IV) M E T O D O L O G I A

La metodología de superficies de respuesta se debe emplear una vez que a través de investigaciones sobre la producción física debido a la aplicación de insumos se ha llegado a las dosis apropiadas, ya que de otra forma se estarían evaluando económicamente dosis que a través de la experimentación física podrían ser eliminadas. Se debe tener en cuenta, que para la mayoría de los productos ya se conocen las dosis más recomendables desde el punto de vista de la producción física, pero en el caso de productos con los cuales se esté iniciando la experimentación, el análisis económico debe debe esperar hasta tanto se hayan conseguido los rangos de aplicación de insumos con los cuales se consigan los mayores rendimientos físicos. Esta observación también es válida para nuevas variedades e híbridos que se vayan a recomendar para una región o tipos específicos de suelos.

A. Funciones de Respuesta

Toda producción física requiere, por lo menos, dos tipos de insumos. Para los cultivos y pecuarios son esenciales, generalmente, gran cantidad de insumos.

Se define función de respuesta(o función de producción) como la cantidad de producción de cultivos o pecuarios obtenida en respuesta

a la aplicación de los insumos involucrados en el proceso de producción, y se designa como,

(IV-1) $Y = f(X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Xn)$

En la cual Y es la producción y X_1, X_2.....Xn los insumos empleados en su proceso(como por ejemplo nutrimentos aprovechables del suelo, clima, plagas, enfermedades entre otros que influyen sobre el rendimiento de determinado producto como caña u otro cultivo cualquiera).

En general, es imposible enumerar todos los factores en la producción de un cultivo determinado o producto pecuario. Por tanto, es necesario simplificar. Esto puede realizarse mediante la teoría de respuesta la cual incluye los factores más relevantes.

1. Factores Variables, Fijos y sin Importancia

   La función de respuesta(IV-1) revela que los n factores son variables.

   Por lo general, interesará la situación en que sólo se consideren m factores variables. Los (n-m) factores se mantendrán fijos ó se considerarán sin importancia debido a la poca influencia que tienen en la producción y por tanto pueden tratarse como si fueran fijos.

2. Relaciones más importantes en superficies de respuesta con 1, 2 y n factores variables.

La función de respuesta más sencilla es aquella que considera un factor variable y puede representarse como:

(IV-2) $$Y = f(X_1)$$

Dada la relación (IV-2) existe la posibilidad de derivar cuatro cantidades de interés:

a) El producto medio, definido como la cantidad media de producto por unidad de insumo variable empleado $(Y/X_1) = PPx_1$

b) Producto marginal: expresa la tasa de cambio en producción a cualquier nivel dado de X_1, cuando se incrementa X_1 en una cantidad infinitesimal.

Se denota por $PMgx_1 = \frac{dY}{dX}$

c) Producción máxima: que es aquella que se obtiene en donde el $PMgx_1$ es igual a cero.

d) La elasticidad de producción, que se define como el cambio relativo en Y dividido por el cambio relativo en X_1. Algebraicamente puede denotarse como sigue:

$$E_1 = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X_1}{X_1}}$$

Esto es la elasticidad arco, la elasticidad punto sobre la curva de respuesta puede escribirse como:

$$E_1 = \frac{dY}{dX_1} \cdot \frac{X1}{Y} = \frac{PMgx1}{PPx_1}$$

También puede interpretarse la elasticidad de producción como el cambio porcentual en Y resultante del incremento de uno por ciento en X_1.

Las tres primeras relaciones son cantidades físicas, la última (E_1) es un número puro.

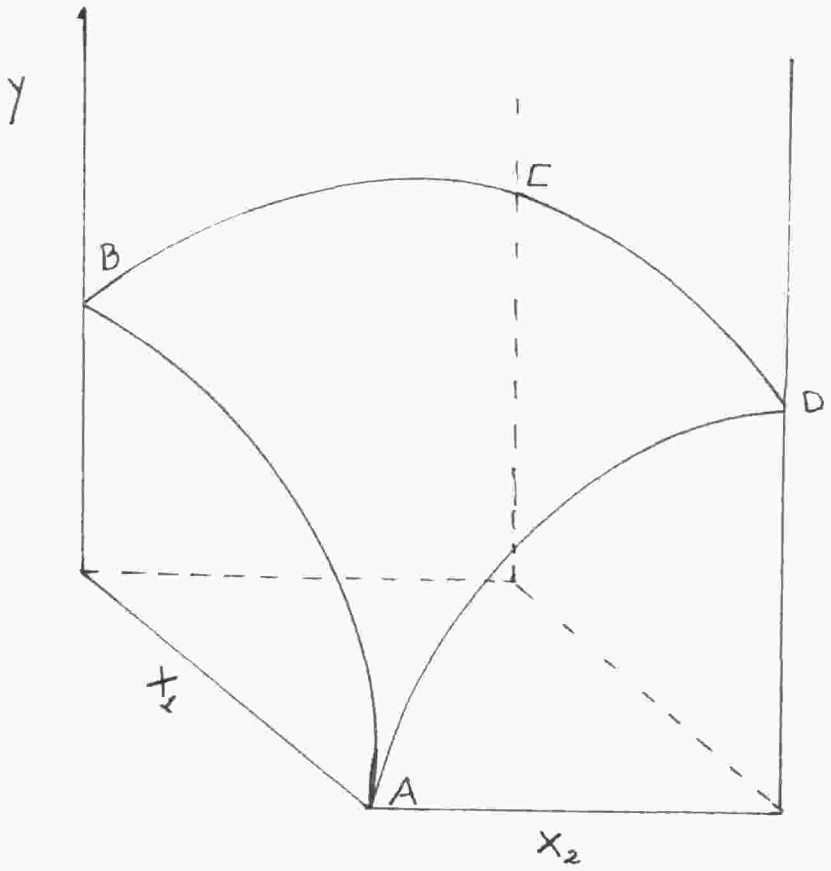
Considerando dos factores variables, la función puede expresarse en la forma siguiente:

