UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE INGENIERÍA

PROPUESTA DE UN ALGORITMO PARA LA PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS DE ROBOTS MÓVILES EMPLEANDO CAMPOS POTENCIALES Y ENJAMBRES DE PARTÍCULAS ACTIVAS BROWNIANAS

HELBERT EDUARDO ESPITIA CUCHANGO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
BOGOTÁ D. C.
2011

PROPUESTA DE UN ALGORITMO PARA LA PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS DE ROBOTS MÓVILES EMPLEANDO CAMPOS POTENCIALES Y ENJAMBRES DE PARTÍCULAS ACTIVAS BROWNIANAS

HELBERT EDUARDO ESPITIA CUCHANGO

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de
MAGISTER EN INGENIERÍA - INGENIERÍA MECÁNICA

Director:
Ph.D., Jorge Iván Sofrony Esmeral
Profesor Asociado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
BOGOTÁ D.C.
2011

DEDICATORIA

A Dios por permitirme vivir y ser la luz en todo momento de mi existencia.

A mis padres porque ellos han sido las bases sólidas sobres las cuales se ha edificado mi vida.

A Carol.

A las personas especiales que han partido.

RECONOCIMIENTOS

Un agradecimiento muy especia para:

- Ingeniero Jorge Iván Sofrony E. quien fue una guía incondicional y que con sus sabias decisiones y orientaciones fue clave para el desarrollo del proyecto.
- Profesores de la facultad que ayudaron al desarrollo del proyecto.

Resumen

En este documento se propone un algoritmo para la planificación de trayectorias basado en el movimiento de partículas activas Brownianas. Uno de los métodos más populares en la planificación de trayectorias es el basado en campos potenciales artificiales. Sin embargo, este método tiene la desventaja de presentar mínimos locales que pueden hacer que el robot no llegue al punto destino. El algoritmo propuesto emplea un modelo de partículas activas Brownianas con comportamientos circulares lo cual permite escapar de mínimos locales. También se realiza un análisis aproximado para la versión determinista del modelo seleccionado, comprobando mediante simulaciones que los resultados obtenidos son consistentes con el comportamiento del sistema. El algoritmo propuesto se probó en cinco casos observando tanto resultados cualitativos como cuantitativos del desempeño del algoritmo.

Palabras clave: Robótica móvil, planeación de trayectorias, enjambre de partículas.

Abstract

This document proposes an algorithm for trajectory planning based on the motion of active Brownian particles. One of the most popular approaches in path planning is using the artificial potential fields method. However, this method has the disadvantage of local minima which can make the robot fail when reaching the destination point. The proposed algorithm uses an active Brownian particle model with circular behaviors, which allows escaping from local minima. An approximate analysis for the deterministic version of the selected model was performed and it was observed, via simulations, that the results obtained were consistent with the behavior of the system. The proposed algorithm is tested on five cases, observing both qualitative and quantitative results on the performance of the algorithm.

Keywords: Mobile robotics, path planning, swarm of particles.

Índice general

Introducción IX

I Descripción del proyecto 1

1. Descripción del proyecto 2

1.1. Resumen del proyecto 2

1.2. Justificación 2

1.3. Identificación del problema 2

2. Objetivos 3

2.1. Objetivo general y objetivos específicos 3

2.1.1. Objetivo general 3

2.1.2. Objetivos Específicos 3

3. Estado del arte 5

3.1. Antecedentes 5

3.1.1. Métodos para planeación de trayectorias 5

3.1.2. Planificación basada en grafos 6

3.1.3. Planeación de trayectorias empleando campos potenciales 7

3.1.4. Algoritmos de búsqueda aleatoria 8

3.1.5. Métodos basados en optimización estocástica 9
3.1.6. Comportamiento de enjambres 9
3.1.7. Planeación de trayectorias empleando quimiotaxis bacteriana 10
3.1.8. Enjambres y campos potenciales 11
3.1.9. Campos potenciales y movimientos aleatorios 11
3.1.10. Planeación de trayectorias basada en caminata aleatoria 11
3.1.11. Métodos para evadir mínimos locales en campos potenciales 12

II Marco teórico **13**

4. Robótica móvil **14**

4.1. Introducción 14
4.2. Definiciones y notación 14
4.2.1. Espacio de trabajo 15
4.2.2. Espacio de configuraciones 15
4.2.3. Grados de libertad 15
4.2.4. Cinemática y restricciones 15
4.2.5. Jacobiano y singularidades 16
4.2.6. Obstáculos y trayectorias en el espacio de configuraciones 17
4.3. Robot manipulador de dos eslabones 18
4.4. Robots móviles 21
4.4.1. Tracción diferencial 22
4.4.2. Tracción síncronica 23
4.4.3. Tracción tipo triciclo 23
4.4.4. Tipo Ackerman 23
4.5. Restricciones cinemáticas 24
4.6. Cinemática de un robot móvil 25

4.6.1. Cinemática de un robot móvil de tracción diferencial 25
4.7. Espacio de configuraciones para robots móviles 27
4.7.1. Mapeo de obstáculos al espacio de configuraciones 28
4.8. Navegación y control de movimientos 29
4.8.1. Control de movimientos 29
4.8.2. Seguimiento mediante persecución pura 30

5. Planeación de trayectorias 32
5.1. Introducción 32
5.2. Problema de planeación de trayectorias 32
5.3. Campos potenciales 33
5.3.1. Ventajas y desventajas 36
5.3.2. Funciones de potencial 37
5.4. Para resaltar 38

III Desarrollo 39

6. Revisión sobre modelos de enjambres de partículas activas Brownianas 40
6.1. Introducción 40
6.2. Modelos del zooplancton Daphnia 41
6.3. Modelo de Vicsek 42
6.4. Modelo de Levine 42
6.5. Modelos de partículas activas Brownianas 43
6.5.1. Modelo de una partícula activa Browniana 43
6.5.2. Modelo para un enjambre de partículas Brownianas 44
6.5.3. Interacción de partículas activas Brownianas con acople global . . . 45
6.5.4. Modelo con acople global y deposito interno de energía aproximado 45
6.5.5. Interacciones hidrodinámicas 46

6.5.6. Modelo con maniobras de evasión 46

7. Selección del modelo 48

7.1. Introducción 48

7.2. Esquema general de modelo seleccionado 48

7.2.1. Términos disipativos y de autopropulsión 49

7.2.2. Términos de interacción 50

7.2.3. Término dependiente del espacio 51

7.2.4. Término estocástico 51

7.3. Términos seleccionados 52

7.3.1. Modelo seleccionado 52

7.4. Simulación del modelo 53

8. Análisis del modelo seleccionado 59

8.1. Introducción 59

8.2. Comparación con el modelo de evasión de mínimos locales 59

8.2.1. Modelo de evasión de mínimos locales 60

8.2.2. Modelo de partículas activas Brownianas 61

8.2.3. Comparación de modelos 62

8.3. Análisis de la formación de vórtices 63

8.3.1. Posición y velocidad media del enjambre 64

8.3.2. Análisis de energía 65

8.3.3. Análisis de momento angular 67

9. Implementación del modelo y propuesta del algoritmo 70

9.1. Introducción 70

9.2. Implementación del modelo 70

9.3. Estrategia propuesta para la evasión de mínimos locales 71

9.4. Algoritmo propuesto 72

10. Análisis cualitativo de resultados 73

10.1. Introducción 73

10.2. Método de campos potenciales basado en gradiente 73

10.3. Método propuesto 75

10.3.1. Campo potencial sin mínimo local 76

10.3.2. Campo potencial con mínimo local 79

10.3.3. Campo potencial con obstáculo tipo barrera 85

10.4. Configuraciones especiales 91

10.4.1. Campo potencial con pasaje estrecho 92

10.4.2. Campo potencial con trampa tipo U 98

11. Análisis estadístico de resultados 105

11.1. Introducción 105

11.2. Metodología 105

11.2.1. Pruebas estadísticas de hipótesis 106

11.3. Análisis de resultados 107

11.3.1. Campo potencial sin mínimo local 107

11.3.2. Campo potencial con mínimo local 108

11.3.3. Campo potencial con obstáculo tipo barrera 109

11.3.4. Campo potencial con pasaje estrecho 111

11.3.5. Campo potencial con trampa tipo U 112

12. Conclusiones y expectativas futuras 113

A. Nomenclatura utilizada 115

Introducción

Uno de los aspectos de interés en robótica móvil consiste en determinar una trayectoria adecuada para que un robot pueda desplazarse desde un punto inicial a uno objetivo. Dado que el espacio de trabajo suele tener obstáculos es importante garantizar una trayectoria libre de colisiones. En el presente documento se propone un método para la planeación de trayectorias de robot móviles tomando como referencia un modelo de partículas activas Brownianas.

El presente documento se encuentra organizado en tres partes fundamentales las cuales se describen a continuación.

Parte 1: Contiene información sobre la formulación del proyecto; descripción, justificación, objetivos y estado del arte.

Parte 2: Dispuesta para el marco teórico del proyecto el cual está compuesto por una revisión sobre los diferentes aspectos de robótica móvil relacionados con el problema de planeación de trayectorias, posteriormente se revisan los métodos para la planeación de trayectorias resaltando el método de campos potenciales.

Parte 3: En este grupo de capítulos se presenta el desarrollo del proyecto, en una primera instancia se efectúa una revisión de modelos de partículas activas con características de vorticidad, posteriormente se realiza la selección del modelo donde se busca tener una expresión compacta con pocos parámetros, luego se desarrolla un análisis aproximado del modelo para observar las características del mismo. En el siguiente capítulo se propone el algoritmo para la planeación de trayectorias, luego de tener definido el algoritmo éste se prueba en diferentes casos clásicos y en dos problemas especiales que aparecen en la planeación de trayectorias. Los casos especiales considerados son: el paso por caminos estrechos y escape de obstáculos tipo trampa. Finalmente se presentan las conclusiones de los resultados y el desempeño del algoritmo.

Parte I

Descripción del proyecto

Capítulo 1

Descripción del proyecto

1.1. Resumen del proyecto

El presente proyecto consiste en el desarrollo de un algoritmo para la planeación de trayectorias de robots móviles empleando campos potenciales artificiales y enjambres de partículas activas Brownianas. El algoritmo propuesto emplea la característica de vorticidad del enjambre para lograr escapar de mínimos locales. El algoritmo consiste en detectar la llegada a un mínimo local para incrementar su energía interna y así aumentar el radio de giro del enjambre lo cual le permite escapar del mínimo local.

1.2. Justificación

En robótica existen diferentes métodos para la planeación de trayectorias [36], [37], [62], [64] y [74], siendo el método de campos potenciales artificiales de los más atractivos por estar fundamentado en la teoría de campos eléctricos [51], sin embargo estos presentan problemas de mínimos locales [44], [48], varias propuestas para atender esta problemática se han desarrollado [4], [5], [6], [13], [15], [16], [47], [70] y [87], sin embargo en el momento no se tiene una solución definitiva a este problema. Debido a lo anterior se aprecia la posibilidad de explorar la capacidad que tienen las partículas activas Brownianas para evadir mínimos locales en campos potenciales.

1.3. Identificación del problema

Los métodos basados en campos potenciales para la planeación de trayectorias en robótica móvil presentan problemas de mínimos locales [44], [48], por lo cual, es importante investigar sobre métodos que ayuden a superar este aspecto.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo general y objetivos específicos

En este proyecto se busca emplear un modelo de enjambre de partículas activas Brownianas para la planeación de trayectorias en robótica móvil. Lo anterior se propone ya que trabajos como los desarrollados por Kevin Passino [68] y Colin McInnes [1] donde se utilizan enjambres para la planeación de trayectorias muestran ser una buena alternativa. En particular, es de resaltar el trabajo de Colin McInnes donde se emplea un enjambre con características de vorticidad para evadir mínimos locales. La propuesta presentada por Colin McInnes utiliza un modelo amplio con varios parámetros sin considerar una componente Browniana y con funciones específicas de campo potencial. Uno de los aspectos que se busca con el algoritmo propuesto consiste en utilizar un modelo compacto con pocos parámetros incluyendo una componente Browniana y adicionalmente emplear funciones generales de campo potencial.

El principal aporte de este trabajo consiste en la propuesta de un algoritmo para la planeación de trayectorias que logre evadir mínimos locales de campos potenciales empleando un modelo de enjambres de partículas activas Brownianas.

2.1.1. Objetivo general

Proponer un algoritmo para la planeación de trayectorias en campos potenciales empleando enjambres de partículas activas Brownianas.

2.1.2. Objetivos Específicos

- Realizar la respectiva revisión bibliográfica.
- Proponer el algoritmo de planeación de trayectorias empleando enjambres de partículas activas Brownianas en campos potenciales.

- Establecer casos de aplicación estándar 2D considerando lo reportado en la literatura.
- Validar el algoritmo propuesto en los casos de aplicación estándar 2D encontrados en la literatura.

Capítulo 3

Estado del arte

3.1. Antecedentes

En esta sección se presenta el estado del arte de los temas relacionados con el proyecto. La primera parte consiste en una reseña de los métodos generales para la planeación de trayectorias en robótica móvil. En la segunda parte se presenta un enfoque del modelamiento enjambres de partículas para describir el comportamiento de seres vivos. En la parte final se describen algunos trabajos relacionados con la propuesta aquí presentada, estos trabajos se encuentran orientados a solucionar el problema de mínimos locales en el método de campos potenciales.

3.1.1. Métodos para planeación de trayectorias

Convencionalmente el problema de generación de trayectorias para un robot móvil indica que dado un robot y un ambiente, se puede determinar una trayectoria entre dos puntos específicos si el robot está libre de colisiones y si satisface cierto criterio de desempeño [36], [64].

Considerando las técnicas desarrolladas para la planeación de trayectorias se puede proponer la siguiente clasificación [62], [74]:

- Determinísticos:
  - Basados en grafos:
    - Grafos de visibilidad.
    - Diagramas de Voronoi.
    - Modelado del espacio libre.
    - Descomposición en celdas.
  - Campos potenciales artificiales.

- Probabilísticos y aleatorios (algoritmos de búsqueda aleatoria):
  - Planeador aleatorio de trayectorias (*Randomized Path Planner* RPP).
  - Mapas probabilísticos (*Probabilistic Road Maps* PRM).
  - Árboles de exploración rápida (*Rapidly Exploring Random Tree* RRT).
  - Basados en optimización:
    - Algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms* GA).
    - Colonia de hormigas (*Ant Colony Optimization* ACO).
    - Enjambre de partículas (*Particle Swarm Optimization* PSO).
    - Quimiotaxis bacteriana (*Bacterial Chemotaxis* BC).

3.1.2. Planificación basada en grafos

Estos métodos consisten en construir un grafo que interconecte el origen con el destino y posteriormente encontrar el camino más adecuado considerando algún índice de desempeño que por lo general es la distancia más corta [62].

Grafos de visibilidad

Propuesta por Nils J. Nilsson [63], consiste en un enfoque geométrico para construir el grafo suponiendo un entorno bidimensional donde los obstáculos se pueden representar por polígonos. El grafo se determina aplicando el concepto de visibilidad el cual consiste en determinar si dos puntos sobre el espacio se pueden unir mediante un segmento de recta que no presente interferencia con ningún obstáculo. Se genera un grafo de conectividad entre vértices visibles y se escoge la mejor ruta. Presenta el inconveniente de generar rutas muy cercanas a los obstáculos [63].

Diagramas de Voronoi

Con este método las líneas de la ruta se localizan lo más alejado posible de los obstáculos buscando maximizar la distancia entre obstáculos y la ruta [77]. El grafo se forma de segmentos rectilíneos y parabólicos dependiendo la forma de los obstáculos que se encuentran a igual distancia de los dos obstáculos más próximos.

Modelado del espacio libre

Método desarrollado por Rodney A. Rrooks [8], generalmente se aplica a espacios de trabajo con obstáculos poligonales. La construcción del grafo se realiza mediante cilindros rectilíneos generalizados (CRG). Al emplear los CRG se busca que el móvil se desplace de la forma más lejana de los obstáculos. La ruta desde la configuración inicial hasta la final está compuesta por una serie de CRG interconectados.

Descomposición en celdas

Estos métodos consiste en descomponer el espacio libre en un conjunto de celdas desde el punto inicial hasta el final, por lo tanto, el problema consiste en encontrar una sucesión de celdas que no presente discontinuidades. Mediante un grafo es posible determinar la conectividad de las celdas.

Los métodos empleados para la descomposición de celdas pueden ser exactos o aproximados. Los métodos exactos consisten en descomponer el espacio libre en celdas donde la unión de estas corresponde al espacio libre, un ejemplo de esta orientación se puede apreciar en [80]. En los métodos aproximados se construyen celdas de una forma establecida donde su unión no es exactamente el espacio libre [55]. Con los métodos exactos se puede garantizar encontrar un camino si existe lo cual no se puede garantizar con los métodos aproximados. La ventaja que tienen los métodos aproximados es su facilidad de implementación [37].

3.1.3. Planeación de trayectorias empleando campos potenciales

El método de campos potenciales resulta ser de las técnicas más populares en la generación de trayectorias para robots móviles por ser una forma elegante en la solución de este problema. De los primeros desarrollos se tiene el presentado por Khatib [44], aquí se propone que los obstáculos y el robot tienen un carga eléctrica del mismo signo con la finalidad de generar una repulsión mientras que la meta tiene asociada una carga eléctrica de signo opuesto para atraer al robot al punto destino. Convencionalmente los potenciales atractivos y repulsivos se generan de forma separada y el potencial total del espacio de trabajo es obtenido como la suma de estos.

Para generar la trayectoria con estos potenciales solo se requiere el cálculo de gradientes, sin embargo, los campos potenciales generados pueden ser no convexos presentando mínimos locales lo cual dejaría caer al robot en una trampa. Otra desventaja consiste en la estimación de los parámetros del campo potencial para lograr una adecuada evasión de obstáculos. Modificaciones al planteamiento original de campos potenciales se realiza considerando las anteriores limitaciones, Volpe y Khosla [45] proponen funciones potenciales super-quadraticas (*Superquadric Artificial Potential Functions*), donde se utiliza un amplio conjunto de formas desde rectángulos hasta elipses empleando fórmulas supercuadraticas. Una propuesta basada en la solución de la ecuación de Laplace para la transferencia de calor es propuesta de forma separada por Connolly [18] y adicionalmente por Kim y Khosla [46], este método no presenta mínimos locales para configuraciones simples y se genera mediante funciones potenciales harmonicas (*Harmonic Potential Functions*). Para el caso donde se tienen obstáculos en movimiento S.S. Ge y Y.J. Cui [34], proponen un nuevo conjunto de funciones potenciales las cuales dependen tanto de la posición como de la velocidad de los obstáculos.

Un problema adicional identificado tanto por S.S. Ge y Y.J. Cui [34] como por R. Volpe y P. Khosla [45], aparece cuando el campo potencial de un obstáculo encierra el objetivo

lo cual ocurre cuando estos dos se encuentran muy cercanos, este problema es denominado GNRON (*Goals Non Reachable With Obstacle Nearby*), los anteriores autores en sus trabajos proponen diferentes tipos de campos potenciales para solucionar este problema.

Los anteriores métodos debido a su característica de adición de campos asociados a los obstáculos se denominaron campos potenciales locales. En contraste con la anterior orientación se tienen los campos potenciales globales donde se considera la totalidad de los obstáculos como también el objetivo para construir el campo potencial como un todo y no como la adición de partes, con esta orientación se busca eliminar el problema asociado a los mínimos locales. Bajo este nuevo enfoque aparecen las funciones de navegación (*Navigation Function*), propuestas por Rimon y Koditschek [73] las cuales son explícitamente diseñadas para presentar un único mínimo local en el objetivo puesto que los demás puntos de equilibrio son enmascarados (rellenados). Para construir las funciones de navegación es necesario conocer completamente el espacio de trabajo perdiendo la simplicidad y ventajas computacionales que presentan los métodos locales [51].

Una aplicación de campos potenciales globales se puede apreciar en [51] donde se emplea un esquema cooperativo de varios robots en un campo potencial para la planeación de trayectorias. En este trabajo se realiza una revisión sobre las características de los diferentes métodos para generar campos potenciales.

3.1.4. Algoritmos de búsqueda aleatoria

Según [74] este tipo de métodos se pueden considerar como locales puesto que solo exploran una parte del espacio de configuraciones y están basados en movimientos aleatorios para determinar la respectiva secuencia de configuraciones para que el robot pase de la configuración inicial a la final.

Planeación aleatoria de trayectorias

El algoritmo de planeación aleatoria de trayectorias (*Randomized Path Planner* RPP) fue desarrollado por Jean-Claude Latombe y Jérome Barraquand en 1991 [5]. Este algoritmo emplea movimientos Brownianos para poder salir de mínimos locales.

Mapas probabilisticos

Este método fue propuesto en 1992 de forma separada por Jean-Claude Latombe y Lydia E. Kavraki en la Universidad de Stanford [43] y en la Universidad de Utrecht desarrollado por los investigadores Mark H. Overmars y Peer Svestka [66].

Los mapas probabilísticos (*Probabilistic Road Map Method* PRM) buscan crear un mapa generado de forma aleatoria libre de colisiones el cual conecta de forma rápida el

móvil con el objetivo. En [89] se puede apreciar la implementación del algoritmo PRM aplicado a robots manipuladores.

Árboles de exploración rápida

Una alternativa en la generación aleatoria de trayectorias son los árboles de exploración rápida (*Rapidly Exploring Random Tree* RRT), este método fue propuesto por Steven M. LaValle en 1998. En este método se crean árboles que se expanden de forma aleatoria para tener una conexión desde el punto de partida hasta el objetivo [53].

3.1.5. Métodos basados en optimización estocástica

Estos métodos utilizan técnicas de optimización estocástica por lo general bio-inspiradas. Una primera aplicación emplea algoritmos genéticos en la planeación de trayectorias [32], [35], [54], [88]. Este tipo de enfoque es útil en espacios de búsqueda muy amplios.

Otra estrategia probabilística, consiste en emplear la técnica de optimización basada en colonias de hormigas, un ejemplo de esta aplicación es desarrollada en [69].

Trabajos adicionales para la planeación de trayectorias con métodos de optimización bio-inspirada consisten en la aplicación del algoritmo de optimización basado en quimiotaxis bacteriana [17] y optimización basada en comportamientos de enjambres *Particle Swarm Optimization* (PSO) [79].

Un trabajo donde se examina de forma general la planeación de trayectorias empleando técnicas evolutivas se observa en [10].

3.1.6. Comportamiento de enjambres

En la naturaleza se pueden apreciar diferentes comportamientos los cuales han sido de atención para su descripción de forma analítica, en particular el comportamiento de congregaciones de individuos resulta ser una temática interesante por los diferentes patrones que forman los individuos y que están dados por la interacción de los mismos. De los trabajos a resaltar en la descripción de este tipo de comportamiento se tiene el presentado en [84], donde se desarrolla un modelo básico para describir el comportamiento de enjambres de individuos. Una extensión del anterior trabajo se realiza en [85] donde se presentan algunos patrones básicos de los comportamientos de enjambres. Por otro lado en [82] se realiza una revisión del comportamiento colectivo de enjambres observando las propiedades de la auto-regulación y los principios del comportamiento colectivo como lo son: la integridad y variabilidad, realimentación positiva, realimentación negativa, umbrales de respuesta, dirección, inhibición, redundancia, sincronización y egoísmo.

El comportamiento de enjambres ha sido empleado con éxito en problemas de optimi-

zación, logrando convergencia en problemas multiobjetivo de alta complejidad tal como se aprecia en [2], [39], [90] y [91]. La planeación de trayectorias por campos potenciales puede ser visto como un problema de optimización donde se busca conducir una partícula, o grupo de partículas, a un mínimo global o meta. Desafortunadamente y como es común en problemas de optimización, existen complicaciones ya que al generar los campos potenciales se presentan mínimos locales los cuales puede hacer que la trayectoria nunca converja a la meta.

Por lo general el enfoque de enjambre se ha empleado para la coordinación de un grupo de robots de lo cual existen varios trabajos como los presentados en [41], [51], [67], [71] y [78]. También se han reportado aplicaciones en las cuales los enjambres se emplean en la planeación de trayectorias para poder evadir mínimos locales. Los trabajos más relevantes con este enfoque son los desarrollados por Kevin Passino (Quimiotaxis bacteriana) [68] y Colin McInnes (Enjambres con estados internos) [1], sin embrago por el momento no se han empleado ampliamente modelos de partículas activas Brownianas.

Modelos de partículas auto-propulsadas y Brownianas

La descripción del comportamiento de muchos entes biológicos se caracteriza por exhibir movimiento cooperativo coordinado, tal como poblaciones de bacterias la cuales presentan movimientos basados en quimiotaxis, también se observa este tipo de comportamiento en bandadas de aves, cardúmenes de peces e incluso en microorganismos como el zooplancton Daphnia [30], [42], [86]. De los modelos más empleados para representar este comportamiento se tienen el de partículas autopropulsadas [52], [65] y de partícula activa Browniana [25], el segundo modelo considera una componente estocástica a diferencia del primero. Estos modelos tienen la característica de poder describir el movimiento de partículas con vorticidad. Por lo general estos modelos suelen emplear potenciales de Morse para representar la interacción entre individuos sin embrago en [29] se puede observar un modelo donde se emplea un potencial cuadrático para describir la interacción entre individuos.

3.1.7. Planeación de trayectorias empleando quimiotaxis bacteriana

La quimiotaxis bacteriana es el mecanismo mediante el cual las bacterias buscan alimento. Principalmente esta estrategia consiste de dos tipos de movimiento, el primer tipo de movimiento es de linea recta cuando la bacteria se encuentra en un campo de nutrientes buscando de esta forma el punto de mayor concentración, el segundo tipo de movimiento es aleatorio y ocurre cuando la bacteria se encuentra en un ambiente neutro de nutrientes o cuando pasa un determinado tiempo con un movimiento en linea recta [20].

Kevin Passino en [68] realiza la formulación para emplear el algoritmo de optimización basado en forrajeo de bacterias (*Bacterial Foraging Optimization Algorithm* BFOA) como método para la generación de trayectorias donde la función objetivo considera un término asociado a los obstáculos y otro para el punto destino. La función asociada a los obstáculos

se realiza bajo la orientación de campos potenciales y la función del punto destino se establece como el cuadrado de la distancia euclidiana.

3.1.8. Enjambres y campos potenciales

Desde el punto de vista de enjambres y su movimiento en campos potenciales, en [51] se presenta la simulación de este tipo de comportamiento empleando campos potenciales con funciones de navegación las cuales no contienen mínimos locales. En [51] se considera la presencia de fuerzas de atracción y repulsion entre los individuos del enjambre, adicionalmente, en este documento se realiza una buena descripción de los campos potenciales empleados para la generación de trayectorias en robótica.

3.1.9. Campos potenciales y movimientos aleatorios

En [5] se aprecia un adelanto en el esquema aleatorio para la planeación de trayectorias con campos potenciales donde se alternan movimientos descendentes en el campo potencial y movimientos de escape de los mínimos locales. Esta propuesta es realizada por Jean-Claude Latombe.

Posteriormente en [6] se realiza una mejora de los algoritmos inicialmente desarrollados en [5], donde se propone el algoritmo de planeación aleatoria de trayectoria *Randomized Path Planner* (RPP), este algoritmo se encuentra basado en movimientos Brownianos y caminata aleatoria.

Adicionalmente en [4], [15] y [47], se puede apreciar la implementación de la técnica de caminata aleatoria para escapar de mínimos locales en campos potenciales. Una mejora de este algoritmo se presenta en [13] donde se incluyen heurísticas al método RPP para aumentar su eficiencia ya que este suele ser ineficiente en la presencia de mínimos locales.

3.1.10. Planeación de trayectorias basada en caminata aleatoria

Un algoritmo para la planeación de movimientos basado en caminata aleatoria se presenta en [11] el cual es similar al algoritmo de árboles de exploración rápida pero donde se considera un factor de crecimiento del árbol en la dirección del objetivo. Posteriormente, estos mismos autores en [12] proponen el *Adaptive Random Walks* (ARW) el cual incorpora al algoritmo de caminata aleatoria información del objetivo como un campo potencial, aunque en su implementación se considera esta información con una función de probabilidad asociada a la distancia presente entre el robot y el objetivo. Con el anterior enfoque se pretende influir en la búsqueda basada en caminata aleatoria con estrategias denominadas avaras (*greedy*). Los autores presentan esta técnica como una combinación de RPP y del algoritmo de búsqueda basado en caminata aleatoria.

3.1.11. Métodos para evadir mínimos locales en campos potenciales

Un trabajo relacionado pero enfocado con la sintonía de los parámetros de campos potenciales se presenta en [70], a esta técnica los autores la denominaron campos potenciales evolutivos (*Evolutionary Artificial Potential Field* EAPF), aquí se propone un algoritmo para evadir los mínimos locales el cual es llamado Fuerza de Escape (*Escape Force*) el cual consiste en determinar los mínimos locales observando los puntos donde el gradiente del campo potencial es nulo para posteriormente aplicar una fuerza adicional que le permite al robot evitar el mínimo local.

Un método adicional para evadir mínimos locales consiste en generar un objetivo virtual, en este caso, cuando el robot se encuentra en un mínimo se genera un objetivo virtual en lugar del global hasta que el robot logre salir de este punto [87]. Este enfoque se realiza para que el robot pueda rodear obstáculos. Otro trabajo bajo una orientación similar consiste en adicionar un obstáculo virtual con la finalidad de evitar los mínimos locales en el campo potencial [16].

Finalmente en [1] se emplean un conjunto de agentes con comportamiento de enjambre y en particular con características de vórtice con la finalidad de evitar los mínimos locales, esta técnica se denomina *Local Minimal Avoidance* (LMA), o *Local Minimal Escape* (LME).

Parte II

Marco teórico

Capítulo 4

Robótica móvil

4.1. Introducción

En este capítulo en primer lugar se revisan algunos conceptos generales en robótica tales como espacio de trabajo, espacio de configuraciones, grados de libertad y cinemática directa e inversa. Aunque la descripción se realiza con un enfoque hacia la robótica móvil estos conceptos se pueden extender a robots manipuladores, por lo cual, como ejemplo se observan algunos de estos conceptos aplicados a un robot manipulador de dos eslabones.

El segundo aspecto de interés en este capítulo consiste en los conceptos relacionados con robótica móvil. En primer lugar se considera su clasificación como también las diferentes configuraciones de robots móviles con ruedas. Adicionalmente se revisan los aspectos relacionados con la planeación de trayectorias donde se enfatiza sobre la representación de los obstáculos en el espacio de configuraciones. De los aspectos a resaltar en este capítulo se tiene la equivalencia del espacio de trabajo y el espacio de configuraciones cuando el robot móvil es considerado como una partícula. Cuando se tiene la anterior situación la navegación del robot queda sujeta al seguimiento de la trayectoria, lo cual se presenta en la sección final.

4.2. Definiciones y notación

A continuación se realiza la definición de conceptos sobre robótica tales como espacio de trabajo, espacio de configuraciones, grados de libertad, cinemática directa e inversa y restricciones cinemáticas.

4.2.1. Espacio de trabajo

El espacio de trabajo $\mathcal{W}$ de un robot $\mathcal{A}$ corresponde a la colección de todos los puntos sobre los cuales el robot puede acceder [81].

4.2.2. Espacio de configuraciones

Una configuración q consiste de un vector de parámetros que permiten describir la posición de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{W}$ [81]. El espacio de configuraciones es el conjunto de todas las posibles configuraciones las cuales consisten en las posiciones de los actuadores del robot relativos a un sistema de coordenadas fijo [81]. De esta forma se puede representar el robot como un punto llamado configuración.

4.2.3. Grados de libertad

Los grados de libertad de un robot $\mathcal{A}$ son el número de parámetros necesarios para especificar sus movimientos los cuales pueden ser desplazamientos y rotaciones [81].

En robots manipuladores cada articulación provee un grado de libertad. Para localizar el efector de un robot en cualquier posición y orientación en el espacio se requieren seis grados de libertad.

Un robot móvil que se mueve sobre un plano normalmente tiene tres grados de libertad los cuales se miden respecto a un punto de referencia fijo, los grados de libertad asociados son la posición del robot (x, y) y su orientación (θ).

4.2.4. Cinemática y restricciones

La cinemática de un robot establece la relación entre los movimientos de los actuadores y los movimientos que el robot realiza. Dependiendo de las variables independientes y dependientes que describen las ecuaciones de movimiento se tiene una descripción de cinemática directa o inversa.

La cinemática directa permite determinar la posición final del robot conociendo la posición o configuración inicial y los movimientos realizados por los actuadores. Mediante la cinemática inversa es posible establecer los movimientos necesarios para lograr la transición del robot de una posición inicial a una final. Siendo $\vec{w} = [w_1, w_2, \ldots, w_m]^T$ las posiciones y orientaciones del robot en el espacio de trabajo y $\vec{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T$ los desplazamientos de los actuadores en el espacio de configuraciones, entonces, la cinemática directa se puede definir mediante la expresión 4.1 y la cinemática inversa con la ecuación 4.2.

$$\vec{w} = f\{\vec{\theta}\} \tag{4.1}$$

$$\vec{\theta} = f^{-1}\{\vec{w}\} \tag{4.2}$$

Mediante la cinemática directa se puede pasar del espacio de configuraciones al espacio de trabajo mientras que la cinemática inversa permite pasar del espacio de trabajo al espacio de configuraciones.

En un caso ideal sin importar la posición inicial del robot seria posible moverlo a cualquier posición y orientación, sin embargo, la forma y su cinemática facilita acceder a diferentes puntos del espacio de trabajo. Por lo anterior existen restricciones cinemáticas en relación a los grados de libertad que presenta el robot dando lugar a las siguientes clasificaciones:

- Robot holonómico: Se presenta cuando los grados de libertad controlables son iguales a los grados de libertad efectivos, lo cual ocurre cuando los grados de libertad del robot están desacoplados. En un sentido práctico el sistema de control requerido presenta una baja complejidad, sin embargo, su implementación mecánica puede tener un costo elevado [50].
- Robot no holonómico: Ocurre cuando el numero de grados de libertad controlables son menos que los grados de libertad efectivos, este es un efecto que se tiene cuando los grados de libertad están acoplados requiriendo una mayor complejidad en su sistema de control [50].

4.2.5. Jacobiano y singularidades

El Jacobiano J se define mediante la expresión 4.3 relacionando las velocidades de los actuadores y las velocidades en el espacio de trabajo [81]. El Jacobiano es una matriz que se puede calcular mediante la expresión 4.4.

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\frac{d\vec{\theta}}{dt} \tag{4.3}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial w_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_m}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Para determinar las velocidades de los actuadores conociendo las velocidades del espacio de trabajo se emplea el inverso del Jacobiano tal como se presenta en la ecuación 4.5.

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = J^{-1}\frac{d\vec{w}}{dt} \tag{4.5}$$

Si el determinante de J es muy pequeño entonces se tendrían velocidades de los actuadores muy grandes, por lo tanto, las singularidades cinemáticas se definen como las posibles configuraciones del espacio de trabajo para las cuales $\det(J) = 0$, [81]. Con el fin de establecer como las singularidades afectan la cinemática del robot se define el índice de manipulabilidad como:

$$M = \sqrt{\det(JJ^T)} \tag{4.6}$$

Donde J^T es la matriz transpuesta del Jacobiano. En el caso de tener un Jacobiano cuadrado $M = \det(J)$, por lo cual, en la medida que M sea mayor las velocidades requeridas en los actuadores son menores.

4.2.6. Obstáculos y trayectorias en el espacio de configuraciones

Considerando a $\mathcal{B}$ como un obstáculo en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$ y siendo $\mathcal{A}(q)$ la región de $\mathcal{W}$ ocupada por $\mathcal{A}$ para una determinada configuración q, entonces, $\mathcal{CB}$ es un obstáculo en $\mathcal{C}$ el cual se puede definir de la siguiente forma:

$$\mathcal{CB} = \{q | \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{B} \neq 0\} \tag{4.7}$$

El espacio de trabajo libre de obstáculos se define como:

$$\mathcal{W}_{libre} = \mathcal{W} \backslash \left(\bigcup_i \mathcal{B}_i \right) \tag{4.8}$$

En un sentido práctico se puede decir que los obstáculos en el espacio de trabajo $\mathcal{W}$ se mapean en regiones prohibidas en el espacio de configuraciones [81]. En el caso de i-obstáculos se tiene:

$$\mathcal{CB}_i = \{q \in \mathcal{C} | \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{B}_i \neq 0\} \tag{4.9}$$

Cada obstáculo $\mathcal{B}_i$ en $\mathcal{W}$ tiene un correspondiente obstáculo en el espacio de configuraciones $\mathcal{CB}_i$ los cuales representan todas las configuraciones del robot $\mathcal{A}$ que se intersecan o colisiones con $\mathcal{B}_i$ [81]. El mapeo de los obstáculos en el espacio de trabajo al espacio de configuraciones se realiza mediante la cinemática inversa del robot.

