h \\ &= (c_m)^{\mathcal{N}'''} \text{ por la definición de las constantes en } \mathcal{N}'''. \end{aligned}$$

Notemos que si $\mathcal{N}''' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models h'(p)$, entonces $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models h(p)$ lo cual es absurdo pues $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$. Por tanto $\mathcal{N}''' \in \mathcal{K}^+$ y $\mathcal{N}''' \prec^{\mathrm{u}+}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ pues $\mathcal{N}''' \restriction_{\mathrm{LL}} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}''' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'$.

Por último notemos que

$$\begin{aligned} |N'''| &= |N''| \\ &= |N'| \\ &\leq LS(\mathcal{K}) + |B| \\ &= LS(\mathcal{K}) + (|h(N)| + |A|) \\ &= LS(\mathcal{K}) + (LS(\mathcal{K}) + |A|) \text{ pues } |N| = LS(\mathcal{K}) \\ &= LS(\mathcal{K}) + |A|, \end{aligned}$$

por tanto $\mathcal{K}^+$ satisface el axioma de Löwenheim-Skolem descendente y $LS(\mathcal{K}^+) = LS(\mathcal{K})$.

6. (Axiomas de densidad) Sean $\mathcal{M}', \mathcal{N}' \in \mathcal{K}^+$.

   a) Supongamos ahora que $\mathcal{M}' \prec^{\mathrm{u}+}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ esto es, $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y $\mathcal{M}' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}'$. Por los axiomas de densidad, tenemos que existe $\mathcal{N}''$ tal que $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. Notemos que como $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$, entonces existe una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $h_{\mathcal{M}'} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}' \restriction_{\mathrm{LL}}$ y por tanto $h_{\mathcal{M}'}[N] \subseteq N''$. Definamos una

$\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N}'''$ con el mismo universo de $\mathcal{N}''$ interpretando las sonstantes c_m como $(c_m)^{\mathcal{N}'''} := (c_m)^{\mathcal{M}'}$, de esto último es fácil inferir que $\mathcal{M}' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}''' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}'$ pues en particular tenemos que $M' \subseteq N''' \subseteq N'$ y además es claro que $\mathcal{N}''' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} = \mathcal{N}''$.

Ahora bien al definir $h' : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}''' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ como $h'(m) = h_{\mathcal{M}'}(m)$, entonces tenemos que h' es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión pues $h_{\mathcal{M}'}[\mathcal{N}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}'' = \mathcal{N}''' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y como

$$\begin{aligned} h'(m) &= h_{\mathcal{M}'}(m) \\ &= (c_m)^{\mathcal{M}'} \\ &= (c_m)^{\mathcal{N}'''} \end{aligned}$$

para todo $m \in N$, entonces tenemos que $h'(m) = (c_m)^{\mathcal{N}'''}$. Por último notemos que si $\mathcal{N}''' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models h'(p)$ tendríamos que $\mathcal{N}' \models h_{\mathcal{N}'}(p)$ donde $h_{\mathcal{N}'}$ es la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión que atestigua que $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}^+$, pues como en particular $\mathcal{M}' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}'$, entonces $h_{\mathcal{N}'} \upharpoonright_{\mathcal{M}'} = h_{\mathcal{M}'}$, esto último implica que $h_{\mathcal{N}'} \upharpoonright_{\mathcal{N}'''} = h'$ y en consecuencia tenemos que $\mathcal{N}''' \in \mathcal{K}^+$.

b) Suponga que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^{+} \mathcal{N}'$ y que $\mathcal{M}' \neq \mathcal{N}'$. Como $\mathcal{K}^+$ satisface el axioma de Löwenheim-Skolem descendente, entonces existe $\mathcal{M}'' \in \mathcal{K}^+$ tal que $M' \subset M''$, $|M''| \leq |M| + LS(\mathcal{K})$ y $\mathcal{M}'' \prec_{\mathcal{K}}^{u+} \mathcal{N}'$ y por el ítem anterior, tenemos que existe $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}^+$ tal que $\mathcal{M}'' \prec_{\mathcal{K}}^{u+} \mathcal{N}'' \prec_{\mathcal{K}}^{u+} \mathcal{N}'$; además, como $\mathcal{K}^+$ satisface los axiomas de coherencia, entonces $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^{+} \mathcal{M}''$ pues $\mathcal{M}' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{M}'' \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}''$ y en particular $\mathcal{M}', \mathcal{M}'' \prec_{\mathcal{K}}^{+} \mathcal{N}'$. Por último, como $\mathcal{K}^+$ satisface los axiomas de coherencia y

$\mathcal{M}' \prec^{+}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'' \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$, entonces $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$. Esto es $\mathcal{K}^{+}$ cumple el ítem 7*b* de la definición 1.1.1.

En conclusión $\mathcal{K}^{+}$ satisface los axiomas de densidad.

7. (Axiomas de cadenas de Tarski-Vaught) Sea $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha}$ una $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua en $\mathcal{K}^{+}$. Es inmediato de la definición que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i$ es una $\mathcal{L}^{+}$-estructura; además por definición de la relación $\prec^{u+}_{\mathcal{K}}$ tenemos que $\langle \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \rangle_{i<\alpha}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua y por tanto tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}$.

   Notemos que por definición de $\mathcal{K}^{+}$, para cada $i < \alpha$ existen $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $h_{\mathcal{M}'_i} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ tales que $h_{\mathcal{M}_i}(m) = (c_m)^{\mathcal{M}_i}$ y como en particular tenemos que $\mathcal{M}_i \subseteq_{\mathcal{L}^{+}} \mathcal{M}_j$, entonces $(c_m)^{\mathcal{M}_i} = (c_m)^{\mathcal{M}_j}$ y por tanto $h_{\mathcal{M}_i} = h_{\mathcal{M}_j}$ para todos $i < j < \alpha$. Lo anterior nos permite definir una inmersión $h' : \mathcal{N} \longrightarrow \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ tal que $h(m) = h_{\mathcal{M}_i}(m)$ para algún $i < \alpha$ fijo. Como para todo $i < \alpha$ tenemos que $h_{\mathcal{M}_i}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión, entonces $h_{\mathcal{M}_i}[\mathcal{N}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ y por la transitividad de la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ tenemos que $h[\mathcal{N}] = h_{\mathcal{M}_i}[\mathcal{N}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. Notemos que si $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \models h(p)$, entonces $\mathcal{M}_i \models h_{\mathcal{M}_i}(p)$ por como está definida h lo cual es contradictorio pues $\mathcal{M}_i \in \mathcal{K}^{+}$ y $h_{\mathcal{M}_i}$ lo atestigua. En consecuencia $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ no realiza $h(p)$ y por tanto $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \in \mathcal{K}^{+}$.

   Es fácil ver que $\mathcal{M}'_i \subseteq^{u+}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i\alpha} \mathcal{M}'_i$ para todo $i < \alpha$ y por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*) tenemos que $\mathcal{M}_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$, por tanto $\mathcal{M}'_i \prec^{u+}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i$ para todo $i < \alpha$.

   Sea $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}^{+}$ tal que $\mathcal{M}'_i \prec^{+}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ para todo $i < \alpha$. Por la definición de $\prec^{+}_{\mathcal{K}}$ tenemos que $\mathcal{M}'_i \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}$ para todo $i < \alpha$ y por tanto $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \subseteq_{\mathcal{L}^+} \mathcal{N}'$; además, por definición de la relación $\prec^+_{\mathcal{K}}$ tenemos que $\mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ para todo $i < \alpha$ y al aplicar los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*), tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$, esto es $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i \prec^+_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$.

Esto nos lleva a concluir que $\mathcal{K}^+$ satisface los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught.

Notemos ahora que por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) y la versión generalizada del teorema de omisión de tipos de Morley (teorema 1.5.9), tenemos que $\mathcal{K}^+$ tiene MAG y por tanto existe $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+_\lambda$, en consecuencia $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}_\lambda$ no es $LS(\mathcal{K})^+$-saturado pues $h_{\mathcal{M}'}[\mathcal{N}] \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ tiene tamaño $LS(\mathcal{K})$ y $\mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ no realiza $h_{\mathcal{M}'}(p)$ donde $h_{\mathcal{M}'}$ es la $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersión que atestigua que $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}^+$. Esto último es absurdo pues por hipótesis tenemos que todo modelo en $\mathcal{K}_\lambda$ es $LS(\mathcal{K})^+$-saturado. $\boxed{1.4.4}$

1.5. Modelos de Ehrenfeucht-Mostowski

En [EM56] Andrzej Ehrenfeucht y Andrzej Mostowski demuestran con ayuda de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski que si una teoría T tiene por lo menos un modelo infinito, entonces T tiene un modelo con un grupo de automorfismos *muy grande*. Análogamente al contexto de las AECs en esta sección utilizaremos el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) para establecer hechos importantes sobre los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski y como estos pueden ser incluidos en una Q-AEC. Lo que haremos es adaptar ciertos resultados del caso de primer orden basándonos en resultados expuestos en [Mar06] y [TZ12] y así adaptar resultados expuestos por Baldwin en [Bal05] para el caso de las AECs al contexto de las Q-AEC. Un trabajo mucho más formal de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski en el contexto de las AECs, que puede ser fácilmente adaptado a este contexto, puede ser consultado en [She99] donde Shelah introduce algunas herramientas para abordar la conjetura eventual de categoricidad en AECs. En las secciones 2.1 y 3.2 de [Cop06], Coppola hace una pequeña introducción y presenta algunos resultados de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski en el contexto de las Q-AEC. Nosotros presentaremos dichas construcciones en esta sección. Las resultados que acá expondremos son cruciales para demostrar que la unión de una cadena creciente de modelos saturados es también es saturada, una de las versiones de superestabilidad que abordaremos en el capítulo 2.

Definición 1.5.1. *Sean* $(I,<)$ *un orden lineal,* $\mathcal{M}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura e* $\mathbb{I} := \langle a_i \rangle_{i\in I} \subset M^I$*. Diremos que* $\mathbb{I} := \langle a_i \in M \rangle_{i\in I}$ *es una* ***sucesión de indiscernibles*** *si y sólo si dados* $0 \leq n < \omega$*,* $(i_0, \cdots, i_n), (j_0, \cdots, j_n) \in M^n$*, con* $i_k <_I i_{k+1}$ *y* $j_k <_I j_{k+1}$ *para todo* $0 \leq k \leq n-1$*, entonces* $\mathcal{M} \models \varphi(a_{i_0}, \cdots, a_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(a_{j_0}, \cdots, a_{j_n})$ *para toda* $\mathcal{L}$*-fórmula de primer orden* $\varphi(x_0, \cdots, x_n)$ *y todo* $n < \omega$*.*

Dada una Q-AEC $\mathcal{K}$, tenemos por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) que existen un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}(\mathcal{K})$, una $\mathcal{L}'$-teoría T' y un conjunto Γ de $\mathcal{L}'$-tipos tales que $\mathcal{K} = PC(\mathcal{L}(\mathcal{K}), T', \Gamma)$.

Gracias a un argumento parecido al de la skolemización, nosotros podemos suponer que la $\mathcal{L}'$-teoría T tiene funciones de Skolem incorporadas; es decir hay suficientes símbolos de funciones en el lenguaje de la teoría que atestiguen todas las fórmulas existenciales. El siguiente hecho nos permitirá *extraer* una sucesión de indiscernibles para un orden lineal arbitrario J, para los detalles véase [Mar06] o [TZ12].

Hecho 1.5.2 (teorema 5.2.3 en [Mar06]). *Sean* T *una* $\mathcal{L}$*-teoría de primer orden con modelos infinitos e* $(I, \leq)$ *un orden lineal infinito. Entonces existe* $\mathcal{M} \models T'$ *que contiene una sucesión de indiscernibles* $\mathbb{I} := \langle a_i \rangle_{i \in I}$.

Como hemos visto en el hecho 1.5.2, para poder garantizar la existencia de una sucesión de indiscernibles dentro de un modelo necesitamos una teoría de primer orden y por tanto, similarmente a lo que se hace en el contexto de las AECs, es necesario utilizar el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) para codificar la Q-AEC con una $\mathcal{L}'$-teoría de primer T' orden donde $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{K})$ y los *planos estructurales* (*blueprint* en inglés) propios de los ordenes lineales.

Observación 1.5.3. *De acá en adelante siempre estaremos utilizando el lenguaje* $\mathcal{L}'$ *y la* $\mathcal{L}'$*-teoría de primer orden* T' *dados por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19).*

Definición 1.5.4. *Sean* $\mathcal{M}$ *una* $\mathcal{L}'$*-estructura,* I *un orden lineal e* $\mathbb{I} = \langle a_i \rangle_{i \in I}$ *una sucesión de indiscernibles. El conjunto* $\Phi := \{tp(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) : a_{i_j} \in \mathbb{I}, 1 \leq j \leq n\}$ *se denomina el* ***plano estructural propio*** *(blueprint en inglés) propio de* $\mathbb{I}$*. Si* Φ *tiene funciones de Skolem incorporadas,* $EM(\mathbb{I}, \Phi)$ *se define como el modelo generado por el sucesión de indiscernibles* $\mathbb{I}$ *que satisface* Φ *y se denomina el* $\mathcal{L}'$*-nucleo de* $\mathbb{I}$*.*

A lo largo de esta sección nosotros trabajaremos con el lenguaje $\mathcal{L}'$ que extiende a $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19). Por tal motivo introducimos la siguiente notación.

Notación 1.5.5. *Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje que extiende a $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19), entonces* $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi) := \mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi) \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$. *El universo de dicha estructura se notará* $|\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)|$ *y su cardinal será* $\|\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)\|$.

Observación 1.5.6. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC,* T' *la $\mathcal{L}'$-teoría dada por el teorema de Presentación e* I *un orden lineal infinito. Sin pérdida de generalidad nosotros podemos suponer que* T' *tiene funciones de Skolem incorporadas y por el hecho 1.5.2, tenemos que existe $\mathcal{M} \models T'$ tal que* $\mathbb{I} = \langle a_i \in M \rangle_{i \in I}$ *es una sucesión de indiscernibles. Por como está definido* $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi)$, *es inmediato que* $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \subseteq \mathcal{M}$ *y como* T' *tiene funciones de Skolem incorporadas, entonces podemos afirmar que* $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \prec \mathcal{M}$*; por tanto tenemos que* $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \models T'$. *Nosotros no podemos afirmar que* $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi)$ *omita todos los tipos del conjunto Γ y por tanto no sabemos si* $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I}, \Phi) \in \mathcal{K}$.

Los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski tienen un comportamiento funtorial; esto es toda inmersión $f : (I, <_I) \longrightarrow (I', <_{I'})$ donde $(I, <_I)$ y $(I', <_{I'})$ son órdenes lineales puede ser extendida a una $\mathcal{L}'$-inmersión $\widehat{f} : \mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \longrightarrow \mathsf{EM}\,(\mathbb{I}', \Phi)$ donde $\mathbb{I} = \langle a_i \rangle_{i \in I}$ e $\mathbb{I}' = \langle b_i \rangle_{i \in I}$ son sucesiones indiscernibles. Como sin pérdida de generalidad podemos suponer que toda teoría tiene funciones de Skolem incorporadas, entonces podemos suponer que $\widehat{f}$ es una inmersión elemental.

Hecho 1.5.7 (lema 5.2.6 en [Mar06])**.** *Sean* T' *una $\mathcal{L}'$-teoría de primer orden con funciones de Skolem incorporadas,* $(I, <_I)$ *y* $(J, <_J)$ *órdenes lineales infinitos,* $\mathbb{I} = \langle a_i \in M \rangle_{i \in I}$ *una sucesión de indiscernibles en* $\mathcal{M} \models T$ *y* $\mathbb{J} = \langle b_j \in N \rangle_{j \in J}$ *una sucesión de indiscernibles en* $\mathcal{N} \models T$. *Si* $\mathbb{I}$ *e* $\mathbb{J}$ *satisfacen el mismo plano estructural propio, entonces toda inmersión de orden* $f : (I, <_I) \longrightarrow (J, <_J)$ *puede extenderse a una $\mathcal{L}$-inmersión elemental* $\widehat{f} : \mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \longrightarrow \mathsf{EM}\,(\mathbb{J}, \Phi)$ *donde* $\widehat{f}(a_i) := b_{f(i)}$.

Observación 1.5.8. *Si* $(I, <_I) \leq (J, <_J)$*, entonces por el lema 1.5.2 tenemos que existe* $\mathcal{M} \vDash T'$ *tal que* $\mathbb{J} = \langle a_j \in M \rangle_{j \in J}$ *es una sucesión de indiscernibles. Por definición de indiscernible,* $\mathbb{I} = \langle a_j \rangle_{i \in I} \subseteq \mathbb{J}$ *también es una sucesión de indiscernibles y por definición de* $\mathcal{L}'$*-nucleo tenemos que* $EM(\mathbb{I}, \Phi) \subseteq EM(\mathbb{I}, \Phi)$.

Bajo MAG, JEP y AP, de manera análoga a lo realizado en AECs, el siguiente teorema nos permitirá trabajar con modelos de Ehrenfeucht-Mostowski en una Q-AEC análogamente al contexto de las AECs.

Teorema 1.5.9 (generalización del teorema de omisión de tipos de Morley, teorema A.3 en [Bal09]). *Sea* T' *una* $\mathcal{L}'$*-teoría,* Γ *un conjunto de tipos de primer orden* $\mathcal{L}'$*-tipos sobre* $\emptyset$*,* $\mu = (2^{|\mathcal{L}|})^+$ *y* $H_1 = \beth_\mu$*. Suponga que* $\langle \mathcal{M}_\alpha \rangle_{\alpha < \mu}$ *es una sucesión creciente y continua de* $\mathcal{L}'$*-estructuras tales que* $|M_\alpha| > \beth_\alpha$ *y* $\mathcal{M}_\alpha$ *omite todos los tipos de* Γ *para todo* $\alpha < \mu$*.*
Entonces existen un orden lineal $(I, <_I)$*, una sucesión de indiscernibles* $\mathbb{I} = \left\langle a_i \in \bigcup_{\alpha<\mu} M_\alpha \right\rangle_{i \in I}$ *tal que el plano estructural propio* Φ *de* $\mathbb{I}$ *es realizado en* $\mathcal{M}_\alpha$ *para todo* $\alpha < \mu$ *y para todo orden lineal* $(J, <_J)$ *tenemos que* $EM(\mathbb{J}, \Phi) \vDash T'$*, donde* $\mathbb{J}$ *es una sucesión de indiscernibles, y omite todos los tipos de* Γ*.*
En particular, para todo $\lambda > |\mathcal{L}|$*, existe* $\mathcal{N} \vDash T'$ *de tamaño* λ *que omite todos los elementos de* Γ*.*

A continuación mostraremos la existencia de modelos de Ehrenfeucht-Mostowski dentro de una Q-AEC $\mathcal{K}$ de manera análoga al contexto de las AECs; sólo el item 4 del siguiente teorema es enunciado en [Cop06] y no se incluye una demostración del mismo. Como lo muestra Baldwin en [Bal05], nosotros utilizamos la generalización del teorema de omisión de tipos de Morley (teorema 1.5.9) y el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) para lograrlo.

Teorema 1.5.10 (corolario 2.1.2 en [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AECque satisface AP, JEP y MAG. Entonces existe un $\mathcal{L}'$-plano estructural Φ, con $\mathcal{L}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{L}'$, tal que para todo orden lineal $(\mathrm{I}, <)$, $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi)$ satisface:*

1. *$\mathbb{I}$ es una sucesión de indiscernibles,*

2. *$\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \models \mathsf{T}'$,*

3. *$\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I}, \Phi) \in \mathcal{K}$,*

4. *Si $(\mathrm{I}', <) \leq (\mathrm{I}, <)$, entonces $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \phi) \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \phi)$ donde $\mathbb{I}$ está dado por el item 1. y $\mathbb{I}' \subseteq \mathbb{I}$ de acuerdo con la observación 1.5.8.*

Demostración. Por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19), existen un vocabulario $\mathcal{L}'$ que extiende $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, una $\mathcal{L}'$-teoría T' y un conjunto Γ de $\mathcal{L}'$-tipos tales que

$$\mathcal{K} = \mathsf{PC}(\mathcal{L}(\mathcal{K}), \mathsf{T}', \Gamma).$$

Como $\mathcal{K}$ tiene MAG, entoces T' también tiene MAG y por tanto nos es posible aplicar el hecho 1.5.2 y el teorema 1.5.9 (generalización del teorema de omisión de tipos de Morley) y así tener que para cualquier orden lineal $(\mathrm{I}, <)$ existe una sucesión de indiscernibles $\mathbb{I} \in (\mathrm{M}')^{\mathrm{I}}$ tal que $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \models \mathsf{T}'$ y $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi)$ omite todos los tipos del conjunto Γ; lo cual implica, por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I}, \Phi) \in \mathcal{K}$.

Ahora bien por el hecho 1.5.7, si $(\mathrm{I}', <) \leq (\mathrm{I}, <)$, entonces por la observación 1.5.8 tenemos que $\mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi) \subseteq \mathsf{EM}\,(\mathbb{I}, \Phi)$ y por la última parte del teorema de Presentación (teorema 1.1.19), tenemos que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I}', \Phi) \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I}, \Phi)$. $\boxed{\text{1.5.10}}$

Observación 1.5.11. *Notemos que como el vocabulario $\mathcal{L}'$ dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) es de tamaño $\mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entoces si el orden lineal $(I,<)$ es tal que $|I| \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entonces $|EM(\mathbb{I},\Phi)| = |I|$.*

Los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski serán muy importantes pues nos permiten preservar funtorialmente propiedades de los órdenes lineales como la de ser "rebosante"(*brimful* en inglés) al contexto de las Q-AECs. La propiedad de ser rebosante será de gran utilidad en la demostración del hecho que la unión de una cadena creciente continua de modelos saturados es saturada. Un estudio detallado del comportamiento funtorial de los órdenes lineales en el contexto de las categorías accesibles, un contexto más general al de las Q-AEC, es hecho por Makkai y Paré en [MP89] y por Lieberman y Rosický en [LR16].

Definición 1.5.12 (definiciones 3.2.4 y 3.2.4 en [Cop06]).

1. *Sean $(I,<)$ un orden lineal y σ un cardinal. Diremos que $(I_2,<)$ es σ-**universal** sobre $(I_1,<)$ en $(I,<)$ si y sólo si $(I_1,<) \leq (I_2,<) \leq (I,<)$ y para todo $(I_2',<)$ tal que $(I_1,<) \leq (I_2',<) \leq (I,<)$ con $|I_2'| \leq \sigma$, existe una inmersión de orden $f : (I_2',<) \longrightarrow (I_2,<)$ tal que $f \restriction_{(I_1,<)} = 1_{(I_1,<)}$. Cuando $|I_2'| = \sigma$, diremos que $(I_2,<)$ es universal sobre $(I_1,<)$ en $(I,<)$.*

2. *Diremos que $(I,<)$ es **rebosante** -brimful- si para todo cardinal $\sigma < |I|$ y todo $(I_1,<) \leq (I,<)$ de tamaño $< \sigma$, existe $(I_2,<)$ de cardinalidad σ que es σ-universal sobre $(I_1,<)$ en $(I,<)$.*

La noción de ser rebosante puede ser adaptada al contexto de las Q-AECs tomado $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-estructuras en lugar de los órdenes lineales y la relación $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$ en lugar de la relación *ser suborden*. Por otro lado cabe resaltar que en el concepto de universalidad que mencionamos en la definición 2.2.1 no hay alguna restricción de como tomamos $\mathcal{M}_2'$, mientras que en la noción de universalidad que nos impone la definición de ser rebosante si la hay. Además si $\mathcal{K}$ tiene MAG, por el teorema 1.5.10 tenemos que $\mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$ es modelo de T' y omite todos los tipos del conjunto Γ y que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\left(\mathbb{I},\Phi\right) \in \mathcal{K}$ para $(\mathrm{I},<)$ un orden lineal cualquira infinito e $\mathbb{I}$ es una sucesión de indiscernibles indexado por I. Lo que haremos en los dos siguientes resultados es ver que si $(\mathrm{I},<)$ es rebosante, $\mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$ lo es como modelo de T' y $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$ lo es como miembro de $\mathcal{K}$ con el orden $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$, análogamente lo hecho por Baldwin en el capítulo 9 de [Bal09] para el contexto de las AECs. Las demostraciones que acá presentamos están basadas en las hechas por Coppola en [Cop06] pero con mayor detalle.

Proposición 1.5.13 (hecho 3.2.7 en [Cop06])**.** *Si* $(\mathrm{I},<)$ *es un orden rebosante con* $|\mathrm{I}| > \mathsf{LS}(\mathcal{K})$ *e* $\mathbb{I}$ *es una sucesión de indiscernibles indexado con* I*, entonces* $\mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$ *es rebosante como* $\mathcal{L}'$*-estructura*[2].

Demostración. En primer lugar notemos que como $|\mathrm{I}| > \mathsf{LS}(\mathcal{K})$ tenemos que $|\mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)| = |\mathrm{I}| > \mathsf{LS}(\mathcal{K})$. Sea $\mathcal{M} \subset \mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$ de tamaño $< |\mathrm{I}|$, entonces existe $(\mathrm{I}_0,<) \leq (\mathrm{I},<)$ con $|\mathrm{I}_0| = |\mathrm{M}|$ tal que $\mathcal{M} \subseteq \mathsf{EM}\left(\mathbb{I}_0,\Phi\right)$ con $\mathbb{I}_0 \subseteq \mathbb{I}$. Como $(\mathrm{I},<)$ es un orden rebosante y $|\mathrm{I}_0| = |\mathrm{M}| < |\mathrm{I}|$ podemos encontrar $(\mathrm{I}_0',<) \leq (\mathrm{I},<)$ de cardinalidad $|\mathrm{I}_0|$ que es $|\mathrm{I}_0|$-universal sobre $(\mathrm{I}_0,<)$ en $(\mathrm{I},<)$. Definamos $\mathcal{M}_0 := \mathsf{EM}\left(\mathbb{I}_0',\Phi\right)$ dende $\mathbb{I}_0 \subseteq \mathbb{I}$ y veamos que es $|\mathrm{M}| = |\mathrm{I}_0|$-universal sobre $\mathcal{M}$ en $\mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$, para ello sea $\mathcal{N}$ de tamaño $|\mathrm{M}|$ tal que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subset \mathsf{EM}\left(\mathbb{I},\Phi\right)$.

Sea ahora $(\mathrm{I}_1,<) \subset (\mathrm{I},<)$ de tamaño $|\mathrm{N}|$ tal que $(\mathrm{I}_0,<) \leq (\mathrm{I}_1,<)$ y $\mathcal{N} \subseteq \mathsf{EM}\left(\mathbb{I}_1,\Phi\right)$. Como $(\mathrm{I}_0',<)$ es $|\mathrm{I}_0|$-universal sobre $(\mathrm{I}_0,<)$ en $(\mathrm{I},<)$, entonces existe una inmersión de orden

[2] Acá la relación que remplazará a ser *ser suborden* es la relación *ser $\mathcal{L}'$-subestructura*.

$f : (I_1, <) \longrightarrow (I_0', <)$ tal que $f \upharpoonright_{I_0} = 1_{I_0}$. Aplicando el hecho 1.5.7 podemos extender f a una $\mathcal{L}'$-inmersión $\widehat{f} : \mathsf{EM}(\mathbb{I}_1, \Phi) \longrightarrow \mathsf{EM}(\mathbb{I}_0', \Phi)$ tal que $\widehat{f} \upharpoonright_{\mathsf{EM}(\mathbb{I}_0,\Phi)} = 1_{\mathsf{EM}(\mathbb{I}_0,\Phi)}$ pues f fija puntualemente a I_0; por tanto podemos concluir que $\widehat{f} \upharpoonright_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \longrightarrow \mathsf{EM}(\mathbb{I}_0', \Phi)$ es una $\mathcal{L}'$-inmersión tal que $\left(\widehat{f} \upharpoonright_{\mathcal{N}}\right) \upharpoonright_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ pues $\mathcal{N} \subseteq \mathsf{EM}(\mathbb{I}_1, \Phi)$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathsf{EM}(\mathbb{I}_0, \Phi)$. En conclusión tenemos que $\mathcal{M}_0$ es $|M|$-universal sobre $\mathcal{M}$ en $\mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi)$. $\boxed{1.5.13}$

Baldwin demuestra en el capítulo 9 de su monografía [Bal09] que el concepto de ser rebosante puede ser adaptado a una AEC $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}})$ de una manera natural utilizando el teorema de Presentación de Shelah y los axiomas de coherencia. Basado en esto, Coppola demuestra que esta adaptación también se puede hacer en el contexto de las Q-AECs de manera natural.

Proposición 1.5.14 (hecho 3.2.8 en [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC con MAG. Si $(I, <)$ es un orden lineal rebosante de tamaño $> \mathsf{LS}(\mathcal{K})$ e $\mathbb{I}$ una sucesión de indiscernibles indexado en I, entonces $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ es rebosante en $(\mathcal{K}, \prec^{u}_{\mathcal{K}})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ tal que $|M| < |I| = |\mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi)|$. Notemos que por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19), existen un lenguaje $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}(\mathcal{K})$, una $\mathcal{L}'$-teoría T' y un conjunto Γ de $\mathcal{L}'$-tipos tales que $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$ con $\mathcal{M}' \in \mathsf{PC}(\mathcal{L}(\mathcal{K}), T', \Gamma)$; además, como $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ extiende a $\prec_{\mathcal{K}}$ y esta última extiende la relación de ser subestructura, entonces tenemos que $\mathcal{M} \subset \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ y por tanto $\mathcal{M}' \subset \mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi)$. Al aplicar el teorema 1.5.10 tenemos que existe $(I', <) \subset (I, <)$ con $|I'| = |M'| = |M|$ tal que $\mathcal{M}' \subseteq \mathsf{EM}(\mathbb{I}', \Phi) \subset \mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi)$ donde $\mathsf{EM}(\mathbb{I}', \Phi), \mathsf{EM}(\mathbb{I}, \Phi) \models T'$ y omiten todos los tipos del conjunto Γ y gracias a los teoremas 1.5.10 y 1.1.19 (teorema de Presentación) además tenemos que $\mathcal{M}' \upharpoonright_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi) \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ y como $|\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi)| =$

$|I'| < |I| = |EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)|$, entonces por el lema 1.1.13 tenemos que $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi) \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$.

Lo que haremos es construir una extensión de $\mathcal{M}$ de tamaño $|M|$ que sea universal sobre $\mathcal{M}$ en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$; para ello sea $\mathcal{M}_1 \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe $\mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ tal que $M_1 \cup EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi) \subseteq N_1$ y $|N_1| = |M|$, esto implica que $\mathcal{M}_1, EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi) \subseteq \mathcal{N}_1$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 4*a*) tenemos que $\mathcal{M}_1, EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi) \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$ pues en particular $\mathcal{M}_1, EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi), \mathcal{N}_1 \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$; por tanto por la demostración del teorema 1.1.19 (teorema de Presentación), tenemos que existen expansiónes $\mathcal{M}_1'$ y $\mathcal{N}_1'$ a $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N}_1$ respectivamente tales que $\mathcal{M}_1', EM(\mathbb{I}', \Phi) \subseteq \mathcal{N}_1' \subset EM(\mathbb{I}, \Phi)$. Por la proposición 1.5.13 tenemos que existe una $\mathcal{L}'$-estructura $\mathcal{N}_2' \subset EM(\mathbb{I}, \Phi)$ de tamaño $|I'|$ que es universal sobre $EM(\mathbb{I}', \Phi)$ en $EM(\mathbb{I}, \Phi)$, en particular existe una $\mathcal{L}'$-inmersión $f : \mathcal{N}_1' \longrightarrow \mathcal{N}_2'$.

Cabe resaltar que $\mathcal{N}_1' \models T'$ y omite todos los tipos del conjunto Γ, por tanto aplicando el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) tenemos que $\mathcal{N}_2 := \mathcal{N}_2' \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ y como $|N_2| = |N_2'| = |I'| = |M| < |EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)|$, entonces al aplicar el lema 1.1.13 tenemos que $\mathcal{N}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$; por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad), lo anterior implica que existe $\widehat{\mathcal{N}} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{N}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}} \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ y $|\widehat{N}| = |N_2| = |I_0| = |M|$. Como tenemos que f es una $\mathcal{L}'$-inmersión, en particular es una $\mathcal{L}(\mathcal{K})$-inmersión y por tanto $f' : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \widehat{\mathcal{N}}$ definida como $f'(m) = f(m)$ también lo es pues en paricular tenemos que $\mathcal{N}_2 \subseteq \widehat{\mathcal{N}}$; además como tenemos que $f[\mathcal{N}_1'] \subseteq \mathcal{N}_2'$, entonces por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) podemos concluir que $(f[\mathcal{N}_1']) \restriction_{\mathcal{L}(\mathcal{K})} = f[\mathcal{N}_1] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2$ y en consecuencia tenemos que $f'[\mathcal{N}_1] = f[\mathcal{N}_1] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}}$. Además de esto, notemos que como f fija puntualmente a $EM(\mathbb{I}', \Phi)$ entonces por definición f' fija puntualmente a $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}', \Phi)$, en particular $f'_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ y como $\mathcal{M}_1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$ por construcción de $\mathcal{N}_1$, entonces por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3) tenemos que $f[\mathcal{M}_1] \prec_{\mathcal{K}} f[\mathcal{N}_1]$ pues $f\restriction_{\mathcal{M}_1}: \mathcal{M}_1 \longrightarrow f[\mathcal{M}_1]$ es un isomorfismo y por tanto $f[\mathcal{M}_1] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$; ahora bien

$$\begin{aligned} f'\restriction_{\mathcal{M}_1}[\mathcal{M}_1] &= f\restriction_{\mathcal{M}_1}[\mathcal{M}_1], \\ &\prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \\ &\prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

La última linea la tenemos por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) pues $f\restriction_{\mathcal{M}_1}[\mathcal{M}_1] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}}$, entonces $f'' := f'\restriction_{\mathcal{M}_1}: \mathcal{M}_1 \longrightarrow \widehat{\mathcal{N}}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión que fija puntualmente a $\mathcal{M}$ pues

$$\begin{aligned} f''(\mathcal{M}) &= f'\restriction_{\mathcal{M}_1}[\mathcal{M}] \\ &= f'\restriction_{\mathcal{M}}[\mathcal{M}] \text{ pues } M \subseteq M_1 \\ &= 1_{\mathcal{M}}[\mathcal{M}] \\ &= \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Por último, notemos que como $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ entonces $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}}$ pues $\mathcal{M} = f''[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} f''[\mathcal{M}_1] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \widehat{\mathcal{N}}$ y por tanto podemos concluir que $\widehat{\mathcal{N}}$ que tiene tamaño $|M|$ es universal sobre $\mathcal{M}$ en $EM(\mathbb{I}, \Phi)$ pues $\mathcal{M}_1$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión arbitraria de tamaño $|M|$ de $\mathcal{M}$.

$\boxed{1.5.14}$

El siguiente es un ejemplo de un orden rebosante que utilizaremoes con frecuencia en el desarrollo de superestabilidad entendida como la saturación de la unión una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena de modelos saturados.