(IV-3) $\quad Y = f(X_1, X_2)$

Esta función no puede ser representada por una sola curva, sino por medio de una superficie en el espacio tridimensional con ejes X_1, X_2, Y.

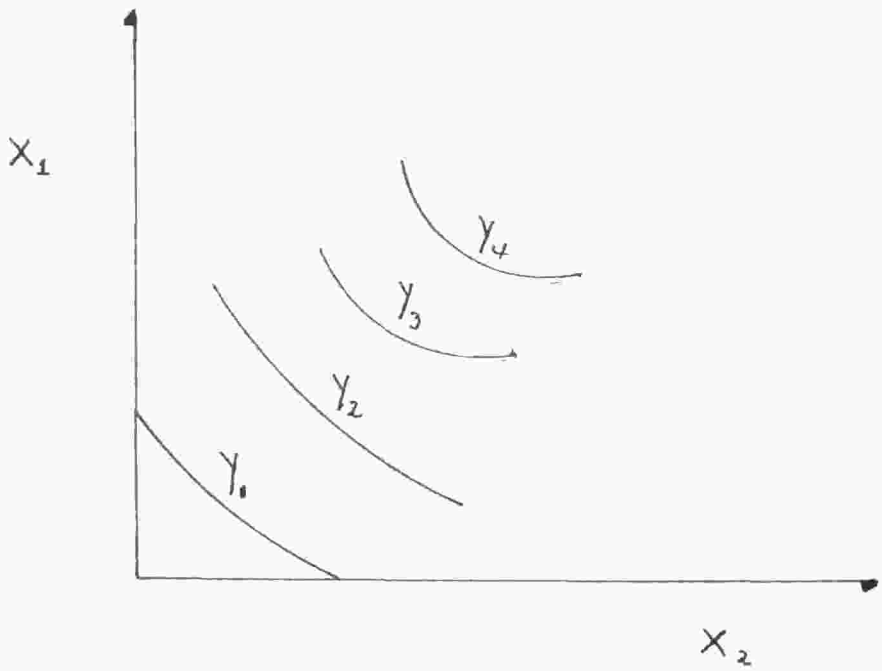
Existen dos posibilidades de representarla: a). como una superficie de producción en tres dimensiones (véase el gráfico 4) y b). describirla a base de isocuantas que no son más que curvas en dos dimensiones, resultantes al hacer un corte transversal a la superficie de producción (véase gráfico 5).

Gráfico 4: Superficie de respuesta para dos factores variables



La superficie de respuesta ABCD es la superficie de la colina de producción originada por los aumentos de X_1 y X_2. Cambios en las especificaciones de la función de respuesta producirán cambios en la forma y ubicación de la superficie.

Gráfico 5: Mapa de isocuantas para dos factores variables



Estos contornos Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, se les conoce como isocuantas que se definen como el lugar geométrico de todas las combinaciones X_1 y X_2 que dan un mismo nivel de producto.

Si se conoce la forma algebraica $Y = f(X_1 , X_2)$, y se determina la misma cantidad de producto (Y^*) que se desea conseguir con las diferentes combinaciones de X_1 y X_2 se puede obtener la fórmula general de una isocuanta:

(IV-4) $$X_1 = f(X_2/Y^*)$$

donde X_1 depende solamente de los valores de X_2 y Y^* es un nivel de producción específico. Cuando Y^* varía, se obtiene una familia de isocuantas, cuya expresión general es:

$$X_1 = f(X_2, Y^*) \qquad \text{(IV-5)}$$

A partir de las isocuantas se pueden obtener algunas relaciones entres los factores X_1 y X_2. Estas relaciones que son definitivas para el análisis económico son las siguientes:

Tasa Marginal de Substitución (T.M.S)

La tasa marginal de substitución de X_1 por X_2 indica la cantidad de X_2 que hay que reemplazar por X_1 para que la producción permanezca constante. Al variar X_1 se obtendrá una variación en la producción (recuérdese que esto no es más que producción marginal), lo mismo sucede al variar X_2

$$\therefore \quad (\Delta X_1)(PMgx_1) = (\Delta X_2)(PMgx_2)$$

$$TMS_{12} = \frac{\Delta X_1}{\Delta X_2} = \frac{PMgx_2}{PMgx_1}$$

cuyo límite cuando $\Delta X \longrightarrow 0$ es

$$\frac{\partial X_1}{\partial X_2} = \frac{PMgx_2}{PMgx_1}$$

el inverso será: $$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = \frac{PMgx_1}{PMgx_2}$$

El valor de la TMS_{12} puede fluctuar entre más infinito y menos infinito.