Al igual que se tiene un espacio libre de obstáculos en el espacio de trabajo se tiene el espacio de configuraciones libre $\mathcal{C}_{libre}$ el cual se define como [81]:

$$\mathcal{C}_{libre} = \mathcal{C} \backslash \left(\bigcup_i \mathcal{CB}_i \right) \tag{4.10}$$

Una trayectoria en el espacio de configuraciones es una curva continua que conecta dos configuraciones q_{ini} y q_{obj}, por lo cual, se puede definir como un mapa continuo [81]:

$$\tau : s \in [0, 1] \mapsto \tau(s) \in \mathcal{C} \tag{4.11}$$

Donde $\tau(0) = q_{ini}$ es la configuración inicial y $\tau(1) = q_{obj}$ es la configuración objetivo.

Una trayectoria libre se presenta cuando no existe contacto con algún obstáculo y se puede definir como:

$$\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{libre} = \mathcal{C} \backslash \mathcal{CB} \tag{4.12}$$

Una semi-trayectoria libre consiste en una trayectoria que conecta el punto inicial y objetivo tocando los obstáculos sin invalidar la trayectoria (ecuación 4.13).

$$\tau : [0, 1] \rightarrow cl(\mathcal{C}_{libre}) \tag{4.13}$$

4.3. Robot manipulador de dos eslabones

Con la finalidad de observar algunos de los conceptos anteriormente descritos se presenta como ejemplo el manipulador planar de dos eslabones el cual se puede apreciar en la figura 4.1.

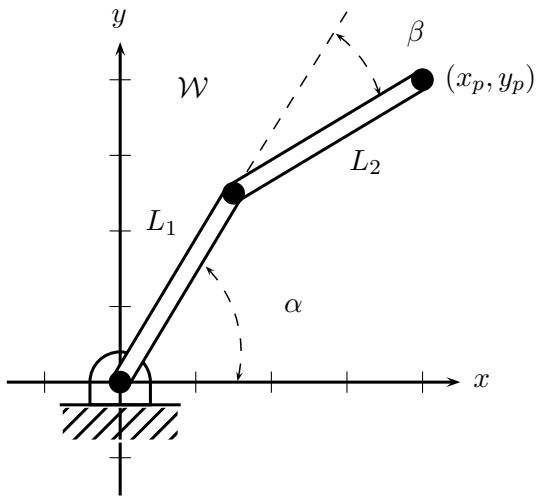

Figura 4.1: Robot manipulador de dos eslabones.

El espacio de configuraciones asociado al robot manipulador se aprecia en la figura 4.2, en este espacio de configuraciones los ejes corresponden a cada grado de libertad del robot por lo cual la posición del robot se puede ver como un punto en el respectivo sistema coordenado [57].

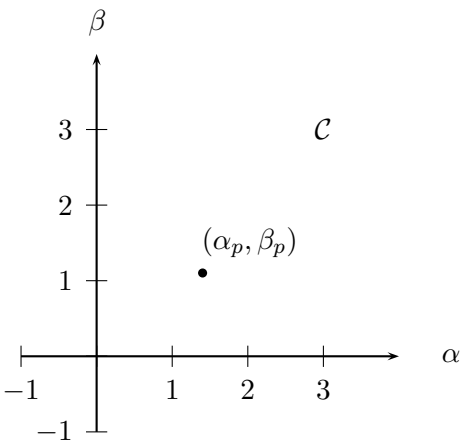

Figura 4.2: Espacio de configuraciones de un robot manipulador de dos eslabones.

Las ecuaciones 4.14 y 4.15 corresponden a la cinemática directa del robot de la figura 4.1, estas ecuaciones permiten pasar del espacio de configuraciones al espacio de trabajo [57].

$$x = L_1 \cos(\alpha) + L_2 \cos(\alpha + \beta) \tag{4.14}$$
$$y = L_1 \sin(\alpha) + L_2 \sin(\alpha + \beta) \tag{4.15}$$

Para pasar del espacio de trabajo al espacio de configuraciones se emplean las ecuaciones 4.16 y 4.17 las cuales corresponden a la cinemática inversa del robot [57]. En las ecuaciones 4.16 y 4.17 se tiene que $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{R^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1 R}\right) \tag{4.16}$$
$$\beta = \pm \cos^{-1}\left(\frac{R^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2}\right) \tag{4.17}$$

A medida de ejemplo en la figura 4.3 se puede observar el espacio de trabajo y el espacio de configuraciones considerando $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ y $L_1 > L_2$.

Para el análisis de velocidades se derivan las ecuaciones 4.14 y 4.15 en función del tiempo, adicionalmente, por nomenclatura considerando $dw/dt = \dot{w}$ se obtiene:

$$\dot{x} = -L_1 \sin(\alpha)\dot{\alpha} - L_2 \sin(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \tag{4.18}$$
$$\dot{y} = L_1 \cos(\alpha)\dot{\alpha} + L_2 \cos(\alpha + \beta)(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \tag{4.19}$$

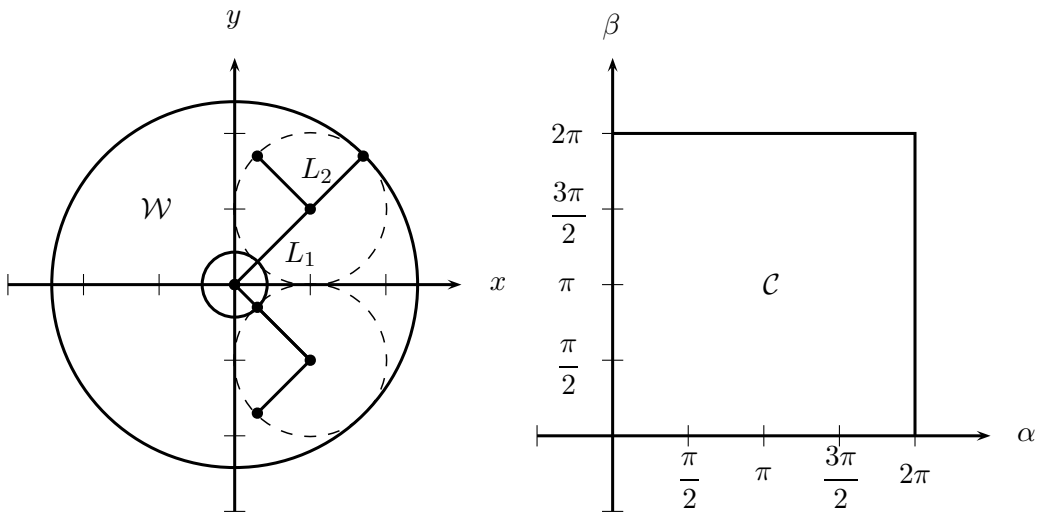

Figura 4.3: Ejemplo del espacio de trabajo y el espacio de configuraciones con: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ y $L_1 > L_2$.

Tomando la representación vectorial $\vec{w} = [x, y]^T$ y $\vec{\theta} = [\alpha, \beta]^T$ las ecuaciones 4.18 y 4.19 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -L_1 \sin(\alpha) - L_2 \sin(\alpha+\beta) & -L_2 \sin(\alpha+\beta) \\ L_1 \cos(\alpha) + L_2 \cos(\alpha+\beta) & L_2 \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \\ \dot{\vec{w}} &= J\dot{\vec{\theta}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Como es de apreciar en la ecuación 4.20 el Jacobiano para el robot manipulador de dos eslabones es:

$$J = \begin{bmatrix} -L_1 \sin(\alpha) - L_2 \sin(\alpha+\beta) & -L_2 \sin(\alpha+\beta) \\ L_1 \cos(\alpha) + L_2 \cos(\alpha+\beta) & L_2 \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Con el fin de establecer las velocidades de las articulaciones estas se pueden calcular mediante la expresión 4.22.

$$\dot{\vec{\theta}} = J^{-1}\dot{\vec{w}} \tag{4.22}$$

Para determinar las posibles singularidades del robot manipulador de dos eslabones se calcula $\det(J) = 0$ obteniendo el resultado de la ecuación 4.23.

$$\det(J) = L_1 L_2 \sin(\beta) \tag{4.23}$$

De la ecuación 4.23 se aprecia que el Jacobiano no tienen inversa para $\beta = 0$ o $\beta = \pi$ presentándose una configuración de singularidad para estos valores. En la figura 4.4 se muestra la configuración singular del robot manipulador de dos eslabones para $\beta = 0$.

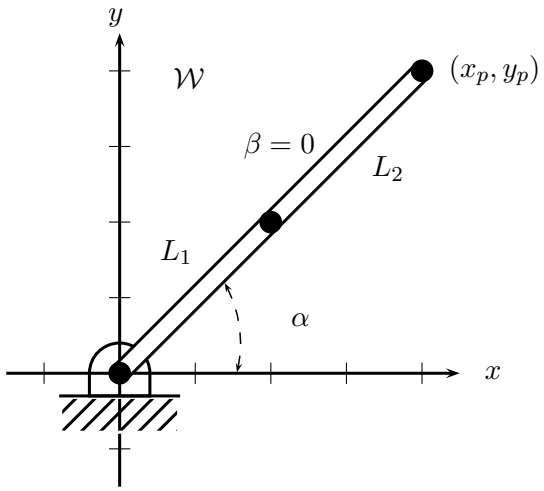

Figura 4.4: Configuración con una singularidad para el robot manipulador de dos eslabones.

4.4. Robots móviles

Aunque existen diferentes clasificaciones de los robots las cuales pueden ser por su geometría, método de control o según su función, dentro de esta última categoría se encuentran los robots manipuladores y robots móviles, los primeros enfocados a aplicaciones de manufactura y los segundos empleados en aplicaciones de exploración [22]. En el caso de los robots móviles se presentan las siguientes categorías según su forma de locomoción:

- Terrestres:
  - Robots de ruedas.
  - Robots de patas.
- Acuáticos.
- Aéreos.
- Espaciales.

Los robots con ruedas son los más utilizados por su facilidad de construcción, buena capacidad de carga y baja complejidad en su sistema de control. Los robots que emplean ruedas están limitados a desplazarse sobre terrenos relativamente planos ya que tienden a presentar problemas si las diferencias en el terreno son mayores al radio de las ruedas. Las ruedas de radio r_d se mueven por el contacto con la superficie idealmente desplazándose a $2\pi r_d$ por vuelta, sin embargo, el desplazamiento se ve afectado por factores como el deslizamiento lateral y frontal [22].

En un un vehículo con varias ruedas, existe un punto alrededor del cual cada rueda sigue una trayectoria circular, este punto se denomina centro instantáneo de rotación CIR,

cuando se tiene una trayectoria recta el centro instantáneo de rotación se localiza en el infinito [22]. El centro instantáneo de rotación es el punto donde se cruzan todos los ejes de las ruedas tal como se aprecia en la figura 4.5. Adicionalmente, para existir rotación esta debe ser consistente con el giro de las ruedas.

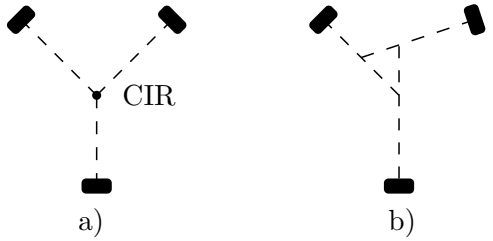

Figura 4.5: Configuraciones de ruedas: a) Con centro instantáneo de rotación, b) Sin centro instantáneo de rotación.

Tal como se observó anteriormente la configuración de las ruedas permite tener diferentes características cinemáticas dando lugar a la siguiente clasificación [64]:

- Diferencial.
- Síncrono.
- Tipo triciclo.
- Tipo Ackerman.

4.4.1. Tracción diferencial

Es uno de los esquemas más sencillos, consiste de dos ruedas en un eje común, donde cada rueda se controla independientemente. Este tipo de configuración permite realizar desplazamientos en forma recta, de arco o girar sobre su propio eje [64]. En esta configuración se puede utilizar una o dos ruedas adicionales para mantener el balance. En la figura 4.6 se observa el esquema de este tipo de tracción [64].

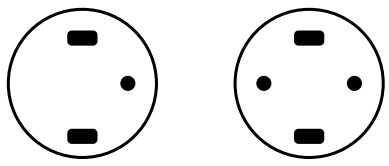

Figura 4.6: Esquema de un robot móvil de tracción diferencial.

4.4.2. Tracción síncronica

En esta configuración todas las ruedas se mueven en forma síncrona para dar vuelta y avanzar, las ruedas están dispuestas de forma que siempre apuntan en la misma dirección. Para dar vuelta las ruedas giran sobre su eje vertical. Cuando giran las ruedas la dirección del chasis se mantiene. En ciertas aplicaciones es necesario un mecanismo adicional para mantener el frente del chasis en la misma dirección de las ruedas [64]. En la figura 4.7 se observa el esquema de este tipo de tracción.

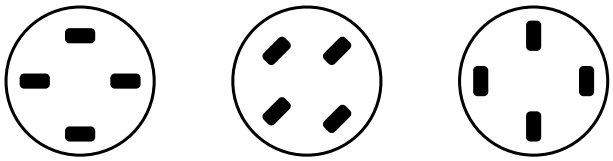

Figura 4.7: Esquema del robot móvil de tracción síncrona.

4.4.3. Tracción tipo triciclo

Este esquema consiste en dos ruedas encargadas de suministrarle tracción al móvil mientras se tiene una rueda para la dirección que normalmente no tiene tracción [64]. Esta configuración presenta buena estabilidad y simplicidad mecánica, facilitando la descripción de trayectorias rectas [64]. En la figura 4.8 se observa la representación de este tipo de tracción.

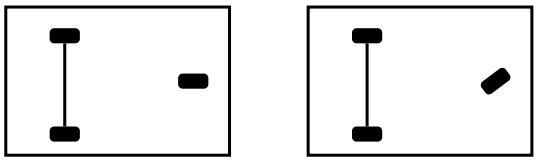

Figura 4.8: Esquema de tracción tipo triciclo.

4.4.4. Tipo Ackerman

Es similar al tipo triciclo, consiste en dos ruedas de tracción y dos ruedas para dirección [64]. Aunque tiene mayor complejidad mecánica que el triciclo por el acoplamiento entre las dos ruedas de dirección, presenta buena estabilidad y facilita describir trayectorias rectas [64]. En la figura 4.9 se puede apreciar el esquema de este tipo de tracción.

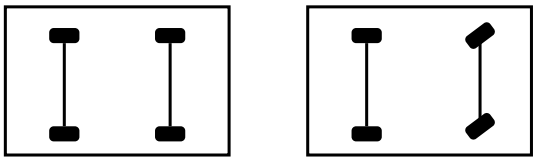

Figura 4.9: Esquema de tracción tipo carro.

4.5. Restricciones cinemáticas

Tal como se mostró anteriormente existen robots holonómicos y no holonómicos dependiendo del número de grados de libertad efectivos del robot los cuales están condicionados al desacople que se presenta entre los movimientos dados por los actuadores [50].

Un robot que se desplaza sobre una superficie plana presenta tres grados de libertad (x, y, θ) dos de posición y uno de orientación. Idealmente sin importar la posición inicial se debería posicionar el robot en cualquier punto y orientación en el espacio de trabajo, sin embargo, si la orientación y la posición están acopladas el robot para realizar un giro debe realizar movimientos hacia adelante y hacia atrás por lo cual no puede ir directamente a la posición y orientación deseada.

El robot de tracción diferencial y robot síncrono son ejemplos de robots holonómicos. En la figura 4.10 se presenta el ejemplo de un movimiento realizado por un robot de tracción diferencial, donde es posible apreciar que se puede localizar con facilidad el robot en la posición deseada [50].

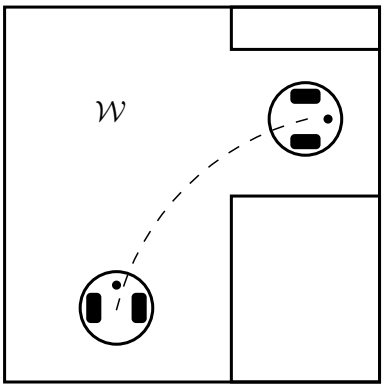

Figura 4.10: Robot móvil de tracción diferencial realizando una trayectoria.

Ejemplos de robots no holonómico son el robot tipo triciclo y el robot tipo Ackerman. En la figura 4.11 se observa que al robot tipo triciclo se le dificulta llegar a la posición final ya que para lograr la orientación debe moverse hacia el frente y hacia atrás [50].

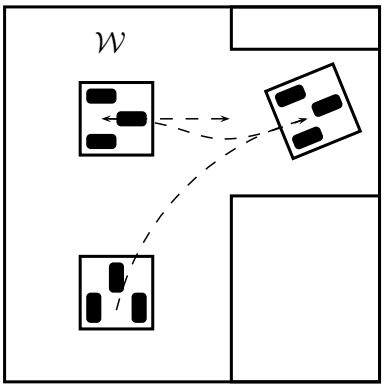

Figura 4.11: Robot móvil tipo triciclo realizando una trayectoria.

4.6. Cinemática de un robot móvil

Tal como se comento anteriormente cuando un robot móvil se desplaza sobre una superficie plana normalmente tiene tres grados de libertad dependiendo de su configuración, estos grados de libertad corresponden a la posición del robot en el plano (x, y) y su orientación θ, por lo cual, en un modelo cinemático es de interés la representación de la posición y orientación del robot en función de las acciones de los actuadores dando lugar a la cinemática directa e inversa del robot. Para robots con ruedas el desplazamiento se produce por el contacto de las ruedas con la superficie de tal forma que se considera que la rueda no presenta deslizamiento lateral ni frontal [64].

Con la cinemática directa de un robot móvil se puede determinar la posición final del robot conociendo la posición inicial y los movimientos realizados. Mediante esta descripción se puede pasar del espacio de configuraciones al espacio de trabajo.

La cinemática inversa de un robot móvil permite establecer la serie de movimientos que el robot debe realizar para desplazarse de la posición inicial a la final. Mediante esta cinemática se puede pasar del espacio de trabajo al espacio de configuraciones.

4.6.1. Cinemática de un robot móvil de tracción diferencial

Para realizar el análisis cinemático del robot móvil de tracción diferencial en primer lugar se determina su velocidad lineal y angular considerando las velocidades lineales de las ruedas [64]. En la figura 4.12 se pueden observar las velocidades asociadas al robot móvil de tracción diferencial.

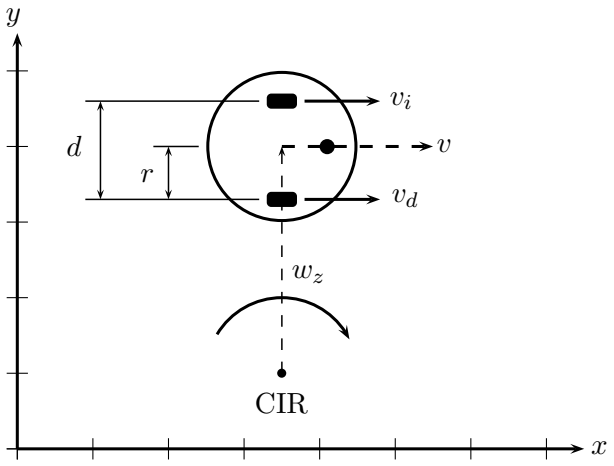

Figura 4.12: Cinemática de un móvil de tracción diferencial.

En la figura 4.12 se aprecia la relación de la velocidad lineal v y velocidad angular ω_z del móvil con las velocidades de las ruedas v_i y v_d. En la figura 4.13 se observa la relación de velocidades con el centro instantáneo de rotación.

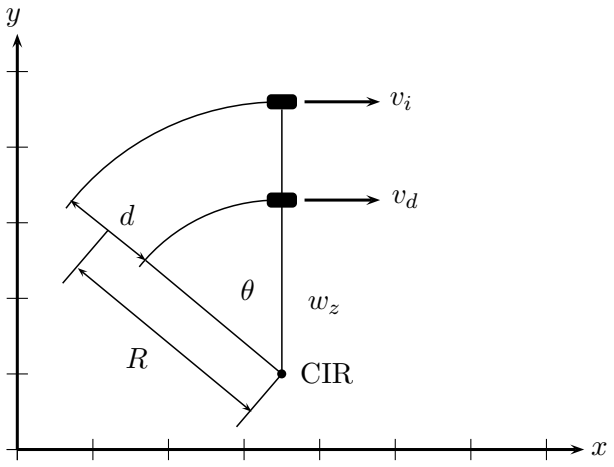

Figura 4.13: Movimiento de las ruedas al rededor del centro instantáneo de rotación.

De la figura 4.13 se aprecia que:

$$\begin{aligned} v_i &= w_z(R+r) \\ v_d &= w_z(R-r) \\ R &= r\frac{v_i+v_d}{v_i-v_d} \end{aligned}$$

Manipulando las anteriores expresiones se observa que la velocidad angular del móvil es proporcional a la diferencia de velocidades v_i y v_d tal como se aprecia en la siguiente

relación:

$$v_i - v_d = 2r\omega_z$$
$$\omega_z = \frac{v_i - v_d}{2r} \tag{4.24}$$

La velocidad en cada uno de los puntos localizados en las llantas está formada por una componente de velocidad lineal v y otra componente debida a la velocidad angular ω_z [64].

$$\begin{aligned} v_i &= v + r\omega_z \\ v_d &= v - r\omega_z \end{aligned}$$

Al sumar las anteriores expresiones se obtiene:

$$v = \frac{v_i + v_d}{2} \tag{4.25}$$

Las velocidades medidas sobre el sistema coordenado fijo son:

$$v_x = v\cos\theta \tag{4.26}$$
$$v_y = v\sin\theta \tag{4.27}$$

Finalmente, la posición y orientación del móvil se pueden determinar mediante las siguientes expresiones:

$$\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_z \, d\tau \tag{4.28}$$
$$x = \int_{t_0}^{t} v_x \, d\tau \tag{4.29}$$
$$y = \int_{t_0}^{t} v_y \, d\tau \tag{4.30}$$

4.7. Espacio de configuraciones para robots móviles

Adicional a los grados de libertad la forma del robot tiene un efecto considerable en su navegación particularmente cuando se tienen obstáculos y pasillos angostos. Para robots con forma circular la navegación resulta más simple por su simetría reduciendo el espacio de configuraciones a un caso bidimensional. Por otro lado con robots de forma rectangular su navegación es más compleja ya que es necesario considerar la orientación del robot por lo cual el espacio de configuraciones es tridimensional.

Para un robot circular que se desplaza en un plano el espacio libre de obstáculos se puede determinar extendiendo los obstáculos considerando el radio del robot. Con este enfoque el robot se puede ver como un punto en este espacio de configuraciones lo cual facilita la planeación de trayectorias.

4.7.1. Mapeo de obstáculos al espacio de configuraciones

Considerando un robot holonómico circular con desplazamiento en un plano, los obstáculos en el espacio de configuraciones son equivalentes a dilatar los obstáculos del espacio de trabajo mediante un elemento de forma circular, un ejemplo de esta situación se puede apreciar en la figura 4.14. En el caso de considerar el robot como un punto, el espacio de configuraciones es equivalente al espacio de trabajo tal como se observa en la figura 4.15.

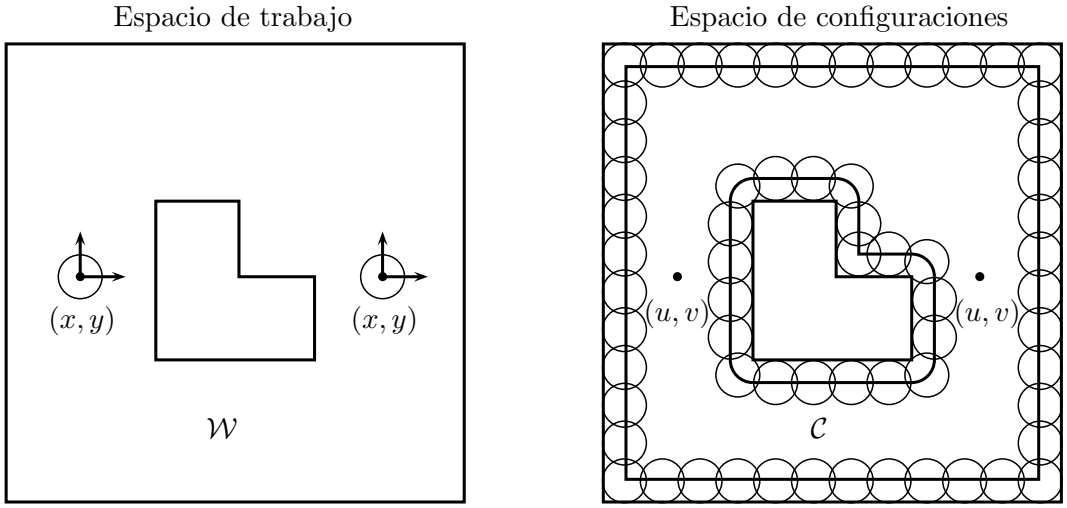

Figura 4.14: Mapeo de obstáculos al espacio de configuraciones.

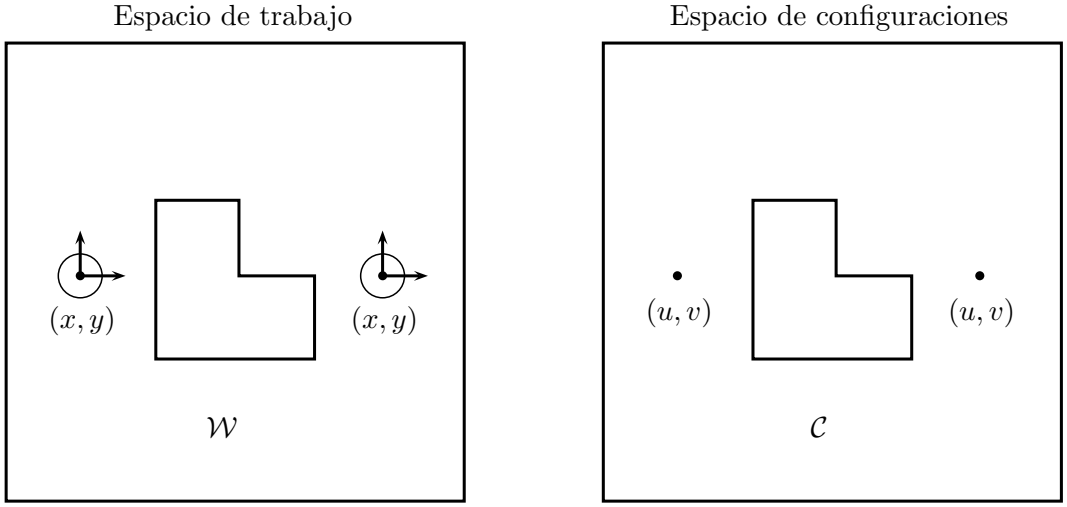

Figura 4.15: Espacio de configuraciones para un robot considerado como un punto en el espacio de trabajo.

4.8. Navegación y control de movimientos

Según [69] la navegación autónoma de un robot móvil se puede dividir en dos problemas los cuales son la planeación de trayectorias y el problema de control del movimientos. Las tareas que involucran la navegación bajo esta orientación son la percepción del entorno, la localización del robot, la generación de trayectorias y el control de movimientos [69]. Una descripción de las anteriores tareas es la siguiente:

- Percepción: Consiste en interpretar la información suministrada por los diferentes sensores la cual puede proporcionar un mapa global del entorno o mediciones relativas de los obstáculos y otros elementos próximos al robot.
- Localización: En esta tarea se determina la posición del robot lo cual puede ser de forma global o local relativa a posiciones anteriores del robot.
- Planeación: Mediante la información obtenida en los anteriores pasos se establece la estrategia adecuada para alcanzar el objetivo.
- Control de movimientos: Esta tarea consiste en determinar las acciones a realizar en los actuadores para seguir la trayectoria deseada. En muchos casos los actuadores son motores para los cuales se suelen emplear controladores de tipo PID (Proporcional Integral Derivativo) [64].

En la tarea de planeación dependiendo si se dispone o no de un mapa de todo el espacio de trabajo se tiene la opción de una planeación de trayectorias de forma global o una navegación basada en comportamientos reactivos. Si se desea realizar una planeación global pero los sensores empleados no permiten tener un mapa global se puede construir un mapa de exploración lo cual se denomina SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*).

El problema asociado a la planeación de trayectorias se aborda en el siguiente capítulo mientras que a continuación se presentan los conceptos básicos para el control de movimientos.

4.8.1. Control de movimientos

Mediante el control de movimientos se busca que el robot logre seguir una trayectoria previamente determinada. En este proceso se realizan las respectivas correcciones considerando la información suministrada por los sensores [37]. En la figura 4.16 se puede apreciar el esquema general para el control de movimientos.

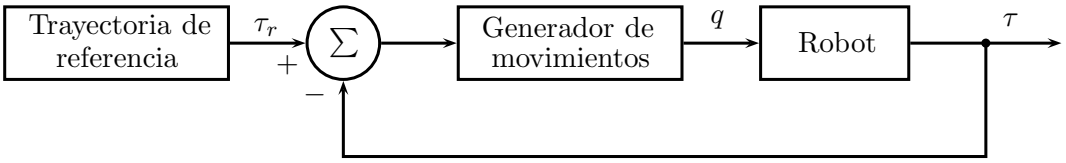

Figura 4.16: Esquema del sistema de seguimiento de trayectoria.

El problema de control de movimientos según [64] puede formularse como:

"*El control de movimientos consiste en la obtención de leyes de control que permitan estabilizar el robot sobre un punto de trabajo, anulando el efecto las perturbaciones, o que el robot siga de forma autónoma una trayectoria de referencia*".

La trayectoria deseada generalmente está dada por una función o un conjunto de puntos en términos de coordenadas globales [64]. En la figura 4.17 se muestra el seguimiento de una trayectoria que realiza un robot móvil de tracción diferencial.

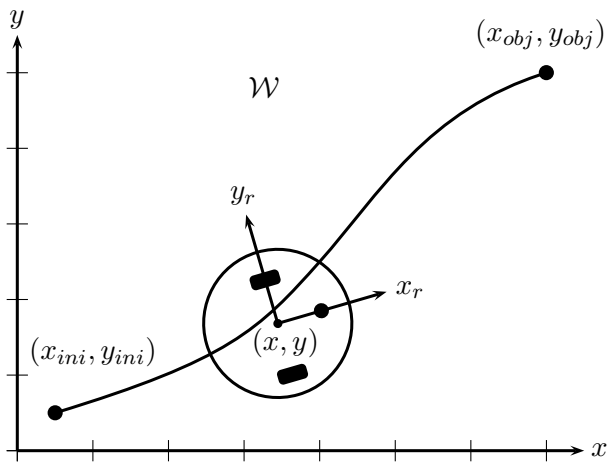

Figura 4.17: Robot móvil de tracción diferencial realizando el seguimiento de una trayectoria.

4.8.2. Seguimiento mediante persecución pura

Este es uno de los métodos denominados geométricos [64], en este método se busca determinar la curvatura necesaria que se debe aplicar al robot para desplazarse de su punto inicial al punto final. En la figura 4.18 se puede apreciar el esquema del desplazamiento del robot considerando un sistema de referencia fijo al robot.

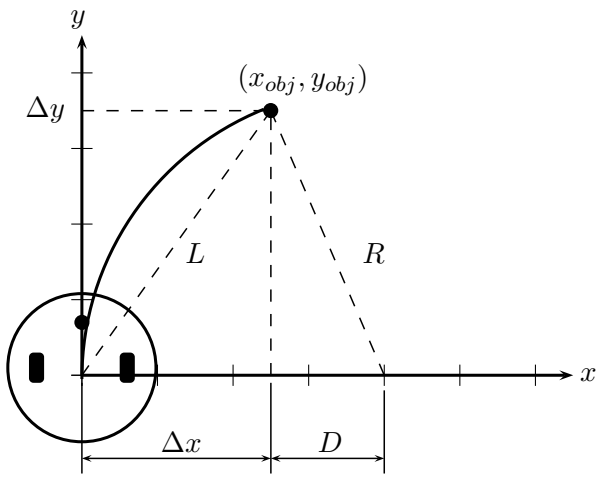

Figura 4.18: Esquema de seguimiento basado en persecution pura.

De la figura 4.18 se tiene:

$$\begin{aligned} R &= \Delta x + D \\ R^2 &= D^2 + (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Manipulando las anteriores expresiones se establece que el radio de curvatura R es:

$$R = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{2\Delta x} = \frac{L^2}{2\Delta x} \tag{4.31}$$

Finalmente para implementar el controlador se tiene que la velocidad angular del móvil es $w_z = v/R$, siendo necesario considerar el sentido de giro del robot para realizar el desplazamiento [64].

Capítulo 5

Planeación de trayectorias

5.1. Introducción

En aplicaciones donde se tienen situaciones o condiciones las cuales presentan algún peligro para el hombre o también en aplicaciones industriales con cadenas de producción donde robots manipuladores presentan restricciones de movilidad los robots móviles ofrecen buenas características de accesibilidad [62], [69]. Con el fin de aprovechar esta característica de movilidad se requiere de técnicas adecuadas para determinar una trayectoria apropiada libre de obstáculos de tal forma que el robot móvil pueda desplazarse desde una posición inicial a una objetivo [62].

Algunas características que se buscan en la planeación de trayectorias son la generación de trayectorias óptimas permitiendo el ahorro de combustible, como también la generación de trayectorias libres de obstáculos lo cual suele ser significante cuando se tienen ambientes dinámicos [69].

El método de campos potenciales artificiales resulta ser una buena opción para la generación de trayectorias de robots móviles debido a su baja complejidad y su fundamento físico que lo respalda, sin embargo, puede presentar problemas por la presencia de mínimos locales como también la generación de trayectorias no óptimas. Para atender la anterior problemática se proponen variaciones de las funciones de campo potencial para los obstáculos y el objetivo como también se desarrollan algoritmos que buscan evitar los mínimos locales.

5.2. Problema de planeación de trayectorias

El problema general de planeación de trayectorias según [64] se puede enunciar como:

"*Encontrar un camino desde una posición-orientación inicial S del robot hasta una*

posición-orientación final G de forma que no se produzcan colisiones y se optimice cierto criterio".

En esta definición es importante señalar que tanto la posición-orientación inicial y final se encuentran en el espacio de trabajo libre de obstáculos es decir $S \in \mathcal{W}_{libre}$ y $G \in \mathcal{W}_{libre}$. Adicionalmente el criterio más común a optimizar es la longitud del camino.

Dado que el planteamiento de este problema de forma general resulta ser complejo según [64] se pueden tener las siguientes consideraciones:

s1: Espacio de trabajo conocido.

s2: Entorno estático.

s3: Obstáculos modelados como polígonos discretizados en un grupo de puntos finitos.

s4: El robot se considera como un punto.

s5: No se consideran las restricciones dinámicas del robot.

s6: El robot ejecuta perfectamente las trayectorias.

Para el desarrollo del algoritmo propuesto en este documento se asume que se cumplen las suposiciones s1-s6.

5.3. Campos potenciales

Esta técnica se encuentra basada en la analogía del fenómeno que se presenta cuando se libera una partícula cargada en la presencia de un campo eléctrico. En esta analogía el robot se considera como una partícula con carga eléctrica siendo el espacio libre el campo potencial para lo cual los obstáculos se toman con una carga eléctrica del mismo signo del robot esto para generar una fuerza de repulsión mientras que la meta tiene asociada una carga eléctrica de signo opuesto al robot con el fin de proporcionar una fuerza de atracción [37], [62]. Una vez construido el campo potencial la trayectoria del robot se determina mediante el cálculo del gradiente del campo potencial [64], [81], lo cual se puede realizar de la siguiente forma:

$$\vec{r}[n+1] = \vec{r}[n] - \nu \left. \frac{\vec{\nabla} U_{esp}}{|\vec{\nabla} U_{esp}|} \right|_{\vec{r}[n]} \tag{5.1}$$

Donde n corresponde al índice de la iteración, $\vec{r}[n]$ y $\vec{r}[n+1]$ son la posición actual y siguiente del robot, ν es el paso o avance del robot, U_{esp} es el campo potencial que contiene la información del espacio de trabajo, $\vec{\nabla} U_{esp}$ es el gradiente del campo potencial y $|\vec{\nabla} U_{esp}|$

es la magnitud del gradiente del campo potencial. Bajo esta orientación el algoritmo empleado para determinar la trayectoria es:

Algorimo 1: Algoritmo básico de planeación de trayectorias empleando campos potenciales.

```
Inicializar la posición del robot;
begin
    while Hasta llegar al punto destino o si no existe cambio de la posición. do
        Almacenar la posición actual;
        Actualizar r⃗ empleando la ecuación 5.1;
    end
    Establecer la trayectoria final como la colección de todos las posiciones
    calculadas.
end
```

La información de los obstáculos y la meta está contenida en el campo potencial U_{esp}. En la versión más simple de este método se emplea un potencial parabólico para el objetivo U_{obj} y barreras de potencial para los obstáculos U_{obs}, las expresiones para estos potenciales son respectivamente:

$$U_{obj}(\vec{r}) = k_{obj}\,\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_{obj})^2 \tag{5.2}$$

$$U_{obs}(\vec{r}) = k_{obs}\,\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_{obs})^{-1} \tag{5.3}$$

Donde $\vec{r}_{obj}$ es la posición del objetivo y $\vec{r}_{obs}$ la posición del obstáculo. La función de distancia en coordenadas rectangulares es:

$$\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_a) = \sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} \tag{5.4}$$

Considerando un total de M obstáculos el campo potencial total puede ser calculado como:

$$U_{esp} = U_{obj}(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{M} U_{obs,m}(\vec{r}) \tag{5.5}$$

Con el fin de aclarar de forma gráfica los anteriores conceptos en la figura 5.1 se presenta un campo potencial parabólico asociado al punto objetivo con $k_{obj} = 0{,}08$ y centrado en el origen. Un campo potencial tipo barrera para un obstáculo con $k_{obj} = 0{,}7$ y localizado en $(-2, 0)$ se puede apreciar en la figura 5.2. El resultado de la suma de los potenciales de atracción y repulsión correspondientes a las figuras 5.2 y 5.2 se puede observar en la figura 5.3. Casos donde se presentan mínimos locales y se muestra la respectiva trayectoria resultante se pueden observar en el capítulo de resultados donde se describen los parámetros empleados para lograr las diferentes configuraciones.