Hecho 1.5.15 (hecho 9.6 en [Bal09])**.** *Sea* λ *un cardinal.* $I = \lambda^{<\omega}$ *ordenado con el orden lexicográfico es un orden lineal rebosante.*

El corolario enunciado a continuación es inmediato de la proposición 1.5.14 y el hecho 1.5.15.

Corolario 1.5.16. *Si* $\mathcal{K}$ *es una Q-AEC con MAG y* λ *un cardinal, entonces* $\mathrm{EM}(\mathbb{I}, \Phi)$ *es rebosante en* $(\mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}}^{u})$ *con* $I = \lambda^{<\omega}$ *e* $\mathbb{I}$ *una sucesión de indiscernibles indexado en* I*.*

2 Estabilidad y docilidad

En este capítulo estudiaremos los conceptos de estabilidad y docilidad y algunas de sus consecuencias en el contexto de las Q-AEC. Estos son dos conceptos son claves en la transferencia de categoricidad pues la estabilidad nos permite controlar cuantos tipos de Galois hay sobre una estructura y este control es fundamental en los resultados previos al teorema de Shelah-Villaveces (véase [BGVV17]); por otro lado, la docilidad es la hipótesis central en los resultados parciales de transferencia de categoricidad de Grossberg y Vandieren (véase [GV06b]).

La estabilidad junto con la AP nos permitiran construir modelos universales, i.e. modelos saturados sobre estructuras pequeñas, del tamaño adecuado y modelos límite, i.e. modelos lo *suficientemente* saturados, también de tamaño adecuado. En la demostración del teorema de Shelah-Villaveces estos dos conceptos junto con el de ruptura son fundamentales y por tanto son fundamentales en el desarrollo de la superestabilidad en AECs. Además de esto, el concepto de modelo límite es indispensable en los resultados parciales de superestabilidad estudiados por Grosberg, VanDieren y Villaveces en [GVV16] en el contexto de las AECs y por Zambrano en [Zam11] para el contexto de las MAECs donde la versión de superestabilidad que es estudiada es *la unicidad de modelos límite*. En el presente trabajo nosotros no trabajaremos esta aproximación a la superestabilidad pero tenemos la intuición que no será difícil adaptar los resultados expuestos en [GVV16] al contexto de las Q-AEC.

Como lo mencionamos en la introducción, la existencia de una clase de cardinales fuertemente compactos es consiste con que las AECs sean dóciles y a su vez, la docilidad junto con *otras hipótesis* nos permiten tener los resultados parciales de transferencia de categoricidad expuestos en [GV06b]. En [SV18] Shelah y Vasey remueven esas *otras hipótesis* utilizadas en [GV06b] por Grossberg y VanDieren y demuestran la conjetura eventual de categoricidad de Shelah suponiendo solamente docilidad, utilizando fuertemente la superestabilidad en AECs.

Los conceptos de estabilidad y docilidad son introducidos por Coppola en [Cop06] para el contexto de las Q-AECs y además de esto adapta varios resultados que se deducen de estos conceptos. En este capítulo nosotros haremos un recorrido por las consecuencias más importantes de estos conceptos expuestas por Coppola en su tesis, introduciremos los conceptos de modelos universales y límites y demostraremos algunas propiedades básicas de este tipo de modelos que nos serán de utilidad en nuestro estudio de la superestabilidad. Por último, nosotros adaptaremos el demostraremos que la existencia de una clase propia de cardinales fuertemente compactos es consistente con la docilidad apoyándonos en el concepto de categoría accesible.

2.1. Estabilidad

En esta sección introduciremos el concepto de estabilidad, que es central en el estudio de categoricidad como en el caso de primer orden. Dentro de una Q-AEC $\mathcal{K}$ que sea estable podremos construir modelos saturados de cardinalidad pequeño. Para esta sección nos hemos basado en [Cop06], [Bal09] y [Les05].

Definición 2.1.1 (Definición 3.2.1 en [Cop06])**.** *Diremos que una Q-AEC $\mathcal{K}$ es μ**-estable o estable en** μ si para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ se tiene que $|ga - S(\mathcal{M})| \leq \mu$.*

El siguiente resultado nos dice que si tenemos categoricidad en un cardinal por encima del número de Löwenheim-Skolem de una Q-AEC $\mathcal{K}$, entonces hay estabilidad entre este número y el cardinal de la categoricidad. La demostración de este teorema es la primera aplicación que haremos de los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski dentro de una Q-AEC y la haremos basados en las ideas de la demostración del teorema 1.4 en [Les05] y el teorema 4.10 en [Bal05]. Coppola demuestra este hecho pero acá nosotros aclaramos ciertas partes de la prueba que se presenta en [Cop06].

Teorema 2.1.2 (Teorema 3.2.9 en [Cop06])**.** *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface JEP, AP y tiene MAG. Si $\mathcal{K}$ es λ-categórica para $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entonces es μ-estable para todo μ con $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) \leq \mu < \lambda$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Si $\mathcal{K}$ no es μ-estable para algún μ tal que $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) \leq \mu < \lambda$, entonces existe $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $|ga - S(\mathcal{M})| > \mu$. Sea $A = \{a \in |\mathbb{C}| : a \models p,\ p \in ga - S(\mathcal{M})\}$. Claramente $|A| = |ga - S(\mathcal{M})|$ y por lo tanto, utilizando la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{|A \cup M|}$ tal que $M \cup A \subset N$ y $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. Con ayuda de la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente) nosotros podemos encontrar $\mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ de tal manera que cumpla alguna de las siguientes condiciones:

- Si $|A \cup M| = |N| = \lambda$, tomamos $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$.
- Si $|A \cup M| = |N| < \lambda$, sea $N' \supseteq N$ tal que $|N'| = \lambda$.
- Si $|A \cup M| = |N| > \lambda$, sea $N' \supseteq B \cup \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$ con $|B| = \lambda$ y $|N'| = \lambda$.

Por lo tanto $\mathcal{N}'$ es un modelo de tamaño λ tal que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y realiza más que μ tipos sobre $\mathcal{M}$. Notemos que como $\mu < \lambda$, entonces por el lema 1.1.13 tenemos que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$. Por el teorema 1.1.19 (teorema de Presentación) y como $\mathcal{K}$ tiene MAG, podemos trabajar con modelos de Ehrenfeucht-Mostowski en $\mathcal{K}$ con gracias al teorema 1.5.10. Sea $\mathcal{N}^* := EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\lambda^{<\omega}, \Phi) \in \mathcal{K}$, es claro que $|N^*| = \lambda$. Por el colorario 1.5.16 tenemos que $\mathcal{N}^*$ es rebosante en $(\mathcal{K}, \prec^{u}_{\mathcal{K}})$ pues $\lambda^{<\omega}$ lo es como orden lineal por el hecho 1.5.15, esto es que para todo $\mathcal{N}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$ de tamaño μ esixte $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{K}_\mu$ que es μ-universal sobre $\mathcal{N}_0$ en $\mathcal{N}^*$ y por tanto $\mathcal{N}^*$ realiza a lo sumo μ sobre $\mathcal{N}_0$ pues $\mathcal{N}_1$ realiza a lo sumo μ tipos.

Por la λ-categoricidad de $\mathcal{K}$, tenemos que existe un isomorfismo $f : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}^*$. Al aplicar los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) es claro que $f[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$ pues $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y como $|M| = \mu$, entonces $f[\mathcal{M}]$ tiene tamaño μ y por tanto $\mathcal{N}^*$ sólo satisface μ tipos sobre $f[\mathcal{M}]$ lo cuál contracide la categoricidad pues $\mathcal{N}'$ satisface más de μ tipos sobre $\mathcal{M}$. $\boxed{2.1.2}$

El siguiente resultado es una aplicación de la estabilidad en una Q-AEC y nos muestra que podemos encontrar modelos saturados de cardinal acotado bajo estabilidad. Este resultado no es enunciado por Coppola en su trabajo y lo que nosotros hacemos es adaptarlo del contexto de las AECs inspirados en [Bal09].

Lema 2.1.3 (cf. corolario 8.23 en [Bal09]). *Suponga que $\mathcal{K}$ es una Q-AEC que satisface AP, JEP y que tiene MAG que es μ-estable para $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$.*

1. *Si λ es regular, existe un modelo saturado de tamaño λ.*
2. *En general, existe un modelo $cf(\lambda)$-saturado de tamaño λ.*

Demostración. 1. Construiremos el modelo saturado pedido con ayuda de una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión continua creciente $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\lambda}$ tal que para cada $i < \lambda$, $|M_i| < \lambda$ y $\mathcal{M}_{i+1}$ realiza todos los tipos sobre $\mathcal{M}_i$. Notemos que como $\mathcal{K}$ tiene MAG, $\mathcal{K}_{LS(\mathcal{K})} \neq \emptyset$ y por tanto existe $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}_{LS(\mathcal{K})}$. Supongamos construido $\mathcal{M}_i$ tal que $|M_i| = \mu < \lambda$. Como $\mathcal{K}$ es μ-estable para $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$, entonces tenemos que $|ga - S(\mathcal{M}_i)| \leq \mu$ y en consecuencia, para cada $p \in ga - S(\mathcal{M}_i)$ podemos escoger un $a_p \in |\mathbb{C}|$ de tal manera que $a_p \models p$. Por la Definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), existe $\mathcal{M}'_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$ de tal manera que $M_i \cup \{a_p\}_{p \in ga-S(\mathcal{M}_i)} \subseteq M'_{i+1}$ y $\mathcal{M}'_{i+1} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$; es fácil ver que $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}'_{i+1}$ y como en particular tenemos que $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}'_{i+1} \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$, entonces por los axiomas de coherencia tenemos que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_{i+1}$. Al aplicar los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) encontramos $\mathcal{M}_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}'_{i+1} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$.

Si $i < \lambda$ es un ordinal límite y tenemos construido $\mathcal{M}_j$ para todo $j < i$, definamos $\mathcal{M}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j$ que, por la definición 1.1.1.6*c* (axioma de cadenas de Tarski-Vaught), es tal que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y por el lema 1.1.13 tenemos que $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ pues $\mathbb{C}$ puede ser escogido tal que $\lambda < \|\mathbb{C}\|$; por la regularidad de λ tenemos que $|M_i| = |i| \sup_{j<i}\{|M_j|\} <$

λ.

Defina $\mathcal{N} := \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_i$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught tenemos que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ pues para todo $i < \lambda$ tenemos que $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y como $\|\mathbb{C}\| > \lambda$, entonces al aplicar el lema 1.1.13 tenemos que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ pues

$$\begin{aligned}
|N| &= \left|\bigcup_{i<\lambda} M_i\right|, \\
&= \lambda \sup_{i<\lambda} |M_i|, \\
&= \lambda\mu \text{ pues } |M_i| = \mu \text{ para todo} < \lambda, \\
&= \lambda \text{ pues } \mu < \lambda.
\end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{N}$ es λ-saturado. Para ello sea $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ tal que $|M| < \lambda$. Por la regularidad de λ, existe $i < \lambda$ tal que $M \subset M_i$ y por tanto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_i$, utilizando los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ pues en particular tenemos que $\mathcal{M}, \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y como $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$. Sea $p \in ga - S(\mathcal{M})$ y $a \in |\mathbb{C}|$ tal que $a \models p$, es decir $p = ga - tp(a/\mathcal{M}, \mathbb{C})$ y consideremos $p' = ga - tp(a/\mathcal{M}_{i+1}, \mathbb{C})$ que es realizado en $\mathcal{M}_{i+2}$ por la construcción de $\mathcal{N}$; esto último quiere decir que existe $b \in M_{i+2}$ tal que $b \models p'$ y por tanto existe $f \in Aut_{\mathcal{M}_{i+1}}(\mathbb{C})$ tal que $f(a) = b$. Como $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$, entonces $f \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$, en consecuencia $p' \restriction_{\mathcal{M}} = ga - tp(b/\mathcal{M}_{i+1}, \mathbb{C}) \restriction_{\mathcal{M}} = ga - tp(b/\mathcal{M}, \mathbb{C}) = p$ y al tenerse que $\mathcal{M}_{i+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ es inmediato que $b \in N$. Por tanto $\mathcal{N}$ es saturado.

2. La idea para este ítem es la misma que en el numeral anterior pero tomando la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua de longitud $cf(\lambda)$ y para todo $i < cf(\lambda)$, $\mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_{<cf(\lambda)}$.

$\boxed{2.1.3}$

Al aplicar el lema anterior y el teorema 2.1.2, es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.1.4. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica. Entonces existe un modelo de tamaño λ que es $\mathrm{cf}(\lambda)$-saturado.*

Uno de los conceptos centrales en el presente trabajo es el de saturación pues es central en una de las aproximaciones a la superestabilidad que estudiaremos. A continuación presentamos un resultado que nos da condiciones suficientes sobre un orden lineal $(I, <)$ para que $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ sea un modelo saturado. El siguiente lema no es estudiado por Coppola en su trabajo pero es análogo al que se tiene en el contexto de las AECs, nosotros nos basamos en [Bal09] para enunciarlo y demostrarlo.

Lema 2.1.5 (cf. lema 10.11 en [Bal09]). *Sea Φ un cianotipo propio para todo orden lineal $(I, <)$ e $\mathbb{I}$ una sucesión indiscernible indexado en I. Supongamos que $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi) \in \mathcal{K}$ y que $\mathcal{K}$ es λ-categórica. Si $(J, <)$ es un orden lineal tal que para todo $\theta < |J|$, J tiene una sucesión creciente de tamaño θ^+ con $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) \leq |J| < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}, \Phi)$ es saturado donde $\mathbb{J}$ es un orden indiscernible indexado por J.*

Demostración. Veremos que para cada $\theta < |J|$, $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}, \Phi)$ es θ^+-saturado. Para ello, sea $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}, \Phi)$ tal que $|M_0| = \theta$. Por hipótesis, J tiene una sucesión J_0^θ creciente de tamaño θ^+ y sea J_θ la suma ordinal de J_0^θ y λ. Ahora bien como Φ se satisface para todo orden lineal, en particular se satisface para J_θ y como el tamaño de J_θ es λ, entonces $|\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}_\theta, \Phi)| = \lambda$ donde $\mathbb{J}_\theta$ es un orden indiscernible indexado por J_θ. Por la λ-categoricidad de $\mathcal{K}$ tenemos que $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}_\theta, \Phi)$ es único salvo isomorfismo y por el corolario 2.1.4, tenemos que es $cf(\lambda)$-saturado. Como $\theta^+ \leq cf(\lambda) \leq \lambda$, este modelo resulta ser además θ^+-saturado.

Como tenemos que existe un suborden J'_θ de J_θ que es isomorfo a θ, entonces tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}'_\theta, \Phi) \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}_\theta, \Phi)$ y en consecuencia todo $p \in ga - S(M_0)$ tiene una realización $\sigma(a_j, a_{j'})$ en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}'_\theta, \Phi)$ con j en J_0^θ y j' en la copia de λ. Podemos elegir $(K, <) \leq (J, <)$ con $|K| = \theta$ y $M_0 \cup j \subset EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{K}, \Phi)$. Como J_0^θ tiene tamaño θ^+, podemos encontrar una copia j'' de j' en J_0^θ tal que $K \cup \{j\} \cup \{j'\}$ tiene el mismo tipo de orden de $K \cup \{j\} \cup \{j''\}$ y por lo tanto j, j'' generan una realización de p en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{J}, \Phi)$ puesto que $\mathbb{J}$ es una sucesión indiscernible. $\boxed{2.1.5}$

Una aplicación del lema anterior, que no es estudiada en [Cop06], se presenta enseguida y pedimos la categoricidad en un cardinal regular pues esto nos permitirá garantizar la unicidad del modelo saturado $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$ (lema 2.1.4).

Corolario 2.1.6 (cf. corolario 10.14.1 en [Bal09])**.** *Suponga que $\mathcal{K}$ es una Q-AEC λ-categórica con λ regular. Entonces para todo cardinal $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$, $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^{<\omega}, \Phi)$ es saturado y por tanto modelo-homogéneo.*

Demostración. En primer lugar, notemos que como μ es un cardinal infinito, dado $n \in \omega$

diferente de 0 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu^n, \\
&\leq \sup\{\mu^n : n \in \omega\}, \\
&= \mu^{<\omega}, \\
&\leq \mu^\omega, \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Ahora bien como λ es un cardinal regular, $\mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ y como para todo ordinal $\eta < \mu$, entonces $|\eta| < \mu$ y por tanto en μ existe una sucesión de tamaño $|\eta|^+$ pues $|\eta|^+ \leq \mu$. Por lo anterior y el lema 2.1.5 tenemos que $\mathsf{EM}_{\mathrm{LS}(\mathcal{K})}(\mu^{<\omega}, \Phi)$ es saturado y por el lema 1.4.3 también es modelo-homogéneo. $\boxed{2.1.6}$

Notemos que si λ y $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ son cardinales con κ regular, entonces para todo $\mu < \kappa$ se cumple que κ contiene una sucesión creciente de cardinalidad μ^+. El siguiente colorario es inmediato de lo que acabamos de decir y del lema 2.1.5. El resultado es enunciado por Baldwin en [Bal09] para el contexto de AECs pero él no toma en cuenta que el cardinal κ debe ser regular para que se satisfagan las hipótesis del lema 2.1.5.

Corolario 2.1.7 (cf. corolario 10.14.3 en [Bal09]). *Suponga que $\mathcal{K}$ es una Q-AEC λ-categórica. Si $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ es un cardinal, entonces $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa, \Phi)$ es saturado y por tanto modelo-homegeneo.*

A continuación demostraremos que si una Q-AEC es λ-categórica y μ es un cardinal tal que $\mu^+ < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mu}$-inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$.

Proposición 2.1.8. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica que satisface JEP. Si μ un cardinal tal que $\mu^+ < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ existe una $\prec^u_\mathcal{K}$-inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$.*

Demostración. Como $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu^+ < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces al aplicar el colorario 2.1.7 tenemos que tenemos que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ es una estructura sataturada y en particular modelo-homogénea (teorema 1.4.3). Gracias al axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) podemos encontrar $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{N} \prec^u_\mathcal{K} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y como $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces existen $\mathcal{N}' \succ^u_\mathcal{K} \mathcal{N}$ y una $\prec^u_\mathcal{K}$-inmersión $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}'$.
Como $g[\mathcal{M}], \mathcal{N} \in \mathcal{K}_\mu$, entonces al aplicar el lema 1.1.15 tenemos que existe $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{N} \prec^u_\mathcal{K} \mathcal{N}'' \prec^u_\mathcal{K} \mathcal{N}'$ y $g[M] \subseteq N''$. Esto último implica que $g[\mathcal{M}] \subseteq \mathcal{N}''$ y como en particular $g[\mathcal{M}], \mathcal{N}'' \prec_\mathcal{K} \mathcal{N}'$, entonces $g[\mathcal{M}] \prec_\mathcal{K} \mathcal{N}''$. Como $\|\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)\| = \mu^+$, $\mathcal{N} \prec^u_\mathcal{K} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}_\mu$, entonces por la modelo-homogeneidad de $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ tenemos que existe una $\prec^u_\mathcal{K}$-inmersión $h : \mathcal{N}'' \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ tal que $h \restriction_\mathcal{N} = 1_\mathcal{N}$. Notemos que como $h : \mathcal{N}'' \longrightarrow h[\mathcal{N}'']$ es un isomorfismo y $g[\mathcal{M}] \prec_\mathcal{K} \mathcal{N}''$ por construcción de $\mathcal{N}''$, entonces por los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) tenemos que $h[g[\mathcal{M}]] \prec_\mathcal{K} h[\mathcal{N}'']$. Además como $h : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ es una $\prec^u_\mathcal{K}$-inmersión, entonces $h[g[\mathcal{M}]] \prec_\mathcal{K} h[\mathcal{N}''] \prec^u_\mathcal{K} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $h[g[\mathcal{M}]] \prec^u_\mathcal{K} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$.
Sea $f := h \circ (g \restriction_\mathcal{M})$. Claramente $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ es una $\prec^u_\mathcal{K}$-inmersión pues $f[\mathcal{M}] = (h \circ (g \restriction_\mathcal{M}))[\mathcal{M}] = h[g[\mathcal{M}]] \prec^u_\mathcal{K} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. $\boxed{2.1.8}$

Con ayuda de la proposición que acabamos de demostar, mostraremos que toda estructura $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\mu^+}$ puede ser $\prec_\mathcal{K}$-sumergida en $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. Las proposiciones 2.1.8 y la que a continuación presentaremos se encuentran enunciadas implícitamente para el contexto de las AECs en [SV99] y en [BGVV17], Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey hacen una demostración de estos resultados diferente a la que acá presentamos.

Proposición 2.1.9. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica que satisface JEP. Si μ es un cardinal tal que $\mu^+ < \mathrm{cf}(\lambda)$ y $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}}$-sucesión creciente continua, entonces existe una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. En particular, para toda estructura $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\mu^+}$ existe una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$.*

Demostración. En primer lugar notemos que por la proposición 2.1.8, tenemos que para cada $i < \mu^+$ existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}}$-inmersión $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y como para todo $i\mu^+$ tenemos que $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow f_i[\mathcal{M}_i]$ es un isomofismo, entonces por los axiomas de isomorfismo tenemos que para todos $i, j < \mu+$ tales que $i < j$ se cumple que $f_i[\mathcal{M}_i] \prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}} f_j[\mathcal{M}_j]$; además, si $i < \mu^+$ es un ordinal límite, entonces podemos definir la inmersión $f_i := \bigcup_{j<i} f_j : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ que por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) resulta ser una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión pues para todo $j < i$ tenemos que $f_j[\mathcal{M}_j] \prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y por tanto $f_i[\mathcal{M}_i] = \bigcup_{j<i} f_j[\mathcal{M}_j] \prec_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. Como $i < \mu^+$, entonces $|f_i[M_i]| = \left|\bigcup_{j<i} M_j\right| = \mu$ y al aplicar el lema 1.1.13 concluimos que $f_i[\mathcal{M}_i] = \bigcup_{j<i} f_j[\mathcal{M}_j] \prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y en consecuencia $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}}$-inmersión.

Por lo dicho en el párrafo anterior, tenemos que $\langle f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi) \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\subseteq$-sucesión creciente continua de $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}}$-inmersiones. Es último implica que $\langle f_i[\mathcal{M}_i] \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}}$-sucesión creciente continua y como para todo $i < \mu^+$ se cumple que $f_i[\mathcal{M}_i] \prec_{\mathcal{K}}^{\mathrm{u}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$, entonces al aplicar los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición

1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. Por tanto $f := \bigcup_{i<\mu^+} f_i : \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ es una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión.

Sea ahora $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\mu^+}$. Para demostrar que existe una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$, construiremos de manera recursiva sobre μ^+ una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\mu^+}$ de $\prec^u_{\mathcal{K}}$-subestructuras de $\mathcal{M}$ y aplicaremos la primera parte de esta demostración.

Base. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.15), existe $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$.

Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ una enumeración de $M \setminus M_0$.

Paso sucesor. Supongamos que para $i < \mu^+$ tenemos construido $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ de tamaño μ. Como $\mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu$, entonces existe $\alpha < \mu^+$ tal que $a_\alpha \in M \setminus M_i$. Sea $\beta = \text{mín}_{\alpha<\mu^+}\{a_\alpha \in M \setminus M_i\}$. Al utilizar el lema 1.1.15, existe $\mathcal{M}_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_i \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+2} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\{a_\beta\} \subseteq M_{i+1}$.

Paso límite. Sea $i < \mu^+$ un ordinal límite y supongamos que para todo $j < i$ tenemos construido $\mathcal{M}_j \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_j \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y como $i < \mu^+$, entonces $\bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j \in \mathcal{K}_\mu$. Al aplicar el lema 1.1.13, concluimos que $\bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Definamos $\mathcal{M}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j$.

Por construcción tenemos que $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ y al aplicar la primera parte de la demostración, existe una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. $\boxed{2.1.9}$

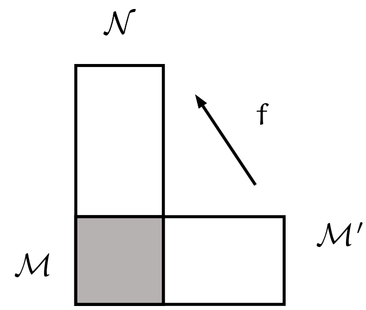
2.2. Modelos universales y modelos límite

En esta sección nosotros trabajaremos los conceptos de modelos universales, modelos saturados sobre una estructura fija, y modelos límite, modelos lo *suficientemente* saturados, conceptos fundamentales en nuestro estudio de la superestabilidad. Demostraremos que la estabilidad nos permite construir construir modelos universales y saturados de tamaño pequeño y que dos modelos límite son isomorfos si tienen longitudes de la misma cofinalidad. Es importante resaltar que en este trabajo es la primera vez que se estudia el concepto de modelo límite en el contexto de las Q-AECs.

2.2.1. Modelos universales

El concepto de universalidad puede ser entendido como una saturación sobre una estructura fija y por tanto podemos relacionarlo con el concepto de modelo-homogeneidad. La diferencia está en que en el concepto de universalidad nosotros sólo tenemos en cuenta una sola subestructura que no necesariamente es *pequeña* mientras que en concepto de modelo-homogeneidad tenemos en cuenta todas las subestructuras *pequeñas*.

Definición 2.2.1 (Definición 3.2.13 en [Cop06])**.** *Diremos que $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ es μ-**universal** sobre $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si para todo $\mathcal{M}'$ tal que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ y $|M'| \leq \mu$, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{N}$ es universal sobre $\mathcal{M}$ si es $|N|$-universal sobre $\mathcal{M}$.*



Observación 2.2.2. *Notemos que si en la definición anterior tomamos $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces al ser $\mathsf{f} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ una $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión tal que $\mathsf{f} \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$, por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3) tenemos que $\mathcal{M} \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathsf{f}[\mathcal{M}']$ pues en particular $\mathsf{f} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathsf{f}[\mathcal{M}']$ es un isomorfismo y como por definición de $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión tenemos que $\mathsf{f}[\mathcal{M}'] \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces por la transitividad de la relación $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$ (definición 1.1.1.1) podemos concluir que $\mathcal{M} \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Por tanto podemos decir que $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ o $\mathcal{M} \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ indistintamente.*

Por otro lado, si suponemos que una Q-AEC tiene MAG y sastiface JEP, entonces podemos suponer en la definición de universalidad (definición 2.2.1) que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ pues por el lema 1.1.14 existe $\mathcal{M}''$ de tamaño $|M'|$ tal que $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$; por tanto al utilizar la definición 2.2.1, existe una $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathsf{f} : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{N}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$ y por tanto $\mathsf{f} \restriction_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ es una $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues por los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3), tenemos que $\mathsf{f} \restriction_{\mathcal{M}'} [\mathcal{M}'] = \mathsf{f}[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{f}[\mathcal{M}''] \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, lo cual implica por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4c) que $\mathsf{f}[\mathcal{M}'] \prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

Los dos párrafos anteriores indican que en la definición 2.2.1 podemos tomar $\prec_{\mathcal{K}}$-extensiones o $\prec^{\mathsf{u}}_{\mathcal{K}}$-extensiones sin problema alguno.

La siguiente afirmación nos muestra como el concepto de universalidad se relaciona con el concepto de saturación relativa a una estructura fija como lo mencionamos al principio de la sección.

Afirmación 2.2.3. *Si $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, entonces en $\mathcal{N}$ hay realizaciones para todo $p \in ga - S(\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $p \in ga - S(\mathcal{M})$. Por definición existe $\overline{a} \in |\mathbb{C}|^{<\omega}$ tal que $p = ga - tp(\overline{a}/\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_{|M|}$ tal que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $M \cup \{\overline{a}\} \subseteq M'$; resulta sencillo ver que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ y como en particular tenemos que $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Como $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$ y $|M'| = |M| \leq \mu$, entonces por la observación 2.2.2 existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$. Notemos que $f : \mathcal{M}' \longrightarrow f[\mathcal{M}']$ es un isomorfismo que fija puntualmente a $\mathcal{M}$ y por tanto existe $F \in Aut_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$ tal que $F \supset f$ pues $\mathbb{C}$ es homogéneo. Como $F(\overline{a}) = f(\overline{a}) \in N$, entonces podemos concluir que en $\mathcal{N}$ existe una una realización de p. $\boxed{2.2.3}$

La siguiente proposición nos muestra que si $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, entonces tenemos que $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre cualquier $\prec_{\mathcal{K}}$-subestructura de $\mathcal{M}$ y como toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura es en particular una $\prec_{\mathcal{K}}$-subestructura, podemos concluir que $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura de $\mathcal{M}$. Este resultado no se encuentra enunciado en el trabajo de Coppola y nos será de utilidad más adelante en los resultados de modelos universales y modelos límites.

Lema 2.2.4 (cf. proposición 1.3.19 en [Zam11]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP y $\mathcal{M}, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}, \mathcal{N}^* \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M}^* \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$. Si $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}^*$ y $\mathcal{N}^*$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{M}^* \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$ con $\mathcal{N}$ μ-universal sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-extensión de $\mathcal{M}^*$.

Para ver que $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}^*$, en primer lugar notemos que por la definición 1.1.1.4*b* (axiomas de coherencia) tenemos que $\mathcal{M}^* \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, pues por hipótesis $\mathcal{M}^* \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Además como en particular $\mathcal{M}^* \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}', \mathcal{M}$, entonces por AP existen $\mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ y una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathrm{f} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}'$ tales que $\mathcal{M} \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, hook, dashed, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}' \\
\mathcal{M}^* \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}^* \arrow[u, dashed, "\mathrm{f}"']
\end{tikzcd}
$$

Por los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) tenemos que existe $\mathcal{N}'' \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ tal que $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y $\mathrm{f}[\mathrm{M}^*] \cup \mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}''$. Claramente $\mathcal{M}, \mathrm{f}[\mathcal{M}^*] \subseteq \mathcal{N}''$ y como en particular tenemos que $\mathcal{M}, \mathrm{f}[\mathcal{M}^*], \mathcal{N}'' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M}, \mathrm{f}[\mathcal{M}^*] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''$. Como $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, entonces por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) existe $\mathcal{N}''' \in \mathcal{K}_{|\mathrm{N}''|}$ tal que $\mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}''' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $\mathcal{M}, \mathrm{f}[\mathcal{M}^*] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'''$ pues $\mathcal{M}, \mathrm{f}[\mathcal{M}^*] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'' \prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'''$. Por tanto podemos suponer que $|\mathrm{N}'| \leq \mu$.

Ahora bien, como $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}'$ es una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$ extensión de $\mathcal{M}$ de tamaño $\leq \mu$, entonces existe una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión $\mathrm{g} : \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{N}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{N} & \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}' \arrow[ul, dashed, "\mathrm{g}"'] \\
\mathcal{M}^* \arrow[u, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}^* \arrow[u, "\mathrm{f}"']
\end{tikzcd}
$$

Es claro que $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} : \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{N}$ es una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues es composición de dos $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-

inmersiones y como g fija puntualmente a $\mathcal{M}$, en particular fija puntualmente a $\mathcal{M}^*$ pues $M^* \subseteq M$ y en consecuencia si $m \in M^*$ tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ f(m) &= g(f(m)) \\ &= g(m) \text{ pues } f \text{ fija puntualmente a } \mathcal{M}^*, \\ &= m \text{ pues } g \text{ fija puntualmente a } \mathcal{M}^*. \end{aligned}$$

Por tanto $g \circ f$ fija puntualmente a $\mathcal{M}^*$. En conclusión $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}^*$.

Para ver que $\mathcal{N}^*$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, sea $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-extensión de $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, entonces existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que $f \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$. Como $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$ y $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $f[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}^*$ y en consecuencia $f' : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}^*$ definida como $f'(a) := f(a)$ atestigua que $\mathcal{N}^*$ sea μ-universal sobre $\mathcal{M}$. $\boxed{2.2.4}$

El siguiente resultado nos dice que la propiedad de universalidad es invariante bajo isomorfismos. La demostración la incluimos para la completitud del documento.

Lema 2.2.5. *Supongamos que $\mathcal{N}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$ y $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ es un isomorfismo. Entonces $\mathcal{N}'$ es μ-universal sobre $f[\mathcal{M}]$.*

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{N}'$ es μ-universal sobre $f[\mathcal{M}]$ sea $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ tal que $f[\mathcal{M}] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_0$. Como $f^{-1}_{f[\mathcal{M}]} : f[\mathcal{M}] \longrightarrow \mathcal{M}$ es un isomorfismo, entonces por el lema 1.1.16 (lema de renombramiento) existen $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}$ y $\widehat{f^{-1}} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{M}'$ un isomorfismo tales que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}'$ y $\widehat{f^{-1}}$ extiende a f^{-1}, esto implica que $\mathcal{M} = f^{-1}[f[\mathcal{M}]] = \widehat{f^{-1}}[f[\mathcal{M}]] \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}'$ y como $f^{\widehat{-1}}[\mathcal{N}'] = \mathcal{M}'$, entonces tenemos que $|M'| \leq \mu$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{N} \arrow[r, "f"] & \mathcal{N}' & \\
 & \mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dl, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & f[\mathcal{M}] \arrow[l, "f^{-1}_{f[\mathcal{M}]}"] \arrow[u, hook', "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[dr, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \\
\mathcal{M}' & & & \mathcal{N}_0 \arrow[lll, dashed, "f^{\widehat{-1}}"]
\end{tikzcd}$$

Por la μ-universalidad de $\mathcal{N}$ sobre $\mathcal{M}$ tenemos que existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{N} \arrow[r, "f"] & \mathcal{N}' & \\
 & \mathcal{M} \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[dl, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & f[\mathcal{M}] \arrow[l, "f^{-1}_{f[\mathcal{M}]}"] \arrow[u, hook', "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[dr, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \\
\mathcal{M}' \arrow[uur, dashed, "g"] & & & \mathcal{N}_0 \arrow[lll, "f^{\widehat{-1}}"]
\end{tikzcd}$$

Defina $h := f \circ g \circ f^{\widehat{-1}}$. Claramente $h : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{N}'$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues es la composición de dos isomorfismo y un $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión. Sea $a \in f[\mathcal{M}]$, entonces

$$\begin{aligned}
h(a) &= \left(f \circ g \circ f^{\widehat{-1}}\right)(a), \\
&= \left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(a) \text{ pues } f^{\widehat{-1}} \supseteq f^{-1} \text{ y } a \in f[M], \\
&= f\left(g\left(f^{-1}(a)\right)\right), \\
&= f\left(f^{-1}(a)\right) \text{ pues } g \text{ fija puntualmente a } \mathcal{M} \text{ y } f^{-1}(a) \in M, \\
&= a,
\end{aligned}$$

luego h fija puntualmente a $f[\mathcal{M}]$ y por tanto $\mathcal{N}'$ es μ-universal sobre $f[\mathcal{M}]$. $\boxed{2.2.5}$

La siguiente proposición es una herramienta últil al momento de garantizar la existencia de modelos límite y en varios resultados que presentaremos más adelante. El resultado que presentaremos a continuación es enunciado y demostrado por Coppola en [Cop06]. La demostración que acá presentamos está basada en [Van06] y tiene una construcción más rigurosa de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena necesaria para probar que todo modelo de la clase tiene una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión universal y de la inmersión que atestigua la universalidad. Lo que nos muestra el siguiente resultado es que bajo AP y estabilidad podemos encontrar extensiones universales de cardinalidad acotada.