Isoclinas.

Las isoclinas se definen como los lugares geométricos de todas las combinaciones de X_1 y X_2 que poseen una misma tasa marginal de sustitución. Por tanto, constituyen líneas hacia arriba ó hacia abajo de la superficie de respuesta que unen puntos de igual pendiente en las isocuantas.

La familia de ecuaciones se deriva resolviendo:

$$\text{(IV-6)} \quad \frac{\partial X_1}{\partial X_2} = K$$

Para obtener X_1 como función de X_2 ; siendo K el valor de TMS_{12} que especifica una isoclina determinada.

A través de las ecuaciones (IV-1) y (IV-6) es evidente que la forma y ubicación de las isoclinas depende de la forma de la

función de respuesta original. En particular, si ésta presenta un máximo, las isoclinas pasarán por él. La función de producción también determina si las isoclinas nacen o no en el origen.

Las líneas límites son aquellas dos isoclinas especiales para las cuales la TMS_{12} es igual a cero o infinito.

Para n factores variables los conceptos enunciados anteriormente tienen las mismas ecuaciones, que para la discusión efectuada con dos variables. En resumen será:

(IV-7) $$Y = f(X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots X_n)$$

(IV-8) $$PMgi = \frac{Y}{X_1} \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n$$

(IV-9) $$TMSij = \frac{PMgi}{PMgj}$$

(IV-10) $$ESij = TMSij \left(\frac{Xj}{Xi} \right)$$

(IV-11) $$Ei = \frac{\partial Y}{\partial Xi} \quad \frac{Xi}{Y} \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n$$

$$= \frac{PMgi}{PMdi}$$

3. Rendimientos Crecientes, Decrecientes y Decrecientes a Escala

El estado actual del conocimiento de la teoría respecto a la respuesta de los cultivos y animales a los nutrimentos establece que:

a. Debe existir una relación causal continua entre las X(insumos) y Y (Producción).

b. Deben prevalecer rendimientos decrecientes para los X_i, de modo que las cantidades adicionales de producto obtenidas con sucesivas unidades de Xi son cada vez menores.

c. Deben prevalecer rendimientos decrecientes a escala, de modo que un incremento proporcional en todos los factores origina un crecimiento proporcionalmente menor en la cantidad producida.

El supuesto 1) enunciado anteriormente significa que existen las primeras derivadas $\frac{\partial Y}{\partial Xi}$ de la función IV-1. El 2) revela que $\frac{\partial Y}{\partial Xi}$ decrece cuando Xi aumenta, lo que significa que las segundas derivadas $\frac{\partial^2 Y}{\partial Xi^2}$ existen y son negativas, y el tercer supuesto advierte que:

$$\text{(IV-12)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Xi}{Y} \quad \frac{\partial Y}{\partial Xi} \right) < 1.0$$

i = 1, 2,.....,n

La expresión anterior es la suma de elasticidades de producción.

Existirán rendimientos crecientes a escala si la suma de las elasticidades es mayor que uno; constantes si esa suma es igual a uno y decrecientes si la suma de elasticidades para los factores de producción es menor que uno.

En realidad a menudo se supone que las fases de rendimientos crecientes, constantes y decrecientes se registran en secuencia a medida que Xi aumenta. Sin embargo, desde el punto de vista económico, solo interesa la fase de los decrecientes.

B. Eficiencia en la Respuesta*

1. Propósito del Análisis de Respuesta

La respuesta a cultivos y a pecuarios es necesario estudiarla por dos motivos. En primer lugar, la finalidad puede ser de tipo positivista para describir el proceso de respuesta. A excepción del fenómeno fisiológico básico que explica la causa por la cual la respuesta obedece a un patrón determinado. El otro propósito de este análisis puede ser normativo, con el objeto de resolver un problema. Más que el simple conocimiento en si, el enfoque normativo tiene como meta la manipulación del proceso de respuesta con el fin de alcanzar un resultado óptimo. El objetivo normativo

---

* Tomado de Dillon, J.L. 1967. Introducción al análisis de respuesta de los cultivos y pecuarios. Ed. del Pacífico S.A. Santiago-Chile. 126 p.

específico dependerá del interés particular del investigador. Puede fluctuar desde consideraciones de orden fisiológico hasta una determinada importancia económica. Además, mientras la investigación de respuesta puede, inicialmente, realizarse con un investigador siempre dentro de fines positivistas, los datos obtenidos serán con frecuencia adaptables a fines normativos, por algún otro especialista. El análisis normativo, sin embargo, con énfasis en el tratamiento de respuesta, requiere una superestructura adicional de principios analíticos, aparte de los enunciados en el numeral A.