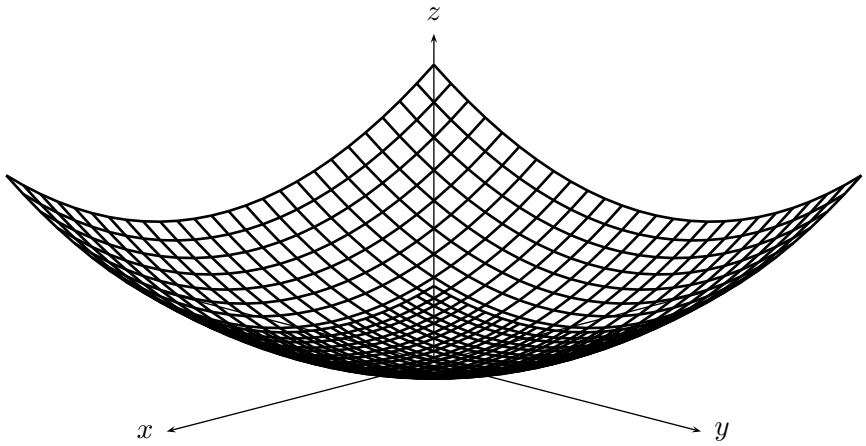

Figura 5.1: Campo potencial parabólico centrado en el origen asociado al objetivo.

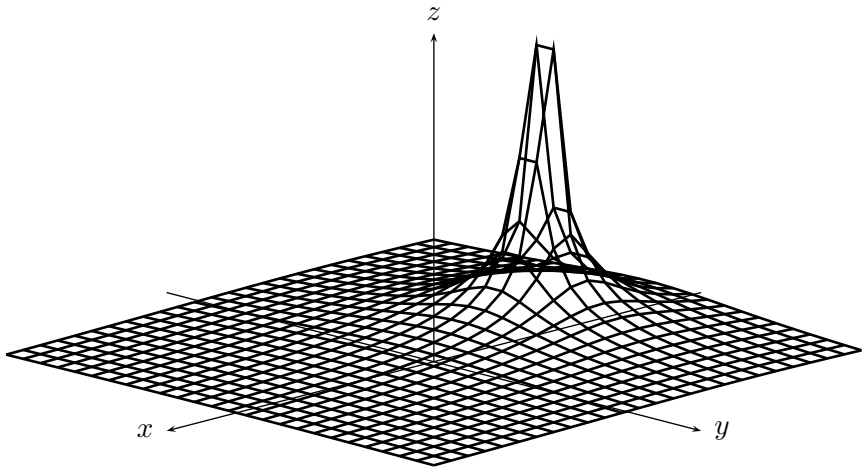

Figura 5.2: Campo potencial de un obstáculo localizado en $x = -2$ y $y = 0$.

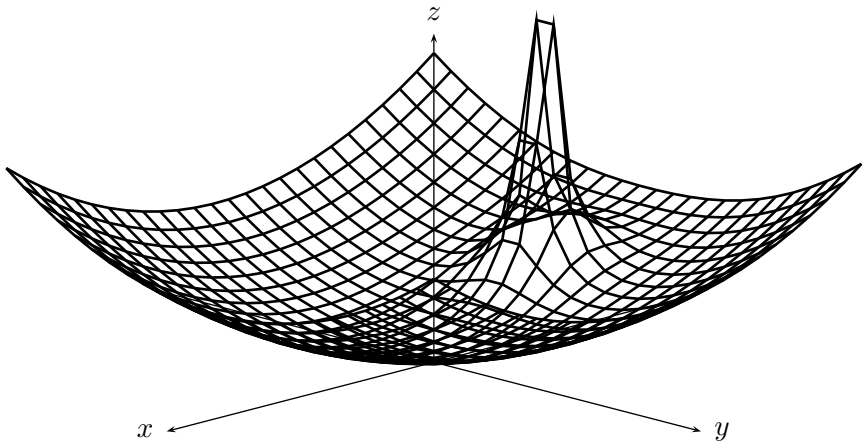

Figura 5.3: Campo potencial total correspondiente al objetivo y obstáculo.

5.3.1. Ventajas y desventajas

El método de campos potenciales resulta ser una técnica con buena aceptación ya que presenta las siguientes ventajas:

- Se pueden generar trayectorias en tiempo real a partir del campo de fuerzas.
- Las trayectorias generadas son suaves.
- Facilita acoplar la parte de planeación con el sistema de control del robot.

Aunque este método presenta fortalezas bien marcadas aparecen ciertas limitaciones las cuales no permiten tener el desempeño esperado en algunos casos. Las limitaciones del método de campos potenciales según [48] y [51] son:

- Trampas generadas por mínimos locales.
- Mínimo local producido por un solo obstáculo.
- Mínimos locales producidos por varios obstáculos.
- Objetivo encerrado por un obstáculo, lo cual es denominado: *Goals Non-Reachable with Obstacle Nearby* (GNRON).
- Es posible que no exista paso entre un espacio encerrado por dos obstáculos.
- Generación de trayectorias no óptimas.
- Limitaciones relacionadas con la implementación tales como:
  - Algunas configuraciones de obstáculos generan oscilaciones.
  - Se suelen presentar de oscilaciones en pasos angostos.
  - En algunas configuraciones se puede requerir torque infinito.

La principal desventaja de este método consiste en la convergencia a mínimos locales por lo cual el robot nunca podría llegar al objetivo. Convencionalmente para evitar los mínimos locales (trampas) se suelen recurrir a las siguientes estrategias:

- Movimientos aleatorios (planeación aleatoria de trayectorias PRM) [81].
- Usar estrategias como el seguimiento de paredes.
- Aumentar el potencial repulsivo de regiones visitadas.

5.3.2. Funciones de potencial

Para implementar el método de campos potenciales se han desarrollado diferentes funciones de potencial tanto para el objetivo como para los obstáculos, cada una de estas variaciones busca solucionar un problema en particular asociado al método de campos potenciales. Las diferentes funciones empleadas en campos potenciales son [51]:

1. FIRAS: *The Force Involving and Artificial Repulsion from the Surface Function* (FIRAS Función, en Frances), propuesta por Khatib [44].
2. GPF: *Generalized Potential Field*, propuesta por Krogh [49].
3. *Superquadric Artificial Potential Functions*, funciones introducidas por Volpe and Khosla [45].
4. *Harmonic Potential*, propuesto por Kim y Khosla [46].
5. *Navigation Function*, propuestas por Rimon y Koditschek [73].
6. *G&C Function*, nuevas funciones de potencial propuestas por S.S. Ge y Y.J Cui [34].

Tal como se comento anteriormente las diferentes funciones empleadas para generar campos potenciales obedecen a dificultades presentes en ciertas aplicaciones por lo cual la forma de escoger una determinada función para implementar el campo potencial está dada por las siguientes características [51]:

1. No presenta mínimos locales en la presencia de un obstáculo.
2. No presenta mínimos locales en la presencia de varios obstáculos.
3. Permite manejar el problema de metas no accesibles en la presencia de obstáculos cercanos (GNRON).
4. Solo se requiere información de la posición.

La relación de las diferentes funciones empleadas en campos potenciales y las anteriores características se pueden apreciar en la tabla 5.1.

Característica	Funciones Potenciales					
	1	2	3	4	5	6
1	No	No	Si	Si	Si	No
2	No	No	No	Si	Si	No
3	No	Si	Si	Si	Si	Si
4	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Tabla 5.1: Comparación de características para funciones de campos potenciales.

5.4. Para resaltar

Con la revisión mostrada en esta parte sobre robótica móvil se busca generar el contexto suficiente sobre el problema de planeación de trayectorias como también de la solución propuesta la cual se muestra en la siguiente parte del documento.

Parte III

Desarrollo

Capítulo 6

Revisión sobre modelos de enjambres de partículas activas Brownianas

6.1. Introducción

La naturaleza es una buena fuente de inspiración para el desarrollo de algoritmos que permiten solucionar problemas en diferentes áreas. En buena proporción los algoritmos desarrollados bajo esta perspectiva se han enfocado a problemas de optimización, siendo de los más representativos los algoritmos genéticos, la optimización basada en colonia de hormigas, enjambres de partículas y quimiotaxis bacteriana. Por otro lado, en el área de la biología son de interés los modelos que describan comportamientos de seres vivos como aves, peces, hormigas y bacterias entre otros. En particular, cuando se trata de comportamientos colectivos es de importancia modelar las interacciones presentes entre individuos con el fin de reproducir las conductas de una congregación de individuos. La capacidad de rodear obstáculos y evadir depredadores son comportamientos que presentan los enjambres de individuos y que pueden ser empleados en procesos de búsqueda.

En este capítulo se realiza la descripción de algunos modelos de enjambres de partículas activas Brownianas. Particularmente se revisan los modelos del zooplancton Daphnia ya que este presenta características que pueden ser empleadas en un algoritmo de planeación de trayectorias. Sobre las características del zooplancton Daphnia que se esperan aprovechar se tiene su capacidad de evadir obstáculos la cual está asociada a movimientos con la presencia de vórtices. De los modelos a resaltar del zooplancton Daphnia se tiene el de partícula autopropulsada donde se considera que el individuo posee una fuente interna la cual le permite desplazarse de forma autónoma [19].

6.2. Modelos del zooplancton Daphnia

En el campo de la biología es de interés modelar la interacción entre individuos, en particular, son de atención los denominados comportamientos emergentes de los cuales se distingue el movimiento de enjambres de individuos con la formación de vórtices y/o remolinos [82], [85]. La vorticidad es un comportamiento que se presenta con frecuencia en los fluidos y está dado por la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas (número de Reynolds [7]), el análisis de este de comportamiento se realiza mediante las ecuaciones de Navier Stokes las cuales suelen ser difíciles de resolver de forma analítica en casos generales [14]. El comportamiento de vorticidad se caracteriza por el movimiento rotacional de las partículas al rededor de un punto el cual se denomina vórtice. A parte de los fluidos este tipo de comportamiento se presenta en enjambres de individuos como peces, aves y bacterias entre otros.

El interés sobre el estudio del zooplancton Daphnia radica en la posibilidad de modelar la búsqueda óptima de comida con la capacidad de evadir obstáculos y depredadores mediante un desplazamiento en enjambres con características de vorticidad [42]. El movimiento de vorticidad puede ser visto como un fenómeno de auto-organización de la realimentación de la ficción del agua y la alineación indirecta con el zooplancton Daphnia. Adicionalmente, en [56] se expone que el comportamiento de vorticidad le permite al zooplancton Daphnia evadir colisiones con otros animales [56].

Un recuento de los diferentes modelos que describen el comportamiento del zooplancton Daphnia se realiza en [30], en particular se revisan los modelos de partículas autopropulsadas. Según [30] los diferentes enfoques para modelar el comportamiento del zooplancton Daphnia son:

- Boids, programa para simular congregaciones de individuos desarrollado por Craig Reynolds (1986) [72].
- Interacción de partículas autopropulsadas (*Self-Propelled Interacting Particles*), propuesto por Vicsek (1995) [84].
- Interacción de partículas autopropulsadas con un rango corto de repulsión y un rango largo de atracción, propuesto por Levine (2001) [52].
- Interacción de partículas Brownianas activas con depósitos de energía interna (*Interacting Active Brownian Particles with Internal Energy Depot*). Para este modelo se tienen las siguientes variaciones:
  - Partícula activa Browniana (*Single Active Brownian Particle*) [24], [76].
  - Acople global mediante el momento angular promedio del enjambre (*Global coupling via mean angular momentum of swarm*) [75].
  - Interacción de partícula a partícula (*Particle-Particle Interaction*) [28].
  - Modelo con interacciones hidrodinámicas (*Hydrodynamic Interaction*) [30].
  - Modelo con maniobras de evasión (*Avoidance Maneuvers*) [56].

Dado que los anteriores enfoques también han sido empleados para modelar cardúmenes de peces y bandadas de aves a continuación se realiza una presentación general de estos modelos.

6.3. Modelo de Vicsek

El concepto de partículas autopropulsadas (*Self-Propelled Particles*) se introdujo en [84] con el fin de estudiar el movimiento colectivo de grandes grupos de organismos. De forma general se aprecia que el movimiento de organismos está dado por la interacción entre vecinos [19]. Los modelos de partículas autopropulsadas consisten en partículas que interactúan a nivel local con una forma de propulsión intrínseca a la partícula [19]. El comportamiento de autopropulsión aparece en procesos físico-químicos donde se involucran partículas pequeñas con fuerzas superficiales sensibles a concentraciones químicas y temperaturas [59].

El modelo de partículas autopropulsadas presentado [84] considera un desplazamiento en dos dimensiones de N partículas localmente alineadas con velocidad constante y ruido, siendo los parámetros del modelo la densidad del enjambre de partículas y la amplitud del ruido. El esquema general de este modelo es:

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}(t) + \vec{v}_i(t)\Delta t \tag{6.1}$$

$$\theta_i(t+1) = \langle\theta(t)\rangle_r + \Delta\theta \tag{6.2}$$

Donde $\langle\theta(t)\rangle_r$ es la dirección promedio de las velocidades de las partículas. La velocidad $\vec{v}_i(t+1)$ se calcula con la dirección dada por $\theta_i(t+1)$ y la magnitud de la velocidad ν, la cual corresponde al salto de la partícula entre iteraciones. Finalmente $\Delta\theta$ es un numero aleatorio con probabilidad uniforme en el intervalo $[-\eta/2, \eta/2]$.

6.4. Modelo de Levine

En este caso se adiciona al modelo de partículas autopropulsadas una fuerza de interacción dada por un potencial U_i el cual presenta un rango corto de repulsión y un rango largo de atracción [52]. El modelo considera N partículas con masa m_i, posición $\vec{r}_i$, velocidad $\vec{v}_i$, una fuerza de interacción dada por $\vec{\nabla}_i U_{int}$, un coeficiente de fricción γ y una fuerza de autopropulsión $\vec{f_i}$ la cual esta acompaña por un factor de escala α. En términos generales las ecuaciones de movimiento para una partícula son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.3}$$

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \alpha\vec{f_i} - \gamma\vec{v}_i - \vec{\nabla}_i U_{int} \tag{6.4}$$

La dirección de $\vec{f_i}$ puede ser cualquiera paralela a $\vec{v_i}$ o a un promedio sobre la vecindad $\vec{v_j}$ permitiendo alinear la fuerza de autopropulsión con la velocidad del enjambre según la influencia de los vecinos. Sin alineamiento se tiene $\vec{f_i} = \vec{v_i}$ y con un alineamiento de rango l_c la fuerza de autopropulsión es:

$$\vec{f_i} = \sum_{i \neq j}^{N} \vec{v_j} e^{-\frac{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|}{l_c}} \tag{6.5}$$

La fuerza de atracción entre partículas tiene un rango largo l_a, mientras la fuerza repulsiva entre partículas presenta un rango corto l_r. El potencial de interacción entre partículas U_{int} tiene la siguiente expresión.

$$U_{int} = \sum_{j \neq i}^{N} C_a e^{-\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}{l_a}} - \sum_{j \neq i}^{N} C_r e^{-\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}{l_r}} \tag{6.6}$$

6.5. Modelos de partículas activas Brownianas

El modelo de partícula activa Browniana (*Active Brownian Particle* ABP) está basado en la ecuación de Langevin de la cual se han realizado diferentes variaciones las cuales se presentan en las siguientes sub-secciones.

Una expresión general en forma escalar para la ecuación de Langevin es:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{6.7}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) - \beta v + \eta(t) \tag{6.8}$$

Donde x y v son la posición y velocidad de la partícula, $F(x)$ corresponde a las fuerzas de interacción, βv es un factor disipativo y $\eta(t)$ se puede considerar como ruido térmico.

6.5.1. Modelo de una partícula activa Browniana

Este enfoque considera un deposito de energía interna [76], lo cual es un aspecto fundamental para un modelo de partícula activa Browniana que permita una descripción del movimiento activo de entidades biológicas basado en consumo y conversión de energía [23]. Tal como se observa en [23] el depósito de energía considera las condiciones para tener un movimiento biológico activo. El modelo consiste de una partícula de masa m, posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$, una fuerza de autopropulsión conectada por un deposito de energía $e(t)$ y una

fricción dependiente de la velocidad $\gamma(v)$. También se considera una componente de ruido $\vec{\xi}(t)$ y una fuerza externa parabólica dada por un potencial $V(\vec{r})$.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = de(t)\vec{v} - \gamma(v)\vec{v} - \vec{\nabla}V(\vec{r}) + \vec{\xi}(t) \tag{6.9}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \tag{6.10}$$

La expresión para el deposito interno de energía $e(t)$ consiste de una compensación dependiente del espacio $q(\vec{r})$, una disipación interna $ce(t)$ con factor de escala c y un término de conversión de energía interna en energía cinética $de(t)v^2(t)$ con coeficiente d, finalmente para efectos de nomenclatura se tiene que $|\vec{v}(t)|^2 = v^2$. La ecuación diferencial que rige la energía interna $e(t)$ es:

$$\frac{de(t)}{dt} = q(\vec{r}) - ce(t) - de(t)v^2(t) \tag{6.11}$$

Considerando un flujo contante de energía hacia el deposito interno de energía se puede tomar $q(\vec{r}) = q_0$, adicionalmente se tiene que la función asociada al comportamiento de fricción es:

$$\gamma(v) = \gamma_0 - \frac{dq_0}{c + dv^2} \tag{6.12}$$

De los resultados reportados en [76] se aprecia que un solo individuo presenta un comportamiento de ciclo limite el cual consiste en un movimiento circular al rededor de un potencial atractivo.

6.5.2. Modelo para un enjambre de partículas Brownianas

Una alternativa para el modelo de partículas activas Brownianas se presenta en [56], en la cual la ecuación de velocidad resulta de la superposición de los términos deterministicos y estocásticos. En términos generales la ecuación que se presenta en [56] es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.13}$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \gamma(v_i^2)\vec{v}_i - \vec{\nabla}V(\vec{r})|_{\vec{r}_i} + \sqrt{2D}\vec{\zeta}_i(t) \tag{6.14}$$

Donde $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ son la posición y la velocidad de la i-ésima partícula, $\gamma(v_i^2)$ es una función no lineal de fricción la cual considera un deposito interno de energía, a es un parámetro del potencial parabólico externo $V(\vec{r}) = (a/2)|\vec{r}|^2$ el cual se encuentra centrado en el origen y que produce una fuerza de atracción sobre cada partícula correspondiente a $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}V = -a\vec{r}_i$. Finalmente se tiene la fuerza estocástica $\vec{\zeta}_i(t)$ donde cada una de sus componentes escalares tiene magnitud D, esta fuerza permite describir la influencia de los eventos aleatorios sobre el movimiento del agente.

6.5.3. Interacción de partículas activas Brownianas con acople global

Un enfoque para modelar la interacción de partículas consiste en adicionar un acople global de los agentes al centro de masa del enjambre tal como se puede apreciar en [24], [56] y [75]. Un modelo que considera esta orientación se puede observar en [30] el cual está compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.15}$$

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma_0\vec{v}_i + de_i(t)\vec{v}_i - k\left[\vec{r}_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\right] + \sqrt{2D}\vec{\zeta}_i(t) \tag{6.16}$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = q_0 - ce_i(t) - dv_i^2 e(t) \tag{6.17}$$

Donde d es un parámetro asociado a la disipación de energía, k es una constante que pondera la interacción de los individuos, γ_0 es una constante asociada a la fricción y D es un parámetro del ruido blanco el cual para el caso escalar cumple las siguientes propiedades de correlación:

$$\langle\zeta_i(t)\rangle = 0 \tag{6.18}$$

$$\langle\zeta_i(t)\zeta_j(\tau)\rangle = \delta_{ij}\delta(t-\tau) \tag{6.19}$$

Según lo presentado en [30] con este enfoque se mantiene la simetría en las dos direcciones para un movimiento en el plano.

6.5.4. Modelo con acople global y deposito interno de energía aproximado

Un modelo adicional de partícula activa Browniana con interacciones consiste en tomar una aproximación de segundo orden por series de Taylor para el movimiento activo y también incorporar una fuerza de atracción entre partículas dada por un potencial de atracción de tipo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre [26]. De la misma forma que en los anteriores modelos se incluye una fuerza de tipo estocástica. El modelo propuesto en [26] y [30] es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.20}$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i - \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\xi}_i(t) \tag{6.21}$$

Donde $\vec{F}_i = (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i$, corresponde a la fuerza de autopropulsión la cual permite el movimiento activo [59], el parámetro a caracteriza la intensidad de la fuerza de interacción y $\vec{\xi}_i(t)$ es una fuerza aleatoria. Cada una de las componentes escalares de la fuerza aleatoria

se considera como ruido blanco con intensidad (magnitud) D el cual es independiente para las diferentes partículas y que cumple con las siguientes propiedades:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \tag{6.22}$$
$$\langle \xi_i(t)\xi_j(\tau) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-\tau) \tag{6.23}$$

En [26], [30] se muestra que la magnitud del ruido permite tener una transición de movimiento lineal en rotacional. La transición entre un comportamiento traslacional a rotacional es un fenómeno que también se aprecia en los fluidos el cual puede ser descrito mediante las ecuaciones de Navier Stokes y el numero de Reynolds.

6.5.5. Interacciones hidrodinámicas

En este caso se adicionada al modelo partícula activa Browniana interacciones hidrodinámicas mediante contribuciones de Oseen aunque también se podría realizar considerando las ecuaciones de Navier Stokes [30]. Las ecuaciones dinámicas para una partícula son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.24}$$
$$m\frac{d\vec{v}_i}{dt} = K_F\vec{v}_F - \gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - \vec{\nabla}V(\vec{r}_i) + \vec{\xi}_i(t) \tag{6.25}$$

Donde γ es una función disipativa no lineal, V es un potencial de influencias externas y $\vec{\xi}_i$ es una componente estocástica de ruido blanco. El término $K_F\vec{v}_F$ es generado por el movimiento todas las partículas el cual tiende a presentar un alineamiento de la velocidad $\vec{v}_i$ con $\vec{v}_F$.

$$\vec{v}_F(\vec{r}_{ij}) = \sum_{j\neq i}^{N}\left[\frac{R}{r_{ij}}\vec{v}_j + \frac{R(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij})}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij}\right] \quad \text{para } r_{ij} \gg R \tag{6.26}$$

En el anterior modelo R es una constante que representa el radio hidrodinámico efectivo y $\vec{r}_{ij}$ es el vector desde la i-ésima hasta la j-ésima partícula. La anterior ecuación muestra que el flujo de Oseen presenta componentes en la dirección de $\vec{v}_j$ y $\vec{r}_{ij}$, lo cual genera simetría en el comportamiento de las partículas [30].

6.5.6. Modelo con maniobras de evasión

Este modelo está formado por la adición de un potencial de interacción repulsivo de tipo exponencial al modelo de partícula activa Browniana [38], [56]. En términos generales

el modelo es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{6.27}$$

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = de(t)\vec{v}_i - \gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - \vec{\nabla}V(\vec{r}_i) + \sum_{j\neq i}^{N}\vec{f}_{ij} + \vec{\xi}(t) \tag{6.28}$$

De la misma forma que en el modelo de partícula activa Browniana $\vec{r}_i$ y $\vec{v}_i$ son la posición y velocidad de la i-ésima partícula, γ es una función no lineal de disipación de energía, $e(t)$ representa el deposito interno de energía con una constante asociada d, V es un potencial externo y $\vec{\xi}(t)$ es una componente estocástica de ruido blanco. Finalmente $\vec{f}_{ij}$ es la fuerza de interacción entre individuos que permite tener maniobras de evasión la cual tiene la siguiente expresión:

$$\vec{f}_{ij} = \frac{p}{\sigma R_i}\, e^{-\dfrac{R_i}{\sigma}}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{6.29}$$

Donde R_i es una función de distancia entre agentes y p, σ representan la fuerza y el rango del potencial.

Capítulo 7

Selección del modelo

7.1. Introducción

En el presente capítulo se muestra la selección del modelo de partícula activa Browniana el cual se toma como referencia para la implementación del algoritmo de planeación de trayectorias. El modelo seleccionado consiste en un conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de partículas con características de vorticidad.

Para la selección del modelo se pueden considerar como referencia los trabajos presentados en [1] y [68]. En [68] se desarrolla un algoritmo para la planeación de trayectorias empleando forrajeo de bacterias, por otro lado en [1] se realiza una propuesta para la planeación de trayectorias empleando estados internos de enjambres con características de vorticidad. Es importante señalar que en ambos trabajos se considera la interacción entre individuos.

Como criterio de selección se busca tener un modelo lo más compacto posible y que permita describir comportamientos de enjambre como desplazamientos uniformes y movimientos circulares.

7.2. Esquema general de modelo seleccionado

El modelo seleccionado como referencia para la implementación del algoritmo de planeación de trayectorias se encuentra basado en el comportamiento del zooplancton Daphnia. Con este enfoque se busca aprovechar la forma de locomoción con la presencia de vorticidad ya que esta puede ser una buena estrategia para evadir mínimos locales tal como se aprecia en [1].

En términos generales el modelo seleccionado presenta la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{7.1}$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{act} + \vec{F}_{int} + \vec{F}_{esp} + \vec{F}_{est} \tag{7.2}$$

Donde la primera ecuación corresponde al cálculo de posición $\vec{r}_i$ de la partícula conociendo su velocidad $\vec{v}_i$. La segunda ecuación corresponde al cálculo de la velocidad de la partícula siendo m_i la masa de la partícula que para un caso práctico se puede tomar como $m_i = 1$. La ecuación de velocidad presenta las siguientes componentes:

- $m_i(d\vec{v}_i/dt)$: Término de inercia, el cual es una fuerza de característica conservativa.
- $\vec{F}_{act}$: Fuerza correspondiente al movimiento activo asociado a la autopropulsión, por lo general presenta una componente disipativa siendo este término de carácter no conservativo.
- $\vec{F}_{int}$: Término que involucra las fuerzas de interacción entre individuos, por lo general esta componente es de característica conservativa.
- $\vec{F}_{est}$: Fuerza estocástica, se puede considerar de característica externa.
- $\vec{F}_{esp}$: Término de fuerzas dadas por el espacio donde se encuentra la partícula la cual se puede considerar como una fuerza de característica externa.

A continuación se presentan las diferentes alternativas para $\vec{F}_{act}$, $\vec{F}_{int}$, $\vec{F}_{est}$ y $\vec{F}_{esp}$.

7.2.1. Términos disipativos y de autopropulsión

Considerando lo presentado en [25] y [27] la fuerza asociada a términos disipativos y de movimiento activo se puede tomar como:

$$\vec{F}_{act} = -m_i\gamma\vec{v}_i - m_i\sigma^2(\vec{v}_i - \vec{V}) \tag{7.3}$$

El primer término considera un deposito interno de energía donde una aproximación de este es $\gamma = (-\alpha + \beta v^2)$. El segundo término tiende a hacer paralelas la velocidades $\vec{v}_i$ de las partículas con la velocidad media del enjambre $\vec{V}$ la cual se puede calcular como:

$$\vec{V} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{v}_j \tag{7.4}$$

Según el modelo de Levine [52] la fuerza de autopropulsión considerada como $\vec{F}_{act} = \alpha\vec{f}_i$, para un caso sin alineamiento es $\vec{f}_i = \vec{v}_i$ y con alineamiento corresponde a:

$$\vec{f}_i = \sum_{i \neq j}^{N} \vec{v}_j e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{l_c}} \tag{7.5}$$

Como se aprecia en la anterior ecuación el rango del alineamiento es l_c.

7.2.2. Términos de interacción

Según el modelo de Levine [52] y lo presentado en [25] y [58] una forma para representar la fuerza de interacción consiste en emplear potenciales exponenciales (Morse). La fuerza asociada a este potencial se puede calcular como:

$$\vec{F}_{int} = -\vec{\nabla}_i U_{int}$$

La interacción de los individuos del enjambre está dada por un potencial atractivo de rango largo:

$$U^a_{int} = -C_a e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_a}} \tag{7.6}$$

Adicionalmente, la colisión de las partículas se evita mediante un potencial repulsivo de rango corto:

$$U^r_{int} = -C_r e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_r}} \tag{7.7}$$

La distancia desde la partícula i hasta la partícula j se calcula como $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

Considerando las anteriores expresiones el potencial de interacción total es $U_{int} = U^a_{int} + U^r_{int}$. La magnitud de la fuerza de estos potenciales está dada por C_a y C_r mientras que el rango por l_a y l_r con $l_a > l_r$.

Otra alternativa para describir la interacción entre individuos se presenta en [24], [26], [30], [56] y [75], en este caso, la fuerza de interacción se encuentra basada en un potencial atractivo parabólico de la forma [75] :

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2}(\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

donde $\vec{R}$ es el centro de masa del enjambre el cual se puede calcular como:

$$\vec{R} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j$$

Este potencial genera fuerzas directamente sobre el centro de masa las cuales pueden ser utilizadas para controlar la dispersión del enjambre produciendo un acople global de las partículas al centro de rotación del enjambre. La fuerza producida por la interacción de las partículas es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int} &= \vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}) = a(\vec{r}_i - \vec{R}) \\ \vec{F}_{int} &= \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{aligned}$$

con $a = c(1 - 1/N)$.

Por otra parte, considerando el modelo de interacciones hidrodinámicas la fuerza de interacción es:

$$\vec{F}_{int} = K_F \sum_{j\neq i}^{N}\left[\frac{R}{r_{ij}}\,\vec{v}_j + \frac{R(\vec{r}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij})}{r_{ij}^3}\,\vec{r}_{ij}\right] \quad \text{para } r_{ij} \gg R \tag{7.8}$$

Otra alternativa para la interacción entre individuos se encuentra en el modelo que incluye maniobras de evasión donde se tiene:

$$\vec{F}_{int} = \sum_{j\neq i}^{N}\vec{f}_{ij} \tag{7.9}$$

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}U_{ij}(R_i) = \frac{p}{\sigma R_i}\,e^{-\dfrac{R_i}{\sigma}}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{7.10}$$

Siendo R_i una función de distancia entre individuos.

7.2.3. Término dependiente del espacio

Este término corresponde a la fuerza que produce el campo potencial generado por los obstáculos y el objetivo que componen el espacio de trabajo U_{esp}. Esta fuerza se puede calcular como:

$$\vec{F}_{esp} = -k_f\vec{\nabla}U_{esp} \tag{7.11}$$

7.2.4. Término estocástico

La fuerza estocástica $\vec{F}_{est} = \vec{\xi}(t)$ corresponde a una componente de ruido blanco de magnitud D y δ-correlacionada en el tiempo. Esta fuerza presenta componentes escalares las cuales cumplen con:

$$\begin{aligned} \langle\xi_i(t)\rangle &= 0 \\ \langle\xi_i(t)\xi_j(\tau)\rangle &= 2D\delta(t-\tau)\delta_{ij} \end{aligned}$$

Esta fuerza estocástica es empleada en los modelos de partícula Browniana tal como se aprecia en [24], [30], [52] y [76].

7.3. Términos seleccionados

Como es de apreciar, para la fuerza dada por el espacio de trabajo y para el término estocástico solo se presenta una alternativa de implementación, por lo cual, estos se toman como fueron descritos anteriormente. Por otro lado, la fuerza de autopropulsión y el término de interacciones entre individuos son de atención en la presente sección para su selección.

Buscando un modelo compacto que logre describir el comportamiento de vorticidad fueron seleccionados los términos relacionados a continuación. Para la componente de autopropulsión (movimiento activo) se toma:

$$\vec{F}_{act} = (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i \tag{7.12}$$

La anterior expresión también se encuentra en la ecuación de Rayleigh la cual presenta un comportamiento de ciclo limite. Con esta fuerza de autopropulsión la velocidad de las partículas en estado estable tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$, [52], [65].

La fuerza de interacción seleccionada se encuentra basada en un potencial atractivo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre. La fuerza de interacción en este caso es:

$$\vec{F}_{int} = \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{7.13}$$

7.3.1. Modelo seleccionado

Considerando lo presentado anteriormente el modelo seleccionado se encuentra descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{7.14}$$

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\xi}_i(t) \tag{7.15}$$

En este modelo según [59], el término $\vec{\xi}(t)$ evita el colapso de los individuos de tal forma que se puede omitir la interacción de repulsión de rango corto. Adicionalmente en [29] y [59] se muestra que el término $\vec{\xi}(t)$ permite tener una transición de un movimiento traslacional a uno rotacional lo cual se presenta cuando las condiciones iniciales de todos los individuos son las mismas.

7.4. Simulación del modelo

Con la finalidad de observar las características del modelo se realiza un conjunto de simulaciones donde se toman diferentes valores de los parámetros del modelo. Los parámetros a considerar son N, a, α, β y D.

Para la fuerza de autopropulsión $F_{act} = (\alpha - \beta v_i^2)v_i$ la cual se puede considerar como una fuerza disipativa $F_{dis} = -F_{act}$ es posible observar su comportamiento con diferentes valores de α tal como se muestra en la figura 7.1, en esta figura los valores negativos representan la propulsión suministrada a la partícula mientras que los valores positivos corresponden a una acción de frenado. Adicionalmente en la figura 7.1 se observa que al incrementar el valor de α la fuerza de propulsión aumenta.

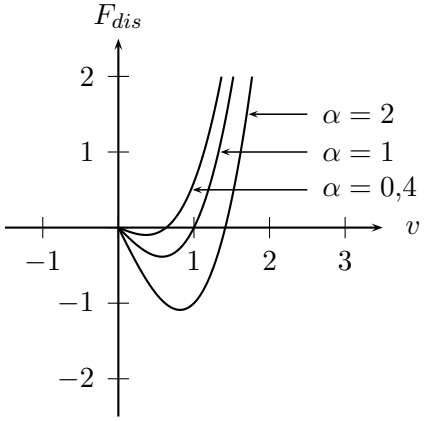

Figura 7.1: Fuerza de fricción no lineal en función de v, para $\beta = 1$ y α de 2, 1 y 0,4.

El comportamiento de F_{dis} para diferentes valores de β se presenta en la figura 7.2, en este caso se aprecia que al aumentar β la fuerza de propulsión disminuye mientras que el efecto de la fuerza de frenado se incrementa.

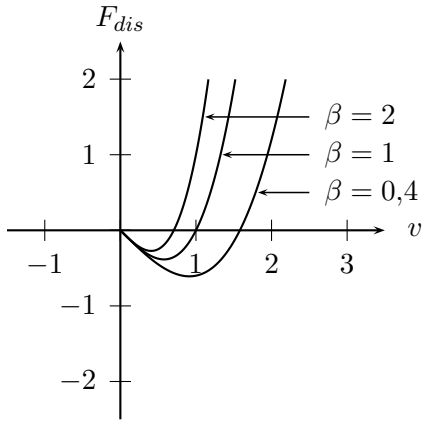

Figura 7.2: Fuerza de fricción no lineal en función de v, para $\alpha = 1$ y β de 2, 1 y 0,4.

Considerando lo reportado en [26] y [29] se aprecia que los parámetros críticos del modelo son α, β y D, por lo tanto, se toma $a = 1$ y N para 10 y 20 individuos. Adicionalmente, dado que la velocidad de las partículas en estado estable tiende a $\sqrt{\alpha/\beta}$ y observando el efecto de β en la fuerza de autopropulsión (figuras 7.1 y 7.2), entonces, se toma $\alpha = 1$ y se varia β. Luego de una simulación preliminar se estima que los valores representativos de β a considerar son 0,2 y 0,5.

Según [26] el valor crítico de la magnitud del ruido se puede estimar mediante la siguiente expresión.

$$D_{cr} = \frac{\beta\alpha^2}{(\sqrt{6}\beta + 0{,}676)^2}$$

Con los valores de α y β anteriormente seleccionados se determina el valor crítico de la magnitud del ruido obteniendo los resultados de la tabla 7.1.

$\alpha = 1$	$\beta = 0{,}2$	$\beta = 0{,}5$
D_{cr}	0,1471	0,1384

Tabla 7.1: Valores críticos para la magnitud del ruido.

Considerando que D_{cr} es una estimación de la magnitud crítica del ruido se escogen los valores de 0 y 1 con el fin de observar de forma significante el efecto de esta componente.

