SOLUCIONES POSITIVAS DE DESIGUALDADES VARIACIONALES ASOCIADAS A PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES

por

Eddye Alejandro Bustamante Monsalve

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Volker Stallbohm

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

0

Marzo 2005

T
2419
2005.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

Resumen

En este trabajo se prueba la existencia de soluciones positivas de un problema semilineal. Para esto, se prueban algunos estimativos a priori empleando la desigualdad de Hardy-Sobolev y un resultado de regularidad de H. Brezis. Posteriormente se obtienen soluciones no triviales empleando la teoría de grado de Leray-Schauder. Finalmente, mediante la aplicación del Principio del Máximo, se prueba que una desigualdad variacional tiene solución positiva la cual es solución de un problema semilineal.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

Contenido

Introducción vi

1 PRELIMINARES 1

1.1 NOTACIONES Y DEFINICIONES BÁSICAS 1

1.2 RESULTADOS CLÁSICOS 7

1.3 RESULTADOS ADICIONALES 11

2 ESTIMATIVOS A PRIORI Y SOLUCIONES POSITIVAS 17

2.1 ESTIMATIVOS A PRIORI PARA LAS SOLUCIONES DE UNA DESIGUALDAD VARIACIONAL 18

2.2 EXISTENCIA DE SOLUCIONES POSITIVAS 29

Bibliografía 44

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a los profesores del Posgrado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, por su apoyo y colaboración durante la realización de mis estudios de Maestría, de manera especial al profesor Volker Stallbohm, quien fue el director de esta tesis.

Además, me gustaría manifestar mi gratitud al profesor Carlos Augusto Vélez quien me brindó su ayuda durante la realización de este trabajo.

Finalmente, quiero hacer una didicatoria especial a mis padres quienes siempre me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones que he tomado en mi vida.

Introducción

El propósito de este trabajo es desarrollar en detalle los resultados sobre soluciones positivas del trabajo [Q] y donde el resultado final es la existencia de soluciones, en $H_0^1(\Omega)$, de un problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Aquí Ω es un dominio regular de clase C^∞ en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface las condiciones:

(A1) f cruza el primer valor propio λ_1 del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, es decir:

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$$

(A2) $|f(t)| \leq C(1 + |t|^\alpha)$, donde $\alpha < \frac{N+1}{N-1}$

(A3) $f \geq -\lambda$ con $\lambda > 0$ suficientemente pequeño.

El problema (1) ha sido, en los últimos decenios, objeto de un gran número de publicaciones. Al respecto se pueden consultar los trabajos [L] y [D] que resumen los resultados obtenidos hasta alrededor de 1980.

La existencia de soluciones para el problema (1) depende en forma significativa de las hipótesis sobre f. Se han analizado mucho los casos donde $f(0) > 0$ y $f(0) = 0$, e imponiendo condiciones sobre $f(t)$ para $t \to 0^+$ y $t \to +\infty$ como en (A1). Además condiciones de crecimiento similares a (A2) y condiciones de regularidad como f localmente Lipschitz. En nuestro caso tenemos

solamente f continua y (A3) permite valores negativos de f. Por la condición

$$\lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$$

se dice que el problema es asintóticamente lineal.
Se considera la desigualdad variacional, para $u \in K^+$:

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u\rangle \geq 0, \forall v \in K^+ \tag{2}$$

asociada al problema (1). Aquí $K^+ := \left\{u \in H_0^1(\Omega); u \geq 0\right\}$ es el cono de las funciones no negativas en $H_0^1(\Omega)$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. Probaremos que (2) tiene una solución no trivial positiva. Para obtener este resultado, consideramos en un primer paso, soluciones $u \in K^+$ de la desigualdad variacional

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, v - u\rangle \geq 0, \forall v \in K^+, \tag{3}$$

donde Φ es la función propia (positiva) asociada al valor propio λ_1 de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Se prueban, bajo las condiciones (A1), (A2) y f acotada inferiormente, que existe $R > 0$ tal que los estimativos a priori $\|u\|_{H_0^1} < R$ y $\|u\|_{L^\infty} < R$ para cualquier solución de (3) con $s \geq 0$. Para obtener estos resultados es crucial la desigualdad de Hardy-Sobolev y un resultado de regularidad para soluciones de desigualdades variacionales debido a H. Brezis.

En un segundo paso, se prueba el siguiente resultado:

Teorema *Sea $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ que satisface (A1), (A2) y tal que f es acotado inferiormente, entonces la desigualdad variacional (2) tiene solución no trivial.*

Para la prueba de este teorema, se aplica el grado de Leray-Schauder para operadores compactos a un problema de punto fijo asociado a (2).

En un tercer paso se prueba

Teorema *Sea $E \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ que cumple las condiciones (A1) y (A2) reemplazando f por E. Entonces existe $\lambda = \lambda(E, \Omega) > 0$ tal que, para todo $f \in C(\mathbb{R}^+, [-\lambda, +\infty])$ que satisface*

$f \leq E$, $\liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > \lambda_1$, *el problema semilineal (1) tiene solución en* $H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\nu}\left(\overline{\Omega}\right)$ *para cierto* $\nu \in (0,1)$.

El trabajo consta de dos capítulos. El Capítulo 1 resume, con referencias, una variedad de resultados que se usarán posteriormente. El Capítulo 2 contiene las pruebas de los lemas y teoremas de este trabajo.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Para comodidad del lector resumimos en este capítulo algunos resultados sobre espacios de Sobolev y Ecuaciones Diferenciales Parciales elípticas de segundo orden así como algunas notaciones y definiciones que se usarán en el desarrollo del Capítulo 2.
Nos atenemos a las notáciones y definiciones usadas en los textos [B1] y [E] que son de amplia divulgación.

1.1 NOTACIONES Y DEFINICIONES BÁSICAS

Por Ω denotaremos un abierto no vacío en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.
Decimos que el abierto Ω es una región regular de clase C^k, $1 \leq k \leq \infty$, si Ω es acotado y para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe una vecindad U de x_0 y una función $\phi : U \to \mathbb{R}$ de clase C^k tales que $\nabla\phi(x) \neq 0$, para todo $x \in U$ y

$$\partial\Omega \cap U = \{x \in U; \phi(x) = 0\}, \Omega \cap U = \{x \in U; \phi(x) < 0\}.$$

Ω se dice un dominio regular de clase C^k, si además Ω es conexo.

Nota 1.1.1 *Para muchos propósitos es más conveniente una definición (equivalente) de región regular vía mapas locales (de clase C^k). Para ello se puede consultar [B1]. Dicho de otra manera, Ω es una región regular de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ en $\mathbb{R}^N$ si es una variedad de clase C^k y dimensión N con borde $\partial\Omega$.*

El concepto de vecindad tubular es un recurso útil para muchos propósitos. Discutimos brevemente esta noción (sin demostraciones) y algunas consecuencias que utilizaremos en este trabajo. Sea Ω una región regular de clase C^k $(2 \leq k \leq \infty)$ con frontera $\Gamma := \partial\Omega$. Sobre Γ existe un campo vectorial continuo, el campo de la normal exterior unitaria que, localmente, tiene una

representación

$$\nu(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|},\ x \in \Gamma \cap U$$

donde ϕ es una de las funciones que determinan localmente a Γ. Claramente $\nu \in C^{k-1}(\Gamma, S^{N-1})$.

Sea $x \longmapsto d(x) := d(x,\Gamma)$, $x \in \mathbb{R}^N$, la función distancia a la frontera de Ω y para $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon(\Gamma) = \left\{x \in \mathbb{R}^N; d(x) < \varepsilon\right\}$ que llamamos una ε-vecindad de Γ.

Sea $S_\varepsilon^-(\Gamma) = S_\varepsilon(\Gamma) \cap \Omega$ y $S_\varepsilon^+(\Gamma) = S_\varepsilon(\Gamma) \cap \left(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}\right)$.

Se sabe que $x \longmapsto d(x) := d(x,\Gamma)$, $x \in \mathbb{R}^N$, satisface una condición de Lipschitz

$$|d(x) - d(y)| \leq |x - y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

pero no es diferenciable en $\mathbb{R}^N$ como lo muestran simples ejemplos.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBI
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

Definimos una distancia con signo:

$$\eta(x) := \begin{cases} d(x), \text{ si } x \in S_\varepsilon^+(\Gamma) \cup \Gamma \\ -d(x), \text{ si } x \in S_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma \end{cases}$$

Claramente $\eta(x) = 0$ para $x \in \Gamma$.

Se puede probar, usando el teorema de la función implícita, el teorema de la función inversa y un argumento de compacidad, el siguiente resultado:

Teorema 1.1.1 ***(Vecindad Tubular de*** Γ***)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, una región regular de clase C^k $(2 \leq k \leq \infty)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ con las propiedades:*

$\forall x \in S_\varepsilon(\Gamma)$ existe exactamente un punto $\overline{x} \in \Gamma$ y exactamente un punto $t \in \mathbb{R}$, tales que $|t| = |x - \overline{x}| = d(x)$ y se tiene

$$x = \overline{x} + t\nu(\overline{x}) \ \text{ con } \ |t| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Además, si x tiene la forma (1.1), entonces

$$x \in S_\varepsilon(\Gamma) \ y \ |t| = d(x) = |x - \overline{x}|\,.$$

Más aún, la aplicación definida por (1.1)

$$\begin{aligned} \Pi : S_\varepsilon(\Gamma) &\rightarrow \Gamma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \\ x &\longmapsto \Pi(x) = (p(x), \eta(x)) = (\overline{x}, t) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo de clase C^{k-1} del abierto $S_\varepsilon(\Gamma)$ sobre $\Gamma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, una variedad (de clase C^k) y dimensión N en $\mathbb{R}^{N+1}$. La aplicación $p : x \longmapsto \overline{x} = p(x)$ se llama proyección de x sobre Γ y la aplicación $\eta : x \longmapsto t = \eta(x)$ es la distancia, con signo, de x a Γ, y así $d(x) = |\eta(x)|$ para $x \in S_\varepsilon(\Gamma)$. Las funciones p y η, las componentes de Π, son por lo tanto funciones de clase C^{k-1} en $S_\varepsilon(\Gamma)$.

Para una prueba del teorema, así como una aplicación importante, se puede consultar [P]. Con respecto a la función η se puede probar aún más:

Teorema 1.1.2 *Si Ω y $\varepsilon > 0$ son tales como en el Teorema 1.1.1, entonces*

$$\nabla\eta(x) = \nu\left(p\left(x\right)\right), \forall x \in S_\varepsilon(\Gamma).$$

En particular, se sigue con eso que $|\nabla\eta\left(x\right)| = 1$ sobre $S_\varepsilon(\Gamma)$ y $\eta \in C^k$ para $2 \leq k \leq \infty$.

Observación: Por la aplicación Π, es decir, $x \rightarrow \Pi\left(x\right) = (\overline{x}, t)$, $x \in S_\varepsilon(\Gamma)$, se han introducido (nuevas) coordenadas globales sobre $S_\varepsilon(\Gamma)$. Para nuestros propósitos estamos interesados en el conjunto $S_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma \subset \overline{\Omega}$. Para puntos de este conjunto, la coordenada t cumple $-\varepsilon < t \leq 0$. Como $\eta \in C^k$ y $\eta\left(x\right) = t$, para $|t| < \varepsilon$ se sigue que,

$$\Gamma_{-t} := \left\{x \in S_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma; \eta(x) = t\right\}, \ -\varepsilon < t \leq 0,$$

es una familia de variedades $(N-1)$-dimensionales de clase C^k contenidas en $\overline{\Omega}$. Claramente $\Gamma_0 = \Gamma$. Se puede probar que Γ_δ (con $\delta = -t$, $0 < \delta < \varepsilon$) es la frontera de la subregión $\Omega_\delta \subset \Omega$, definida por $\Omega_\delta := \{x \in \Omega; d(x) > \delta\}$, $0 < \delta < \varepsilon$.
Saquemos algunas conclusiones de las discusiones anteriores:

(**A**) Si Ω es una región de clase C^k con $2 \leq k \leq \infty$, entonces los puntos de $\Gamma := \partial\Omega$ cumplen la propiedad de bola interior uniforme, es decir, existe un $\overline{\delta} > 0$ tal que para todo $x' \in \Gamma$

se tiene

$$\Gamma \cap \overline{B}_{\overline{\delta}}(x) = \{x'\},$$

donde $\overline{B}_{\overline{\delta}}(x')$ es una bola euclidea cerrada de radio $\overline{\delta}$ y centro en $x \in \Omega$ contenida en $\Omega \cup \{\overline{x}\}$. Esto se sigue de los resultados anteriores tomando $0 < \overline{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, $x = \overline{x} - \overline{\delta}\nu(\overline{x})$, donde $\overline{x} = x'$

Es claro también del Teorema 1.1.1 que para $\overline{\delta}$ y todo $x \in \Omega$ con $d(x) \leq \overline{\delta}$ corresponde un punto más cercano $y \in \Gamma$, $d(x) = |x - y|$, con la propiedad de que la bola abierta con radio $\overline{\delta}$ y centro en $z = y + r\frac{x-y}{|x-y|}$ está contenida en Ω. Basta tomar, para x el punto $\overline{x} = p(x)$ y $r = -\overline{\delta}$, $0 < \overline{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$. Esta propiedad se llamará en la Sección 1.2 la propiedad de bola interior uniforme fuerte de Ω.