2. Condiciones Optimas de Operación

Dado el propósito normativo particular, el tratamiento del proceso de respuesta se efectúa controlando los niveles de insumos. Así, las condiciones óptimas de operación, las determina el conjunto de cantidades de insumos, que en mejores condiciones alcance la meta especificada, cualquiera que sea ésta. Precisando el conocimiento de la función de producción y la especificación de la meta, el problema analítico se reduce a encontrar las condiciones óptimas de operación.

3. Ganancias de Producto y Pérdidas de Insumos

Todo proceso de respuesta de animales conlleva factores de ganancias y pérdidas. Las ganancias están constituídas por el producto y las pérdidas por los insumos consumidos en el proceso de producción.

Las condiciones óptimas de operación surgen cuando se maximiza el ingreso neto del productor, midiendo las ganancias y las pérdidas en relación con una meta normativa ya especificada. Para dicho fin es necesario que las ganancias y las pérdidas se midan en unidades comparables, cada una debe ser ponderada por un factor de conversión apropiado y deben ser elegidos a priori por el investigador sobre alguna base pertinente que ofrezca vías para el objetivo de lograr las más eficientes y positivas condiciones de operación.

4. Un Factor Variable, Dos Factores Variables y n Factores Variables.

1) Para un factor variable la función de respuesta es como sigue:

$$Y = f(X_1)$$

Y la función objetiva sin restricciones es

(IV-13) $$IN = PyY - P_1X_1$$ 4/

En donde $Py > 0$ y $Px_1 > 0$

Py y Px_1 son las constantes de conversión para Y y X respectivamente. Si no se emplearan las ponderaciones Py y Px_1

4/ IN = ingreso neto, el cual solamente tiene en cuenta el costo del insumo (Px_1X_1)

para reducir el producto y los insumos variables a una medida común (valor en pesos), sería imposible obtener los ingresos (PyY) y los costos (Px_1X_1).

Sin tales ponderaciones no habría manera de comparar los ingresos netos al aplicar diferentes niveles de los insumos.

Se puede también escribir:

$IN = Pyf(X_1)$ ó simplemente $IN = g(X_1)$

Puesto que los precios son constantes.

Deben estipularse dos condiciones importantes acerca de la función objetiva (ecuación IV-13). En primer lugar, los precios no pueden ser negativos. Si Py fuera cero ó menor que cero, no se debe producir. La segunda condición sobre la función objetiva es que con frecuencia la meta de maximizar IN (ingreso neto) estará sujeta a una ó más restricciones. Por ejemplo, P_1X_1 puede ser fijado a un nivel que no pueda excederse, ó solo puede disponer de una cantidad limitada de algún(os) insumo(s) variable(s) entre un número de procesos de respuesta. Cualquiera que sean las restricciones, en principio, el procedimiento es exactamente el mismo, excepto que se evalué IN como un máximo condicionado.

Las dos metas normativas más usuales en el análisis de respuesta de cultivos y animales persiguen determinar las condiciones óptimas de operación para: a) obtener el producto físico máximo; y b) obtener el máximo beneficio.

Se examinarán ambas metas sin preocuparse de las restricciones, como es el caso del presente trabajo.

En el caso de que Px_1 sea igual a cero y Py mayor que cero, se deberá obtener la máxima producción física posible, y la función objetiva tomará la forma.

$$IN = YPy$$

En esta función solo existen ganancias y no pérdidas y la función objetiva tendrá la misma forma que la función de respuesta.

La maximización de utilidades supone aumentar la diferencia entre el valor del producto y el costo de los insumos variables empleados. Si el precio del producto es Py por unidad y el precio del insumo (X_1) es Px_1 por unidad, se tiene:

$$\text{(IV-14)} \qquad \text{Utilidad} = PyY - Px_1X_1$$

que es igual a la función objetiva (IV-13).

En otras palabras, y sin que cause ello sorpresa, los factores de conversión para el análisis económico son los precios del mercado del producto y los insumos.

Mientras el objetivo de la investigación -cualquiera que sea-, sea normativo, las condiciones óptimas de operación pueden ser siempre definidas en términos de la función objetiva semejante a la ecuación (IV-13). Sean P precios monetarios ó no, la determinación de las condiciones óptimas de operación es un problema económico. Por esta razón las referencias a las P serán en su calidad de precios y IN en el carácter de beneficio. Adviértase que IN no incluye ninguna medida de las pérdidas que puedan originarse con el empleo de insumos fijos. Esta omisión, en este caso, carece de importancia, puesto que a corto plazo los insumos fijos no afectan la elección de las condiciones óptimas de operación.

a) Para maximizar ganancias con un insumo variable se parte de la función objetiva siguiente:

(IV-15) $$IN = PyY - P_1X_1 - CF$$

Tomando la primera derivada de la función objetiva se tiene:

(IV-16) $$\frac{\partial IN}{\partial X_1} = Py \frac{\partial Y}{\partial X_1} - Px_1$$

Para maximizar el beneficio se hace $\frac{\partial IN}{\partial X_1}$ igual a cero y se resuelve la ecuación para X_1. La condición necesaria de segundo orden, $\frac{\partial^2 IN}{\partial Xj^2} < 0$ se cumple automáticamente por haberse supuesto rendimientos decrecientes. Igualando a cero la función (IV-16) la condición para maximizar beneficios es:

$$\text{(IV-17)} \quad \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{Px_1}{Py}$$

De este modo, sin restricciones, se maximiza el ingreso neto, cuando el producto marginal del insumo X_1 (definido por $\frac{\partial Y}{\partial X_1}$) es igual a la razón inversa de los precios (Px_1/Py).

