Sobre la controlabilidad de un problema de frontera libre para la ecuación del calor

Geraldin Martinez Gonzalez

Director: Fernando Andres Gallego Restrepo

Tesis
presentada a la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales,
como requisito para obtener el título de Magíster en Ciencias - Matemática Aplicada

Manizales, Colombia, 2024

© Geraldin Martinez Gonzalez 2024

Resumen

La tesis de maestría aborda la problemática de la controlabilidad en problemas de frontera libre, introduciendo un enfoque que incluye la presencia de un control interno y explora una variante adicional que implica un retardo en el tiempo dentro del modelo. Dividida en cinco capítulos, comienza estableciendo los principios fundamentales de la teoría de control, especialmente aplicados a ecuaciones parabólicas. Luego, revisa el estado actual de la investigación en cuanto a la controlabilidad interna en problemas de frontera libre para la ecuación del calor en una dimensión. Posteriormente, presenta nuevos hallazgos y resultados relacionados con este problema, pero considerando la influencia de un retardo interno en el tiempo. En el último capítulo, se derivan conclusiones significativas de la investigación realizada y se proponen posibles direcciones para futuros trabajos. Además, se incluye un apéndice que proporciona información complementaria relevante. La tesis ofrece una contribución valiosa al campo, al abordar de manera integral la controlabilidad en problemas con características específicas como la presencia de un control interno y el efecto del retardo en el tiempo.

Palabras clave: Ecuación de calor, controlabilidad, frontera libre, Estimación de Carleman

Abstract

On the Controllability of a Free Boundary Problem for the Heat Equation

The master thesis deals with the controllability problem in free boundary problems, introducing an approach that includes the presence of an internal control and explores an additional variant involving a time delay within the model. Divided into five chapters, it begins by establishing the fundamental principles of control theory, especially as applied to parabolic equations. It then reviews the current state of research on internal controllability in free boundary problems for the heat equation in one dimension. Subsequently, it presents new findings and results related to this problem, but considering the influence of an internal time delay. In the last chapter, significant conclusions are derived from the research carried out and possible directions for future work are proposed. In addition, an appendix is included that provides relevant supplementary information. The thesis offers a valuable contribution to the field by comprehensively addressing controllability in problems with specific characteristics such as the presence of an internal control and the effect of time delay.

Keywords: Heat equation, controllability, free boundary, Carleman estimation.

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas que han contribuido de diversas maneras a la realización de esta tesis de maestría. En primer lugar, agradezco a mi director de tesis, Fernando Gallego, por su orientación excepcional, su paciencia, por brindarme la oportunidad de colaborar en proyectos de investigación y su apoyo continuo a lo largo de este proceso. Su valioso asesoramiento y su compromiso con mi crecimiento académico han sido indispensables para alcanzar este logro. Agradezco inmensamente a mi familia y mis amigos por su amor incondicional, su comprensión y su constante apoyo a lo largo de este viaje, gracias por creer en mi, sus palabras de aliento y cada acto de motivación. Este logro no habría sido posible sin el apoyo y la colaboración de todas estas personas, estoy sinceramente agradecida y feliz de tener la oportunidad de compartir con cada una de ellas.

Índice general

1. Introducción **5**

1.1. PRIMER APORTE: Estudio monográfico de un problema de controlabilidad nula para frontera libre de la ecuación de calor. 5

1.2. SEGUNDO APORTE: Controlabilidad nula para de la ecuación de calor retardada en un dominio no cilíndrico 9

2. Controlabilidad de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución **13**

2.1. Sistemas de Control: 13

2.1.1. Ejemplos 14

2.1.2. Categorías de los Problemas de Control 15

2.2. HUM: Método de la Unicidad de Hilbert para la Ecuación del Calor 18

2.2.1. La Ecuación del Calor 18

2.2.2. Buen Planteamiento de la Ecuación del Calor 19

2.2.3. Controlabilidad Nula: Enfoque variacional y observabilidad, HUM. . . . 21

2.3. Resultados de Controlabilidad para la Ecuación de Calor 25

2.3.1. Controlabilidad Aproximada 25

2.3.2. Controlabilidad Nula 28

3. Controlabilidad para un Problema de Frontera Libre de la Ecuación de Calor **33**

3.1. Introducción 33

3.2. Establecimiento del problema 35

3.3. Resultado principal 36

3.3.1. Estado del arte 36

3.4. El Buen Planteamiento 38

3.4.1. Buen Planteamiento I: Problema de Frontera Libre No-Homogéneo . . . 39

3.4.2. Buen Planteamiento II: Ecuación del Calor en un Dominio No-Cilíndrico 42

3.4.3. Regularidad de las soluciones 44

3.5. Controlabilidad Nula en un dominio No-Cilíndrico 47

3.5.1. Desigualdad de Carleman 47

3.5.2. Desigualdad de Observabilidad 58

3.5.3. Controlabilidad Aproximada 59

3.6. Resultado Principal: Controlabilidad Nula del Problema de Frontera Libre . . . 61

4. Controlabilidad Nula de la ecuación de calor bajo un retardo en el tiempo en un dominio no-cilíndrico **65**

4.1. Ecuaciones Diferenciales con Retardo 65

4.2. Contexto del Problema 66

4.3. Problema Adjunto: Buen Planteamiento 67

4.3.1. Sistema en un dominio No-Cilíndrico 67

4.3.2. Sistema Adjunto 71

4.4. Controlabilidad Nula 73
4.4.1. Desigualdad de Observabilidad 75

5. Conclusiones **81**
5.1. Avances establecidos 81
5.2. Perspectivas Futuras y/o Problemas Abiertos 82

6. Apéndice **85**
6.1. Notación básica y terminología 85
6.2. Espacios Funcionales 88
6.3. Espacios de Sobolev 89
6.4. Desigualdades Importantes 91
6.5. Interpolación de Espacios de Sobolev 92
6.6. Espacios 93
6.7. Teoría de Semigrupos 94
6.8. Problema de Cauchy Abstracto 96
6.9. Resultados Importantes 97

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis tiene como objetivo estudiar de manera monográfica el problema simultaneo de controlabilidad nula y frontera libre para una ecuación de calor. Adicionalmente, se presentan avances significativos en la controlabilidad nula de la ecuación de calor con retardo en un dominio no cilíndrico. La tesis esta estructurada en cinco capítulos y un apéndice, y comienza con una introducción a los principios de la teoría de control, mostrando las diferentes técnicas y nociones de controlabilidad y aplicando estos fundamentos a las ecuaciones del tipo parabólico como la ecuación de calor. Los dos capítulos siguientes contienen el estudio monográfico y los avances en el probelma con retardo, respectivamente. Se finaliza con un capitulo de conclusiones y un apendice que consigna resultados generales de Análisis Funcional, Espacios de Sobolev, Interpolación, Teoría de Semigrupos, entre otros.

Los capítulos 3 y 4 contienen los aportes más significativos de la tesis, que son enumerados de la siguiente forma:

1.1. PRIMER APORTE: Estudio monográfico de un problema de controlabilidad nula para frontera libre de la ecuación de calor.

En el capítulo 3, se investiga la interrelación entre la controlabilidad y los problemas de frontera libre, particularmente en el contexto de la ecuación del calor en un dominio acotado. Específicamente, estamos interesados en estudiar el trabajo [13] (figura 1.1) donde los autores llevaron a cabo un estudio sobre un problema unidimensional de Stefan con una fase, que incluye una frontera de Dirichlet nula. La controlabilidad se define aquí como la capacidad de llevar un sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo finito, utilizando entradas adecuadas. Sin embargo, la naturaleza de los problemas de frontera libre, donde las soluciones no están completamente definidas en sus fronteras, introduce dificultades adicionales.

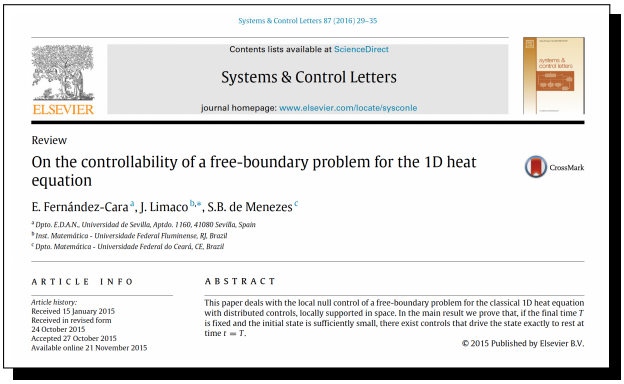
Específicamente, se considera $L_0 > 0$, $T > 0$, $0 < a < b < L_* < L_0$ y $y_0 \in L^\infty(0, L_0)$ dados. Se tiene el siguiente problema:

Encontrar funciones $y = y(x,t)$ y $L \in C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ para todo t tal que

$$L(0) = L_0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_t - y_{xx} = v1_\omega & x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T) \\ y(0,t) = 0, y(L(t),t) = 0 & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0) \end{cases} \tag{1.1}$$

con las propiedades adicionales,

$$y_x(L(t),t) = -L'(t), \quad y(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T).$$



Systems & Control Letters 87 (2016) 29–35

Contents lists available at ScienceDirect

Systems & Control Letters

journal homepage: www.elsevier.com/locate/sysconle

Review

On the controllability of a free-boundary problem for the 1D heat equation

E. Fernández-Cara [a], J. Limaco [b,*], S.B. de Menezes [c]

[a] Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, Spain
[b] Inst. Matemática - Universidade Federal Fluminense, RJ, Brazil
[c] Dpto. Matemática - Universidade Federal do Ceará, CE, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:
Received 15 January 2015
Received in revised form
24 October 2015
Accepted 27 October 2015
Available online 21 November 2015

ABSTRACT

This paper deals with the local null control of a free-boundary problem for the classical 1D heat equation with distributed controls, locally supported in space. In the main result we prove that, if the final time T is fixed and the initial state is sufficiently small, there exist controls that drive the state exactly to rest at time $t = T$.

© 2015 Published by Elsevier B.V.

Figura 1.1: Systems & Control Letters 87 (2016): 29-35.

1_ω es la función característica de $\omega = (a, b)$. La función v es el control y la pareja (L, y) es el estado asociado.

Nuestro objetivo en este capitulo será estudiar el siguiente resultado:

Teorema 1. *Asumamos que $L_0 > 0, T > 0$ y $0 < a < b < L_* < L_0 < B$ son parámetros dados. Entonces el sistema (1.1) es nulamente controlable de manera local. Precisamente, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y*

$$\|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)} \leq \varepsilon,$$

existen L y (v, y), con

$$\begin{cases} L \in C^1([0,T]), L(0) = L_0, \quad L_* \leq L(t) \leq B, \\ v \in L^2(\omega \times (0,T)), y^* \in C^0\left([0,T]; H_0^1(0,B)\right), \end{cases}$$

satisfaciendo

$$\underbrace{y_x(L(t),t) = -L'(t)}_{\textit{Frontera Libre}}, \quad y \quad \underbrace{y(x,T) = 0}_{\textit{Controlabilidad Nula}} \quad , \quad x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T), \tag{1.2}$$

La demostración de este Teorema se basa en varios aspectos (ver figura 1.2) que se enuncian a continuación:

1. **Existencia de Soluciones:** El buen planteamiento del problema presentará de dos maneras. La primera es referenciando un teorema más general, cuyo caso particular es la existencia y unicidad del problema que estamos estudiando; este resultado general está consignado y demostrado en [10]. La segunda forma consiste en realizar un cambio de variables mediante un difeomorfismo, para transformar el problema en un dominio cilíndrico a otro con un dominio también cilíndrico. El precio a pagar por este cambio de dominio es que la nueva ecuación tendrá coeficientes variables. Para este caso, nos remitimos a [25]. Finalmente, debemos establecer un gano de regularidad de las soluciones.