Cuando las condiciones iniciales son iguales para la posición y la velocidad las partículas presentan un movimiento de traslación y en la medida que se aumenta la intensidad del ruido existe un valor crítico para el cual el enjambre pasa de tener un movimiento de traslación a uno de rotación donde el centro de masa del enjambre presenta un movimiento aleatorio débil [29].

La simulación se realiza empleando una aproximación de Euler con un paso fijo de

$\Delta t = 0{,}1$. Con el fin de lograr un movimiento de traslación las condiciones iniciales son las mismas para todas las partículas, para la posición se toma el origen y la velocidad se considera con componentes de 0,001 en las dos direcciones. En la figura 7.3 se puede apreciar el movimiento de traslación que presentan las partículas cuando se tiene $D = 0$.

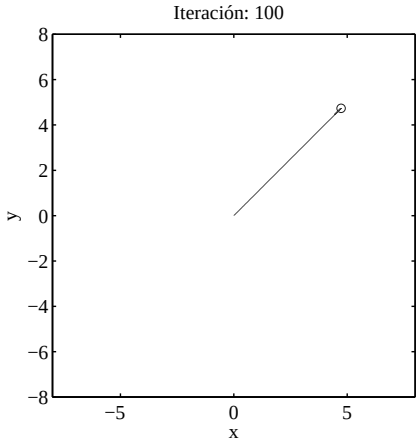

Figura 7.3: Simulación sin la presencia de ruido con $N = 10$ individuos y $\beta = 0{,}2$.

Los resultados con ruido de magnitud $D = 1$ se pueden observar en las figuras 7.4, 7.5, 7.6 y 7.7. La línea continua muestra el movimiento descrito por el centro de masa del enjambre.

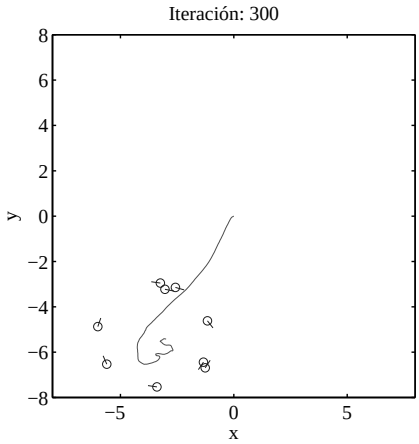

Figura 7.4: Simulación con $N = 10$ individuos, $\beta = 0{,}2$ y una magnitud de ruido $D = 1$.

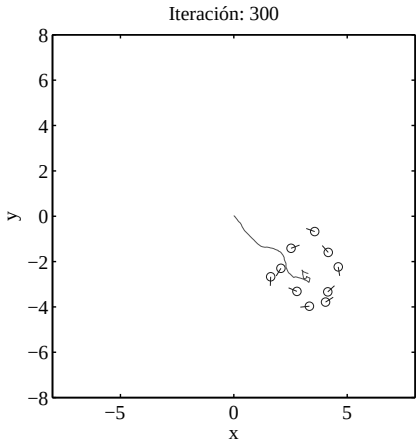

Figura 7.5: Simulación con $N = 10$ individuos, $\beta = 0{,}5$ y una magnitud de ruido $D = 1$.

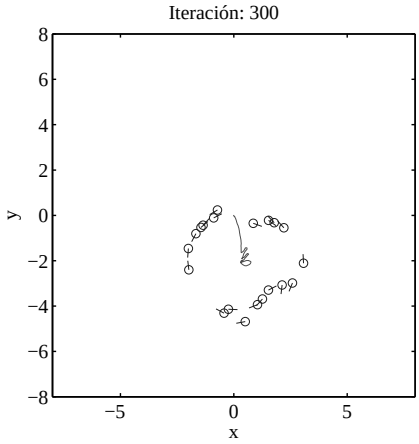

Figura 7.6: Simulación con $N = 20$ individuos, $\beta = 0{,}2$ y una magnitud de ruido $D = 1$.

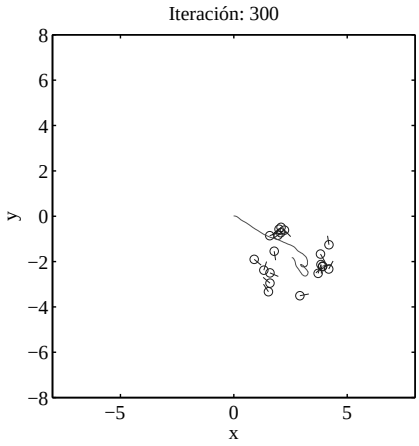

Figura 7.7: Simulación con $N = 20$ individuos, $\beta = 0{,}5$ y una magnitud de ruido $D = 1$.

Otro aspecto a considerar en este grupo de simulaciones se tiene cuando las condiciones iniciales se generan de forma aleatoria sin la presencia de ruido produciendo un comportamiento de vorticidad por parte de las partículas del enjambre.

Para condiciones iniciales aleatorias de la posición y la velocidad y sin la presencia de ruido se tienen los resultados presentados en las figuras 7.8, 7.9, 7.10 y 7.11. En este caso se aprecia que el enjambre describe una trayectoria circular más uniforme en comparación a los resultados presentados anteriormente.

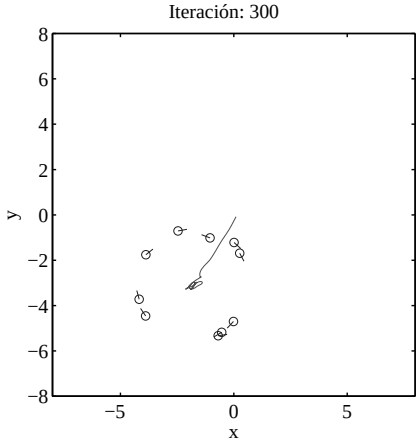

Figura 7.8: Simulación con $N = 10$ individuos, $\beta = 0{,}2$ y una magnitud de ruido $D = 0$.

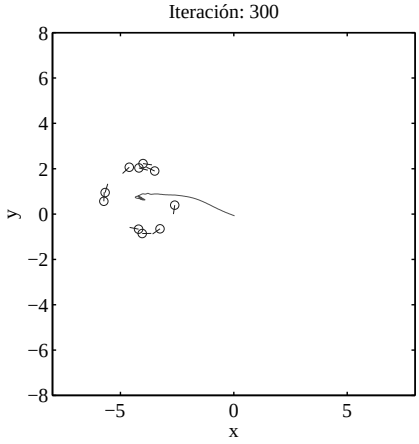

Figura 7.9: Simulación con $N = 10$ individuos, $\beta = 0{,}5$ y una magnitud de ruido $D = 0$.

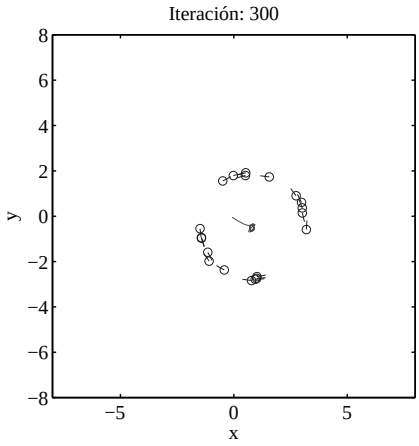

Figura 7.10: Simulación con $N = 20$ individuos, $\beta = 0{,}2$ y una magnitud de ruido $D = 0$.

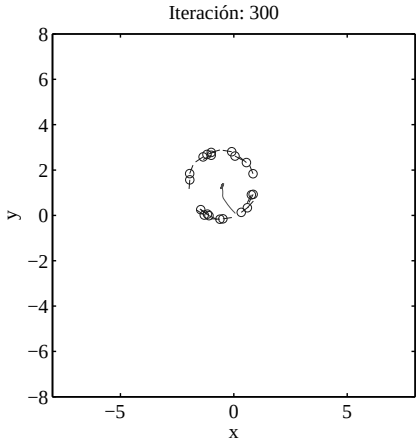

Figura 7.11: Simulación con $N = 20$ individuos, $\beta = 0{,}5$ y una magnitud de ruido $D = 0$.

Capítulo 8

Análisis del modelo seleccionado

8.1. Introducción

En este capítulo se realizan varios análisis al modelo seleccionado de tal forma que se puedan evidenciar sus características más relevantes con el fin de aprovecharlas en el algoritmo de planeación de trayectorias. El primer análisis consiste en una comparación cualitativa con el modelo propuesto en [1] por Colin McInnes y Wahid Abdel ya que este es uno de los trabajos más relacionados con el algoritmo desarrollado en el presente documento. Mediante esta comparación se puede apreciar que el modelo propuesto es más compacto y con menos parámetros que el modelo empleado en [1]. Una comparación cuantitativa se deja abierta para un desarrollo futuro ya que el presente trabajo se enfoca en presentar el algoritmo propuesto mostrando las características del modelo seleccionado. Posteriormente se desarrolla un análisis de estabilidad y de conservación del momento angular con el fin observar el comportamiento dinámico del modelo seleccionado. Considerando las simulaciones realizadas en el anterior capítulo el análisis dinámico del modelo se realiza sin la componente estocástica. Con este análisis se muestra que el modelo seleccionado logra generar movimientos circulares con la presencia de un vórtice.

8.2. Comparación con el modelo de evasión de mínimos locales

En esta sección se realiza la comparación cualitativa del modelo de partícula activa Browniana con el modelo propuesto en [1] por Colin McInnes y Wahid Abdel el cual se emplea para evadir mínimos locales. En primer lugar se realiza una descripción del modelo utilizado para la evasión de mínimos locales expuesto en [1] y posteriormente se compara con el modelo seleccionado.

8.2.1. Modelo de evasión de mínimos locales

Una propuesta con la cual se busca evadir mínimos locales se realiza en [1] donde se emplea un enjambre de agentes con características de vorticidad, esta técnica se denomina *Local Minimal Avoidance* (LMA), o *Local Minimal Escape* (LME).

El modelo descrito en [1] considera un grupo de N_p individuos con masa m_i, posición $\vec{r}_i$, velocidad $\vec{v}_i$ y distancia relativa $\vec{r}_{ij}$ entre el i-ésimo y j-ésimo individuo. Los agentes interactúan mediante un potencial generalizado de Morse $V_{\text{interacción}}(\vec{r}_i)$ (también utilizado para el oscilador armónico cuántico) con un rango débil de atracción la y un rango fuerte de repulsión lr. Para controlar la velocidad de los individuos se tiene un término disipativo con coeficiente β_i.

Las ecuaciones de movimiento para una partícula se pueden escribir como:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{8.1}$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{\text{total}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) \tag{8.2}$$

Donde $\vec{F}_{\text{total}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$ es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el i-ésimo agente. Considerando que la fuerza producida por un potencial se puede determinar como $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, entonces, el cálculo de esta fuerza se puede realizar mediante el potencial total:

$$V_{\text{total}} = V_{\text{interacción}} + V_{\text{obstáculos}} + V_{\text{objetivo}} \tag{8.3}$$

El potencia de interacción se considera como la suma de los potenciales de atracción y repulsión entre individuos. En este caso se emplean potenciales generalizados de Morse con decaimiento exponencial buscando reproducir comportamientos como los presentes en sistemas biológicos cerrados.

$$V_{\text{interacción}}(\vec{r}_i) = \sum_{i \neq j}^{N_p} C r_j e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}_j|/lr_j} - \sum_{i \neq j}^{N_p} C a_j e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}_j|/la_j} \tag{8.4}$$

El potencial para los obstáculos es:

$$V_{\text{obstáculos}}(\vec{r}_i) = \sum_{z=1}^{N_o} C o_{iz} e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}o_{iz}|/lo_{iz}} \tag{8.5}$$

Para el objetivo se emplea un potencial hiperbólico atractivo de fuerza w_g con el cual se espera asegurar la convergencia de los agentes al objetivo.

$$V_{\text{objetivo}}(\vec{r}_i) = w_g \left(\sqrt{1 + |\vec{r}_i - \vec{r}_g|^2} - 1 \right) \tag{8.6}$$

La fuerza total que actúa sobre una partícula es:

$$\begin{aligned}&\vec{F}_{\text{total}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = \\ &\vec{F}_{\text{disipación}}(\vec{v}_i) + \vec{F}_{\text{interacción}}(\vec{r}_i) + \vec{F}_{\text{orientación}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) \\ &+\vec{F}_{\text{obstáculos}}(\vec{r}_i) + \vec{F}_{\text{objetivo}}(\vec{r}_i)\end{aligned} \tag{8.7}$$

Donde:

$$\vec{F}_{\text{disipación}}(\vec{v}_i) = -\beta_i \vec{v}_i \tag{8.8}$$

$$\vec{F}_{\text{interacción}}(\vec{r}_i) = \sum_{i \neq j}^{N_p} \left[\frac{Ca_j}{la_j} e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}_j|/la_j} - \frac{Cr_j}{lr_j} e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}_j|/lr_j} \right] \hat{r}_{ij} \tag{8.9}$$

$$\vec{F}_{\text{obstáculos}}(\vec{r}_i) = \sum_{z=1}^{N_o} \left[\frac{Co_{iz}}{lo_{iz}} e^{-|\vec{r}_i - \vec{r}o_{iz}|/lo_{iz}} \right] \hat{r}o_{iz} \tag{8.10}$$

$$\vec{F}_{\text{objetivo}}(\vec{r}_i) = -\frac{w_g(\vec{r}_i - \vec{r}_G)}{\sqrt{1 + |\vec{r}_i - \vec{r}_g|^2}} \tag{8.11}$$

$$\vec{F}_{\text{orientación}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = -\sum_{i \neq j}^{N_p} \left[C_A(\vec{v}_{ij} \cdot \hat{r}_{ij}) e^{-|\vec{r}_{ij}|/l_A} \right] \hat{r}_{ij} \tag{8.12}$$

En las anteriores expresiones $\hat{r}_{ij}$ corresponde al vector unitario dirigido de la i-ésima a la j-ésima partícula.

8.2.2. Modelo de partículas activas Brownianas

El modelo de partícula activa Browniana seleccionado para el algoritmo de planeación de trayectorias es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \tag{8.13}$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{act} + \vec{F}_{int} + \vec{F}_{esp} + \vec{F}_{est} \tag{8.14}$$

Donde:

$$\vec{F}_{act} = (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i \tag{8.15}$$

$$\vec{F}_{int} = -\frac{a}{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{8.16}$$

$$\vec{F}_{esp} = -k_f \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}) \tag{8.17}$$

$$U_{esp} = U_{obj}(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{M} U_{obs,m}(\vec{r}) \tag{8.18}$$

$$U_{obj}(\vec{r}) = k_{obj}\,\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_{obj})^2 \tag{8.19}$$
$$U_{obs}(\vec{r}) = k_{obs}\,\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_{obs})^{-1} \tag{8.20}$$

$$\mathrm{dis}(\vec{r},\vec{r}_a) = \sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2} \tag{8.21}$$

$$\vec{F}_{est} = \vec{\xi}(t) \tag{8.22}$$

8.2.3. Comparación de modelos

Dado que la diferencia de los dos modelos se presenta para la ecuación donde se relaciona la derivada de la velocidad entonces se puede realizar una comparación de cada uno de los términos de estas ecuaciones tal como se aprecia en la tabla 8.1.

Término	Escape de mínimos locales	Partícula activa Browniana
Inercial	$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}$	$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}$
Disipativo-propulsión	$-\beta_i\vec{v}_i$	$(\alpha-\beta v_i^2)\vec{v}_i$
Interacción	$\sum_{i\neq j}^{N_p}\left(\frac{Ca_j}{la_j}e^{-\frac{\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert}{la_j}} - \frac{Cr_j}{lr_j}e^{-\frac{\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert}{lr_j}}\right)\hat{r}_{ij}$	$-\frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$
Objetivo	$\vec{F}=-\vec{\nabla}V$	$\vec{F}_{esp}=-k_f\vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r})$
Alineamiento	$-\sum_{i\neq j}^{N_p}\left[C_A(\vec{v}_{ij}\cdot\hat{r}_{ij})e^{-\lvert\vec{r}_{ij}\rvert/l_A}\right]\hat{r}_{ij}$	No presenta
Estocástico	No presenta	$\vec{\xi}(t)$

Tabla 8.1: Comparación de modelos.

La comparación cualitativa de los modelos se puede observar en la tabla 8.2.

Término	Escape de mínimos locales	Partícula activa Browniana
Inercial	No se presenta diferencia	No se presenta diferencia
Disipativo-propulsión	Solo presenta un término disipativo	Presenta un termino disipativo y uno de propulsión.
Interacción	Emplea potencial de morse de atracción y repulsión	Emplea potencial parabólico de atracción
Objetivo	Depende del potencial del objetivo y los obstáculos	Depende del potencial del objetivo y los obstáculos
Alineamiento	Función de alineamiento de las partículas para tener una sola dirección	No se presenta
Estocástico	No se presenta	Función estocástica de ruido blanco

Tabla 8.2: Comparación cualitativa de modelos.

8.3. Análisis de la formación de vórtices

En este análisis se realizan varias consideraciones con las cuales se busca describir el comportamiento de vorticidad cuando el enjambre se encuentra en un mínimo local.

Recordando que el modelo seleccionado es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i \\ m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} &= (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) + \vec{\xi}_i(t) \end{aligned}$$

Es importante señalar que el factor producido por las interacciones entre partículas está dado por un potencial parabólico de la forma [75]:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2}(\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

Este potencial armónico genera fuerzas directamente sobre el centro de masa presentando un acople global de las partículas al centro rotación de estas. El parámetro a asociado al campo de interacción puede ser empleado para controlar la dispersion del enjambre. La fuerza producida por la interacción de las partículas es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int,i} &= -\vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}_i) \\ \vec{F}_{int,i} &= -c\left(1 - \frac{1}{N}\right)(\vec{r}_i - \vec{R}) \end{aligned}$$

con $a = c(1 - 1/N)$ se tiene:

$$\vec{F}_{int,i} = -\frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

A continuación se realiza un análisis de energía tomando como referencia el procedimiento presentado en [58], posteriormente se muestra un análisis de conservación de momento angular para comprobar que el modelo logra generar vórtices. El análisis se efectúa sin considerar la presencia de la componente estocástica ya que las simulaciones realizadas en la sección anterior muestran que para condiciones iniciales aleatorias no se requiere la componente estocástica para que exista un movimiento circular. Adicionalmente en trabajos donde se analiza el modelo de partícula activa Browniana ([24], [27], [28]) se realiza un análisis preliminar sin esta componente donde se observa la presencia de un ciclo limite el cual esta ligado la fuerza de auto-propulsión.

8.3.1. Posición y velocidad media del enjambre

Con la velocidad media del enjambre se busca determinar la condición de equilibrio para la velocidad de las partículas cuando estas se encuentran en un mínimo local. Recordando que la posición y velocidad media del enjambre se definen como:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i, \\ \vec{V} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i\end{aligned}$$

y considerando que la masa de las partículas es la misma para todas $m_i = m$, entonces, la ecuación de movimiento de la velocidad media del enjambre es:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \qquad (8.23)$$

el punto de equilibrio para la velocidad media del enjambre se tiene con $d\vec{V}/dt = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - a\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right) - \sum_{i=1}^{N}k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N}k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i)\end{aligned}$$

Considerando que el enjambre al encontrarse cerca de un mínimo local $\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \approx 0$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i \approx 0$$

la anterior expresión se cumple con $\vec{v}_i = 0$ o con $v_i = \sqrt{\alpha/\beta}$.

8.3.2. Análisis de energía

Con este análisis se busca mostrar la conservación de la energía cuando el enjambre se encuentra en un mínimo local. El primer paso en este desarrollo consiste en determinar la correspondiente energía cinética y potencial de cada partícula. La energía cinética de una partícula es:

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 \tag{8.24}$$

Por otro lado, la energía potencial para una partícula se puede calcular como:

$$U_i = U_{int}(\vec{r}_i) + k_f U_{esp}(\vec{r}_i) \tag{8.25}$$

Para el siguiente procedimiento se debe tener presente que la derivada de una función de la forma $f(x_i(t))$ obedece a la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx_i}\frac{dx_i}{dt} \tag{8.26}$$

El siguiente paso en este desarrollo consiste en tomar la derivada de $T_i + U_i$ en función del tiempo, obteniendo:

$$\frac{d}{dt}(T_i + U_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2 + U_{int}(\vec{r}_i) + k_f U_{esp}(\vec{r}_i)\right) \tag{8.27}$$

Para un potencial de interacción de la forma:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2}(\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

al tomar la derivada con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U_{int}(\vec{r}_i) &= c\left(\vec{r}_i - \vec{R}\right)\cdot\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt}\right) \\
&= (\vec{v}_i - \vec{V})\cdot\frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\
&= \vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}_i) - \vec{V}\cdot\vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}_i)
\end{aligned}$$

Considerando que la posición de una partícula se puede representar como $\vec{r}_i = r_{x,i}\hat{u}_x + r_{y,i}\hat{u}_y$ donde $(\hat{u}_x, \hat{u}_y)$ son vectores unitarios en la dirección x y y respectivamente, entonces, la derivada temporal del campo potencial asociado a los obstáculos y el objetivo U_{esp} se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U_{esp}(\vec{r}_i) &= \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{x,i}}\frac{dr_{x,i}}{dt} + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{y,i}}\frac{dr_{y,i}}{dt} \\
&= \left[\frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{x,i}}\hat{u}_x + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{y,i}}\hat{u}_y\right] \cdot \left[\frac{dr_{x,i}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dr_{y,i}}{dt}\hat{u}_y\right] \\
&= \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i \\
&= \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i)
\end{aligned}$$

Con los anteriores resultados se tiene la derivada en función del tiempo para $T_i + U_i$,

$$\frac{d}{dt}(T_i + U_i) = m_i\vec{v}_i \cdot \frac{\vec{v}_i}{dt} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot \frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{v}_i \cdot k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \tag{8.28}$$

Realizando el producto interno entre $\vec{v}_i$ y la ecuación de movimiento se tiene:

$$m_i\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{v}_i \cdot (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \vec{v}_i \cdot \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{v}_i \cdot k_f\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \tag{8.29}$$

Reemplazando la ecuación 8.29 en 8.28 y realizando la suma para todas las partículas del enjambre se tiene que la derivada de la energía total del enjambre es:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(T + U) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(T_i + U_i) &(8.30)\\
&= \sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)v_i^2 &(8.31)
\end{aligned}$$

De lo anterior se puede decir que el enjambre de partículas mantienen un estado constante de energía si:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{N}(\alpha - \beta v_i^2)v_i^2 = 0 \tag{8.32}$$

Del análisis realizado a la velocidad media se tiene que $v_i = 0$ o $v_i = \sqrt{\alpha/\beta}$ lo cual hace que $dE/dt = 0$ implicando que la energía del enjambre tiende a conservarse para estos valores, en particular siendo de interés $v_i = \sqrt{\alpha/\beta}$ para la formación del vórtice.

8.3.3. Análisis de momento angular

Con este análisis se pretende evidenciar el comportamiento de vorticidad que presenta el modelo, para lo cual, en primer lugar se revisa el concepto de conservación del momento angular y posteriormente se presenta un desarrollo con el cual se puede apreciar la conservación del momento angular de las partículas.

El momento angular permite observar las simetrías rotacionales en los sistemas físicos. En algunos casos esta simetría permanece constante dando lugar a la ley de conservación de momento angular. Para una partícula que se mueve con respecto a un punto O tal como se aprecia en la figura 8.1, el momento angular de la partícula respecto a este punto se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{8.33}$$

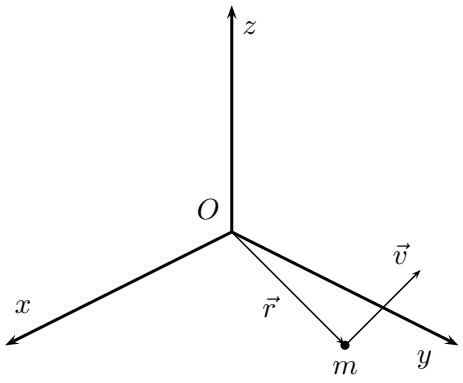

Figura 8.1: Partícula realizando un movimiento circular alrededor de O.

El análisis de conservación del momento consiste en determinar cuando $\vec{L}$ es constante por lo cual se calcula su derivada y se iguala acero.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.34}$$

Dado que $d\vec{r}/dt \times \vec{v} = 0$ entonces se tiene que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8.35}$$

Para que exista conservación del momento angular se debe tener que $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ lo cual se presenta cuando la magnitud de la fuerza es cero o cuando la fuerza que se ejerce sobre la partícula pasa por el radio de giro de esta, lo cual ocurre con partículas que giran con respecto a un punto fijo a velocidad constante.

Para establecer las condiciones de conservación del momento angular del modelo, se calcula el producto vectorial de $\vec{r}_i$ con todos los términos de la ecuación de movimiento

obteniendo:

$$m_i\vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i \times k_f \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \tag{8.36}$$

Tomando la suma para todas las partículas del enjambres se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_i U_{int}(\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times k_f \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r}_i) \tag{8.37}$$

El gradiente del potencial $U_{int,i}$ está dado por la interacción de pares de partículas a lo largo de $\vec{r}_{ij}$, debido a la simetría de las interacciones internas este término tiende a ser nulo. Los torques internos por interacciones de dos partículas se anulan lo cual se puede comprobar aplicando la identidad $\vec{r}_i \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_i$, es decir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \nabla U_{int,i} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{a}{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\
&= \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{r}_i - \vec{r}_i \times \vec{r}_j) \\
&= \frac{a}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (-\vec{r}_i \times \vec{r}_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con el fin de observar mejor el anterior resultado se pueden desarrollar las sumas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i \times \vec{r}_j) &= [(\vec{r}_1 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_N) \\
&\quad + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_N) \\
&\quad + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_N) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\vec{r}_N \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_N \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_N \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_N \times \vec{r}_N)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Recordando que el momento angular de una partícula se puede determinar como:

$$L_i = m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{8.38}$$

entonces, la condición para establecer la conservación del momento angular está dada por la siguiente ecuación.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = 0 \tag{8.39}$$

Reemplazando la ecuación 8.37 en 8.39 se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times (\alpha - \beta v_i^2)\vec{v_i} - \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times k_f \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r_i}) \tag{8.40}$$

Del análisis realizado en la anterior sección se tiene que el enjambre de partículas en estado estable tiende a presentar una velocidad de magnitud $v = 0$ o $v = \sqrt{\alpha/\beta}$, por lo cual, el término asociado a la propulsión en estado estable se elimina. Por otro lado, si se considera un caso donde el enjambre de las partículas se encuentra cerca a un mínimo local o global la fuerza producida por este campo potencial se puede tomar como $\vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r_i}) \approx 0$, por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times k_f \vec{\nabla}_i U_{esp}(\vec{r_i}) \approx 0$$

Bajo las anteriores consideraciones se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt} = 0 \tag{8.41}$$

lo cual indica que el momento angular se conserva, por lo tanto, en estado estable y en la presencia de un mínimo global o local el enjambre de partículas se mueve de forma circular generando un vórtice.

Capítulo 9

Implementación del modelo y propuesta del algoritmo

9.1. Introducción

En este capítulo se describe el algoritmo propuesto para la planeación de trayectorias el cual se encuentra basado en el modelo seleccionado. La implementación del modelo en el algoritmo se realiza discretizando las ecuaciones de movimiento. Adicionalmente, se propone una estrategia para lograr que el enjambre de partículas pueda escapar de mínimos locales. La estrategia desarrollada consiste en incrementar la energía de autopropulsión cuando el enjambre se estanca en un mínimo local. Para establecer cuando las partículas llegan a un mínimo local se guarda un registro del valor mínimo del campo potencial que las partículas han visitado. De los aspectos a señalar en esta metodología se tiene que el mínimo global es conocido lo cual se emplea como criterio de finalización considerando que otro criterio de parada es el número máximo de iteraciones permitidas.

9.2. Implementación del modelo

Para incorporar en el algoritmo el modelo dinámico del enjambre se discretizan las ecuaciones diferenciales tomando un intervalo de tiempo Δt, de tal forma que se tiene:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \tag{9.1}$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \left[\left(\alpha - \beta v_i^2[n]\right)\vec{v}_i[n] - \frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - k_f\vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i[n]) + \vec{\xi}_i[n]\right]\frac{\Delta t}{m_i} \tag{9.2}$$

El cálculo de $\vec{\xi}_i[n]$ se realiza en cada iteración mediante una distribución uniforme de media cero y varianza D. Adicionalmente para tener un algoritmo más eficiente la fuerza

dada por la interacción entre individuos se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{a}{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i[n]-\vec{r}_j[n]) = a\left(\vec{r}_i[n]-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j[n]\right) = a\left(\vec{r}_i[n]-\vec{R}\right) \tag{9.3}$$

9.3. Estrategia propuesta para la evasión de mínimos locales

El algoritmo desarrollado se encuentra basado en primer lugar en el comportamiento de vorticidad que presentan las partículas cuando se encuentran en un mínimo y en segundo lugar se considera que el mínimo global es conocido correspondiendo al objetivo.

Considerando lo anterior para lograr que las partículas escapen de un mínimo local se propone aumentar la energía de propulsión α cuando el enjambre se encuentre en un mínimo local.

Para incrementar la energía de propulsión se considera un valor mínimo del campo potencial U_{min} el cual se calcula con la ecuación 9.6 y que se actualiza en cada iteración empleando el valor actual del campo potencial U_{act} el cual se determina conociendo el promedio de las posiciones del enjambre $\vec{R}$ mediante las ecuaciones 9.4 y 9.5.

$$\vec{R} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j \tag{9.4}$$

$$U_{act} = U_{esp}(\vec{R}) \tag{9.5}$$

$$U_{min} = \begin{cases} U_{act}, & \text{si } U_{min} \geq U_{act}; \\ U_{min}, & \text{si } U_{min} < U_{act}. \end{cases} \tag{9.6}$$

La adición de energía de propulsión se realiza mediante el factor de propulsión:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_e \tag{9.7}$$

Donde α_0 es el valor mínimo de propulsión y α_e corresponde a la parte de energía que se adiciona la cual se encuentra limitada $0 \geq \alpha_e \geq \alpha_{max}$. En esta propuesta la variación de α_e se considera como:

$$\frac{d\alpha_e}{dt} = \begin{cases} \tau_c, & \text{si } U_{min} \leq U_{act}; \\ \tau_d, & \text{si } U_{min} > U_{act}. \end{cases} \tag{9.8}$$

El cálculo de α_e en el algoritmo se realiza como:

$$\alpha_e[n+1] = \begin{cases} \alpha_e[n] + \tau_c\Delta t, & \text{si } U_{min} \leq U_{act}; \\ \alpha_e[n] - \tau_d\Delta t, & \text{si } U_{min} > U_{act}. \end{cases} \tag{9.9}$$

Con la anterior función se espera que la energía de propulsión aumente hasta que las partículas logren evadir el mínimo local, es decir, cuando U_{min} cambie. El aumento

de la energía está dado por el parámetro τ_c el cual es la tasa con la cual se incrementa la energía de autopropulsión. Cuando el enjambre logra evadir el mínimo local se libera la energía adicionada con una tasa de descarga τ_d. Para efectos prácticos se considera $\tau_d \gg \tau_c$. Finalmente la trayectoria se determina como el promedio de las posiciones de las partículas.

9.4. Algoritmo propuesto

Considerando que N corresponde al total de individuos del enjambre entonces el algoritmo propuesto para la planeación de trayectorias es el siguiente.

Algorimo 2: Algoritmo propuesto para la planeación de trayectorias.

```
1  Inicializar el enjambre en el espacio solución. La posición inicial es el punto de
   partida y la velocidad inicial es aleatoria;
2  begin
3      while Hasta llegar al punto destino o bajo algún criterio de finalización. do
4          Establecer la posición media del enjambre R⃗ empleando la ecuación 9.4;
5          Calcular U_act con la expresión 9.5;
6          Actualizar U_min mediante la ecuación 9.6;
7          Determinar α_e empleando la expresión 9.9;
8          for i = 1 hasta N do
9              Calcular la nueva posición de las partículas con la ecuación 9.1;
10             Calcular la nueva velocidad de las partículas empleando la ecuación 9.2;
11         end
12         Pasar a la siguiente iteración incrementando n.
13     end
14     Establecer la trayectoria final, como el promedio de las posiciones de las
       partículas.
15 end
```

Capítulo 10

Análisis cualitativo de resultados

10.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados para el método clásico de campos potenciales basado en gradiente y el método propuesto. Según lo expuesto en [1], [16], [31], [70] y [87] cuando se emplea el método de campos potenciales para la planeación de trayectorias se pueden considerar tres casos típicos, el primero no tiene mínimos locales, en el segundo caso se presenta un mínimo local por variación de los parámetros del campo potencial y en el tercer caso se tiene un obstáculo tipo barrera con un mínimo local. Adicionalmente, se consideran dos casos especiales los cuales consisten en pasos estrechos y un obstáculo tipo U. Con el fin de observar el comportamiento del algoritmo para diferentes valores de sus parámetros se toman como referencia las simulaciones realizadas del modelo, siendo los parámetros a variar el numero de individuos, la magnitud del ruido y el coeficiente de la fuerza disipativa. Los resultados cualitativos se presentan mediante figuras representativas de cada caso.

10.2. Método de campos potenciales basado en gradiente

El método clásico de campos potenciales se encuentra fundamentado en el cálculo de un vector unitario dado por el gradiente del potencial. Para este método se probo su efectividad en tres casos típicos los cuales consisten en un campo potencial sin mínimos locales, un campo potencial con mínimo local y un potencial con un obstáculo de barrera que presenta un mínimo local. En todos los casos implementados se emplea un potencial de atracción de magnitud $k_{\text{obj}} = 0{,}2$. El algoritmo se implementa empleando un paso de magnitud uno.

El primer caso a considerar consiste en varios obstáculos en el espacio de trabajo sin la presencia de mínimos locales, para lograr esta configuración el valor de la constante asociada a los potenciales de los obstáculos se toma de $k_{\text{obs}} = 50$. Con este potencial se

puede determinar la trayectoria empleando el cálculo del gradiente tal como se observa en las figuras 10.1.a y 10.1.b. En la figura 10.1.a se muestra la superficie del campo potencial generado donde se puede apreciar el objetivo y la presencia de tres obstáculos, adicionalmente el contorno del campo potencial y la trayectoria generada se presenta en la figura 10.1.b.

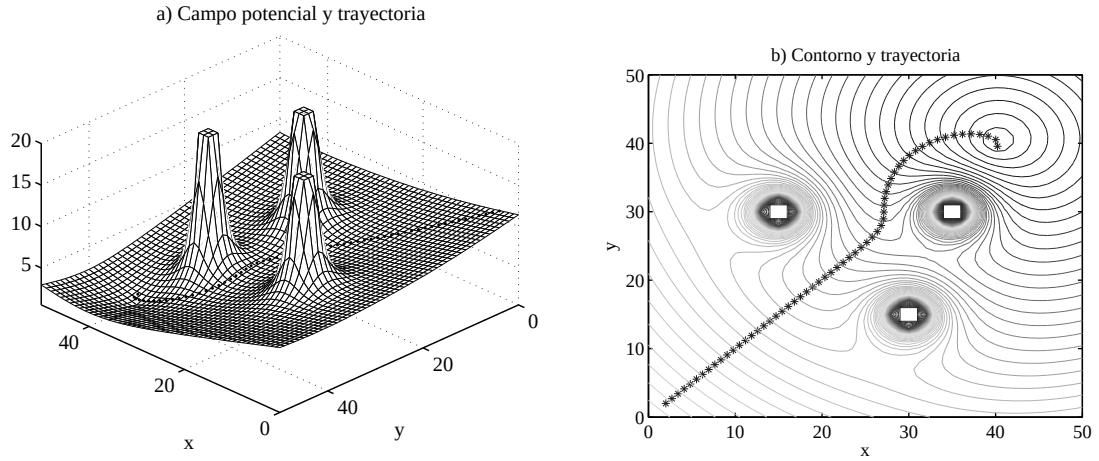

Figura 10.1: a) Campo potencial y trayectoria, b) Contorno del campo potencial y trayectoria.

Un caso donde se presenta un mínimo local en el campo potencial total se obtiene al incrementar la magnitud del campo para los obstáculos ($k_{\text{obs}} = 250$). En esta configuración no se tiene un obstáculo directo entre el punto inicial y el objetivo sin embargo se presenta un mínimo local en este trayecto lo cual no permite que el método basado en gradiente logre determinar la trayectoria. En la figura 10.2.a se aprecia la superficie del campo potencial generado mientras que en la figura 10.2.b se muestra el contorno donde se aprecia la existencia del mínimo local.