(B) Si Ω es un dominio regular de clase C^k con $2 \leq k \leq \infty$, es decir, es una región regular conexa, entonces, para $0 < \delta < \varepsilon$ el abierto $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x) > \delta\} \subset \Omega$ también es un dominio regular de clase C^k. Para probar esto basta mostrar que existe una retracción de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{\Omega_\delta}$, donde $\overline{\Omega}$ es un conexo. Para eso consideramos la aplicación $r : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega_\delta}$ definida para $x \in \overline{\Omega}$ por

$$r(x) = \begin{cases} p(x) + l(\eta(x))\,\nu(p(x)), \text{ si } x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_\delta \\ x, \text{ si } x \in \Omega_\delta \end{cases},$$

y donde $l : [-\delta, 0] \to \mathbb{R}$, es la función constante $t \to l(t) = -\delta$. Claramente r resulta continua y así es una retracción de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{\Omega_\delta}$. Por lo tanto $\overline{\Omega_\delta}$ es conexo. Ahora como Ω_δ es reunión de una sucesión monótona creciente de conjuntos, $\overline{\Omega_s}$ con $\delta < s < \varepsilon$ resulta que Ω_δ es conexo.

(C) En [LM], Teorema 11.3, se prueba la siguiente versión de la desigualdad de Hardy-Sobolev:

Teorema 1.1.3 *Sea Ω una región de clase C^∞ y ρ una función de clase C^∞ en $\overline{\Omega}$, positiva en Ω, $\rho(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$ y del mismo orden de $d(x, \partial\Omega)$, es decir, tal que $\lim_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{d(x,\partial\Omega)} = \tau \neq 0$ si $x_0 \in \partial\Omega$. Entonces, la aplicación $u \to \frac{u}{\rho}$ es continua de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, es decir, existe*

una constante $C > 0$ *tal que*

$$\left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^2}, \, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

(Las definiciones de $H_0^1(\Omega)$ y $C^\infty(\overline{\Omega})$ se encuentran a continuación de esta observación). Indiquemos brevemente como se puede obtener la desigualdad en el teorema anterior reemplazando la función ρ por la función $x \to d(x, \partial\Omega) = d(x)$ para Ω de clase C^∞. En $S_\varepsilon^-(\Gamma) \cup \Gamma$ se tiene $\eta(x) = -d(x)$. Con eso, la distancia d es de clase C^∞ en el abierto $S_\varepsilon^-(\Gamma) = \left\{x \in \overline{\Omega}; 0 < d(x) < \varepsilon\right\} \subset \overline{\Omega}$ y sus derivadas parciales, de todos los órdenes, tienen extensión continua a Γ. Se construye una función $c : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, de la siguiente manera: sea $\alpha : [0, diam(\Omega)] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in C^\infty([0, diam(\Omega)])$, tal que

$$\alpha(t) = \begin{cases} t, \, 0 \leq t < \frac{\varepsilon}{2} \\ diam(\Omega), \, \frac{2}{3}\varepsilon < t \leq diam(\Omega) \end{cases}$$

y tal que $\alpha(t) \geq t$, $\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{2}{3}\varepsilon$. Es claro que se puede construir α. Se define $c(x) := \alpha(d(x))$ y con eso $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y c restringido a $\overline{\Omega} \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$ coincide con d. Como $0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq d(x) \leq diam(\Omega)$ para $x \in \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$, existe $k > 1$ tal que $c(x) \leq kd(x)$, $x \in \overline{\Omega}$. Con eso se sigue que el Teorema 1.1.3 es válido con $\rho = d$.

En el Capítulo 2 supondremos, por simplicidad, que Ω es un dominio regular de clase C^∞ (dominio suave). Definamos ahora algunos espacios de funciones que utilizaremos
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω. En lo siguiente $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ con $\alpha_i \geq 0$ entero se dice un multi índice, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, y

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi, \text{ para } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Consideramos para $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$ los espacios de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega); \forall \alpha, \, |\alpha| \leq m, \, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

Se escribe $D^\alpha u := g_\alpha$. El espacio $W^{m,p} := W^{m,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

es un espacio de Banach. Para $p = 2$ se escribe, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. $H^m(\Omega)$ dotado con el producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert.

Para nuestros propósitos bastará considerar sólo los espacios con $m = 2$, $p \geq 1$, $W^{2,p}(\Omega)$, y $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$, $m = 1$, $p = 2$.

Se define $H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, y su dual topológico, para $m = 1$, se designa por $H^{-1}(\Omega)$.

La expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}}$. Sobre $H_0^1(\Omega)$ la expresión $\int \nabla u \nabla v$ es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente a la norma $\|u\|_{H^1}$.

Si $C^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas infinitamente diferenciables en Ω, entonces designamos por $C^\infty(\overline{\Omega})$ al espacio de las funciones continuas en $\overline{\Omega}$, infinitamente diferenciables en Ω y tal que todas sus derivadas parciales se extienden en forma continua a $\overline{\Omega}$.

Finalmente definamos para $0 < \nu \leq 1$:

$$C^{0,\nu}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega});\ \sup\left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\nu};\ x, y \in \Omega,\ x \neq y \right\} < \infty \right\},$$

el espacio de las funciones Hölder-continuas con exponente ν sobre $\overline{\Omega}$, dotado con la norma

$$\|u\|_{C^{0,\nu}} = \|u\|_{L^\infty} + \sup\left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\nu};\ x, y \in \Omega,\ x \neq y \right\},$$

y además, para $m = 1$,

$$C^{1,\nu}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega});\ D^\alpha u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \forall \alpha:\ |\alpha| = 1 \right\},$$

dotado con la norma

$$\|u\|_{C^{1,\nu}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{|\alpha|=1} \left\{ \sup_{x,y\in\mathbb{R};\ x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} \right\}.$$

Resulta que $C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$ y $C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$ son espacios de Banach.

En el Capítulo 2, para la prueba del Lema 2.1.1 y del Teorema 2.2.2, se empleará la siguiente descomposición para una función $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$:

$$f = f^+ - f^-$$

donde,

$$f^+ = \max(f, 0) \text{ y } f^- = \max(-f, 0),$$

de esta forma,

$$|f| = f + 2f^- \tag{1.2}$$

A continuación se presentan, en la Sección 1.2, algunos resultados clásicos del Análisis Funcional y de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, y en la Sección 1.3 algunos resultados adicionales que serán empleados en el Capítulo 2 para el problema planteado en la Introducción.

1.2 RESULTADOS CLÁSICOS

Teorema 1.2.1 ***(Poincaré con Constante Óptima)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. Entonces*

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el menor valor propio del operador $-\Delta$ en H_0^1.

Prueba. [MZ], Proposición 8, pág. 242. ■

Teorema 1.2.2 ***(Desigualdad de Harnack)*** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y $K \subset \Omega$ un compacto. Entonces existe un $C > 0$ tal que para toda función armónica u en Ω con $u \geq 0$ se cumple*

$$\max_K u \leq C \min_K u \Leftrightarrow \forall p, q \in K :\ u(p) \leq C u(q)$$

Prueba. [DL], Proposición 12, pág. 252. ■

Teorema 1.2.3 ***(Fórmulas de Valor Medio Para Funciones Armónicas)*** *Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica, es decir $\Delta u = 0$ en Ω, y $N\alpha(N)$ denota el área superficial de la esfera unitaria $\partial B(0,1)$ en $\mathbb{R}^N$ entonces:*

$$u(x) = \frac{1}{N\alpha(N)r^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,r)} uds = \frac{1}{\alpha(N)r^N} \int\limits_{B(x,r)} udy \text{ para cada } B(x,r) \subset \Omega$$

Prueba. [E], Teorema 2, pág. 25. ■

Definición 1.2.1 *Sea L el operador diferencial de segundo orden*

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i u_{x_i} + cu$$

donde los coeficientes a^{ij}, b^i, c son continuos y acotados y $a^{ij} = a^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq N$ en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Decimos que el operador L es uniformemente elíptico en Ω si existe una constante $\theta > 0$ tal que $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta |\xi|^2$ para todo $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Prueba. [E], Teorema 3, pág. 301. ■

Teorema 1.2.4 ***(Regularidad de la Solución Débil)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado de clase C^2. Supongamos que:*

a) $a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ y $f \in L^2(\Omega)$

b) $u \in H_0^1(\Omega)$ *es solución débil del problema elíptico*

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ en } \Omega \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Entonces

$$u \in H^2(\Omega) \text{ y } \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

con una constante $C > 0$ que sólo depende de Ω y de los coeficientes de L.

Nota 1.2.1 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil del problema, entonces el estimativo queda simplificado así:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Prueba. [E], Teorema 4, pág. 317. ■

Teorema 1.2.5 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^1, entonces existe una única solución clásica, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, de*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ en } \Omega \\ u &= g \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

para todo $g \in C(\partial\Omega)$. En realidad $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y si Ω es de clase C^∞ se tiene $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Prueba. [DL], Corolario 2, pág. 340. ■

Consideremos ahora el operador L en la forma no divergente

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i u_{x_i} + cu \tag{1.3}$$

donde los coeficientes a^{ij}, b^i, c son continuos y acotados en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Además, supongamos que L es uniformemente elíptico en Ω, es decir que existe $\theta > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ para todo $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Supongamos que la matriz $a = [a^{ij}]$ es simétrica.
Observemos que si los coeficientes a^{ij} son funciones $C^1(\overline{\Omega})$ entonces un operador L dado en la forma de la Definición 1.2.1 se puede escribir en forma no divergente y viceversa.

Definición 1.2.2 *Si $u \in C^2(\Omega)$ entonces se dice que u es una subsolución de L en Ω si $Lu \leq 0$ en Ω y una supersolución u de L en Ω si $Lu \geq 0$ en Ω. En el caso $L = -\Delta$ una subsolución (respectivamente una supersolución) se dice también subarmónica (respectivamente superarmónica).*

Teorema 1.2.6 ***(Principio del Máximo (Mínimo) Débil para*** $c \equiv 0$***)*** *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto no vacío y acotado,* L *el operador uniformemente elíptico (1.3) con* $c \equiv 0$ *en* Ω *y* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*. Entonces*

a) *Si* $Lu \leq 0$ *en* Ω *entonces* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$*. (Principio del Máximo).*
En particular, si $u \leq 0$ *en* $\partial\Omega$*, entonces* $u \leq 0$ *en* $\overline{\Omega}$*.*

b) *Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω *entonces* $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$*. (Principio del Mínimo).*
En particular, si $u \geq 0$ *en* $\partial\Omega$*, entonces* $u \geq 0$ *en* $\overline{\Omega}$*.*

Nota 1.2.2 *Si se tiene en a)* $Lu \leq 0$ *en* Ω *y* $u \geq 0$ *en* $\partial\Omega$ *(respectivamente en b)* $Lu \geq 0$ *en* Ω *y* $u \leq 0$ *en* $\partial\Omega$*) entonces el Teorema 1.2.6 sigue válido para* $c(x) \geq 0$ *en* Ω*.*

Prueba. [E], Teorema 1, pág. 327. ■

La denominación "débil" en el teorema anterior se refiere a que u toma un máximo (respectivamente mínimo) en la frontera de Ω pero no se excluye que pueda tomarlo en Ω.