Puesto que $Px_1 > 0$ y $Py > 0$, la ecuación (IV-17) supone $\frac{\partial Y}{\partial X_1}$, nunca puede ser negativo al nivel que X_1 maximice el IN.

No importa cuales sean los valores de Px_1 y Py, la producción con cualquier nivel de aplicación de X_1 será irracional cuando el producto marginal sea negativo, porque con un nivel de aplicación menor del insumo se pueden obtener producciones iguales ó mayores.

Reordenando la ecuación de la función objetiva (IV-15) en la forma:

$$\text{(IV-18)} \qquad Y = \frac{IN}{Py} + \frac{Px_1}{Py}(X_1) + \frac{CF}{Py}$$

Para los valores dados de IN, Px_1 y Py, la ecuación (IV-18) es el lugar geométrico de todas las combinaciones de X_1 y Y que rinden un IN dado.

b) Con dos factores variables, el procedimiento para maximizar el IN es semejante al descrito con un insumo variable.

Se tiene;

$$\text{(IV-19)} \qquad Y = f(X_1, X_2)$$

y la función objetiva sin restricciones es:

$$\text{(IV-20)} \qquad IN = PyY - P_1X_1 - P_2X_2 - CF$$

La maximización de IN respecto a los dos insumos variables involucrados en el proceso productivo, considera la solución simultánea de las dos ecuaciones;

$$\text{(IV-21)} \qquad \frac{\partial IN}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial IN}{\partial X_2} = 0$$

Para hallar la combinación de X_1 y X_2 que especifique las condiciones óptimas de operación. La condición de segundo grado indispensable para un máximo (que el diferencial IN sea negativo), se satisface automáticamente al suponer que la función de producción está sometida a rendimientos decrecientes (etapa II de la producciónN). Tomando las primeras derivadas de (IV-20), las ecuaciones (IV-21) pueden reescribirse:

$$\text{(IV-22)} \qquad \frac{\partial IN}{\partial X_1} = Py \frac{\partial Y}{\partial X_1} - PX_1 = 0$$

$$\frac{\partial IN}{\partial X_2} = Py \frac{\partial Y}{\partial X_2} - PX_2 = 0$$

ó sea,

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{PX_1}{Py} \qquad \begin{array}{l} PX_1 > 0 \\ PX2 > 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = \frac{PX_2}{Py} \qquad Py > 0$$

De modo semejante al caso de un insumo variable las condiciones de máximo beneficio, establecidas por las ecuaciones (IV-22),

se cumple cuando el producto marginal de cada factor (PMgxi) iguala la razón inversa de precios $\frac{PXi}{Py}$ pertinentes.

Como los precios son siempre positivos, las ecuaciones (IV-22) indican que nunca puede llegarse a un beneficio máximo con dos insumos variables en tanto que $PMgx_1$ ó $PMgx_2$ sean negativos. Lo evidente de esto es que para cualquier combinación de X_1 y X_2 con $PMgx_1$ ó $PMgx_2$ negativos, la misma producción puede obtenerse siempre con menor cantidad de uno, ó de ambos insumos.

c) Para n insumos variables, la elección de las mejores condiciones de operación es simplemente una extensión del procedimiento utilizado en el caso de dos insumos variables. Se tiene:

$$Y = f(X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Xn) \qquad \text{(IV-23)}$$

Siendo la función objetiva

$$IN = PyY - \sum_{i=1}^{n} PxiXi \qquad \text{(IV-24)}$$

La maximización de IN respecto a las n variables de insumo implica la solución simultanea de las n ecuaciones.

$$\frac{\partial IN}{\partial Xi} = 0 \quad \text{para } i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

Dada la forma algebraica de la función objetiva y el supuesto de rendimientos decrecientes(en la etapa II), la condición de segundo orden para un máximo (que el diferencial IN sea negativo) se satisface automáticamente. Cada una de las n ecuaciones de la expresión (IV-24) puede reordenarse y tomar la forma,

$$\text{(IV-25)} \qquad PMgxi = \frac{PXi}{Py} \qquad 5/$$

ó

$$(PMgxi)Py \; 6/ = PXi$$

La solución de este sistema permite obtener el conjunto de las Xi que determinan las condiciones óptimas de operación.
La sustitución de estos valores en las funciones de respuesta y objetiva, respectivamente, proporcionan los niveles de producto 7/ y beneficio a lograrse bajo las condiciones óptimas de operación.
Es de anotar, que, puesto que PXi y Py deben ser positivos, las ecuaciones(IV-25) señalan que PMgxi debe ser siempre positivo para maximizar el beneficio.