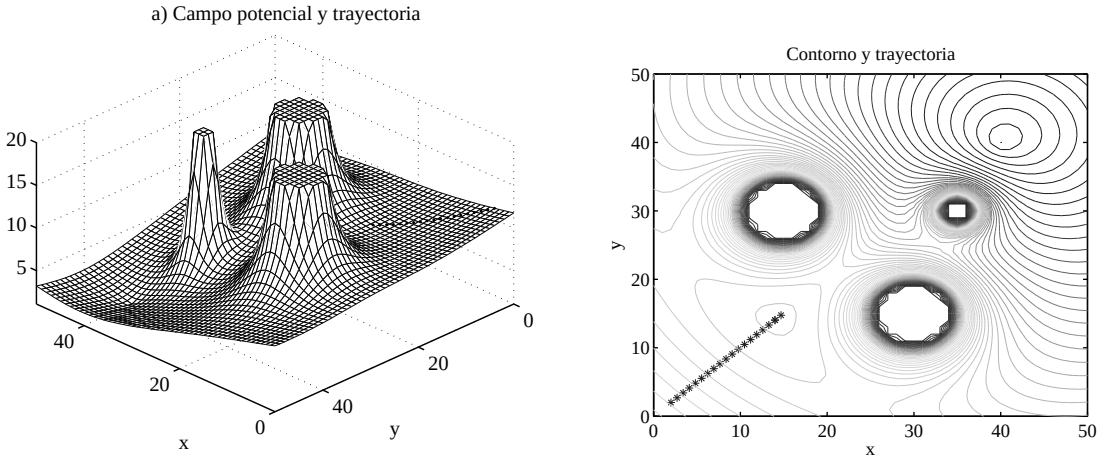

Figura 10.2: a) Campo potencial y trayectoria, b) Contorno del campo potencial y trayectoria.

Para lograr una configuración tipo trampa o barrera se adiciona un obstáculo a la configuración mostrada anteriormente, en este caso además de existir un mínimo local se

tiene un obstáculo entre el punto inicial y el objetivo. La superficie del campo potencial se muestra en la figura 10.3.a donde se aprecia el obstáculo adicionado. El mínimo local se puede observar en el contorno del potencial (figura 10.3.b). Para esta configuración al igual que en el anterior caso el método basado en gradiente no logra determinar la trayectoria.

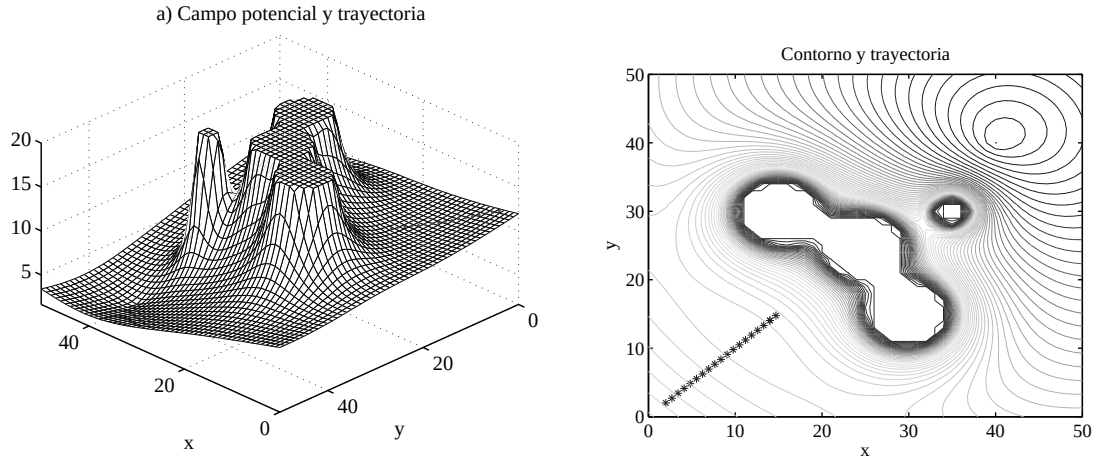

Figura 10.3: a) Campo potencial y trayectoria, b) Contorno del campo potencial y trayectoria.

10.3. Método propuesto

A continuación se presentan algunos resultados para los anteriores campos potenciales empleando el algoritmo propuesto. Con el fin de observar el comportamiento del algoritmo para diferentes parámetros se escogieron los siguientes valores considerando las simulaciones realizadas del modelo.

- Población N: 10 y 20.
- Fuerza estocástica D: 0 y 1,0.
- Parámetro de frenado β: 0,2 y 0,5.

Para los otros parámetros se toma: masa de las partículas $m_i = 1$, paso de simulación $\Delta t = 0{,}1$, parámetro de interacción entre individuos $a = 1$, factor de autopropulsión base $\alpha_0 = 1$, tasa de incremento de la energía de propulsión $\tau_c = 1$, tasa para la liberación de la energía de propulsión $\tau_d = 5$ y coeficiente de ponderación del campo potencial $k_f = 30$, adicionalmente la energía de propulsion se encuentra limitada de la forma $0 \leq \alpha_e \leq 10$. En la tabla 10.1 se muestran los diferentes casos que se tienen para la combinación de parámetros.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
D	0	0	0	0	1	1	1	1
N	10	10	20	20	10	10	20	20
β	0.2	0.5	0.2	0.5	0.2	0.5	0.2	0.5

Tabla 10.1: Lista de casos para los diferentes parámetros considerados.

Los resultados presentados en esta sección corresponden a figuras representativas de cada caso las cuales consisten en las trayectorias que describen las partículas como también la trayectoria promedio y la energía adicionada para que el enjambre logre salir del mínimo local.

10.3.1. Campo potencial sin mínimo local

En la tabla 10.2 se presenta el listado de las figuras más representativas para un campo potencial sin la presencia de mínimos locales. En esta tabla se relacionan las figuras de las trayectorias que describen las partículas como también la trayectoria promedio. En esta oportunidad no se muestra la figura de energía adicionada porque en ningún caso fue necesario este incremento.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Enjambre	10.4.a	10.5.a	10.6.a	10.7.a	10.8.a	10.9.a	10.10.a	10.11.a
Promedio	10.4.b	10.5.b	10.6.b	10.7.b	10.8.b	10.9.b	10.10.b	10.11.b

Tabla 10.2: Lista de figuras para las ejecuciones considerando diferentes parámetros.

En este grupo de figuras se aprecia que la trayectoria final generada es muy similar en la mayoría de casos presentándose pequeñas variaciones cuando se emplea ruido de magnitud uno. En buena proporción los resultados obtenidos son similares al método basado en gradiente lo cual indica que en este caso la fuerza asociada al campo potencial presenta una fuerte influencia en el comportamiento del enjambre.

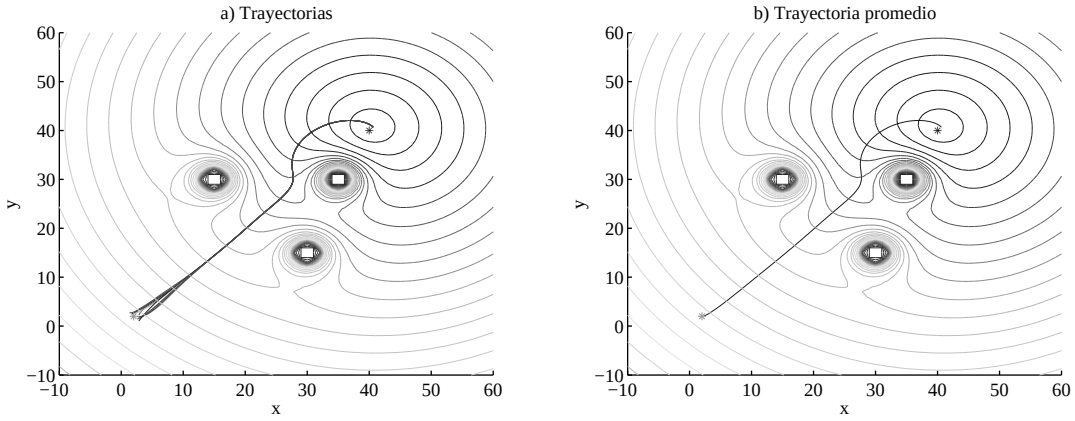

Figura 10.4: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

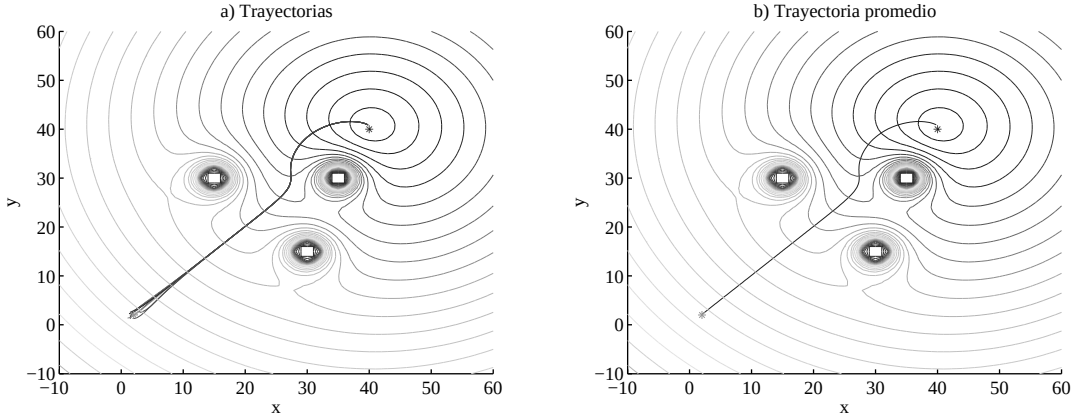

Figura 10.5: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

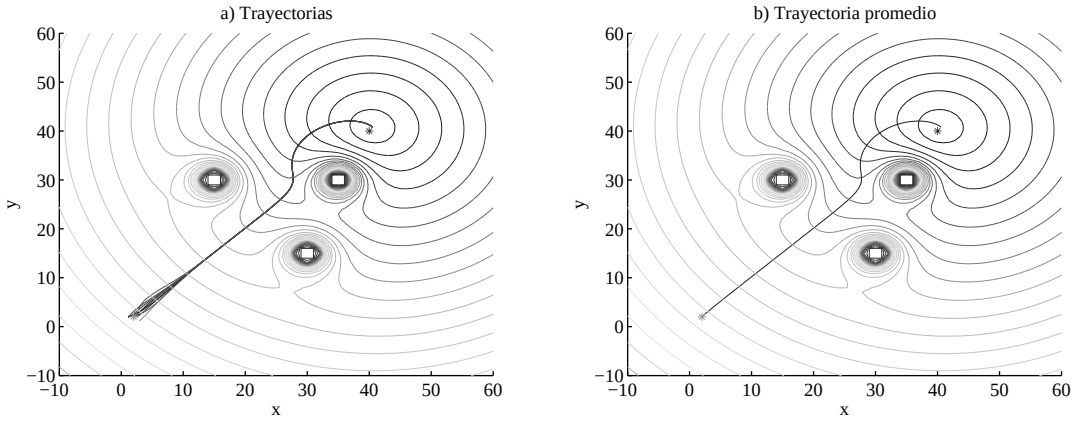

Figura 10.6: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

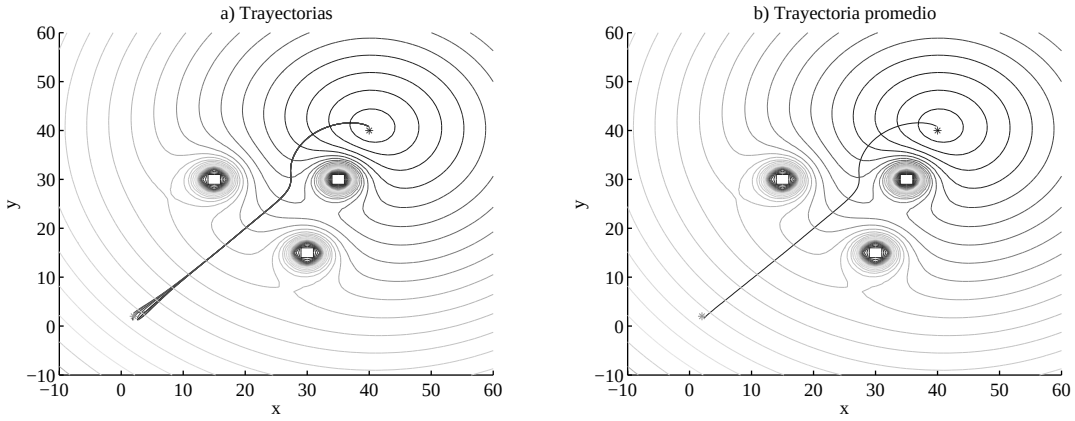

Figura 10.7: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

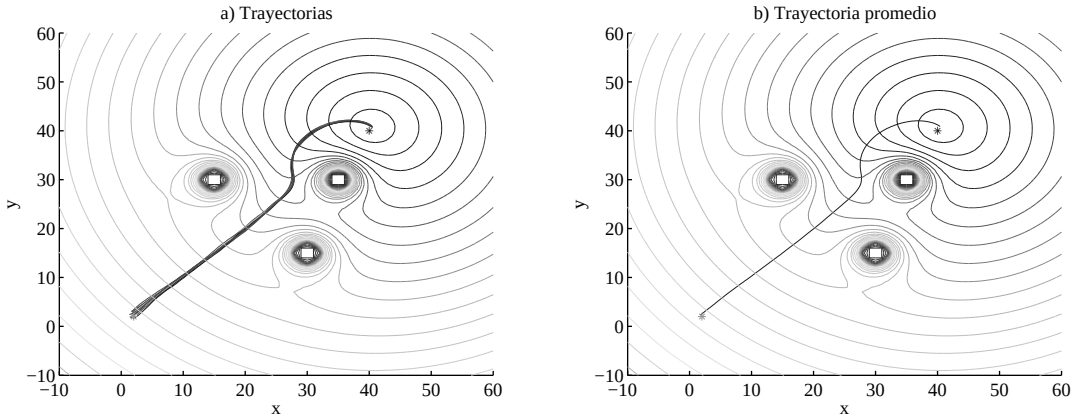

Figura 10.8: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

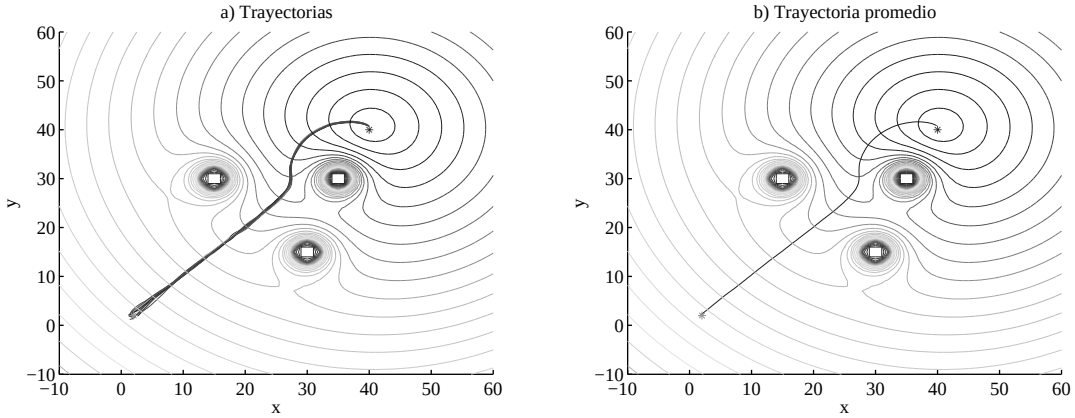

Figura 10.9: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

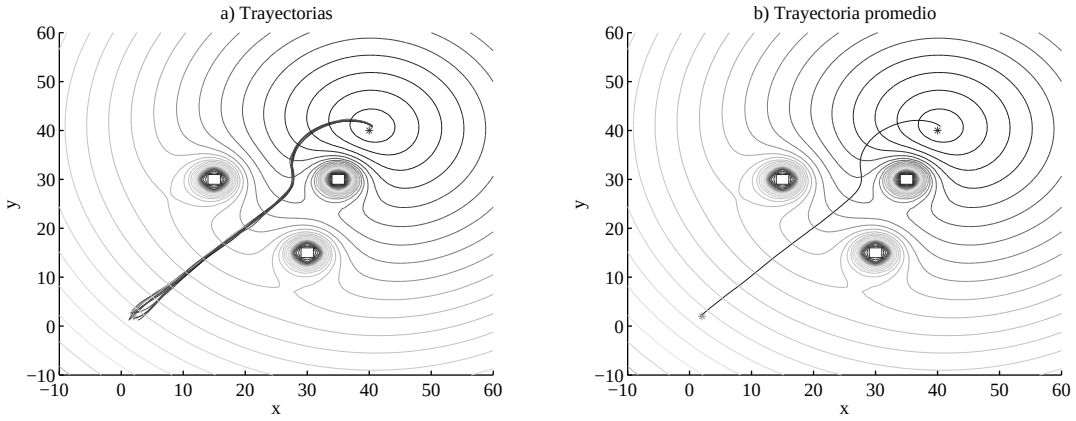

Figura 10.10: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

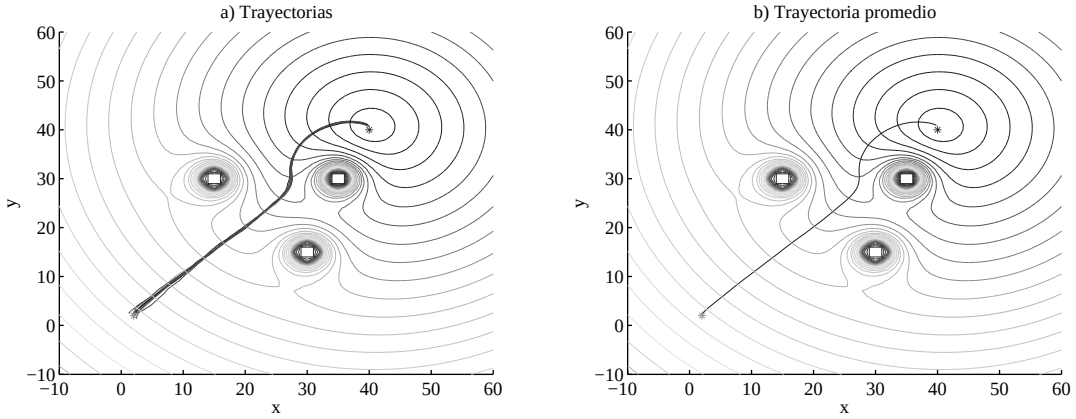

Figura 10.11: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

10.3.2. Campo potencial con mínimo local

La relación de figuras de los resultados obtenidos para el campo potencial donde se presenta un mínimo local se pueden apreciar en la tabla 10.3. En este caso se presentan las figuras de la energía adicionada para evadir el mínimo local.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Enjambre	10.12.a	10.14.a	10.16.a	10.18.a	10.20.a	10.22.a	10.24.a	10.26.a
Promedio	10.12.b	10.14.b	10.16.b	10.18.b	10.20.b	10.22.b	10.24.b	10.26.b
Energía	10.13	10.15	10.17	10.19	10.21	10.23	10.25	10.27

Tabla 10.3: Lista de figuras para las ejecuciones considerando diferentes parámetros.

En este grupo de figuras se aprecia que es necesario incrementar la energía de propulsión para que el enjambre logre escapar del mínimo local. En los casos donde no se tiene la

acción del ruido se aprecia que al incrementar la fuerza de frenado las partículas del enjambre tienden a estar más juntas. Cuando se incorpora la componente estocástica se presenta una mayor dispersión de los individuos lo cual genera una trayectoria con mayores irregularidades.

Como se aprecia en la mayoría de los casos la energía de propulsión adicionada no llega a ser la maxima limitada lo cual indica que el enjambre no muestra dificultades para lograr evadir mínimos locales, adicionalmente se aprecia que el enjambre no presenta un comportamiento con movimientos circulares ya que logra evadir el mínimo local empleando una energía de propulsión moderada.

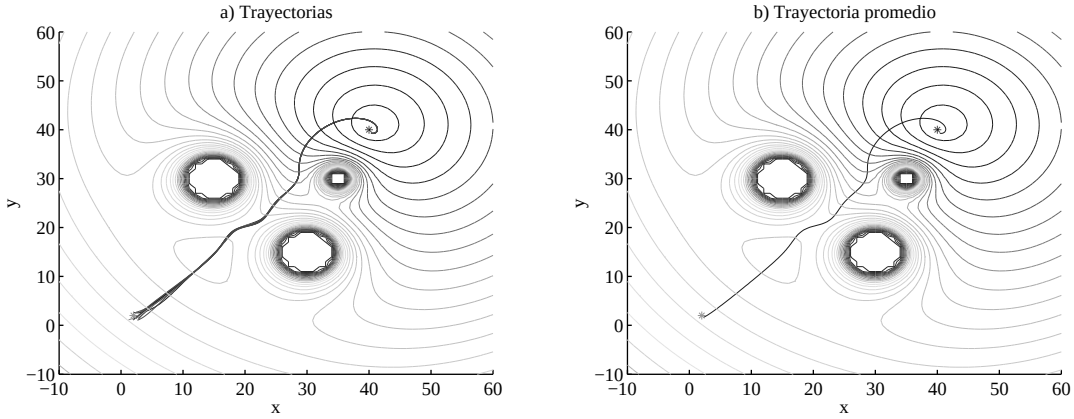

Figura 10.12: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

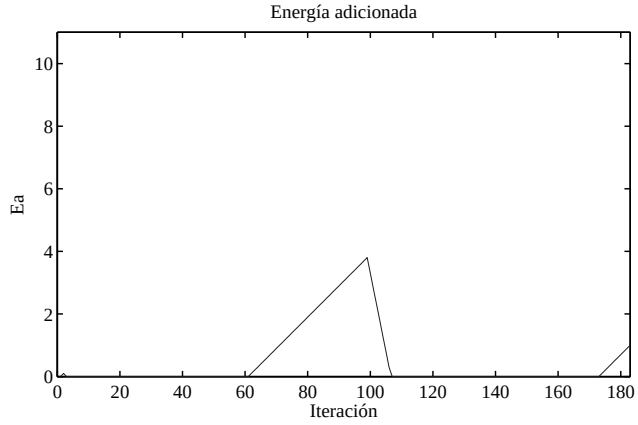

Figura 10.13: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

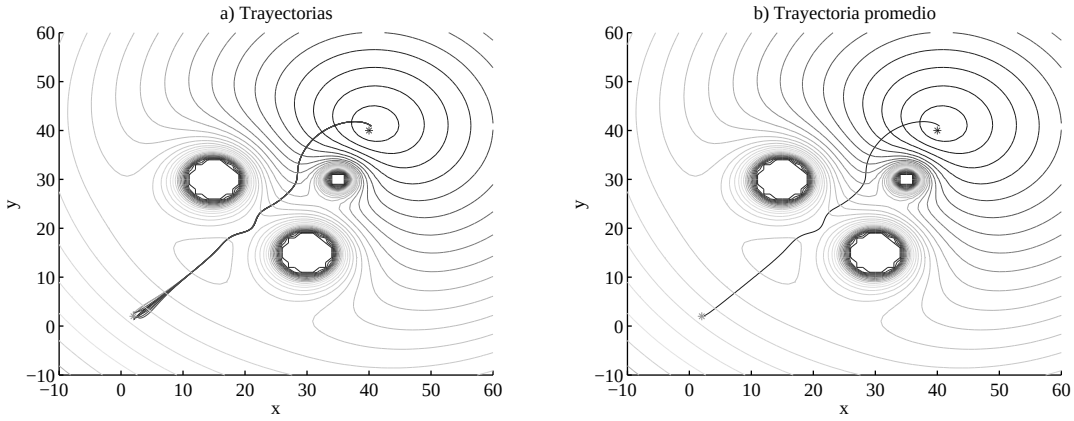

Figura 10.14: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

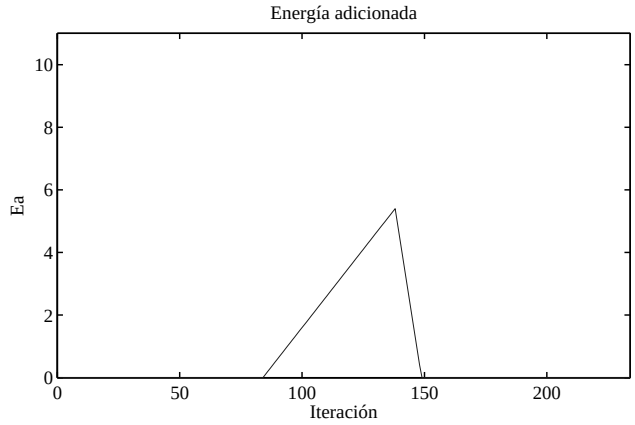

Figura 10.15: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

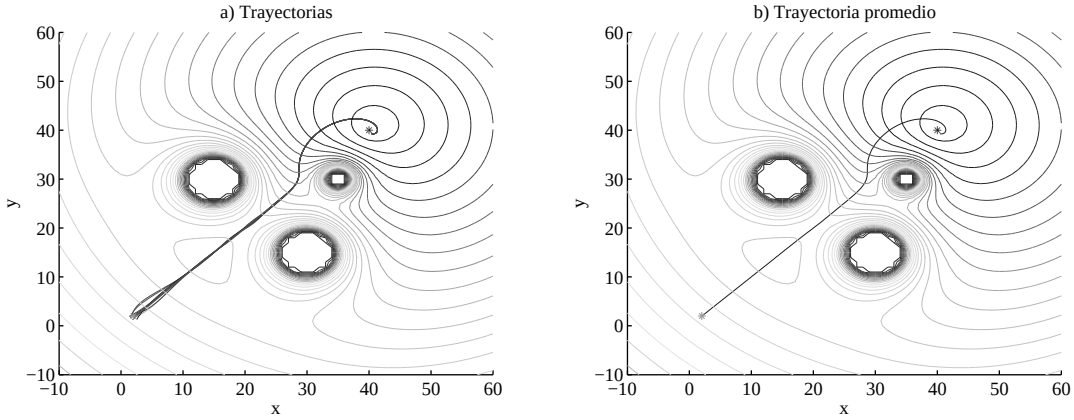

Figura 10.16: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

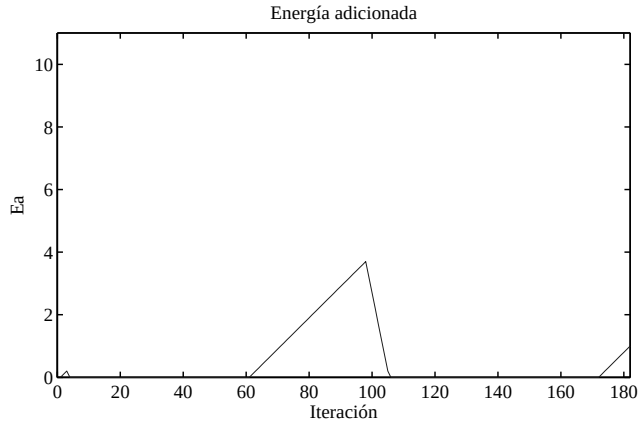

Figura 10.17: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

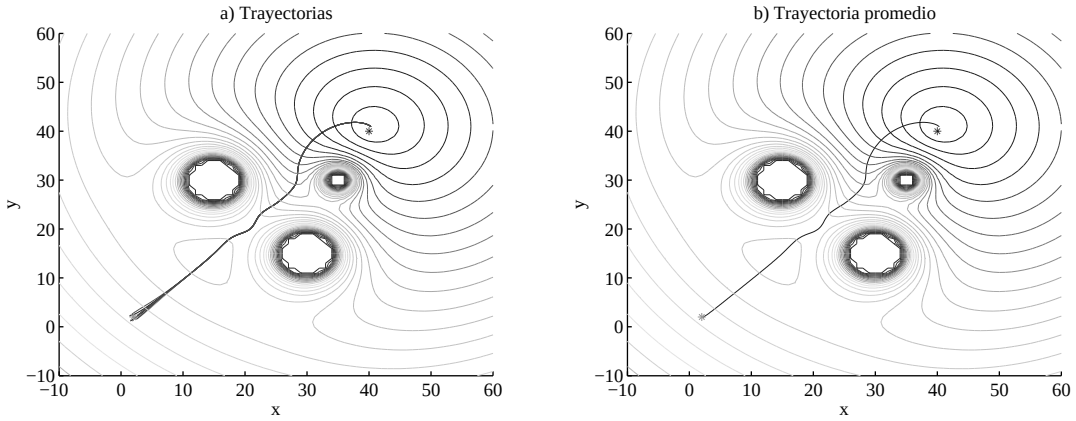

Figura 10.18: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

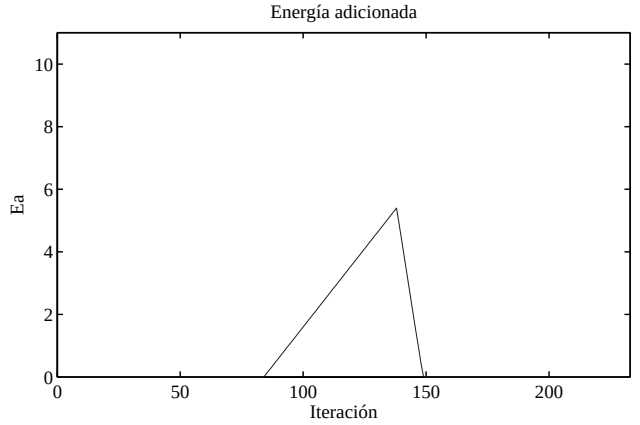

Figura 10.19: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

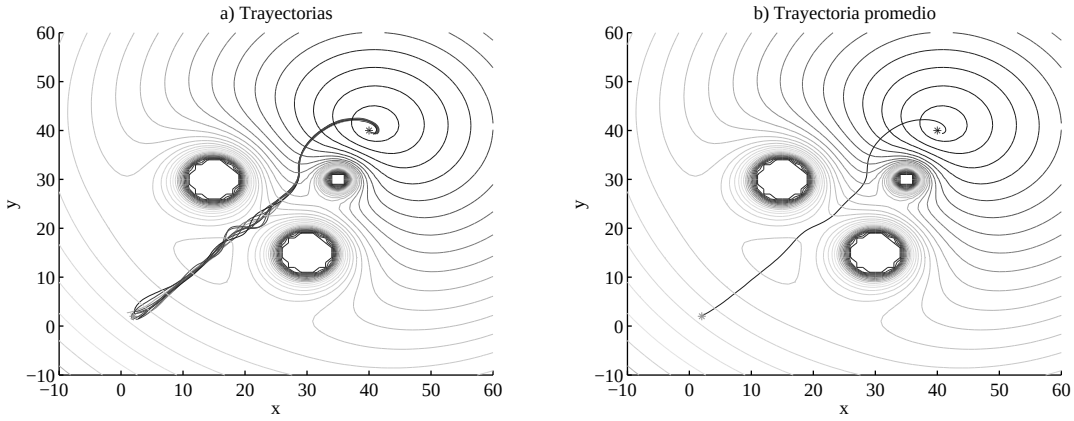

Figura 10.20: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

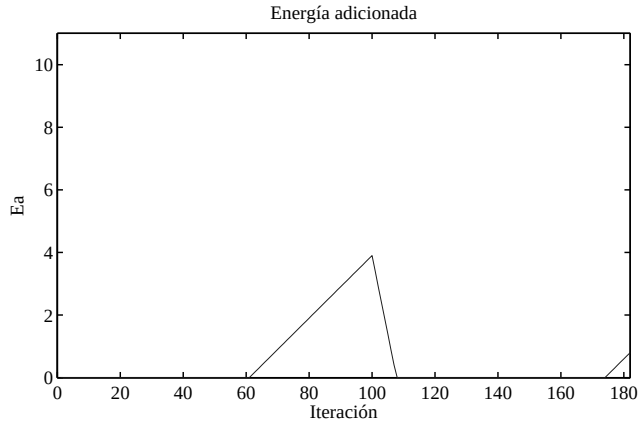

Figura 10.21: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

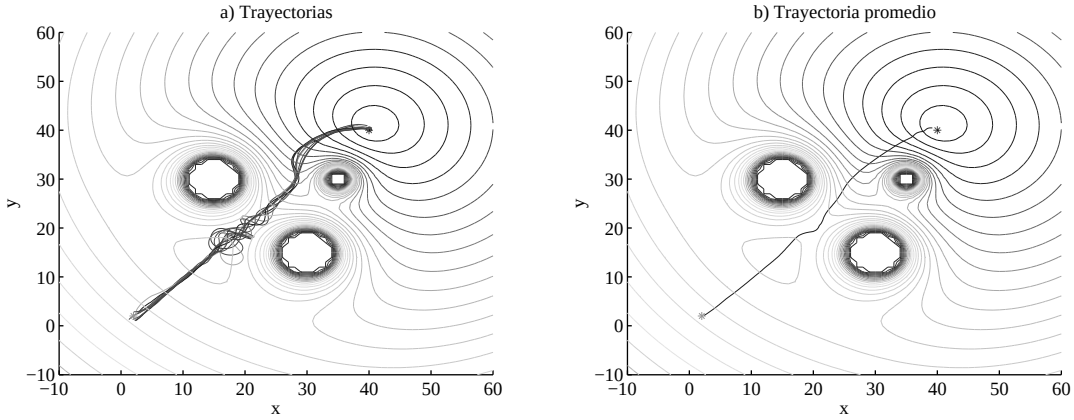

Figura 10.22: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

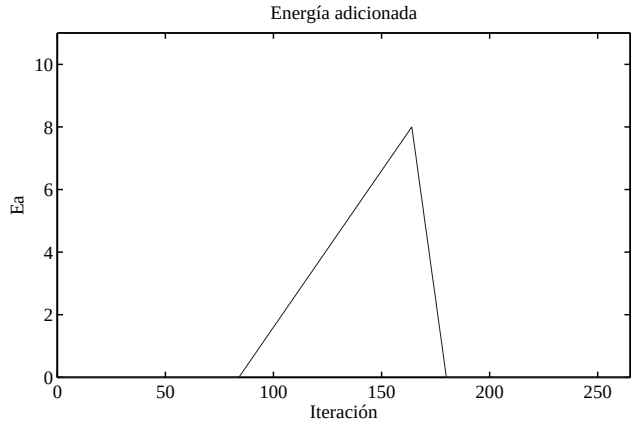

Figura 10.23: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

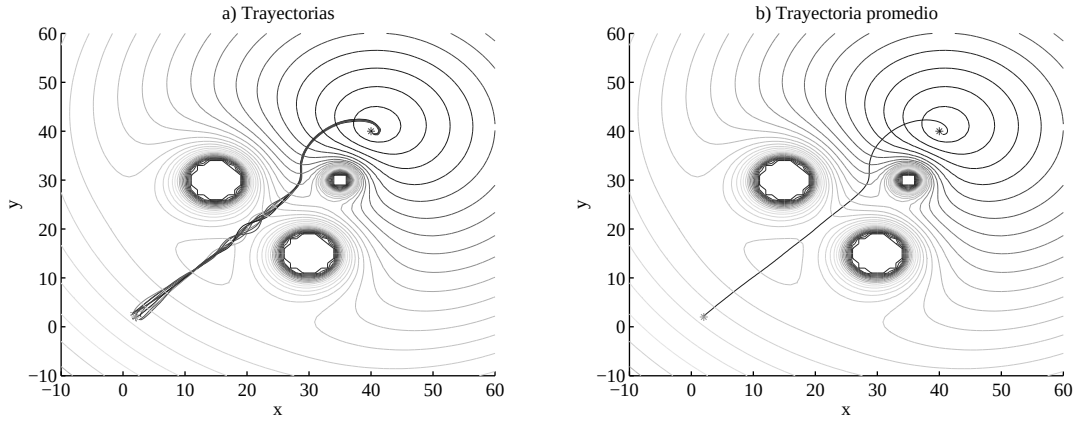

Figura 10.24: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

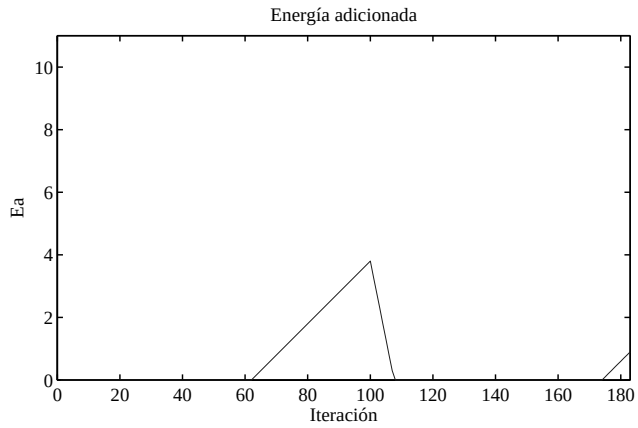

Figura 10.25: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

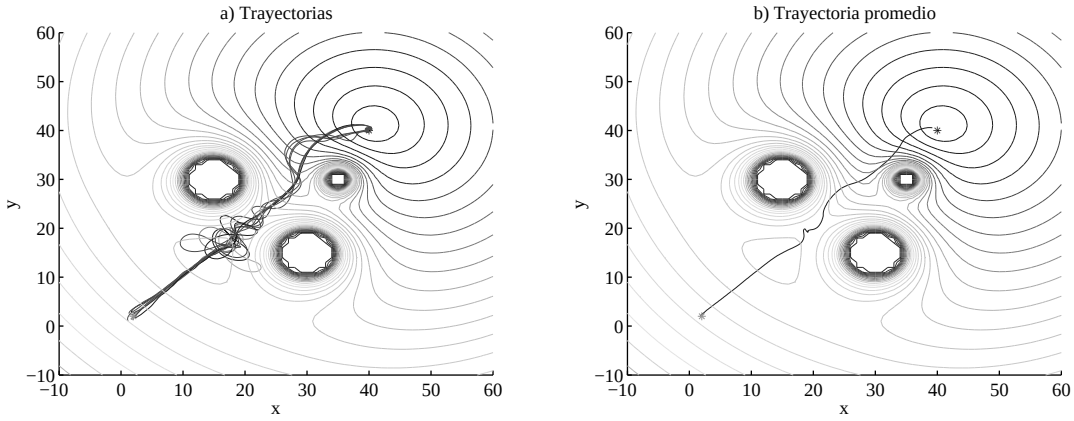

Figura 10.26: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

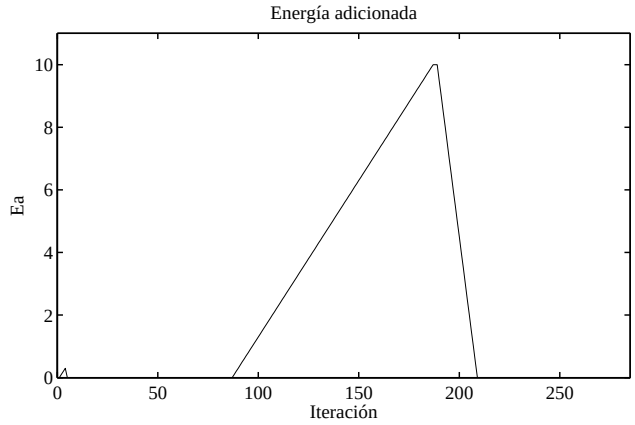

Figura 10.27: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

10.3.3. Campo potencial con obstáculo tipo barrera

En la tabla 10.4 se puede apreciar la lista de resultados obtenidos para el campo potencial con un obstáculo tipo barrera el cual presenta un mínimo local. En esta tabla se relacionan las figuras que muestran las trayectorias de las partículas sobre el contorno del campo potencial, también se presenta la trayectoria media del enjambre y las figuras que muestran la energía adicionada en cada caso.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Enjambre	10.28.a	10.30.a	10.32.a	10.34.a	10.36.a	10.38.a	10.40.a	10.42.a
Promedio	10.28.b	10.30.b	10.32.b	10.34.b	10.36.b	10.38.b	10.40.b	10.42.b
Energía	10.29	10.31	10.33	10.35	10.37	10.39	10.41	10.43

Tabla 10.4: Lista de figuras para las ejecuciones considerando diferentes parámetros.