2. **Controlabildiad Aproximada:** Inicialmente se debe obtener la controlabilidad aproximada para cada dominio No-Cilíndrico, es decir sin tener en cuenta la condición de la frontera libre. En este sentido, se aplicará el Método de Unicidad de Hilbert para reducir el problema de controlabilidad a una propiedad de observabilidad para un sistema dual

o adjunto. Esta propiedad de observabilidad sigue de una estimación de tipo Carleman. Específicamente, el problema adjunto es dado por:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = g(x,t) & (x,t) \in Q_L \\ \varphi(0,t) = \varphi(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi^T(x), & x \in (0, L(T)), \end{cases}$$

donde $g \in L^2(Q_L)$ y $\varphi^T \in L^2(0, L(T))$ y la desigualdad de observabilidad objetivo es

$$\int_0^{L_0} |\varphi(x,0)|^2 \, dx \leq C \iint_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt.$$

Dentro de la teoría de control se sabe que la desigualdad de obserbavilidad implicará la controlabilidad. El resultado principal de esta parte sería el siguiente: Tomemos un L fijo que satisface

$$\begin{cases} L \in C^1([0,T]) \text{ tal que } L_* \leq L(t) \leq B, \; L(0) = L_0 \\ L(t) > b \text{ para todo } t \in [0,T] \text{ donde tenemos} \\ N_L := \|L'\|_\infty, \quad N_0 := \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Teorema 2 (Controlabilidad Aproximada)**.** *Sea L una función satisfaciendo* (1.3)*. Para cualquier $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y cualquier $\beta > 0$ existen pares (v_β, y_β) con*

$$v_\beta \in L^2(\omega \times (0,T)), \quad y_\beta^* \in C^0([0,T]; H_0^1(0,B))$$

que satisface (3.6) *y*

$$\|y_\beta(\cdot, T)\|_{L^2(0,L(T))} \leq \beta. \tag{1.4}$$

Además se puede encontrar v_β tal que

$$\|v_\beta\|_{L^2(\omega \times (0,T))} \leq C_1 \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)}, \tag{1.5}$$

donde C_1 depende de N_L, L_*, B, ω y T pero es independiente de β

3. **Punto fijo operador:** En dirección de obtener el resultado principal debemos probar la existencia de un punto fijo para el operador:

$$\Lambda_\beta : \mathcal{M} \mapsto C^1([0,T])$$

dado por

$$\Lambda_\beta(l) = L \text{ con } L(t) = L_0 - \int_0^t y_x(l(s), s) \, ds \quad \forall t \in [0,T], \tag{1.6}$$

donde $\beta > 0$, $R > 0$, $\mathcal{M} : \left\{ l \in C^1([0,T]) : L_* \leq l \leq B, \; l(0) = L_0, \; N_l := \|l'\|_\infty \leq R \right\}$, y es la solución al sistema

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v 1_\omega, & (x,t) \in Q_l \\ y(0,t) = 0, \quad y(l(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0) \end{cases} \tag{1.7}$$

y v es el $\beta-$control de norma mínima en $L^2(\omega \times (0,T))$ asociado a l, es decir la única solución al problema

$$\begin{cases} \text{minimizar } \iint_{\omega \times (0,T)} |v|^2 \, dx \, dt \\ \text{sujeto a } v \in L^2(\omega \times (0,T)) \\ y \text{ solución de (3.54)} \\ \text{satisfaciendo } \|y_\beta(\cdot, T)\|_{L^2(0,L(T))} \leq \beta. \end{cases} \tag{1.8}$$

4. **Compacidad del Operador:** Al probar la compacidad del operador Λ_β, limitación uniforme del mismo y teniendo encuenta la existencia del punto fijo podemos encontrar una subsecuencia de modo que

$$L_\beta \to L \text{ fuertemente en } C^1([0,T]) \text{ y } v_\beta \to v \text{ débilmente en } L^2(\omega\times(0,T)), \text{ cuando } \beta \to 0.$$

en donde L satisface las propiedades establecidas para el problema de frontera libre y la respectiva solución satisface la noción de controlabilidad nula bajo el control v,

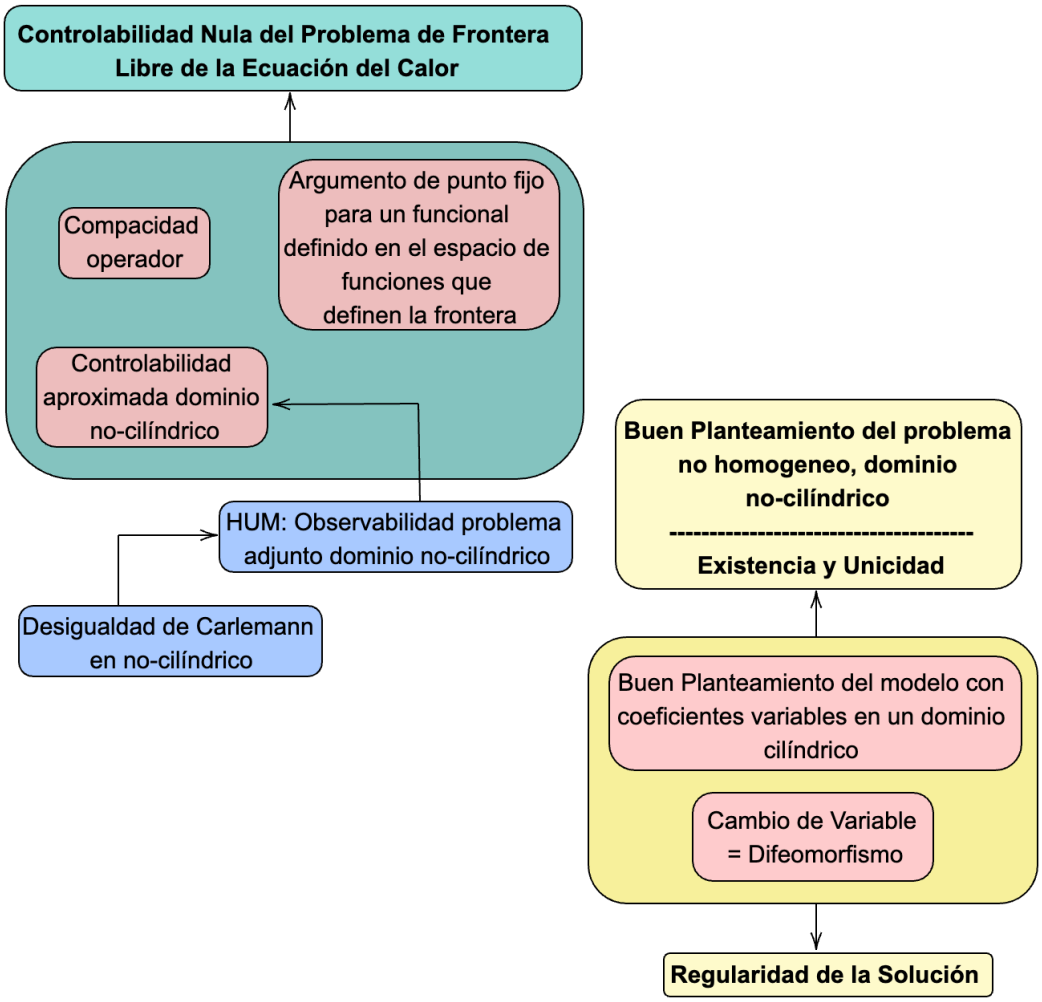


Figura 1.2: Estrategía demostración Teorema 1

1.2. SEGUNDO APORTE: Controlabilidad nula para de la ecuación de calor retardada en un dominio no cilíndrico

El capítulo 4 se adentra en el campo de las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR), que son un tipo de ecuación diferencial funcional en la que la derivada de una función desconocida en un instante específico se expresa en función de los valores de esa función en instantes anteriores. Estas EDR, también conocidas como sistemas de retardo de tiempo o ecuaciones de diferencia diferencial, se clasifican dentro de las ecuaciones diferenciales funcionales, que se caracterizan por operar en un espacio de dimensión infinita, en contraposición a las ecuaciones diferenciales ordinarias que se manejan en un espacio de dimensión finita. Este enfoque permite explorar cómo los retardos temporales pueden influir en la controlabilidad de los sistemas, añadiendo una capa adicional de complejidad y proporcionando nuevas perspectivas para el análisis de los problemas de frontera libre.

En este capítulo 4 se explora un problema que hasta donde sabemos aún está en proceso de estudio y que aporta avances significativos al estudio de la controlabilidad de las ecuaciones EDR con frontera libre. No obstante, en este sentido en este capitulo estudiamos la controlabilidad de la EDR en un dominio no-cilíndrico que seria el paso inicial para tratar el problema con frontera libre. Nuestro problema será el siguiente:

Se quiere resolver el siguiente problema de controlabilidad nula para un dominio no cilíndrico:

Sea $L \in C([-h,0]) \cap C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ y

$$L(t-h) = L(t), \quad L(0) = L_0. \tag{1.9}$$

Deseamos encontrar una función $u = u(x,t)$ y un control $v \in L^2((0,T) \times \omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = c(x,t)u(x,t-h) + 1_\omega v(x,t), & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_{L_0} \\ u(x,t) = \theta(x,t) & (x,t) \in \Omega_{L(-h,0)} \end{cases} \tag{1.10}$$

con

$$u(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)). \tag{1.11}$$

Denotaremos por $\Sigma_{[0,T],L}$ la frontera lateral de $Q_{[0,T],L}$:

$$\Sigma_{L,[0,T]} = \{(x,t) : x = 0 \text{ o } x = L(t), \quad 0 < t < T\},$$

donde 1_ω es la función característica de ω y c es una función dada en L^∞ definida en $Q_{L_0} \times (0,T)$. Aquí, la función v es el control interno y (L,u) es el estado asociado.