Lema 2.2.6 (lema 3.2.13 en [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP y $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ con $LS(\mathcal{K}) \leq \mu$. Si $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces $\mathcal{M}$ tiene una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión μ-universal de tamaño μ.*

Demostración. Comenzaremos construyendo una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu}$ de manera recursiva tal que $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$ y para todo $i < \mu$, $|M_i| = \mu$ y $\mathcal{M}_{i+1}$ realiza todo $p \in ga - S(\mathcal{M}_i)$. Supongamos construido $\mathcal{M}_i$ para $i < \mu$. Por la μ-estabilidad de $\mathcal{K}$ existe una enumeración $\{p_j\}_{j<\mu}$ de $ga - S(\mathcal{M}_i)$ y sea $A = \{a_j \in |\mathbb{C}| : a_j \vDash p_j, j < \mu\}$ una elección de realizaciones de los tipos de Galois sobre $\mathcal{M}_i$ en el modelo monstruo; utilizando la definicón 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente), podemos encontrar $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ tal que $A \cup M_i \subset M'$ y $|M'| = \mu$ pues $|A| = \mu$; por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad), existe $\mathcal{M}_{i+1}$ de tamaño μ tal que $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+i} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y como $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}'$, entonces por la definición 1.1.1.4*a* (axiomas de coherencia) $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, por tanto $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+i}$ y al utilizar la definición 1.1.1.4*b* (axiomas de coherencia) tenemos que $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$.

Si para todo $j < i$ con $i < \mu$ un ordinal límite tenemos construido $\mathcal{M}_j$, definimos $\mathcal{M}_i := \bigcup\limits_{j<i} \mathcal{M}_j$.

Definamos $\mathcal{N} := \bigcup\limits_{i<\mu} \mathcal{M}_i$ que por los axiomas de cadenas de Tarski Vaught (definición

1.1.1.6*c*) es tal que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ pues $\mathcal{N}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ para todo $i < \mu$ por construcción. Recordemos que por el teorema 1.2.7 podemos suponer que $\|\mathbb{C}\| > |N|$ y aplicando el lema 1.1.13, tenemos que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$. Notemos que por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad), existe $\mathcal{N}'$ tal que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $|N'| = |N|$. Además como $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y $\mathcal{N} = \bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i$, entonces por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*) tenemos que $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y en consecuencia $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, esto último por la transitividad de la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ (definición 1.1.1.1).

Veamos ahora que $\mathcal{N}'$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$, para ello sea $\mathcal{M}'$ una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión de $\mathcal{M}$ y $\langle a_i : i < \mu\rangle$ una enumeración de $M' \setminus M$. Lo que haremos es construir recursivamente una $\subseteq$-cadena creciente continua $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ de $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones que fijen puntualmente a $\mathcal{M}$. Cuando $i = 0$, tome $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y $f_0 = 1_{\mathcal{M}}$. Como $\mathcal{M}_1$ tiene realizaciones para todo $p \in ga - S\,(\mathcal{M}_0)$, en particular existe $b \in M_1$ tal que $b \models ga - tp(a_0/\mathcal{M}_0, \mathcal{M}')$ y por el hecho 1.3.7 tanto existen $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{K}$, $b \in M_1$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_1 : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_1$ tales que $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$, $f_1(b) = a_0$ y $f_1 \restriction_{\mathcal{M}_0} = 1_{\mathcal{M}_0}$, luego $f_0 \subseteq f_1$.

Supongamos que tenemos construida la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}$ para $1 \leq i < \mu$ y sea $k := \text{mín}\{j < \mu : a_j \notin f_i[M_i]\}$. Como $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow f[\mathcal{M}_i]$ es un isomorfismo y $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$, entonces por el lema de renombramiento (lema 1.1.16) existen $\mathcal{N}^*_i$ y un isomorfismo $g_i : \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{N}^*_i$ tal que $\mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^*_i$ y $f_i \subseteq g_i$; además como $\mathcal{M}_{i+1}$ realiza todo $p \in ga - S\,(\mathcal{M}_i)$, entonces $\mathcal{N}^*_i$ realiza todo $p \in ga - S\,(f_i[M_i])$ en particular realiza $ga - tp\,(a_k/f_i[\mathcal{M}_i], \mathcal{N}_i)$, esto quiere decir que existen $b \in N^*_i$, $\mathcal{N}_{i+1} \in \mathcal{K}$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g^*_i : \mathcal{N}^*_i \longrightarrow \mathcal{N}_{i+1}$ tales que $\mathcal{N}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{i+1}$, $g^*_i(b) = a_k$ y $g^*_i \restriction_{f_i(\mathcal{M}_i)} = 1_{f_i(\mathcal{M}_i)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[r, "1_{\mathcal{M}_0}"] \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}_0 \arrow[r, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M}' \arrow[d, hook, dashed, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \\
\mathcal{M}_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] & f_1[\mathcal{M}_1] \arrow[r, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{M}_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"'] & f_{i-1}[\mathcal{M}_{i-1}] \arrow[r, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_{i-1} \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \\
\mathcal{M}_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"'] & f_i[\mathcal{M}_i] \arrow[r, hook, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[d, hook, dashed, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_i \arrow[d, hook, dashed, "\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}"] \\
\mathcal{M}_{i+1} \arrow[r, dashed, "g_i"] & \mathcal{N}_i^* \arrow[r, dashed, "g_i^*"] & \mathcal{N}_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Defina $f_{i+1} := g_i^* \circ g_i : \mathcal{M}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{N}_{i+1}$. f_{i+1} es una $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues g_i es un isomorfismo y g_i^* es una $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-inmersión. Veamos ahora que $f_{i+1} \supseteq f_i$ para ello sea $m \in M_i$, entonces

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(m) &= g_i^* \circ g_i(m) \\
&= g_i^*(g_i(m)) \\
&= g_i^*(f_i(m)) \text{ pues } g_i \supseteq f_i \\
&= f_i(m) \text{ pues } g_i^* \restriction_{f_i[\mathcal{M}_i]} = 1_{f_i[\mathcal{M}_i]}.
\end{aligned}$$

Si $i < \mu$ es un ordinal límite y suponemos que para todo $j < i$ tenemos construidos $\mathcal{M}_j$, $\mathcal{N}_j$ e $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_i : \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_j$ que fijan puntualmente a $\mathcal{M}$, entonces definimos $\mathcal{M}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j$, $\mathcal{N}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{N}_j$ y $f_i := \bigcup_{j<i} f_j$. Ahora bien, como $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu}$ es una $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua y para todo $i < \mu$ tenemos que $f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow f_i[\mathcal{M}_i]$ es un isomorfismo, entonces $\langle f_i[\mathcal{M}_i] \rangle_{i<\mu}$ es una $\prec^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua por el axioma de isomorfismos (definición 1.1.1.3); por tanto, $f := \bigcup_{i<\mu} f_i : \bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i \longrightarrow \bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i]$ es un isomorfismo y como por construcción tenemos que para todo $i < \mu$ se cumple que $f[\mathcal{M}_i] = f_i[\mathcal{M}_i] \prec^u_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} \mathcal{N}_i$, entonces aplicando los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) podemos afirmar que $\bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i] \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} \mathcal{N}_i$. Por la construcción de la $\subseteq$-cadena creciente continua de $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersiones $\langle f_i \rangle_{i<\mu}$ tenemos que $M' \subseteq \bigcup_{i<\mu} f_i[M_i]$ y por tanto tenemos que $\mathcal{M}' \subseteq \bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i]$; además como $\bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i] \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} \mathcal{N}_i$ y en particular tenemos que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} \mathcal{N}_i$, esto último pues $\mathcal{M}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i]$.

Por último notemos que como $f : \mathcal{N} \longrightarrow \bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i]$ es un isomorfismo, al aplicar la definición 1.1.1.3 (axiomas de isomorfismo) tenemos que $f^{-1}[\mathcal{M}'] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ pues $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\mu} f_i[\mathcal{M}_i]$ y como $\mathcal{N} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, entonces con ayuda de la definición 1.1.1.4*b* (axiomas de coherencia) podemos concluir que $f^{-1}[\mathcal{M}'] \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$. Por tanto $f^{-1} \restriction_{\mathcal{M}'}: \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N}'$ es una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersión. Si demostramos que $f^{-1} \restriction_{\mathcal{M}'}$ fija puntualmente a $\mathcal{M}$, habremos demostrado que $\mathcal{N}'$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}$. En efecto como $1_{\mathcal{M}} = f_0 \subseteq f$ por construcción de f, entonces $f^{-1} \supseteq f_0^{-1} = 1_{\mathcal{M}}$. $\boxed{2.2.6}$

Como vimos en el colorario 2.1.4, la λ-categoricidad de una Q-AEC $\mathcal{K}$ implica la existencia de una estructura $\mathrm{cf}(\lambda)$-saturada en $\mathcal{K}_\lambda$. El siguiente hecho nos muestra que dicha estructura tendrá extensiones universales de subestructuras pequeñas.

Corolario 2.2.7. *Si $\mathcal{K}$ es λ-categórica, $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ es de tamaño λ y $\mathcal{N} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ es tal que $|N| < \mathrm{cf}(\lambda)$, entonces existe $\mathcal{N}' \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ que es $|N|$-universal sobre $\mathcal{N}$ del mismo tamaño de $\mathcal{N}$.*

Demostración. Notemos que por la λ-categoricidad de $\mathcal{K}$ tenemos que $\mathcal{M}$ es $\mathrm{cf}(\lambda)$-saturado (colorario 2.1.4) y por tanto $\mathrm{cf}(\lambda)$-modelo-homogéneo (teorema 1.4.3); además podemos afirmar que $\mathcal{K}$ es $|N|$-estable pues $|N| < \lambda$ (teorema 2.1.2) y al aplicar el lema 2.2.6 esto último implica que existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{N}$ de tamaño $|N|$ que es $|N|$-universal sobre $\mathcal{N}$. Por la modelo-homogeneidad de $\mathcal{M}$, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}$. Defina $\mathcal{N}' := f[\mathcal{M}]$ que por el lema 2.2.5 es universal sobre $\mathcal{N}$. $\boxed{2.2.7}$

2.2.2. Modelos límite

A continuación expondremos por primera vez el concepto de modelo límie en el contexto de las Q-AECs y deduciremos algunas de sus propiedades básicas que nos serán de bastante utilidad en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces. Algunas de estas propiedades son la unicidad de modelos límite que tienen longitudes de la misma cofinalidad y la existencia de modelos límite de cardinal pequeño. La demostración de unicidad que hacemos en esta sección no utiliza herramientas elaboradas como las utilizadas por Grossberg, VanDieren y Villaveces en [GVV16] donde la unicidad de modelos límite sin condicones sobre las longitudes de estos es una noción débil de superestabilidad.

A continuación definimos los modelos límites y resulta inmediato de la definición que si $\mathcal{M}$ es límite sobre $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{M}$ es universal sobre $\mathcal{M}$. Resaltamos que esta es la primera vez que se habla de modelos límite en el contexto de las Q-AECs.

Definición 2.2.8 (cf. definición 1.4 en [GVV16]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC $\mu \geq LS(\mathcal{K})$, $\alpha < \mu^+$ un ordinal límite y $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_\mu$. Diremos que $\mathcal{M}$ es (μ, α)-**límite** sobre $\mathcal{N}$ si y sólo si existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}$, $\mathcal{M} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$.*

Observación 2.2.9. *Notemos que por la observación 2.2.2, podemos tomar $\prec_{\mathcal{K}}$-cadenas en vez de $\prec_{\mathcal{K}}^{\mu}$-cadenas en la definición anterior.*

Corolario 2.2.10 (cf. corolario 2.13 en [GV06a]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC μ-estable, con MAG y que satisface AP. Si $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ es de tamaño μ y $\sigma < \mu^+$ es un ordinal límite, entonces existe $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_\mu$ que es (μ, σ)-límite sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración. La demostración es iterar σ veces el lema 2.2.6 sobre $\mathcal{M}$ tomando uniones en los ordinales límites $< \sigma$. $\boxed{2.2.10}$

La demostración del siguiente lema es una aplicación inmediata del corolario 2.2.10 y de la demostración del lema 2.2.7 y por tal motivo no la incluimos.

Corolario 2.2.11. *Si $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica con MAG y que satisface AP y $\mathcal{N} \in \mathcal{K}$ es de tamaño λ, entonces para todo $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}}^{\mu} \mathcal{N}$ de tamaño μ con $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) \leq \mu < \lambda$ existe $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^{\mu} \mathcal{N}$ que es (μ, σ)-límite sobre $\mathcal{M}$ con $\sigma < \mu^+$.*

El siguiente resultado nos dice que dos modelos límite son isomorfos si las cadenas que atestiguan que sean límite tienen longitudes de la misma cofinalidad. En el contexto de las AECs, Grossberg, VanDieren y Villaveces demuestran en [GVV16] que dos modelos límites son isomorfos si el carácter local de la relación de ruptura se satisface. En [SV99] Shelah y Villaveces demuestran que el carácter local de la relación de ruptura se sigue de categoricidad y dicho resultado es la piedra angular en las aproximaciones de superestabilidad en AECs (véase [Vas17c]). En el contexto de las Q-AECs, el carácter local de la relación de ruptura es tratado por vez primera en el capítulo 2 del presente trabajo.

Lema 2.2.12 (cf. hecho 1.3.6 en [SV99]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, $\sigma, \sigma' < \mu$ ordinales límites tales que $\mathrm{cf}(\sigma) = \mathrm{cf}(\sigma')$, $\mathcal{M}$ un modelo (μ, σ)-límite sobre $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}$ un modelos (μ, σ')-límite sobre $\mathcal{N}_0$ y $\mathrm{f} : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0$ un isomorfismo. Entonces existe un isomorfismo $\widehat{\mathrm{f}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ que extiende a f.*

Demostración. Sean $\sigma, \sigma' < \mu^+$ ordinales límites y $\gamma = \mathrm{cf}(\sigma)$. Como $\mathrm{cf}(\sigma) = \mathrm{cf}(\sigma')$, entonces podemos suponer que existen sucesiones $\langle \sigma_j < \sigma \rangle_{j<\gamma}$ y $\langle \sigma'_j < \sigma' \rangle_{j<\gamma}$ tales que $\sup\limits_{j<\gamma} \sigma_j = \sigma$ y $\sup\limits_{j<\gamma} \sigma'_j = \sigma'$; esto implica que si $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\sigma}$ es testigo que $\mathcal{M}$ sea (μ, σ)-límite sobre $\mathcal{M}_0$ y $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\sigma'}$ es testigo que $\mathcal{N}$ sea (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{N}_0$, entonces $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{j<\gamma} \mathcal{M}_{\sigma_j}$ y $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{j<\gamma} \mathcal{N}_{\sigma'_j}$. Utilizaremos back and forth de longitud γ para construir el isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$; para ello sean $\{a_k\}_{k<\mu}$ y $\{b_k\}_{k<\mu}$ enumeraciones de $M \setminus M_0$ y de $N \setminus N_0$ respectivamente.

Base. Tome $f_0 := f$, $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}'_0 := \mathcal{N}_0$.

Suponga que para $\alpha < \gamma$ tenemos construidas $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadenas crecientes continuas $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{\delta<2\alpha}$, $\langle \mathcal{N}'_\delta \rangle_{\delta<2\alpha}$ y $\subseteq$-cadena creciente continua de isomorfismos $\langle f_\delta : \mathcal{M}'_\delta \longrightarrow \mathcal{N}'_\delta \rangle_{\delta<2\alpha}$.

Fort (paso $2\alpha + 1$). Sea $k' := \min\{k < \mu : a_k \notin M'_{2\alpha}\}$. Como $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{j<\gamma} \mathcal{M}_{\sigma_j}$, existe $j < \gamma$ tal que $a_{k'} \in M_{\sigma_j}$ y $\mathcal{M}'_{2\alpha} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_j}$; sea j' el mínimo de tales j. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_{j'}}$ tal que $M'_{2\alpha} \cup \{a_{k'}\} \subseteq M'$ de donde inmediatamente deducimos que $\mathcal{M}'_{2\alpha} \subseteq \mathcal{M}'$ y por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{M}'_{2\alpha} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ pues en particular $\mathcal{M}'_{2\alpha}, \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_{j'}}$. Por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que existe $\mathcal{M}'' \in \mathcal{K}_{|M'|}$ tal que $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_{j'}}$ pues $\mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_{j'}}$ y como $\mathcal{M}'_{2\alpha} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) podemos concluir que $\mathcal{M}'_{2\alpha} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$.

Notemos que por la escogencia de la sucesión $\langle \sigma'_j \rangle_{j<\gamma}$, existe $j < \gamma$ tal que $\mathcal{N}'_{2\alpha} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\sigma'_j}$; sea j'' el menor de tales j. Por la escogencia de la sucesión $\langle \sigma'_j \rangle_{j<\gamma}$ tenemos que $\sigma'_{j''} < \sigma'_{j''+1}$, por tanto $\mathcal{N}_{\sigma'_{j''}} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}}$ y como $\mathcal{N}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{N}_i$, entonces aplicando el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}}$ es universal sobre $\mathcal{N}_{\sigma'_{j''}}$ y al aplicar de nuevo el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}}$ es universal sobre $\mathcal{N}'_{2\alpha}$ pues $\mathcal{N}'_{2\alpha} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\sigma'_{j''}}$. Por el lema de renombramiento (lema 1.1.16) tenemos que existen $\mathcal{N}'' \succ^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_{2\alpha}$ y un isomorfismo $g : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{N}''$ que extiende a $f_{2\alpha} : \mathcal{M}'_{2\alpha} \longrightarrow \mathcal{N}'_{2\alpha}$; notemos que como $\mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}}$ es universal sobre $\mathcal{N}'_{2\alpha}$, entonces existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $h : \mathcal{N}'' \longrightarrow \mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}}$ que fija puntualemente a $\mathcal{N}'_{2\alpha}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}'_{2\alpha} \arrow[r, "f_{2\alpha}", "\approx"'] \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}'_{2\alpha} \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[d, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_{\sigma'_{j''}} \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_{\sigma'_{j''+1}} \\
\mathcal{M}'' \arrow[r, dashed, "\approx", "g"'] & \mathcal{N}'' \arrow[urr, dashed, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definamos $\mathcal{M}'_{2\alpha+1} := \mathcal{M}''$, $\mathcal{N}_{2\alpha+1} := h[\mathcal{N}'']$ y $f_{2\alpha+1} := h \circ g$. Debido que $g : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{N}''$ y $h : \mathcal{N}'' \longrightarrow h[\mathcal{N}'']$ son isomorfismos, entonces $f_{2\alpha+1}$ también lo es; además como g extiende a $f_{2\alpha}$ y $h \restriction_{\mathcal{N}'_{2\alpha}} = 1_{\mathcal{N}'_{2\alpha}}$, entonces $f_{2\alpha+1}$ también extiende a $f_{2\alpha}$.

Back (paso $2\alpha+2$). Con un argumento similar al anterior obtenemos el siguiente diagrama y similarmente en el paso forth, podemos construir $\mathcal{N}'_{2\alpha+2}$, $\mathcal{M}'_{2\alpha}$ y el isomorfismo $f_{2\alpha+2} : \mathcal{M}'_{2\alpha+2} \longrightarrow \mathcal{N}'_{2\alpha+2}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\sigma_{j''+1}} & \mathcal{M}_{\sigma_{j''}} \arrow[l, hook', "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{2\alpha+1} \arrow[l, hook', "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[r, "f_{2\alpha+1}", "\approx"'] \arrow[d, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}'_{2\alpha+1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \\
& & \mathcal{M}'' \arrow[ull, dashed, "h"] & \mathcal{N}'' \arrow[l, dashed, "\approx"', "g"]
\end{tikzcd}$$

Paso límite. Supongamos que $\alpha < \gamma$ es un ordinal límite y que para todo $\beta < \alpha$ tenemos construidos $\mathcal{M}'_\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, $\mathcal{N}'_\beta \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ e isomorfismos $f_\beta : \mathcal{M}_\beta \longrightarrow \mathcal{N}_\beta$. Notemos que por la escogencia de las sucesiones $\langle \sigma_j \rangle_{j<\gamma}$ y $\langle \sigma'_j \rangle_{j<\gamma}$, existe j tal que para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $\mathcal{M}'_\beta \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_j}$ y $\mathcal{N}'_\beta \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\sigma'_j}$. Definamos $M'_\alpha := \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{M}'_\beta$, $\mathcal{N}'_\beta := \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{N}'_\beta$ y $f_\alpha := \bigcup\limits_{\beta<\alpha} f_\beta$. Al aplicar los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\mathcal{M}'_\alpha \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\sigma_j}$ y que $\mathcal{N}'_\alpha \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\sigma'_j}$; además como $\mathcal{M}_{\sigma_j} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_{\sigma'_j} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $\mathcal{M}'_\alpha \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{N}'_\alpha \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Como $f_{2\alpha+2}$ es la unión de una sucesión creciente de isomorfismos, entonces $f_{2\alpha+2}$ es un isomorfismo.

Por la construcción de los $\mathcal{M}'_\alpha$ y los $\mathcal{N}'_\alpha$ para todo $\alpha < \gamma$, tenemos que $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \mathcal{M}'_\alpha$ y que $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \mathcal{N}'_\alpha$. También por lo establecido en los párrafos anteriores, tenemos que $\widehat{f} := \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} f_\alpha$ es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ que además extiende al isomorfismo f pues $f_0 = f$. $\boxed{2.2.12}$

Notemos que en particular el lema 2.2.12 nos dice que dos modelos (μ, σ)-límites sobre una $\prec_{\mathcal{K}}$-subestructura o una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-subestructura común son isomorfos. El siguiente corolario nos dice que la condición del isomorfismo f del lema 2.2.12 puede ser removida bajo JEP.

Corolario 2.2.13. *Si $\mathcal{K}$ es una Q-AEC que satisface JEP y $\sigma, \sigma' < \mu^+$ son ordinales límite tales que $cf(\sigma) = cf(\sigma')$. Si $\mathcal{M}$ es (μ, σ)-límite y $\mathcal{N}$ es (μ, σ')-límite, entonces $\mathcal{M}$ es isomorfo a $\mathcal{N}$.*

Demostración. Sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\sigma}$ y $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\sigma'}$ cadenas $\prec^u_{\mathcal{K}}$-creciente continuas que atestiguan que $\mathcal{M}$ sea (μ, σ)-límite y que $\mathcal{N}$ sea (μ, σ')-límite respectivamente. Como $\mathcal{K}$ satisface JEP, entonces existen $\mathcal{M}' \succ^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0$ y una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{M}'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[r, hook, dashed, "\prec^u_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}' & \\
 & f[\mathcal{N}_0] \arrow[u, hook, "\prec^u_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_0 \arrow[l, dashed, "\approx", "f"']
\end{tikzcd}$$

Por los axiomas de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), tenemos que existe $\mathcal{M}'' \in \mathcal{K}_{|N_0|}$ tal que $\mathcal{M}'' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ y $f[N_0] \subseteq M''$, esto último implica que $f[\mathcal{N}_0] \subseteq \mathcal{M}''$. Al aplicar los axioma de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $f[\mathcal{N}_0] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''$ pues en particular tenemos que $f[\mathcal{N}_0], \mathcal{M}'' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ y como $\mathcal{M}'' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, entonces por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) existe $\mathcal{M}''' \in \mathcal{K}_{|M''|}$ tal que $\mathcal{M}'' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}''' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Por tanto podemos suponer que $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_{\mu}$ pues $|N_0| = \mu$.

Como $f : \mathcal{N}_0 \longrightarrow f[\mathcal{N}_0]$ es un isomorfismo, entonces podemos utilizar el lema de renombramiento (lema 1.1.16) para encontrar $\mathcal{M}'' \succ^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0$ y un isomorfismo $f' : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{M}'$ que extiende a f.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}' & \mathcal{M}'' \arrow[l, dashed, "f'", "\approx"'] \\
& f[\mathcal{N}_0] \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_0 \arrow[l, "\approx", "f"'] \arrow[u, hook, dashed, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"']
\end{tikzcd}$$

Ahora como por definición de modelos límite $\mathcal{M}_1$ es universal sobre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_1$ es universal sobre $\mathcal{N}_0$, existen $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $g_1 : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}_1$ y $g_2 : \mathcal{M}'' \longrightarrow \mathcal{N}_1$ que fijan puntualmente a $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_0$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 & & & \\
\mathcal{M}_0 \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}' \arrow[ul, dashed, "g_1"'] & \mathcal{M}'' \arrow[l, "f'", "\approx"'] \arrow[dr, dashed, "g_2"] & \\
& f[\mathcal{N}_0] \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{N}_0 \arrow[l, "\approx", "f"'] \arrow[u, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] \arrow[r, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{N}_1
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{M}''$ son isomorfos, entonces es evidente que $g_1[\mathcal{M}']$ es isomorfo a $g_2[\mathcal{M}'']$. Además, como $\mathcal{M}_2$ es universal sobre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N}_2$ es universal sobre $\mathcal{N}_1$, entonces por el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{M}_2$ es universal sobre $g_1[\mathcal{M}']$ pues $g_1[\mathcal{M}'] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y $\mathcal{N}_2$ es universal sobre $g_2[\mathcal{M}'']$ pues $g_2[\mathcal{M}''] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1$.

Definamos las $\prec_{\mathcal{K}}^{\mathfrak{u}}$-cadenas crecientes continuas $\langle \mathcal{M}_i' \rangle_{i<\sigma}$ y $\langle \mathcal{N}_i' \rangle_{i<\sigma'}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0' &:= g_1[\mathcal{M}'] & \mathcal{N}_0' &:= g_2[\mathcal{M}''],\\
\mathcal{M}_i' &:= \mathcal{M}_{i+1} & \mathcal{N}_i' &:= \mathcal{N}_{i+1} \text{ para todo } i < \omega,\\
\mathcal{M}_\omega' &:= \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i' & \mathcal{N}_\omega' &:= \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i'\\
\mathcal{M}_i' &:= \mathcal{M}_i & \mathcal{N}_j' &:= \mathcal{N}_j \text{ para todos } i \in (\omega, \sigma) \text{ y } j \in (\omega, \sigma')
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\mathcal{M}_\omega' = \mathcal{M}_\omega$ y $\mathcal{N}_\omega' = \mathcal{N}_\omega$ pues $\langle \mathcal{M}_i' \rangle_{i<\omega}$ es cofinal en $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{j<\omega}$ y $\langle \mathcal{N}_i' \rangle_{i<\omega}$ es cofinal en $\langle \mathcal{N}_j \rangle_{j<\omega}$.

Por como están definidas las cadenas $\langle \mathcal{M}_i' \rangle_{i<\sigma}$ y $\langle \mathcal{N}_j' \rangle_{j<\sigma'}$, estas atestiguan que $\mathcal{M}$ es (μ, σ)-límite y que $\mathcal{N}$ es (μ, σ')-límite respectivamente pues $\langle \mathcal{M}_i' \rangle_{i<\sigma}$ es cofinal en $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{j<\sigma}$ y $\langle \mathcal{N}_i' \rangle_{i<\sigma}$ es cofinal en $\langle \mathcal{N}_j \rangle_{j<\sigma}$.

Como $\mathcal{M}_0'$ y $\mathcal{N}_0'$ son isomorfos, entonces podemos aplicar el lema 2.2.12 y concluir que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son isomorfos. $\boxed{2.2.13}$

El siguiente es un corolario inmediato del lema 2.2.12 y por tal manera no incluimos la demostración. El resultado es análogo al que se tiene en el contexto de las AECs y nos será de utilidad más adelante cuando demostremos que la unión de una cadena creciente continua de modelos saturados es saturada.

Corolario 2.2.14 (cf. lema 10.15 en [Bal09])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, μ un cardinal, $\delta < \mu^+$ un ordinal límite y $\overline{\mathcal{M}}$ y $\overline{\mathcal{N}}$ modelos $(\mu, \mu \times \delta)$-límites sobre sobre $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}_0$ respectivamente. Si $\mathcal{M}_0$ es isomorfo a $\mathcal{N}_0$, entonces $\overline{\mathcal{M}}$ y $\overline{\mathcal{N}}$ son isomorfos nivel a nivel en la subsucesión de modelos indexada por $\langle \mu \times i \rangle_{i<\delta}$.*

Suponiendo categoricidad, el siguiente resultado nos permitirá utilizar modelos de Erhenfeucht-Mostowski para representar modelos límite. El resultado es análogo al que se tiene en el constexto de las AECs y nos hemos basado en la monografía [Bal09] para hacer la traducción al contexto de las Q-AEC.

Lema 2.2.15 (cf. lemma 10.16 en [Bal09]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica, $\mathsf{LS}(\mathcal{K}) \leq \mu < \mathsf{cf}(\lambda)$, $\delta < \mu^+$ un ordinal límite e $I = \mu^{<\omega}$. Entonces:*

1. *$\left\langle \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi) \right\rangle_{\alpha<\delta}$[1] es una $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-cadena de modelos de cardinalidad μ tal que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha+1), \Phi)$ es μ-universal sobre $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi)$ para todo $\alpha < \delta$ y por tanto $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \delta, \Phi)$ es un modelo $(\mu, I \times \delta)$-límite sobre $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$.*

2. *Para todo ordinal $\alpha < \mu^+$, $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi)$ es isomorfo a $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \mu \times \alpha, \Phi)$.*

3. *Todo modelo (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_0$, con $\mathcal{M}_0$ isomorfo a $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$, es isomorfo a $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \delta, \Phi)$.*

Demostración. 1. Sea $\delta < \mu^+$ un ordinal límite y $\alpha < \delta$ un ordinal. Notemos que como $\mu^+ \leq \mathsf{cf}(\lambda) \leq \lambda$ y α es un segmento inicial de $\delta < \mu^+$, entonces α es un segmento inicial de λ y por tanto $I \times \alpha$ es segmento inicial de $I \times \lambda$. En consecuencia si X e Y son conjuntos de tamaño μ tales que $X \subsetneq I \times \alpha$ y $X \subsetneq Y \subsetneq I \times \lambda$, tenemos que existen $Y_0 \subsetneq I \times \alpha$ e $Y_1 \subsetneq (I \times \lambda) \setminus (I \times \alpha)$ con $|Y_1| = \mu$ tales que $Y \setminus X = Y_0 \cup Y_1$, esto pues Y es de cardinalidad $\mu < \mathsf{cf}(\lambda)$. Ahora bien, al ser $I = \mu^{<\omega}$ ordenado con el orden lexicográfico un orden lineal rebosante (hecho 1.5.15), es en particular universal sobre el vacío y como $|I| = |Y_1| = \mu$, entonces podemos suponer que existe

[1] Acá $I \times \alpha$ está ordenado con el orden antilexicográfico.

una inmersión de orden $f : Y_1 \longrightarrow (I\times(\alpha+1))\setminus(I\times\alpha)$[2] y por tanto podemos definir la inmersión $f' : Y \longrightarrow I\times(\alpha+1)$ como:

$$f'(x) := \begin{cases} x, \text{ si } x \in I\times\alpha \\ \\ f(x), \text{ si } x \in Y \setminus I\times\alpha. \end{cases}$$

Como estamos trabajando bajo axioma de elección, entonces $|I\times\alpha| = |I|\cdot|\alpha|$ y como $|I| = \mu$ y $\alpha < \mu^+$, podemos concluir que $|I\times\alpha| = \mu < cf(\lambda)$. Además como $\mathcal{K}$ es λ-categórica, entonces al aplicar el corolario 2.1.4 tenemos que existe una estructura de cardinalidad λ que es $cf(\lambda)$-saturada y por tanto $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)$ es $cf(\lambda)$-saturado y $cf(\lambda)$-modelo-homogéneo (teorema 1.2.1) pues

$$\begin{aligned} \|EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)\| &= |I\times\lambda| \text{ pues } \lambda > LS(\mathcal{K}), \\ &= |I|\cdot\lambda \text{ pues estamos trabajando bajo el axioma de elección,} \\ &= \mu\cdot\lambda, \\ &= \lambda \text{ pues } \mu < cf(\lambda) \leq \lambda. \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que para toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-extensión $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_\mu$ de $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\alpha,\Phi)$ existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $g : \mathcal{M} \longrightarrow EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)$ que fija puntualmente a $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\alpha,\Phi)$ pues $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)$ es $cf(\lambda)$-saturado (lema 2.1.4) y por tanto $cf(\lambda)$-modelo-homogéneo (teorema 1.4.3).

Como $g[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)$ entonces por la definición 1.1.1.7*a* (axiomas de densidad), existe $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_{|M|}$ tal que $g[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\lambda,\Phi)$ y en con-

[2]Notemos que acá lo que se está haciendo es sumergir una copia isomorfa de un subconjunto de I que se encuentra en $I\times\lambda$ en $(I\times(\alpha+1))\setminus(I\times\alpha)$ que también es una copia isomorfa de I.

secuencia existe un ordinal $\beta < \mu^+$ tal que $\alpha < \beta$ y $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)$. Al ser $\alpha < \beta < \mu^+$, tenemos que $|I \times \beta| = |I| \cdot |\beta| = \mu$ y que $I \times \beta$ contiene propiamente a $I \times \alpha$; por tanto existe una inmersión de orden $f' : I \times \beta \longrightarrow I \times (\alpha + 1)$ -recuerde lo hecho al principio de la prueba con $Y = I \times \beta$- que por el hecho 1.5.7 puede ser extendida a una $\mathcal{L}'$-inmersión $\hat{f'} : EM(\mathbb{I} \times \beta, \Phi) \longrightarrow EM(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$ donde $\mathcal{L}'$ es la expansión de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ dada por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19). Como $\hat{f'}[EM(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)] \subseteq_{\mathcal{L}'} EM(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$, entonces al aplicar el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) tenemos que $\hat{f'}\left[EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)\right] \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$. Por otro lado, como $g[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) podemos deducir que $g[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)$ y al ser

$$\hat{f'} \restriction_{EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}\times\beta,\Phi)} : EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi) \longrightarrow \hat{f'}[EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)]$$

un isomorfismo, podemos concluir gracias a los axiomas de isomorfismo que $\hat{f'}[g[\mathcal{M}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \hat{f'}[EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)]$ pues $g[\mathcal{M}] \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)$; además por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*), tenemos que $\hat{f'}[g[\mathcal{M}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$ pues $\hat{f'}[g[\mathcal{M}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \hat{f'}[EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \beta, \Phi)] \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$.

Definamos $F : \mathcal{M} \longrightarrow EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$ como $F(m) = \hat{f'}(g(m))$ que es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión pues $F[\mathcal{M}] = \hat{f'}[g[\mathcal{M}]] \prec^{u}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$ y por tanto $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times (\alpha + 1), \Phi)$ es universal sobre $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi)$.