Complementamos el resultado anterior con

Teorema 1.2.7 ***(Principio del Máximo (Mínimo) Fuerte para*** $c \equiv 0$***)*** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto y conexo,* Ω *no necesariamente acotado, y* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tal que* u *no es constante.*

a) *Si* $Lu \leq 0$ *en* Ω *entonces* u *no puede alcanzar su máximo absoluto en el interior de* Ω *(Principio del Máximo Fuerte).*

b) *Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω *entonces* u *no puede alcanzar su mínimo absoluto en el interior de* Ω *(Principio del Mínimo Fuerte).*

Prueba. [GT], [PW]. ■

Corolario 1.2.8 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es un dominio acotado,* L *el operador elíptico (1.3) con* $c(x) \geq 0$ *en* Ω *y* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *no constante. Si* $Lu \geq 0$ *en* Ω *y* $u \geq 0$ *en* $\partial\Omega$ *entonces* $u > 0$ *en* Ω*.*

Definición 1.2.3 *Decimos que el conjunto* Ω *satisface la condición de bola interior uniforme si existe un* $r > 0$ *tal que para todo punto* $x \in \partial\Omega$ *existe una bola abierta de radio* r *dentro de* Ω *cuya clausura toca la frontera de* Ω *sólo en* x*. Usando la notación* $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$*,* $x \in \Omega$*,*

se dice que el conjunto Ω satisface la condición de bola interior uniforme en el sentido fuerte, si para algún $r > 0$, y todo punto $x \in \Omega$ con $d(x) \leq r$ corresponde un punto más cercano $y \in \partial\Omega$, $d(x) = |x - y|$, con la propiedad de que la bola abierta con radio r y centro en $z = y + \frac{r(x-y)}{|x-y|}$ está contenida en Ω.

Nota 1.2.3 *Se puede probar, si Ω es una región regular de clase C^k ,$2 \leq k \leq \infty$, entonces Ω tiene la propiedad de bola interior uniforme en el sentido fuerte. Esto es una consecuencia inmediata de la existencia de una vecindad tubular para tales regiones (ver observación (A) que sigue a Teorema 1.1.2).*

Teorema 1.2.9 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado que satisface la condición de bola interior uniforme en el sentido fuerte, L el operador uniformemente elíptico de (1.3) con $c(x) = 0$ en Ω y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface*

$$Lu \geq 0 \text{ y } u > 0 \text{ en } \Omega.$$

Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$u(x) \geq \delta d(x) \text{ en } \Omega$$

donde $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

Prueba. Se deduce de un resultado más general en [Ba] y que se debe a [W]. ■

1.3 RESULTADOS ADICIONALES

Para operadores de superposición (operadores de Nemietzky) se tiene el siguiente resultado que es un caso particular de un teorema de Vainberg, [V], [K], y que basta para nuestros propósitos:

Teorema 1.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y sea f tal que:*

a) $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, *y*

b) *Existen constantes r, $s \geq 1$ y a_1, $a_2 \geq 0$ tales que $|f(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{r}{s}}$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$.*

Entonces la aplicación $\varphi(x) \to f(x,\varphi(x))$, $x \in \Omega$, $\varphi \in L^r(\Omega)$, *pertenece a* $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.

Prueba. [R], Proposición B.1, pág. 89. ■

Como ya se mencionó, de la desigualdad de Poincaré, se sigue que en $H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \text{ para } u, v \in H_0^1(\Omega),$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$, y $\|u\|^2 := \langle u, v\rangle_{H_0^1}$ es una norma equivalente en $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.3.2 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado,* $N > 2$ *y* $f \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ *con* $|f(x,\xi)| \leq a|\xi|^p + b$, *donde* a, b *son constantes y* $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$. *Entonces el operador* $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *dado por* $\langle Tu, \varphi\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega f(x,u)\varphi dx$, $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ *está bien definido y es compacto.*

Prueba. Veamos primero que para toda $u \in H_0^1(\Omega)$ el funcional $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x,u)\varphi$ es continuo en $H_0^1(\Omega)$, con lo cual, por el teorema de representación de Riesz-Fréchet en $H_0^1(\Omega)$ ([B1] Teorema V.5), existe $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle Tu, \varphi\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Con eso, $u \to Tu$ estaría bien definido. Veamos entonces que $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x,u)\varphi$ es continuo en $H_0^1(\Omega)$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Ahora bien, $p < \frac{N+2}{N-2} \Leftrightarrow p+1 < \frac{2N}{N-1}$. Sea $p+1 < s_1 \leq \frac{2N}{N-1}$. Empleando el Corolario IX.14, pág. 168 de [B1], $u \in L^{s_1}(\Omega)$. Usando el Teorema 1.3.1 con $r = s_1$ y $s = \frac{s_1}{p}$, $f(x,u) \in L^s(\Omega)$. Pero $s = \frac{s_1}{p} > \frac{s_1}{s_1 - 1} =: r_1$, con lo cual $f(x,u) \in L^{r_1}(\Omega)$. Como r_1 es el exponente conjugado de $r = s_1$ se aplica la desigualdad de Hölder y se sigue, usando el encaje continuo $H_0^1(\Omega) \subset L^{s_1}(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega f(x,u)\varphi\right| \leq \|f(x,u)\|_{L^{r_1}} \|\varphi\|_{L^{s_1}} \leq C\|f(x,u)\|_{L^{r_1}} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Veamos ahora que T es compacto. Recordemos que T es compacto si lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Para probar esto, en nuestro caso, basta mostrar que T lleva sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes. Sea por

lo tanto $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente en $H_0^1(\Omega)$, $u_k \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov ([B1] Teorema IX.16, pág. 169) $H_0^1(\Omega) \subset L^{s_1}(\Omega)$ para todo $s_1 \in [1, \frac{2N}{N-2})$ (con inyección compacta), entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $L^{s_1}(\Omega)$, $u_k \to u \in L^{s_1}(\Omega)$. Tomemos $s_1 \in \left(p+1, \frac{2N}{N-2}\right)$ y sea r_1 tal que $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{s_1} = 1$, es decir,

$$\frac{1}{r_1} = 1 - \frac{1}{s_1} = \frac{s_1 - 1}{s_1} \Leftrightarrow r_1 = \frac{s_1}{s_1 - 1}.$$

Ahora, por dualidad, ([B1], Corolario I.4 y Teorema de Riesz-Frechet).

$$\begin{aligned} \|Tu_k - Tu\|_{H_0^1(\Omega)} &= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \langle Tu_k - Tu, \varphi\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \int_\Omega [f(x,u_k) - f(x,u)]\,\varphi dx, \end{aligned}$$

y aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |[f(x,u_k) - f(x,u)]\,\varphi|\,dx &\leq \left(\int_\Omega |f(x,u_k) - f(x,u)|^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \\ &= \|f(x,u_k) - f(x,u)\|_{L^{r_1}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{s_1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nuevamente, por el Teorema de Rellich-Kondrachov $\|\varphi\|_{L^{s_1}(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, luego:

$$\int_\Omega |[f(x,u_k) - f(x,u)]\,\varphi|\,dx \leq C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \|f(x,u_k) - f(x,u)\|_{L^{r_1}(\Omega)}.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \|Tu_k - Tu\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left[C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \|f(x,u_k) - f(x,u)\|_{L^{r_1}(\Omega)}\right] \\ &= C\|f(x,u_k) - f(x,u)\|_{L^{r_1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ahora, empleando el Teorema 1.3.1, con $r = s_1$, es decir, $\frac{s_1}{s} = p \iff s = \frac{s_1}{p}$, se tiene que $\psi(x) \to f(x,\psi(x)) \in C(L^{s_1}(\Omega), L^{\frac{s_1}{p}}(\Omega))$. Luego, $f(\cdot,u_k) \to f(\cdot,u)$ en $L^{\frac{s_1}{p}}(\Omega)$. Como $r_1 = \frac{s_1}{s_1-1} < \frac{s_1}{p}$, entonces $L^{\frac{s_1}{p}}(\Omega) \subset L^{r_1}(\Omega)$ y así $f(\cdot,u_k) \to f(\cdot,u)$ en $L^{r_1}(\Omega)$, es decir,

$\|f(x,u_k)-f(x,u)\|_{L^{r_1}(\Omega)} \to 0$. Por lo tanto, $\|Tu_k - Tu\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, es decir $Tu_k \to Tu$ en $H_0^1(\Omega)$. Luego T es compacto. ■

Nota 1.3.1 *Para $N > 2$ se tiene que $\frac{N+1}{N-1} < \frac{N+2}{N-2}$, con lo cual el teorema anterior es válido para $1 \leq p < \frac{N+1}{N-1}$ y se sigue por el Corolario IX.14, pág. 168 de [B1] y el Teorema 1.3.1 para $u \in H_0^1(\Omega)$, $f(u) \in L^s(\Omega)$ para algún $s \geq 2$.*

En $H_0^1(\Omega)$ consideramos el cono $K^+ := \{u \in H_0^1(\Omega); u \geq 0\}$. Designemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$. Para $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$, decimos que $u \in K^+$ tal que

$$\langle -\Delta u - f, v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K^+ \tag{1.4}$$

es solución en K^+ de la desigualdad variacional (1.4).

Se tiene el importante resultado de regularidad para tales desigualdades variacionales:

Teorema 1.3.3 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de frontera suave, $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$, y $u \in K^+$ solución de la desigualdad $\langle -\Delta u - f, v - u \rangle \geq 0$, para toda $v \in K^+$. Entonces existe un único $u \in K^+ \cap W^{2,p}(\Omega)$ solución de la desigualdad (1.4) y se tiene $\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f\|_{L^p}$.*

Prueba. [B2], Teorema I.1, pág. 7 (con $\Psi = 0$). ■

Otro resultado de regularidad importante es:

Teorema 1.3.4 ***(Agmon, Douglis, Nirenberg)*** *Sea Ω de clase C^2 con $\partial\Omega$ acotada y $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, y $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución débil de*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x), \text{ en } \Omega \\ u &= 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

entonces $u \in W^{2,p}(\Omega)$ y $\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f\|_{L^p}$.

Prueba. [*MZ*], Teorema 3, pág. 230. ■

Proposición 1.3.5 ***(Desigualdad de Hardy-Sobolev en $L^2(\Omega)$)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ una región regular de clase C^∞ y $d(x) := d(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{v}{d} \right\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Nota 1.3.2 *Esta desigualdad es caso particular de la desigualdad*

$$\left\|\frac{v}{d}\right\|_{L^p} \leq C\,\|\nabla v\|_{L^p}\,,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

que se cita en [B1], pág. 194, incluso con la hipótesis de regularidad de clase C^1 en Ω .
Para el caso $p = 2$, que sólo interesa aquí, se da como referencia [LM], Teorema 11.3, pág. 59 que tiene la hipótesis Ω región regular de clase C^∞, y no se aplica directamente a la función distancia d ya que ésta no es de clase $C^\infty(\overline{\Omega})$ y así no satisface la hipótesis del Teorema 11.3.
El teorema en [LM] se puede usar junto con la existencia de una vecindad tubular, con Ω suave, para probar la Proposición 1.3.5 (ver observación (C) a continuación del Teorema 1.1.2).
Con la Proposición 1.3.5 podemos probar ([BT], Lema 2.2), el siguiente lema

Lema 1.3.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ una región que satisface las hipótesis de la Proposición 1.3.5 y $v \in H_0^1(\Omega)$ con $0 \leq \tau \leq 1$ y $N \geq 3$, entonces:*

$$\left\|\frac{v}{d^\tau}\right\|_{L^q} \leq C\,\|\nabla v\|_{L^2} \ \textit{donde}\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$$

Prueba. Consideremos primero el caso $\tau = 0$. Por el Corolario IX.14, pág. 168 de [B1] y la desigualdad de Poincaré

$$\|v\|_{L^q} \leq C\,\|v\|_{H_0^1} \leq C\,\|\nabla v\|_{L^2} \ \text{donde}\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$$

y se sigue el Lema.