Debemos tener en cuenta que se considera N un entero positivo, $T > 0, L_0 > 0$, $0 < a < b < L_* < L_0$ y un parámetro de retardo real $h > 0$. Además de los conjuntos:

$$\begin{aligned} &\Omega_{L_0} = (0, L_0), \quad \Omega_{L(t)} = (0, L(t)), \quad \omega = (a,b) \subset \Omega_{L_0} \\ &Q_{L,(0,T)} = \{(x,t) : x \in (0, L(t)), \quad t \in (0,T)\} \\ &Q_{L,(-h,0)} = \{(x,t) : x \in (0, L(t)), \quad t \in (-h,0)\} \\ &Q_L = Q_{L,(0,T)} \cup Q_{L,(-h,0)}. \end{aligned}$$

Los datos iniciales $u_0 \in L^2(\Omega_{L_0})$, $\theta \in L^2(\Omega_{L,-h})$ con $\theta(x,0) = u_0(x)$, $c \in L^\infty(Q_{L,(0,T)})$ y $u \in L^2(Q_{L,(0,T)})$.

En ese capitulo, estudiamos las propiedades de controlabilidad nula para el sistema (1.9)-(1.10), siendo el principal resultado el siguiente:

Teorema 3. *Sean $T > 0$, $h > 0$, $L_0 > 0$ y los parámetros $0 < a < b < L_* < L_0$. Entonces, para cualquier dato inicial $(u_0, \theta) \in L^2(0, L_0) \times L^2(Q_{L,(-h,0)})$ y función $L \in C([-h, 0]) \cap C^1([0, T])$ con $L(t) > 0$ satisfaciendo (1.9), podemos encontrar un control $v \in L^2((0, T) \times \omega)$ tal que la correspondiente solución u de (1.10) satisface la condición*

$$u(x, T) = 0, \quad x \in (0, L(T)). \tag{1.12}$$

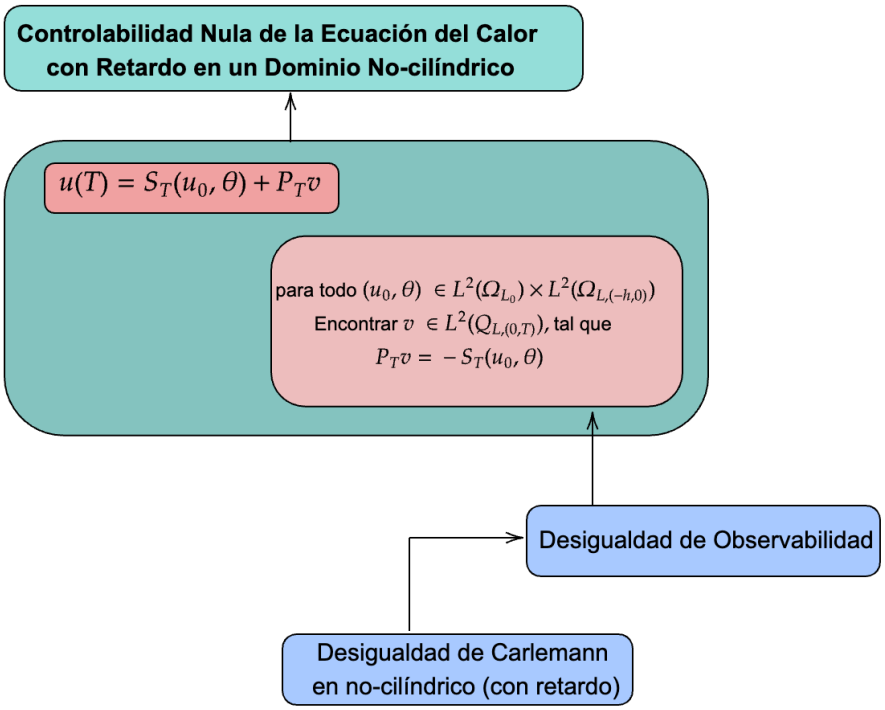


Figura 1.3: Estrategía demostración Teorema 3

La demostración del Teorema 3 se basa en lo siguiente (ver figura 1.3):

1. **Buen Planteamiento:** La prueba de la existencia y unicidad se trata de manera similar como en el problema del capítulo anterior, es decir, por medio de un difeomorfismo para llevar el problema del dominio No-cilíndrico a un problema con dominio Cilíndrico con coeficientes variables.

   a) **Problema Adjunto:** El problema adjunto se trata de manera similar, en donde debemos establecer algunas estimativas naturales de la solución del sistema.

2. **Controlabilidad Nula:**

   a) **Condiciones Necesarias y Suficientes:** Se establecerán condiciones necesarias y suficientes para obtener la controlabilidad nula a partir de una representación de la solución por medio de operadores, específicamente

$$u(T) = S_T(u_0, \theta) + P_T v$$

En este sentido, el problema equivalente sería:

$$\begin{cases} \text{Para todo } (u_0, \theta) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right) \\ \text{encontrar } v \in L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right), \\ \text{tal que } P_T v = -S_T\left(u_0, \theta\right). \end{cases} \tag{1.13}$$

b) **Desigualdad de Observabilidad:** Estebleceremos adicionalmente que, (1.13) es equivalente a la siguiente estimativa

$$\|S_T^* \varphi_T\|^2_{L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right),} \leq C_T \left\|L_T^* \varphi_0\right\|^2_{L^2(\Omega_T)}, \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde $C_T > 0$ no depende de φ_0 y que se conoce como desigualdad de observabilidad.

c) **Desigualdad de Carleman para EDR:** Para lograr la controlabilidad nula, es necesario demostrar la desigualdad de observabilidad mencionada, la cual se deriva de una desigualdad de Carleman. Esta desigualdad será demostrada mediante ciertos cambios de variable, que nos permitirán aplicar la desigualdad de Carleman presentada en el capítulo anterior y generalizarla para el caso en que haya un retardo.

Al final de esta tesis encontramos un capitulo de Conclusiones y un apéndice con resultados generales en el ámbito del Análisis Matemático y las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Capítulo 2

Controlabilidad de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución

La controlabilidad de ecuaciones diferenciales parciales de evolución es un concepto central en el estudio de sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Se refiere a la capacidad de influir en el comportamiento futuro del sistema manipulando adecuadamente las condiciones iniciales y/o las condiciones de contorno del problema. En términos más técnicos, dado un sistema descrito por una EDP, la controlabilidad implica que, partiendo de un estado inicial específico, es posible encontrar un conjunto de acciones de control (por ejemplo, cambios en las condiciones iniciales o en las condiciones de contorno) que permitan llevar el sistema a un estado deseado en un tiempo finito. La controlabilidad de EDPs es de gran importancia en diversos campos científicos y tecnológicos, como la ingeniería de control, la física de sistemas dinámicos, la teoría de la optimización, entre otros. Se utiliza en la formulación y análisis de problemas prácticos como el diseño de sistemas de control, la manipulación de procesos físicos o químicos, la optimización de estructuras, entre otros. Los métodos para estudiar la controlabilidad de EDPs suelen basarse en técnicas analíticas y numéricas, utilizando herramientas matemáticas avanzadas como la teoría espectral, el análisis funcional, análisis complejo, entre otros.

La recopilación de los siguientes resultados y aspectos teóricos son tomados de varios obras, como [5, 7, 24, 31, 33, 40].

2.1. Sistemas de Control:

Comenzamos con la definición del objeto básico estudiado en la teoría de control.

Definición 1. *Un sistema de control es una ecuación de evolución (una EDO o una EDP) que depende de un parámetro u, que escribiremos de manera formal de la siguiente manera:*

$$\dot{y} = f(t, y, v), \tag{2.1}$$

donde $t \in [0, T]$ es el tiempo y:

- *$y : [0, T] \to \mathcal{Y}$ es la incógnita, llamada el estado del sistema, con $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$.*
- *$v : [0, T] \to \mathcal{U}$ es el parámetro llamado control, que puede ser elegir como función del tiempo.*

Donde $\dot{y}$ representa la derivada temporal de y.
Los dos ejemplos estándar que tenemos en mente con esta definición son los siguientes:

- El estado $y(t)$ pertenece a $\mathbb{R}^n$ (o a algún conjunto finito-dimensional), el control $v(t)$ a $\mathbb{R}^m$ (o nuevamente a algún otro conjunto finito-dimensional), y (2.1) es una EDO.
- Tanto el estado $y(t)$ como el control $v(t)$ pertenecen a algunos espacios funcionales, y (2.1) es una EDP (entonces f típicamente es un operador diferencial que actúa sobre y).

2.1.1. Ejemplos

La pregunta general que acompaña a esta definición es la siguiente:

¿cómo se puede usar el control para hacer que el sistema cumpla algún propósito que ha sido prescrito de antemano?

Antes de dar definiciones matemáticas precisas que correspondan a este problema general, demos algunos ejemplos de sistemas de control.

Para ilustrar los conceptos, presentamos ejemplos de sistemas de control tanto de dimensión finita como infinita. Sin embargo, en estas notas de conferencia, nos enfocaremos principalmente en sistemas de dimensión infinita regidos por ecuaciones en derivadas parciales (EDPs).

1.Sistemas de control autónomos lineales de dimensión finita:

Consideremos el sistema (2.1) de la siguiente forma:

$$\dot{y} = Ay + Bv,$$

donde el estado $y(t) \in \mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$, el control $v \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrices fijas.

2. Sistemas control-affine sin deriva:

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m} v_i f_i(y),$$

donde el estado $y(t) \in \mathbb{R}^n$, el control $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, y $f_1, \ldots, f_m$ son campos vectoriales suaves en $\mathbb{R}^n$.

3. Control interno de una EDP: el caso de Navier-Stokes:

Consideremos Ω un dominio acotado con frontera suave en $\mathbb{R}^n$, y un subconjunto abierto $\omega \subset \Omega$. Además consideramos la ecuación Navier-Stokes en Ω, el control actuando localmente en ω :

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \Delta v + \nabla p = \mathbf{1}_\omega u & \text{en } [0,T] \times \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{en } [0,T] \times \Omega, \\ v = 0 & \text{en } [0,T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Donde, $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es el campo de velocidad, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ es el campo de presión. Como es bien sabido, esta ecuación describe la evolución del campo de velocidad de un fluido incompresible y viscoso. Nótese que p no es una incógnita real de la ecuación; de hecho, todo el sistema podría reformularse sin ella. Aquí:

- El estado es el campo de velocidad v, por ejemplo, tomado en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ (o un subespacio en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ para tener en cuenta div $v=0$ y las condiciones de contorno).
- El control es la fuerza localizada $u=u(t,x)$, que obligamos a que esté soportada en ω, perteneciendo por ejemplo a $L^2(\omega;\mathbb{R}^n)$.

4. Control de frontera de la ecuación de Navier-Stokes:

Consideremos Ω un dominio acotado con frontera suave en $\mathbb{R}^n$, y un subconjunto abierto no vacío de la frontera $\Sigma\subset\partial\Omega$. Tomemos la ecuación de Navier-Stokes y el control actuando en una parte local de la frontera Σ :

$$\begin{cases}\partial_t v+(v\cdot\nabla)v-v\Delta v+\nabla p=0 & \text{en } [0,T]\times\Omega,\\ \operatorname{div} v=0 & \text{en } [0,T]\times\Omega\\ v=\mathbf{1}_\Sigma(x)u(t,x) & \text{en } [0,T]\times\partial\Omega,.\end{cases}$$

donde

- El estado es el campo de velocidad v, por ejemplo en $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$.
- El control es el término de frontera localizado $u=u(t,x)$.