En este grupo de figuras se aprecia que en los casos donde no se considera la influencia del ruido y adicionalmente se tiene un factor de frenado de $\beta = 0{,}5$, el enjambre de partículas tiende a estar más junto sin presentar trayectorias circulares, por otro lado, si $\beta = 0{,}2$ se observan movimientos circulares.

En los casos donde se incorpora la componente estocástica se aprecia que las partículas describen trayectorias circulares cerca del mínimo local. En todos los casos se llega al valor máximo de la energía de propulsion adicionada manteniéndose en esta valor hasta que el enjambre logra escapar del mínimo local.

Aunque en todos los casos se logra determinar un trayectoria desde el punto inicial al punto objetivo se aprecia que en algunas situaciones se presenta una trayectoria que puede ser no optima, por lo cual, se puede considerar la necesidad de incorporar un algoritmo para suavizar las trayectorias irregulares y eliminar las trayectorias circulares.

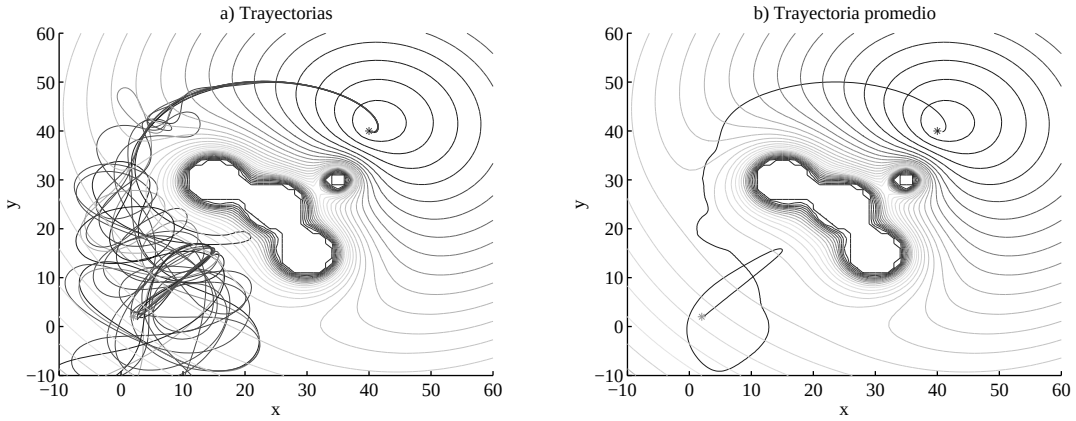

Figura 10.28: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

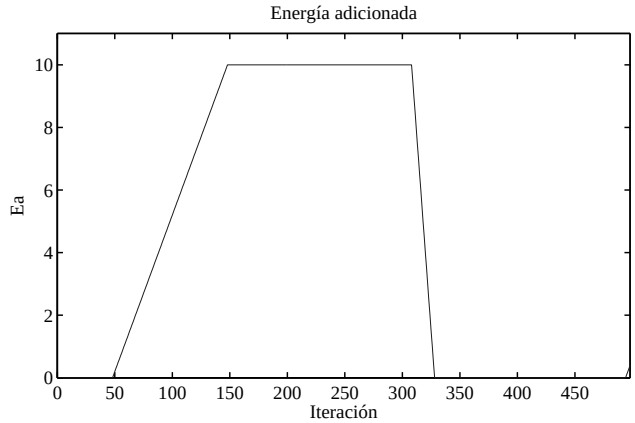

Figura 10.29: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

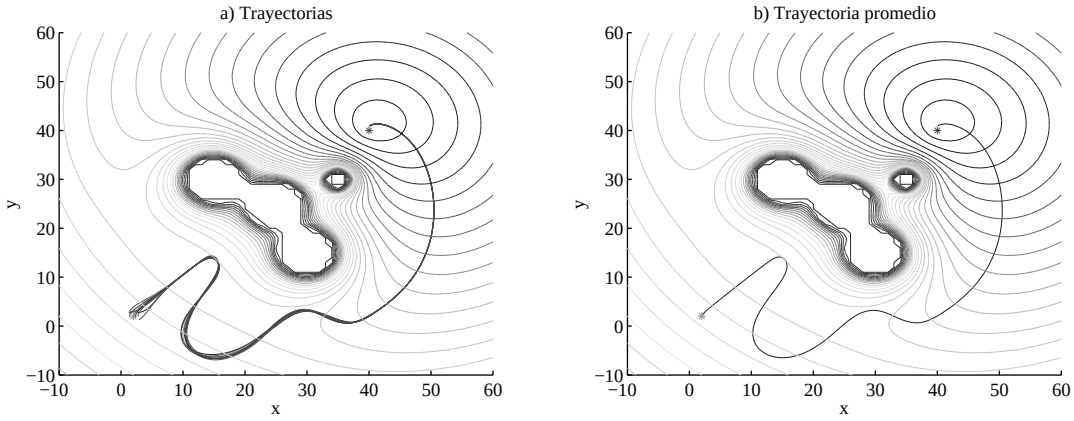

Figura 10.30: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

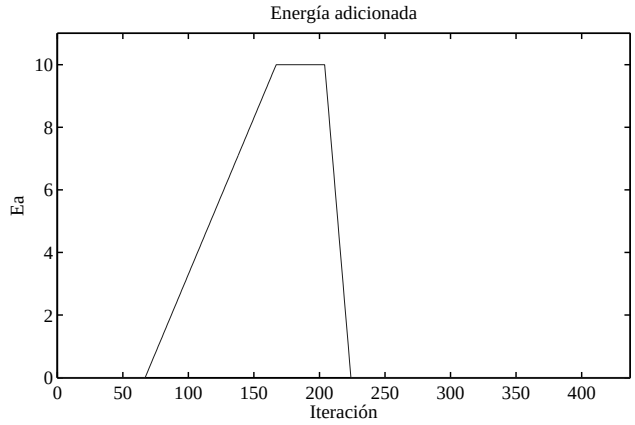

Figura 10.31: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

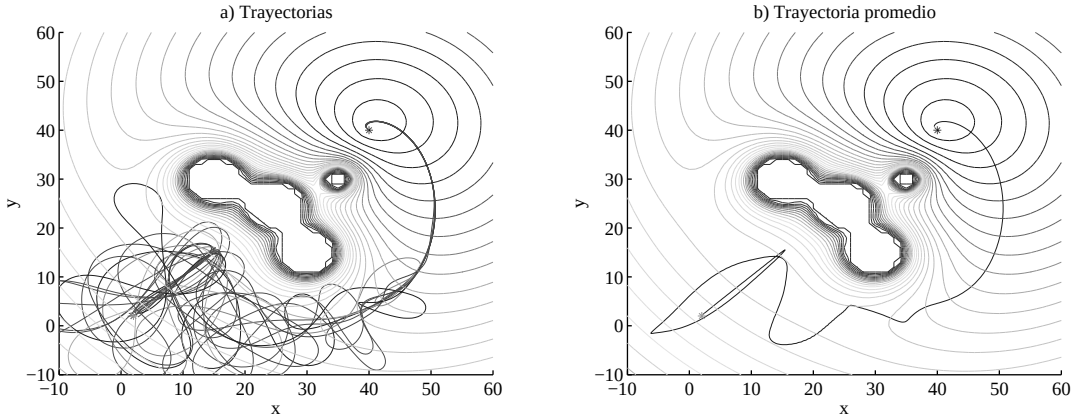

Figura 10.32: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

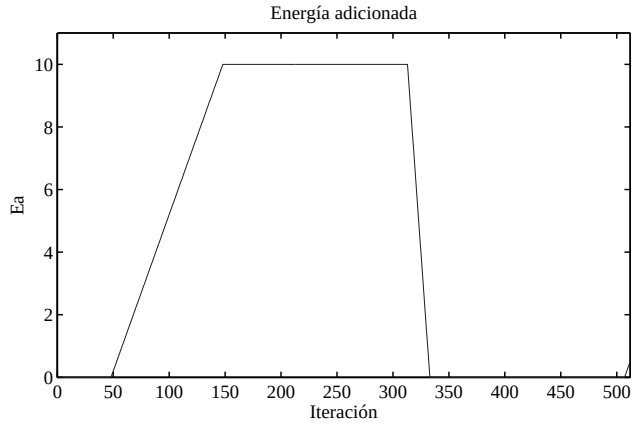

Figura 10.33: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

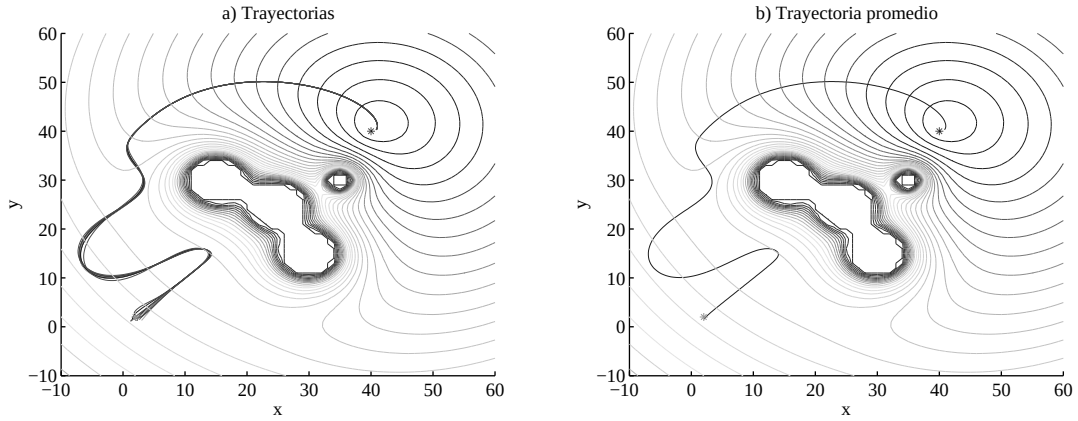

Figura 10.34: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

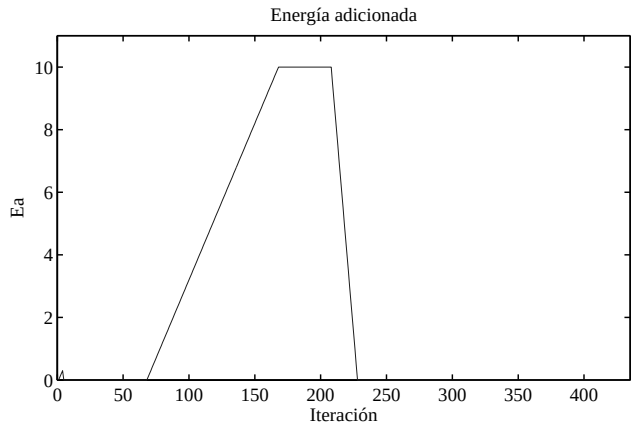

Figura 10.35: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

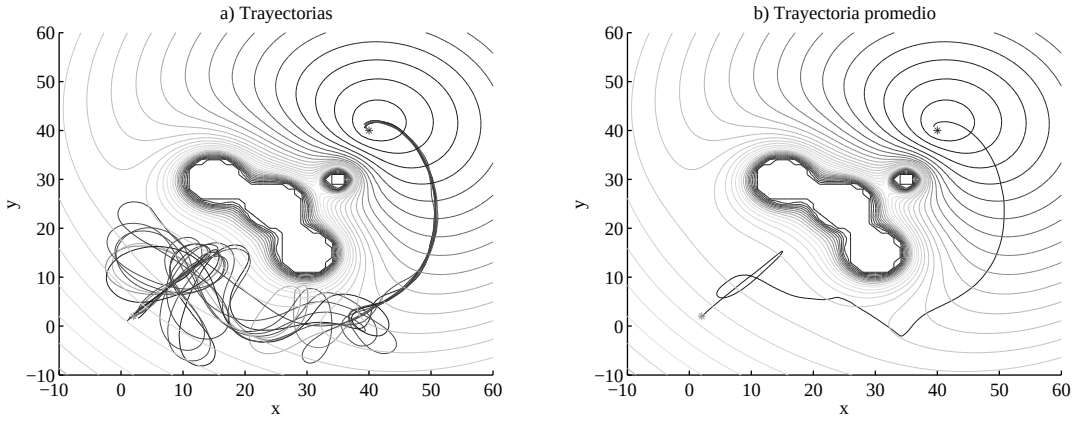

Figura 10.36: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

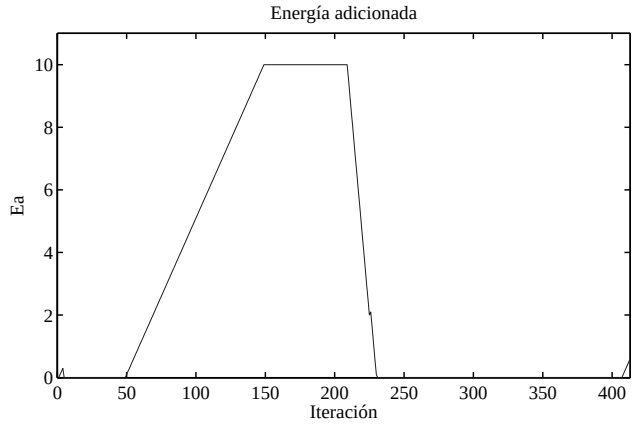

Figura 10.37: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

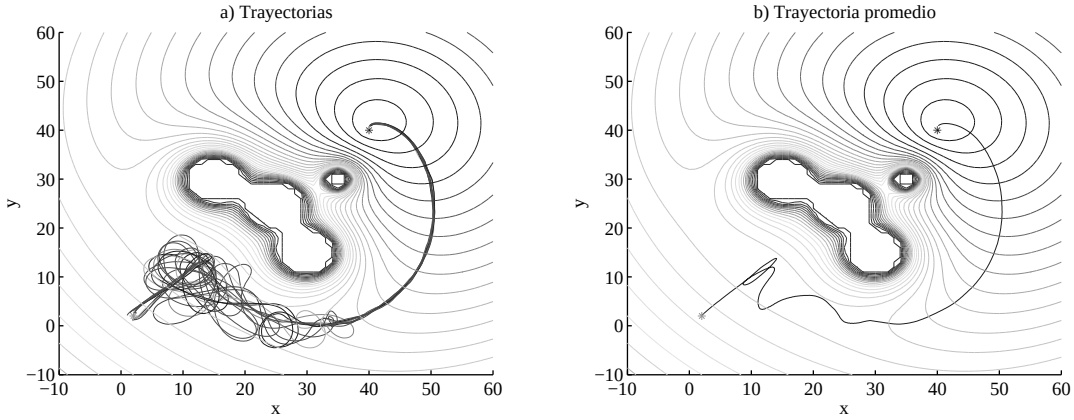

Figura 10.38: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

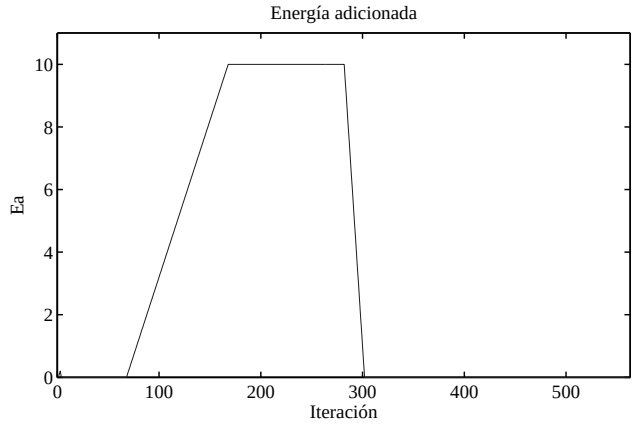

Figura 10.39: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

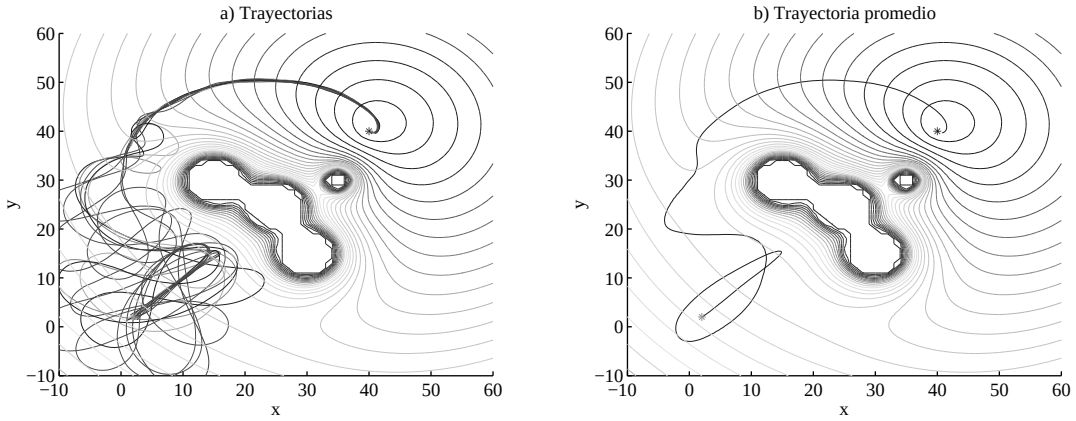

Figura 10.40: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

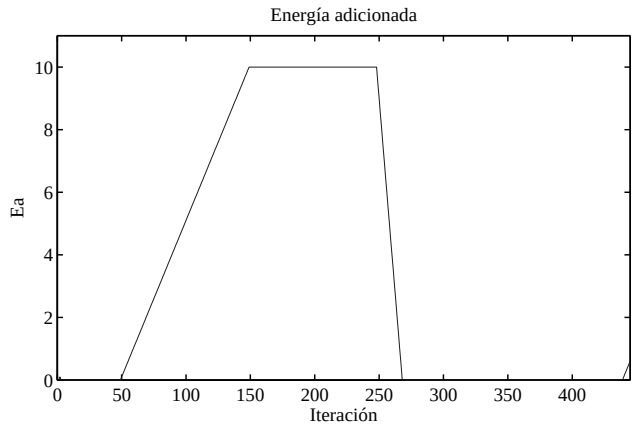

Figura 10.41: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

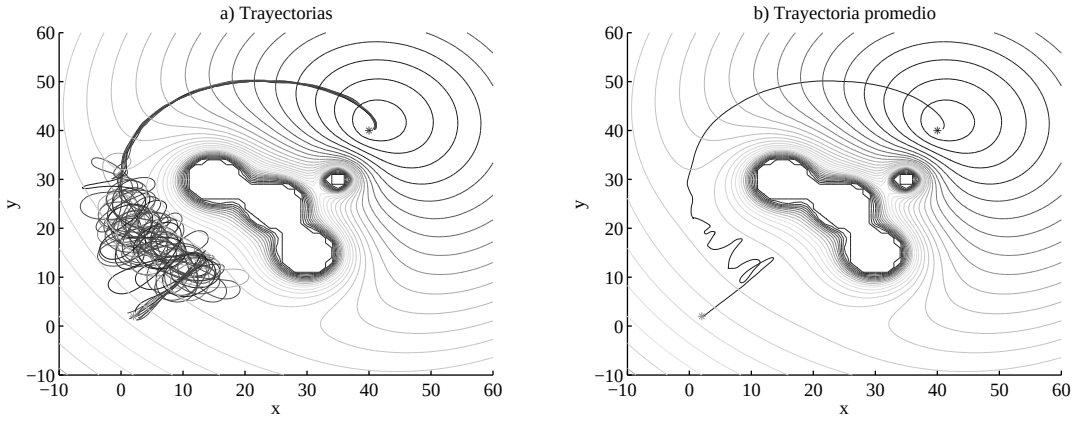

Figura 10.42: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

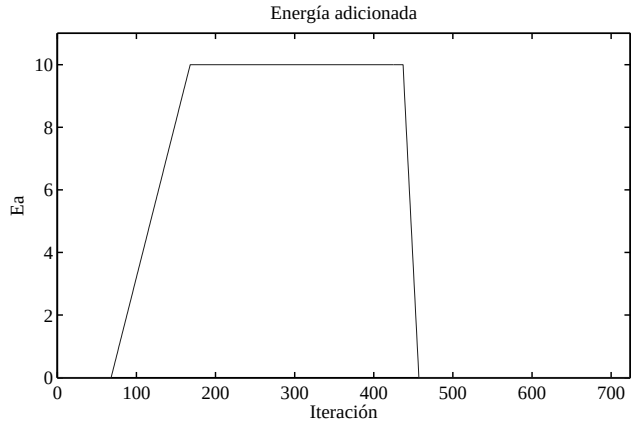

Figura 10.43: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

10.4. Configuraciones especiales

Adicional a los casos presentados anteriormente los cuales son comúnmente empleados para mostrar ciertas características de los algoritmos de planeación de trayectorias existen casos que provienen de situaciones practicas, uno de estos se tiene con grupo de obstáculos que forman un pasaje estrecho [74], mientras que el otro caso se puede considerar como una extensión del campo potencial tipo barrera y consiste en una configuración de trampa tipo U [1], [31]. En estas dos configuraciones de campo potencial se observa la presencia de mínimos locales.

Al igual que en la anterior sección, para estos casos especiales se observara el desempeño del algoritmo con diferentes valores de los parámetros D, N y β los cuales se relacionan en la tabla 10.1.

10.4.1. Campo potencial con pasaje estrecho

Cuando se tienen obstáculos muy próximos se generan pasajes estrechos debido a las magnitudes de los campos potenciales asociados a los obstáculos. En este caso cuando la magnitud de los campos potenciales es alta se genera una barrera en el pasaje estrecho la cual dificulta la planeación de la trayectoria. Uno de los problemas que se presenta en esta configuración es la oscilación de la trayectoria [74].

En la figura 10.44.a se presenta el campo potencial generado con la presencia de un pasaje estrecho. El contorno de este campo potencial se puede apreciar en la figura 10.44.b donde se observa que en el inicio del pasaje estrecho se genera un mínimo local.

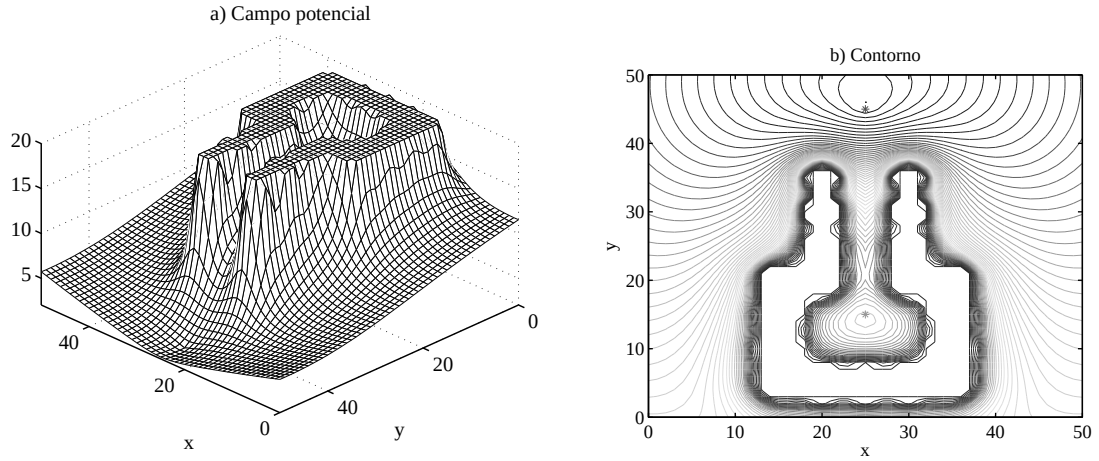

Figura 10.44: a) Campo potencial con la presencia de un pasaje estrecho, b) Contorno del campo potencial con la presencia de un pasaje estrecho.

En la tabla 10.5 se relaciona la lista de los resultados obtenidos del algoritmo propuesto para el campo potencial que presenta un pasaje estrecho.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Enjambre	10.45.a	10.47.a	10.49.a	10.51.a	10.53.a	10.55.a	10.57.a	10.59.a
Promedio	10.45.b	10.47.b	10.49.b	10.51.b	10.53.b	10.55.b	10.57.b	10.59.b
Energía	10.46	10.48	10.50	10.52	10.54	10.56	10.58	10.60

Tabla 10.5: Lista de figuras para las ejecuciones considerando diferentes parámetros.

En este grupo de figuras se aprecia que el enjambre de partículas con los parámetros seleccionados logra escapar del mínimo local y recorrer el pasaje estrecho permitiendo de esta forma determinar una trayectoria desde el punto inicial al punto objetivo. En la mayoría de los casos se presentan oscilaciones en el pasaje estrecho lo cual puede hacer que el robot móvil colisione con los obstáculos. En todos los casos se aprecia que la energía adicionada llega a su valor máximo manteniéndose en este hasta que el enjambre logra salir del mínimo local. Lo anterior causa que la trayectoria generada presente movimientos

circulares antes de escapar del mínimo local.