Para el caso $\tau = 1 \Leftrightarrow q = 2$, el resultado se sigue de la Proposición 1.3.5. Sea ahora, para $0 < \tau < 1$. Se tiene $\frac{v}{d} \in L^2$ por Proposición 1.3.5 y $v \in L^{\frac{2N}{N-2}}$ por el teorema de encaje. Sea $r := \frac{2}{\tau}$ entonces $\frac{|v|^\tau}{d^\tau} = \left|\frac{v}{d}\right|^\tau \in L^r(\Omega)$. Como $v \in L^{\frac{2N}{N-2}}$ se sigue que $|v|^{1-\tau} \in L^{\frac{2N}{N-2}}$. Definamos $s := \frac{2N}{N-2}\frac{1}{1-\tau}$ y definamos

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{\tau}{2} + (1-\tau)\frac{N-2}{2N} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\tau)}{N} \leq 1.$$

Podemos aplicar la desigualdad de Hölder generalizada, ([B1], Nota 2, pág. 57), de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v}{d^\tau}\right\|_{L^q} &\leq \left\|\left|\frac{v}{d}\right|^\tau\right\|_{L^r}\left\||v|^{1-\tau}\right\|_{L^s} \\
&= \left\|\frac{v}{d}\right\|_{L^{\tau r}}^{\tau}\|v\|_{L^{(1-\tau)s}}^{1-\tau} \\
&= \left\|\frac{v}{d}\right\|_{L^2}^{\tau}\|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}^{1-\tau} \\
&\leq C\|\nabla v\|_{L^2}^{\tau}\|\nabla v\|_{L^2}^{1-\tau}, \ \frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1-\tau}{N}.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado la Proposición 1.3.5 y el teorema de encaje en $H_0^1(\Omega)$.

■

Capítulo 2

ESTIMATIVOS A PRIORI Y SOLUCIONES POSITIVAS

En este Capítulo, que consta de dos secciones $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio suave. Se considera en $H_0^1(\Omega)$ el cono K^+ definido por $K^+ := \{u \in H_0^1(\Omega); u \geq 0\}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará la dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

En la Sección 2.1 se prueban estimativos a priori para las soluciones $u \in K^+$ de la desigualdad variacional

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K^+,$$

donde $s \geq 0$ y Φ es la función propia positiva de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ correspondiente al menor valor propio $\lambda_1 > 0$.

Con estos estimativos se prueba, en la Sección 2.2, el resultado principal de este trabajo: el problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

tiene una solución.

Por simplicidad (para no distinguir casos) consideraremos el caso $N \geq 3$. Los resultados se pueden probar también para $N = 2$.

En las pruebas de los siguientes resultados denotaremos por C y K diversas constantes positivas que sólo dependen de Ω y f o de Ω y E (donde E es la función del Teorema 2.2.2) según sean las hipótesis.

2.1 ESTIMATIVOS A PRIORI PARA LAS SOLUCIONES DE UNA DESIGUALDAD VARIACIONAL

Lema 2.1.1 *Sea $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ que satisface:*

(A1) *f cruza el primer valor propio λ_1 del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$; es decir:*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$$

(A2) *$|f(t)| \leq C(1 + |t|^\alpha)$, donde $\alpha < \frac{N+1}{N-1}$*

Existe $\lambda > 0$ tal que $f \geq -\lambda$.

Entonces existe una constante $R = R(f, \Omega) > 0$ tal que para toda $s \geq 0$ y para toda solución $u \in K^+$ de la desigualdad:

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, v - u\rangle \geq 0, \ \forall v \in K^+ \tag{2.1}$$

se tienen los estimativos a priori

$$\|\nabla u\|_{L^2} < R \ \ y \ \ \|u\|_{L^\infty} < R.$$

Nota 2.1.1 *Si definimos $\beta := \frac{N+1}{N-1}$ entonces es claro que de (A2) se sigue $\liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^\beta} = 0$.*

Prueba. La prueba se desarrollará en dos partes:

i) En primer lugar veamos que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2} < R$:
Sean $s \geq 0$ y u una solución de (2.1). Tomando $v = u + \Phi \in K^+$ en (2.1) se obtiene:

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, \Phi\rangle \geq 0$$

es decir:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\Phi - \int_\Omega f(u)\Phi - s\int_\Omega \Phi^2 \geq 0,$$

de donde se obtiene, integrando por partes,

$$\int_\Omega u(-\Delta\Phi) - \int_\Omega f(u)\Phi - s\int_\Omega \Phi^2 \geq 0.$$

Como

$$\int_\Omega u(-\Delta\Phi) = \int_\Omega u\lambda_1\Phi = \lambda_1\int_\Omega u\Phi,$$

obtenemos

$$\lambda_1\int_\Omega u\Phi - \int_\Omega f(u)\Phi - s\int_\Omega \Phi^2 \geq 0,$$

es decir,

$$\lambda_1\int_\Omega u\Phi \geq \int_\Omega f(u)\Phi + s\int_\Omega \Phi^2. \tag{2.2}$$

Ahora, de la condición (A1), se tiene que $\liminf_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > \lambda_1$, lo que equivale a que para todo $\epsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $f(t) > (\lambda_1+\epsilon)t - C_\varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Sea $\varepsilon > 0$.

Luego:

$$f(u)\Phi > (\lambda_1+\epsilon)u\Phi - C_\varepsilon\Phi,$$

y con eso

$$\int_\Omega f(u)\Phi > (\lambda_1+\epsilon)\int_\Omega u\Phi - C_\varepsilon\int_\Omega \Phi.$$

De esta forma, de la desigualdad (2.2) se tiene que

$$\lambda_1\int_\Omega u\Phi \geq \int_\Omega f(u)\Phi + s\int_\Omega \Phi^2 \geq (\lambda_1+\epsilon)\int_\Omega u\Phi - C_\varepsilon\int_\Omega \Phi + s\int_\Omega \Phi^2 \tag{2.3}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\int_\Omega u\Phi \geq \lambda_1\int_\Omega u\Phi + \epsilon\int_\Omega u\Phi - C_\varepsilon\int_\Omega \Phi + s\int_\Omega \Phi^2$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\int_\Omega u\Phi - C\int_\Omega \Phi + s\int_\Omega \Phi^2 \leq 0 \tag{2.4}$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega u\Phi \leq \frac{C\int_\Omega \Phi - s\int_\Omega \Phi^2}{\epsilon}.$$

Como $C_\epsilon \geq 0$ puede tomarse arbitrariamente grande, entonces $\int_\Omega u\Phi \leq C_1$ con $C_1 > 0$.

Con eso, de la primera parte de la desigualdad (2.3): $\int_\Omega f(u)\Phi \leq C_2$ con $C_2 > 0$ y , de la desigualdad (2.4), teniendo en cuenta que $\varepsilon \int_\Omega u\Phi \geq 0$, resulta $s \leq C_3$ con $C_3 > 0$.

De esta forma, existe $C = C(f,\Omega) > 0$ tal que para cualquier $u \in K^+$, solución de la desigualdad variacional (2.1), se tienen los estimativos a priori,

$$\int_\Omega u\Phi \leq C, \quad \int_\Omega f(u)\Phi \leq C, \ 0 \leq s \leq C. \tag{2.5}$$

Si tomamos ahora $v = 2u$ y $v = 0$ en la desigualdad (2.1), obtenemos

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, u\rangle \geq 0 \text{ y } \langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, u\rangle \leq 0,$$

lo que implica,

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, u\rangle = 0,$$

es decir,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - \int_\Omega f(u)u - s\int_\Omega \Phi u = 0,$$

$$\Leftrightarrow \|\nabla u\|^2_{L^2} = \int_\Omega f(u)u + s\int_\Omega \Phi u,$$

y con (2.5)

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq \int_\Omega f(u)u + C. \tag{2.6}$$

Sean ahora $\gamma := \frac{2}{N+1}$, $\beta := \frac{N+1}{N-1}$, $\widehat{f} := |f(u)|^\gamma \Phi^\gamma$, $\widehat{g} := \frac{|f(u)|^{1-\gamma}u}{\Phi^\gamma}$, $\widehat{p} := \frac{1}{\gamma} > 1$, $\widehat{q} := \frac{1}{1-\gamma}$.

Claramente, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Aplicando la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\int_\Omega |f(u)|\,u \le \left[\int_\Omega \left(|f(u)|^\gamma\,\Phi^\gamma\right)^{1/\gamma}\right]^\gamma \left[\int_\Omega \left(\frac{|f(u)|^{1-\gamma}\,u}{\Phi^\gamma}\right)^{1/(1-\gamma)}\right]^{1-\gamma}.$$

Como

$$\int_\Omega f(u)u \le \left|\int_\Omega f(u)u\right| \le \int_\Omega |f(u)|\,u,$$

se sigue

$$\int_\Omega f(u)u \le \left[\int_\Omega |f(u)|\,\Phi\right]^\gamma \left[\int_\Omega \frac{|f(u)|\,u^{1/(1-\gamma)}}{\Phi^{\gamma/(1-\gamma)}}\right]^{1-\gamma}.$$

De (1.2) se tiene que

$$0 \le \int_\Omega |f(u)|\,\Phi = \int_\Omega f(u)\Phi + 2\int_\Omega f^-(u)\Phi$$

y de (A3)' se sigue $0 \le f^- < \lambda$, luego, con (2.5), se sigue $0 \le \int_\Omega |f(u)|\,\Phi \le C$ y así

$$\int_\Omega f(u)u \le C\left[\int_\Omega \frac{|f(u)|\,u^{1/(1-\gamma)}}{\Phi^{\gamma/(1-\gamma)}}\right]^{1-\gamma}.$$

Ahora, usando el estimativo $|f(t)| \le \epsilon t^\beta + C_\epsilon$, $t \ge 0$, el cual se sigue de (A2) con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y $C_\epsilon > 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u)u &\le C\left[\int_\Omega \frac{\left(\epsilon u^\beta + C_\epsilon\right)u^{1/(1-\gamma)}}{\Phi^{\gamma/(1-\gamma)}}\right]^{1-\gamma} \\ &\le C\epsilon^{1-\gamma}\left[\int_\Omega \frac{u^{\beta+1/(1-\gamma)}}{\Phi^{\gamma/(1-\gamma)}}\right]^{1-\gamma} + C_\epsilon\left[\int_\Omega \frac{u^{1/(1-\gamma)}}{\Phi^{\gamma/(1-\gamma)}}\right]^{1-\gamma}\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA "EFE" GOMEZ

$$= C\epsilon^{1-\gamma}\left[\int_\Omega \frac{u^{2\beta}}{\Phi^{\gamma\beta}}\right]^{1/\beta} + C_\epsilon\left[\int_\Omega \frac{u^{\beta}}{\Phi^{\gamma\beta}}\right]^{1/\beta}$$
$$= C\epsilon^{1-\gamma}\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma/2}}\right\|^2_{L^{2\beta}} + C_\epsilon\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma}}\right\|_{L^{\beta}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega f(u)u \leq C\epsilon^{1-\gamma}\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma/2}}\right\|^2_{L^{2\beta}} + C_\epsilon\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma}}\right\|_{L^{\beta}}. \tag{2.7}$$

Aplicando el Lema 1.3.6 con $\tau = \gamma/2$ se sigue:

$$\left\|\frac{u}{d^{\gamma/2}}\right\|_{L^q} \leq C\left\|\nabla u\right\|_{L^2},$$

$$\text{donde } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\gamma/2}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1-\frac{1}{N+1}}{N} = \frac{N-1}{2(N+1)} = \frac{1}{2\beta}.$$

Ahora, como $-\Delta\Phi = \lambda_1\Phi \geq 0$ y $\Phi > 0$ en Ω, por el Teorema 1.2.9, se concluye que existe $C > 0$, tal que $\Phi \geq Cd$ en Ω y con eso $\frac{1}{\Phi} \leq C\frac{1}{d}$. Luego $\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma/2}}\right\|_{L^{2\beta}} \leq C\left\|\nabla u\right\|_{L^2}$, y así

$$\left\|\frac{u}{\Phi^{\gamma/2}}\right\|^2_{L^{2\beta}} \leq C\left\|\nabla u\right\|^2_{L^2}. \tag{2.8}$$

Aplicando nuevamente el Lema 1.3.6 con $\tau = \gamma$ se obtiene:

$$\left\|\frac{u}{d^{\gamma}}\right\|_{L^r} \leq C\left\|\nabla u\right\|_{L^2}$$

$$\text{donde } \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1-\gamma}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1-\gamma}{\frac{2}{\gamma}-1} = \frac{2\gamma^2-3\gamma+2}{2(2-\gamma)}.$$

Es decir, $r = \frac{2(2-\gamma)}{2\gamma^2-3\gamma+2} = \frac{2-\gamma}{\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma+1}$. Como $N > 2$, entonces $\gamma = \frac{2}{N+1} < \frac{2}{3}$ y así:

$$\frac{3}{2}\gamma < 1 \Leftrightarrow \frac{6-3}{2}\gamma < 1 \Leftrightarrow 3\gamma - \frac{3}{2}\gamma < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\gamma < 1 - 3\gamma$$

De esta forma $r > \frac{2-\gamma}{\gamma^2+(1-3\gamma)+1} = \frac{2-\gamma}{(1-\gamma)(2-\gamma)} = \frac{1}{1-\gamma} = \beta$.