5/ Denominado camino de expansión

6/ También se conoce con el nombre de valor del producto marginal

7/ Este es llamado producción óptima con la cual se maximiza el ingreso neto.

Como en los casos de uno a dos insumos variables, la producción con cualquier PMgxi negativo es de todas maneras irracional. Por tanto, el rango de operación será en el cual todos los productos marginales sean positivos.

C. Funciones más empleadas en el proceso de respuesta 8/

1. Mitscherlich: *

Esta ecuación se basa en dos supuestos principales: Primero, una máxima producción A existe para un cultivo cualquiera en un suelo dado y Segundo, el incremento en la producción debido a las adiciones del fertilizante es proporcional a la disminución a partir de la máxima producción que puede obtenerse, cuando el fertilizante se aplica en forma indefinida. Matemáticamente puede expresarse como

$$\text{(IV-27)} \qquad \frac{dy}{dx} = c(A-Y)$$

donde dy/dx es la tasa de incremento en la producción Y producida

---

8/ Existen muchas otras funciones ademas de las aqui discutidas tales como la logaritmo, semilogaritmo, y otras formas más sofisticadas.

* La discutición amplia de esta función se encuentra en: Eid, M.T. Black, C.A. Kempthorne, O. y Zoellner J.A. 1954. Significance of soil organic phosphorus to plant growth. Agr. Exp. Sta. Iowa. State Coll. Research bull 406. Iowa. 31 p.

por adiciones del nutriente X; c es una constante de proporcionalidad. Más tarde Mitscherlich la propuso como una constante diferente e independiente para cada factor. Integrando la ecuación (IV-27) se tiene:

$$Y = A \left[1 - 10^{-c(X + b)}\right]$$

en donde Y es la producción, A la producción máxima, c el coeficiente de eficacia del fertilizante y b la cantidad de nutrimento en el suelo antes de hacer cualquier aplicación.

El empleo de esta función presenta los siguientes limitantes:

a) esta ecuación no presenta una zona donde los rendimientos disminuyen con el agregado excesivo de fertilizantes (etapa III) y

b) además al considerar solamente un factor variable no permite analizar las interacciones entre los elementos nutritivos.

2. <u>Spillman</u>

La ecuación de esta función es la siguiente:

$$Y = M - AR^X$$

en donde Y es la producción, M es la máxima producción obtenible, A es el máximo teórico obtenible al incrementar X, R es tasa de los incrementos sucesivos en la producción y X es el insumo aplicado.

R está definida como:

$$R = \frac{\Delta Y_2}{\Delta Y_1} = \frac{\Delta Y_3}{\Delta Y_2} = , \ldots\ldots\ldots\ldots , = \frac{\Delta Yn}{\Delta Yn-1}$$

donde ΔY_1 es el incremento en la producción debido al primer incremento del fertilizante, ΔY_2 por el segundo.

Otra expresión de la ecuación de Spillman es:

$$Y = M(1 - R^x)$$

La ecuación de Spillman es similar a la de Mitscherlich con la excepción de que la tasa R de incrementos sucesivos en la producción no se asume constante, para un nutrimento dado, sino que puede variar con el suelo y las condiciones climáticas.

La M de la ecuación de Spillman corresponde al valor A de Mitscherlich, mientras que la A y la R^x de Spillman corresponden en Mitscherlich a 10^{-cb} y 10^{-cx} respectivamente.

Para tres nutrimentos Spillman en 1933 propuso la siguiente función:

$$Y = M_3 \ (1 - R^{n+a}) \ (1-R^{k+c})$$

en donde n + a es la cantidad de nitrógeno en el suelo más la aplicada, p + b y k + c son respectivamente las cantidades de fósforo y potasio aplicados más las cantidades existentes en el suelo. Los otros

son parámetros anteriormente definidos y M_3 esla máxima producción obtenida con los tres nutrimentos.

3. Cobb-Douglas

La fórmula general para un solo nutrimento de la función Cobb-Douglas es la siguiente:

$Y = AX^b$

siendo

Y = producto

A = constante

x = insumo variable

b = razón de transformación cuando cambia x

b = también significa la elasticidad de producción

En forma logarítmica la función también toma la siguiente forma:

$\text{Log } Y = \text{Log } A + b \log x$

Cuando se emplea más de un insumo variable, la fórmula general es:

$Y = AX_1^{b1}X_2^{b2}X_3^{b3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n^{b_n}$

En forma logarítmica queda así:

$$\text{Log } Y = \log A + b_1 \log X_1 + b_2 \log X_2 + b_3 \log X_3 + \ldots\ldots bn \log Xn$$

siendo b_1, b_2, b_3,.....bn los coeficientes de producción individuales, ó también las elasticidades de producción individuales.

La suma $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots bn$ expresa los rendimientos a escala. Si

S = 1.0 existen rendimientos constantes a escala

S > 1.0 rendimientos crecientes a escala

S < 1.0 existen rendimientos decrecientes a escala

Ventajas y Desventajas.