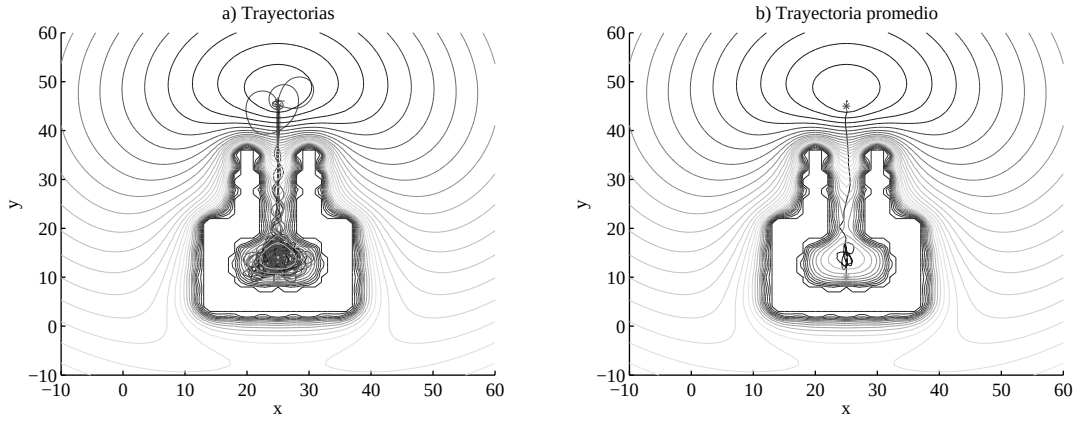

Figura 10.45: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

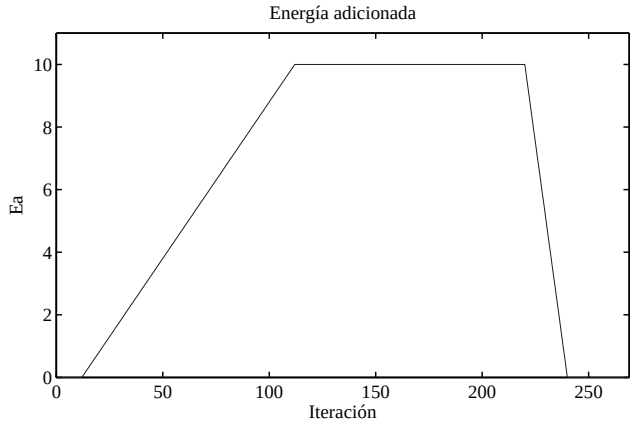

Figura 10.46: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

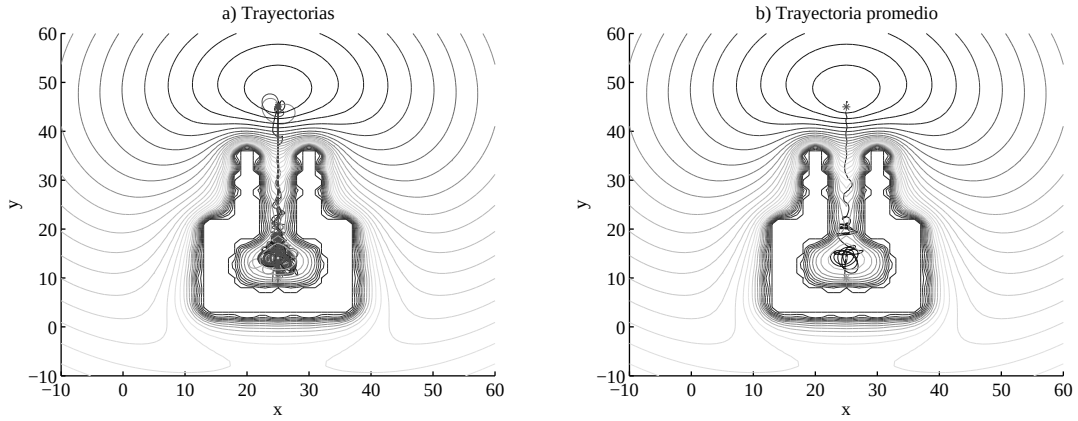

Figura 10.47: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

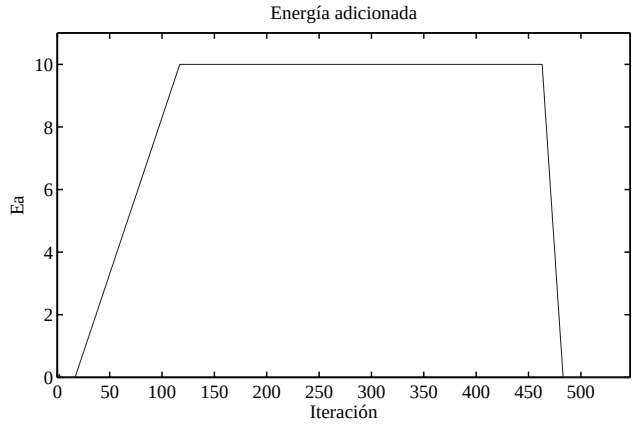

Figura 10.48: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

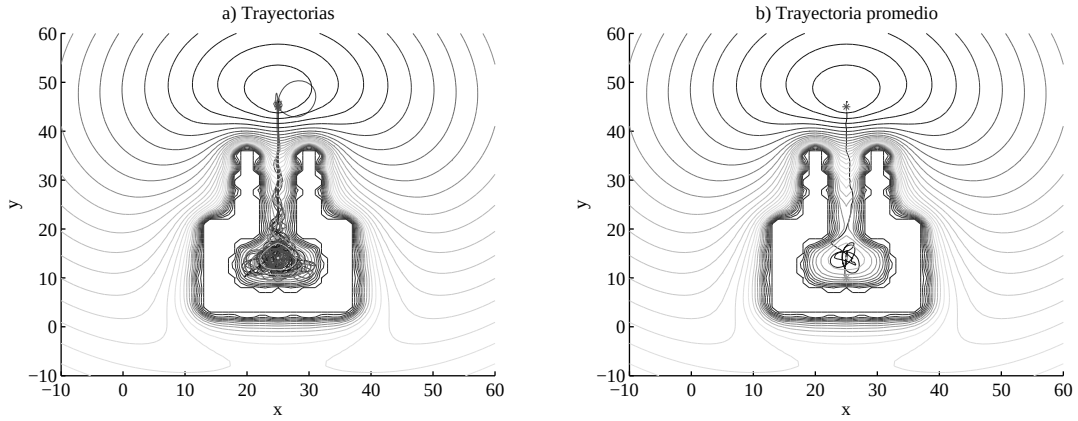

Figura 10.49: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

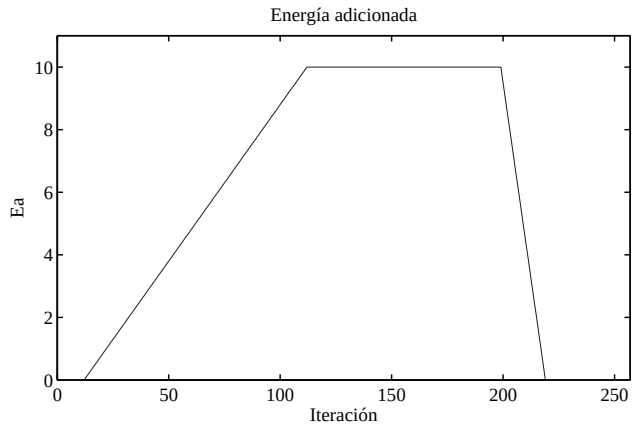

Figura 10.50: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

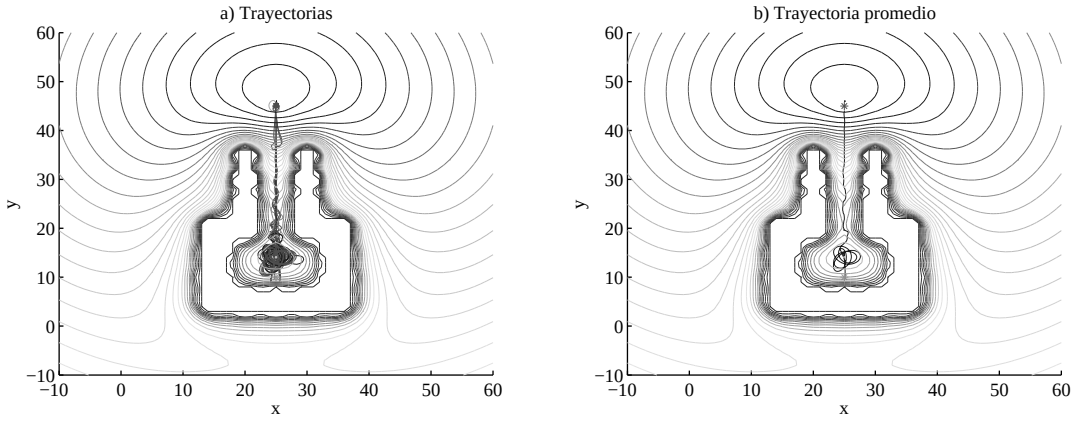

Figura 10.51: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

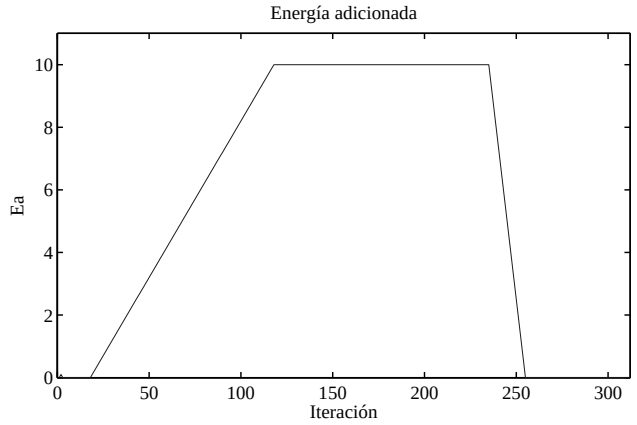

Figura 10.52: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

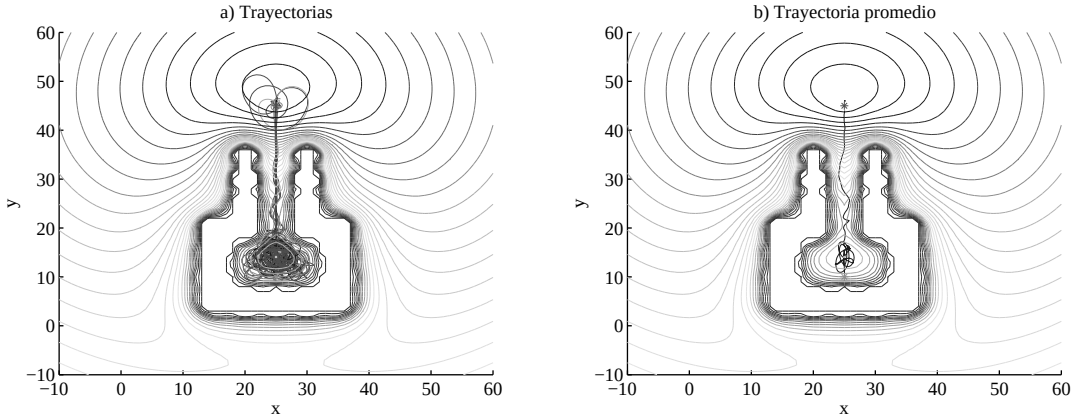

Figura 10.53: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

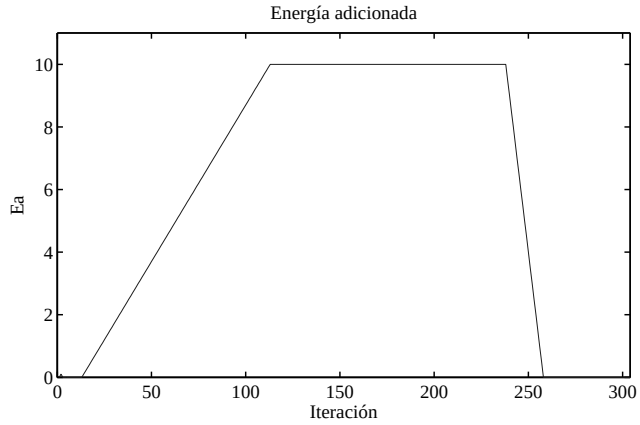

Figura 10.54: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

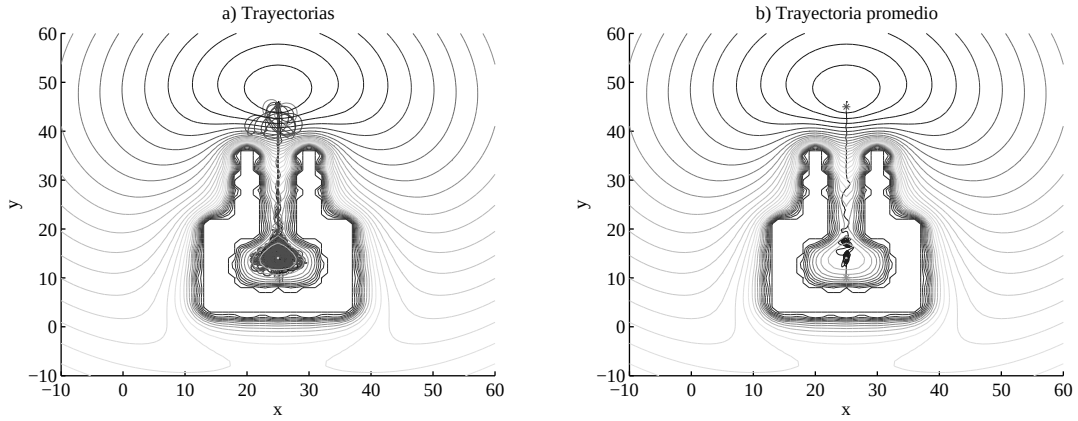

Figura 10.55: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

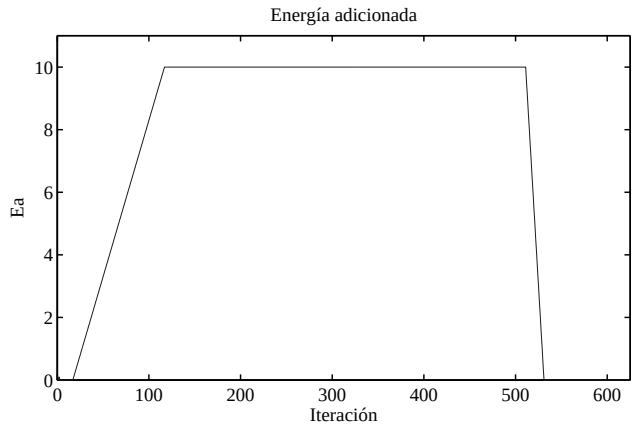

Figura 10.56: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

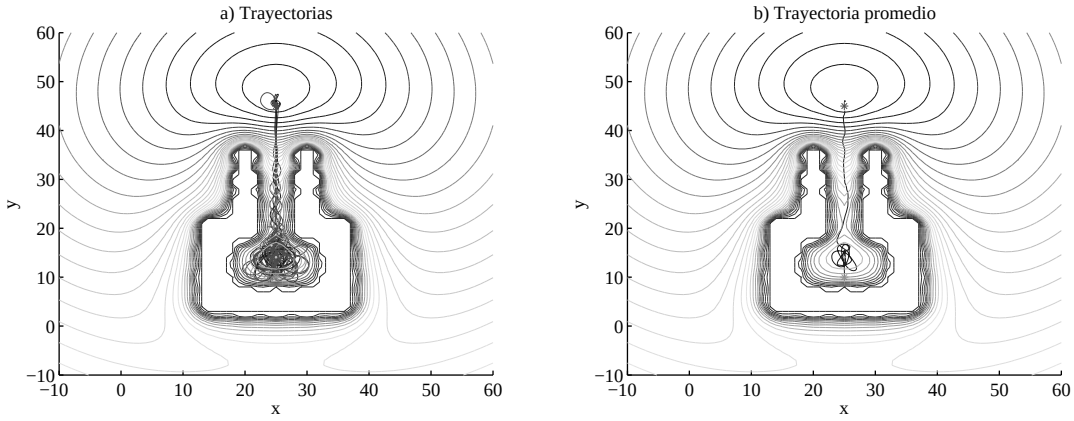

Figura 10.57: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

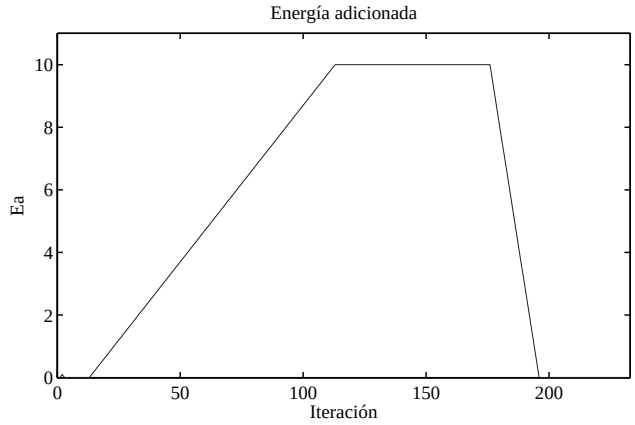

Figura 10.58: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

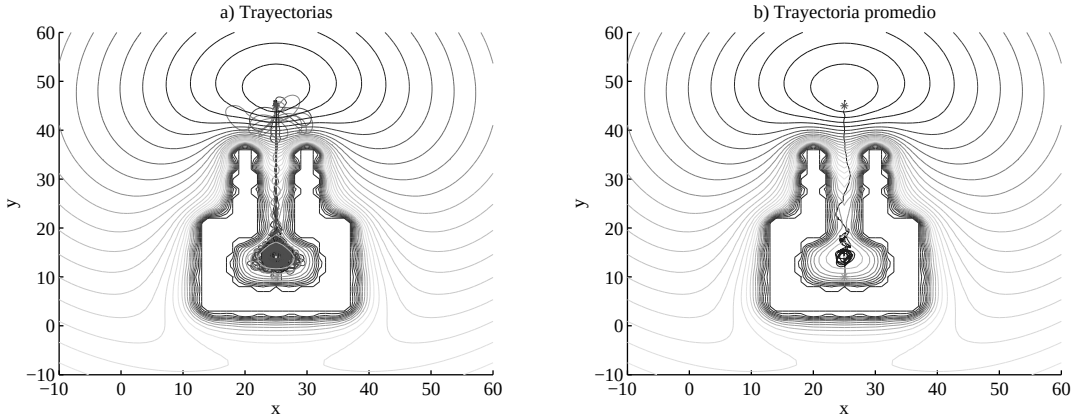

Figura 10.59: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

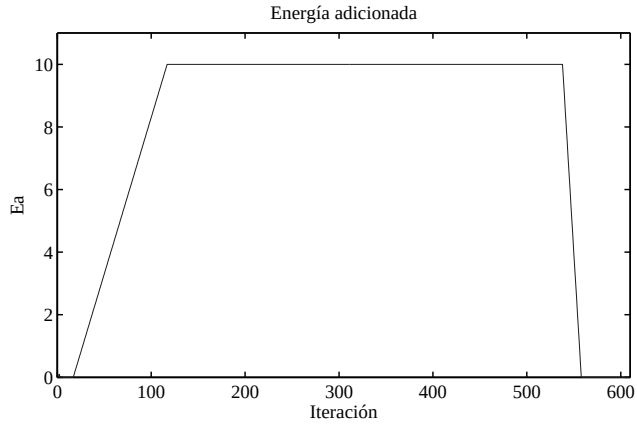

Figura 10.60: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

10.4.2. Campo potencial con trampa tipo U

El obstáculo tipo trampa con forma de U es un problema clásico que se considera en la planeación de trayectorias [1], [31]. Este tipo de obstáculo generalmente presenta por lo menos un mínimo local el cual suele ser difícil de evadir por la misma forma del obstáculo. La configuración del campo potencial implementado para este caso se presenta en la figura 10.61.a, el contorno de este campo potencial se puede observar en la figura 10.61.b, donde se aprecia la presencia de dos mínimos locales.

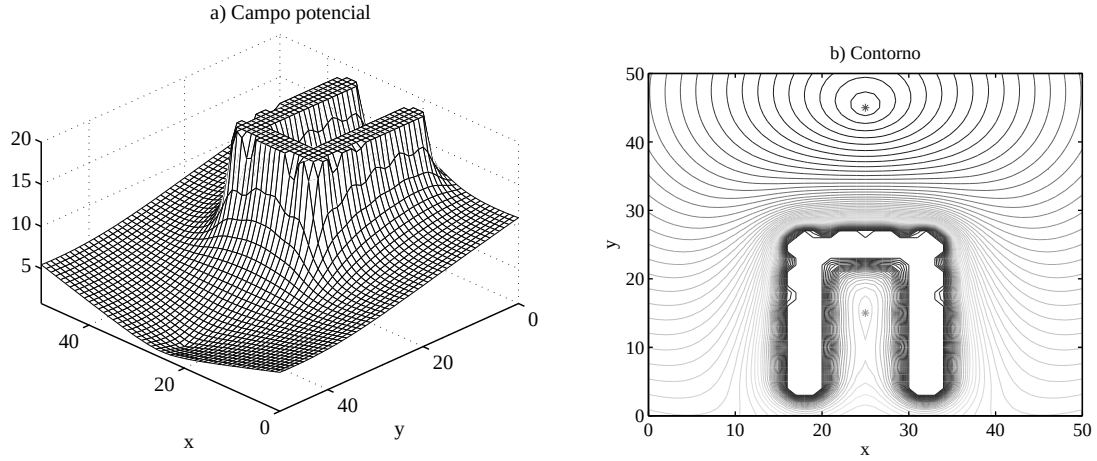

Figura 10.61: a) Campo potencial con la presencia de un obstáculo tipo trampa en forma de U, b) Contorno del campo potencial con la presencia de un obstáculo tipo trampa en forma de U.

En la tabla 10.6 se relacionan las figuras representativas para los resultados del algoritmo con el campo potencial tipo trampa en forma de U. En este conjunto de figuras se observa la existencia de dos mínimos locales donde se aprecia que el algoritmo incrementa la energía en dos oportunidades para escapar de estos mínimos locales. Luego de escapar del obstáculo tipo trampa la energía de propulsión disminuye lo cual hace que el enjambre se agrupe y llegue al punto objetivo. Cuando el enjambre de partículas se encuentra en la

trampa se tiene una trayectoria irregular sin embargo al escapar de la trampa la trayectoria es suave.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Enjambre	10.62.a	10.64.a	10.66.a	10.68.a	10.70.a	10.72.a	10.74.a	10.76.a
Promedio	10.62.b	10.64.b	10.66.b	10.68.b	10.70.b	10.72.b	10.74.b	10.76.b
Energía	10.63	10.65	10.67	10.69	10.71	10.73	10.75	10.77

Tabla 10.6: Lista de figuras para las ejecuciones considerando diferentes parámetros.

Con este grupo de resultados se aprecian los diferentes comportamientos que presenta el enjambre al variar la fuerza de propulsión, de los parámetros considerados para evaluar el desempeño del algoritmo se aprecia que el coeficiente de la fuerza de frenado β tiene una alta influencia en el comportamiento del enjambre.

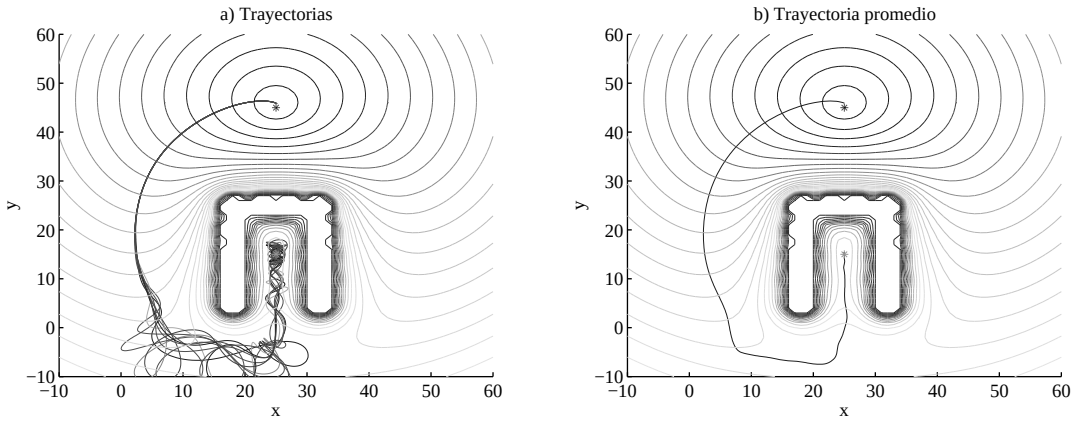

Figura 10.62: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

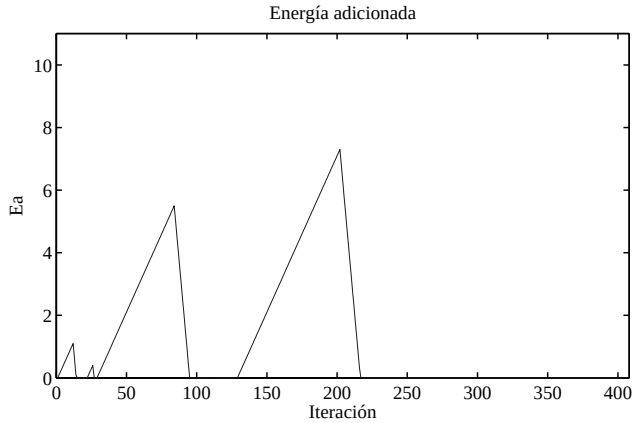

Figura 10.63: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

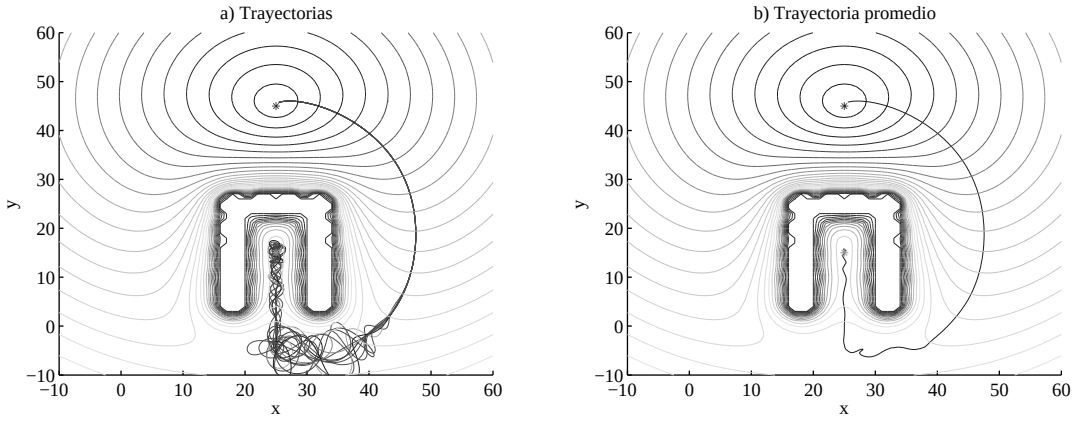

Figura 10.64: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

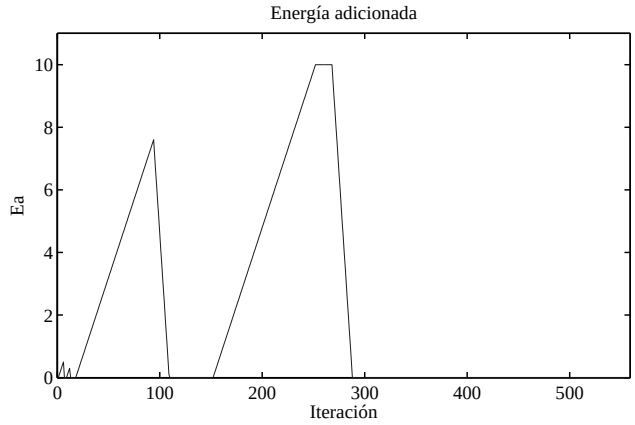

Figura 10.65: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

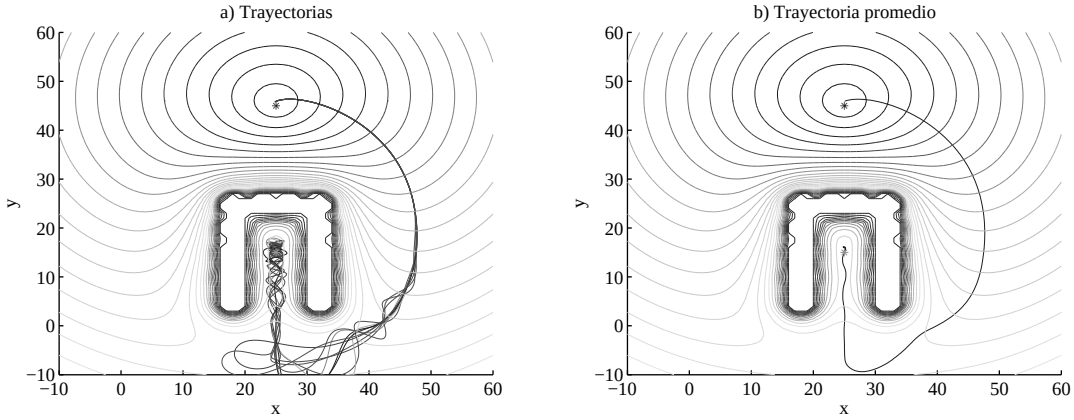

Figura 10.66: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

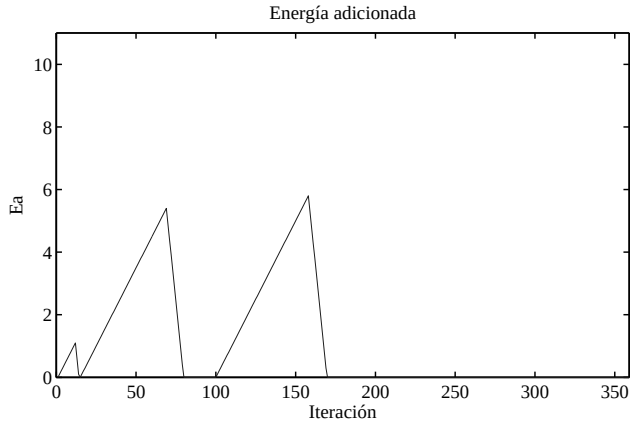

Figura 10.67: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

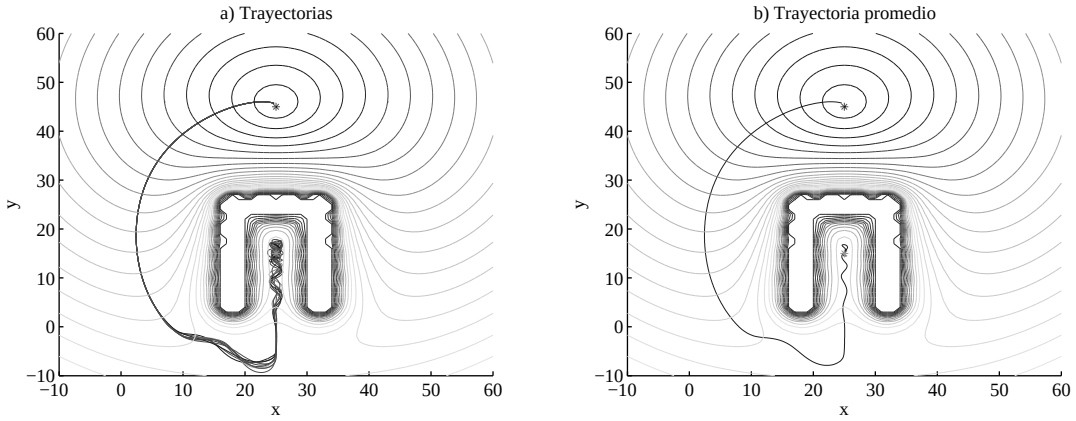

Figura 10.68: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

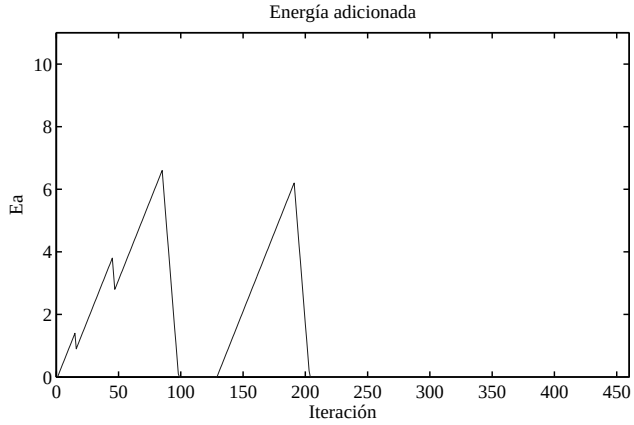

Figura 10.69: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 0$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

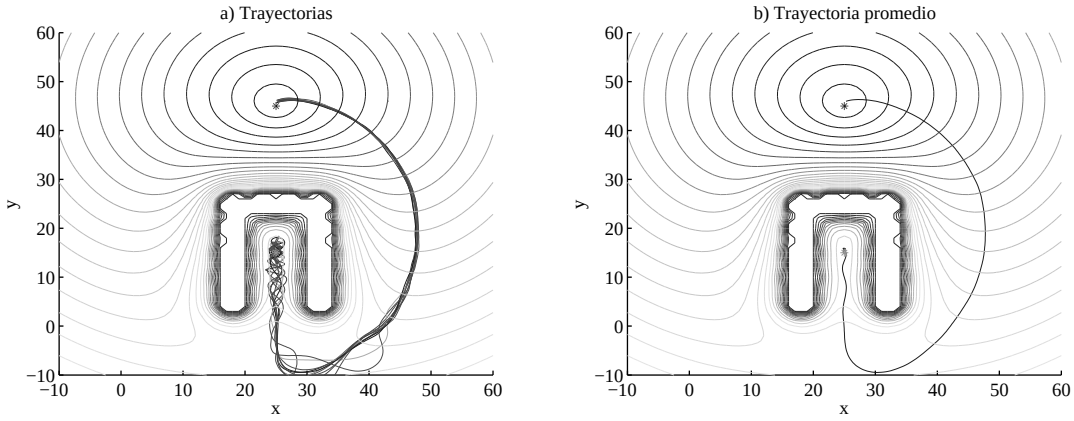

Figura 10.70: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

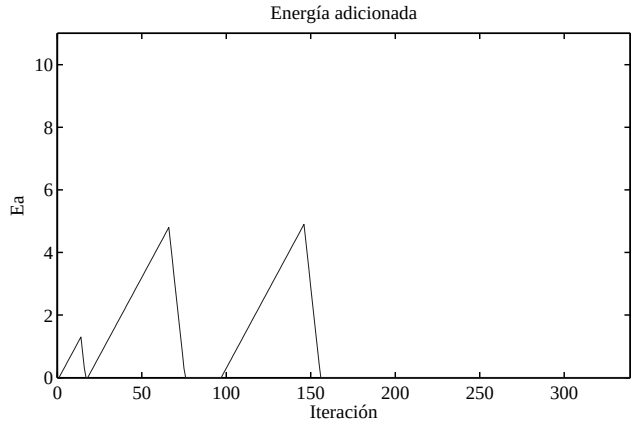

Figura 10.71: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}2$.

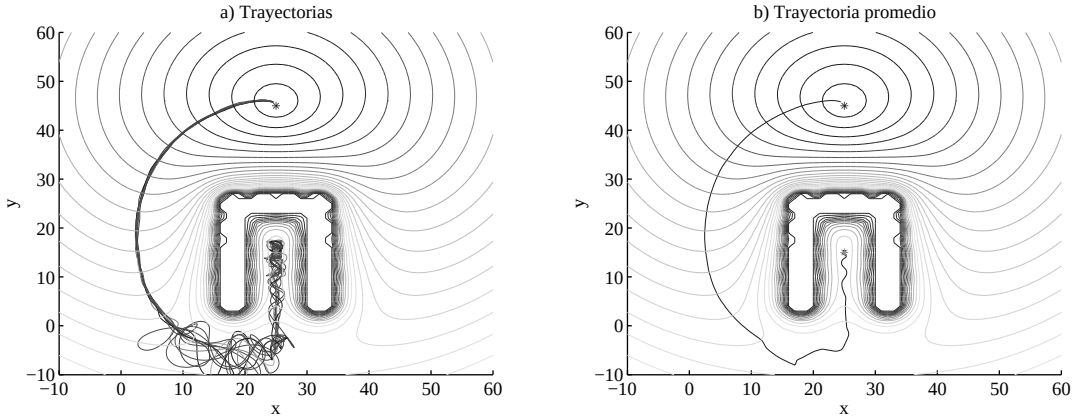

Figura 10.72: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

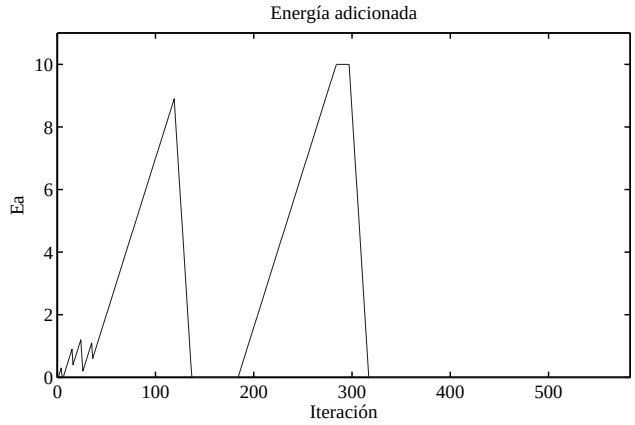

Figura 10.73: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 10$ y $\beta = 0{,}5$.

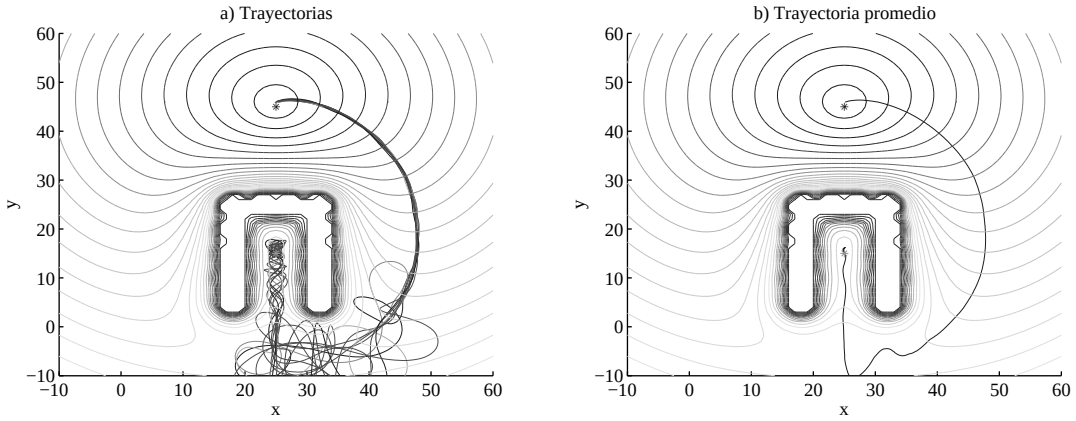

Figura 10.74: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

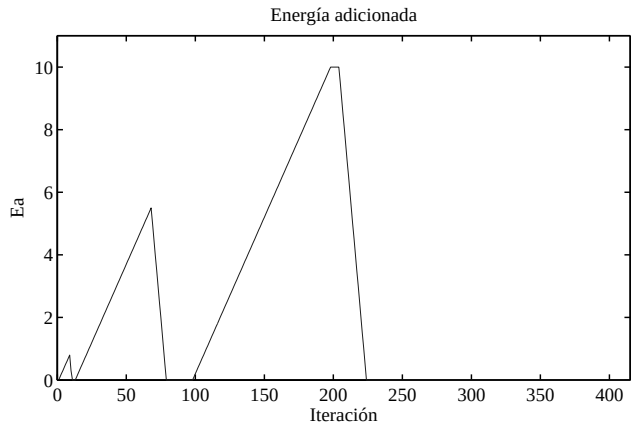

Figura 10.75: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}2$.

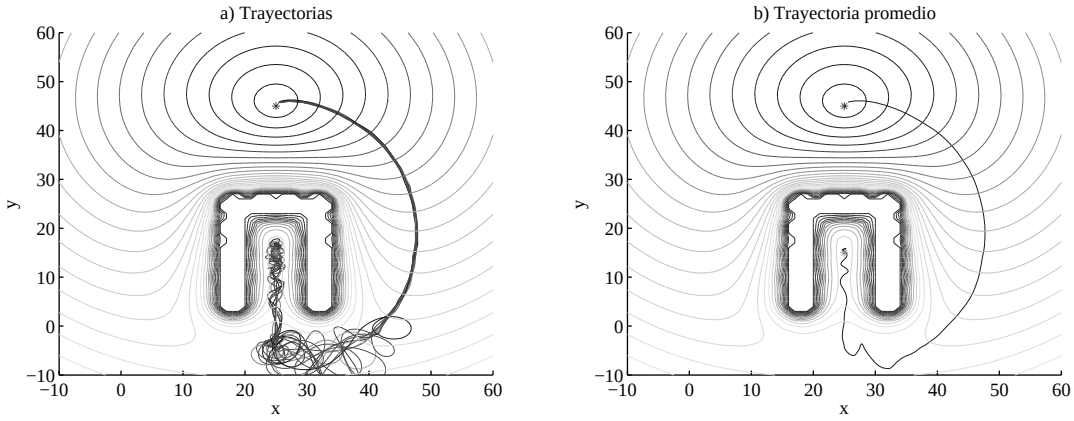

Figura 10.76: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio del enjambre, para $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

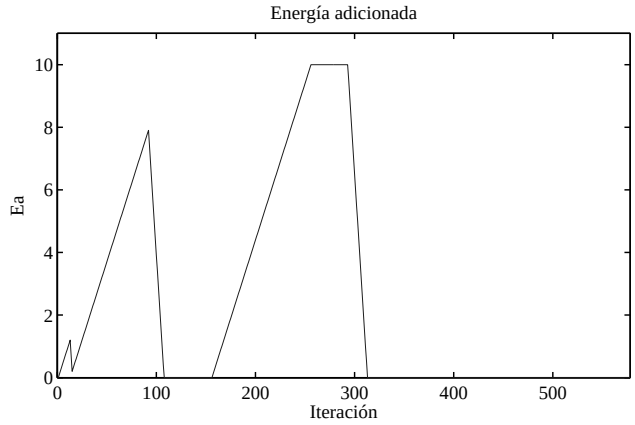

Figura 10.77: Energía adicionada para evadir el mínimo local, con $D = 1$, $N = 20$ y $\beta = 0{,}5$.

Capítulo 11

Análisis estadístico de resultados

11.1. Introducción

En este capítulo se realiza el análisis estadístico de los resultados obtenidos donde se observa la influencia de los parámetros correspondientes a la componente estocástica, el número de individuos y el coeficiente de la fuerza disipativa. La metodología empleada para el análisis de datos consiste inicialmente en pruebas de normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianza) con las cuales se determina la prueba de hipótesis a realizar para comparar los resultados obtenidos. La comparación entre los diferentes grupos de parámetros se realiza considerando el numero de iteraciones requeridas para que el enjambre de partículas logre llegar al objetivo. En la primera parte del capítulo se presenta la metodología donde se describen las diferentes pruebas a realizar, posteriormente se aplican estas pruebas a los datos recolectados.

11.2. Metodología

Cuando existe variabilidad en los datos recolectados de un experimento se suele emplear prueba estadística de hipótesis. Cuando se quiere establecer si los resultados obtenidos para dos configuraciones de parámetros son iguales, las hipótesis a considerar son:

- H_0: Hipótesis nula. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros presentan valores medios iguales.
- H_1: Hipótesis alternativa. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros no presentan valores medios iguales.

En muchas oportunidades la prueba de hipótesis se realiza considerando un nivel de significancia α-value el cual corresponde a la probabilidad de cometer un error tipo I. Para pruebas de una cola si el estadístico de prueba calculado con los datos es mayor que el

calculado para el valor de significancia la hipótesis nula se rechaza. Otro enfoque para la prueba de hipótesis consiste en el p-value el cual es la probabilidad de obtener un resultado donde la hipótesis nula es cierta. Bajo este enfoque la hipótesis nula se rechaza si el p-value del estadístico de prueba es igual o menor que el nivel de significancia establecido.

11.2.1. Pruebas estadísticas de hipótesis

Para determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula existen diferentes pruebas estadísticas las cuales principalmente se pueden clasificar como paramétricas y no paramétricas. Las pruebas paramétricas están basadas en suposiciones sobre los datos sin embargo son más robustas, por otro lado las pruebas no paramétricas no requieren suposiciones para su aplicación. En el caso de emplear pruebas paramétricas es necesario comprobar previamente las suposiciones mediante pruebas estadísticas las cuales suelen ser de normalidad y homocedasticidad, la primera determina si los datos siguen una distribución normal y la segunda consiste en establecer si los grupos de datos a comparar presentan la misma varianza.

Considerando que las pruebas paramétricas son más confiables pero requieren de una verificación preliminar de las suposiciones que las soportan, entonces, una posible metodología para realizar este tipo de pruebas según [3] y [9] se describe a continuación. En el caso de tener normalidad y homocedasticidad lo recomendado es realizar un análisis de varianza (ANOVA), cuando se presente la normalidad de los datos pero no la homocedasticidad, se puede emplear la prueba de Welch o de Kruskal Wallis, finalmente, si no se presenta normalidad la prueba recomendada es la de Kruskal Wallis. Esta metodología se puede apreciar en la figura 11.1.

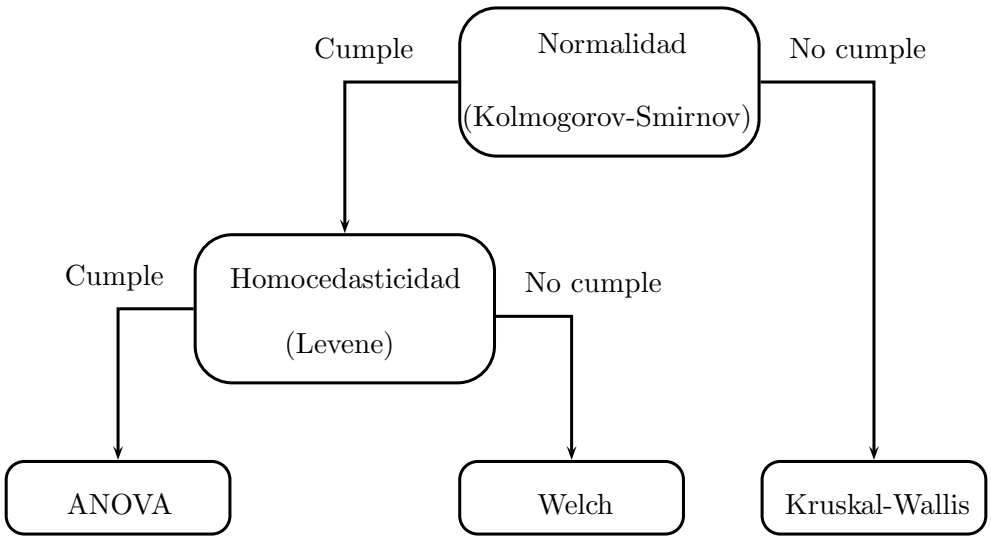

Figura 11.1: Metodología para establecer la prueba de hipótesis a realizar.