Luego $\left\|\frac{u}{d^\gamma}\right\|_{L^\beta} \leq C \left\|\frac{u}{d^\gamma}\right\|_{L^r} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$ y con $\frac{1}{\Phi} \leq C\frac{1}{d}$, se desprende,

$$\left\|\frac{u}{\Phi^\gamma}\right\|_{L^\beta} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \tag{2.9}$$

De (2.7), (2.8) y (2.9) se obtiene,

$$\int_\Omega f(u)u \leq C\epsilon^{1-\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_\epsilon \|\nabla u\|_{L^2},$$

y con (2.6):

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq C\epsilon^{1-\gamma} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_\epsilon \|\nabla u\|_{L^2} + C,$$

es decir

$$\left(1 - C\epsilon^{1-\gamma}\right) \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C_\epsilon \|\nabla u\|_{L^2} - C \leq 0.$$

Sea $g(x) := \left(1 - C\epsilon^{1-\gamma}\right) x^2 - C_\epsilon x - C$, para $x \geq 0$. La gráfica de $y = g(x)$ corresponde a una parábola que se "abre" hacia arriba cuando $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. De esta forma, considerando la condición $g(x) \leq 0$ se concluye que existe $K > 0$ tal que $x \leq K$ y así, existe $R > 0$ tal que $\|\nabla u\|_{L^2} < R$.

ii) Ahora veamos que $\|u\|_{L^\infty} < R$:

Sea $g(u) := f(u) + s\Phi$ en el Teorema 1.3.3. Entonces empleando la condición (A2) se cumple, si $g(u) \in L^p$ con $p \geq 2$:

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C(\|f(u) + s\Phi\|_{L^p}) \leq C \|f(u)\|_{L^p} + K \leq C \left\|1 + u^\beta\right\|_{L^p} + K \tag{2.10}$$

$$\leq C \left\|u^\beta\right\|_{L^p} + K = C \|u\|_{L^{p\beta}}^\beta + K \leq C(\|u\|_{L^{p\beta}}^\beta + 1),$$

con $\beta = \frac{N+1}{N-1}$ (ver Nota 2.1.1).

La prueba se hará mediante un proceso iterativo conocido en publicaciones en inglés como "Bootstrap Argument" (que podríamos llamar "Argumento Paso a Paso").

Primer paso:

Sea $q := \frac{2N}{N-2}$. Entonces se tiene que $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ (ver [B1] Corolario IX.14, pág. 168). Sea $\alpha_1 := p = q/\beta$, entonces como $f(u) \in L^p(\Omega)$ para cierto $p = \alpha_1 \geq 2$ se sigue de

(2.10): $\|u\|_{W^{2,\alpha_1}} \leq C(\|u\|_{L^q}^{\beta} + 1) \leq K$, es decir, $u \in W^{2,\alpha_1}(\Omega)$.

Si $N < 2\alpha_1$ (lo cual es cierto únicamente para $N = 3$ y $N = 4$), se concluye que $W^{2,\alpha_1}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$ (ver [B1] Corolario IX.15, pág. 169 con $m = 2$), es decir, $\|u\|_{L^{\infty}} \leq K \|u\|_{W^{2,\alpha_1}} \leq C$.

Si $N > 2\alpha_1$, entonces:

Segundo paso:

Por el Corolario IX.15 de [B1] se sigue que $W^{2,\alpha_1}(\Omega) \subset L^{\frac{N\alpha_1}{N-2\alpha_1}}(\Omega)$. Sea $\alpha_2 := \frac{N\alpha_1}{N-2\alpha_1}\frac{1}{\beta}$, entonces de (2.10): $\|u\|_{W^{2,\alpha_2}} \leq C(\|u\|^{\beta}_{L^{\frac{N\alpha_1}{N-2\alpha_1}}} + 1) \leq K$, es decir, $u \in W^{2,\alpha_2}(\Omega)$. Hay dos casos:

Si $N < 2\alpha_2$, entonces, nuevamente por el corolario IX.15 de [B1] se concluye que $W^{2,\alpha_2}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$, es decir, $\|u\|_{L^{\infty}} \leq K \|u\|_{W^{2,\alpha_2}} \leq C$.

Si $N > 2\alpha_1$, entonces:

Tercer paso:

Se regresa al paso 2 argumentando con α_2 y con $\alpha_3 := \frac{N\alpha_2}{N-2\alpha_2}\frac{1}{\beta}$ como se hizo con α_1 y α_2 respectivamente.

Se sigue así un proceso iterativo, definiendo $\alpha_k := \frac{N\alpha_{k-1}}{N-2\alpha_{k-1}}\frac{1}{\beta}$ en cada paso k. (Debe mencionarse que la expresión para α_k sólo tendrá sentido mientras $\alpha_{k-1} < \frac{N}{2}$).

Resta entonces probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2\alpha_m > N$, para todo $N > 4$:

Primero veamos que $\alpha_{k-1} < \alpha_k$ mientras $\alpha_{k-1} < \frac{N}{2}$ (claramente α_2 está definido pues $\alpha_1 < \frac{N}{2}$ para $N > 4$):

Sea k=2. $\frac{N}{2} > \alpha_1 > 2$ puesto que $\frac{2N}{N-2}\frac{N-1}{N+1} > 2 \Leftrightarrow N^2 - N > N^2 - N - 2 \Leftrightarrow 0 > -2$

y así, $2 < \alpha_1 = \frac{2N}{N-2}\frac{N-1}{N+1} < \frac{N\alpha_1}{N-2\alpha_1}\frac{N-1}{N+1} = \alpha_2$. Es decir, $\alpha_1 < \alpha_2$.

Supongamos ahora que $\alpha_{k-1} < \alpha_k < \frac{N}{2}$, entonces:

$\frac{N\alpha_{k-1}}{N-2\alpha k-1}\frac{N-1}{N+1} < \frac{N\alpha_k}{N-2\alpha_k}\frac{N-1}{N+1}$, es decir, $\alpha_k < \alpha_{k+1}$.

De esta forma, se ha probado inductivamente que $\alpha_{k-1} < \alpha_k$ mientras $\alpha_{k-1} < \frac{N}{2}$.

Además, si $2 < \alpha_k < \frac{N}{2}$, entonces $\alpha_{k+1} = \frac{N\alpha_k}{N-2\alpha_k}\frac{N-1}{N+1} \neq \frac{N}{2}$. En efecto:

$$\frac{N\alpha_k}{N-2\alpha_k}\frac{N-1}{N+1} = \frac{N}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_k(N-1) = (N-2\alpha_k)(N+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_k N - 2\alpha_k = N^2 + N - 2\alpha_k N - 2\alpha_k$$

$$\Leftrightarrow N^2 - 4N\alpha_k + N = 0$$

$$\Leftrightarrow N - 4\alpha_k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k = \frac{N+1}{2} > \frac{N}{2}$$

Consideremos ahora la función $h(x) := \frac{Nx}{N-2x}\frac{N-1}{N+1} - x$ con $2 \leq x < \frac{N}{2}$ la cual representa la diferencia entre entre α_{k+1} y α_k.

$$h(x) = \frac{(2N+2)x^2 - 2Nx}{(N-2x)(N+1)} \text{ con } 2 \leq x < \frac{N}{2}$$

$$h'(x) = \frac{(N-2x)(N+1)[4(N+1)x - 2N] - [2(N+1)x^2 - 2Nx][-2(N+1)]}{(N-2x)^2(N+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2(N-2x)(N+1)(2Nx + 2x - N) + 4x(Nx + x - 2N)(N+1)}{(N-2x)^2(N+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2(N-2x)[2x + N(2x-1)] + 4x[x + N(x-2)]}{(N-2x)^2(N+1)} > 0, \text{ para todo } x \in (2, \frac{N}{2})$$

Además $h(2) = \frac{4(N+2)}{(N+1)(N-4)} > 0$ para todo $N > 4$

Es decir, la diferencia $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ es positiva y creciente a medida que k aumenta.

Supongamos razonando por el absurdo, que no existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2\alpha_m > N$, entonces $2\alpha_k < N$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y así $h(\alpha_k)$ siempre está definido.

Sea $C_N = h(2) > 0$, entonces $h(\alpha_k) = \alpha_{k+1} - \alpha_k \geq C_N$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\alpha_k - \alpha_1 = \sum_{j=1}^{k-1}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \geq \sum_{j=1}^{k-1} C_N = (k-1)C_N$, entonces $2\alpha_k > N$ en contradicción de la hipótesis.

Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tal que $\alpha_k > \frac{N}{2}$.

Como $\alpha_1 > \frac{N}{2}$ para $N = 3$ y $N = 4$ se sigue que para todo $N \geq 3$ existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha_k > \frac{N}{2}$ y para ese $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $u \in W^{2,\alpha_k} \subset L^\infty$, es decir $\|u\|_{L^\infty} \leq K \|u\|_{W^{2,\alpha_2}} \leq R$

■

El siguiente Lema, da un estimativo inferior a priori para las soluciones no triviales de la desigualdad variacional.

Lema 2.1.2 *Sea $E \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ que satisface:*

(B1) *E cruza el primer valor propio λ_1 del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$; es decir:*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{E(t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{E(t)}{t}$$

(B2) *$E(t) \leq K_1(1 + |t|^\alpha)$, donde $\alpha < \frac{N+1}{N-1}$.*

Entonces existe una constante $r = r(E, \Omega) > 0$ tal que para toda $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ que satisface $f \leq E$ y para toda solución $u \in K^+$ no trivial de:

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u\rangle \geq 0,\ \forall v \in K^+ \tag{2.11}$$

se tiene que

$$\|\nabla u\|_{L^2} > r \ y\ \|u\|_{L^\infty} > r$$

Prueba. Supongamos, razonando por el absurdo que $\forall r > 0$, existe $u \in K^+$, solución no trivial de (2.11) con $\|\nabla u\|_{L^2} \leq r$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha > 1$. Sea $u \in K^+$ una solución no trivial de (2.11) con $f \leq E$. Entonces, haciendo $v = 2u$ y $v = 0$ en la desigualdad (2.11):

$$\langle -\Delta u - f(u), u\rangle \geq 0 \text{ y } \langle -\Delta u - f(u), u\rangle \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\langle -\Delta u - f(u), u\rangle = 0,$$

lo cual significa

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta u, u\rangle - \langle f(u), u\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - \int_\Omega f(u)u = 0 \\ \Leftrightarrow &\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega f(u)u. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ahora, de (B1), dado $0 < \varepsilon < \lambda_1$, existe t_0 tal que $E(t) \leq (\lambda_1 - \varepsilon)t$ para todo $t \leq t_0$, y como $f(t) \leq E(t)$ entonces,

$$\int\limits_{\{u \leq t_0\}} f(u)u \leq (\lambda_1 - \varepsilon) \int\limits_{\{u \leq t_0\}} u^2 \leq (\lambda_1 - \varepsilon) \int\limits_{\Omega} u^2, \tag{2.13}$$

y de (B2) dado que $f(t) \leq E(t)$:

$$\int\limits_{\{u > t_0\}} f(u)u \leq \int\limits_{\{u > t_0\}} K_1(1 + u^\alpha)u = \int\limits_{\{u > t_0\}} K_1(u^{\alpha+1} + u) \leq \int\limits_{\{u > t_0\}} K_2(u^{\alpha+1} + 1). \tag{2.14}$$