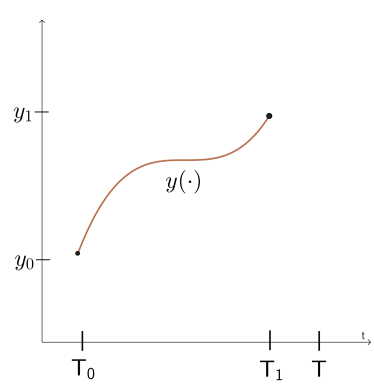
2.1.2. Categorías de los Problemas de Control

Como se ha mencionado anteriormente, el propósito de la teoría de control es comprender cómo se puede emplear la función de control para influir en la dinámica del sistema de acuerdo con ciertos objetivos establecidos. Esta problemática general puede adoptar diversas formas y generar diferentes desafíos matemáticos. A continuación, enumeramos varias de estas cuestiones.

1. **Controlabilidad Exacta:** La pregunta es la siguiente: Dado dos tiempos $T_0<T_1$, y y_0,y_1 dos posibles estados del sistema, ¿Existe $v:[T_0,T_1]\to\mathscr{U}$ tal que

$$y_{|t=T_0}=y_0,\dot{y}=f(y,v)\Longrightarrow y(T_1)=y_1?$$

   En otras palabras, ¿es posible encontrar, para cada y_0 y y_1,un control que lleva el sistema del dato inicial y_0 al dato final y_1 ?



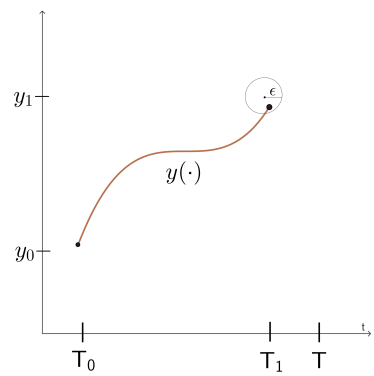
2. **Controlabilidad Aproximada:** El problema de la controlabilidad aproximada es una versión ligera de la controlabilidad exacta. En lugar de requerir que el estado del sistema alcance exactamente el objetivo, uno puede preguntarse si, al menos, se puede acercar

arbitrariamente al objetivo. Matemáticamente hablando, esto se puede expresar de la siguiente manera:

Dados $T_0 < T_1, y_0$ y y_1 dos posibles estados del sistema y $\varepsilon > 0$, ¿ Existe $v : [0, T] \to \mathscr{U}$ tal que

$$y_{|t=0} = y_{T_0}, \dot{y} = f(y, v) \Longrightarrow \|y(T_1) - y_1\| \leq \varepsilon?$$

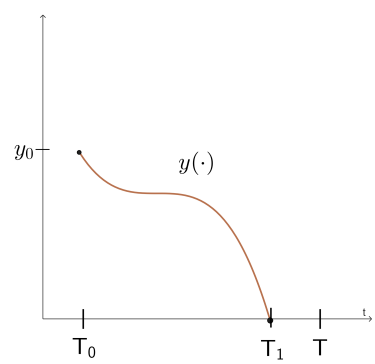
No hace falta decir que el problema depende en gran medida de la elección de la norma.



3. **Controlabilidad Nula:** Supongamos que $\mathcal{Y}$ es un espacio vectorial. Dados $T_0 < T_1, y_0$ un estado inicial del sistema, ¿ Existe $v : [0, T] \to \mathscr{U}$ tal que

$$y_{|t=T_0} = y_0, \dot{y} = f(y, v) \Longrightarrow y(T_1) = 0 \ ?$$

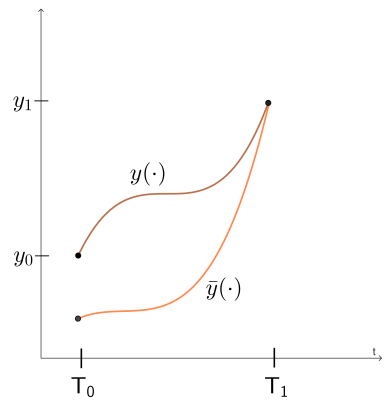
Normalmente, ¿se puede utilizar el control para hacer que el fluido se detenga?



4. **Controlabilidad por Trayectorias:** Dados $T_0 < T_1, y_0 \in \mathscr{Y}$ y $\bar{y} : [T_0, T_1] \to \mathcal{Y}$ una trayectoria del sistema (correspondiente al control $\bar{v} : [T_0, T_1] \to \mathcal{U}$), ¿ Existe $v : [T_0, T_1] \to \mathscr{U}$ tal que

$$y_{|t=T_0} = y_0, \dot{y} = f(y, v) \Longrightarrow y(T_1) = \bar{y}(T_1)?$$

Las nociones de controlabilidad nula y controlabilidad por trayectorias son particularmente importantes para sistemas (irreversibles) que tienen un efecto de regularización, ya que en ese caso, no se puede esperar que la controlabilidad exacta se cumpla. Por ejemplo, consideremos el control interno de la ecuación del calor (o la ecuación de Navier-Stokes con suposiciones adecuadas), se puede demostrar que, sea cual sea la elección del control, el estado final del sistema es suave cuando se restringe a una parte de Ω a una distancia positiva de ω.



5. **Control Óptimo:** Se busca un control que minimice alguna función de costo, por ejemplo,

$$J(u) = \|y(T;u) - \bar{y}\|^2 + \|v\|^2,$$

donde $\bar{y}$ es algún objetivo y $y(T;u)$ es el estado alcanzado por el sistema en el tiempo T, comenzando desde y_0 y con el control v. El problema consiste en determinar si tal control existe, si es único, y tratar de caracterizarlo.

Enfoque estándar para problemas de controlabilidad de EDP no lineales.

Considerando el problema de controlabilidad para una EDP no lineal. Permítanos explicar cómo se aborda esto frecuentemente. El método más estándar para establecer la controlabilidad de una EDP no lineal es el siguiente:

1. ***Linealizar la ecuación.***
2. ***Probar un resultado de controlabilidad para la ecuación linealizada.***
3. ***Deducir el resultado de controlabilidad para el sistema no lineal utilizando argumentos de punto fijo o el Teorema de la Función Inversa.***

Ahora, para demostrar la controlabilidad de la ecuación linealizada, existe un enfoque estándar mediante la dualidad (D. Russell [39], J.-L. Lions [29]). Esto implica demostrar una desigualdad de observabilidad en el sistema dual (homogéneo). En resumen, se debe demostrar la sobreyectividad del mapeo de control al estado final, y el argumento es algo similar al estándar:

$$A \text{ sobreyectivo } \iff \exists c > 0, \forall u, \|A^* u\| \geq c\|u\|.$$

Pero esto no es (por mucho) el final de la historia. De hecho, en general, estas desigualdades de observabilidad (que miden la solución en todas partes en términos de esta solución medida solo en la zona de control) son muy difíciles de demostrar. Además, este no es el único modo de establecer la controlabilidad, incluso en el caso lineal. Pero esto da un buen comienzo: tenemos que demostrar alguna desigualdad, por lo que el problema parece más estándar que encontrar un control que dirija la solución de un lugar a otro. Sin embargo, este método puede tener al menos dos inconvenientes:

- Frecuentemente, esto solo conduce a resultados locales, a menos que la no linealidad sea adecuada (ver, por ejemplo, Zuazua [46]).
- En muchos casos físicos, y en particular en lo que respecta a la ecuación de Euler, la ecuación linealizada no es (incondicionalmente) controlable.

Esta relación entre la desigualdad de observabilidad y el problema de controlabilidad se denomina HUM y se introducirá enseguida.

2.2. HUM: Método de la Unicidad de Hilbert para la Ecuación del Calor

En el análisis de sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales, la noción de controlabilidad juega un papel crucial. La capacidad de controlar el comportamiento de un sistema mediante la aplicación de ciertas entradas es esencial en numerosos campos de la ciencia y la ingeniería. El Método de Unicidad de Hilbert (HUM) se presenta como una herramienta valiosa para abordar problemas de controlabilidad en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales. En esta sección, exploraremos la aplicación del HUM a problemas de controlabilidad, centrándonos específicamente en la ecuación del calor.

2.2.1. La Ecuación del Calor

La ecuación del calor modela la propagación o difusión del calor a través de un medio en función del tiempo, siendo fundamental para comprender y predecir el comportamiento térmico en diversas situaciones. Fue Joseph Fourier quien la presentó por primera vez en 1822 en su obra [16], donde también desarrolló la teoría de la transformada de Fourier. A lo largo de los años, esta ecuación ha sido objeto de estudio y aplicación por parte de varios matemáticos destacados. Entre ellos se encuentran Siméon D. Poisson, quien junto con Fourier trabajó en la resolución de problemas relacionados con el flujo de calor en sólidos. Además, Carl G. Jacob proporcionó una solución particularmente relevante para la ecuación del calor en un cilindro, mientras que William Thomson introdujo el concepto de la ecuación del calor con una fuente de calor.

La utilidad de la ecuación de calor se extiende a una amplia gama de campos científicos, algunas de las aplicaciones más comunes son:

- Geofísica y ciencias planetarias: Se aplica la ecuación del calor para modelar la propagación del calor en el interior de planetas, lunas y otros cuerpos celestes, lo que ayuda a comprender los procesos geológicos y térmicos que ocurren en estos objetos.

- Meteorología y climatología: En la meteorología y la climatología, la ecuación del calor se utiliza en modelos climáticos para simular la transferencia de calor en la atmósfera, los océanos y la superficie terrestre, lo que permite predecir el clima y el tiempo atmosférico.

- Ingeniería térmica: La ecuación del calor se utiliza ampliamente en ingeniería térmica para diseñar sistemas de calefacción, refrigeración y ventilación en edificios, así como para optimizar el diseño de intercambiadores de calor en procesos industriales.

- Procesamiento de materiales: En la fabricación y procesamiento de materiales, la ecuación del calor se utiliza para predecir y controlar la distribución de temperaturas durante la soldadura, el templado, la fundición y otros procesos.

- Electrónica y microelectrónica: En el diseño de dispositivos electrónicos y microelectrónicos, la ecuación del calor es crucial para comprender y gestionar la disipación de calor en circuitos integrados, microprocesadores y otros componentes electrónicos para evitar el sobrecalentamiento y el fallo.

- Biología y medicina: En biología y medicina, la ecuación del calor se emplea para modelar la transferencia de calor en tejidos biológicos, como en la termoterapia para el tratamiento del cáncer o en la criogenia para la conservación de tejidos biológicos.

La ecuación de calor proporcionan un lenguaje preciso y formal para describir relaciones y regularidades en fenómenos naturales, sistemas físicos, procesos matemáticos y modelos teóricos.