Al definir $\mathcal{M}_\alpha := EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi)$ para todo $\alpha < \delta$, resulta que $\mathcal{M}_\delta := EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I} \times \delta, \Phi)$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_0 := EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$.

2. Notemos que si $\sigma \in \mu^{<\omega} = I$, entonces existe $n < \omega$ tal que $\mathrm{dom}(\sigma) = n$ y por tanto podemos definir para todo $i < \mu$, $\sigma^\frown i := \sigma \cup \{(n, \mu)\}$ con dominio $n+1$. Sea $I_i := \{\sigma^\frown i : \sigma \in I\}$ para todo $i < \mu$. Mediante la función $f : I \longrightarrow I_i$ definida como $f(\sigma) := \sigma^\frown i$ resulta sencillo demostrar que I e I_i son isomorfos y similarmente no es difícil ver que I_i es isomorfo a $I \times \{i\}$ mediante la función que envía a (σ, i) en $\sigma^\frown i$. Lo anterior implica que I es isomorfo a $I \times \mu$, por tanto existe un isomorfismo $g : I \times \alpha \longrightarrow I \times \mu \times \alpha$ y al aplicar el hecho 1.5.7 podemos extender g a un isomorfismo $\hat{g} : \mathrm{EM}\,(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi) \longrightarrow \mathrm{EM}\,(\mathbb{I} \times \mu \times \alpha, \Phi)$.

3. Es inmediato del lema 2.2.14 y del primer ítem de este lema teniendo en cuenta que, por el ítem anterior, $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I} \times \alpha, \Phi)$ y $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\,(\mathbb{I} \times \mu \times \alpha, \Phi)$ son isomorfos.

$\boxed{2.2.15}$

2.3. Docilidad

Como lo mostramos en la proposición 1.3.12, si $p, q \in ga - S\,(\mathcal{M})$ son tales que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_0} \neq q \upharpoonright_{\mathcal{M}_0}$ con $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, entonces $p \neq q$. Si $p \neq q$ nosotros podemos preguntarnos si existe una subestructura $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que $p \upharpoonright_{\mathcal{N}} \neq q \upharpoonright_{\mathcal{N}}$, es decir si podemos controlar los tipos mediante subestructuras pequeñas. Para responder esta pregunta pensemos en el caso de primer orden: si tenemos que $p, q \in S(A)$ son dos tipos sintácticos diferentes, entonces existe una fórmula con parámetros en A que atestigua la diferencia; esto es, un subconjunto finito de A es lo que atestigua la diferencia de los tipos. Lo anterior motiva la definición de docilidad, concepto crucial en la respuesta parcial a la conjetura de categoricidad eventual de Shelah de Grossberg y VanDieren en [GV06b] y de transferencia de estabilidad de Baldwin, Kueker y VanDieren en [BKV+06].

Grossberg y VanDieren en [GV06b] consideran la propiedad de docilidad como una propiedad natural de las AECs pues los contraejemplos son muy artificiales y por tanto es un supuesto natural en dicho contexto. Coppola introduce el concepto de docilidad y deduce algunas consecuencias de este concepto en el contexto de las Q-AEC en el capítulo 3 de [Cop06]. A continuación nosotros expondremos el concepto de docilidad y algunas de las implicaciones adaptadas por Coppola al contexto de las Q-AECs.

Definición 2.3.1 (definición 3.2.19 en [Cop06]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC y $\chi > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal. Diremos que $\mathcal{K}$ es $(< \chi)$-**dócil** si y sólo sí para todos $p, q \in ga - S(\mathcal{M})$ tales que $p \neq q$, existe $\mathcal{M}_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ con $|M_0| < \chi$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_0} \neq q \restriction_{\mathcal{M}_0}$. Diremos que $\mathcal{K}$ es χ-**dócil** si es $(< \chi^+)$-dócil. Diremos que $\mathcal{K}$ es dócil si es $\mathrm{LS}(\mathcal{K})$-dócil.*

Observación 2.3.2. *Notemos que si $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\geq \chi}$, entonces por el lema 1.1.13 podemos poner en la deficnición que $\mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ en vez de $\mathcal{M}_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}_{<\chi}$.*

El siguiente resultado nos dice que la propiedad de χ-docilidad se transfiere para todo $\chi' > \chi$.

Proposición 2.3.3 (cf. hecho 3.2.20 en [Cop06]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP y tiene MAG. Si $\mathcal{K}$ es χ-dócil, entonces es χ'-dócil para todo $\chi' \geq \chi$. Además si $p, q \in ga - S(\mathcal{M})$ son diferentes con $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{>\chi}$, entonces para todo $\mathcal{N} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, tal que $|N| < |M|$ tenemos que existe $\mathcal{M}_0$ tal que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $p \restriction_{\mathcal{M}_0} \neq q \restriction_{\mathcal{M}_0}$.*

Demostración. La primera parte de la proposición es inmediata de la definición.

Además si $p, q \in ga - S(\mathcal{M})$ son diferentes para $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{>\chi}$, entonces existe $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}_{<\chi^+}$ $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_0} \neq q \upharpoonright_{\mathcal{M}_0}$. Sea $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{<|M|}$ tal que $\mathcal{N} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) tenemos que existe $\mathcal{M}_0' \in \mathcal{K}_{|M_0|+|N|}$ tal que $M_0, N \subseteq M_0'$ y $\mathcal{M}_0' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Como $N \subseteq M_0'$, entonces $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_0$ y utilizando los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) podemos concluir que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0$ pues en particular tenemos que $\mathcal{N}, \mathcal{M}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. $\boxed{2.3.3}$

En [Bon14] W. Boney prueba que la existencia de una clase de cardinales fuertemente compactos implica que una AEC sea dócil en dichos cardinales (teorema 4.5 en [Bon14]). Por otro lado una de las hipótesis importantes en el resultado de transferencia de categoricidad de Grossberg y VanDieren (teorema 0.1 en [GV06b]) es la docilidad en un cardinal por encima de número de Löwenheim-Skolem de la clase; al unir los dos resultados tenemos entonces que la conjetura de categoricidad eventual de Shelah es consecuencia con la existencia de cardinales fuertemente compactos. La principal herramienta utilizada por Boney es una versión del teorema de Łoś para AECs (teorema 4.3 en [Bon14]) y dicho resultado es una aplicación del teorema de Presentación de Shelah y del teorema de Łoś para la lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ con κ un cardinal fuertemente compacto.

En [LR16] Lieberman y Rosický generalizan el resultado de Boney al contexto de las categorías accesibles. En el contexto de las categorías accesibles, los tipos de Galois son definidos como relaciones de equivalencia de triplas de manera similar a lo hecho en la definición 1.3.2 y de manera similar se hace con el concepto de docilidad. Para un estudio detallado de más resultados en el contexto de las AECs adaptados al contexto de las categorías accesibles véase [BR12], [Lie11], [LRV18] y [LR15].

Hecho 2.3.4 (teorema 5.2 en [LR16]). *Si existe una clase propia de cardinales fuertemente compactos, entonces toda categoría accesible con colímites directos es dócil.*

En [Cop06] no se menciona el argumento de Boney pues este último es muy posterior a la presentación de la tesis doctoral de Coppola; por tanto en el presente trabajo se trata por vez primera la consistencia conjuntista de la docilidad en el contexto de las Q-AECs. En primer lugar debemos notar que gracias a los lemas 1.1.22 y 1.1.27 podemos afirmar que una Q-AEC $\mathcal{K}$ es una categoría accesible con colímites directos (para familiarizarse con el concepto de categoría accesible véase la sección 3 de [Lie11] o [BR12]).

Hecho 2.3.5 (cf. teorema 4.1). *Si $\mathcal{K}$ es una Q-AECy $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ es un cardinal regular, entonces $\mathcal{K}$ es una categoría λ-accesible con colimites directos.*

Lo anterior nos permite aplicar el hecho 2.3.4 y así poder tener la consistencia conjuntista de docilidad en Q-AECs.

Afirmación 2.3.6. *Si existe una clase propia de cardinales fuertemente compactos, entonces toda Q-AEC $\mathcal{K}$ es χ-dócil con χ en la clase de cardinales fuertemente compactos.*

Como lo dijimos en la introducción, la propiedad fundamental en el resultado de transferencia de categoricidad de Grossberg-Vandieren en [GV06b] que Coppola intentó adaptar en [Cop06] con algunas dificultades, es la docilidad. La afirmación 2.3.6 nos permite tener cambiar esta hipótesis por la de la existencia de una clase propia de cardinales fuertemente compactos y así estar listos para intentar solucionar las dificultades que se le presentaron a Coppola en su tesis y que aislamos en la introducción.

Recordemos que el problema central en el trabajo de Coppola está en poder garantizar que no existen pares fuertes de Vaught y propone las condiciones 0.0.6, 0.0.7 y 0.0.8 para intentar solucionar este problema.

Pregunta 2.3.7. *¿Es posible demostrar, refutar o quitar las condiciones 0.0.6, 0.0.7 o 0.0.8 propuestas por Coppola?*

3 Ruptura y carácter local de la no ruptura

La relación de ruptura es una primera aproximación a una noción de independencia bien comportada en el contexto de las AECs que se puede adaptar fácilmente al contexto de las Q-AECs. Dicha relación es introducida por Shelah para el contexto de las AECs en [She99] y Coppola adapta el concepto de ruptura para el contexto de las Q-AECs en la sección 3.2 de [Cop06].

En la primera parte de este capítulo nosotros reproduciremos el trabajo hecho por Coppola para la noción de ruptura haciendo ciertas observaciones y demostrando cada resultado con todos los detalles; además de esto, demostraremos algunas propiedades que no están enunciadas en [Cop06] que nos serán de utilidad en el estudio de la superestabilidad en el contexto de las Q-AECs, especialmente al momento de demostrar el carácter local de la relación de no ruptura y la existencia de marcos buenos. Luego de introducir la noción de ruptura y sus propiedades, procederemos a enunciar y demostrar una versión del teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.2.1 en [SV99]) que nos habla del carácter local de la relación de no-ruptura en Q-AECs.

Podríamos decir que el teorema de Shelah-Villaveces es un análogo a que $\kappa(T) = \aleph_0$ para una teoría superestable T de primer orden, es decir que hay no-bifurcación sobre algún conjunto finito para todo tipo sintáctico. Para adaptar y demostrar el teorema de Shelah-Villaveces al contexto de las Q-AECs, nosotros utilizaremos las ideas expuestas por Shelah y Villaveces en [SV99] y por Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey en [BGVV17].

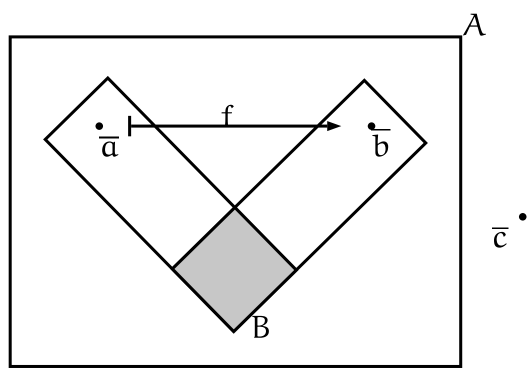
En este capítulo supondremos que toda Q-AEC $\mathcal{K}$ satisfface AP, JEP y tiene modelos arbitrariamente grandes. Además de esto, estaremos trabajando siempre bajo el supuesto que existe una clase propia de cardinales tales que $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ y por tanto podremos aplicar siempre el teorema 1.2.7 garantizando la existencia de modelos monstruos de tamaños arbitrariamente grandes. Otro supuesto conjuntista que haremos en este capítulo, a no ser que se diga lo contrario, es la hipótesis generalizada del continuo (GCH) pues es indispensable en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces.

3.1. Ruptura

El concepto de ruptura (*splitting* en inglés) tiene un lugar muy importante en el desarrollo de la noción de superestabilidad en AECs pues es una aproximación a nociones de independencia en este contexto y es fundamental en el teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.2.2 en [SV99]). Intuitivamente hablando, la ruptura se da cuando un tipo de Galois $p \in ga - S(\mathcal{N})$ tiene *cambios fuertes de información* sobre alguna $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura $\mathcal{M}$ de $\mathcal{N}$ y la no ruptura cuando estos cambios fuertes de información no se presentan.

Para ser un poco más precisos con lo que significa *cambios fuertes de información*, recurramos al concepto de ruptura en términos de tipos sintácticos. Para ello, sea $A \subseteq \mathcal{M}$ un conjunto y $p \in S(A)$ un tipo completo. Diremos que $p \in G(A)$ rompe sobre $B \subseteq A$ si para algún $n \in \mathbb{N}$ existen $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$ tales que $tp(\overline{a}/B) = tp\left(\overline{b}/B\right)$ y una fórmula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ tal que $\phi(\overline{x}, \overline{a}) \in p$ y $\neg\phi(\overline{x}, \overline{b}) \in p$.

Sea $\overline{c} \models p$. Como $tp(\overline{a}/B) = tp\left(\overline{b}/B\right)$, entonces existe un isomorfismo parcial f que fija puntualmente a B tal que $f(\overline{a}) = \overline{b}$; dicho isomorfismo puede ser extendido a un automorfismo $\widehat{f}$ de $\mathcal{M}$.



Notemos que como p es un tipo completo y $\phi(\overline{x}; \overline{a})$, $\neg\phi(\overline{x}; \overline{b}) \in p$, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\,(tp(\overline{c}/B\overline{a})) &= tp\left(\widehat{f}\,(\overline{c})\,/\widehat{f}\,(B\overline{a})\right), \\
&= tp\left(\widehat{f}\,(\overline{c})\,/f\,(B\overline{a})\right) \text{ pues } f \subseteq \widehat{f}, \\
&= tp\left(\widehat{f}\,(\overline{c})\,/Bf\,(\overline{a})\right) \text{ pues } f\restriction_B = 1_B, \\
&= tp\left(\widehat{f}\,(\overline{c})\,/B\overline{b}\right) \text{ pues } f(\overline{a}) = \overline{b}, \\
&\neq tp\left(\overline{c}/B\overline{b}\right) \text{ pues } \phi(\overline{x}; \overline{a}),\ \neg\phi(\overline{x}; \overline{b}) \in p.
\end{aligned}$$

Lo anterior motiva la noción de ruptura en el contexto de las AECs y fue introducida por Shelah en [She99]. Coppola hace la traducción de dicha noción al contexto de las Q-AEC.

Definición 3.1.1 (cf. definición 3.2.14 en [Cop06], cf. definición 2.1.4.1 en [She99]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC y $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{K}$. Diremos que $p \in ga - S(\mathcal{N})$ μ-**rompe** sobre $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ si y sólo si existen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ y un isomorfismo $h : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ tales que:*

(a) $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$,

(c) $h \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$,

(d) y $p \restriction_{\mathcal{N}_2} \neq h(p \restriction_{\mathcal{N}_1})$.

La siguiente es la primera propiedad de la relación de ruptura. Esta propiedad no es estudiada por Coppola en su tesis doctoral.

Observación 3.1.2 (transitividad de la relación de ruptura). *Si $p \in ga - S(\mathcal{N})$ μ-rompe sobre $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$, entonces para todo $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}'$. Además, si $q \in ga - S(\mathcal{N}')$ es tal que $q \restriction_{\mathcal{N}} = p$ donde $\mathcal{N}' \succ_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces q μ-rompe sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración. Si $p \in ga - S(\mathcal{N})$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}$, entonces existen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ y un isomorfismo $h : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ tales que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$, $h \restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ y $p \restriction_{\mathcal{N}_2} \neq h(p \restriction_{\mathcal{N}_1})$. Como $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, tenemos que $h \restriction_{\mathcal{M}'} = 1_{\mathcal{M}'}$ y que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}$; por tanto p μ-rompe sobre $\mathcal{M}'$ pues $p \restriction_{\mathcal{N}_2} \neq h(p \restriction_{\mathcal{N}_1})$.

Por otro lado, si $q \in ga - S(\mathcal{N}')$ con $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y $q \restriction_{\mathcal{N}} = p$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*c*) tenemos que $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}'$ pues $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$ y como $q \restriction_{\mathcal{N}} = p$, entonces $q \restriction_{\mathcal{N}_1} = p \restriction_{\mathcal{N}_1}$ y $q \restriction_{\mathcal{N}_2} = p \restriction_{\mathcal{N}_2}$ y por tanto $h(q \restriction_{\mathcal{N}_1}) \neq q \restriction_{\mathcal{N}_2}$. En conclusión, q μ-rompe sobre $\mathcal{M}$. $\boxed{3.1.2}$

Como veremos a lo largo de este capítulo, la ruptura y la no ruptura *siempre coexisten*. En el siguiente resultado mostramos que la persistencia de ruptura es el caso *malo* pues implica que no hay estabilidad bajo condiciones de cardinalidad adecuadas. En la demostración que presentamos a continuación nosotros completamos detalles y aclaramos algunas impresiciones que tiene la demostración de Coppola con las cadenas que se construyen y para ello hemos tenido en cuenta las ideas expuestas en [Bal09].

En el siguiente lema no necesariamente vamos a suponer GCH.

Lema 3.1.3 (lema 2.2.17 en [Cop06]). *Sea κ el mínimo cardinal tal que $2^\kappa > \mu$. Suponga que $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\kappa} \subset \mathcal{K}_\mu$ es una sucesión creciente continua. Si $p \in ga-S\left(\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{M}_i\right)$ es tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \kappa$, entonces $\mathcal{K}$ no es estable en μ.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que para todo $i < \kappa$, existen $\mathcal{M}_i^1, \mathcal{M}_i^2 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ e isomorfismos $f_i : \mathcal{M}_i^1 \longrightarrow \mathcal{M}_i^2$ tales que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i^1, \mathcal{M}_i^2 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{i+1}$, f_i fija puntualmente a $\mathcal{M}_i$ y $f_i(p \restriction_{\mathcal{M}_i^1}) \neq p \restriction_{\mathcal{M}_i^2}$.

Sea $\mu > \kappa$ tal que $\mu^{<\mu} = \mu$. Notemos que por el teorema 1.2.7, tenemos que existe $\mathbb{C} \in \mathcal{K}_\mu$ de tal manera que $\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathbb{C}$ y como por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*) podemos decir que para todo $i < \kappa$ se cumple que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \bigcup_{i<\kappa} \mathcal{M}_i$, entonces al aplicar la transitividad de la relación $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$ (definición 1.1.1.1) tenemos que $\mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathbb{C}$ para todo $i < \kappa$. Además como $\mathbb{C}$ es homogéneo (teorema 1.2.7), entonces para todo $i < \kappa$ existe $\widehat{f_i} \in Aut_{\mathcal{M}_i}(\mathbb{C})$ que extiende a $f_i : \mathcal{M}_i^1 \longrightarrow \mathcal{M}_i^2$.

Lo que haremos es construir un árbol de nuevas estructuras $\mathcal{N}_\eta$ con $\eta \in 2^{<\kappa}$, basándonos en la cadena $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\kappa}$ dada en las hipótesis del lema a partir de isomorfismos $h_\eta : \mathcal{M}_{lg(\eta)} \longrightarrow \mathcal{N}_\eta$ y construir una estructura de tamaño μ sobre la cuál podemos definir 2^κ tipos. Esto lo haremos recursivamente sobre $2^{<\kappa}$.

Para la base, tome $\mathcal{N}_\emptyset = \mathcal{M}_0$, $h_\emptyset = 1_{\mathcal{M}_0}$ y $p_\emptyset = p \restriction_{\mathcal{M}_0} = 1_{\mathcal{M}_0} = (p \restriction_{\mathcal{M}_0})$.

Supongamos ahora que para $lg(\eta) = \alpha < \kappa$ y $\eta \in 2^\alpha$ tenemos construidos $\mathcal{N}_\eta$, isomorfismos $h_\eta : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{N}_\eta$ y tipos de Galois $p_\eta = \widehat{h_\eta}(p \restriction_{\mathcal{M}_\alpha}) \in ga - S(\mathcal{N}_\eta)$, donde $\widehat{h_\eta}$ es un automorfismo de $\mathbb{C}$ que extiende a h_η dado por la homogeneidad de $\mathbb{C}$ (teorema 1.2.7). Definimos $h_{\eta^\frown 0} := \widehat{h_\eta} \restriction_{\mathcal{M}_{\alpha+1}}$, $h_{\eta^\frown 1} := \widehat{h_\eta} \circ \widehat{f_\alpha} \restriction_{\mathcal{M}_{\alpha+1}}$, $\mathcal{N}_{\eta^\frown i} := h_{\eta^\frown i}(\mathcal{M}_{\alpha+1})$ y $p_{\eta^\frown i} := \widehat{h_{\eta^\frown i}}(p \restriction_{\mathcal{M}_{\alpha+1}}) \in ga - S(\mathcal{N}_{\eta^\frown i})$. Notemos que por construcción se cumple que $h_\eta \subseteq h_{\eta^\frown i}$ para $i = 0, 1$. Como $\mathcal{M}_\alpha \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha+1}$ y los $h_{\eta^\frown i}$ son isomorfismos pues son restricciones de automorfismos de $\mathbb{C}$, entonces por la definición 1.1.1 parte 3 (axiomas de isomorfismo) tenemos que $\mathcal{N}_\eta \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\eta^\frown i}$ para $i = 0, 1$.

Si $i < \kappa$ es un ordinal límite y para todo $j < i$ y todo $\eta' \in 2^j$ tenemos construidos $\mathcal{N}_{\eta'}$ e isomorfismos $h_{\eta'} : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{N}_{\eta'}$, entonces para todo $\eta \in 2^\beta$ definimos $h_\eta := \bigcup\limits_{j<i} h_{\eta\restriction_j}$, $\mathcal{N}_\eta := h_\eta(\mathcal{M}_i)$ y $p_\eta := \widehat{h_\eta}(p \restriction_{\mathcal{M}_i})$.

Por construcción es inmediato que para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$ se tiene que $\mathcal{N}_\eta \prec^u_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$, en particular tenemos que para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$ se cumple que $N_\eta \subseteq |\mathbb{C}|$ y por tanto $\bigcup\limits_{\eta\in 2^{<\kappa}} N_\eta \subseteq |\mathbb{C}|$. Además como

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{\eta\in 2^{<\kappa}} |N_\eta|\right| &= 2^{<\kappa} \cdot \sup_{\eta\in 2^{<\kappa}} \{|N_\eta|\}, \\
&= 2^{<\kappa} \cdot \mu \text{ pues para todo } \eta \in 2^{<\kappa} \text{ tenemos que } |M_i| = |N_\eta| = \mu, \\
&= \sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa,\ \lambda \text{ cardinal}\} \cdot \mu, \\
&\leq \mu \cdot \mu \text{ pues por hipóteis } \kappa \text{ es el mínimo cardinal tal que } 2^\kappa > \mu, \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

y como $\mu = |N_\emptyset| \leq \left| \bigcup_{\eta \in 2^{<\kappa}} |N_\eta| \right|$, entonces tenemos que $\left| \bigcup_{\eta \in 2^{<\kappa}} |N_\eta| \right| = \mu$.

Al aplicar la definición 1.1.1.5 (axioma de Löwenheim-Skolem descendente) podemos encontrar $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M} \prec^{\mu}_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$ y $\bigcup_{\eta \in 2^{<\kappa}} N_\eta \subset M'$, por tanto para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$ tenemos que $N_\eta \subseteq M'$ y en consecuencia $\mathcal{N}_\eta \subseteq \mathcal{M}'$ para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$. Como en particular tenemos que para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$ se cumple que $\mathcal{N}_\eta, \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathbb{C}$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{N}_\eta \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$ para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$. Para teminar la prueba nos hace falta ver que $|ga - S(\mathcal{M}')| > \mu$. Para ello, notemos que para todo $\eta \in 2^{<\kappa}$ existe $\widehat{p_\eta} \in ga - S(\mathcal{M}')$ tal que $\widehat{p_\eta} \restriction_{\mathcal{N}_\eta} = p_\eta$; por tanto para demostrar que $|ga - S(\mathcal{M}')| > \mu$ es suficiente mostrar que si $\eta, \eta' \in 2^{<\kappa}$ son diferentes, entonces $\widehat{p_\eta} \neq \widehat{p_{\eta'}}$.

En efecto, sean $\gamma := \eta \wedge \eta'$ el segmento inicial donde los tipos $\widehat{p_\eta}$ y $\widehat{p_{\eta'}}$ coinciden y $\beta = lg(\gamma)$. Por la contrucción que hicimos de los $\mathcal{N}_\eta$, el segmento γ podría ser vacío. Por definición de los tipos p_η para $\eta \in 2^{<\kappa}$, tenemos que $p_\gamma \subset p_\eta, p_{\eta'}$ y debido a que por hipótesis tenemos que $f_\beta : \mathcal{M}^1_\beta \longrightarrow \mathcal{M}^2_\beta$ es tal que $p \restriction_{\mathcal{M}^2_\beta} \neq f_\beta(p \restriction_{\mathcal{M}^1_\beta})$, entonces $h_\gamma(p \restriction_{\mathcal{M}^2_\beta}) \neq h_\gamma(f_\beta(p \restriction_{\mathcal{M}^1_\beta}))$ pues h_γ es un isomorfismo. Por construcción tenemos entonces que $p_{\gamma^\frown 0} = \widehat{h_{\gamma^\frown 0}}(p \restriction_{\mathcal{M}_{\gamma+1}}) \neq \widehat{h_{\gamma^\frown 1}}(p \restriction_{\mathcal{M}_{\gamma+1}}) = p_{\gamma^\frown 1}$ y por tanto podemos concluir que $\widehat{p_\eta} \restriction_{\mathcal{N}_{\gamma^\frown 0}} \neq \widehat{p_{\eta'}} \restriction_{\mathcal{N}_{\gamma^\frown 0}}$, teniendo así que $|ga - S(\mathcal{M}')| = 2^\kappa > \kappa$. $\boxed{3.1.3}$

Observación 3.1.4. *Notemos que bajo la GCH para todo* $\mu \geq \aleph_0$, μ *es el mínimo cardinal tal que* $\mu < 2^\mu$ *y por tanto bastará tomar una* $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$*-cadena creciente continua de longitud* μ *de estructuras en* $\mathcal{K}_\mu$ *para que la clase* $\mathcal{K}$ *no sea* μ*-estable.*

El lema 3.1.3 es una herramienta importante en las demostraciones del teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.2.1 en [SV99]) dadas en [SV99] y [BGVV17] pues nos permitirá contradecir la categoricidad si no se tiene el carácter local de la relación de no ruptura. De alguna manera, como lo mostraremos la primera sección del siguiente capítulo, el concepto que presentamos a continuación puede ser considerado una forma débil de la noción de carácter local de la relación de no ruptura y por tal motivo lo incluimos en la siguiente definición para el contexto de las Q-AECs.

Definición 3.1.5 (cf. definición 6.(3) en [BGVV17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal y α un ordinal límite. Diremos que la relación de μ-ruptura tiene* ***carácter local universal débil en*** *α si para toda $\prec_{\mathcal{K}}^{\mu}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y para todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, existe $i_p < \alpha$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$.*

Notemos que si $\mathcal{K}$ es una Q-AEC que satisface JEP, AP, tiene MAG y es λ-categórica, entonces por el teorema 2.1.2 tenemos que $\mathcal{K}$ es μ-estable para todo $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$; además, si para todo $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$ tenemos que σ_μ el mínimo cardinal tal que $2^{\sigma_\mu} > \mu$, entonces la relación de μ-ruptura tiene carácter local universal débil en σ_μ para todo $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \mu)$ pues de lo contrario tendríamos que $\mathcal{K}$ no es μ-estable por el lema 2.1.2. De este argumento deducimos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.6. *Si $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface JEP, AP, tiene MAG y es λ-categórica, entonces para todo $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$ existe σ_μ tal que la relación de μ-ruptura tiene carácter local universal débil en σ_μ.*

Observación 3.1.7. *Si suponemos la GCH, tenemos que μ es el mínimo cardinal tal que $2^\mu > \mu$ y al utilizar la observación 3.1.4 junto con el corolario 3.1.6, tenemos que para todo $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$ la relación de no ruptura tiene carácter local universal débil en μ.*

La siguiente afirmación es hecha por Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey en [BGVV17] pero sin demostración. A continuación nosotros la enunciamos y demostramos.

Lema 3.1.8 (observación 7.(2) en [BGVV17]). *Sean $\alpha < \beta$ ordinales límites. Si la relación de μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α, entonces la relación de μ-ruptura tiene carácter local universal débil en β.*

Demostración. Para llegar a una contradicción, supongamos que la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local universal débil en β. Esto quiere decir que existen una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\beta} \subseteq \mathcal{K}_\mu$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\beta} \mathcal{M}_i\right)$ tales que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \beta$. Ahora bien como $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ es una subsucesión de $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\beta}$, entonces es una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua y $p \restriction_{\mathcal{M}_\alpha} \in ga-S\left(\mathcal{M}_\alpha\right) = ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$. Notemos que por la escogencia de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\beta}$ y del tipo de Galois p, tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \beta$ y como para todo $i < \alpha$ tenemos que $(p \restriction_{\mathcal{M}_\alpha}) \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ pues $\mathcal{M}_{i+1} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_\alpha$, entonces $(p \restriction_{\mathcal{M}_\alpha}) \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ pues $\alpha < \beta$. Esto último es absurdo pues la relación de μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α. $\boxed{3.1.8}$

El siguiente es un lema técnico que nos servirá en uno de los resultados previos (lema 3.2.22) a la demostración del carácter local de la relación de no μ-ruptura (teorema 3.2.23). Lo que el siguiente resultado nos dice es que el carácter local débil de la ralación de no μ-ruptura, puede ser atestiguado por un ordinal sucesor para cadenas de longitud adecuada. En [BGVV17] para demostrarlo, los autores suponen que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ. Como la observación 3.1.7 nos dice que la λ-categoricidad implica que la relación de no μ-ruptutra tiene carácter local universal débil en μ para todo $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$, nosotros supondremos a lo largo de este capítulo que $\mathcal{K}$ es una Q-AEC λ-categórica.

Lema 3.1.9 (cf. lema 11.(3) en [BGVV17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica y $\mu < \lambda$ un cardinal. Si $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu} \subset \mathcal{K}_\mu$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \mu$, entonces para todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i\right)$ existe un ordinal sucesor $i_p < \mu$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$.*

Demostración. Sea $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \mu$. Por el lema 2.2.4, en particular tenemos que $\mathcal{M}_{2i+2}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$ pues M_{2i+1} es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$ y $\mathcal{M}_{2i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{2i+2}$, por tanto $\langle \mathcal{M}_{2i} \rangle_{i<\mu}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-subsucesión creciente continua tal que $\mathcal{M}_{2(i+1)} = \mathcal{M}_{2i+2}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$. Es inmediato que la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-subsucesión $\langle \mathcal{M}_{2i} \rangle_{i<\mu}$ es cofinal en $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu}$.

Gracias a que por hipótesis tenemos que $\mathcal{K}$ es λ-categórica, podemos aplicar la observación 3.1.7 y así concluimos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ, esto quiere decir que para todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_{2i}\right) = ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i\right)$ existe j_p tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{2(j_p+1)}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{2j_p+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2j_p}$.

Por otro lado, como $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua, entonces $\mathcal{M}_{2j_p} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{2j_p+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{2j_p+2}$ y por tanto al aplicar la monotonía de la relación de no μ-ruptura (observación 3.1.13), podemos afirmar que $p \restriction \mathcal{M}_{2j_p+2}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2j_p+1}$. Defina $i_p := 2j_p + 1$. Claramente i_p es un ordinal sucesor y $p \restriction_{\mathcal{M}_{i_p+1}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{2j_p+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p} = \mathcal{M}_{2j_p+1}$. $\boxed{3.1.9}$

El siguiente lema es la primera aproximación que tenemos a una condición de *carácter local* para la relación de no ruptura pues nos dice que, bajo el supuesto de estabilidad, existen estructuras que atestiguan la no ruptura del cardinal de la estabilidad, dichas estructuras las llamaremos *bases de no ruptura*.

Lema 3.1.10 (existencia de bases de no-ruptura (lema 3.2.18 en [Cop06]))**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC μ-estable y $|M| \geq \mu > LS(\mathcal{K})$. Para todo $p \in ga - S(\mathcal{M})$, existe $\mathcal{N}_p$ tal que $|N_p| = \mu$ y p no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_p$.*

Demostración. Para el caso en que $|M| = \mu$, es suficiente tomar $\mathcal{N}_p = \mathcal{M}$ y el resultado es inmediato.

Para el caso en que $|M| > \mu$ suponga que el enunciado es falso, lo que haremos es construir una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua de modelos $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\kappa} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que para todo $i < \kappa$, tengamos que $p \restriction_{\mathcal{N}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_i$, siendo κ el mínimo cardinal tal que $\mu < 2^\kappa$, y así contradecir la μ-estabilidad con ayuda del lema 3.1.3.

Para lograr nuestro objetivo, supongamos que para toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_\mu$ de $\mathcal{M}$, p μ-rompe sobre $\mathcal{N}$. Construiremos la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_\kappa$ recursivamente de la siguiente manera:

(i) *Para la base*, utilice el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5) para encontrar una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_\mu$ de $\mathcal{M}$.

(ii) *Para el paso sucesor*, supongamos que para $i < \kappa$ tenemos construida la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subestructura $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu$ de $\mathcal{M}$. Por el supuesto que hicimos al principio de la demostración, tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{N}_i$ y por tanto existen $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1 \in \mathcal{K}_\mu$ y un isomorfismo $f_i : \mathcal{N}_i^0 \longrightarrow \mathcal{N}_i^1$ tales que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_i^0, \mathcal{N}_i^1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$, $f_i \restriction_{\mathcal{N}_i} = 1_{\mathcal{N}_i}$ y $f_i \left(p \restriction_{\mathcal{M}_i^0} \right) \neq p \restriction_{\mathcal{M}_i^1}$.

Por el lema 1.1.15, existe $\mathcal{N}'_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{N}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_{i+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y $N_i^0 \cup N_i^1 \subseteq N'_{i+1}$, de esto último es inmediato que $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1 \subseteq \mathcal{N}'_{i+1}$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) podemos deducir que $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_{i+1}$ pues en particular tenemos que $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1,\ \mathcal{N}_{i+1} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$. Por los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) tenemos que existe $\mathcal{N}_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{N}'_{i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_{i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ pues $\mathcal{N}'_{i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ y al aplicar los axiomas de coherencia (1.1.1.4*b*), tenemos que $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_{i+1}$. Notemos que como $\left(p \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i+1}}\right) \upharpoonright_{\mathcal{N}_i^j} = p \upharpoonright_{\mathcal{N}_i^j}$ para $j = 0, 1$, entonces $\mathcal{N}_i^0,\ \mathcal{N}_i^1$ y f_i atestiguan que $p \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i+1}}$ μ-rompa sobre $\mathcal{N}_i$.

(iii) *Para el paso límite*, suponga que para $i < \kappa$ un ordinal límite tiene construidos $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ que cumplen las condiciones dadas, definamos $\mathcal{N}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{N}_j$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues para todo $j < i$ tenemos que $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ y al aplicar el lema 1.1.13, tenemos que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ pues por construcción tenemos que $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu$.