Reemplazando (2.13) y (2.14) en (2.12) se obtiene:

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int\limits_{\Omega} f(u)u = \int\limits_{\{u \leq t_0\}} f(u)u + \int\limits_{\{u > t_0\}} f(u)u \leq (\lambda_1 - \varepsilon) \int\limits_{\Omega} u^2 + \int\limits_{\{u > t_0\}} K_2(u^{\alpha+1} + 1).$$

Es decir,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (\lambda_1 - \varepsilon) \int\limits_{\Omega} u^2 + \int\limits_{\{u > t_0\}} K_2 u^{\alpha+1} + K_2 \int\limits_{\{u > t_0\}} 1 \tag{2.15}$$

y con Teorema 1.2.1 se obtiene

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\{u > t_0\}} K_2 u^{\alpha+1} + K_2 \int\limits_{\{u > t_0\}} 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \int\limits_{\{u > t_0\}} K_2 u^{\alpha+1} + K_2 \int\limits_{\{u > t_0\}} 1 \tag{2.16}$$

Como $\|\nabla u\|_{L^2}^2 > 0$, entonces, de (2.16) es claro que $med\{u > t_0\} > 0$. Del Lema 1.3.6 con $\tau = 0$ se sigue que $\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$ y como $\alpha + 1 < \frac{N+1}{N-1} + 1 = \frac{2N}{N-1} < \frac{2N}{N-2}$ obtenemos,

$$\left(\int\limits_{\Omega} u^{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \|u\|_{L^{\alpha+1}} \leq C \|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \tag{2.17}$$

Por lo tanto:

$$\int\limits_{\{u>t_0\}} K_2 u^{\alpha+1} \leq \int\limits_{\Omega} K_2 u^{\alpha+1} = K_2 \|u\|_{L^{\alpha+1}}^{\alpha+1} \leq K \|\nabla u\|_{L^2}^{\alpha+1} \leq \frac{\varepsilon}{3\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2 . \tag{2.18}$$

En la última desigualdad, si $K \leq \frac{\varepsilon}{3\lambda_1}$, el resultado se sigue con $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C_1$, donde $0 < C_1 < 1$, y si $K > \frac{\varepsilon}{3\lambda_1}$, el resultado se sigue con $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C_1$, donde $0 < C_1 = \left(\frac{\varepsilon}{3K\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 1$.

Ahora estimemos el último término en (2.16).

Sean $\widehat{f} := u^2$, $\widehat{g} := 1$, $\widehat{p} := \frac{\alpha+1}{2}$, $\widehat{q} := \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$. Claramente, $\frac{1}{\widehat{p}} + \frac{1}{\widehat{q}} = 1$. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder sobre Ω, se tiene:

$$\int\limits_{\Omega} u^2 \leq \left[\int\limits_{\Omega} u^{\alpha+1}\right]^{\frac{2}{\alpha+1}} \left[\int\limits_{\Omega} 1\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} = \left[\int\limits_{\Omega} u^{\alpha+1}\right]^{\frac{2}{\alpha+1}} med\,(\Omega)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \tag{2.19}$$

Aquí no se puede dar " = " ya que u es solución no trivial y $u \in H_0^1(\Omega)$ con lo cual, la relación $c_1 u^2 = c_2 1$, para casi todo $x \in \Omega$, $c_1, c_2 \neq 0$ no es posible.

Por lo tanto, se sigue la desigualdad estricta en la anterior desigualdad. Si $med\{u \leq t_0\} = 0$ se sigue en consecuencia

$$\int\limits_{\{u>t_0\}} u^2 < \left[\int\limits_{\Omega} u^{\alpha+1}\right]^{\frac{2}{\alpha+1}} med\{u > t_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \tag{2.20}$$

Por otro lado si $med\{u \leq t_0\} > 0$ la desigualdad de Hölder, aplicada sobre el conjunto $\{u > t_0\}$, da inicialmente

$$\int\limits_{\{u>t_0\}} u^2 \leq \left[\int\limits_{\{u>t_0\}} u^{\alpha+1}\right]^{\frac{2}{\alpha+1}} med\{u > t_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}},$$

y como $\int\limits_{\{u>t_0\}} u^{\alpha+1} < \int\limits_{\Omega} u^{\alpha+1}$ se tiene también, en este caso, la desigualdad (2.20).

Con

$$t_0^2 \int\limits_{\{u>t_0\}} 1 = \int\limits_{\{u>t_0\}} t_0^2 \leq \int\limits_{\{u>t_0\}} u^2$$

y (2.17), la desigualdad (2.20) implica

$$t_0^2 \int_{\{u>t_0\}} 1 < C^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2 \, med\{u > t_0\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \tag{2.21}$$

y se sigue como estimativo para el último término en (2.16)

$$med\{u > t_0\} < C \|\nabla u\|_{L^2}^{\alpha+1}.$$

Empleando esta última desigualdad y el mismo argumento con el que se obtuvo (2.18) se tiene que existe $C_2 \geq 0$ tal que para cualquier solución no trivial u con $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C_2$,

$$\int_{\{u>t_0\}} K_2 < \frac{\varepsilon}{3\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2. \tag{2.22}$$

De esta forma, u es tal que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq \min\{C_1, C_2\}$. De las desigualdades (2.16), (2.18) y (2.22) se obtiene

$$\varepsilon \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2 < \frac{\varepsilon}{3\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{3\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

$$\Leftrightarrow \|\nabla u\|_{L^2}^2 < 0,$$

lo cual es absurdo. De esta forma, se sigue que existe $C > 0$ tal que $\|\nabla u\|_{L^2} > C$.

Supongamos ahora, razonando nuevamente por el absurdo, que $\|u\|_{L^\infty} \leq t_0$. Entonces $u(x) \leq t_0$ para casi todo $x \in \Omega$ y de esta forma, el conjunto $\{x; u(x) > t_0\}$ tiene medida cero, lo cual es absurdo por (2.16). Se sigue entonces que $\|u\|_{L^\infty} > t_0$.

Tomando $r = \min(C, t_0)$ se sigue el resultado. ■

2.2 EXISTENCIA DE SOLUCIONES POSITIVAS

En esta sección probaremos la existencia de soluciones positivas de la desigualdad variacional y del problema semilineal. El siguiente teorema garantiza la existencia de una solución no trivial, $u \in K^+$, de la desigualdad variacional

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u \rangle \geq 0, \text{ para toda } v \in K^+.$$

Teorema 2.2.1 *Sea $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ que satisface:*

(A1) *f cruza el primer valor propio λ_1 del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$; es decir:*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t};$$

(A2) $|f(t)| \leq C(1+|t|^\alpha)$, *donde* $\alpha < \frac{N+1}{N-1}$

(A3)' *Existe $\lambda > 0$ tal que $f \geq -\lambda$.*

Entonces, para $u \in K^+$, la desigualdad

$$\langle -\Delta u - f(u), v-u\rangle \geq 0,\ \forall v \in K^+ \tag{2.23}$$

tiene una solución no trivial.

Prueba. Sea H el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ con el producto escalar $\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ y sea P la proyección de H en K^+. P está bien definida puesto que K^+ es convexo y cerrado. En efecto, sean u_1, $u_2 \in K^+$ y $t \in [0,1]$, entonces $tu_1 + (1-t)u_2 \in H$ pues H es espacio vectorial y como $t \geq 0$ y $1-t \geq 0$ entonces $tu_1 + (1-t)u_2 \geq 0$ y por lo tanto $tu_1 + (1-t)u_2 \in K^+$. Con esto K^+ resulta convexo. Veamos ahora que K^+ es cerrado: sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K^+ que converge a $u \in H$, luego $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en L^2. Por lo tanto existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. Como $u_{n_k}(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \Omega$ pues $u_{n_k} \in K^+$, se sigue $u(x) \geq 0$ para casi todo $x \in \Omega$. Luego $u \in K^+$.

A continuación completamos la demostración

Paso 1:

Sea $F : H \to H$ definido por $\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega f(Pu)v$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces la desigualdad (2.23) es equivalente a

$$u \in H : u - PF(u) = 0 \tag{2.24}$$

En efecto, supongamos que es cierta (2.24):

Como $u \in H$, entonces $F(u) \in H$ y $PF(u) \in K^+$ y con eso $u \in K^+$, $Pu = u$. Por lo tanto,

empleando la propiedad de caracterización de las Proyecciones sobre convexos cerrados (ver [B1] Teorema V.2, pág. 79),

$$\langle F(u) - PF(u), v - PF(u)\rangle_{H_0^1} \leq 0, \forall v \in K^+$$

$$\Leftrightarrow \langle F(u), v - PF(u)\rangle_{H_0^1} - \langle PF(u), v - PF(u)\rangle_{H_0^1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega f(Pu)(v - PF(u)) - \int_\Omega \nabla(PF(u)) \cdot \nabla(v - PF(u)) \leq 0$$

lo que significa

$$\langle f(Pu), v - PF(u)\rangle + \langle \Delta(PF(u)), v - PF(u)\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \Delta(PF(u)) + f(Pu), v - PF(u)\rangle \leq 0.$$

Es decir,

$$\langle -\Delta(PF(u)) - f(Pu), v - PF(u)\rangle \geq 0. \tag{2.25}$$

Por hipótesis

$$u - PF(u) = 0 \Leftrightarrow PF(u) = u$$

y así, de (2.25), se desprende,

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u\rangle \geq 0, \forall v \in K^+.$$

Supongamos ahora que, para $u \in K^+$, es cierta

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u\rangle \geq 0, \forall v \in K^+.$$

Entonces:

$$\langle \Delta u + f(u), v - u\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle f(u), v - u\rangle + \langle \Delta u, v - u\rangle \leq 0,$$

lo que significa

$$\langle F(u), v-u\rangle_{H_0^1} - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle F(u), v-u\rangle_{H_0^1} - \langle u, v-u\rangle_{H_0^1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle F(u)-u, v-u\rangle_{H_0^1} \leq 0,\ \forall v \in K^+.$$

Así, u es la proyección de $F(u)$ en K^+ (ver [B1] Teorema V.2, pág. 79), lo que significa

$$u = PF(u) \Leftrightarrow u - PF(u) = 0. \tag{2.26}$$

Paso 2:

En el paso anterior se ha reducido el problema a encontrar una solución $u \in K^+$ no trivial de la ecuación (2.26). Por Teorema el 1.3.2 sabemos que el operador $F : H \to H$ es compacto y con eso también PF. Aplicaremos el grado topológico de Leray-Schauder para resolver la ecuación (2.26). Podemos suponer, como en el Lema 2.1.2, que $\alpha > 1$ en (A2). Para las propiedades básicas y existencia del grado de Leray-Schauder para perturbaciones compactasde la identidad se puede consultar [MZ].

Sean $B_r := \{u \in H; \|u\|_H \leq r\}$ donde r es la constante en el Lema 2.1.2 y $H(t,u)$ la homotopía definida por $H(t,u) := u - tPF(u)$ con $t \in [0,1]$ y $u \in H$. Por el Lema 2.1.2 se sabe que para toda solución no trivial u de la desigualdad (2.23), es decir, para $u \in H$, $u \neq 0$, tal que $u - PF(u) = 0$ se tiene que $\|u\|_H > r$. Así, por la propiedad de invarianza bajo Homotopías,

$$\deg(I - PF, B_r, 0) = \deg(I, B_r, 0),$$

ahora, como $0 \in B_r$, $\deg(I, B_r, 0) = 1$; luego

$$\deg(I - PF, B_r, 0) = 1.$$

Es decir, $u - PF(u) = 0$ tiene solución en B_r pero ésta es la trivial. Consideramos ahora la familia $\{F_s\}_{s\geq 0}$ dada por $\langle F_s(u), v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega [f(Pu) + s\Phi]\, v$, $s \geq 0$, donde P denota la proyección sobre K^+ y Φ es la función propia positiva de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ correspondiente a λ_1. Claramente

$F_s = F + G_s$ donde $G_s : H \to H$ es el operador definido por $\langle G_s(u), v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega s\Phi v$. La imagen de $\overline{B_1}$ bajo el operador G_s es un conjunto unitario, el cual es compacto. De esta forma F_s, $s \geq 0$, es compacto.