Si luego de aplicar la metodología indicada anteriormente se rechaza la hipótesis nula

se concluye que existen diferencias significativas entre los grupos de resultados, por lo cual, el siguiente paso consiste en realizar pruebas de comparaciones multiples para establecer que grupos presentan diferencias entre si [3].

Si se cumplen los supuestos de normalidad y homocedasticidad, las comparaciones multiples se pueden realizar empleando los contrastes de: Duncan, Newman-Keuls, Bonferroni, Scheffé o HSD de Tukey [3], [60].

En el caso de no cumplirse los supuestos de normalidad y homocedasticidad se pueden emplear las pruebas no paramétricas para comparaciones multiples de: Nemenyi, Holm, Bonferroni-Dunn ([21], [33]), o la prueba de Bonferroni como método complementario de la prueba de Kruskal-Wallis [61].

Como resultado de aplicar el método no paramétrico de Bonferroni se tienen intervalos de confianza los cuales permiten determinar si los grupos a comparar no presentan diferencias significativas. Una representación aproximada del resultado de esta prueba se realiza de forma gráfica donde se muestra el ranking promedio de cada grupo y un intervalo equivalente. Dos grupos de resultados se consideran con diferencias significativas si sus intervalos no se traslapan [40].

11.3. Análisis de resultados

Considerando que el algoritmo propuesto consiste en un enjambre de partículas, entonces, para establecer el numero de corridas que se debe ejecutar el algoritmo con cada grupo de parámetros se pueden tomar como referencia los trabajos presentados en [83] y [91] donde se emplean algoritmos de optimación basados en enjambres de partículas realizando 50 corridas para cada caso de aplicación. Los datos que se muestran en las siguientes tablas consisten en la media, la varianza (VAR), la desviación estándar (STD) y en rango medio (MR) el cual se emplea para las pruebas no paramétricas de Kruskal-Wallis y Bonferroni.

Para las pruebas de normalidad, homocedasticidad y comparación entre grupos de datos se toma un nivel de significancia de 0,05 lo cual corresponde a un error del 5 % de aceptar la hipótesis nula. Los casos considerados para las diferentes configuraciones de parámetros son los relacionados en la tabla 10.1.

11.3.1. Campo potencial sin mínimo local

Los resultados para las 50 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la tabla 11.1.

Al realizar la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov se tiene un p-value de $7{,}3046 \times 10^{-38}$ de tal forma que se rechaza la hipótesis de la normalidad de los datos y se aplica la prueba de Kruskal-Wallis para determinar si existe diferencia significativa entre los datos tomados con diferentes parámetros. Al realizar esta prueba se tiene un p-value

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Media	174.06	236.34	173.94	236.14	174.58	236.92	174.62	236.92
VAR	0.30	0.56	0.26	0.45	0.82	0.89	0.36	0.44
STD	0.55	0.75	0.51	0.67	0.91	0.94	0.60	0.67
MR	83.47	285.23	73.99	271.73	118.18	320.30	126.36	324.74

Tabla 11.1: Resultados para el campo potencial sin mínimo local.

de 0, por lo tanto se rechaza la hipótesis nula y se procede a realizar una comparación entre grupos empleando la prueba no paramétrica de Bonferroni obteniendo los resultados mostrados en la figura 11.2.

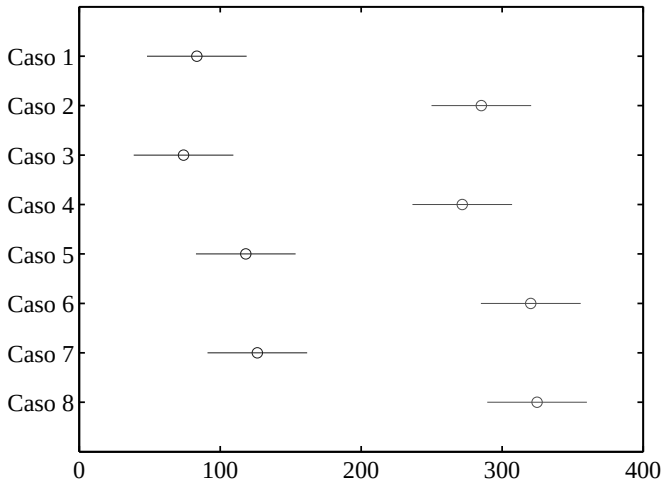

Figura 11.2: Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.

Con estos resultados se observa que los casos 1, 3, 5 y 7 presentan diferencias significativas con los casos 2, 4, 6 y 8. Lo anterior permite apreciar que para este campo potencial el parámetro que tiene más relevancia es el coeficiente de la fuerza disipativa.

11.3.2. Campo potencial con mínimo local

En este caso, los resultados para las 50 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la tabla 11.2.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Media	182.06	234.40	181.92	234.16	182.66	384.42	182.82	312.50
VAR	0.59	3.47	0.40	0.95	1.21	78804.78	0.68	11763.28
STD	0.77	1.86	0.63	0.98	1.10	280.72	0.83	108.46
MR	83.57	251.05	72.10	250.13	117.55	353.02	128.78	347.80

Tabla 11.2: Resultados para el campo potencial con mínimo local.

Con los datos recolectados se realiza la prueba de normalidad obteniendo un p-value de $2{,}1236 \times 10^{-22}$, por lo cual, para determinar si existe variabilidad significativa entre los diferentes casos se efectúa la prueba de Kruskal-Wallis, con esta prueba se obtuvo un p-value de 0 por lo tanto se concluye que existen diferencias entre los casos considerados. Con el fin de establecer que casos presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni obteniendo los resultados mostrados en la figura 11.3.

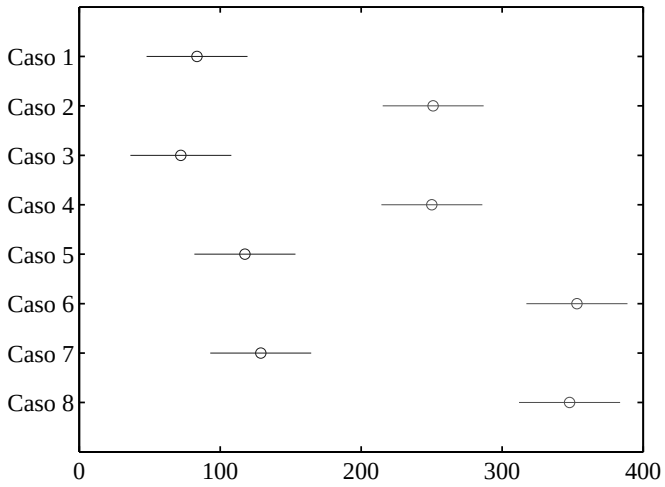

Figura 11.3: Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.

Este análisis permite apreciar que los casos 1, 3, 5 y 7 presentan diferencias significativas con los casos 2, 4, 6 y 8. Este análisis muestra el efecto significativo del parámetro de la fuerza disipativa en el comportamiento del algoritmo.

11.3.3. Campo potencial con obstáculo tipo barrera

Los resultados para las 50 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la tabla 11.3.

Al realizar la prueba de normalidad para los datos recolectados se obtiene un p-value de $1{,}4996 \times 10^{-20}$, por lo tanto, para determinar si existe variabilidad significativa entre los diferentes casos se realiza la prueba de Kruskal-Wallis obteniendo un p-value de 0 indicando que existen diferencias entre los casos considerados. Para determinar los grupos

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Media	481.18	461.12	536.50	442.10	536.36	803.66	542.00	997.38
VAR	17769.3	11811.7	27216.4	1036.3	53165.7	138183.3	48291.1	498435.3
STD	133.30	108.68	164.97	32.19	230.58	371.73	219.75	706.00
MR	163.80	130.09	207.90	129.24	175.55	298.51	181.67	317.24

Tabla 11.3: Resultados para el campo potencial con obstáculo tipo barrera.

que presentan diferencias se realiza la prueba no paramétrica de Bonferroni obteniendo los resultados mostrados en la figura 11.4.

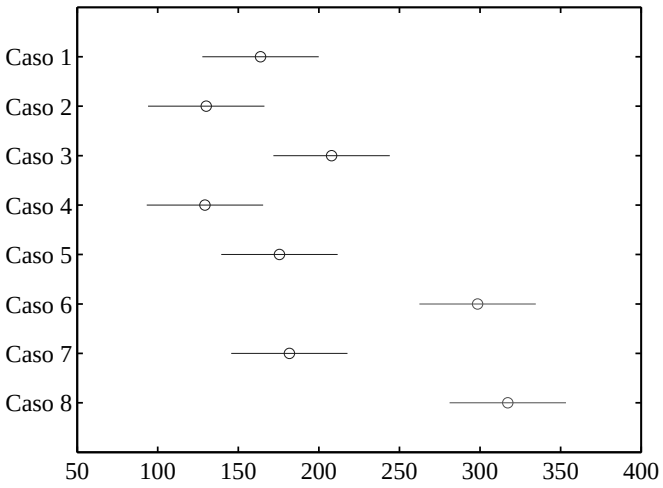

Figura 11.4: Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.

La lista de los casos que presentan diferencias significativas son:

- Caso 1: con 6 y 8.
- Caso 2: con 3, 6 y 8.
- Caso 3: con 2, 4, 6 y 8.
- Caso 4: con 3, 6 y 8.
- Caso 5: con 6 y 8.
- Caso 6: con 1, 2, 3, 4, 5 y 7.
- Caso 7: con 6 y 8.
- Caso 8: con 1, 2, 3, 4, 5 y 7.

Los anteriores resultados muestran que la diferencia más significativa se tiene de los casos 6 y 8 en relación a los otros casos. Para este campo potencial no se puede establecer una relación directa entre el comportamiento del algoritmo y los parámetros considerados.

11.3.4. Campo potencial con pasaje estrecho

Para este campo potencial los resultados de las 50 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la tabla 11.4.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Media	279.98	942.70	295.38	911.16	264.68	1145.26	268.40	890.84
VAR	1733.2	299316.8	2463.7	341174.7	1484.5	299908.1	734.4	104195.2
STD	41.63	547.10	49.64	584.10	38.53	547.64	27.10	322.79
MR	112.57	290.69	128.48	283.26	80.40	319.83	91.54	297.23

Tabla 11.4: Resultados para el campo potencial con pasaje estrecho.

Al realizar la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov se tiene un p-value de $3{,}9839 \times 10^{-19}$ rechazando de esta forma la hipótesis nula de normalidad de los datos por lo tanto se emplea la prueba de Kruskal-Wallis para determinar si existe diferencia significativa de los datos tomados con los diferentes parámetros, al realizar esta prueba se tiene un p-value de 0, por lo cual se procede a realizar la comparación entre grupos empleando la prueba de Bonferroni, obteniendo los resultados mostrados en la figura 11.5.

De la misma forma que en los dos primeros campos potenciales considerados, con estos resultados se observa que los casos 1, 3, 5 y 7 presentan diferencias significativas con los casos 2, 4, 6 y 8.

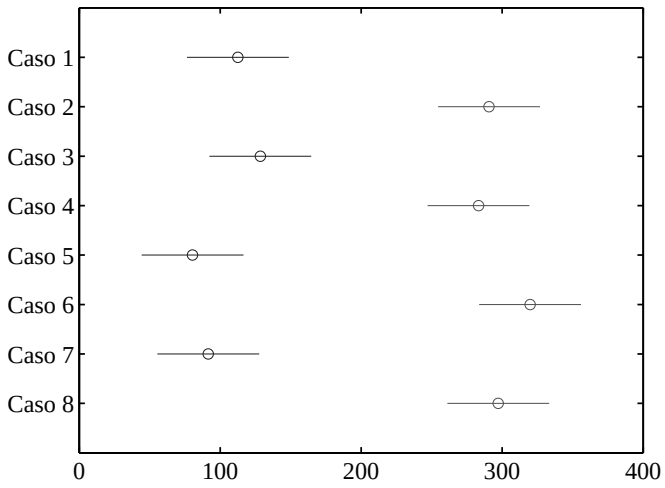

Figura 11.5: Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.

11.3.5. Campo potencial con trampa tipo U

Los resultados para las 50 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la tabla 11.5.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
Media	409.44	598.78	423.40	643.74	440.86	621.26	463.10	736.78
VAR	8608.1	19042.0	8105.3	24169.0	7207.6	22663.3	14776.6	39456.4
STD	92.78	137.99	90.03	155.46	84.90	150.54	121.56	198.64
MR	94.38	256.37	112.00	283.64	129.63	266.34	145.28	316.36

Tabla 11.5: Resultados para el campo potencial con trampa tipo U.

Con los datos de la tabla 11.5 se realiza la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov produciendo un p-value de $6{,}8018 \times 10^{-6}$ el cual es menor que el nivel de significancia de 0,05, por lo tanto, se realiza la prueba Kruskal-Wallis obteniendo un p-value de 0 concluyendo de esta forma que existen diferencias significativas entre los casos. Con el fin de establecer la relación de los casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni obteniendo los resultados mostrados en la figura 11.6.

Para este campo potencial se tiene nuevamente que los casos 1, 3, 5 y 7 presentan diferencias significativas con los casos 2, 4, 6 y 8. Este resultado muestra que para los grupos de parámetros considerados el factor asociado a la fuerza de frenado presenta un efecto considerable en el numero de iteraciones requeridas para encontrar una trayectoria desde el origen al destino.

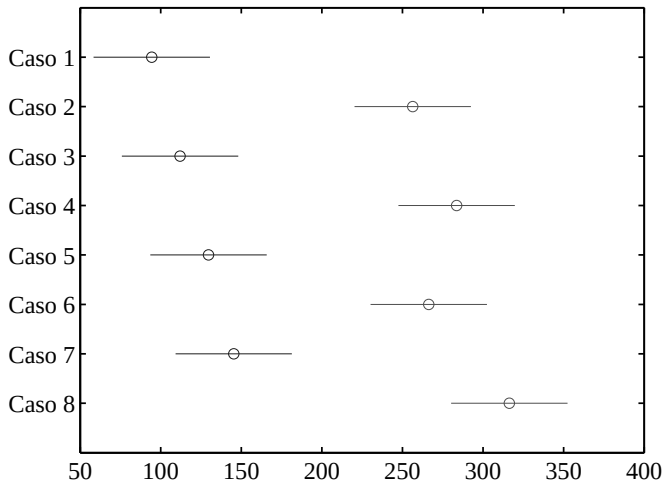

Figura 11.6: Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.

Capítulo 12

Conclusiones y expectativas futuras

La selección del modelo se realizó buscando tener una expresión compacta con pocos términos y que permita describir comportamientos de enjambre como desplazamientos uniformes y movimientos circulares los cuales se aprecian en diferentes grupos de seres vivos.

Para observar las características del modelo se realizó un análisis sin considerar la componente estocástica, con este análisis se muestra el comportamiento de movimiento circular de las partículas bajo ciertas características de los parámetros del modelo.

Mediante los resultados cualitativos y cuantitativos se apreció que para los cinco casos considerados de campos potenciales el algoritmo propuesto logra evadir mínimos locales permitiendo establecer una trayectoria entre el punto origen y destino.

Aunque en todos los casos se logra determinar un trayectoria desde el punto inicial al punto objetivo se observa en algunas situaciones la presencia de trayectorias con irregularidades y movimientos circulares lo cual puede producir trayectorias no óptimas. Considerando lo anterior, en un trabajo futuro se puede desarrollar un algoritmo para suavizar las trayectorias irregulares y eliminar las trayectorias circulares.

Con el análisis estadístico de los datos se proporciona validez a las observaciones efectuadas para los diferentes experimentos. Los parámetros que se modificaron para observar el comportamiento del algoritmo fueron seleccionados considerando análisis reportados del modelo y simulaciones previas del mismo.

En los resultados se apreció que el parámetro asociado a la fuerza disipativa presenta un efecto considerable en el algoritmo en comparación al número de partículas y la magnitud del ruido. Esta característica puede ser utilizada para mejorar el desempeño del algoritmo.

En un trabajo futuro se puede proponer una estrategia de control para el factor de propulsión con la cual se pueda evadir mínimos locales de forma más eficiente. Una alternativa adicional para mejorar el algoritmo consiste en modificar de forma dinámica el factor asociado al campo potencial de tal forma que el enjambre pueda escapar rápidamente de

mínimos locales.

En trabajos futuros se podrían considerar otros modelos de partículas auto-propulsadas y partículas Brownianas para implementar el algoritmo propuesto. También se puede considerar la adecuación de este algoritmo en problemas de optimización.

Apéndice A

Nomenclatura utilizada

a: magnitud para el potencial parabólico.

c: constante que pondera la transferencia de energía.

cl: semi-trayectoria libre.

C_a: magnitud de la fuerza de atracción.

Ca_j: magnitud de la fuerza de atracción para una partícula j.

C_A: magnitud de la fuerza de orientación.

Co_{iz}: magnitud de la fuerza de interacción entre una partícula i y un obstáculo z.

C_r: magnitud de la fuerza de repulsión.

Cr_j: magnitud de la fuerza de repulsión para una partícula j.

d: distancia de separación entre ruedas de un robot móvil de tracción diferencial

d: constante que pondera la transferencia de energía.

D: magnitud del ruido.

D_{cr}: magnitud crítica de ruido.

$e(t)$: variable asociada a la energía almacenada.

$f\{\vec{\theta}\}$: función de los desplazamientos de los actuadores en el espacio de configuraciones.

$f^{-1}\{\}$: función inversa.

$\vec{F}_{act}$: fuerza de autopropulsión.

$\vec{F}_{esp}$: fuerzas dadas por el espacio de trabajo.

$\vec{F}_{est}$: fuerza estocástica.

$\vec{F}_{int}$: fuerza de interacción.

G: posición final del robot.

J: matriz jacobiana.

J^T: matriz transpuesta de J.

k_f: factor de ponderación de la fuerza producida por el espacio de trabajo.

k_{obj}: ganancia asociada al potencial del objetivo.

k_{obs}: ganancia asociada al potencial de los obstáculos.

l_a: rango de interacción para la fuerza de atracción.

la_j: rango de interacción de la fuerza de atracción para una partícula j.

l_A: rango de interacción de la fuerza de orientación.

l_c: rango de interacción para la fuerza de autopropulsión.

lo_{iz}: rango de interacción entre una partícula i y un obstáculo z.

l_r: rango de interacción para la fuerza de repulsión.

lr_j: rango de interacción de la fuerza de repulsión para una partícula j.

$\vec{L}$: momento angular.

L_1, L_2: longitud de los brazos del robot manipulador planar de dos eslabones.

m: masa.

m_i: masa de una partícula.

M: cantidad de obstáculos.

n: variable asociada al tiempo discreto.

N: número de partículas.

O: punto de origen.

p: magnitud de la fuerza de interacción de maniobras de evasión.

q: configuración de un robot.
flujo de energía.

q_{ini}: configuración inicial del robot.

q_{obj}: configuración objetivo del robot.

q_0: flujo constante de energía.

r_d: radio de la rueda.

$\vec{r}$: vector posición.

$\vec{r}_g$: posición del objetivo.

$\vec{r}_G$: posición de la meta.

$\vec{r}_i$: posición de una partícula.

$\hat{r}_{ij}$: vector unitario dirigido de la i-ésima a la j-ésima partícula.

R: parámetro asociado al robot manipulador planar de dos eslabones.
radio de curvatura.

$\vec{R}$: posición media del enjambre.

S: posición inicial del robot.

t: variable asociada a tiempo continuo.

T_i: energía cinética de una partícula.

(u, v): sistema coordenado del espacio de configuraciones.

U_{act}: valor actual del campo potencial para la posición media del enjambre.

U_{esp}: campo potencial asociado al espacio de trabajo.

U_i: energía potencial de una partícula.

U_{int}: potencial de interacción

U_{min}: valor mínimo encontrado del campo potencial.

U_{obj}: potencial asociado al objetivo.

$U_{obs,m}$: potencial asociado a un obstáculo m.

(v_i, v_d): velocidad de la rueda izquierda y derecha de un robot móvil de tracción diferencial.

$\vec{v}_i$: velocidad de una partícula.

$\dot{v}$: derivada de la velocidad.

V: potencial externo.

$\vec{V}$: velocidad media del enjambre.

w_g: ponderación del potencial del objetivo.

w_z: velocidad angular del robot móvil.

$\vec{w}$: posiciones y orientaciones del robot en el espacio de trabajo.

(x, y): sistema coordenado para representar la posición del robot en el espacio de trabajo.

$\mathcal{A}$: representación del robot.

$\mathcal{C}$: espacio de configuraciones.

$\mathcal{CB}$: obstáculo en el espacio de configuraciones.

$\mathcal{C}_{libre}$: espacio de configuraciones libre de obstáculos.

$\mathcal{W}$: espacio de trabajo.

α: parámetro asociado al robot manipulador planar de dos eslabones.
parámetro de propulsión del modelo de partícula activa Browniana.

α_e: variable asociada a la energía adicionada.

α_0: valor nominal del factor de propulsión.

β: parámetro asociado al robot manipulador planar de dos eslabones
parámetro de frenado del modelo de partícula activa Browniana.

γ: función de fricción.

γ_0: valor constante asociado a la componente disipativa.

δ_{ij}: delta de Kroneck:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Δt: paso de simulación.

$(\Delta x, \Delta y)$: variación de x y y.

ζ_i: ruido blanco.

η: valor máximo para la distribución uniforme.

θ: variable asociada a la orientación del robot.
parametro del modelo de Vicsek.

$\vec{\theta}$: desplazamientos de los actuadores en el espacio de configuraciones.

ν: tamaño de paso en el método de campos potenciales.

ξ_i: ruido blanco.

σ: rango de interacción de la fuerza con maniobras de evasión.

τ: mapa continuo entre dos configuraciones.

τ_c: tasa de incremento de energía.

τ_d: tasa de liberación de energía.

$\in$: pertenece.

$\cup$: unión.

$\neq$: no es igual a.

$\cdot$: producto escalar.

$\times$: producto vectorial.

dis: función distancia.

$[\ ]^T$: matriz o vector transpuesto.

$\det(J)$: determinante de J.

$|\vec{v}(t)| = v$: magnitud de la velocidad.

$|\vec{v}(t)|^2 = v^2$: magnitud de la velocidad al cuadrado.

$\langle f(t)g(t)\rangle$: función de correlación:

$$\langle f(t)g(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+\tau)dt$$

$\dfrac{dw}{dt}$: derivada de w con respecto a t.

$\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$: derivada temporal de x.

$\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$: derivada parcial de w con respecto a θ.

$\vec{\nabla}U$: gradiente del campo potencial U.

$\vec{\nabla}_i U$: gradiente del campo potencial U con respecto a las coordenadas de $\vec{r}_i$.

$|\vec{\nabla}U|$: magnitud del gradiente del campo potencial U.

Bibliografía

[1] Abdel Wahid M.H.M., McInnes Colin R., *Wall following to escape local minima for swarms of agents using internal states and emergent behavior*, International Conference of Computational Intelligence and Intelligent Systems ICCIIS, 2008.

[2] Abido M.A., *Multiobjective particle swarm optimization for optimal power flow problem*, MEPCON 12th International Middle-East Power System Conference, 2008.

[3] Arriaza Gómez A.J., Fernández Palacín F.M., López Sánchez A., Muñoz Márquez M., Pérez Plaza S., Sánchez Navas A., *Estadística básica con R y R-Commander*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2008.

[4] Barraquand Jérome, *Automatic motion planning for complex articulated bodies*, Paris Research Laboratory, 1991.

[5] Barraquand Jérome, Langlois Bruno, Latombe Jean-Claude, *Numerical potential field techniques for robot path planning*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1992.

[6] Barraquand Jérô, Kavraki Lydia, Latombe Jean-Claude, Motwani Rajeev, Li Tsai-Yen, Raghavan Prabhakar, *A random sampling scheme for path planning*, International Journal of Robotics Research archive, 1997.

[7] Berg Howard C., *Random walks in biology*, Princeton University Press, 1983.

[8] Brooks Rodney A., *Solving the find-path problem by good representation of free space.* IEEE Transactions on Sysyems Man and Cybernetics, 1983.

[9] Cagnina Leticia Cecilia, *Optimización mono y multiobjetivo a través de una heurística de inteligencia colectiva*, Tesis de Doctorado, Doctorado en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Luis, Argentina, 2010.

[10] Capozzi Brian J., *Evolution-based path planning and management for autonomous vehicles*, PhD thesis, University of Washington, 2001.

[11] Carpin Stefano, Pillonetto Gianluigi, *Motion planning using adaptive random walks*, IEEE Transactions on Robotics, 2005.

[12] Carpin Stefano, Pillonetto Gianluigi, *Merging the adaptive random walks planner with the randomized potential field planner*, IEEE Fifth International Workshop on Robot Motion and Control, 2005.

[13] Caselli Stefano, Reggiani Monica, Rocchi Roberto, *Heuristic methods for randomized path planning in potential fields*, IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, 2001.

[14] Çengel Y.A., *Mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, 2003.

[15] Chang Hsuan, Li Tsai-Yen, *Assembly maintainability study with motion planning*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995.

[16] Chengqing Liu, Ang Marcelo, Krishnan Hariharan, Yong Lim Ser, *Virtual obstacle concept for local-minimum-recovery in potential-field based navigation*, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, 2000.

[17] Coelho Leandro dos Santos, Sierakowski, Cezar Augusto, *Bacteria colony approaches with variable velocity applied to path optimization of mobile robots*, ABCM Symposium Series in Mechatronics, Volume 2, 2006.

[18] Connolly C.I., Burns J.B., *Path planning using Laplace's equation*, IEEE Conference on Robotics and Automation, 1994.

[19] Czirók András, Vicsek Tamás, *Collective behavior of interacting self-propelled particles*, Elsevier Science B.V., Physica A 281, 2000.

[20] Dahlquist F.W., Elwell R.A., Lovely P.S., *Studies of bacterial chemotaxis in defined concentration gradients-A model for chemotaxis toward l-serine*, Journal of Supramolecular Structure, Volume 4, 1976.

[21] Demsar Janez, *Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets*, Journal of Machine Learning Research 7, 2006.

[22] Domingo Juan, *Robótica, Apuntes para la asignatura*, Universitat de Valencia, 2001.

[23] Ebeling Werner, Schweitzer Frank, *Self-organization, active Brownian dynamics, and biological applications*, Nova Acta Leopoldina NF, 2003.

[24] Ebeling Werner, Schweitzer Frank, Tilch Benno, *Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility*, Biosystems, Volume 49, 1999.

[25] Ebeling Werner, Erdmann Udo, *Nonequilibrium statistical mechanics of swarms of driven particles*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 314, 2002.

[26] Ebeling Werner, Kac Mark, *Active Brownian motion of pairs and swarms of particles*, Acta Physica Polonica B, 2007.

[27] Ebeling Werner, Schimansky-Geier Lutz, *Swarm dynamics attractors and bifurcations of active Brownian motion*, Springer Berlin / Heidelberg, The European Physical Journal - Special Topics, Volume 157, 2008.

[28] Erdmann Udo, Ebeling Werner, Anishchenko Vadim S., *Excitation of rotational modes in two-dimensional systems of driven Brownian particles*, Physical Review E, Volume 65, 2002.

[29] Erdmann Udo, Ebeling Werner, Mikhailov Alexander S., *Noise-induced transition from translational to rotational motion of swarms*, Physical Review E, 2005.

[30] Erdmann Udo, Ebeling Werner, Schimansky-Geier Lutz, Ordemann Anke, Moss Frank, *Active Brownian particle and random walk theories of the motions of zooplankton: application to experiments with swarms of daphnia*, Journal of Theoretical Biology 9, 2008.

[31] Esmaeili Omid, Sai Tang, Ismail Napsiah, *Development of a new minimum avoidance system for a behavior-based mobile robot*, Fuzzy Sets and Systems 160, 2009.

[32] Fujimori Atsushi, Nikiforuk Peter, Gupta Madan, *Adaptive navigation of mobile robots with obstacle avoidance*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1997.

[33] García Salvador, Herrera Francisco, *An extension on "statistical comparisons of classifiers over multiple data sets" for all pairwise comparisons*, Journal of Machine Learning Research 9, 2008.

[34] Ge S.S., Cui Y.J., *New potential functions for mobile robot path planning*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Volume 16, 2000.

[35] Gemeinder M., Gerke M., *GA-based path planning for mobile robot systems employing an active search algorithm*, Applied Soft Computing, 2003.

[36] Gómez Bravo F., Cuesta F., Ollero A., *Planificación de trayectorias en robots móviles basada en técnicas de control de sistemas no holónomos*, XXIV Jornadas de Automática, 2003.

[37] Gutiérrez García Miguel Ángel, *Cálculo de caminos óptimos para manipuladores articulados*, Trabajo de grado, Universidad De Salamanca Departamento de Informática y Automática Facultad de Ciencias, 2004.

[38] Helbing Dirk, Molnár Péter, Schweitzer Frank, *Computer simulations of pedestrian dynamics and trail formation*, Evolution of Natural Structures, 1994.

[39] Heo J.S., Lee K.Y., Garduno-Ramirez R, *Multiobjective control of power plants using particle swarm optimization techniques*, IEEE Transactions on Energy Conversion, 2006.

[40] Hochberg Yosef, Tamhane Ajit C., *Multiple Comparison Procedures*, Wiley, New York, 1987.

[41] Hou S.P., Cheah C.C., Slotine J.J.E., *Dynamic region following formation control for a swarm of robots*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009.

[42] Hsin Ya-Chieh, *Emergence of vortex swarming in Daphnia*, Term Paper for Emergent State of Matter, Spring 2006.

[43] Kavraki Lydia E., Latombe Jean-Claude, *Probabilistic road maps for robot*, John Wiley, In Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions, 1998.

[44] Khatib O., *Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots*, International Journal of Robotic Research, Volume 5, 1986.

[45] Khosla P. Volpe R., *Superquadric artificial potentials for obstacle avoidance and approach*, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, PA, 1988.

[46] Kim J.O., Khosla P.K., *Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions*, IEEE Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA, 1991.

[47] Kogay Yoshihito, Kondoz Koichi, Kuffnery James, Latombe Jean-Claude, *Planning motions with intentions*, International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1994.

[48] Koren Y., Borenstein J., *Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation*, Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation, 1991.

[49] Krogh B., *A generalized potential field approach to obstacle avoidance control*, ASME Conference of Robotic Research: The Next Five Years and Beyond, Bethlehem, Pennsylvania, 1984.

[50] LaValle Steven, *Planning algorithms*, Cambridge University Press, 2006.

[51] Lee Leng-Feng, *Decentralized motion planning within an artificial potential framework (APF) for cooperative payload transport by multi-robot collectives*, Master Of Science Thesis, University of New York at Buffalo, 2004.

[52] Levine Herbert, Rappel Wouter-Jan, Cohen Inon, *Self-organization in systems of self-propelled particles*, Physical Review E 63, 2000.

[53] Lindemann Stephen R., LaValle Steven M., *Steps toward derandomizing RRTs*, In IEEE Fourth International Workshop on Robot Motion and Control, 2004.

[54] Liu Guan-Yu, Wu Chia-Ju, *A discrete method for time-optimal motion planning of a class of mobile robots*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2001.

[55] Lozano Peréz Tomas, *Spatial planning: a configuration space approach*, IEEE Transactions on computers, 1983.

[56] Mach Robert, Schweitzer Frank, *Multi-agent model of biological swarming*, Springer Berlin, Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI), 2003.

[57] Maciejewski Anthony, Fox John, *Path planning and topology of configuration space*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Volume 9, 1993.

[58] McInnes Colin R., *Vortex formation in swarms of interacting particles*, Physical Review E 75, 2007.

[59] Mikhailov Alexander S., Calenbuhr Vera, *From cells to societies: models of complex coherent action*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[60] Montgomery Douglas, *Diseño y análisis de experimentos*, Limusa Wiley, 2003.

[61] Moreno Torres Luis Alberto, *Texto y software en diseños experimentales no-paramétricos más importantes*, Tesis profesional, Universidad de las Américas Puebla, México, 2005.

[62] Muñoz Martinez Victor Fernando, *Planificación de trayectorias para robots móviles*, Tesis de Doctorado, Universidad de Málaga, 1995.

[63] Nilsson J. Nils, *A mobile automaton: an application of artificial intelligence techiques*, Proc. of the 1st. International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1969.

[64] Ollero Baturone Aníbal, *Robótica manipuladores y robots móviles*, Marcombo, 2001.

[65] D'Orsogna M.R., Chuang Y.L., Bertozzi A.L., Chayes L.S., *Self-propelled particles with soft-core interactions: patterns, stability, and collapsel*, Physical Review Letters, PRL 96, 2006.

[66] Overmars Mark H., Svestka Petr, *A probabilistic learning approach to motion planning*, Proceding in Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, 1994.

[67] Pac Muhammed R., Erkmen Aydan M., Erkmen Ismet, *Control of robotic swarm behaviors based on smoothed particle hydrodynamics*, Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2007.

[68] Passino Kevin M., *Biomimicry for optimization, control, and automation*, Springer-Verlag, London, UK, 2005.

[69] Porta García Miguel Ángel, *Planeación de trayectorias para robótica móvil mediante optimización por colonia de hormigas*, Tesis de Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales, Instituto Politécnico Nacional, Tijuana México, 2007.

[70] Prahlad Vadakkepat, Kay Chen Tan, Wang Ming-Liang, *Evolutionary artificial potential fields and their application in real time robot path*, Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation, 2000.

[71] Ren Beibei, Pei Hailong, Sun Zhendong, Ge Shuzhi Sam, Lee Tong Heng, *Decentralized cooperative control for swarm agents with high-order dynamics*, Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, 2009.

[72] Reynolds Craig W., *Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model, in computer graphics*, SIGGRAPH '87 Conference Proceedings, 1987.

[73] Rimon E., Koditchek D.E., *Exact robot navigation using artificial potential functions*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Volume 8, 1992.

[74] De Los Santos De La Rosa Erik Adolfo, *Heurística para la generación de configuraciones en pasajes estrechos aplicada al problema de los clavos*, Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería en Sistemas Computacionales, Universidad de las Américas Puebla, 2004.

[75] Schweitzer Frank, Ebeling Werner, Tilch Benno, *Statistical mechanics of canonical-dissipative systems and applications to swarm dynamics*, Physical Review E, Volume 64, 2001.

[76] Schweitzer Frank, *Active brownian particles with internal energy depot*, Springer, Berlin, Trafic and Granular Flow '99, 2000.

[77] Segovia Armando, Rombaut Michkle, *Path finding from a spot image for a mobile robot*, Symposium Intelligent Vehicles, 1993.

[78] Shimizu Masahiro, Ishiguro Akio, Kawakatsu Toshihiro, Masubuchi Yuichi, Doi Masao, *Adaptive swarming by exploiting hydrodynamic interaction based on stokesian dynamics method*, SICE Annual Conference in Fukui Japan, 2003.

[79] Sierakowski Cezar A., Coelho Leandro dos S., *Study of two swarm intelligence techniques for path planning of mobile robots*, 16th IFAC World Congress, 2005.

[80] Sleumer Nora H, Tschichold Gürman Nadine, *Exact cell decomposition of arrangements used for path planning in robotics*, Swiss Federal Institute of Technology, 1999.

[81] Spong Mark, Hutchinson Seth, Vidyasagar M., *Robot modeling and control*, John Wiley & Sons, Inc., First Edition, 2005.

[82] Sumpter D.J.T., *The principles of collective animal behaviour*, Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci., 2006.

[83] Van den Bergh Frans, *An analysis of particle swarm optimizers*, PhD. Thesis, University of Pretoria, Pretoria, 2001.

[84] Vicsek Tamás, Czirók András, Ben-Jacob Eshel, Cohen Inon, Shochet Ofer, *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles*, Physical Review Letters, Volume 75, 1995.

[85] Vicsek T., *Universal patterns of collective motion from minimal models of flocking*, Second IEEE International Conference on Self-Adaptive and Self-Organizing Systems, 2008.

[86] Werner Ebeling, *Nonequilibrium statistical mechanics of swarms of driven particles*, Elsevier, Physica A, 2002.

[87] Xi-Yong Zou, Jing Zhu, *Virtual local target method for avoiding local minimum in potential field based robot navigation*, Journal of Zhejiang University - Science A, 2003.

[88] Xiao Jing, Michalewicz Zbigniew, Zhang Lixin, Trojanowski Krzysztof, *Adaptive evolutionary planner/navigator for robots*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997.

[89] Yakey Jeffery H., LaValle Steven M., Kavraki Lydia E., *Randomized path planning for linkages with closed kinematic chains*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001.

[90] Yen G.G., Wen Fung Leong, *Dynamic multiple swarms in multiobjective particle swarm optimization*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2009.

[91] Zhang Xiao-hua, Meng Hong-yun, Jiao Li-cheng, *Intelligent particle swarm optimization in multiobjective optimization*, IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2005.