La construcción que acabamos de hacer nos garantiza que para todo $i < \kappa$ se cumple que $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu$ y que la sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\kappa}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente continua. Es inmediato de los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ pues para todo $i < \kappa$, tenemos que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}$ y por tanto $p \upharpoonright_{\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i} \in ga - S\left(\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i\right)$. Por último notemos que por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*), tenemos que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i$ para todo $i < \kappa$ y por tanto $\left(p \upharpoonright_{\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i}\right) \upharpoonright_{\mathcal{N}_i} = p \upharpoonright_{\mathcal{N}_i}$ para todo $i < \kappa$, entonces podemos concluir con ayuda de la construcción hecha en el *paso sucesor* que $\left(p \upharpoonright_{\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i}\right) \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i+1}} = p \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_i$ para todo $i < \kappa$. Así hemos demostrado que la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\kappa} \subset \mathcal{K}_\mu$ y el tipo de Galois $p \upharpoonright_{\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i} \in ga - S\left(\bigcup_{i<\kappa} \mathcal{N}_i\right)$ cumplen las hipótesis del lema 3.1.3 y en consecuencia $\mathcal{K}$ no es μ-estable, lo cual es absurdo. Por tanto existe $\mathcal{N}_p \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ tal que p no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_p$ y además $|N_p| = \mu$. $\boxed{3.1.10}$

A continuación demostraremos algunas propiedades que tiene la relación de *no ruptura* que nos serán de utilidad cuando demostramos el teorema de Shelah-Villaveces.

Lema 3.1.11 (invarianza de la relación de no ruptura)**.** *Sean* $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \in \mathcal{K}$ *y* $p \in ga - S(\mathcal{N})$. *Si* p *no* μ*-rompe sobre* $\mathcal{M}$ *y* $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ *es un isomorfismo, entonces* $f(p) \in ga - S(\mathcal{N}')$ *no* μ*-rompe sobre* $f[\mathcal{M}]$.

Notemos que el contrarecíproco nos dice que la relación de ruptura también es respetada por los isomorfismos.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $f(p)$ μ-rompe sobre $f[\mathcal{M}]$, esto quiere decir que existen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ y un isomorfismo $g : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ tales que $f[\mathcal{M}] \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'$, $g \restriction_{f[\mathcal{M}]} = 1_{f[\mathcal{M}]}$ y $g(f(p) \restriction_{\mathcal{N}_0}) \neq f(p) \restriction_{\mathcal{N}_1}$. Como f es un isomorfismo, entonces por la definición 1.1.1.3 (axiomas de isomorfismo) tenemos que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} f^{-1}[\mathcal{N}_0], f^{-1}[\mathcal{N}_1] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y que $h := f^{-1} \restriction_{\mathcal{N}_1} \circ g \circ f \restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_0]}$: $f^{-1}[\mathcal{N}_0] \longrightarrow f^{-1}[\mathcal{N}_1]$ es un isomorfismo, esto último lo tenemos pues h es composición de isomorfismos. Notemos que

$$
\begin{aligned}
h\left(p \restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_0]}\right) &= f^{-1} \restriction_{\mathcal{N}_1} \circ g \circ f \restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_0]} \left(p \restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_0]}\right), \\
&= f^{-1} \restriction_{\mathcal{N}_1} \circ g\left(f(p) \restriction_{\mathcal{N}_0}\right), \\
&= f^{-1} \restriction_{\mathcal{N}_1} \left(g(f(p)) \restriction_{\mathcal{N}_1}\right), \\
&= f^{-1}(g(f(p)) \restriction_{f^{-1} \restriction_{\mathcal{N}_1}[\mathcal{N}_1]}, \\
&= f^{-1}(g(f(p)) \restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}
\end{aligned}
$$

y como además tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(f(p)\restriction_{\mathcal{N}_1}\right) &= f^{-1}(f(p))\restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}, \\ &= p\restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}. \end{aligned}$$

Por nuestro supuesto tenemos que $g\left(f(p)\restriction_{\mathcal{N}_0}\right) \neq f(p)\restriction_{\mathcal{N}_1}$ y como f es un isomorfismo tenemos además que $f^{-1}\left(g\left(f(p)\restriction_{\mathcal{N}_0}\right)\right) \neq f^{-1}\left(f(p)\restriction_{\mathcal{N}_1}\right)$ pero como

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(g\left(f(p)\restriction_{\mathcal{N}_0}\right)\right) &= f^{-1}\left(g(f(p))\restriction_{\mathcal{N}_1}\right), \\ &= f^{-1}(g(f(p))\restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}, \\ &= h\left(p\restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}\right), \end{aligned}$$

entonces podemos concluir que $h\left(p\restriction_{f^{-1}[\mathcal{N}_0]}\right) \neq p_{f^{-1}[\mathcal{N}_1]}$ y por tanto p μ-rompería sobre $\mathcal{M}$, lo cual es contradictorio. $\boxed{3.1.11}$

En [Cop06], Coppola enuncia y demuestra la monotonía de la relación de ruptura en términos de la realación fuerte $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$. Nosotros hemos debilitado esta condición enunciando y demostrando el lema en términos de la relación débil $\prec_{\mathcal{K}}$.

Lema 3.1.12 (cf. hecho 3.2.15 en [Cop06], monotonía de la relación de no ruptura)**.** *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$. Supongamos que $p \in ga-S(\mathcal{N})$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}$, entonces $p\restriction_{\mathcal{M}'}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}$ y p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'$.*

Demostración. Supongamos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}'$, entonces existen $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ y un isomorfismo $h : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_1$ tales que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, $h\restriction_{\mathcal{M}'} = 1_{\mathcal{M}'}$ y $h\left(p\restriction_{\mathcal{N}_0}\right) \neq p\restriction_{\mathcal{N}_1}$ pero como $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, entonces $h\restriction_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$, por tanto $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ y h atestiguan que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}$, lo cual es contradictorio.

Si $p\restriction_{\mathcal{M}'}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}$, entonces existen $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \in \mathcal{K}_{\leq\mu}$ y un isomorfismo $h : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ tales que $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$, $h\restriction_{\mathcal{M}_0} = 1_{\mathcal{M}_0}$ y $h(p\restriction_{\mathcal{M}_0}) \neq p\restriction_{\mathcal{M}_1}$ y como por la definición 1.1.1.4*c* (axiomas de coherencia) tenemos que $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ pues $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces tendríamos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}$, lo cual es absurdo. $\boxed{3.1.12}$

Observación 3.1.13. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N} \in \mathcal{K}$ y supongamos que $p \in ga - S(\mathcal{N})$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}$. Notemos que como la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ extiende a la relación $\prec_{\mathcal{K}}$ (definición 1.1.1.2), el lema 3.1.12 es válido si $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ o $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.*

Lema 3.1.14 (unicidad de extensiones de no-ruptura bajo universalidad (lema 3.2.21 en [Cop06])). *Suponga que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ con $\mathcal{M}$ μ-universal sobre $\mathcal{M}_0$ para algún $\mu > |M_0|$ y que $\mathcal{K}$ es χ-dócil para algún $\chi \leq |M_0|$. Si $p \in ga - S(\mathcal{M})$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, entonces p tiene a lo sumo una extensión en $ga - S(\mathcal{N})$ que no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.*

Demostración. En primer lugar notemos que por hipótesis tenemos que $\mathcal{M}$ es μ-universal sobre $\mathcal{M}_0$ y por tanto $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_{\geq\mu}$; además como $\mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entoces también tenemos que $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_{\geq\mu}$.

Procedamos por reducción al absurdo. Si existen tipos de Galois $s, q \in ga - S(\mathcal{N})$ diferentes que extienden a p y no μ-rompen sobre $\mathcal{M}_0$, entonces por la χ-docilidad de $\mathcal{K}$, podemos encontrar $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_{\leq\chi}$ tal que $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $s\restriction_{\mathcal{N}_0} \neq q\restriction_{\mathcal{N}_0}$. Como por hipótesis tenemos que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$, entonces por la transitividad de la relación $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$ (definición 1.1.1.1) podemos decir que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y como por hipótesis también tenemos que $\chi \leq |M_0| < \mu$, entonces al aplicar el lema 1.1.15 existe $\mathcal{N}_0' \in \mathcal{K}_{|M_0|}$ tal que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0' \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$ y $N_0 \subseteq N_0'$. Esto último implica que $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_0'$ y al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*), podemos concluir que $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0'$ pues en particular $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_0' \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}$.

Por la μ-universalidad de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}_0$, existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{N}'_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ que fija puntualmente a $\mathcal{M}_0$. Definamos $\mathcal{N}'_1 = f[\mathcal{N}'_0]$. Debido que s, q no μ-rompen sobre sobre $\mathcal{M}_0$, entonces $q \restriction_{\mathcal{N}'_1} = f(q \restriction_{\mathcal{N}'_0})$ y $s \restriction_{\mathcal{N}'_1} = f(s \restriction_{\mathcal{N}'_0})$; pero como $q \restriction_{\mathcal{N}_0} \neq s \restriction_{\mathcal{N}_0}$, entonces al aplicar la proposición 1.3.12 tenemos que $q \restriction_{\mathcal{N}'_1} \neq s \restriction_{\mathcal{N}'_1}$ pues $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_0$ y al utilizar de nuevo la proposición 1.3.12 podemos concluir que $s \restriction \mathcal{M} \neq q \restriction \mathcal{M}$, lo cual es contradictorio con el hecho que s y q extiendan a p. $\boxed{3.1.14}$

Observación 3.1.15. *Si en las hipótesis del lema tenemos que* $|N| = |M| = \mu$ *en vez de la docilidad, el resultado también es válido. En efecto si* $|N| = |M| = \mu$*, entonces por la* μ*-universalidad de* $\mathcal{M}$ *sobre* $\mathcal{M}_0$ *existe una* $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-inmersión* $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ *tal que* $f_{\mathcal{M}_0} = 1_{\mathcal{M}_0}$ *y si* $q, s \in ga-S(\mathcal{N})$ *son como en la demostración del lema,* $s \restriction_{\mathcal{N}} \neq q \restriction_{\mathcal{N}}$ *y siguiendo en mismo argumento del lema anterior, tenemos que* $s \restriction_{f[\mathcal{N}]} \neq q \restriction_{f[\mathcal{N}]}$*. Por lo tanto* $q \restriction_{\mathcal{M}} \neq s \restriction_{\mathcal{M}}$*.*

El siguiente lema nos será de utilidad al momento de demostrar el carácter local de la relación de ruptura y además nos da una definición equivalente del concepto de carácter local universal débil.

Lema 3.1.16 (cf. lemma 11.(2) en [BGVV17]). *Sea* $\mathcal{K}$ *una Q-AEC que satisface AP, JEP y con MAG,* $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ *un cardinal,* $\alpha, \delta < \mu^+$ *ordinales límite. Si* $\mathcal{K}$ *es* μ*-estable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) La relación de μ*-ruptura tiene carácter local universal débil en* α*.*

(ii) Para toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$*-sucesión creciente continua* $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ *tal que* $\mathcal{M}_{i+1}$ *es* (μ, δ)*-límite sobre* $\mathcal{M}_i$ *para todo* $i < \alpha$ *y para todo* $p \in ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$*, existe* $i_p < \alpha$ *tal que* $p \restriction_{\mathcal{M}_{i_p+1}}$ *no* μ*-rompe sobre* $\mathcal{M}_{i_p}$*.*

Demostración. Para ver que (i) implica (ii) razonaremos por reducción al absurdo. Para ello sean $\langle \mathcal{M}_i^j \rangle_{j<\delta}$ la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua que atestigua que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. Como por definición de estructura (μ, δ)-límite tenemos que $\mathcal{M}_i^0 := \mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_i^1$ es universal sobre $\mathcal{M}_i^0$ y $\bigcup_{j<\delta} \mathcal{M}_i^j := \mathcal{M}_{i+1}$, entonces al aplicar los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\mathcal{M}_i^1 \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{i+1}$ y por el lema 2.2.4, podemos concluir que que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y por tanto la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ y el tipo p atestiguan que la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local débil en α lo cual contradice (i).

Veamos ahora que (ii) implica (i). Para ello supongamos que (ii) es verdadero y por reducción al absurdo supongamos que (i) falla, esto último quiere decir que existen una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. Como por hipótesis $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces por el corolario 2.2.10 tenemos que para todo $i < \alpha$ existe $\mathcal{M}_i^* \in \mathcal{K}_\mu$ que es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y como $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_i^* \in \mathcal{K}_\mu$, podemos garantizar la existencia de una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f_i : \mathcal{M}_i^* \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$ tal que $f_i[\mathcal{M}_i] = 1_{\mathcal{M}_i}$ para todo $i < \alpha$. Notemos que al aplicar el lema 2.2.5 δ veces, tenemos que $f_i[\mathcal{M}_i^*]$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$.

Lo que haremos ahora es definir una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i^+ \rangle_{i<\alpha}$ basados en $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ de tal manera que $\mathcal{M}_{i+1}^+$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i^+$. Lo haremos recursivamente sobre $i < \alpha$ de la siguiente manera.

- Para $i = 0$, definimos $\mathcal{M}_0^+ := \mathcal{M}_0$ y para $i = 1$ definimos $\mathcal{M}_1^+ := f_0[\mathcal{M}_0^*]$. Por la escogencia de f_0 es evidente que $\mathcal{M}_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} f_0[\mathcal{M}_0^*] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$ y por tanto tenemos que $\mathcal{M}_0^+ \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1^+ \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^+ = f_0[\mathcal{M}_0^*]$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_0^+ = \mathcal{M}_0$ y que $\mathcal{M}_0^+, \mathcal{M}_1^+ \in \mathcal{K}_\mu$.

- Supongamos que para $i < \alpha$ tenemos construida la estructura $\mathcal{M}_i^+ \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$. Por la escogencia de $\mathcal{M}_i^*$ y de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f_i : \mathcal{M}_i^* \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$, tenemos que $\mathcal{M}_i^+ \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} f_i[\mathcal{M}_i^*] \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$ y que $f_i[\mathcal{M}_i^*] \in \mathcal{K}_\mu$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$. Al aplicar el lema 2.2.4 a la primera estructura de una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua que atestigue que $f_i[\mathcal{M}_i^*]$ sea (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, entonces tenemos que $f_i[\mathcal{M}_i^*]$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i^+$ y por tanto $\mathcal{M}_i^+ \prec^{u}_{\mathcal{K}} f_i[\mathcal{M}_i^*]$. Definamos entonces $\mathcal{M}_{i+1}^+ := f_i[\mathcal{M}_i^*]$.

- Sea $i < \alpha$ un ordinal límite diferente de 0 y supongamos que para todo $j < i$ tenemos construidas las estucturas $\mathcal{M}_j^+ \in \mathcal{K}_\mu$ tales que $\langle \mathcal{M}_j^+ \rangle_{j<i}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua y que para todo $j < i$, tenemos que $\mathcal{M}_j^+ \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j^+ \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$. Definamos entonces $\mathcal{M}_i^+ := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j^+$. Claramente $\mathcal{M}_i^+ \in \mathcal{K}_\mu$ pues $i < \alpha < \mu^+$.

Por construcción tenemos que $\langle \mathcal{M}_i^+ \rangle_{i<\alpha}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}^+$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i^+$. Además como $\mathcal{M}_i^+ \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, entonces en particular tenemos que $M_i^+ \subseteq \bigcup_{i<\alpha} M_i$ para todo $i < \alpha$ y por tanto $\bigcup_{i<\alpha} M_i^+ \subseteq \bigcup_{i<\alpha} M_i$; por otro lado si tomamos $a \in \bigcup_{i<\alpha} M_i$, entonces existe $j < \alpha$ tal que $a \in M_j$ y por la segunda parte de la construcción de la sucesión $\langle \mathcal{M}_i^+ \rangle_{i<\alpha}$, deducimos que $M_j^+ \subseteq M_j \subseteq M_{j+1}^+$ y así tenemos que $a \in M_j^+$. Por tanto podemos afirmar que $\bigcup_{i<\alpha} M_i \subseteq \bigcup_{i<\alpha} M_i^+$ pues $M_{j+1}^+ \subseteq \bigcup_{i<\alpha} M_i^+$ y en consecuencia $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i^+ = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$.

Claramente la subsucesión $\langle \mathcal{M}^+_{2i} \rangle_{i<\alpha}$ es un $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua pues si $i < j < \alpha$, entonces $2i < 2j$ y por tanto $\mathcal{M}^+_{2i} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^+_{2j}$ y si $j < \alpha$ es un ordinal límite diferente de cero, entonces $2j = j$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+_{2j} &= \mathcal{M}^+_j, \\ &= \bigcup_{k<j} \mathcal{M}^+_k \text{ por la definición de la sucesión } \langle \mathcal{M}^+_i \rangle_{i<\alpha}, \\ &= \bigcup_{k<j} \mathcal{M}^+_{2k} \text{ pues la sucesión de ordinales } \langle 2k \rangle_{k<j} \text{ es cofinal en } j. \end{aligned}$$

Además como por la construcción de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}^+_i \rangle_{i<\alpha}$, tenemos que $\mathcal{M}^+_{2i+2}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}^+_{2i+1}$ y $\mathcal{M}^+_{2i} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^+_{2i+1}$, entonces al aplicar el lema 2.2.4 a la primera estructura de una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua que atestigue que $\mathcal{M}^+_{2i+2}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}^+_{2i+1}$, tenemos que $\mathcal{M}^+_{2i+2}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}^+_{2i}$ y por tanto la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}^+_{2i} \rangle_{i<\alpha}$ cumple las condiciones de (ii). Además como $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_{2i} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_i = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces $p \in \mathfrak{ga} - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_{2i}\right)$ y como hicimos el supuesto que (ii) se satisface, podemos encontrar $i_p < \alpha$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}^+_{2(i_p+1)}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}^+_{2i_p}$. Notemos que por la construcción de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}^+_i \rangle_{i<\alpha}$ y por la escogencia de las $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-inmersiones $f_i : \mathcal{M}^*_i \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$ para todo $i < \alpha$, tenemos que

$$\mathcal{M}^+_{2i_p} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i_p} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} f_{2i_p}[\mathcal{M}^*_{2i_p}] = \mathcal{M}^+_{2i_p+1} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i_p+1} \prec_{\mathcal{K}} f_{2i_p+1}[\mathcal{M}^*_{2i_p+1}] = \mathcal{M}^+_{2i_p+2} = \mathcal{M}^+_{2(i_p+1)}.$$

Ahora bien, al aplicar la monotonía de la relación de no ruptura (lema 3.1.12) tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{2i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}^+_{2i_p}$ pues $\mathcal{M}_{2i_p+1} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^+_{2(i_p+1)}$ y como $\mathcal{M}^+_{2i_p} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i_p}$, entonces de nuevo por el lema 3.1.12 (monotonía de la relación de no ruptura) podemos concluir que $p \restriction_{\mathcal{M}_{2i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i_p}$ lo cuál contradice la escogencia de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ y de $p \in \mathfrak{ga} - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$. $\boxed{3.1.16}$

3.2. Carácter local de la relación de ruptura

Como lo mencionamos al principio del capítulo, lo que buscamos es encontrar una análogo a $\kappa(T) = \aleph_0$ como noción de superestabilidad, para T una teoría estable de primer orden, pero en el contexto de las Q-AECs. En el caso de primer orden, nosotros podemos decir que $\kappa(T) = \aleph_0$ si ningún tipo sintáctico bifurca sobre algún conjunto finito; notemos además que esto equivale a que la teoría T sea superestable (nota 5.10 en [Pil08]) y por tanto lo que nosotros expondremos en las siguientes páginas es una primera aproximación al concepto de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs.

Como el concepto de no μ-ruptura es es una noción robusta de independencia en el contexto de las Q-AECs, entonces la manera *natural* de adaptar $\kappa(T) = \aleph_0$ sería decir que todo tipo no μ-rompe sobre un conjunto finito. Esto trae ciertas dificultades técnicas pues la relación de μ-ruptura sólo está definida para estructuras y en caso de cambiar la palabra conjunto por estructura, también habría problemas pues es no podemos encontrar estructuras finitas en una Q-AEC arbitraria. Inspirados en [SV99] y en [BGVV17], nosotros remplazamos la afirmación "ningún tipo sintáctico bifurca sobre algún conjunto finito"por la siguiente definición, pues es una consecuencia de superestabilidad en primer orden.

Definición 3.2.1 (cf. definición 6.(4) en [BGVV17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ un cardinal y α un ordinal límite. Diremos que la relación de no μ-ruptura tiene* ***carácter local universal fuerte en*** *α si para toda $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y para todo $p \in ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, existe $i_p < \alpha$ tal que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$.*

Observación 3.2.2. *Supongamos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α, esto es para toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, existe i_p tal que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$. Como $\mathcal{M}_{i_p} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i_p+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces por la monotonía de la relación de no ruptura (lema 3.1.12) tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$. Como la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{\imath<\alpha}$ y el tipo de Galois p son arbitrarios, entonces podemos concluir que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α.*

La noción de carácter local universal fuerte también se conoce como *carácter local de la relación de no μ-ruptura*. Dicho concepto es enunciada de manera implícita en la conclusión del **teorema de Shelah-Villaveces** (teorema 2.2.1 en [SV99]) por Shelah y Villaveces; en [BGVV17] Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey la definen de manera explícita para *quitar los huecos ("gaps")* en la demostración hecha por Shelah y Villaveces en [SV99] del teorema de Shelah-Villaveces.

El siguiente lema nos muestra que es suficiente demostrar que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en un ordinal regular α para ver que tiene dicha propiedad en todo ordinal con cofinalidad α. En [BGVV17] sólo es enunciada sin demostración esta propiedad para contexto de las AECs y debido que es una herramienta importante en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces, nosotros adaptamos este resultado al contexto de las Q-AEC e incluimos la demostración en este contexto.

Lema 3.2.3 (cf. observación 7.(3) en [BGVV17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal límite. Si la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en $\alpha' = cf(\alpha)$, entonces la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α, es decir supongamos que existen una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$.
Lo que haremos es construir de manera recursiva una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha'}$ que atestigue que la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α' cantradiciendo la hipótesis del lema que estamos probando. En primer lugar notemos que existe una sucesión creciente de ordinales $\alpha_i < \alpha$ con $i < \alpha'$ tal que $\sup_{i<\alpha'} \alpha_i = \alpha$. Definimos las estructuras $\mathcal{M}'_i$ de la siguiente manera:

- $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_{\alpha_0}$.

- Supongamos que para $i < \alpha'$ tenemos construido $\mathcal{M}'_i$ tal que $\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$. Definimos entonces $\mathcal{M}'_{i+1} := \mathcal{M}_{\alpha_{i+1}}$. Como $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ y $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente, entonces $\mathcal{M}_{\alpha_i} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_{i+1}}$ y como $\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*, tenemos que $\mathcal{M}'_i \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_{i+1}$.

- Sea $i < \alpha'$ un ordinal límite y supongamos que para todo $j < i$ tenemos construido $\mathcal{M}'_j$ tal que $\mathcal{M}'_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_j}$ y que $\langle \mathcal{M}'_j \rangle_{j<i}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua. Definamos $\mathcal{M}'_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}'_j$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*) tenemos que $\mathcal{M}'_j \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_i$, además como $\alpha_j < \alpha_i$ para todo $j < i$ y $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente, entonces $\mathcal{M}_{\alpha_j} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$ para todo $j < i$. Como $\mathcal{M}'_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_j}$ para todo $j < i$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) podemos afirmar que $\mathcal{M}'_j \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$ para todo $j < i$. De esto concluimos que

$\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$ gracias a los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*).

Por lo tanto la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}'_j \rangle_{j<\alpha'}$ es creciente continua. Veamos que la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}'_j \rangle_{j<\alpha'}$ es cofinal en la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$. Para ello sea $i < \alpha$. Como por hipótesis la sucesión $\langle \alpha_j \rangle_{j<\alpha'}$ es cofinal en α, entonces existe $j < \alpha'$ tal que $i < \alpha_j$, sea k el mínimo de tales j. Por la construcción de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}'_j \rangle_{j<\alpha'}$ tenemos que $\mathcal{M}'_k \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_k}$ y que $\mathcal{M}'_{k+1} := \mathcal{M}_{\alpha_{k+1}}$, entonces $\mathcal{M}_i \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_k} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_{k+1}} = \mathcal{M}'_{k+1}$ y por tanto $\langle \mathcal{M}'_j \rangle_{j<\alpha'}$ es cofinal en $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$, en consecuancia $\bigcup\limits_{i<\alpha'} \mathcal{M}'_i = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$.

Ahora bien, como por hipótesis tenemos que $p \in ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right) = ga - S\left(\bigcup\limits_{j<\alpha'} \mathcal{M}'_i\right)$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, en particular tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{\alpha_j}$ para todo $j < \alpha'$ y como por construcción tenemos que $\mathcal{M}'_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_j}$ para todo $j < \alpha'$, entonces al aplicar la transitividad de la relación de ruptura (hecho 3.1.2) p μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_j$ para todo $j < \alpha'$, lo cual es absurdo. $\boxed{3.2.3}$

De manera análoga al lema 3.1.16 que caracteriza el hecho que la relación de no μ-ruptura tenga caracter local débil en algún ordinal, daremos una forma equivalente del concepto de carácter local universal en la cual cambiamos estructuras universales por estructuras límite.

Lema 3.2.4 (cf. lema 11.(2) en [BGVV17]). *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ un cardinal, $\alpha, \delta < \mu^+$ ordinales límite. Si $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) La relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α.

(ii) Para toda $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y para todo $p \in ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, existe $i_p < \alpha$ tal que p no μ-rompe

sobre $\mathcal{M}_{i_p}$.

Demostración. Para demostrar que (i) implica (ii), supongamos para toda $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, existe $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que para todo $i < \alpha$ tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$. Notemos que por la primera parte de la demostración del lema 3.1.16, tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y como hicimos el supuesto que para todo $i < \alpha$ p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$, entonces podemos decir que la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α, lo cual contradice (i).

Para el recíproco, supongamos que (ii) es verdadero y que la relación de μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α. Sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ testigos de que la relación de μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α. Notemos que como $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces por la construcción hecha en la segunda parte del lema 3.1.16 tenemos que existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}^+_{2i} \rangle_{i<\alpha}$ tal que para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}^+_{2i+2}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}^+_{2i}$, $\mathcal{M}^+_{2i} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i}$ y $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_{2i} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$. Claramente $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_{2i}\right) = ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ y como (ii) se satisface, tenemos que existe $i_p < \alpha$ tal que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}^+_{2i_p}$. Notemos que como

$$\mathcal{M}^+_{2i_p} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i_p} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^+_{2i_p+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_{2i} = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i,$$

entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura (lema 3.1.12) tenemos que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i_p}$, lo cual contradice la escogencia de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ y del tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$. $\boxed{3.2.4}$

En [SV99] Shelah y Villaveces demuestran en el teorema 2.2.1 (teorema de Shelah-Villaveces) que para una AEC $\mathcal{K}$ el carácter local universal fuerte de la relación de no μ-ruptura se deduce de la λ-categoricidad de la clase $\mathcal{K}$ para $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$. La demostración la hacen por reducción al absurdo, es decir, suponen que existen una $\prec_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$, con $\alpha < \mu^+$, tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y a partir de esto contradicen la λ-categoricidad de la clase. En dicha prueba, Shelah y Villaveces deducen tres condiciones (a), (b) y (c) mutuamente excluyentes, del hecho que p μ-rompa sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y al suponer que alguna de ellas es verdadera, llegan a la contradicción deseada. En [BGVV17] son estudiadas tambien estas tres condiciones que enunciamos a continuación:

a) la relación de no μ-ruptura no tiene continuidad universal (definición 3.2.5.1.),

b) la relación de no-ruptura no tiene alternaciones límites (definición 3.2.5.2.) y

c) negar que la relación de no μ-ruptura tenga carácter local universal débil (definición 3.1.5).

Definición 3.2.5 (cf. definición 9 en [BGVV17])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ y $\alpha < \mu^+$ un ordinal límite.*

1. *Diremos que la relación de no μ-ruptura tiene **continuidad universal en** α si para toda $\prec^u_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y todo tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, entonces p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.*

2. *Sea $\delta < \mu^+$. Diremos que la relación de no μ-ruptura no tiene* ***alternaciones en δ-límites en*** *α si para toda $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, existe $i_p < \alpha$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{2i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i_p}$ o $p \restriction_{\mathcal{M}_{2i_p+2}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i_p+1}$.*

El siguiente lema es una forma equivalente de definir el concepto de continuidad universal sobre $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadenas crecientes continuas de modelos límite. Este resultado no es enunciado en [BGVV17] ni en [SV99] pero en ambos artículos es utilizado de manera implícita (demostración del lema 13 en [BGVV17], demostración en el caso (a) o (b) del teorema 2.2.1 en [SV99]) y por tal motivo lo incluimos en nuestro trabajo.

Lema 3.2.6. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq LS(\mathcal{K})$ un cardinal y $\alpha, \delta < \mu^+$ ordinales límite. Si $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en α.

(ii) Para toda $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y todo $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.

Demostración. Para demostrar que (i) implica (ii) sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que para todo $i < \alpha$ tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$. Notemos que como $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, entonces al aplicar el lema 2.2.4 a la primera estructura de una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua que atestigue que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, tenemos en particular que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y como hicimos el supuesto que la relación de μ-ruptura tiene continuidad universal en α, entonces p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.

Para ver que (ii) implica (i), sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$ para todo $i < \alpha$. Como $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces por lo hecho en la segunda parte de la demostración del lema 3.1.16 tenemos que existe una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}^+_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}^+_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}^+_i$, $\mathcal{M}^+_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, $\mathcal{M}^+_0 = \mathcal{M}_0$ y $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_i = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, por tanto $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}^+_i\right)$. Como $\mathcal{M}^+_0 = \mathcal{M}_0$ y para todo $i < \alpha$ hicimos el supuesto que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura (observación 3.1.13) podemos afirmar que $p \restriction_{\mathcal{M}^+_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}^+_0$ para todo $i < \alpha$ pues $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}'_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}^+_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. Como suponemos que (ii) es válido, entonces tenemos que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}^+_0 = \mathcal{M}_0$. $\boxed{3.2.6}$

Observación 3.2.7. *Notemos que los conceptos de carácter local universal débil, carácter local universal fuerte y continuidad universal pueden ser definidos indistintamente sobre $\prec^u_{\mathcal{K}}$-cadenas creciente continuas de estructuras universales o modelos límite. Nosotros utilizaremos para la mayoría de nuestras demostraciones las equivalencias que utilizan $\prec^u_{\mathcal{K}}$-cadenas de modelos límite.*

El siguiente resultado no se encuentra enunciado por Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey en [BGVV17] pero se encuentra implícito en la demostración del teorema principal del artículo (teorema 3 en [BGVV17]) y nos dice que es suficiente tener continuidad universal en ordinales regulares. Debido que es un detalle importante en la prueba, nosotros lo incluimos para la completez del documento.

Proposición 3.2.8. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal límite. Si la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en $\alpha' = \mathrm{cf}(\alpha)$, entonces la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en α.*

Demostración. Sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y $p \in ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.

Sea $\langle \alpha_i \rangle_{i<\alpha'}$ una sucesión de ordinales tal que $\alpha_0 = 0$ y $\lim\limits_{i<\alpha'} \alpha_i = \alpha$. Como en la demostración del lema 3.2.3, nosotros podemos construir una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha'}$ tal que $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_{\alpha_0} = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}'_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_j}$ para todo $j < \alpha'$ y $\bigcup\limits_{i<\alpha'} \mathcal{M}'_i = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, esto último implica que $p \in ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha'} \mathcal{M}'_i\right) = ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$.

Por hipótesis tenemos en particular que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{\alpha_i}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}'_0$ para todo $i < \alpha'$ pues $\alpha_i < \alpha$ para todo $i < \alpha'$. Ahora bien, como la $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha'}$ es tal que $\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\alpha_i}$ para todo $i < \alpha'$ y $\mathcal{M}'_0 \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_i$ para todo $0 < i < \alpha'$, entonces al aplicar la monotonía de la relación de no μ-ruptura (observación 3.1.13) tenemos que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}'_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_0$. Notemos que por hipótesis la relación de no μ-ruptura satisface la continuidad universal en α' y por tanto tenemos que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}_0$. $\boxed{3.2.8}$

El siguiente lema es enunciado en [BGVV17] y en este trabajo nosotros lo adaptamos el resultado al contexto de las Q-AECs. El lema nos dice que las alternaciones en (μ, δ)-límites de la relación de no μ-ruptura se sigue del carácter local universal fuerte en μ y de que la relación de no μ-ruptura no tenga carácter local universal débil en α para $\alpha < \mu$ un ordinal regular. Con ayuda de la λ-categoricidad y basándonos en la demostración presentada en [BGVV17], nosotros utilizaremos el lema 3.1.16 para construir de manera rigurosa la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena auxiliar que se necesita para la conclusión del siguiente lema.

Lema 3.2.9 (cf. lema 11.(5) en [BGVV17]). *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AECλ-categórica, $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$ un cardinal, $\alpha < \mu^+$ un ordinal regular. Si la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en μ y no tiene carácter local universal débil en α, entonces la relación de μ-ruptura tiene alternaciones μ-límites en α.*

Demostración. En primer lugar notemos que como $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu < \lambda$, entonces por el teorema 2.1.2 tenemos que $\mathcal{K}$ es μ-estable. Además como la relación de no μ-ruptura no tiene carácter local universal débil en α, $\gamma = \mu \cdot \mu < \mu^+$ y $\mathcal{K}$ es μ-estable, entonces por el lema 3.1.16 tenemos que existen una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. Además como para todo $i < \alpha$ se cumple que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, entonces para cada $i < \alpha$ existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}'_{i,j} \in \mu \rangle_{j<\gamma}$ tal que $\mathcal{M}'_{i,j+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{i,j}$ para todo $j < \gamma$, $\mathcal{M}'_{i,0} = \mathcal{M}_i$ y $\bigcup_{j<\gamma} \mathcal{M}'_{i,j} = \mathcal{M}_{i+1}$.

Notemos que como $cf(\mu) = cf(\gamma)$ pues $\gamma = \mu \cdot \mu$ y $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$. Además de esto, como por hipótesis la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en μ y $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}} \in ga - S(\mathcal{M}_{i+1}) = ga - S\left(\bigcup_{j<\gamma} \mathcal{M}'_{i,j}\right)$ para todo $i < \alpha$, entonces tenemos que para todo $i < \alpha$ existe $j_i < \gamma$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{i+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{i,j_i}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M}_1 \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M}_2 \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \cdots & \mathcal{M}_i \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{M}_{i+1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \cdots & \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \\
\mathcal{M}'_{0,1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{1,1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{2,1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \mathcal{M}'_{i,1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{i+1,1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \\
\mathcal{M}'_{0,2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{1,2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{2,2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \mathcal{M}'_{i,2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{i+1,2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \\
\vdots \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \vdots \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \vdots \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \vdots \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \vdots \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \\
\mathcal{M}'_{0,j_0} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{1,j_1} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{2,j_2} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \mathcal{M}'_{i,j_i} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{M}'_{i+1,j_{i+1}} \arrow[d, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"'] & \cdots & \\
\vdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \vdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \vdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \cdots & \vdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \vdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] & \cdots \arrow[uuuuur, hook, "\prec^{u}_{\mathcal{K}}"] &
\end{tikzcd}
$$

Definamos ahora una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ recursivamente sobre α de la siguiente manera.