Ventajas: Permite fijar la función con facilidad, con ella se puede analizar un solo factor variable.

Desventajas: No permite obtener un máximo posible

Con ella solo se puede analizar una de las etapas de producción.

4. <u>Otros Tipos de Funciones</u>

Cuadrática

La función cuadrática puede presentar las siguientes formas:

-Para un solo insumo

$$Y = A + b_1x_1 + b_2x_1^2$$

Y = producción

A = constante (producción que se obtiene sin aplicar fertilizantes)

b_1 = coeficiente de producción del factor variable

x_1 = factor variable (al variar linealmente)

b_2 = coeficiente de producción del factor variable (al variar cuadráticamente).

x_1^2 = factor variable (al variar cuadráticamente).

-Para dos factores variables con interacción entre ellos

$$Y = a + b_1x_1 + b_2y_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2$$

También se puede presentar interacción lineal-cuadrática ($x_1x^2, x_1^2x_2$) e interacción cuadrática-cuadrática ($X_1^2X_2^2$). Estas últimas interacciones no se incluyen porque aportan poco al analisis y hacen la ecuación mucho más compleja y dificil de manejar. Cuando existen n factores la ecuación se puede generalizar, teniendo en cuenta todas las posibles interacciones lineales entre ellos.

Raíz Cuadrada

Para un solo factor variable la función sería:

$$Y = A + b_1x_1 + b_2 \sqrt{x_1}$$

ó también

$$Y = A + b_1x_1 + b_2x_1^{\frac{1}{2}}$$

La función raiz cuadrada se puede considerar como una variación de la cuadrática. Teniendo esto en cuenta se puede generalizar la raíz cuadrada lo mismo que la cuadrática para dos ó más factores, teniendo en cuenta que en vez de los términos cuadráticos (X_1^2, X_2^2.....Xn) van las raíces cuadradas ($X_1^{\frac{1}{2}}$, $X_2^{\frac{1}{2}}$, $Xn^{\frac{1}{2}}$)

Funciones Cúbicas

La función cúbica para un solo factor sería:

$$Y = A + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3$$

Para dos factores sin interacción entre ellos:

$$Y = A + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + b_4x_2 + b_5x_2^2 + b_6x_2^3$$

Para dos factores con interacción lineal sería:

$$Y = A + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + b_4x_2 + b_5x_2^2 + b_6x_2^3 + b_7x_1x_2$$

Tal como se explicó para la ecuación cuadrática, se pueden incluir n factores con todas las posibles interacciones entre ellas. Lo mismo es válido para la no inclusión de interacciones por encima de las lineales.

D. Selección de Funciones

Para efectuar el análisis de la producción física(ton/Ha de caña de azúcar) se empleó el sistema de superficies de respuesta, mediante el cual se puede seleccionar la función de producción que más se adapte a los resultados obtenidos.

Dicha selección se lleva a cabo a través de ciertos criterios como: lógica a priori, basado en la experiencia del investigador y los análisis gráficos del experimento. Además, se utilizan otros criterios estadísticos como el coeficiente de determinacion, la significancia de los coeficientes dentro del modelo y el análisis de varianza. Todos los anteriores conceptos son discutidos en una sección posterior de este capítulo.

1. Criterios de Selección de Funciones

a. Lógica a Priori

Para decidir acerca del tipo de forma de relación funcional es de gran importancia la experiencia que el investigador tenga acerca del efecto de un determinado nutrimento. Así por ejemplo, si se conoce de antemano que la respuesta de un elemento es curvilínea se debe seleccionar una función que se ajuste a este tipo de efecto.

b. Observación Gráfica

Es muy probable que la parte del análisis que le rinde más provecho al investigador es la familiarización con los datos. Los cálculos estadísticos solo sirven como herramienta para la selección de funciones y no son una meta para las labores del investigador. Por ello, es preciso que el investigador conozca bien sus datos para que pueda sacar conclusiones apropiadas.

Una vez de que el investigador esté familiarizado con los datos, la mejor manera de conocer los mismos es verlos en forma gráfica. Graficando los datos es factible formular ideas sobre el comportamiento de los factores, o sea, emitir juicios sobre la posible relación funcional existente entre la producción de un determinado cultivo a la aplicación de uno ó más insumos. Por otra parte, a veces pueden crearse relaciones evidentes a ojo que en realidad no existen. Sin embargo, la primera etapa de un buen análisis de datos experimentales es llevarlos a una o más gráficas.

Es relativamente fácil estudiar la relación entre dos variables, pero se hace más complicado cuando el número de variables es superior a dos. Una manera útil de estudiar ésto es sumar las variables independientes en una unidad común. En el presente caso se puede obtener la suma de $N + K_2O$ y graficar esta contra la producción media para cada tratamiento, tal como aparecen en las

tablas 6 y 7 y los gráficos 4 y 5, que corresponden al experimento que se describirá en el literal siguiente y se analizará en el próximo capítulo.

c. Bondad de Ajuste y Otros Criterios Estadísticos 9/

Esta es una información a posteriori, ya que primero se fija la función de producción y posteriormente se obtiene el R^2 ó coeficiente de determinación.