Por la forma en que está definido F_s, se tiene que, para $u \in K^+$, la desigualdad

$$\langle -\Delta u - f(u) - s\Phi, v - u\rangle \geq 0, \forall v \in K^+$$

es equivalente a la ecuación

$$u \in H : u - PF_s(u) = 0.$$

para ver esto se procede de forma análoga a como se hizo con la equivalencia entre la desigualdad (2.23) y la ecuación (2.24).

Ahora, por el Lema 2.1.1, existe una constante positiva R tal que, para todo $s \geq 0$ y para toda $u \in H$, que cumpla $u - PF_s(u) = 0$, se tiene que $\|u\|_H < R$, y $s \leq R$. Por lo tanto, si $s > R$, la ecuación $u - PF_s(u) = 0$ no tiene soluciones y con eso,

$$\deg(I - PF_s, B_R, 0) = 0.$$

Ahora, considerando la homotopía $\widetilde{H}(t, u) := u - PF_t(u)$ con $t \in [0, s]$ y aplicando la propiedad de invarianza bajo homotopías, se tiene que

$$\deg(I - PF, B_R, 0) = \deg(I - PF_s, B_R, 0) = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $R > r$. Se tiene entonces, por la propiedad de aditividad del grado,

$$\deg(I - PF, B_R, 0) = \deg(I - PF, B_R \setminus B_r, 0) + \deg(I - PF, B_r, 0)$$

$$\begin{aligned} \deg(I - PF, B_R \setminus B_r, 0) &= \deg(I - PF, B_R, 0) - \deg(I - PF, B_r, 0) \\ &= 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen soluciones de $u - PF(u) = 0$ tales que $r < \|u\|_H < R$ y que con eso resultan ser no triviales. ■

Probamos ahora la existencia de una solución positiva de la desigualdad variacional que finalmente resultará ser solución del problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Teorema 2.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un dominio regular de clase C^∞ y $E \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ que satisface:*

(B1) *E cruza el primer valor propio λ_1 del operador $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$; es decir:*

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{E(t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to\infty} \frac{E(t)}{t}$$

(B2) *$E(t) \leq C(1 + |t|^\alpha)$, donde $\alpha < \frac{N+1}{N-1}$*

Entonces existe $\lambda = \lambda(E, \Omega) > 0$ tal que, para todo $f \in C(\mathbb{R}^+, [-\lambda, +\infty])$ que satisface

$$f \leq E \tag{2.27}$$

y

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > \lambda_1 \tag{2.28}$$

el problema semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ u > 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

tiene solución en $H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$, para cierto $\nu \in (0, 1)$.

Prueba. Sea $f \in C(\mathbb{R}^+, [-\lambda, +\infty])$ que satisface (2.27) y (2.28) y $u \in K^+$ una solución no trivial de

$$\langle -\Delta u - f(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K^+ \tag{2.29}$$

(cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.2.1). Probaremos primero que $u \in C^{1,\nu}(\Omega)$ y luego que $u > 0$ en Ω. Observe que las constantes C en la demostración siguiente no dependen de u.

Del Lema 2.1.1 se sabe que $u \in L^\infty(\Omega)$. Por lo tanto $u \in L^s(\Omega)$ para $1 \leq s < \infty$. Existe $p > N$ tal que $\alpha = \frac{s}{p} \Leftrightarrow p\alpha = s$ para algún $1 \leq s < \infty$. Además, empleando la propiedad (B2),

$$\|f(u)\|_{L^p} \leq C \|1 + u^\alpha\|_{L^p} \leq C_1 + C \|u\|^\alpha_{L^{p\alpha}} \leq C_1 + C_2 \|u\|^\alpha_{L^\infty}.$$

Luego $f(u) \in L^p$. Como $R > \|u\|_{L^\infty} > r > 0$, mediante un argumento geométrico, teniendo en cuenta la desigualdad anterior y el Teorema 1.3.3, obtenemos

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f(u)\|_{L^p} \leq C_1 + C_2 \|u\|^\alpha_{L^\infty} \leq C \|u\|^\alpha_{L^\infty} \tag{2.30}$$

con $p > N$. Por esto, del Corolario IX.15, pág. 169 de [B1] (con $m = 2$) se deduce que $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$ para algún $0 < \nu < 1$ y con (2.30) el estimativo

$$\|u\|_{C^{1,\nu}} \leq C \|u\|^\alpha_{L^\infty}. \tag{2.31}$$

Para lo siguiente se tomará p tal que $\alpha \leq \frac{N+\nu}{N-1}$, donde $\nu = 1 - \frac{N}{p}$.

Observar que $u \in H^1_0(\Omega) \cap C^{1,\nu}(\overline{\Omega})$ y por tanto $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$. Teniendo en cuenta esto, sea $x_0 \in \Omega$ tal que $K := u(x_0) = \max_{x \in \Omega} u(x)$. De acuerdo con el Lema 2.1.2, es claro que $K \geq r > 0$ para cualquier solución no trivial.

Probaremos primero que para $\varepsilon = CK^{-\frac{1}{N-1}}$ (con $C > 0$ adecuado) se tiene

$$\begin{cases} B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| < \varepsilon\} \subset \Omega \\ \qquad u(x) \geq \frac{K}{2}, \forall x \in B_\varepsilon(x_0). \end{cases} \tag{2.32}$$

En efecto, sea $x_1 \in \Omega$ tal que $|x_0 - x_1| = \min\left\{|x_0 - \bar{x}|\,; u(\bar{x}) = \frac{K}{2}\right\}$ y así $u(x_1) = \frac{K}{2}$. De $u \in C^{1,\nu}\left(\overline{\Omega}\right)$, se sigue que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y así, para $g(t) = u(x_0 + t(x_1 - x_0))$, $0 \leq t \leq 1$, se obtiene $g \in C^1[0,1]$ y $g'(t) = \nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)$. Por lo tanto

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$$

$$\Leftrightarrow u(x_1) - u(x_0) = \int_0^1 \nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)dt.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLO
SEDE MEDELLÍN
DEPTO. DE BIBLIOTEC
BIBLIOTECA "EFE" GOM

Se sigue, con $\nabla u(x_0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{K}{2} &= |u(x_1) - u(x_0)| \leq \int_0^1 |\nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0)) \cdot (x_1 - x_0)|\, dt \\
&\leq \int_0^1 |\nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0))|\, |x_1 - x_0|\, dt = \int_0^1 |\nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0)) - \nabla u(x_0)|\, |x_1 - x_0|\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{|\nabla u(x_0 + t(x_1 - x_0)) - \nabla u(x_0)|}{t^\nu |x_1 - x_0|^\nu} t^\nu |x_1 - x_0|^{\nu+1}\, dt \\
&\leq \int_0^1 \|u\|_{C^{1,\nu}} t^\nu |x_1 - x_0|^{1+\nu}\, dt \leq C \int_0^1 t^\nu |x_1 - x_0|^{\nu+1} K^\alpha dt
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha aplicado (2.31).

Se sigue

$$\frac{K}{2} \leq C |x_1 - x_0|^{\nu+1} K^\alpha$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_0|^{\nu+1} \geq C K^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_0| \geq C K^{\frac{1-\alpha}{1+\nu}}. \tag{2.33}$$

Ahora, como $K \geq r > 0$, entoncesentonces

$$K^{\frac{1-\alpha}{1+\nu}} \geq K^{-\frac{1}{N-1}},$$

y de (2.33) obtenemos

$$|x_1 - x_0| \geq C K^{-\frac{1}{N-1}} = \varepsilon,$$

con lo cual

$$B_\varepsilon(x_0) \subset \{x; |x - x_0| \leq |x_1 - x_0|\} \subset \Omega$$

y para todo $x \in \{x; |x - x_0| \leq |x_1 - x_0|\}$ se verifica $u(x) \geq \frac{K}{2}$. Se sigue entonces (2.32). Observe que $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ y así $f^-(u)$ es continua y acotada sobre $\overline{\Omega}$. Con eso $f^-(u) \in L^\infty \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta z = f^-(u) \text{ en } \Omega \\ z = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

el cual tiene solución única débil por el Teorema 3, pág. 28 de [E]. Como $f^-(u) \in L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ podemos aplicar el Teorema 1.3.4 y se sigue $z \in W^{2,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ y

$$\|z\|_{W^{2,p}} \leq C \left\|f^-(u)\right\|_{L^p}, \; 1 < p < \infty.$$

Con eso obtenemos, para $1 < p < \infty$

$$\|z\|_{W^{2,p}} \leq C \left\|f^-(u)\right\|_{L^p} \leq C \left\|f^-(u)\right\|_{L^\infty} \leq C \max_{\overline{\Omega}} f^-(u) \tag{2.34}$$

y para $p > N$ con el Corolario IX.15 de [B1] se tiene que $z \in C^{1,\nu}\left(\overline{\Omega}\right)$ y

$$\|z\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C \|z\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \tag{2.35}$$

Del Principio del Mínimo para Soluciones Débiles (ver [B1], Proposición IX.29) se obtiene además que $z \geq 0$. Como por hipótesis $f \geq -\lambda$, es decir, $f^- \leq \lambda$ se desprende de (2.34) y (2.35)

$$\|z\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\lambda. \tag{2.36}$$

Sea $w := u + z$. Se sigue, en el sentido débil,

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\Delta u - \Delta z \\ &= -\Delta u + f^-(u) \\ &= -\Delta u + f^+(u) - f(u), \end{aligned}$$

es decir, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\langle -\Delta w, \varphi \rangle = \langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle + \langle f^+(u), \varphi \rangle . \tag{2.37}$$

De (2.29) se obtiene

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle + \langle -\Delta u - f(u), -u \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \tag{2.38}$$

Tomando $v = 2u$ y $v = 0$ en la desigualdad (2.29) se sigue

$$\langle -\Delta u - f(u), u \rangle = 0, \tag{2.39}$$

y de (2.38) y (2.39),

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \tag{2.40}$$

Como $\langle f^+(u), \varphi \rangle \geq 0$, entonces, de (2.37) obtenemos

$$\langle -\Delta w, \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$$

y por densidad

$$\langle -\Delta w, \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in K^+.$$

Por lo tanto w es supersolución débil (o superarmónica) en Ω. Claramente $w \geq 0$ en Ω, $w \geq u$. Probaremos a continuación que $w > 0$ en Ω. Como Ω es un abierto regular, existe $\delta = \delta(\Omega) > 0$ tal que $\Omega_\delta := \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \delta\}$ es no vacío. Además, claramente Ω_δ es abierto.
Como $\partial\Omega$ posee una vecindad tubular podemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño que $\partial\Omega_\delta$ está contenido en esa vecindad. Se tiene así que Ω_δ es también una región regular de clase C^∞. Como Ω es conexo y $\overline{\Omega_\delta}$ es una retracción de $\overline{\Omega}$, Ω_δ es también conexo (ver observación (B) a continuación del Teorema 1.1.2). Además, es claro que si $B_\delta(x)$ es una bola centrada en $x \in \Omega$, entonces $\partial B_\delta(x) \cap \Omega_\delta \neq \emptyset$ para todo $x \in \Omega$.

Sea $y_0 \in \partial B_\delta(x_0) \cap \Omega_\delta$ fijo. Entonces, por el Teorema 1.2.5, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u_y = 0 \text{ en } B_\delta(y_0) \\ u_y = w \text{ en } \partial B_\delta(y_0) \end{cases} \tag{2.41}$$

tiene solución única clásica. En particular u_y es función armónica, no negativa, no trivial y $w(x_0) \geq u(x_0) = K > 0$. Como w es superarmónica en Ω, $-\Delta w \geq 0$ en el sentido débil en $B_\delta(y_0)$. De esta forma,

$$\begin{cases} -\Delta(w - u_y) \geq 0 \text{ en } B_\delta(y_0) \\ w - u_y = 0 \text{ en } \partial B_\delta(y_0). \end{cases} \tag{2.42}$$

Entonces, por el Principio del Máximo para supersoluciones débiles (ver [F], Teorema 2.11 o [Ba] Teorema 1.3.1), $w - u_y \geq 0$ y así $w \geq u_y$ en $B_\delta(y_0)$.