- Para $i = 0$, definamos $\mathcal{N}_0 := \mathcal{M}_0$.

  Supongamos que para $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{N}_{2i} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_k$ para algún $k < \alpha$.

- Definimos $\mathcal{N}_{2i+1} := \mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$.

- Definimos $\mathcal{N}_{2i+2} := \mathcal{M}_{k+2}$.

- Sea $i < \alpha$ un ordinal límite y supongamos que para todo $j < i$ tenemos definido $\mathcal{N}_j \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$. Definimos entonces $\mathcal{N}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{N}_j$ que por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught es (definición 1.1.1.6*c*) es tal que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ pues $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ para todo $j < i$ y tal que $\mathcal{N}_j \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_i$ para todo $j < i$ (definición 1.1.1.6*b*).

$$\mathcal{M}_0 \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_{1,\mu+j_1} \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_2 \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \cdots \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_k \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu} \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \mathcal{M}_{k+2} \xhookrightarrow{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}} \cdots$$

Por como está definida la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$, es creciente continua.

Veamos ahora que para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{N}_{i+1}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$. Para ello notemos que como $\mathcal{N}_{2i} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_k$ para algún $k < \alpha$, $\mathcal{N}_{2i+1} = \mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ y $\mathrm{cf}(j_{k+1} + \mu) = \mathrm{cf}(\mu)$ pues $j_{k+1} < \mu$, entonces por la escogencia de las $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadenas $\langle \mathcal{M}'_{k+1,j} \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{j<\gamma}$ para todo $k < \alpha$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{M}_{k+1}$ y al aplicar el lema 2.2.4 a la primera estructura de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena que atestigua que $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ es (μ, μ)-límites sobre $\mathcal{M}_{k+1}$, tenemos que $\mathcal{N}_{2i+1}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{N}_{2i}$ pues $\mathcal{N}_{2i} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_k$ y $\mathcal{N}_{2i+1} = \mathcal{M}_{k+1,j_{k+1}+\mu}$; además como $\mathcal{M}_{k+2}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_{k+1}$ para todo $k < \alpha$ y $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\mu)$ pues $\gamma = \mu \cdot \mu$ y como $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k+2}$, entonces por los lemas 2.2.12 y 2.2.4 tenemos que $\mathcal{M}_{k+2}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ y por tanto tenemos que $\mathcal{N}_{2i+2}$ es (μ, μ)-límite sobre $\mathcal{N}_{2i+1}$ pues por definición $\mathcal{N}_{2i+1} = \mathcal{M}_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ y $\mathcal{N}_{2i+2} = \mathcal{M}_{k+2}$.

Es claro que la sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ es cofinal en $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ y por tanto $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, en consecuencia tenemos que $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right)$.

Por último, notemos que como al principio de la demostración hicimos el supuesto que para todo $k < \alpha$ se cumple que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{k+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_k$ y como por la escogencia de las $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadenas $\langle \mathcal{M}'_{k,j} \rangle_{j<\gamma}$ tenemos que $\mathcal{M}_{k+1} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$ para todo $k < \alpha$, entonces por la transitividad de la relación de μ-ruptura (observación 3.1.2) deducimos que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_k$ y por tanto tenemos que $p \upharpoonright_{\mathcal{N}_{2i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{2i}$ si $\mathcal{N}_{2i} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_k$ para algún $k < \alpha$; además por la escogencia de los j_k para todo $k < \alpha$, tenemos que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+2}}$

no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}}$ y como $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$, entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura (lema 3.1.12) concluimos que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{k+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{k+1,j_{k+1}+\mu}$, esto quiere decir que $p \upharpoonright_{\mathcal{N}_{2i+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{2i+1}$. Por tanto podemos afirmar que la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ y el tipo de Galois $p \in ga{-}S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right)$ atestiguan que la relación de μ-ruptura tiene alternaciones en μ-límites en α. $\boxed{3.2.9}$

A diferencia del trabajo de Shelah y Villaveces en [SV99], en [BGVV17] Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey deducen directamente de la λ-categoricidad que la relación de no μ-ruptura en una AEC tiene continuidad universal en α y no tiene alternaciones en γ-límites en α, para todo $\gamma < \mu^+$, para ordinales α adecuados (teoremas 3.2.15 y 3.2.17). Para hacer esto, ellos aislan el siguiente lema técnico que se encuentra implícito en la demostración del teorema 2.2.1 en [SV99] para las AECs. Lo que nosotros hacemos es adaptar el resultado al contexto de las Q-AEC y para ello serán necesarias la siguiente definición y observación.

Definición 3.2.10. *Sean μ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal regular.*

1. *Definimos el conjunto $S^{\mu^+}_{\alpha} := \{\delta < \mu^+ : \mathrm{cf}(\delta) = \alpha\}$.*
2. *Una $S^{\mu^+}_{\alpha}$**-sucesión de clubs** es un conjunto $\overline{C} := \{C_\delta : \delta \in S^{\mu^+}_{\alpha}$ y $C_\delta \subseteq \delta$ es un club$\}$.*
3. *Dada una $S^{\mu^+}_{\alpha}$-sucesión de clubs, $\langle \beta_{\delta,j} \rangle_{j<\alpha}$ será una enumeración creciente de $C_\delta \cup \{\delta\}$*

Observación 3.2.11. *Notemos que al tomar $C_\delta = \delta$ para todo $\delta \in S^{\mu^+}_{\alpha}$, entonces $\overline{C} := \{\delta : \mathrm{cf}(\delta) = \alpha\}$ es una $S^{\mu^+}_{\alpha}$-sucesión de clubs.*

Si $C \subseteq \mu^+$ es un club en μ^+, entonces C tiene por lo menos un ordinal de cofinalidad α pues $\alpha < \mu^+$ y por tanto $C \cap S^{\mu^+}_{\alpha} \neq \emptyset$, en consecuencia $S^{\mu^+}_{\alpha}$ es un conjunto estacionario de μ^+.

El siguiente lema aparece como una afirmación dentro de la demostración del lema 13 en [BGVV17].

Lema 3.2.12. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP, que tiene MAG y es λ-categórica, $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$ un cardinal y $\alpha, \gamma < \mu^+$ ordinales límites con α regular. Dados $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, entonces existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\mu^+}$ tal que para todo $i < \mu^+$ se cumple:*

(i) $\mathcal{N}_{i+1}$ *es* (μ, γ)*-límite sobre* $\mathcal{N}_i$*,*

(ii) cuando $i \in S^{\mu^+}_\alpha$*, existe un isomorfimo* $g_i : \bigcup_{j<\alpha} \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_i$ *tal que* $g_i[\mathcal{M}_j] = \mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$ *para todo* $j < \alpha$ *y*

(iii) si $i \in S^{\mu^+}_\alpha$*, entonces existe* $a_i \in N_{i+1}$ *tal que* $a_i \models g_i(p)$*.*

Demostración. La $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+} \subset \mathcal{K}_\mu$ la construiremos de manera recursiva sobre μ^+ de la siguiente manera.

En primer lugar notemos que como $\mathcal{K}$ tiene MAG, entonces por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (1.1.1.5) tenemos que $\mathcal{K}_{\mu^+} \neq \emptyset$ y por tanto existe $\mathcal{N}'_0 \in \mathcal{K}_{\mu^+}$. Al aplicar JEP a $\mathcal{M}_0$ y $\mathcal{N}'_0$, tenemos que existen $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{N}'_0 \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}$ y una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$. Definamos $\mathcal{N}_0 := f[\mathcal{M}_0]$.

Supongamos que para $i < \mu^+$ tenemos construido $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu$. Como $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu < \lambda$, entonces por el teorema 2.1.2 tenemos que $\mathcal{K}$ es μ-estable y al utilizar el corolario 2.2.10 tenemos que existe $\mathcal{N}_{i+1}$ que es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$. Como $\gamma < \mu^+$ es inmediato que $\mathcal{N}_{i+1} \in \mathcal{K}_\mu$.

Si $i < \mu^+$ es un ordinal límite y para todo $j < i$ tenemos construidos $\mathcal{N}_j \in \mathcal{K}_\mu$, entonces definimos $\mathcal{N}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{N}_j$. Por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*) tenemos que $\mathcal{N}_j \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_i$ para todo $j < i$ y como por hipótesis $i < \alpha < \mu^+$, entonces podemos afirmar que $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\mu$.

De lo anterior resulta inmediato que $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+} \subset \mathcal{K}_\mu$ es una $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que $\mathcal{N}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$ para todo $i < \mu^+$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\beta_{i,0} = 0$ para todo $i \in S^{\mu^+}_\alpha$, esto es $0 \in C_i$ para todo $i \in S^{\mu^+}_\alpha$ y por tanto tiene sentido definir $\mathcal{N}_{\beta_{i,0}} := f[\mathcal{M}_0] \approx \mathcal{M}_0$ para todo $i \in S^{\mu^+}_\alpha$.

Verifiquemos ahora la condición (ii) del lema. Para ello sean $i \in S^{\mu^+}_\alpha$ y $\langle \beta_{i,j} \rangle_{j \leq i}$ una enumeración creciente de $C_i \cup \{i\}$ (definición 3.2.10). Por la observación hecha en el párrafo anterior, es claro que existe un isomorfismo $f_{i,0} := f : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta_{i,0}}$. Si tenemos que para $j < \alpha$ existe un isomorfismo $f_{i,j} : \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$, entonces teniendo en cuenta que por la construcción de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+}$ se cumple que $\mathcal{N}_{\beta_{i,j+1}}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$[1] y como $\mathcal{M}_{j+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{M}_j$, entonces al utilizar el lema 2.2.12 (unicidad de modelos límite con la misma cofinalidad) tenemos que existe un isomorfismo $f_{i,j+1} : \mathcal{M}_{j+1} \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta_{i,j+1}}$ que extiende a $f_{i,j}$. Si $j < i$ es un ordinal límite y tenemos que $\langle f_{i,k} : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta_{i,k}} \rangle_{k<j}$ es una $\subseteq$-sucesión creciente de isomorfismos, entonces claramente $f_{i,j} := \bigcup_{k<j} f_j : \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$ es un isomorfismo pues es la unión de isomorfismos pues es la unión de una $\subseteq$-cadena creciente continua de isomorfismos. De lo anterior es inmedia-

[1]Para ver que $\mathcal{N}_{\beta_{i,j+1}}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$ puede ser necesario utilizar el lema 2.2.4 pues es posible que $\beta_{i,j} + 1 \leq \beta_{i,j+1}$.

to que $g_i := \bigcup_{j<i} f_j : \bigcup_{j<i} \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_i$ es un isomorfismo pues es la unión de una $\subseteq$-cadena creciente de isomorfismo.

Para verificar la condición (iii) notemos que si $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$, entonces $g_i(p) \in ga - S(\mathcal{N}_i)$ pues $g_i : \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ es un isomorfismo por (ii) y como por construcción de la $\prec^u_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+}$ tenemos que $\mathcal{N}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$, entonces $\mathcal{N}_{i+1}$ es en particular universal sobre $\mathcal{N}_i$. Además como $g_i(p) \in ga - S(\mathcal{N}_i)$, lo anterior implica que existe $a_i \in N_{i+1}$ tal que $a_i \vDash g_i(p)$ gracias a la afirmación 2.2.3. $\boxed{3.2.12}$

Observación 3.2.13. *Sea $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+} \subset \mathcal{K}_\mu$ la sucesión creciente continua dada por el lema 3.2.12. Es fácil ver que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_{\mu^+}$ pues para todo $i < \mu^+$ tenemos que $|N_i| = \mu$, por tanto al aplicar la proposición 2.1.8 tenemos que existe una $\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión $F : \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_{\mu^+} \longrightarrow EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y en consecuencia sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$. Por construcción nosotros tenemos que para todo $i \in S^{\mu^+}_\alpha$ existe $a_i \in N_{i+1}$ tal que $a_i \vDash g_i(p)$ y por el párrafo anterior se cumple que $\mathcal{N}_i \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ para todo $i < \mu^+$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) concluimos que $\mathcal{N}_{i+1} \prec^u_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ para todo $i < \mu^+$. Por tanto existen un $\mathcal{L}'$-término τ_i con $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}(\mathcal{K})$ el lenguaje dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) y $\xi^i_1 < \cdots < \xi^i_{m(i)} < i < \xi^i_{m(i)+1} < \cdots < \xi^i_{n(i)} < \cdots < \mu^+$ donde $m(i), n(i) \in \mathbb{N}$ tales que $a_i = \tau_i\left(\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{m(i)}, \xi^i_{m(i)+1}, \ldots, \xi^i_{n(i)}\right)$.*

Como lo exponen Boney, Grossberg, VanDieren y Vasey en [BGVV17], que la relación de no μ-ruptura tenga continuidad universal y no tenga alternaciones límites puede deducirse de la categoricidad de una AEC $\mathcal{K}$ utilizando subestructuras elementales que tienen suficiente información de cierto $H(\chi)$, donde $H(\kappa)$ denota la familia de todos los conjuntos hereditariamente de cardinalidad $< \kappa$; esto es que $x \in H(\kappa)$ tiene tamaño $< \kappa$; y todo elemento de x tiene cardinalidad $< \kappa$; y todo elemento de todo elemento de x tiene tamaño $< \kappa$; y así sucesivamente. Lo anterior lo utilizamos para traducir las propiedades de una $S^{\mu^+}_{\alpha}$-sucesión de clubs de manera funtorial a $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y la categoricidad es utilizada para garantizar que toda estructura en $\mathcal{K}_{[\mu,\mu^+]}$ se puede sumergir en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ (proposición 2.1.8).

En [BGVV17] para demostrar que la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en ordinales regulares (lema 13.(1) en [BGVV17]), los autores toman como hipótesis que toda estructura en $\mathcal{K}_{[\mu,\mu^+]}$ puede sumergirse en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y utilizan el lema de Fodor. Como nosotros demostramos en la proposición 2.1.8 que esto se sigue de la λ-categoricidad para $\lambda > \mu$, entonces la única hipótesis que nosotros utilizaremos en la adaptación del resultado al contexto de las Q-AECs será la λ-categoricidad y como el lema de Fodor es fundamental, lo enunciaremos a continuación.

Hecho 3.2.14 (lema de Fodor, teorema 8.7 en [Jec03])**.** *Si f es una función regresiva sobre un conjunto estacionario S de un cardinal κ, entonces existe un estacionario $T \subset S$ y algún $\gamma < \kappa$ tales que $f(\alpha) = \gamma$ para todo $\alpha \in T$.*

Lema 3.2.15 (cf. lema 13.(1) en [BGVV17])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu, \lambda \geq LS(\mathcal{K})$ cardinales tales que $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$ y $\alpha < \mu^+$ un ordinal regular. Si $\mathcal{K}$ es λ-categórica, entonces la relación de μ-ruptura tiene continuidad universal en α.*

Demostración. Por el lema 3.2.6, para demostrar el lema es suficiente tomar una $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, ω)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_i}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$ para todo $i < \alpha$. Para llegar a una contradicción, supongamos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$.

Por la observación 3.2.11 sabemos que existe una $S^{\mu^+}_\alpha$-sucesión de clubs (definición 3.2.10) no vacía $\overline{C} = \{C_\delta : \delta \in S^{\mu^+}_\alpha \text{ y } C_\delta \text{ es un club}\}$ y al aplicar el lema 3.2.12, tenemos que existe una $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que:

(i) $\mathcal{N}_{i+1}$ es (μ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$,

(ii) cuando $i \in S^{\mu^+}_\alpha$, existe un isomorfimos $g_i : \bigcup_{j<\alpha} \mathcal{M}_j \longrightarrow \mathcal{N}_i$ tal que $g_i[\mathcal{M}_j] = \mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$ para todo $j < \alpha$ y

(iii) si $i \in S^{\mu^+}_\alpha$, entonces existe $a_i \in N_{i+1}$ tal que $a_i \vDash g_i(p)$.

Por la observación 3.2.13 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ y que para cada $i \in S^{\mu^+}_\alpha$ existen un $\mathcal{L}'$-término τ_i (donde$\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es el lenguaje dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19)) y $\xi^i_1 < \cdots < \xi^i_{m(i)} < i < \xi^i_{m(i)+1} < \cdots < \xi^i_{n(i)} < \cdots < \mu^+$ donde $m(i), n(i) \in \mathbb{N}$ de tal manera que $a_i = \tau_i\left(\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{m(i)}, \xi^i_{m(i)+1}, \ldots, \xi^i_{n(i)}\right)$.

Notemos que para todo $i \in S^{\mu^+}_\alpha$ tenemos que $m(i), n(i) < i$, $\xi^i_1 < \cdots < \xi^i_{m(i)} < i$, $\beta_{i,0} < i$ y la asignación en la enumeración de $\mathcal{L}'$ de τ_i puede ser tomada $< i$, entonces podemos utilizar el lema de Fodor (hecho 3.2.14) y encontrar un conjunto estacionario $S \subseteq S^{\mu^+}_\alpha$, un $\mathcal{L}'$-término τ_*, números $n_*, m_* \in \mathbb{N}$ y ordinales $\xi^*_1, \ldots, \xi^*_{m_*}, \beta_{*,0} < \mu^+$ tales que para todo $i \in S$ tenemos que $\tau_i = \tau_*$, $m(i) = m_*$, $n(i) = n_*$, $\xi^i_1 = \xi^*_1, \ldots, \xi^i_{m(i)} = \xi^*_{m_*}$ y $\beta_{i,0} = \beta_{*,0}$.

Sea

$$E = \{\delta < \mu^+ : \delta \text{ es límite y } EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_\delta\}.$$

Veamos que E es un club. Para ello sea $\langle \delta_j \rangle_{j<\gamma} \subset \mu^+$ con $\gamma < \mu^+$ una sucesión de ordinales límites tales que $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta_j, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{\delta_j}$; como $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\left(\sup_{j<\gamma} \delta_j, \Phi\right) =$

$\bigcup_{j<\gamma} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta_j, \Phi)$ pues los modelos EM se comportan de manera funtorial con los órdenes, entonces

$$\begin{aligned}
\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\left(\sup_{j<\gamma} \delta_j, \Phi\right) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i &= \left(\bigcup_{j<\gamma} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta_j, \Phi)\right) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i, \\
&= \bigcup_{j<\gamma} \left(\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta_j, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right), \\
&= \bigcup_{j<\gamma} \mathcal{N}_{\delta_j} \text{ pues } \delta_j \in \mathsf{E} \text{ para todo } j < \gamma, \\
&= \mathcal{N}_{\sup_{j<\gamma} \delta_j} \text{ pues } \langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+} \text{ es creciente continua.}
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}\left(\sup_{j<\gamma} \delta_j, \Phi\right) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{\sup_{j<\gamma} \delta_j}$ y en consecuencia el conjunto E es cerrado. Para ver que es no acotado, supongamos que existe un ordinal límite $\delta' < \mu^+$ tal que $\delta' \geq \delta$ para todo $\delta \in \mathsf{E}$ y para todo ordinal límite $\delta'' > \delta'$ tenemos que $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\delta'', \Phi) \neq \mathcal{N}_{\delta''}$. Como por la observación 3.2.13 se cumple $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$, entonces para todo ordinal límite $\delta'' > \delta'$ existe un ordinal $\beta_{\delta''} < \mu^+$ tal que $\mathcal{N}_{\delta''} \subset \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\beta_{\delta''}, \Phi)$, si $\mathcal{N}_{\delta''} = \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\beta_{\delta''}, \Phi)$ tome $\beta_{\delta''} + 1$, y por tanto

$$\mathcal{N}_{\delta''} = \mathcal{N}_{\delta''} \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \subset \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\beta_{\delta''}, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i; \tag{3-1}$$

en consecuencia para los ordinales límites $\delta'' > \delta'$ tenemos

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i &= \bigcup_{\delta'<\delta''<\mu^+} \mathcal{N}_{\delta''} \text{ pues } \langle \delta'' \rangle_{\delta''<\mu^+} \text{ es cofinal en } \mu^+, \\
&\subset \bigcup_{\delta'<\delta''<\mu^+} \left(\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\beta_{\delta''}, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \right) \text{ por 3-1}, \\
&= \left(\bigcup_{\delta'<\delta''<\mu^+} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\beta_{\delta''}, \Phi) \right) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i, \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \text{ pues } \langle \delta'' \rangle_{\delta''<\mu^+} \text{ es cofinal en } \mu^+, \\
&= \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \text{ pues } \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi) \text{ por 2.1.8.}
\end{aligned}$$

Por tanto $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \subset \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i$, lo cual es contradictorio. De lo anterior concluimos que E es un club.

Ahora bien, como $S^{\mu^+}_{\alpha}$ es un estacionario en μ^+ (observación 3.2.11) y E es un club en μ^+, entonces podemos tomar $i_1, i_2 \in S \cap E$ tales que $i_1 < i_2$ y en consecuencia para $k = 1, 2$ tenemos que:

1. $\mathcal{N}_{i_1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{i_2}$ pues $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente,

2. $a_{i_k} = \tau_*(\chi^*_1, \ldots, \xi^*_{m^*}, \xi^{i_k}_{m^*+1}, \ldots, \xi^{i_k}_{n_*})$ y

3. $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_k, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} = \mathcal{N}_{i_k}$.

Por tanto

$$\begin{aligned}
ga-tp\left(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right) &= ga-tp\left(\tau_*(\chi^*_1, \ldots, \chi^*_{m^*}, \chi^{i_1}_{m^*+1}, \ldots, \chi^{i_1}_{n_*})/\left(\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_1, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right), \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right) && \text{(3-2)} \\
&= ga-tp\left(\tau_*(\chi^*_1, \ldots, \chi^*_{m^*}, \chi^{i_2}_{m^*+1}, \ldots, \chi^{i_2}_{n_*})/\left(\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_1, \Phi) \cap \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right), \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right) && \text{(3-3)} \\
&= ga-tp\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right). && \text{(3-4)}
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se tiene pues a_{i_1} y a_{i_2} vistos como sucesiones de elementos de $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$ son generados por sucesiones de indiscernibles y por tanto $\tau_*(\xi_1^*, \ldots, \xi_{m^*}^*, \xi_{m^*+1}^{i_1}, \ldots, \xi_{n_*}^{i_1}) = \tau_*(\xi_1^*, \ldots, \xi_{m^*}^*, \xi_{m^*+1}^{i_2}, \ldots, \xi_{n_*}^{i_2})$ es verdadera una $\mathcal{L}'$-sentencia verdadera. Para terminar, notemos que como por hipótesis tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$ y por el lema 3.2.12.(ii) tenemos que $g_{i_1} : \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_{i_1}$ es un isomorfismo tal que $g_{i_1}[\mathcal{M}_0] = \mathcal{N}_{\beta_{*,0}}$, entonces por la invarianza de la relación de ruptura (lema 3.1.11) tenemos que $g_{i_1}(p) = ga - tp\left(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right)$ μ-rompe sobre $g_{i_1}[\mathcal{M}_0] = \mathcal{N}_{\beta_{*,0}}$. Por otro lado, notemos que como C_{i_2} es un club en i_2 e $i_1 < i_2$, entonces existe $k < \alpha$ tal que $\beta_{i_2,k} > i_1$ y en consecuencia $\mathcal{N}_{\beta_{i_2,k}} \succ_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_{i_1}$; además como tenemos por hipótesis que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_k}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$ y por el lema 3.2.12.(ii) tenemos además que $g_{i_2} : \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_{i_2}$ es un isomorfismo tal que $g_{i_2}[\mathcal{M}_0] = \mathcal{N}_{\beta_{*,0}}$, entonces al aplicar la invarianza de la relación de no ruptura (lema 3.1.11) concluimos que $g_{i_2}(p \upharpoonright_{\mathcal{M}_k}) = ga - tp\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{\beta_{i_2,k}}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right)$ (esta igualdad se tiene pues $g_{i_2}[\mathcal{M}_k] = \mathcal{N}_{\beta_{i_2,k}}$) no μ-rompe sobre $g[\mathcal{M}_0] = \mathcal{N}_{\beta_{*,0}}$. Como tenemos que $\mathcal{N}_{\beta_{*,0}} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_{i_1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_{\beta_{i_2,k}}$, entonces al aplicar la monotonía de la relación de ruptura tenemos que $ga - tp\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{\beta_{i_2,j}}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right) \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i_1}} = ga - tp\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right)$ no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{\beta_{*,0}}$ y por tanto $ga - tp\left(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right) \neq ga - tp\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_1}, \bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i\right)$, lo cual contradice 3-4. En consecuencia p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$. $\boxed{3.2.15}$

Para deducir de la categoricidad de una AEC $\mathcal{K}$ que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones límites, en [SV99] y en [BGVV17] utilizan la $S_\alpha^{\mu^+}$-sucesión de clubs dada por el siguiente hecho del cual se puede encontrar una demostración detallada en [AM10].

Hecho 3.2.16 (sección III. 2 en [She94] o teorema 2.17 en [AM10]). *Sean θ y λ dos cardinales tales que $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \theta^{++}$ con θ regular y $S \subseteq S_\theta^\lambda$ un conjunto estacionario de λ. Entonces existe una*

S-sucesión de clubs $\langle C_\delta\rangle_{\delta\in S}$ tal que si E es un club de λ, entonces existe $\delta \in S$ tal que $C_\delta \subset E$.

A continuación nosotros enunciaremos y demostraremos que en una Q-AEC $\mathcal{K}$ categórica, la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones límites para ordinales adecuados. Como en el lema anterior, por el lema 2.1.8 es suficiente suponer que la Q-AEC sea λ categíirica para demostrar el resultado.

Lema 3.2.17 (cf. lema 13.(2) en [BGVV17])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu, \lambda \geq LS(\mathcal{K})$ cardinales tales que $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$ y $\alpha < \mu$ un ordinal regular. Si $\mathcal{K}$ es λ-categórica, entonces para todo ordinal límite $\gamma < \mu^+$ la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites en α.*

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Para ello supongamos que existen una $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i\rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ,γ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$ y un tipo de Galois $p \in ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha}\mathcal{M}_i\right)$ tal que $p\restriction_{\mathcal{M}_{2i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$ y $p\restriction_{\mathcal{M}_{2i+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i+1}$ para todo $i < \alpha$.

En primer lugar notemos que como por hipótesis tenemos que $\alpha < \mu$ es un ordinal límite, entonces $\alpha^{++} \leq cf(\mu^+) = \mu^+$ y como $S^{\mu^+}_{\alpha}$ es un estacionario en μ^+ (observación 3.2.11), entonces por el hecho 3.2.16 existe una $S^{\mu^+}_{\alpha}$-sucesión $\langle C_i\rangle_{i\in S^{\mu^+}_{\alpha}}$ de clubs tal que para todo club $E \subseteq \mu^+$, existe $\delta \in S^{\mu^+}_{\alpha}$ tal que $C_\delta \subset E$. Por el lema 3.2.12 tenemos que existe una $\prec^{\mu}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{N}_i\rangle_{i<\mu^+}$ tal que

(i) $\mathcal{N}_{i+1}$ es (μ,γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$ para todo $i < \mu^+$,

(ii) cuando $i \in S^{\mu^+}_{\alpha}$, existe un isomorfimos $g_i : \bigcup_{j<\alpha}\mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ tal que $g_i[\mathcal{M}_j] = \mathcal{N}_{\beta_{i,j}}$ para todo $j < \alpha$ y

(iii) si $i \in S^{\mu^+}_{\alpha}$, entonces existe $a_i \in N_{i+1}$ tal que $a_i \vDash g_i(p)$.

Por la observación 3.2.13 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bigcup_{i<\mu^+} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$.

Sea χ un cardinal lo suficientemente grande tal que $H(\chi)$ tiene como elementos al cianotipo Φ, el modelo $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$, a la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+}$[2], a μ^+, al conjunto estacionario $S^{\mu^+}_{\alpha} \subseteq \mu^+$, a la sucesión $\langle a_i \rangle_{i \in S^{\mu^+}_{\alpha}}$ y a todo símbolo de función de $\mathcal{L}'$ donde $\mathcal{L}'$ es el lenguaje que extiende a $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ dado por el teorema de Presentación (teorema 1.1.19).

Con ayuda del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente en el lenguaje de la teoría de conjuntos, podemos construir una $\prec$-sucesión estrictamente creciente continua de modelos de la teoría de conjuntos ZFC $\langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+}$ tal que:

- $\mathfrak{B}_i \prec (H(\chi), \in)$ para todo $i < \mu^+$,
- $\|\mathfrak{B}_i\| = \mu$ para todo $i < \mu^+$,
- $\mathfrak{B}_0$ tiene como elementos a Φ, $\mathsf{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu^+, \Phi)$, $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\mu^+}$, $\langle a_i \rangle_{i \in S^{\mu^+}_{\alpha}}$, μ^+ y todo símbolo de función de $\mathcal{L}'$ y
- $\mathfrak{B}_i \cap \mu^+$ es un ordinal para todo $i < \mu^+$.

Sea

$$E_1 := \{i < \mu^+ : \mathfrak{B}_i \cap \mu^+ = i\}.$$

Veamos que es cerrado, para ello sea $\langle i_j \rangle_{j<\gamma}$ con $\gamma < \mu^+$ una sucesión creciente de elemen-

[2]Diremos que $H(\kappa)$ tiene una sucesión como elemento si tiene como elemento la función que envía al índice en el elemento de la sucesión.

tos de E_1, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{\sup\limits_{i<\gamma} i_j} \cap \mu^+ &= \left(\bigcup_{j<\gamma} \mathfrak{B}_{i_j}\right) \cap \mu^+ \text{ pues } \langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+} \text{ es creciente continua,}\\
&= \bigcup_{j<\gamma} \left(\mathfrak{B}_{i_j} \cap \mu^+\right),\\
&= \bigcup_{j<\gamma} i_j \text{ pues para todo } j<\gamma \text{ tenemos } \mathfrak{B}_{i_j} \cap \mu^+ = i_j,\\
&= \sup_{j<\gamma} i_j
\end{aligned}$$

y por tanto $\sup\limits_{j<\gamma} i_j \in E_1$.

Veamos ahora que E_1 es no acotado. Para ello sea $f : \mu^+ \longrightarrow \mu^+$ una función definida como $f(i) := \mathfrak{B}_i \cap \mu^+$. Veamos que f es estrictamente creciente y continua, es decir que es una función normal. En fecto si $k, j \in E_1$ son tales que $k < j < \mu^+$, entonces como la $\prec$-sucesión $\langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+}$ es estrictamente creciente, tenemos que $\mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_j$ y por tanto $\mathfrak{B}_k \cap \mu^+ < \mathfrak{B}_j \cap \mu^+$ pues por la escogencia de la $\prec$-sucesión $\langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+}$ tenemos que $\mathfrak{B}_i \cap \mu^+$ es un ordinal para todo $i < \mu^+$, entonces $f(k) < f(j)$. Sea $j < \mu^+$ un ordinal límite y $\langle j_k \rangle_{k<cf(j)}$ una sucesión cofinal en j, entonces

$$\begin{aligned}
f(j) &= \mathfrak{B}_j \cap \mu^+,\\
&= \left(\bigcup_{k<cf(j)} \mathfrak{B}_{j_k}\right) \cap \mu^+ \text{ pues } \langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+} \text{ es una } \prec\text{-sucesión continua,}\\
&= \bigcup_{k<cf(j)} \left(\mathfrak{B}_{j_k} \cap \mu^+\right),\\
&= \sup_{k<cf(j)} f(j_k),
\end{aligned}$$

por tanto f es continua. Al utilizar el lema del punto fijo para funciones normales tenemos que f tiene puntos fijos arbitrariamente altos y por tanto E_1 es no acotado.

Lo anterior implica que E_1 es un club en μ^+. Sea

$$E_2 = \{i < \mu^+ : i \text{ es límite y } \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i, \Phi) \cap \bigcup_{j<\mu^+} \mathcal{N}_j = \mathcal{N}_i\}$$

el club dado en la demostración del lema 3.2.15. Como E_1 y E_2 son clubs en μ, entonces $E := E_1 \cap E_2$ es también un club en μ^+ (lema 8.2 en [Jec03]).

Por la escogencia de la S^+_α-sucesión de clubs $\langle C_i \rangle_{i \in S^{\mu^+}_\alpha}$, tenemos que existe $i_1 \in S^{\mu^+}_\alpha$ tal que $C_{i_1} \subset E$. Por la observación 3.2.13 tenemos que existen un $\mathcal{L}'$-término τ_{i_1}, naturales $m(i_1)$ y $n(i_1)$ y ordinales $\xi^{i_1}_1 < \cdots < \xi^{i_1}_{m(i_1)} < i_1 < \xi^{i_1}_{m(i_1)+1} < \cdots < \xi^{i_1}_{n(i_1)} < \mu^+$ tales que $a_{i_1} = \tau_{i_1}\left(\xi^{i_1}_1, \ldots, \xi^{i_1}_{m(i_1)}, \xi^{i_1}_{m(i_1)+1}, \ldots, \xi^{i_1}_{n(i_1)}\right)$. Como C_{i_1} es un club en i_1 y siendo $\langle \beta_{i_1,j} \rangle_{i<\alpha}$ una enumeración de $C_{i_1} \cup \{i_1\}$, entonces existe $j < \alpha$ tal que $\xi^{i_1}_{m(i_1)} < \beta_{i_1,2j+1} < i_1$. Notemos que como $i_1 \in E$, en particular tenemos que $i_1 \in E_2$ y por tanto $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \bigcup_{j<\mu^+} \mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{i_1}$; intersecando a ambos lados de la igualdad por $\mathcal{N}_{i_1}$ tenemos que $\left(\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \bigcup_{j<\mu^+} \mathcal{N}_j\right) \cap \mathcal{N}_{i_1} = \mathcal{N}_{i_1}$ y como

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \bigcup_{j<\mu^+} \mathcal{N}_j\right) \cap \mathcal{N}_{i_1} &= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \left(\bigcup_{j<\mu^+} \mathcal{N}_j \cap \mathcal{N}_{i_1}\right), \\ &= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \mathcal{N}_{i_1},\end{aligned}$$

entonces se cumple que $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) \cap \mathcal{N}_{i_1} = \mathcal{N}_{i_1}$ y por tanto $\mathcal{N}_{i_1} \subset \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi)$, en consecuencia $H(\chi, \in)$ satisface la siguiente sentencia φ

$$\begin{aligned}\varphi : \exists x, y_{m(i_1)+1}, \ldots, y_{n(i_1)} \quad & (\text{“}x \in S^{\mu^+}_\alpha\text{”} \wedge \text{“}x > \beta_{i_1,2j+1}\text{”} \wedge \text{“}\langle y_k \rangle_{m(i_1)+1 \leq k \leq n(i_1)} \subset (x, \mu^+) \\ & \text{es una sucesión creciente de ordinales”} \\ & \text{“}a_x = \tau_{i_1}\left(\xi^{i_1}_1, \ldots, \xi^{i_1}_{m(i_1)}, y_{m(i_1)+1,}, \ldots, y_{n(i_1)}\right)\text{”} \\ & \wedge \text{“}\mathcal{N}_x \subset \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(x, \Phi)\text{”}).\end{aligned}$$

Claramente $i_1, \chi^{i_1}_{m(i_1)+1}, \ldots, \chi^{i_1}_{n(i)}$ atestiguan que la sentencia es verdadera en $\mathfrak{B}_{i_1}$. Como $C_{i_1} \subset E$, entonces $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+1}} \cap \mu^+ = \beta_{i_1,2j+1}$ y por tanto todos los parámetros de la sentencia están en $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+1}}$. Además como $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+1}} \prec \mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}} \prec \mathfrak{B}_{i_1}$, entonces $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}}$ también satisface la sentencia. De nuevo como tenemos que $C_{i_1} \subset E$, entonces $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}} \cap \mu^+ = \beta_{i_1,2j+2}$ y por tanto $(\beta_{i_1,2j+1}, \mu) \cap \mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}} = (\beta_{i_1,2j+1}, \beta_{i_1,2j+2})$. Sean $i_2 \in (\beta_{i_1,2j+1}, \beta_{i_1,2j+2})$ y $\chi'_{m(i_1)+1} < \ldots < \chi'_{n(i)} < \mu^+$ testigos en $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}}$ de la sentencia, entonces tenemos que $a_{i_2} = \tau_{i_1}\left(\xi^{i_1}_1, \ldots, \xi^{i_1}_{m(i_1)}, \chi'_{m(i_1)+1}, \ldots, \chi'_{n(i)}\right)$ y $\beta_{i_1,2j+1} < i_2 < \chi'_{m(i_1)+1} < \ldots < \chi'_{n(i)}$.