Permite entender y predecir el comportamiento de sistemas complejos, proporcionando herramientas para la resolución de problemas, la toma de decisiones y el avance del conocimiento en diversas disciplinas. Permite formular leyes, teorías y modelos que son fundamentales para entender el mundo que nos rodea y desarrollar tecnologías innovadoras que impactan en nuestra vida diaria.

2.2.2. Buen Planteamiento de la Ecuación del Calor

El propósito de esta sección es examinar y establecer resultados que sirvan como base para el tratamiento de problemas de controlabilidad de la ecuación de calor. Primero veamos las nociones de controlabilidad de manera general. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^2 y $\omega \subset \Omega$ abierto, $\omega \neq \emptyset$. Dado $T > 0$ se considera la siguiente ecuación no homogénea:

$$\begin{cases} P(D)u(t,x) = v1_\omega & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ B(D)u = 0 & \text{en } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,\cdot) = u^0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

Donde P es un polinomio, $D := (-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n})$, además $u = u(t,x)$ es el estado y $v = v(t,x)$ es la función de control interior.

Definición 2. *El sistema (2.2) es aproximadamente controlable en un tiempo T si para todo u^0 y u^1 en H y $\epsilon > 0$, existe un control v tal que*

$$\|u(T,x) - u^1(x)\|_H < \epsilon,$$

donde u es solución de (2.2).

Definición 3. *El sistema (2.2) es exactamente controlable en un tiempo T si para todo u^0 y u^1 en H , existe un control v tal que $u(T,x) = u^1(x)$, donde u es solución de (2.2).*

Definición 4. *El sistema (2.2) se dice controlable nulo en un tiempo T si para todo u^0 en H , existe un control v tal que $u(T,x) = 0$, donde u es solución de (2.2).*

Podemos redefinir estas tres nociones de controlabilidad en la siguiente forma: Sea $T > 0$ y definamos, por cada dato inicial $u^0 \in X$, **el conjunto de estados alcanzables**

$$R\left(T; u^0\right) = \{u(T,\cdot) : u \text{ solución de (2.2) con } v \in H\}.$$

Un elemento de $R\left(T, u^0\right)$ es un estado de (2.2) alcanzable en tiempo T comenzando desde u^0 con la ayuda de un control v. Así podemos tener las siguientes definiciones:

Definición 5. *El sistema* (2.2) *es aproximadamente controlable en tiempo T si, para cada dato inicial $u^0 \in L^2(\Omega)$, el conjunto de estados alcanzables $R\left(T; u^0\right)$ es denso en $L^2(\Omega)$.*

Definición 6. *El sistema* (2.2) *es exactamente controlable en tiempo T si, para cada dato inicial $u^0 \in L^2(\Omega)$, el conjunto de estados alcanzables $R\left(T; u^0\right)$ coincide con $L^2(\Omega)$.*

Definición 7. *El sistema* (2.2) *es controlable nulo en tiempo T si, para cada dato inicial $u^0 \in L^2(\Omega)$, el conjunto de estados alcanzables $R\left(T; u^0\right)$ contiene el elemento 0.*

En este sentido caben las siguientes observaciones

- Como el único subconjunto denso y convexo en $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$ entonces en dimensión finita la controlabilidad aproximada y la controlabilidad exacta son equivalentes. Sin embargo en sistemas de dimensión infinita (como la ecuación de calor), estas nociones no coinciden.
- La linealidad del sistema bajo consideración implica que $R\left(T, u^0\right) = R(T, 0) + S(T)u^0$ y, en consecuencia, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $u^0 = 0$.
- En el caso de la ecuación del calor (2.3), por su efecto de regularización, las soluciones están en C^∞ lejos del borde en el tiempo $t = T$. Por lo tanto, los elementos de $R\left(T, u^0\right)$ son funciones C^∞ en $[0, 1)$. Entonces, la controlabilidad exacta puede no cumplirse.
- Es fácil ver que si la controlabilidad nula se cumple, entonces cualquier dato inicial puede llevarse a cualquier estado final de la forma $S(T)v^0$ con $v^0 \in L^2(\Omega)$. De hecho, sean $u^0, v^0 \in L^2(\Omega)$ y observe que $R\left(T; u^0 - v^0\right) = R\left(T; u^0\right) - S(T)v^0$. Dado que $0 \in R\left(T; u^0 - v^0\right)$, se sigue que $S(T)v^0 \in R\left(T; u^0\right)$.
- La controlabilidad nula implica la controlabilidad aproximada. De hecho, tenemos que $S(T)\left[L^2(\Omega)\right] \subset R\left(T; u^0\right)$ y $S(T)\left[L^2(\Omega)\right]$ es denso en $L^2(\Omega)$.
- Nótese que $u^1 \in R\left(T, u^0\right)$ si y solo si existe una secuencia $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de controles tal que
$$\left\|u(T) - u^1\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$$
está acotada en $L^2(0, T)$. De hecho, en este caso, cualquier límite débil en $L^2(0, T)$ de la secuencia $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ da un control exacto que hace que $u(T) = u_1$.

Ahora nos enfocamos en la ecuación de calor, teniendo en cuenta que es interesante estudiar la controlabilidad de esta ecuación como uno de los modelos para una gran clase de fenómenos físicos, al mismo tiempo, como una de las ecuaciones más representativas en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. Formularemos el problema como sigue: Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^2 y $\omega \subset \Omega$ abierto, $\omega \neq \emptyset$. Dado $T > 0$ se considera la siguiente ecuación de calor no homogénea:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v1_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

En el sistema $u = u(t, x)$ es el estado y $v = v(t, x)$ es la función de control interior con soporte localizado en ω. Inicialmente, debemos establecer el buen planteamiento del módelo (existencia, unicidad y dependencia continua). El siguiente resultado es estándar y es conocido a través de la aplicación de semigrupo de operadores (ver Pazy [**?**]).

Teorema 4. *Para cualquier $v \in L^2((0, T) \times \omega)$ y $u^0 \in L^2(\Omega)$. La ecuación de calor 2.3 tiene una única solución débil*
$$u \in C\left([0, T], L^2(\Omega)\right)$$
dada por la fórmula de variación de las constantes
$$u(t) = S(t)u^0 + \int_0^t S(t - s)v(s)1_\omega ds \tag{2.4}$$
donde $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ es el semigrupo de contracciones generado por el operador de calor en $L^2(\Omega)$. Más aún, si $v \in W^{1,1}((0, T), L^2(\omega))$ y $u^0 \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\Omega)$ la ecuación (2.3) tiene una solución clásica
$$u \in C^1\left([0, T], L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0, T], H^2(\omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$$
y u satisface (2.3) en $L^2(\Omega)$ $\forall t > 0$.

Recordemos la clásica estimativa de energía para la ecuación del calor. Multiplicando en (2.3) por u e integrando en Ω obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\Delta u|^2 dx = \int_\Omega vudx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx. \tag{2.5}$$

por lo tanto la función escalar $E(t) = \int_\Omega |u(t), \cdot|^2 dx$ satisface

$$E'(t) \leq E(t) + \int_\Omega |v|^2 dxd,$$

con la desigualdad de Gronwall se tiene

$$E(t) \leq E(0)e^t + \int_0^t \int_\Omega |v|^2 dxds \leq E(0)e^t + \int_0^T \int_\Omega |v|^2 dxdt.$$

Por otro lado integrando 2.5, con respecto a t, se sigue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx|_0^T + \int_0^T \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega u^2 dxdt.$$

Como $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, entonces $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, por lo que cuando $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $v \in L^2(0,T;L^2(\omega))$ la solución u verifica que

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Con estas estimativas de energía y con la ganancia propia de la regularidad de las soluciones, podemos establecer los primeros resultados sobre la controlabilidad nula de la ecuación del calor. Como lo notamos antes ***La noción de controlabilidad nula es particularmente importante para sistemas (irreversibles) que tienen un efecto de regularización, ya que en ese caso, no se puede esperar que la controlabilidad exacta se cumpla.***

Nuestro enfoque será puramente variacional, ya que nuestro objetivo es aplicar el método de la Unicidad de Hilbert (HUM), que involucra tres aspectos importantes: el estudio del problema adjunto y el análisis de la propiedad de observabilidad mediante la minimización de cierto funcional.

2.2.3. Controlabilidad Nula: Enfoque variacional y observabilidad, HUM.

En esta parte mostraremos como funciona el método de la unicidad de Hilbert para el caso de la ecuación de calor con la presencia de un control interno. Inicialmente, mostremos una condición necesaria y suficiente para para que se cumpla la controlabilidad nula de (2.3). Se denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto dualidad/interno de $L^2(\Omega)$.

Lema 1. *El control $v \in L^2((0,T)\times\omega)$ dirige el valor inicial $u^0 \in L^2(\Omega)$ del sistema (2.3) a 0 en el tiempo T si y solo si dado $\varphi \in C([0,T], L^2(\Omega))$ solución débil del sistema adjunto*

$$\begin{cases} \varphi_t - \Delta\varphi = 0 & en\ (0,T)\times\Omega \\ \varphi = 0 & en\ (0,T)\times\partial\Omega \\ \varphi(T,\cdot) = \varphi_T^0, & en\ \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

tenemos que para todo $\varphi_T^0 \in L^2((0,T)$ se cumple

$$\int_0^T \int_\omega \varphi v dxdt = \langle \varphi(0), u^0 \rangle, \tag{2.7}$$

Demostración. Supongamos que $u^0, \varphi_T^0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}((0,T)\times\omega)$ y sean u y φ las soluciones de (2.3) y (2.6), respectivamente. Multiplicando la ecuación de (2.3) por φ e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\omega \varphi v dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \varphi(u_t-\Delta u)dxdt = \int_0^T\int_\omega \varphi u_t dxdt - \int_0^T\int_\omega \Delta u\varphi dxdt\\ &= -\int_\Omega (\varphi u)dx|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T\int_\Omega u(\varphi_t-\Delta\varphi)dxdt = -\int_\Omega \varphi(T)u(T)dx + \int_\Omega \varphi(0)u(0)dx\\ &= -\int_\Omega \varphi_T^0 u(T)dx + \int_\Omega \varphi(0)u^0dx\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}((0,T)\times\omega)$ son densos en $L^2(\Omega)$ y $L^2((0,T)\times\omega)$, respectivamente. Podemos usar un un argumento de densidad, lo cuál nos permite deducir que al considerar límite para cualquier $u^0 \in L^2(\Omega)$ y $\varphi_T^0 \in L^2(\Omega)$, se sigue

$$\int_0^T\int_\omega \varphi v dxdt = -\langle \varphi_T^0, u(T)\rangle + \langle \varphi(0), u^0\rangle.$$

De esto se sigue que (2.7) se cumple si y sólo si u_0 es controlable a cero y v es el control correspondiente. Esto completa la demostración. □

La relación (2.7) puede verse como una condición de optimalidad para los puntos críticos del funcional $\mathcal{J} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(\varphi^0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \langle \varphi^0, u^0\rangle,$$

donde φ es la solución de

$$\begin{cases}\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & \text{en } (0,T)\times\Omega\\ \varphi = 0 & \text{en } (0,T)\times\partial\Omega\\ \varphi(0,\cdot) = \varphi^0, & \text{en } \Omega.\end{cases} \tag{2.8}$$

Teorema 5. *Sea $u^0 \in L^2(\Omega)$ y suponga que $\widehat{\varphi}_T^0 \in L^2(\Omega)$ es el mínimo de $\mathcal{J}$. Si $\widehat{\varphi}$ es la correspondiente solución de (2.6) con valor inicial $\widehat{\varphi}^T$ entonces*

$$v = \widehat{\varphi}|_\omega$$

es un control que dirige u^0 a cero en el tiempo T.