El R^2 es una de las medidas estadísticas que permite ver como se ajusta el modelo seleccionado a los datos del experimento. Este coeficiente es la proporción de la variación total explicada por la regresión.

En el caso de estar estimando una superficie de respuesta para un determinado cultivo, o animal, el R^2 explica la proporción de varianza debida a los factores que estén involucrados en la función estimada. Así por ejemplo, si se designa la producción por Y y los insumos por X_1, X_2.....Xn, el coeficiente de determinación será:

9/ Además del R^2, se deben tener en cuenta la significancia de los coeficientes y el análisis de varianza. Estos dos últimos conceptos son discutidos ampliamente en el apéndice 1.

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^{p} bj \sum_{i=1}^{i=n} X_{ij}Y_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2} \; ; \quad j=1,2,\ldots,p.$$

en el cual $\sum_{j=1}^{p} bj \sum_{i=1}^{n} X_{ij}Y_i$; es llamada suma de cuadrados de la regresión con respecto a la media y $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ es la suma de cuadrados total con respecto a su media, esta última está compuesta por la suma de cuadrados de la regresión más la suma de cuadrados del error ó sea:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Mediante la bondad de ajuste (R^2), el investigador puede determinar el tipo de función más adecuada para sus datos. Sin embargo, este solo criterio no es suficiente para seleccionar una determinada función, por tanto, se hace necesario recurrir a otros criterios como los que se discuten a continuación para seleccionar una función que interprete el fenómeno estudiado.

d. <u>Lógica a Posteriori</u>

Después de haber escogido una función de producción utilizando los criterios de selección discutidos antes, se procede a realizar

un último chequeo. Este consiste en obtener la máxima producción física empleando la función seleccionada. Las cantidades de insumos para obtener dicha producción deben ser igual o menores a las cantidades máximas de insumos aplicadas en el experimento. En caso contrario, la función debe rechazarse.

Debe tenerse en cuenta que el análisis económico a través de superficies de respuesta se lleva a cabo cuando la experimentación de respuesta física a la aplicación de insumos, ha establecido el comportamiento de producción del cultivo ó del animal y las dosis de insumos más recomendables para dicho comportamiento.

Puede darse el caso que un experimento de respuesta física haya sido incompleto, o exploratorio, o mal llevado y en este caso no se debe hacer un análisis económico. Cuando se juzgue conveniente llevarlo a cabo, se haría con el único objeto de mostrar el por qué el experimento fué incompleto o mal llevado y los inconvenientes de aplicar sus resultados.

E. Descripción del Experimento Realizado

1. Sitio

El experimento se llevó a cabo en 1965-66 en el municipio de Frontino, el cual está a 1.425 m. s.n.m. con una temperatura promedia de 22°C,

una precipitación anual de 2.150 m.m. (milímetros) con períodos secos desde enero a mediados de marzo.

2. Experimento Realizado

Se escogió la variedad P.O.J. 28-78 que ocupa el 80% de los cultivos comerciales de la zona. El suelo es franco y el análisis químico correspondiente aparece en la tabla 4.

Tabla 4: Análisis químico del suelo de un ensayo de fertilización de caña de azúcar para panela en Frontino (Antioquia). 1967

VARIABLES	Resultados	Apreciacion**
pH	6,1	ligeramente ácido
C.I.C	21,7 m.e/100 gr.suelo	media, alta
Bases totales	9,8 m.e/100 " "	regular
Saturación de bases	29,7%	media alta
Carbono orgánico	1,89%	normal
N total	0,16%	normal
P_2O_5 aprovechable	43,7%	pobre-regular
Saturación de calcio	9,8%	pobre-regular
Saturación de magnesio	6,3%	regular
Saturación de potasio	3,75%	alto

Fuente: Vélez W.B. op.cit. p.33

** Según criterio agrológico del Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

El experimento consistió en un diseño factorial en arreglo de bloques al azar con tres replicaciones y 24 tratamientos.

Las parcelas fueron:

10.80 mts. ancho - 15,00 mts. largo

Calles entre las parcelas 3,0 mts.

Calles entre los surcos 1,80 mts.

Distancia entre plantas 1,00 mts.

Surcos por parcela: 6

Plantas por surco: 15

2 colinos de cuatro yemas colocados horizontalmente en cada hoyo se aplicaron por hectárea las siguientes cantidades de:

N	0	50	100	150	200	250
P	100	100	100	100	100	100
K	0	50	100	150		

En el momento de la siembra debajo de los colinos y cubierto con suelo, se aplicó todo el fósforo, una quinta parte del N y la mitad del potasio. La segunda aplicación se efectuó tres meses más tarde aplicándose dos quintas partes de nitrógeno y la mitad restante del potasio en forma de corona. Cinco meses mas tarde se aplicaron las dos quintas partes que faltaban del N. A los 16 meses se tomaron al azar y se pesaron 20 plantas de los 4 surcos centrales.

Los resultados en toneladas por hectárea de caña, se utilizarán en el capítulo quinto para llevar a cabo el análisis agroeconómico.