Como $\xi^{i_1}_{m(i_1)} < \beta_{i_1,2j+1} < i_2 < \beta_{i_1,2j+2} < i_1$ y $\langle \mathfrak{B}_i \rangle_{i<\mu^+}$ es una $\prec$-sucesión creciente continua, entonces tenemos que $\mathcal{N}_{i_1} \subset EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_1, \Phi)$ y que $\mathcal{N}_{i_2} \subset EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi)$, entonces $\mathcal{N}_{i_2} \cap EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_2, \Phi) = \mathcal{N}_{i_2}$ y $\mathcal{N}_{i_1} \cap EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(i_1, \Phi) = \mathcal{N}_{i_1}$ y como en la prueba del lema 3.2.15, concluimos que $ga - tp\,(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C}) = ga - tp\,(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C})$ pues $\mathcal{N}_{i_2} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{i_1}$.

Notemos que como por hipótesis $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2j+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2j+1}$, entonces por la invarianza de la relación de no μ-ruptura (lema 3.1.11) tenemos que $g_{i_1}\left(p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2j+2}}\right) = ga - tp\left(a_{i_1}/\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+2}}, \mathbb{C}\right)$ no μ-rompe sobre $g_{i_1}[\mathcal{M}_{2j+1}] = \mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}}$. Como $\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{i_2} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+2}}$ pues $\beta_{i_1,2j+1} < i_2 < \beta_{i_1,2j+2}$, entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura tenemos que $ga - tp\left(a_{i_1}/\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+2}}, \mathbb{C}\right) \upharpoonright_{\mathcal{N}_{i_2}} = ga - tp\,(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C})$ no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}}$.

Por último como i_2 es testigo de la validez de la sentencia en $\mathfrak{B}_{\beta_{i_1,2j+2}}$, entonces $i_2 \in S^{\mu^+}_{\alpha}$ y $\beta_{i_1,2j+1} < i_2$; además como C_{i_2} es un club en i_2, entonces existe $k < \alpha$ tal que $\beta_{i_1,2j+1} < \beta_{i_2,2k}$ y por tanto $\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\beta_{i_2,2k}}$. Como por hipótesis tenemos que $p \upharpoonright \mathcal{M}_{2i+1}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$ para todo $i < \alpha$, entonces por la invarianza de la relación de no ruptura (lema 3.1.11) $g_{i_2}\left(p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2k+1}}\right) = ga - tp\,(a_{i_2}/\mathcal{N}_{\beta i_2,2k+1}, \mathbb{C})$ μ-rompe sobre $g_{i_2}[\mathcal{M}_{2k}] = \mathcal{N}_{\beta i_2,2k}$; además como

$\beta_{i_1,2j+1} < \beta_{i_2,2k} < \beta_{i_2,2k+1} < i_2$, entonces tenemos que $\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\beta_{i_2,2k}} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{\beta_{i_2,2k+1}} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$ $\mathcal{N}_{i_2}$ y al utilizar la transitividad de la relación de ruptura (observación 3.1.2) concluimos que $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}\,(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C})$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{\beta_{i_1,2j+1}}$ pues $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}\,(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C}) \restriction_{\mathcal{N}_{\beta_{i_2,2k+1}}} = \mathrm{ga}-\mathrm{tp}\left(a_{i_2}/\mathcal{N}_{\beta_{i_2,2k+1}}, \mathbb{C}\right)$, lo cual contradice que $\mathrm{ga}-\mathrm{tp}\,(a_{i_1}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C}) = \mathrm{ga}-\mathrm{tp}\,(a_{i_2}/\mathcal{N}_{i_2}, \mathbb{C})$.

$\boxed{3.2.17}$

Los siguientes lemas técnicos nos serán de utilidad al momento de unir todos los resultados para lograr demostrar que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte suponiendo que $\mathcal{K}$ satisfaga AP, JEP, tenga MAG y sea λ-categórica. A diferencia de los lemas 3.2.15 y 3.2.17, para la demostración de los siguientes resultados lo único que utilizaremos de la teoría de conjuntos será la hipótesis generalizada del continuo.

En [BGVV17], los autores demuestran que para un cardinal $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ y todo ordinal límite $\gamma < \mu^+$ si la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ, entonces la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites. Como por la observación 3.1.7 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ si $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$, entonces será suficiente suponer que $\mathcal{K}$ es λ-categórica.

Lema 3.2.18 ((GCH) cf. lema 10 en [BGVV17])**.** *Si $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP, MAG y que es λ-categórica, entonces para todo $\mu < \lambda$ y todo $\delta < \mu^+$ la relación de μ-ruptura no tiene alternaciones en δ-límites en μ.*

Demostración. En primer lugar notemos que como estamos suponiendo la hipótesis generalizada del continuo, entonces por la observación 3.1.7 tenemos que para todo $\mu < \lambda$ la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ.

Para llegar a una contradicción, supongamos que la relación de μ-ruptura tiene alternaciones en δ-límites en μ. Es último quiere decir que existen una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\mu}$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i\right)$ tales que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$ y $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+2}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i+1}$ para todo $i < \mu$. Notemos que como $\mathcal{M}_{2i+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i+2}$, entonces $\left(p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+2}}\right) \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+1}} = p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+1}}$ y como $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$, al aplicar la observación 3.1.2 (transitividad de la relación de ruptura) podemos deducir que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+2}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$ para todo $i < \mu$. Como para todo $i < \mu$ tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$, entonces al aplicar el lema 2.2.4 podemos concluir que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \mu$ y al aplicar de nuevo el lema 2.2.4, inferimos que $\mathcal{M}_{2i+2}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$ pues M_{2i+1} es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$ y $\mathcal{M}_{2i+1} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{2i+2}$. De lo anterior tenemos que $\langle \mathcal{M}_{2i} \rangle_{i<\mu}$ es una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que $\mathcal{M}_{2(i+1)} = \mathcal{M}_{2i+2}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{2i}$ y como $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_{2i}\right) = ga - S\left(\bigcup_{i<\mu} \mathcal{M}_i\right)$ es tal que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2(i+1)}} = p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{2i+2}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{2i}$ para todo $i < \mu$, entonces tenemos que la relación de μ-ruptura no tiene carácter local universal débil en μ, lo cual contradice la categoricidad de $\mathcal{K}$ por el corolario 3.1.7. $\boxed{3.2.18}$

La siguiente proposición está como una afirmación dentro de la demostración de 11.(1) en [BGVV17] para el contexto de las AECs. Nosotros adaptamos la demostración al contexto de las Q-AECs con todo detalle para la completez del documento.

Proposición 3.2.19. *Supongamos que la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en α y sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. Si $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ es tal que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, entonces para todo $i < \alpha$ existe $j_i \in (i, \alpha)$ tal que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_{j_i}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Para ello supongamos que existe $i_0 < \alpha$ tal que para todo $j \in (i_0, \alpha)$ tenemos que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_j}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_0}$. En primer lugar notemos que como la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subsucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{i_0 \leq j < \alpha}$ es cofinal en la sucesión dada $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$, entonces $\bigcup_{i_0 \leq j < \alpha} \mathcal{M}_j = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y por tanto $p \in ga - S\left(\bigcup_{i_0 \leq j < \alpha} \mathcal{M}_j \right)$; además como se tiene que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, en particular tenemos que $\mathcal{M}_{j+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_j$ para todo $j \in [i_0, \alpha)$ y como el primer elemento de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-subsucesión $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{i_0 \leq j < \alpha}$ es $\mathcal{M}_{i_0}$, entonces al aplicar la continuidad universal en α de la relación de no μ-ruptura, tenemos que p no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_0}$ pues hicimos el supuesto que $p \upharpoonright_{\mathcal{M}_j}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_0}$. Esto último es contradictorio pues por hipótesis tenemos que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$. $\boxed{3.2.19}$

Observación 3.2.20. *Supongamos que la relación de no ruptura tiene continuidad universal en α. Con ayuda de la proposición 3.2.19 podemos construir de manera recursiva una sucesión creciente de ordinales $\langle k_i < \alpha \rangle_{i<cf(\alpha)}$ de la siguiente manera:*

- *Para $i = 0$, definimos $k_0 := 0$.*
- *Supongamos que para $i < cf(\alpha)$ tenemos definido $k_i < \alpha$. Para el sucesor de i, definimos $k_{i+1} := j_{k_i}$. Por la elección de j_{k_i} tenemos que $j_{k_i} \in (k_i, \alpha)$ y por tanto $k_i < k_{i+1} < \alpha$.*
- *Si $i < cf(\alpha)$ es un ordinal límite y para todo $j < i$ tenemos definido $k_j < \alpha$. Definimos entonces $k_i := \sup_{j<\alpha} k_j$. Notemos que como $i < cf(\alpha)$ y para todo $j < i$ tenemos que $k_j < \alpha$, entonces $k_i < \alpha$.*

Claramente $\langle k_i \rangle_{i<cf(\alpha)}$ es cofinal en α.

En [BGVV17] el siguiente lema está enunciado para el contexto de las AECs y dice que el carácter local universal fuerte de la relación de no μ-ruptura se deduce del carácter local universal débil de la relación de no μ-ruptura y de la continuidad universal de la relación de no μ-ruptura. Por el lema 3.2.15, en nuestro desarrollo es suficiente suponer la GCH y la λ-categoricidad de la Q-AEC.

Lema 3.2.21 ((GCH) cf. lema 11.(1) en [BGVV17])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC $\mu < \lambda$ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal regular. Si $\mathcal{K}$ es λ-categórica y la relación de no μ-ruptura tiene carácter local univesal débil en α, entonces la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α.*

Demostración. Supongamos que la conclusión no se tiene, es decir existen una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$.

Como por hipótesis $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\alpha < \mu^+$ es un ordinal regular, entonces al aplicar el lema 3.2.15 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en α y por la proposición 3.2.19, tenemos que para todo $i < \alpha$ existe $j_i \in (i, \alpha)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_i}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$. Construiremos de manera recursiva con ayuda de la sucesión de ordinales $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ dada en la observación 3.2.20 y de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}'_i \in \mathcal{K}_\mu \rangle_{i<\alpha}$ de la siguiente manera.

- Para $i = 0$, definimos $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_{k_0} = \mathcal{M}_0$.

- Sea $i < \alpha$ un ordinal y supongamos que $\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_i}$. Definamos $\mathcal{M}'_{i+1} := \mathcal{M}_{k_{i+1}} = \mathcal{M}_{j_{k_i}}$. Notemos que como $k_{i+1} = j_{k_i} \in (k_i, \alpha)$ por la proposición 3.2.19 y la observación 3.2.20, entonces $k_{i+1} \geq k_i + 1$ y por tanto tenemos que $\mathcal{M}'_{i+1} = \mathcal{M}_{k_i+1}$ o $\mathcal{M}'_{i+1} \succ^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_i+1}$ pues la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ es creciente continua. Como $\mathcal{M}_{k_i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_{k_i}$, entonces al aplicar el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{M}'_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}'_i$.

- Si $i < \alpha$ es un ordinal límite y supongamos que para todo $j < i$ tenemos que $\mathcal{M}'_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_i}$. Definimos entonces $\mathcal{M}'_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{M}'_j$ y al aplicar los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*), tenemos que $\mathcal{M}'_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_i}$ y de nuevo por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*), concluimos que para todo $j < i$ se cumple que $\mathcal{M}'_j \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'_i$.

Como la sucesión de ordinales $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ es creciente continua, entonces la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha}$ es creciente. La continuidad se tiene del tercer ítem de la construcción de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha}$. Por tanto la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha}$ es creciente y continua y es tal que $\mathcal{M}'_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}'_i$ para todo $i < \alpha$ (recuerde el segundo ítem de la construcción anterior).

Por la observación 3.2.20 tenemos que la sucesión $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ es cofinal en α y por tanto tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, en consecuencia $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}'_i\right) = ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$. Como por hipótesis tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α, por tanto existe $i_p < \alpha$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}'_{i_p+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{i_p}$. Notemos que para i_p tenemos tres opciones.

- Si $i_p = 0$, entonces $\mathcal{M}'_{i_p+1} = \mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}_{k_1} = \mathcal{M}_{j_0}$. Por construcción y por escogencia de la sucesión $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ (proposici 3.2.19 y observación 3.2.20), tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_0}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, esto es $p \restriction_{\mathcal{M}'_{i_p+1}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$ lo cual es contradictorio con la escogencia de i_p.

- Si i_p es un ordinal sucesor, entonces existe $h < \alpha$ tal que $i_p = k_h$ (recuerde la sucesión $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ dada en el hecho 3.2.20) y por tanto $\mathcal{M}'_{i_p+1} = \mathcal{M}_{k_{h+1}} = \mathcal{M}_{j_{k_h}}$. Por la escogencia de la sucesión $\langle k_i \rangle_{i<\alpha}$ (observación 3.2.20) y por la proposición 3.2.19 tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}'_{i_p+1}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{k_{h+1}}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{j_{k_h}}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{i_p} = \mathcal{M}_{k_h}$, lo cual contradice la escogencia de i_p.

- Si i_p es un ordinal límite, entonces por el ítem tres de la construcción de la $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}'_i \rangle_{i<\alpha}$, tenemos que existe tal que $\mathcal{M}'_{i_p} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i_p}$ y por el segundo ítem de la misma construcción, podemos decir que $\mathcal{M}'_{i_p+1} = \mathcal{M}_{j_{k_{i_p}}}$. Notemos además que por la escogencia de i_p se satisface que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_{k_{i_p}}}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{i_p}$ y como $\mathcal{M}_{i_p} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i_p} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{j_{i_p}}$, entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura (observación 3.1.13) tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_{i_p}}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{i_p}$ lo cual es contradictorio pues por la escogencia de j_{i_p} hecha al principio de la prueba, se cumple que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_{k_h}}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{k_h}$.

En conclusión, si la relación de μ-ruptura no tiene carácter local universal fuerte en α, entonces se contradice el carácter local universal débil de la relación de no μ-ruptura.

$\boxed{3.2.21}$

En el siguiente lema, a diferencia de lo hecho en [BGVV17], nosotros sólo suponermos que la clase sea λ-categórica pues con ayuda de los lemas 3.2.15, 3.2.17 y a la observación 3.1.7, nosotros podemos deducir las hipótesis hechas en el lema 11.(4) de [BGVV17] de la λ-categoricidad.

Lema 3.2.22 ((GCH) cf. lema 11.(4) en [BGVV17])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica. Si $\mu < \lambda$ es un cardinal, entonces la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en μ.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que existen una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$ y un tipo de Galois $p \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ tal que para todo $i < \alpha$, p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$. Gracias al lema 3.2.4, la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ puede ser tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i$.

Como por hipótesis $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mathrm{cf}(\mu) \leq \mu < \lambda$ es regular, entonces al aplicar el lema 3.2.15 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en $\mathrm{cf}(\mu)$ y por el lema 3.2.8, concluimos que la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en μ. Como p μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$ para todo $i < \mu$ y la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en μ, entonces por el lema 3.2.19 tenemos que para todo $i < \mu$, existe $j_i \in (i, \mu)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_i}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_i$.

Notemos que para todo $i < \mu$ la sucesión $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{j \in [j_i, \alpha]}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua tal que $\mathcal{M}_{j+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_j$ para todo $j \in [j_i, \alpha]$ pues la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu^+}$ es creciente continua y por el lema 2.2.4, es tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{M}_i$. Por lo anterior y la λ-categoricidad de $\mathcal{K}$, para cada $i < \mu$ podemos aplicar el lema 3.1.9 a la $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena $\langle \mathcal{M}_j \rangle_{j \in [j_i, \alpha]}$ y encontrar un ordinal sucesor $k_i \in (j_i, \sigma)$ tal que $p \restriction_{\mathcal{M}_{k_i+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{k_i}$.

Lo que haremos ahora es definir de manera recursiva una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-sucesión creciente $\langle \mathcal{M}'_n \rangle_{n<\omega}$ tal que $\mathcal{M}'_{n+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_n$. Para $n = 0$, definimos $\mathcal{M}'_0 := \mathcal{M}_0$. Supongamos que para $n < \omega$ tenemos definido $\mathcal{M}'_{2n} = \mathcal{M}_\beta$ para algún $\beta < \mu$. Definimos entonces

$\mathcal{M}'_{2n+1} := \mathcal{M}_{k_\beta}$ y $\mathcal{M}'_{2n+2} := \mathcal{M}_{k_\beta+1}$.

$$\mathcal{M}_0 \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{j_0} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{k_0} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{k_0+1} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{j_{k_0}} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{k_{k_0}} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow}$$

$$\mathcal{M}_\beta \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{j_\beta} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{k_\beta} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{k_\beta+1} \overset{\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}}{\hookrightarrow} \cdots$$

Por como definimos la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}'_n \rangle_{n<\omega}$, esta resulta ser creciente.

Como por el lema 3.1.9 k_β es un ordinal sucesor para todo $\beta < \mu$, entonces para cada $\beta < \mu$ existe $\gamma_\beta < \mu$ tal que $\gamma_\beta + 1 = k_\beta$. Ahora bien, por los lemas 3.2.19 y 3.1.9 tenemos que $\beta < j_\beta < k_\beta$ y por tanto $\beta < j_\beta \leq \gamma_\beta < k_\beta$ para todo $\beta < \mu$; esto implica que $\mathcal{M}_\beta \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{\gamma_\beta} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_\beta}$ para todo $\beta < \mu$ y por el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{M}_{k_\beta}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_{\gamma_\beta}$ para todo $\beta < \mu$ pues la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$ es tal que $\mathcal{M}_{i+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_i + 1$ y $k_\beta = \gamma_\beta + 1$. Al utilizar de nuevo el lema 2.2.4, lo anterior implica que $\mathcal{M}_{k_\beta}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_\beta$ para todo $\beta < \mu$. Por tanto, resulta que $\mathcal{M}_{2n+1} = \mathcal{M}_{k_\beta}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_{2n} = \mathcal{M}_\beta$ y $\mathcal{M}_{2n+2} = \mathcal{M}_{k_\beta+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_{2n+1} = \mathcal{M}_{k_\beta}$ por la escogencia de la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\mu}$. Por tanto la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente $\langle \mathcal{M}'_n \rangle_{n<\omega}$ es tal que $\mathcal{M}_{n+1}$ es (μ, δ)-límite sobre $\mathcal{M}_n$ para todo $n < \omega$.

Por otro lado, como para todo $n < \omega$ tenemos que $\mathcal{M}_n \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \bigcup\limits_{i<\mu} \mathcal{M}_i$, entonces por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{M}'_n \prec_{\mathcal{K}} \bigcup\limits_{i<\mu} \mathcal{M}_i$ y en consecuencia $p \restriction_{\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{M}'_n} \in ga - S\left(\bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{M}'_n\right)$.

Por la escogencia de los j_β para $\beta < \mu$, tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{j_\beta}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_\beta$ y como $\mathcal{M}_{j_\beta} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{k_\beta}$ para todo $\beta < \mu$, entonces por la transitividad de la relación de ruptura (observación 3.1.2) tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{k_\beta}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}_\beta$ pues $\left(p \restriction_{\mathcal{M}_{k_\beta}}\right) \restriction_{\mathcal{M}_{j_\beta}} = p \restriction_{\mathcal{M}_{j_\beta}}$ y por la forma como se escogió k_β para $\beta < \alpha$, tenemos que $p \restriction_{\mathcal{M}_{k_\beta+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_{k_\beta}$. Gracias a la manera como se definió la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente $\langle \mathcal{M}_n \rangle_{n<\omega}$, lo anterior implica que $p\restriction_{\mathcal{M}'_{2n+1}} = p\restriction_{\mathcal{M}_{k_\beta}}$ μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{2n} = \mathcal{M}_\beta$ y que $p\restriction_{\mathcal{M}'_{2n+2}} = p\restriction_{\mathcal{M}_{k_\beta+1}}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{M}'_{2n+1} = \mathcal{M}_{k_\beta}$. Por último, como tenemos que $p\restriction_{\bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n} \subseteq p$ y por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*b*), tenemos que $\mathcal{M}'_n \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n$ para todo $n<\omega$, entonces $\left(p\restriction_{\bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n}\right)\restriction_{\mathcal{M}_{2i+1}} = p\restriction_{\mathcal{M}_{2i+1}}$ y $\left(p\restriction_{\bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n}\right)\restriction_{\mathcal{M}_{2i+2}} = p\restriction_{\mathcal{M}_{2i+2}}$. En conclusión la $\prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}}$-cadena creciente $\langle\mathcal{M}'_n\rangle_{n<\omega}$ y el tipo $p\restriction_{\bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n} \in ga-S\left(\bigcup_{n<\omega}\mathcal{M}'_n\right)$ atestiguan que la relación de no μ-ruptura tiene alternaciones en δ-límites en ω lo cual es contradictorio pues como $\mathcal{K}$ es λ-categórica y ω es un ordinal regular, entonces por el lema 3.2.17 tenemos que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en δ-límites en ω. $\boxed{3.2.22}$

En [BGVV17] para la demostración del siguiente teorema, los autores utilizan un lema (lema 12 en [BGVV17]) que tiene como hipótesis las propiedades que nosotros hemos deducido de categoricidad en los lemas 3.2.15, 3.2.17, 3.1.8, 3.2.18 y la observación 3.1.7. Basándonos en la demostración de dicho lema (lema 12 en [BGVV17]), nosotros presentamos a continuación una demostración donde sólo utilizamos la categoricidad y la hipótesis generalizada del continuo (WGCH) para deducir el carácter local universal fuerte de la relación de no μ-ruptura para todo $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$.

Teorema 3.2.23 ((GCH) cf. teorema 3 en [BGVV17], cf teorema 2.2.1 en [SV99], teorema de Shelah-Villaveces en el contexto de las Q-AECs)**.** *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica que satisface AP, JEP y tiene MAG. Entonces para todo cardinal $\mu \in [LS(\mathcal{K}), \lambda)$ la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en todos los ordinales límite $\alpha < \mu^+$.*

Demostración. En primer lugar notemos que por el lema 3.2.3 es suficiente suponer que α es un ordinal regular para demostrar el teorema. Notemos además que como $\mu \in$

$[LS(\mathcal{K}), \lambda)$, entonces al aplicar la observación 3.1.7 la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ.

Como por hipótesis $\alpha < \mu^+$ es un ordinal regular, entonces al aplicar el lema 3.2.15 la relación de no μ-ruptura tiene continuidad universal en α. Veamos ahora que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites para $\gamma < \mu^+$.

1. Si $\alpha < \mu$, entonces al aplicar el lema 3.2.17 tenemos que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites en α para todo ordinal límite $\gamma < \mu^+$.

2. Si $\alpha \geq \mu$, entonces al aplicar el lema 3.1.8 la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α pues la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en μ. Por lo anterior y como $\mu < \lambda$, es posible aplicar el lema 3.2.18 y concluir que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites en α para todo ordinal límite $\gamma < \mu^+$.

Ahora bien como $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu < \lambda$, entonces por el lema 3.2.22 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en μ. Gracias a esto último y a que la relación de no μ-ruptura no tiene alternaciones en γ-límites en α para $\gamma < \mu^+$, entonces al aplicar el contrarecíproco del lema 3.2.9 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal débil en α y como ya vimos que la relación no de μ-ruptura tiene continuidad universal en α, al aplicar el lema 3.2.21 tenemos que la relación de no μ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α. $\boxed{\text{3.2.23}}$

4 Superestabilidad en Q-AECs

En este capítulo nosotros estudiaremos el concepto de superestabilidad en Q-AECs basándonos en las diferentes aproximaciones de dicho concepto en el caso de las AECs. En su tesis doctoral [Cop06], Coppola no habla sobre la superestabilidad en el contexto de las Q-AECs y nosotros hemos decidido introducirlo en este trabajo como una posible solución a los tres supuestos hechos por Coppola en el estudio de la transferencia de categoricidad que él hace en su tesis.

Como lo mencionamos en el capítulo anterior, un buen candidato a la noción de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs es el concepto de carácter local universal fuerte de la relación de no μ-ruptura (definición 3.2.1, teorema 3.2.23). Basándonos en [Vas17c] y en [BV15], nosotros diremos que una Q-AEC es superestable si tiene un *buen comportamiento local*[1] y la relación de no ruptura tiene carácter local universal fuerte. Como lo muestran Grossberg, VanDieren y Villaveces en [GVV16], Baldwin en [Bal09] y Vasey a lo largo de [Vas17c], la forma en la que introduciremos la superestabilidad implica unicidad de modelos límite ([GVV16]), la saturación de la unión de una cadena creciente de modelos

[1]El buen comportamiento local hace referencia a que existe una subclase no vacía que satisfaga AP, JEP tenga modeos no maximales y sea estable en su dominio.

saturados (capítulo 15 de [Bal09]) y la existencia de marcos buenos (capítulos 6, 7, 10 y 23 en [Vas17c]). Estas tres nociones de superestabilidad son fundamentales en la solución de la conjetura eventual de categoricidad presentada por Shelah y Vasey en [SV18].

De las tres nociones que mencionamos antes, tal vez la más importante en [SV18] es la noción de marcos buenos la cual nos garantiza un *buen comportamiento local* de una AEC y la existecia de una noción parecida a la bifurcación en teorías de primer orden superestables. Para garantizar dicho *buen comportamiento local*, es necesario que la subclase de modelos saturados de cierto tamaño sea una AEC (hecho 6.2 en [SV18]).

Para demostrar que la subclase de los modelos saturados de cierto tamaño forman una AEC, el axioma que resulta difícil verificar es el de cadenas de Tarski-Vaught y por tanto nos centraremos en dicho axioma, es decir nos centraremos en demostrar que la unión de una cadena creciente y continua de modelos saturados es saturada.

Por último, nosotros plantearemos algunas preguntas de interes en el estudio de la superestabilidad en AECs adaptadas al contexto de las Q-AECs y estas preguntas serán el norte para completar el estudio de la superestabilidad en las Q-AECs.

4.1. Una aproximación a la Superestabilidad en las Q-AECs

En esta sección nosotros introduciremos el concepto de superestabilidad inspirados en [Vas17b] y en [BV15]. Como lo mencionamos en la introducción de este capítulo, para nosotros la superestabilidad será una propiedad local de una Q-AEC $\mathcal{K}$ y por tal motivo la definiremos en la subclase $\mathcal{K}_\mu$ donde $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ es un cardinal.

Definición 4.1.1 (cf. definición 4.1 en [Vas17b], definición [BV15])**.** *Diremos que una Q-AEC $\mathcal{K}$ es μ-**superestable o superestable en** μ si:*

1. $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$.

2. *$\mathcal{K}_\mu$ es no vacía, tienen JEP, AP y modelos no maximales.*

3. *$\mathcal{K}$ es estable en μ.*

4. *La relación de no μ-ruptura tiene carácter universal fuerte en α para todo $\alpha < \mu^+$.*

Para terminar el trabajo de esta sección, veremos que nuestra noción local de superestabilidad se puede deducir de la λ-categoricidad de la clase $\mathcal{K}$ utilizando como principal herramienta el teorema de Shelah-Villaveces.

Corolario 4.1.2. *Sea $\mathcal{K}$ una Q-AEC que satisface AP, JEP y tiene MAG. Si además $\mathcal{K}$ es λ-categórica para $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{K}$ es μ-superestable para todo $\mathrm{LS}(\mathcal{K}) \leq \mu < \lambda$.*

Demostración. Sea μ un cardinal tal que $\mu \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$. El primer ítem de la definición de superestabilidad es inmediato por la forma en la que se tomó μ. El ítem dos de la definición de superestabilidad es consecuencia de la observación 1.1.11 y del lema 1.1.12. El ítem tres de la definición se deduce del teorema 2.1.2 y el último ítem es el teorema de Shelah-Villaveces en el contexto de las Q-AECs (teorema 3.2.23). $\boxed{4.1.2}$

4.2. Uniones de cadenas de modelos saturados

Basándonos en el capítulo 15 de [Bal09] y en las secciones 5 y 6 de [She99], en esta sección nosotros demostraremos que, bajo λ-categoricidad, la unión de cadenas crecientes continuas de modelos saturados de tamanño μ, con $\mu < \lambda$, es también un modelos saturado. Para demostrar esto, el teorema de Shelah-Villaveces (teorema 3.2.23) y los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski son las herramientas fundamentales. Comenzaremos con una definición técnica.

Definición 4.2.1 (cf. definición 13.3 en [Bal09])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal límite. Diremos que $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en α si para toda $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}^{\mu-sat}_{\mu}$ tenemos que $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ es saturado.*

El siguiente resultado nos muestra que es suficiente trabajar con ordinales regulares el concepto de uniones μ-saturadas y esto nos ayudará a simplificar el trabajo que realizaremos después.

Proposición 4.2.2. *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC $\mu > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal y $\alpha < \mu^+$ un ordinal límete. Si $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en $\alpha' := \mathrm{cf}(\alpha)$, entonces $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en α.*

Demostración. Sean $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}^{\mu-sat}_{\mu}$ una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente continua y $\langle \alpha_j \rangle_{j<\mathrm{cf}(\alpha)}$ una sucesión de ordinales cofinal en α tal que α_j es un ordinal límite si $j < \mathrm{cf}(\alpha)$ también lo es. Esto último implica que $\langle \mathcal{M}_{\alpha_j} \rangle_{j<\mathrm{cf}(\alpha)}$ es una $\prec^{\mathrm{u}}_{\mathcal{K}}$-subsucesión creciente continua y creciente de $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha}$, por tanto $\bigcup\limits_{j<\mathrm{cf}(\alpha)} \mathcal{M}_{\alpha_j} = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y como $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en $\mathrm{cf}(\alpha)$, entonces $\bigcup\limits_{j<\mathrm{cf}(\alpha)} \mathcal{M}_{\alpha_j}$ es saturado y en consecuencia $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ también lo es pues $\bigcup\limits_{j<\mathrm{cf}(\alpha)} \mathcal{M}_{\alpha_j} = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$. $\boxed{4.2.2}$

El resultado que presentamos a continuación es propuesto como ejercicio por Baldwin en el capítulo 15 de [Bal09] pero nosotros hemos encontrado un error en las hipótesis pues el ejercicio supone que $\alpha > \mathrm{cf}(\mu)$ y lo que se necesita, según la demostración del hecho 6.7 de [She99] donde el resultado está dado de manera implícita, es que α sea un ordinal regular y $\alpha = \mu$.

Proposición 4.2.3 (cf. ejercicio 15.7 en [Bal09])**.** *Sean $\mathcal{K}$ una Q-AEC, $\mu \geq \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal singular y α un ordinal regular. Si $\alpha = \mu$, entonces $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en α.*

Demostración. Sea $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\mu^{\mu-sat}$ una $\prec_\mathcal{K}^{\mathrm{u}}$-sucesión creciente continua. Como por hipótesis α es un ordinal regular y $\mu = \alpha$, entonces μ es un cardinal regular y como

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i<\alpha} M_i \right| &= |\alpha| \cdot \sup_{i<\alpha}\{|M_i|\}, \\ &= \mu \cdot \mu, \text{ pues } \alpha = \mu \\ &= \mu, \end{aligned}$$

entonces tenemos que si $\mathcal{N} \prec_\mathcal{K}^{\mathrm{u}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ es de tamaño $\gamma < \mu$, existe $i_0 < \mu$ tal que $\mathcal{N} \prec_\mathcal{K}^{\mathrm{u}} \mathcal{M}_{i_0}$. Como para todo $i < \alpha$ tenemos que $\mathcal{M}_i \in \mathcal{K}_\mu^{\mu-sat}$, en particular se cumple que $\mathcal{M}_{i_0}$ es μ-saturado de tamaño μ y por tanto $\mathcal{M}_{i_0}$ realiza todo $p \in ga - S(\mathcal{N})$. Además como $\mathcal{M}_{i_0} \prec_\mathcal{K}^{\mathrm{u}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*), entonces $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ realiza todo $p \in ga - S(\mathcal{N})$. $\boxed{4.2.3}$

El siguiente es el teorema principal del presente trabajo y nos hemos basado en gran parte en el trabajo hecho por Baldwin en el capítulo 15 de [Bal09]. El teorema nos dice que una Q-AEC $\mathcal{K}$ tendrá uniones μ-saturadas en α si $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\mu < \lambda$. Para nosotros, este es el resultado fundamental que nos permitirá seguir explorando el concepto de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs pues nos va a permitir demostrar que la subclase $\mathcal{K}_{\mu}^{\mu-sat}$ de una Q-AEC $\mathcal{K}$ es también una Q-AEC.

Teorema 4.2.4 (cf. teorema 15.7 en [Bal09], afirmación 6.7 en [She99]). *Sean λ un cardinal regular, $\mathcal{K}$ una Q-AEC λ-categórica que satisface AP, JEP, que tiene MAG y $\lambda > \mathrm{LS}(\mathcal{K})$ un cardinal. Si un cardinal $\mu \in (\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \lambda)$, entonces $\mathcal{K}$ tiene uniones μ-saturadas en α para todo ordinal límite $\alpha < \mu$.*

Demostración. En primer lugar notemos que por las proposiciones 4.2.2 y 4.2.3 es suficientre suponer que α es un ordinal regular menor que μ.

Para llegar a una contradicción supongamos que para algún ordinal regular $\alpha < \mu$ existen una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_{\mu}^{\mu-sat}$, $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ de tamaño $\gamma \in [\mathrm{LS}(\mathcal{K}), \mu)$ y $p \in ga-S\,(\mathcal{N})$ tal que $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ no realiza a p.