Demostración. Como $\mathcal{J}$ alcanza un mínimo en $\widehat{\varphi}_T^0$ entonces se cumple que

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{J}((\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0) - \mathcal{J}(\widehat{\varphi}^0)}{h}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\widehat{\varphi}|^2 dxdt - \langle \varphi^0, u^0\rangle,\end{aligned}$$

Así al aplicar el lema 1 se cumple lo que buscábamos. □

Así en dirección a obtener una condición suficiente para tener la controlabilidad nula, determinaremos las condiciones mínimas para garantizar la existencia del mínimo para $\mathcal{J}$. En este punto, tenemos la relación que existe entre la observabilidad del problema adjunto y la controlabilidad del sistema original.

Definición 8. *La ecuación (2.3) se dice nulamente observable en el tiempo T si existe una contante positiva $C > 0$ tal que la siguiente desigualdad se satisface*

$$\underbrace{\|\varphi^0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt}_{\text{Desigualdad de observabilidad}} \tag{2.9}$$

para cada $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ donde φ es la solución de (2.8) con valor inicial φ^0.

Note que la continua dependencia del problema homogéneo del calor con condición de Diriclhet con respecto a sus valores iniciales garantiza que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt \leq C\|\varphi^0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

para todo $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ y φ solución de (2.8).

Demostremos que (2.9) es una condición suficiente para que se cumpla la propiedad de controlabilidad nula. En primer lugar, recordemos el siguiente resultado fundamental en el Cálculo de Variaciones:

Teorema 6. *Sea H un espacio de Banach reflexivo, K un subconjunto convexo de H y $\varphi : K \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:*

1. *φ es convexo.*
2. *φ es semi-continuo inferior.*
3. *Si K no es acotado entonces φ es coercivo, es decir,*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty.$$

Entonces φ alcanza su mínimo en K, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x\in K} \varphi(x).$$

Así, usando el Teorema 6 podemos garantizar la existencia del mínimo a partir del cumplimiento de la desigualdad de observabilidad.

Teorema 7. *Sea $u^0 \in L^2(\Omega)$ y suponga que la desigualdad de observabilidad (2.9) se satisfacen entonces el sistema (2.3) es nulamente controlable en el tiempo T, es decir el funcional $\mathcal{J}$ definido anteriormente tiene un único minimizador $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$.*

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{J}$ es continuo y convexo. Por tanto, según el Teorema 6, la existencia de un mínimo está asegurada si demostramos que $\mathcal{J}$ también es coercivo, es decir,

$$\lim_{\|(\varphi^0,\varphi^1)\|_{L^2\times H^{-1}}\to\infty} \mathcal{J}(\varphi^0, \varphi^1) = \infty.$$

La coercividad del funcional $\mathcal{J}$ se sigue inmediatamente por la desigualdad de observabilidad (2.9). En efecto, note que utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de observabilidad, se sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\varphi^0) &\geq \frac{1}{2}\left(\int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 - \|u^0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\geq \frac{C}{2}\|\varphi^0\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u^0\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

De esto se sigue la coercividad, y por el Teorema 6, $\mathcal{J}$ tiene un mínimo $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$. Para probar la unicidad del minimizador es suficiente mostrar que $\mathcal{J}$ es estrictamente convexo. De hecho, Sea $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ y $\lambda \in (0,1)$, así tenemos que

$$\mathcal{J}(\lambda\varphi^0 + (1-\lambda)\psi^0) = \lambda\mathcal{J}(\varphi^0) + (1-\lambda)\mathcal{J}(\psi^0) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi-\psi|^2 dxdt.$$

de (2.9) se sigue que

$$\int_0^T\int_\omega |\varphi-\psi|^2 dxdt \geq C\|\varphi^0-\psi^0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

por lo tanto, para cualquier $\varphi^0 \neq \psi^0$,

$$\mathcal{J}(\lambda(\varphi^0) + (1-\lambda)(\psi^0)) < \lambda\mathcal{J}(\varphi^0) + (1-\lambda)\mathcal{J}(\psi^0)$$

y así $\mathcal{J}$ es estrictamente convexo. □

Los anteriores resultados garantizan que, bajo la hipótesis de la desigualdad (2.9), el sistema (2.3) es nulamente controlable. Además, un control puede obtenerse a partir de la solución de la ecuación homogénea (2.8) con los datos iniciales que minimizan la función $\mathcal{J}$. Por lo tanto, el problema de controlabilidad se reduce a un problema de minimización que puede resolverse mediante el Método Directo del Cálculo de Variaciones. Esto es muy útil tanto desde un punto de vista teórico como numérico.

Finalmente, La siguiente proposición muestra que el control obtenido por esta forma variacional es de $L^2((0,T)\times\omega)-$norma mínima.

Proposición 1. *Sea $v = \widehat{\varphi}|_\omega$ el control dado por la minimización del funcional $\mathcal{J}$. Si $g \in L^2((0,T)\times\omega)$ es otro control que envía el valor inicial u^0 a cero, entonces*

$$\|v\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq \|g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

Demostración. Sea $\widehat{\varphi}^0$ el minimizador del funcional $\mathcal{J}$. Considere ahora la relación del control

$$v = \widehat{\varphi}|_\omega.$$

Tomando $(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\varphi}^1)$ como la función test tenemos que

$$\|v\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} = \int_0^T\int_\omega |\widehat{\varphi}|^2 dxdt = \langle\widehat{\varphi}^0, u^0\rangle.$$

por otro lado, la relación de control dada en el Lema 1 para el control g y la función test $\widehat{\varphi}^0$ da

$$\int_0^T\int_\omega g\widehat{\varphi} dxdt = \langle\widehat{\varphi}^0, u^0\rangle.$$

Así tenemos que

$$\|v\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} = \int_0^T\int_\omega g\widehat{\varphi} dxdt \leq \|g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}\|\widehat{\varphi}\|_{L^2((0,T)\times\omega)} = \|g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}\|v\|_{L^1((0,T)\times\omega)}.$$

□

2.3. Resultados de Controlabilidad para la Ecuación de Calor

En esta sección veremos algunos resultados que se tienen y son clásicos referentes a la controlabilidad de la ecuación del calor.

2.3.1. Controlabilidad Aproximada

Dado cualquier $T > 0$ y cualquier subconjunto no vacío y abierto Ω de $\mathcal{O}$, en esta sección analizamos el problema de la controlabilidad aproximada del sistema (2.3). De hecho, como demostraremos en el próximo teorema, es posible reducir el problema de la controlabilidad aproximada a un problema de continuación única sin necesidad de recurrir a un argumento de observabilidad. Para ilustrar este punto, presentamos las ideas generales. Sin embargo, nuestro objetivo principal es presentar la interacción entre la controlabilidad y la observabilidad mediante un enfoque variacional.

Teorema 8. *Sea ω un conjunto abierto no vacío de Ω y $T > 0$. Entonces el sistema* (2.3) *es aproximadamente controlable en tiempo T.*

Demostración. Como se dijo anteriormente es suficiente considerar el caso $u^0 = 0$, Así que asumamos que $u^0 = 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, $R(T, u^0)$ es denso en $L^2(\Omega)$ si la siguiente propiedad se satisface:

- No existe $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, $\varphi_T \neq 0$ tal que $\int_\Omega u(T)\varphi_T dx = 0$ para todo u solución del sistema (2.3) con $v \in L^2(\omega \times (0,T))$.

Por lo tanto la prueba puede reducirse a mostrar que:

- Si $\varphi_T \in L^2(\Omega)$ es tal que $\int_\omega u(T)\varphi_T dx = 0$, para toda solución u de (2.3) entonces $\varphi_T = 0$.

Para hacer esto vamos a considerar el sistema adjunto

$$\begin{cases} \varphi_t + \Delta\varphi = 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 & \text{en } (0,T) \times \partial\Omega \\ \varphi(T) = \varphi_T & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

Multiplicamos la ecuación satisfecha por φ por u y entonces la ecuación de u por φ. Haciendo integración por partes y teniendo en cuenta que $u^0 = 0$ se obtiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega v\varphi dxdt &= \int_{\Omega\times(0,T)} (u_t - \Delta u)\varphi dxdt \\ &= -\int_{\Omega\times(0,T)} (\varphi_t + \Delta\varphi)u \, dx \, dt + \int_\Omega u\varphi dx|_0^T + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\tau dt \\ &= \int_O u(T)\varphi_T dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega u(T)\varphi_T \, dx = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \int_0^T \int_\omega v\varphi \, dx \, dt = 0.$$

Si la última relación se cumple para cualquier $v \in L^2(\omega \times (0,T))$, deducimos que $\varphi = 0$ en $\omega \times (0,T)$.

Ahora notemos que $P = \partial_t + \Delta_x$ es un operador diferencial en $\mathbb{R}^{n+1}$ y su parte principal es $P_p = \Delta_x$. Un hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ es característico si su vector normal $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un cero

de P_p es decir de $P_p(\xi,\zeta)=|\xi|^2$. por lo tanto, los vectores normales son de la forma $(0,\pm 1)$ y los hiperplanos característicos son horizontales, paralelos al hiperplano $t=0$. Por lo tanto, para la ecuación de calor adjunta bajo consideración (2.10) podemos aplicar el teorema de unicidad de Holmgren (45) con $Q_1=(0,T)\times\Omega, Q_2=(0,T)\times\omega$ y $Q_3=(0,T)\times\Omega$.. Entonces el hecho de que $\varphi=0$ en $(0,T)\times\omega$ implica que $\varphi=0$ en $(0,T)\times\Omega$. Por lo tanto $\varphi_T=0$. $\square$

Ahora veremos una prueba del teorema anterior siendo esta una prueba más constructiva y con la virtud que permite calcular controles aproximados explícitamente. Consideremos nuevamente un tiempo control fijo $T>0$ y un valor inicial $u^0=0$. Sea $u^1\in L^2(\Omega)$ el valor final y $\epsilon>0$ dados. Recordemos que estamos buscando un control f tal que la solución de (2.3) satisfaga

$$\|u(T)-u_1\|_{L^2(\Omega)}\leq\epsilon.$$

Definimos el siguiente funcional, $\mathcal{J}_\epsilon : L^2(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por:

$$\mathcal{J}_\epsilon(\varphi_T)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega\varphi^2\,dx\,dt+\epsilon\|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)}-\int_\Omega u_1\varphi_T\,dx$$

donde φ es la solución de la ecuación adjunta (2.10) con valor inicial φ_T. El siguiente lema asegura que el mínimo de $\mathcal{J}_\epsilon$ da un control para nuestro problema.