Ahora, por la propiedad de valor medio de funciones armónicas (Teorema 1.2.3), $w \geq u$ en Ω y de (2.32) se obtiene

$$\begin{aligned} u_y(y_0) &= C \int_{\partial B_\delta(y_0)} u_y = C \int_{\partial B_\delta(y_0)} w \geq C \int_{\partial B_\delta(y_0)} u \geq C \int_{\partial B_\delta(y_0) \cap B_\varepsilon(x_0)} u \\ &\geq C \int_{\partial B_\delta(y_0) \cap B_\varepsilon(x_0)} \frac{K}{2} = C\frac{K}{2} med_{N-1}(\partial B_\delta(y_0) \cap B_\varepsilon(x_0)) \geq C = C(\delta) > 0, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se puede obtener usando $K \geq r > 0$, $\varepsilon = CK^{-\frac{1}{N-1}}$, y el hecho de que $med_{N-1}(\partial B_\delta(y_0) \cap B_\varepsilon(x_0))$ es mayor o igual que el área de una región plana dentro de $B_\varepsilon(x_0)$ cuya medida $(N-1)$-dimensional no depende de y_0.

Empleando la desigualdad de Harnack (Teorema 1.2.2) en el compacto $\overline{B_{\delta/5}}(y_0)$,

$$u_y(x) \geq A u_y(y_0) \geq C, \forall x \in B_{\delta/5}(y_0)$$

luego

$$w \geq C \text{ en } B_{\delta/5}(y_0). \tag{2.43}$$

A continuación se elige un recubrimiento finito $\bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta/5}(y_i)$ de $\overline{\Omega_\delta}$ con $y_i \in \Omega_\delta$. Como Ω_δ es conexo, tal recubrimiento puede elegirse de tal forma que $B_{\delta/5}(y_i) \cap B_{\delta/5}(y_{i+1}) \neq \emptyset$, $i =$

$1, ..., (m-1)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y_0 \in B_{\delta/5}(y_1)$. Observar que $B_{\delta/5}(y_0) \subset B_{3\delta/5}(x)$ para todo $x \in B_{\delta/5}(y_1)$. Aplicando la desigualdad de Harnack en el compacto $\overline{\bigcup_{x \in B_{\delta/5}(y_1)} B_{3\delta/5}(x)} \subset B_\delta(y_0) \subset \Omega_\delta$ a la función u_y, en virtud de (2.43) se tiene

$$w(x) \geq C \int_{B_{3\delta/5}(x)} w \geq C \int_{B_{\delta/5}(y_0)} w \geq C, \forall x \in B_{\delta/5}(y_1).$$

A continuación, teniendo en cuenta que $B_{\delta/5}(y_i) \subset B_{3\delta/5}(x)$ para todo $x \in B_{3\delta/5}(y_{i+1})$, $i = 1, ..., (m-1)$, se tiene, repitiendo este argumento m veces, que es posible encontrar una constante $C_0 > 0$ que no depende ni de u ni de f tal que $w \geq C_0$ en $\overline{\Omega_\delta}$.

Sea u_δ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\delta = 0 \text{ en } \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta} \\ u_\delta = 0 \text{ en } \partial\Omega \\ u_\delta = C_0 \text{ en } \partial\Omega_\delta \end{cases}$$

La existencia y unicidad de esta solución están garantizadas por el Teorema 1.2.5. Observe que el dato sobre la frontera de $\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$ es continuo y $\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$ es una región de clase C^∞. Por el Corolario 1.2.8 $u_\delta(x) > 0$, $\forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$. Ahora, empleando el principio del Máximo Fuerte (Teorema 1.2.7) y el Teorema 1.2.9, se sigue que existe $C > 0$ tal que

$$u_\delta(x) \geq C d(x, \partial\Omega), \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta} \tag{2.44}$$

Además, por el Principio del Máximo Débil para soluciones clásicas (ver Teorema 1.2.6), $\max_{\overline{\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}}} u_\delta = \max_{\partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta})} u_\delta$, es decir,

$$u_\delta \leq \max_{\partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta})} u_\delta = C_0 \tag{2.45}$$

y como

$$w \geq C_0 \text{ en } \overline{\Omega_\delta} \tag{2.46}$$

se tiene $w \geq C_0$ en $\partial\Omega_\delta$. Argumentando como se hizo con u_y y w en $B_\delta(y_0)$ se obtiene $w \geq u_\delta$ en $\Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$. Por lo anterior, con (2.44) y (2.46) se sigue que

$$w \geq Cd(x, \partial\Omega), \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}. \tag{2.47}$$

Ahora veamos que tomando λ suficientemente pequeño en (2.36), es decir, en $\|z\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\lambda$, se sigue que $u = w - z > 0$ en Ω. En efecto, (2.36) es equivalente a decir

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C\lambda \text{ y } \|\nabla z\|_{L^\infty} \leq C\lambda, C > 0.$$

Primero, observemos que tomando λ suficientemente pequeño en $\|z\|_{L^\infty} \leq C\lambda$ y teniendo en cuenta que $w \geq C_0 > 0$ en Ω_δ entonces $u = w - z > 0$ en Ω_δ. Basta entonces probar que $0 \leq z(x) < Cd(x, \partial\Omega)$ para x en $\Omega \setminus \Omega_\delta$ con δ suficientemente pequeño. El Teorema 1.1.1 garantiza una vecindad tubular alrededor de $\partial\Omega$. Aplicamos el Teorema 1.1.2: como $d(x) = -\eta(x)$, se sigue $\nabla d(x) = -\nabla\eta(x) = -\nu(\overline{x})$ donde $\overline{x} = p(x)$ es la proyección de x sobre Γ. Aplicando el Teorema de Valor Medio, con punto de desarrollo en $\overline{x}$, se sigue, por simple cálculo que existe $0 < \xi < 1$ tal que para $\|\nabla z\|_{L^\infty}$ suficientemente pequeño,

$$z(x) - Cd(x) = t[\nabla z(\overline{x} + \xi(x - \overline{x})) \cdot \nu(\overline{x}) + C] < 0,$$

donde $-\varepsilon < -\delta \leq t < 0$ es tal que $t\nu(\overline{x}) = x - \overline{x}$ (observar que tanto z como d se anulan sobre Γ). Por lo tanto, hemos probado $0 \leq z(x) < Cd(x, \partial\Omega)$ para x en $\Omega \setminus \Omega_\delta$ y con (2.47), $u = w - z > 0$ en $\Omega \setminus \Omega_\delta$.

Por lo anterior, si $\|z\|_{L^\infty}$ y $\|\nabla z\|_{L^\infty}$ son suficiéntemente pequeños, se tiene que efectivamente $u > 0$ en Ω. Hemos probado así, que toda solución no trivial de la desigualdad variacional es positiva en Ω.

Además sabemos, de (2.40) que para u se cumple

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \geq 0. \tag{2.48}$$

Probemos ahora que en realidad se tiene

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{2.49}$$

con lo cual, por densidad, se sigue $\langle -\Delta u - f(u), v \rangle = 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, y así $-\Delta u = f(u)$ en Ω en el sentido débil (o distribucional). Para eso, veamos primero que

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \leq 0, \tag{2.50}$$

de lo cual se desprende, con (2.48), que

$$\langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \leq 0 \text{ o bien } \varphi \geq 0. \tag{2.51}$$

En efecto, sea $\varphi \in C_c^\infty$ con $\varphi \leq 0$, $\hat{K} := soporte(\varphi)$ y $\widehat{\alpha} := \max\left\{|\varphi(x)|; x \in \hat{K}\right\}$ que podemos suponer mayor que cero. Entonces, como $u > 0$ en Ω, es claro que existe $t > 0$ tal que $u > -t\varphi$ en $soporte(\varphi)$ y así también en Ω. Se sigue $v := u + t\varphi > 0$ en Ω, $v = 0$ en $\partial\Omega$, y $v \in K^+ \subset H_0^1(\Omega)$ (Observe que $u \in C^1(\overline{\Omega})$).
De la desigualdad variacional, se sigue con v:

$$\langle -\Delta u - f(u), t\varphi \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle -\Delta u - f(u), \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \varphi \leq 0,$$

y se obtiene (2.51).
Finalmente probamos que de (2.51) se sigue (2.49): en efecto, sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrario. Tenemos la descomposición $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ en parte positiva y parte negativa, $\varphi^+ \geq 0$, $-\varphi^- \leq 0$. Regularizamos φ^+ y φ^-, con una sucesión de núcleos regularizadores, por convolución. Obtenemos $\alpha_n, \beta_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $\alpha_n, \beta_n \geq 0$, tales que $\alpha_n \to \varphi^+$ y $\beta_n \to \varphi^-$, uniformemente en Ω (observe que φ y $\nabla\varphi$ tienen soporte compacto y con eso también φ^+ y φ^-). Por lo tanto (ver [B1] Capítulo IV),

$$\varphi_n := \alpha_n - \beta_n \to \varphi, \nabla\varphi_n \to \nabla\varphi \text{ uniformemente en } \Omega.$$

Con eso, de (2.51) y ∇u, $f(u) \in L^{\infty}(\Omega)$ se desprende

$$0 = \langle -\Delta u - f(u), \varphi_n \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi_n - f(u)\varphi_n) \to \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - f(u)\varphi).$$

Se sigue

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi - \int_{\Omega} f(u)\varphi = 0, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

lo cual es (2.49). El Teorema está probado. ■

Bibliografía

[B1] BREZIS, Haim. "Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones". Alianza Editorial, S.A. Madrid. 1984.

[B2] BREZIS, Haim. "Problémes Unilatéraux". J. Math pures et appl., 51, 1972, pág. 1-168.

[Ba] BARRAZA, Bienvenido. "Principios del Máximo en Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas y Aplicaciones". Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. 2003.

[BT] BREZIS, H; TURNER, R.E.L. "On A Class of Superlinear Elliptic Problems". Comm. in Partial Differential Equations, 2(6), 601-614. 1977.

[D] DE FIGUEIREDO, Djairo. "Lecture Notes in Mathematics". Differential Equations. Proc. Springer-V. Sao Paulo, 1981.

[DL] DAUTRAY, R; LIONS, J.L. "Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology" Vol. 1; Springer-V. 1990.

[E] EVANS, Lawrence. "Partial Differential Equations". American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1998.

[F] FRAENKEL, L.E. "Introduction to Maximum Principles and Symmetry in Elliptic Problems". Cambridge University Press. 2000.

[GT] GILBARG, D; TRUDINGER, N. "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order". Second Edition. Springer-V. Berlin Heidelberg. 1983.

[L] KRASNOSELKI, M.A. "Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations". Perganon Press. 1964.

[L] LIONS, P.L. "On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations". SIAM Review. Vol. 24, No. 4. October, 1982.

[LM] LIONS, J.L; MAGENES, E. "Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications". Volume I. Springer-V. Berlin Heidelberg. 1972.

[MZ] MITROVIC, D; ZUBRINIC, D. "Fundamentals of Applied Functional Analysis". Addison Wesley Longman Limited. USA. 1998.

[P] PRATO, Ricardo. "Problema de Dirichlet no Homogéneo Para una Ecuación Elíptica Lineal no Homogénea". Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. 2003

[PW] PROTTER, M; WEINBERGER, H. "Maximum Principles in Differential Equations". Springer-V. Berlin Heidelberg. 1984.

[Q] QUITTNER, Pavol. "On Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems". Comm. Math. Univ. Carolinae, 30, 3 (1989) 579-585.

[V] VAINBERG, M.M. "Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators". Holden-Day, Inc. 1964.

[W] WALTER, W. "A Theorem on Elliptic Differential Inequalities With an Application to Gradient Bound". Math. Z, 200, (1989), 293-299.