Observación 4.2.5. *Notemos que si $\gamma < \alpha$, entonces existe $i_0 < \alpha$ tal que $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{i_0}$ pues α es un ordinal regular. Ahora bien como $\mathcal{M}_{i_0} \in \mathcal{K}_{\mu}^{\mu-sat}$, entonces $\mathcal{M}_{i_0} \models p$ y como $\mathcal{M}_{i_0} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, concluimos que $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i \models p$. Por tanto para llegar a la contradicción deseada, tenemos que suponer que $\alpha \leq \gamma$.*

Como $p \in ga-S\,(\mathcal{N})$ no tiene realizaciones en $\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces podemos extender a p a un tipo no algebraico $p' \in ga-S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$.

Lo que haremos es construir de manera recursiva una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-cadena creciente continua $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ y una sucesión $\langle \mathcal{N}_i^{+} \rangle_{i<\alpha}$, no necesariamente continua, tales que:

- $\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_i^{+} \in \mathcal{K}_{\gamma}$, $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_i$, $\mathcal{N}_i^{+} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \bigcup\limits_{i<\alpha}$ y $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{N}_i^{+}$ para todo $i < \alpha$.
- Si p' γ-rompe sobre $\mathcal{N}_i$, entonces $p' \restriction_{\mathcal{N}_i^{+}}$ γ-rompe sobre $\mathcal{N}_i$ para todo para todo $i < \alpha$.

- $N \cap M_i \subseteq N_i$ y para todo $j < i$ tenemos que $N_j^+ \cap \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}_{i+a}$ para todo $i < \alpha$.
- $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\gamma^{\gamma-sat}$ para todo ordinal sucesor $i < \alpha$ y
- $\mathcal{N}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{N}_i$.

Observación 4.2.6. *Notemos que por la proposición 4.2.3 y por la observación 4.2.5 sin pérdida de generalidad podemos suponer que* $N \cap M_i \neq \emptyset$ *para todo* $i < \alpha$.

A continuación construiremos las sucesiones $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ y $\langle \mathcal{N}_i^+ \rangle_{i<\alpha}$.

- Sea $i = 0$. Notemos en primer lugar que como $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_\gamma$, entonces $|M_0 \cap N| \leq \gamma$ y como $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{K}_\mu$ y $\gamma < \mu$, podemos afirmar que existe $A \subset M_0$ tal que $|A| = \gamma$ y $M_0 \cap N \subseteq A$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente (definición 1.1.1.5), existe $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_0$ tal que $A \subseteq N_0$ y $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{K}_\gamma$. Si p' γ-rompe sobre $\mathcal{N}_0$, entonces existen $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \in \mathcal{K}_\gamma$ y un isomorfismo $h_0 : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ tales que $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, $h_0 \restriction_{\mathcal{M}_0} = 1_{\mathcal{M}_0}$ y $p' \restriction_{\mathcal{N}_0^2} \neq h_0 \left(p \restriction_{\mathcal{N}_0^1}\right)$. Sea $A' := N_0^1 \cup N_0^2$. Por el axioma de Löwenheim-Skolem descendente, existe $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ tal que $A' \subseteq M'$ y $\mathcal{M}' \in \mathcal{K}_\gamma$; es inmediato que $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \subseteq \mathcal{M}'$ y como en particular $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2, \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces al aplicar los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}'$. Al aplicar los axiomas de densidad (definición 1.1.1.7*a*) tenemos que existe $\mathcal{N}_0^+ \in \mathcal{K}_\mu$ tal que $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_0^+ \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ pues $\mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y como $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}' \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_i^+$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*b*) tenemos que $\mathcal{N}_0^1, \mathcal{N}_0^2 \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_0^+$. Si p' no μ-rompe sobre $\mathcal{M}_0$, sea $a \in \bigcup\limits_{i<\alpha} M_i \setminus N_0$. Sea $B := \{a\} \cup N_0$. Como $|B| = \gamma < \mu$, entonces por el lema 1.1.15 existe $\mathcal{N}_0^+ \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha}$ tal que $B \subseteq N_0^+$ y $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_0^+ \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$. De las construcciones que acabamos de hacer es inmediato que $\mathcal{N}_0 \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_0^+$.

- Sea $i < \alpha$ un ordinal y supongamos que tenemos construído $\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j^+ \in \mathcal{K}_\gamma$ tal que $N \cap M_j \subseteq N_j$, $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_j, \mathcal{N}_j^+$ y si p' μ-rompe sobre $\mathcal{N}_j$, entonces $p' \restriction_{\mathcal{N}_j^+}$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_j$ para todo $j \leq i$. Sea $A = (N \cap M_{i+1}) \cup N_i \cup \left(\bigcup_{j<i} N_j^+ \cap N_i\right)$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
|A| &= \left|(N \cap M_{i+1}) \cup N_i \cup \left(\bigcup_{j<i} N_j^+ \cap N_i\right)\right|, \\
&= |N \cap M_{i+1}| + |N_i| + \left|\bigcup_{j<i} N_j^+ \cap N_i\right|, \\
&= \gamma + |i| \cdot \sup_{j<i} |N_j^+ \cap N_i| \text{ pues } |N \cap M_{i+1}| \leq \gamma \text{ y } |N_i| = \gamma, \\
&= \gamma \text{ pues } i < \alpha \leq \gamma \text{ y para todo } j < i \text{ tenemos que } |N_j^+ \cap N_i| \leq \gamma,
\end{aligned}$$

entonces al aplacar el axima de Löwenheim-Skolem descendente, existe $\mathcal{N}'_{i+1} \prec_{\mathcal{K}}^{u} \mathcal{M}_{i+1}$ tal que $A \subset N'_i$ y $|N'_{i+1}| = |A| = |N_i| = \gamma$. Claramente $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}'_{i+1}$ y como en particular $\mathcal{N}_i, \mathcal{N}'_{i+1} \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_{i+1}$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_{i+1}$. Como $|N'_{i+1}| = \gamma < \mu < \lambda$ y $\mathcal{K}$ es λ-categórica, entonces por el teorema 2.1.2 tenemos que $\mathcal{K}$ es $|N'_i|$-estable y por tanto al aplicar el corolario 2.2.12, existe $\mathcal{N}''_{i+1} \in \mathcal{K}_{|N'_i|}$ que es (γ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}'_{i+1}$ pues $\gamma < \gamma^+$. Como $\mathcal{M}_i$ es saturado, entonces por el teorema 1.4.3 tenemos que $\mathcal{M}_{i+1}$ es modelo-homogéneo y en consecuencia existe una $\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión $f : \mathcal{N}''_{i+1} \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$ que fija puntualmete a $\mathcal{N}'_{i+1}$. Defina $\mathcal{N}_{i+1} := f[\mathcal{N}''_{i+1}]$. Es inmediato que $\mathcal{N}_{i+1}$ es (γ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}'_{i+1}$ pues $\mathcal{N}''_{i+1}$ es isomorfo a $\mathcal{N}_{i+1}$ y como $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{N}'_{i+1}$, entonces por el lema 2.2.4 tenemos que $\mathcal{N}_{i+1}$ es (γ, γ)-límite sobre $\mathcal{N}_i$. De nuevo por el lema 2.2.4 es inmediato que $\mathcal{N}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{N}_i$ y de la construcción que acabamos de hacer es fácil ver que $\mathcal{N}_{i+1} \in \mathcal{K}_\gamma^{\gamma-sat}$.

Para la construcción de $\mathcal{N}_{i+1}^+$ puede utilizar el mismo argumento del ítem anterior.

- Sea $i < \alpha$ un ordinal límite y supongamos que para todo $j < i$ tenemos construido $\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_j^+ \in \mathcal{K}_\gamma$ tal que $N \cap M_j \subseteq N_j$, $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_j, \mathcal{N}_j^+$ y si p' μ-rompe sobre $\mathcal{N}_j$, entonces $p' \upharpoonright_{\mathcal{N}_j^+}$ μ-rompe sobre $\mathcal{N}_j$. En primer lugar notemos que como $\langle \mathcal{M}_k \rangle_{k<\alpha}$ es una $\prec_{\mathcal{K}}^u$-sucesión creciente, entonces para todo $j < i$ tenemos que $\mathcal{M}_j \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_i$ y como por hipótesis $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_j$, entonces por la transitividad de la relación $\prec_{\mathcal{K}}^u$ (definición 1.1.1.1) concluimos que $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_i$ para todo $j < i$. Definamos $\mathcal{N}_i := \bigcup_{j<i} \mathcal{N}_j$. Como $i < \alpha < \gamma^+$, entonces $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\gamma$ y por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definiciónes 1.1.1.6*b* y 1.1.1.6*c*) tenemos que $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{N}_i$ para todo $j < i$ y que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ pues en particular $\mathcal{N}_j \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i$ para todo $j < i$. Por el lema 1.1.13, esto último implica que $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^u \mathcal{M}_i$.

  La construcción de $\mathcal{N}_i^+$ es similar a la que hicimos en el primer ítem.

De la construcción de los $\mathcal{N}_i$ para $i < \alpha$, tenemos que la $\prec_{\mathcal{K}}^u$-cadena $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha} \subset \mathcal{K}_\gamma$ es creciente continua y tal que $\mathcal{N}_{i+1}$ es universal sobre $\mathcal{N}_i$. Además como en particular $\mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \mathcal{M}_i \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ para todo $i < \alpha$, entonces por los axiomas de cadenas de Tarski-Vaught (definición 1.1.1.6*c*) tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$; como por hipótesis $\alpha \leq \gamma$, tenemos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\gamma$ pues para todo $i < \alpha$ se cumple que $\mathcal{N}_i \in \mathcal{K}_\gamma$ y al aplicar el lema 1.1.13 concluimos que $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \prec_{\mathcal{K}}^u \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ pues $\left|\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right| = \gamma < \mu = \left|\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right|$. Por último notemos que como $p' \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ es un tipo no algebraico en $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces $p' \upharpoonright_{\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i}$ es un tipo no algebraico en $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$. Sea $q := p' \upharpoonright_{\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i}$.

Como por hipótesis $\mathcal{K}$ es λ-categórica y $\gamma \in (LS(\mathcal{K}), \lambda)$, entonces por el corolario 4.1.2

tenemos que $\mathcal{K}$ es γ-superestable. En particular tenemos que la relación de no γ-ruptura tiene carácter local universal fuerte en α pues $\alpha \leq \gamma < \mu^+$, esto quiere decir que para $q \in ga - S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right)$ existe i_q tal que q no γ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_q}$ y como $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ es una $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión creciente, entonces $\mathcal{N}_{i_q} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}_{i_q+1}$ y al aplicar la monotonía de la relación de no μ-ruptura (lema 3.1.12), tenemos que q no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_q+1}$. Sea $i_0 = i_q + 1$.

Afirmación 4.2.7. p' *no* γ*-rompe sobre* $\mathcal{N}_{i_0}$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, esto es supongamos que p' γ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$. Si esto sucede, entonces por construcción de $\mathcal{N}^+_{i_0}$ tenemos que $p' \restriction_{\mathcal{N}^+_{i_0}}$ γ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$. Además también por la construcción de $\mathcal{N}^+_{i_0}$ y de la $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ tenemos que $\mathcal{N}^+_{i_0} \prec^u_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y que para todo $j > i_0$ se cumple que $N^+_{i_0} \cap M_j \subseteq N_{j+1}$ y por tanto $N^+_{i_0} \subseteq \bigcup_{i<\alpha} N_i$. Claramente $\mathcal{N}^+_{i_0} \subseteq \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$ y como en particular $\mathcal{N}_{i_0}, \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$, entonces por los axiomas de coherencia (definición 1.1.1.4*a*) tenemos que $\mathcal{N}^+_{i_0} \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$. Esto "ultimo implica que $p' \restriction_{\mathcal{N}^+_{i_0}} = \left(p' \restriction_{\bigcup_{i<\alpha}}\right) \restriction_{\mathcal{N}_{i_0}}$.

Como por construcción tenemos que $\mathcal{N}_{i_0} \prec^u_{\mathcal{K}} \mathcal{N}^+_{i_0} \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$, que $p' \restriction_{\mathcal{N}^+_{i_0}}$ γ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$ y que $p' \restriction_{\mathcal{N}^+_{i_0}} = \left(p' \restriction_{\bigcup_{i<\alpha}}\right) \restriction_{\mathcal{N}_{i_0}}$, entonces al aplicar la transitividad de la relación de ruptura (observación 3.1.2) tenemos que $p \restriction_{\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i}$ γ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$, lo cual contradice la escogencia de i_0. $\boxed{4.2.7}$

Notemos que como i_0 es un ordinal sucesor, entonces por la construcción de la $\prec^u_{\mathcal{K}}$-sucesión $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i<\alpha}$ tenemos que $\mathcal{N}_{i_0} \in \mathcal{K}^{\gamma-sat}_{\gamma}$. Además al aplicar el corolario 2.1.7, tenemos que $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi) \in \mathcal{K}^{\gamma-sat}_{\gamma}$, $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi) \in \mathcal{K}^{\mu-sat}_{\mu}$ pues $\gamma, \mu < \lambda$ y λ es regular. Por el teorema 1.4.3 tenemos que $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)$ y $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi)$ son ambos modelohomogeneos. Por la proposición 1.2.5 tenemos que $\mathcal{M}_{i_0}$ es isomorfo a $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi)$ y que $\mathcal{N}_{i_0}$ es isomorfo a $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{M}_{i_0} = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi)$ y que $\mathcal{N}_{i_0} = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)$.

Sean $d \in |\mathbb{C}| \setminus \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ una realización del tipo no algebraico $p' \in ga - S\left(\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ y $\mathbf{c} = \langle c_j \rangle_{j<\gamma}$ una enumeración de $\bigcup\limits_{i<\alpha} N_i \setminus N_{i_0}$.

De nuevo por el corolario 2.1.7, tenemos que para algún $\kappa < \gamma^+$ la estructura $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu+\kappa, \Phi)$ es saturada pues $\mu+\kappa < \lambda$; por tanto existen $\mathbf{c}' = \langle c'_j \rangle_{j<\gamma}$ y d' en el universo $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu+\kappa, \Phi)$ tal que $\mathbf{c}' \vDash ga{-}tp(\mathbf{c}/\mathcal{N}_{i_0})$ y $\mathbf{d}' \vDash ga{-}tp(d/\mathcal{N}_{i_0})$. Esto último y el teorema de Presentación (teorema 1.1.19) implican que existen sucesiones de $\mathcal{L}'$-términos σ' y σ'', donde $\mathcal{L}'$ es el lengiaje dado por el teorema de Presentación, tales que $\mathbf{c}' = \sigma'(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ y $d' = \sigma''(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ con $\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1 \subseteq \gamma$, $\mathbf{z}_2 = [\mu, \mu+\kappa)$ y $\mathbf{w}_2 \subseteq [\mu, \mu+\kappa)$ tales que $|\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2| = \gamma$ y $|\mathbf{w}_1|, |\mathbf{w}_2| < \aleph_0$.

Es fácil ver que para todo ordinal $\beta < \gamma^+$ la función

$$f_\beta : \beta \cup [\mu, \mu+\kappa) \longrightarrow \beta+\kappa : i \longmapsto \begin{cases} i & \text{si } i < \beta \\ \beta + j & \text{si } i = \mu + j,\ j < \kappa \end{cases}$$

es un isomorfismo de orden.

Definimos los ordinales $\kappa_0 := \gamma$ y $\kappa_\delta := \gamma + \delta \cdot \kappa$ para todo $\delta \in (0, \gamma^+)$. También definimos las funciones $g_0 := 1_\gamma$ y $g_\delta := f_{\kappa_\delta} : \kappa_\delta \cup [\mu, \mu+\kappa) \longrightarrow \kappa_{\delta+1}$ para todo $\delta \in (0, \gamma^+)$.

Definamos $\mathbf{c}_{\delta+1} := \sigma'(\mathbf{z}_1, g_{\delta+1}(\mathbf{z}_2))$ y $d_{\delta+1} := \sigma''(\mathbf{w}_1, g_{\delta+1}(\mathbf{w}_2))$. Notemos que como por hipótesis $\mathbf{c}' \in |\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu+\kappa, \Phi)|$ realiza $\mathbf{c}' \vDash ga - tp(\mathbf{c}/\mathcal{N}_{i_0})$, entonces por la definición 1.3.7 existe una $\prec^{u}_{\mathcal{K}}$-inmersión $f : \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu+\kappa, \Phi)$ que fija puntualmente a $\mathcal{N}_{i_0} = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)$ tal que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$. Esto último implica que $f\left[\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right] = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\mathbf{c}' = \mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}' = \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i$. Además de esto, notemos que como para todo $\delta < \alpha$

se cumple que $g_{\delta+1} : \kappa_\delta \cup [\mu, \mu+\kappa) \longrightarrow \kappa_\delta + \kappa$ es un isomorfismo de orden que extiende a $g_0 = 1_\gamma$, entonces por el hecho 1.5.7 $g_{\delta+1}$ se puede extender a un isomorfismo $g'_{\delta+1} : \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_\delta \cup [\mu, \mu+\kappa), \Phi) \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_\delta + \kappa, \Phi)$ que extienda a $1_{\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma,\Phi)}$. Ahora bien, como por hipótesis tenemos que $\mathbf{z}_1 \subset \gamma$ y $\mathbf{z}_2 = [\mu, \mu+\kappa)$, entonces $\mathbf{c}' \in |\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_\delta \cup [\mu, \mu+\kappa), \Phi)|$ y por tanto

$$
\begin{aligned}
g'_{\delta+1}[\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}'] &= g'_{\delta+1}\left[\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\mathbf{c}'\right], \\
&= g'_{\delta+1}\left[\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\sigma'(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)\right], \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\, g'_{\delta+1}(\sigma'(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)), \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\sigma'(g_{\delta+1}(\mathbf{z}_1), g_{\delta+1}(\mathbf{z}_2))) \text{ por el hecho 1.5.7}, \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\sigma'(\mathbf{z}_1, g_{\delta+1}(\mathbf{z}_2))) \text{ pues } \mathbf{z}_1 \subset \gamma \text{ y } 1_\gamma \subseteq g_{\delta+1}, \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)\,\mathbf{c}_{\delta+1}, \\
&= \mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}_{\delta+1}, \\
&= \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi).
\end{aligned}
$$

Lo anterior implica que $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}$ es isomorfo a $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}_{\delta+1} = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi)$ pues $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}$ es isomorfo a $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}'$.

Como $\mathbf{c} = \bigcup\limits_{i<\delta} N_i \setminus N_{i_0}$, entonces para cada $\delta < \alpha$ definimos isomorfismos $\widehat{g}_{\delta+1} := g'_{\delta+1} \circ f : \bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \longrightarrow \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi)$. Sea $\mathcal{N}_{i_0,\delta+1} := \widehat{g}_{\delta+1}\left[\bigcup\limits_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right] = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi) \in \mathcal{K}_\gamma$ para cada $\delta < \alpha$. Por lo anterior y con ayuda de los axiomas de isomorfismo (definición 1.1.1.3) tenemos que $\mathcal{N}_{i_0} \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi)$ pues $\widehat{g}_{\delta+1}$ fija puntualmente a $\mathcal{N}_{i_0}$; además como $\kappa_{\delta+1} < \mu$, entonces por el teorema 1.5.10.4 y lema 1.1.13 tenemos que $\mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi) \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi)$, por tanto tenemos que $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}_{\delta+1} = \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi) \prec^{u}_{\mathcal{K}} \mathrm{EM}_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mu, \Phi)$. Por como se supuso σ'' tenemos que $d_{\delta+1} \models p' \restriction_{\mathcal{N}_{i_0,\delta+1}}$ para todo $\delta < \alpha$.

Notemos que como $d_{\delta+1} = \sigma''(\mathbf{w}_1, g_{\delta+1}(\mathbf{w}_2))$ y $g_{\delta+1} : \kappa_\delta \cup [\mu, \mu+\kappa) \longrightarrow \kappa_{\delta+1}$, entonces $d_{\delta+1} \in |EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\delta+1}, \Phi)|$ y como $\kappa_{\delta+1} < \mu$, entonces utilizando el teorema 1.5.10.4 y lema 1.1.13 concluimos que $d_{\delta+1} \in M_{i_0}$. Si para algún $\delta < \alpha$ se tiene que $d_{\delta+1} \models p$, entonces obtenemos una contradicción pues $\mathcal{M}_{i_0} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ y p no tiene realizaciones en $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$. De lo contrario, recordemos que $d \in |\mathbb{C}|$ es una realización de p' en el modelo monstruo, $q = p' \restriction_{\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i}$ y que q no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$. Ahora:

1. Supongamos que $\delta < \beta < \alpha$. En primer lugar notemos que como $p \in ga-S(\mathcal{N})$, $\mathcal{N} \prec_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ por construcción y por hipótesis $p' \supseteq p$, entonces $p' \restriction_{\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i} = q \in ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i\right)$ es una extensión de p; por tanto $d_{\delta+1}$ no realiza a q pues $d_{\delta+1}$ no realiza a p. Además como por escogencia $d \models p'$, entonces $d \models q$ y como $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}$ es isomorfo a $\mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}_{\beta+1}$, entonces $ga-tp(\mathbf{c}d/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C}) \neq ga-tp(\mathbf{c}_{\beta+1}d_{\delta+1}/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C})$.

2. Supongamos ahora que $\beta < \delta < \alpha$. Por la afirmación 4.2.7, tenemos que $p' \in ga-S\left(\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i\right)$ no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$ y como $\mathcal{N}_{i_0} \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\beta+1}, \Phi) \prec^{\mathfrak{u}}_{\mathcal{K}} \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$, entonces por la monotonía de la relación de no μ-ruptura (lema 3.1.12) se cumple que $p' \restriction_{EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\beta+1}, \Phi)}$ no μ-rompe sobre $\mathcal{N}_{i_0}$. Lo anterior sumado al hecho que $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa_{\beta+1}, \Phi) = \mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}_{\beta+1}$ es isomorfo a $\bigcup_{i<\alpha} \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{i_0}\mathbf{c}$ y aplicando el hecho 3.1.15, implican que $ga-tp(\mathbf{c}d/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C}) = ga-tp(\mathbf{c}_{\beta+1}d/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C})$ y por como se definió $d_{\delta+1}$ tenemos que $ga-tp(\mathbf{c}d/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C}) = ga-tp(\mathbf{c}_{\beta+1}d_{\delta+1}/\mathcal{N}_{i_0}, \mathbb{C})$.

   En primer lugar notemos que entonces $\widehat{g}_{\beta+1} \subset \widehat{g}_{\delta+1}$ pues $g_{\beta+1} \subset g_{\delta+1}$ y por tanto .

   entonces $\mathbf{c}_\alpha \mathbf{d}_\alpha$ no realizan el mismo tipo que $\mathbf{c}d$ sobre $\mathcal{N}_i$ pues $ga-tp(\mathbf{d}_\alpha/\mathbf{c}_\beta)$ ni

$ga - tp(d/\mathbf{c})$ rompen sobre $\mathcal{N}_i$.

Sean J un orden lineal tal que $|J| < \lambda$ con $2^{|J|}$ cortaduras y J' una extensión de J de tamaño $2^{|J|} \leq \lambda$ que realiza todas las cortaduras de J. Fijemos I_J, $I_{J'}$ extensiones de J y J' respectivamente que son γ^+-homogéneos. Trabajemos en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma + \kappa \times I_{J'}, \Phi)$ donde $\kappa \times I_{J'}$ tiene el orden antilexicográfico y para $i \in I_{J'}$ sea $h_i : [\mu, \mu + \kappa) \longrightarrow \kappa \times \{i\} : \mu + j \longmapsto (j, i)$. Sean $\mathbf{c}_i' := \sigma'(\mathbf{z}_1, h_i(\mathbf{z}_2))$ y $\mathbf{d}_i' := \sigma''(\mathbf{w}_1, h_i(\mathbf{w}_2))$.

Para todos $i < j$ e $i' < j'$ en $\kappa \times I_{J'}$ existen automorfismos que fijan γ y envían $\kappa \times \{i\}$ en $\kappa \times \{i'\}$ y $\kappa \times \{j\}$ en $\kappa \times \{i'\}$; por tanto en $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\kappa \times \mathbb{I}_{J'}, \Phi)$ todas las tuplas $\mathbf{c}_i\mathbf{d}_j$ realizan el mismo tipo de Galois sobre $EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma, \Phi)$ siempre que $i < j$ y en consecuencia para todo $i \in J'$ 1 y 2 se cumplen para $\mathbf{c}_i\mathbf{d}_i$. En particular si $\mathbf{cd}$ y $\mathbf{c}'\mathbf{d}'$ están dados por diferentes cortaduras en J

$$ga - tp(\mathbf{cd}/EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma + \kappa \times J, \Phi)) \neq ga - tp(\mathbf{c}'\mathbf{d}'/EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\gamma + \kappa \times J, \Phi))$$

lu cual contradice la $|J|$-estabilidad de $\mathcal{K}$. $\boxed{4.2.4}$

4.3. Superestabilidad en Q-AECs: algunas preguntas

De acuerdo al estudio de la superestabilidad realizado en el presente trabajo y teniendo en cuenta el resultado de transferencia de categoricidad desarrollado por Shelah y Vasey en [SV18] donde el concepto de marco bueno, una noción local de superestabilidad, es fundamental y por tanto es natural preguntarnos.

Pregunta 4.3.1. *¿Es posible adaptar el concepto de marco bueno al contexto de las Q-AECs?*

Como muestran Shelah y Vasey en [SV18], el resultado de transferencia de categoricidad parcial demostrado por Grossberg y VanDieren en [GV06b] es indispensable para tener transferencia de categoricidad sin restricciones y por tanto es indispensable solucionar el problema de las condiciones 0.0.6, 0.0.7 y 0.0.8 en el argumento de Coppola. En la pregunta 2.3.7, nosotros proponemos demostrar, refutar o remover dichas condiciones y basándonos en las páginas 88, 89 y 90 de [Cop06] nosotros planteamos la siguiente pregunta.

Pregunta 4.3.2. *¿Es la superestabilidad en Q-AECs una herramienta que podría ayudar a remover o demostrar las condiciones 0.0.6, 0.0.7 o 0.0.8?*

Por último, como lo que buscamos es tener un resultado de transferencia de categoricidad sin restricciones en el contexto de las Q-AECs, la siguiente pregunta es natural.

Pregunta 4.3.3. *¿Es posible adaptar el argumento de [SV18] al contexto de las Q-AECs?*

Índice alfabético

$(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N})$, 32

$(\mathcal{M}, \overline{a}, \mathcal{N}_1) \sim (\mathcal{M}, \overline{b}, \mathcal{N}_2)$, 32

(μ, α)-límite, 92

$C_\delta \cup \{\delta\}$, 138

$S_\alpha^{\mu^+}$-sucesión de clubs, 138

$S_\alpha^{\mu^+}$, 138

$EM_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}(\mathbb{I}, \Phi)$, 60

$\mathcal{K}^{\mu-sat}$, 46

$\mathcal{K}_\Theta$, 4

$\mathcal{K}_\lambda$, 4

$PC(\mathcal{L}(\mathcal{K}), T', \Gamma)$, 12

$Aut_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$, 41

χ-docilidad, 103

$ga - S^n(\mathcal{M})$, 41

$\mathbb{C}$, 31

μ-estable, 72

μ-homogéneo, 22

μ-modelo-homogéneo, 22

μ-ruptura, 110

μ-saturado, 46

μ-superestable, 164

μ-universal, 82

$\overline{a} \models p$, 41

$\prec_{\mathcal{K}}^{u}$-inmersión, 13

$\prec_{\mathcal{K}}$-inmersión, 13

Q-AEC, 3

alternaciones δ-límites en α, 131

AP, *véase* propiedad de amalgamación

cadenas coherentes de tipos de Galois, 43
carácter local universal
    débil en α, 114
    fuerte en α, 126
cianotipo propio de $\mathbb{I}$, 60
continuidad uniforme en α, 131

estable en μ, *véase* μ-estable

generalización del teorema de omisión de tipos de Morley, 62

JEP, *véase* propiedad de inmersiones conjuntas

lema de renombramiento, 10
lleno hasta el borde, 64

MAG, *véase* modelos arbitrariamente grandes
modelos arbitrariamente grandes, 5

propiedad de amalgamación, 5
propiedad de inmersiones conjuntas, 5

saturado en μ, *véase* μ-saturado
sistema λ-dirigido, 11
sucesión de indiscernibles, 59
superestable en μ, *véase* μ-superestabilidad

teorema de Presentación, 12
teorema de Shelah-Villaveces, 160
tipos de Galois
    como órbitas de automorfismos, 41
    como relacines de equivalencia, 35

uniones μ-saturadas en α, 165

Bibliografía

[AM10] Uri Abraham and Menachem Magidor. Cardinal arithmetic. In *Handbook of set theory*, pages 1149–1227. Springer, 2010.

[Bal05] John T Baldwin. Ehrenfeucht-mostowski models in abstract elementary classes. *Contemporary Mathematics*, 380:1–16, 2005.

[Bal09] John T Baldwin. *Categoricity*, volume 50. American Mathematical Soc., 2009.

[BG17] Will Boney and Rami Grossberg. Forking in short and tame abstract elementary classes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 168(8):1517–1551, 2017.

[BGVV17] Will Boney, Rami Grossberg, Monica M VanDieren, and Sebastien Vasey. Superstability from categoricity in abstract elementary classes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 168(7):1383–1395, 2017.

[BKV$^+$06] John Baldwin, David Kueker, Monica VanDieren, et al. Upward stability transfer for tame abstract elementary classes. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 47(2):291–298, 2006.

[Bon14] Will Boney. Tameness from large cardinal axioms. *The Journal of Symbolic Logic*, 79(4):1092–1119, 2014.

[BR12] Tibor Beke and Jirí Rosickỳ. Abstract elementary classes and accessible categories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 163(12):2008–2017, 2012.

[BV15] Will Boney and Sebastien Vasey. A survey on tame abstract elementary classes. *arXiv preprint arXiv:1512.00060*, 2015.

[BVV16] Will Boney, Monica M VanDieren, and Sebastien Vasey. Shelah-villaveces revisited. *arXiv preprint arXiv:1611.05292*, 2016.

[Cop06] Andrew H Coppola. *The theory of Q-Abstract Elementary Classes.* PhD thesis, University of Illinois at Chicago, 2006.

[EM56] Andrzej Ehrenfeucht and Andrzej Mostowski. Models of axiomatic theories admitting automorphisms. *Fund. Math*, 43:50–68, 1956.

[Esp19] Christian Espíndola. A topos-theoretic proof of shelah's eventual categoricity conjecture for abstract elementary classes. *arXiv preprint arXiv:1906.09169*, 2019.

[GV06a] Rami Grossberg and Monica VanDieren. Galois-stability for tame abstract elementary classes. *Journal of Mathematical Logic*, 6(01):25–48, 2006.

[GV06b] Rami Grossberg and Monica VanDieren. Shelah's categoricity conjecture from a successor for tame abstract elementary classes. *Journal of Symbolic Logic*, pages 553–568, 2006.

[GV17] Rami Grossberg and Sebastien Vasey. Equivalent definitions of superstability in tame abstract elementary classes. *The Journal of Symbolic Logic*, 82(4):1387–1408, 2017.

[GVV16] Rami Grossberg, Monica VanDieren, and Andrés Villaveces. Uniqueness of limit models in classes with amalgamation. *Mathematical Logic Quarterly*, 62(4-5):367–382, 2016.

[Jec03] Thomas Jech. Set theory. the third millennium edition. *Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag*, 2003.

[Les05] Olivier Lessmann. An introduction to uncountable categoricity in abstract elementary classes, volume 6 of graduate texts in mathematics. *University of Helsinki, Department of Mathematics and Statistics*, 2005.

[Lie11] Michael J Lieberman. Category-theoretic aspects of abstract elementary classes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 162(11):903–915, 2011.

[LR15] Michael Lieberman and Jiri Rosicky. Approximations of superstability in concrete accessible categories. *arXiv preprint arXiv:1505.06047*, 2015.

[LR16] Michael Lieberman and Jirí Rosickỳ. Classification theory for accessible categories. *The Journal of Symbolic Logic*, 81(1):151–165, 2016.

[LR17] Michael Lieberman and Jirí Rosickỳ. Metric abstract elementary classes as accessible categories. *The Journal of Symbolic Logic*, 82(3):1022–1040, 2017.

[LRV18] Michael Lieberman, Jiří Rosickỳ, and Sebastien Vasey. Forking independence from the categorical point of view. *arXiv preprint arXiv:1801.09001*, 2018.

[Mar06] David Marker. *Model theory: an introduction*, volume 217. Springer Science & Business Media, 2006.

[MP89] Michael Makkai and Robert Paré. *Accessible categories: the foundations of categorical model theory*, volume 104. American Mathematical Soc., 1989.

[MS90] Michael Makkai and Saharon Shelah. Categoricity of theories in $l_{\kappa\omega}$, with κ a compact cardinal. *Annals of Pure and Applied Logic*, 47(1):41–97, 1990.

[Pil08] Anand Pillay. *An introduction to stability theory*. Courier Corporation, 2008.

[She75] Saharon Shelah. Categoricity in $\aleph_1$ of sentences in $L_{\omega_1,\omega}(q)$. *Israel Journal of Mathematics*, 20(2):127–148, 1975.

[She87a] Saharon Shelah. Classification of non elementary classes ii abstract elementary classes. In *Classification theory*, pages 419–497. Springer, 1987.

[She87b] Saharon Shelah. Universal classes. In *Classification theory*, pages 264–418. Springer, 1987.

[She94] Saharon Shelah. *Cardinal arithmetic*, volume 3. Oxford, 1994.

[She99] Saharon Shelah. Categoricity for abstract classes with amalgamation. *Annals of Pure and Applied Logic*, 98(1-3):261–294, 1999.

[SV99] Saharon Shelah and Andrés Villaveces. Toward categoricity for classes with no maximal models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 97(1-3):1–25, 1999.

[SV18] Saharon Shelah and Sebastien Vasey. Categoricity and multidemensional diagrams. 2018.

[TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A course in model theory*, volume 40. Cambridge University Press, 2012.

[Van06] Monica VanDieren. Categoricity in abstract elementary classes with no maximal models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 141(1-2):108–147, 2006.

[Van16] Monica M VanDieren. Symmetry and the union of saturated models in superstable abstract elementary classes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 167(4):395–407, 2016.

[Vas17a] Sebastien Vasey. Downward categoricity from a successor inside a good frame. *Annals of Pure and Applied Logic*, 168(3):651–692, 2017.

[Vas17b] Sebastien Vasey. Saturation and solvability in abstract elementary classes with amalgamation. *Archive for Mathematical Logic*, 56(5-6):671–690, 2017.

[Vas17c] Sebastien Vasey. *Superstability and Categoricity in Abstract Elementary Classes*. PhD thesis, Carnegie Mellon Unievrsity, 2017.

[Zam11] Pedro Zambrano. *Around superstability in metric abstract elementary classes*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, 2011.