Lema 2. *Si $\hat{\varphi}_T$ es un punto minimal de $\mathcal{J}_\epsilon$ en $L^2(\Omega)$ y $\hat{\varphi}$ es la solución del problema adjunto* (2.10) *con valor inicial $\hat{\varphi}_T$, entonces $v=\hat{\varphi}|_\omega$ es un control de* (2.3)*, tal que la solución del problema satisface* (2.10)*.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{J}_\epsilon$ alcanza su mínimo en $\hat{\varphi}_T\in L^2(\Omega)$, Entonces para cualquier $\psi_0\in L^2(\Omega)$ y $h\in\mathbb{R}$ tenemos

$$\mathcal{J}_\epsilon(\hat{\varphi}_T)\leq\mathcal{J}_\epsilon(\hat{\varphi}_T+h\psi_0).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}J(\hat{\varphi}_T+h\psi_0)&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|\hat{\varphi}+h\psi|^2\,dx\,dt+\epsilon\|\hat{\varphi}_T+h\psi_0\|_{L^2(\Omega)}-\int_\Omega u_1(\hat{\varphi}_T+h\psi_0)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega|\hat{\varphi}|^2\,dx\,dt+\frac{h^2}{2}\int_0^T\int_\omega|\psi|^2\,dx\,dt+h\int_0^T\int_\omega\hat{\varphi}\psi\,dx\,dt+\\&\quad\epsilon\|\hat{\varphi}_T+h\psi_0\|_{L^2(\Omega)}-\int_\Omega u_1(\hat{\varphi}_T+h\psi_0)\,dx.\end{aligned}$$

Así

$$\epsilon\left[\|\hat{\varphi}_T+h\psi_0\|_{L^2(\Omega)}-\|\hat{\varphi}_t\|_{L^2(\Omega)}\right]+\frac{h^2}{2}\int_{(0,T)\times\omega}\psi^2\,dx\,dt+h\left[\int_0^T\int_\omega\hat{\varphi}\psi dxdt-\int_\Omega u_1\psi_0dx\right]\geq 0$$

. Dado que

$$\|\hat{\varphi}_T+h\psi_0\|_{L^2(\Omega)}-\|\hat{\varphi}_T\|_{L^2(\Omega)}\leq|h|\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}$$

obtenemos

$$0\leq\epsilon|h|\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}+\frac{h^2}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2\,dx\,dt+h\int_0^T\int_\omega\hat{\varphi}\psi\,dx\,dt-h\int_\Omega u_1\psi_0\,dx$$

para todo $h\in\mathbb{R}$ y $\psi_0\in L^2(\Omega)$. Dividiendo por $h>0$ y pasando al limite $h\to 0$ obtenemos

$$0\leq\epsilon\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\omega\hat{\varphi}\psi\,dx\,dt-\int_\Omega u_1\psi_0\,dx.$$

Similarmente con $h < 0$ se sigue

$$\left| \int_0^T \int_\omega \hat{\varphi}\psi \, dx \, dt - \int_\Omega u_1 \psi_0 \, dx \right| \leq \epsilon \|\psi\|, \qquad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega).$$

Además, si tomamos el control $v = \hat{\varphi}$ en (2.3). multiplicando (2.3) por ψ solución de (2.10) e integrando por partes, tenemos

$$\int_0^T \int_\omega \hat{\varphi}\psi \, dx \, dt = \int_\Omega u(T)\psi_0 \, dx.$$

de las desigualdades anteriores se sigue que

$$\left| \int_\Omega (u(T) - u_1)\psi_0 \, dx \right| \leq \epsilon \|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall \psi_0 \in L^2(\Omega)$$

la cual es equivalente a

$$\|u(T) - u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

□

Por lo tanto, el lema anterior sugiere que el problema de controlabilidad aproximada se reduce a la optimización de cierto funcional.

Lema 3. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\hat{\varphi}_T \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$J_\varepsilon(\hat{\varphi}_T) = \operatorname*{mín}_{\varphi_T \in L^2(\Omega)} \mathcal{J}_\varepsilon(\varphi_T) \to \infty \quad \textit{cuando } \|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)} \to \infty.$$

Demostración. Es fácil ver que J es convexo y continuo en $L^2(\Omega)$. Por el Teorema 6, la existencia de un mínimo está asegurada siempre que J_ε es un funcional coercivo, es decir:

$$J_\varepsilon(\varphi_T) \to \infty \text{ cuando } \|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)} \to \infty.$$

De hecho probaremos que

$$\operatorname*{lím}_{\|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)} \to \infty} J_\varepsilon(\varphi_T)/\|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)} \geq \epsilon.$$

y ya con esto tenemos que la prueba del Lema estaría terminada. En efecto, consideremos entonces $(\varphi_{T,j}) \subset L^2(\Omega)$ una secuencia de valores iniciales del sistema adjunto con $\|\varphi_{T,j}\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Normalizándolos

$$\tilde{\varphi}_{T,j} = \varphi_{T,j}/\|\varphi_{T,j}\|_{L^2(\Omega)},$$

y así $\|\tilde{\varphi}_{T,j}\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Por otro lado, $\tilde{\varphi}_j$ es la solución del problema adjunto (2.10) con valor final $\tilde{\varphi}_{T,j}$. Entonces

$$J_\varepsilon(\varphi_{T,j})/\|\varphi_{T,j}\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|\varphi_{T,j}\|_{L^2(\Omega)} \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 dxdt + \epsilon - \int_\Omega u_1 \tilde{\varphi}_{T,j} dx.$$

Es importante notar que pueden darse los siguientes dos casos:

1. $\liminf_{j\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 > 0$. En este caso tenemos inmediatamente que

$$J_\varepsilon(\varphi_T)/\|\varphi_{T,j}\|_{L^2(\Omega)} \to \infty.$$

2. $\liminf_{j\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 = 0$. En este caso como $\tilde{\varphi}_{T,j}$ es acotada en $L^2(\Omega)$, extrayendo una secuencia podemos garantiza que $\tilde{\varphi}_{T,j} \rightharpoonup \psi_0$ debilmente en $L^2(\Omega)$ y $\tilde{\varphi}_j \rightharpoonup \psi$ debilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cup H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, donde ψ es la solución de (2.10) con valor inicial ψ_0 en $t = T$. Además por la semicontinuidad inferior,

$$\int_0^T \int_\omega \psi^2 \, dx \, dt \leq \liminf_{i\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\tilde{\varphi}_j|^2 \, dx \, dt = 0$$

y por lo tanto $\psi = 0$ en $\omega \times (0,T)$. El Teorema de Unicidad de Holmgren (45) implica que $\psi = 0$ en $\Omega \times (0,T)$ y por consecuencia $\psi_0 = 0$. Así $\tilde{\varphi}_{T,j} \rightharpoonup 0$ debilmente en $L^2(\Omega)$ y por consiguiente $\int_\Omega u_1 \tilde{\varphi}_{T,j} \, dx$ tiende a 0 también. Por lo tanto

$$\lim_{j\to\infty} \frac{J(\varphi_{T,j})}{\|\varphi_{T,j}\|} \geq \lim_{j\to\infty} \left[\epsilon - \int_\Omega u_1 \tilde{\varphi}_{T,j} \, dx \right] = \epsilon$$

como se quería.

□

Los dos Lemas anteriores proporcionan una segunda prueba del Teorema que determina la controlabilidad aproximada de la ecuación . Este enfoque no solo garantiza la existencia de un control, sino que también proporciona un método para obtener el control al minimizar un funcional convexo, continuo y coercitivo en $L^2(\Omega)$. Además, en la prueba de la coercitividad, la relevancia del término $\varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)}$ es clara. De hecho, la coercitividad de $\mathcal{J}_\varepsilon$ depende en gran medida de este término. Esto no es solo por razones técnicas. La existencia de un mínimo de J_ε con $\varepsilon = 0$ implica la existencia de un control que hace que $u(T) = u^1$. Pero esto no es cierto a menos que u^1 sea muy regular en $\Omega \backslash \omega$. Por lo tanto, para u^1 general en $L^2(\Omega)$, se necesita el término $\varepsilon \|\varphi_T\|_{L^2(\Omega)}$. Finalmente, nótese que ambas pruebas se basan en la propiedad de continuación única, que garantiza que si φ es una solución del sistema adjunto tal que $\varphi = 0$ en $\omega \times (0,T)$, entonces $\varphi \equiv 0$. Como hemos visto, esta propiedad es una consecuencia del Teorema de Unicidad de Holmgren. Este enfoque no solo garantiza la existencia de un control, sino que también proporciona un método para obtener el control al minimizar un funcional convexo, continuo y coercitivo en $L^2(\Omega)$.

2.3.2. Controlabilidad Nula

Nuestro objetivo aquí es mostrar el resultado de controlabilidad nula para la ecuación de calor con un control interno con condiciones de Dirichlet. Como determinamos en la sección 2.2.3. No obstante, para ampliar la discusión estableceremos el resultado utilizando la notación de semigrupos de operadores lineales. Así, consideramos $S(t)$ el semigrupo de calor para condiciones de frontera Dirichlet homogeneas para el cual $S(t)y_0 = y(t)$

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, y = 0, & \text{en } Q = (0,T) \times \Omega, \\ y|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0. \end{cases}$$

por el teorema de Hille-Yoshida, $-\Delta$ genera un C_0-semigrupo analítico. Sea $\omega \subset \Omega$, consideremos el siguiente operador

$$\begin{aligned} L_t : L^2((0,t) \times \Omega) &\to L^2(\Omega) \\ v &\mapsto \int_0^t S(t-s) 1_\omega v(s) ds. \end{aligned}$$

Por lo que la solución a

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\, y = 1_\omega v, \text{ en } Q = (0,T) \times \Omega, \\ y|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

es de la forma

$$y(t) = S(t)y_0 + L_t v.$$

Con estas notaciones de semigrupo y del operador L_t, podemos redifinir las nociones de controlabilidad para la ecuación del calor de la siguiente forma:

Definición 9. *El sistema* (2.11) *es* **aproximadamente controlable** *en tiempo T si para cualquier $y_0, y_T \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $v \in L^2(Q)$ tal que $\|y_T - y(T)\| \leq \varepsilon$.* **Esto es equivalente a tener que el rango de L_T, $R(L_T)$ es denso en $L^2(\Omega)$.**

Definición 10. *El sistema* (2.11) *es* **nulamente controlable** *en tiempo T si para cualquier $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe $v \in L^2(Q)$ tal que $y(T) = 0$.* **Esto es equivalente a tener que el rango de L_T, $R(L_T)$ posee todas las trayectorias naturales en tiempo T:**

$$\forall y_0 \in L^2(\Omega), \quad S(T)y_0 \in R(L_T).$$

Teorema 9. *Sea $\omega \subset \Omega$. la ecuación de calor tiene controlabilidad nula por una función control que actúa en $(0,T) \times \omega$, es decir, el siguiente sistema tiene solución*

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v1_\omega & x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T) \\ y(0,t) = 0, & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0), \end{cases}$$

donde 1_ω es la función característica de ω y la función v es el control.

Este resultado fue demostrado por G. Lebeau y L. Robbiano en [26] y A. Fursikov y O. Yu. Imanuvilov en [17]. Los dos enfoques que desarrollaron son diferentes y complementarios. Para una presentación sintética del método Lebeau-Robbiano nos remitimos a [27]. Aquí seguimos el segundo enfoque, utilizando un sistema parabólico global. La estimación de Carleman implica directamente una estimación de observabilidad, que, a su vez, produce una controlabilidad nula.

Todavía no se comprenden bien las discrepancias entre estos dos enfoques: el método Fursikov-Imanuvilov permite tratar coeficientes dependientes del tiempo. El método Lebeau-Robbiano proporciona un conocimiento preciso del coste del control para los modos propios inferiores del operador elíptico y una estimación asintótica del coste del control a corto plazo. (see e.g. [34, 42]).

En este sentido recordemos las desigualdades de Carlmann para la ecuación del calor:
Inicialmente elegimos una función de peso global que cumple con los siguientes requisitos.

Suposición 1. *Sea $\omega_0 \Subset \omega \Subset \Omega$. La función de peso $\varphi(x)$ satisface*

$$\begin{aligned} &\varphi|_{\partial\Omega} = \text{Cst}, \quad \partial_n \varphi|_{\partial\Omega} < 0, \quad \left|\varphi'(x)\right| \neq 0, x \in \Omega \backslash \omega_0, \\ &a_2 = 0 \Rightarrow \{a_2, a_1\} > 0, \quad x \in \Omega \backslash \omega_0. \end{aligned}$$

Teorema 10. *(Estimación de Carleman global - caso parabólico). Sea φ una función que satisface la Suposición 1. Entonces existen $\tau_1 > 0$ y $C \geq 0$ tales que*

$$\tau^3 \left\| \theta^{\frac{3}{2}} e^{\tau\theta\varphi} u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau \left\| \theta^{\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \nabla_x u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^{-1} \left\| \theta^{-\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \partial_t u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^{-1} \sum_{1\leq j,k\leq n} \left\| \theta^{-\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \partial^2_{jk} u \right\|^2_{L^2(Q)} \leq C \left(\left\| e^{\tau\theta\varphi} Pu \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^3 \left\| \theta^{\frac{3}{2}} e^{\tau\theta\varphi} u \right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} \right),$$

para $u \in \mathscr{C}^\infty([0,T]\times\bar{\Omega})$, tal que $u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0$, y $\tau \geq \tau_1 \left(T + T^2\right)$.

De manera similar, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 11. *(Estimación de Carleman global - caso parabólico). Sea $\omega_0 \Subset \omega \subset \Omega$. Sea ψ una función que satisface $\left|\tilde{\psi}'\right| \geq C > 0$ en $\bar{V}\backslash\omega_0$, $\tilde{\psi}\Big|\partial\Omega = Cst$, y $\partial_n\tilde{\psi}\Big|\partial\Omega \cap V < 0$. Definimos $\psi = \tilde{\psi} + K_0$ con $K_0 = m|\tilde{\psi}|_\infty$ y $m > 1$ y*

$$\phi = e^{\gamma\psi}, \quad \varphi = e^{\gamma\psi} - e^{\gamma\bar{\psi}} < 0,$$

donde $\bar{\psi} = 2m|\tilde{\psi}|_\infty$. Entonces existen $\tau_1 > 0, \gamma_1 > 0$, y $C \geq 0$ tales que

$$\tau^3\gamma^4 \left\| (\theta\phi)^{\frac{3}{2}} e^{\tau\theta\varphi} u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau\gamma^2 \left\| (\theta\phi)^{\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \nabla_x u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^{-1} \left\| (\theta\phi)^{-\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \partial_t u \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^{-1} \sum_{1\leq j,k\leq n} \left\| (\theta\phi)^{-\frac{1}{2}} e^{\tau\theta\varphi} \partial^2_{jk} u \right\|^2_{L^2(Q)} \leq C \left(\left\| e^{\tau\theta\varphi} Pu \right\|^2_{L^2(Q)} + \tau^3\gamma^4 \left\| (\theta\phi)^{\frac{3}{2}} e^{\tau\theta\varphi} u \right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} \right)$$

para $u \in \mathscr{C}^\infty([0,T]\times\bar{\Omega})$, tal que $u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \gamma \geq \gamma_1$, y $\tau \geq \tau_1 \left(T + T^2\right)$.

Así el principal resultado de esta sección acerca de la controlabilidad nula de la ecuación de calor, es el siguiente:

Teorema 12. *Sea $\omega \subset \Omega$. La ecuación de calor* (2.11) *es nulamente controlable para un control actuando internamente en $(0,T)\times\omega$.*

Como fue establecido en la sección 2.2.3, el siguiente resultado es crucial en la prueba de la controlabilidad nula de la ecuación de calor (Desigualdad de Observabilidad con la notación de Semigrupo):

Proposición 2. *La ecuación de calor tiene controlabilidad nula en el tiempo T si y solo si existe $C_0 = C_0(T)$ tal que*

$$\underbrace{\|S(T)q\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|1_\omega S(t)q\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}}_{\text{Desigualdad de observabilidad (Semigrupos)}}.$$

Esta desigualdad es conocida como la desigualdad de observabilidad y C_0 como la constante de observabilidad.

Demostración. Sean X, Y, Z espacios de Hilbert, $A \in \mathscr{L}(X, Z)$, y $B \in \mathscr{L}(Y, Z)$. Entonces

$$R(A) \subset R(B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists C > 0, \quad \forall q \in Z, \quad \|A^* q\|_X \leq C \|B^* q\|_Y .$$

Aquí $X = L^2(\Omega), Y = L^2((0,T) \times \Omega)$ y $Z = L^2(\Omega)$. consideramos $A = S(T)$ y $B = L_T$. recordemos que $S(T)^* = S(T)$. Encontramos

$$\begin{aligned} L_T^* : L^2(\Omega) &\to L^2((0,T) \times \Omega), \\ q &\mapsto 1_\omega S(T-t)q. \end{aligned}$$

La controlabilidad nula equivale entonces a tener que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|S(T)q\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C \|1_\omega S(T-t)q\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \\ &= C \|1_\omega S(t)q\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} . \end{aligned}$$

□

Sea $u(t) = S(t)q$, es decir, u es solución a

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \text{ en } Q = (0,T) \times \Omega, \quad u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = q.$$

A partir de la desigualdad de Carleman global de los Teoremas 10 y 11, tenemos

$$\tau^3 \left\| e^{\tau\theta\varphi} \theta^{\frac{3}{2}} u \right\|^2_{L^2(Q)} \lesssim \tau^3 \left\| e^{\tau\theta\varphi} \theta^{\frac{3}{2}} u \right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} ,$$

para $\tau = \tau_1 \left(T + T^2\right)$. En particular, se sigue

$$\int_{T/4}^{3T/4} e^{2\tau\theta \inf_\Omega \varphi} \theta^3 \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \lesssim \int_0^T e^{2\tau\theta \sup \varphi} \theta^3 \|u(t)\|^2_{L^2(\omega)} dt.$$

Dado que $\tau = \tau_1 \left(T + T^2\right)$ y $\theta(t) = (t(T-t))^{-1}$, y $\sup_\Omega \varphi \leq -C < 0$, verificamos que tenemos las siguientes desigualdades

Lema 4. *Se tiene que*

$$\begin{cases} e^{2\tau\theta \inf_\Omega \varphi} \theta^3 \gtrsim T^{-6} e^{-C(1+1/T)}, & t \in [T/4, 3T/4], \\ e^{2\tau\theta \sup_\Omega \varphi} \theta^3 \lesssim T^{-6}, & t \in (0,T). \end{cases}$$

así, se sigue

$$e^{-C(1+1/T)} \int_{T/4}^{3T/4} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \lesssim \int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\omega)} dt.$$

La disipación natural de la energía parabólica, nos da

$$\frac{1}{2} T \|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_{T/4}^{3T/4} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim e^{C(1+1/T)} \|u\|_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

De la Proposición 2, tenemos el resultado de controlabilidad nula del Teorema 12.

Capítulo 3

Controlabilidad para un Problema de Frontera Libre de la Ecuación de Calor

3.1. Introducción

Nuestro principal interés es estudiar la relación entre la controlabilidad y los problemas de frontera libre. Estos problemas dependen en general del tipo de sistema que se esté considerando, en nuestro caso particular, estudiaremos estas propiedades para la ecuación de calor unidimensional en un dominio acotado. En particular, la controlabilidad se refiere a la capacidad de un sistema para ser dirigido desde un estado inicial a un estado final dentro de un tiempo finito utilizando una entrada adecuada. Por otro lado, los problemas de frontera libre se refieren a sistemas que no están completamente definidos en sus fronteras, lo que puede hacer que la solución del problema sea más difícil. En algunos casos, la controlabilidad puede ser más difícil de lograr en sistemas con problemas de frontera libre debido a la falta de información completa sobre las fronteras del sistema. Por ejemplo, en sistemas físicos como la difusión de un contaminante en un medio poroso, el problema de frontera libre se produce cuando la ubicación del borde del medio poroso no se conoce con precisión. En este caso, la falta de información sobre la ubicación del borde puede hacer que la tarea de controlar la difusión del contaminante sea más difícil.

Por otro lado, en algunos sistemas la presencia de fronteras libres puede hacer que la tarea de controlar el sistema sea más fácil o incluso innecesaria. Por ejemplo, en el caso de un sistema de distribución de agua, si la red de tuberías tiene fugas en puntos desconocidos, el sistema seguirá funcionando y distribuyendo agua de manera más o menos uniforme, sin necesidad de un control específico.

En el capitulo anterior, establecimos algunos resultados y técnicas para entender el problema de controlabilidad (exacta, nula y aproximada) para sistemas dinámicos, en particular, gobernados por ecuaciones diferenciales parciales de evolución haciendo un énfasis importante para la ecuación del calor.

Con respecto a los problemas de frontera libre, estos pueden resumirse como aquellos que pueden ser descritos como ecuaciones diferenciales parciales, y que además presentan como incógnita, interfaces o fronteras, donde la solución no solo depende de las condiciones en la frontera fija (como en los problemas convencionales), sino que la posición de la frontera en sí misma es una incógnita y debe encontrarse como parte de la solución. La frontera libre no esta no está predeterminada y se define por alguna *condición adicional* que establece la EDP o el problema físico subyacente. Uno de los ejemplos más clásicos es el llamado *problema de Stefan*, que modela la forma de un bloque de hielo (térmicamente aislado) al derretirse.
El *problema de Stefan* data de finales del siglo XIX, y ha sido considerado como el *problema de*

frontera libre clásico. Su formulación clásica es la siguiente: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio limitado (para ser más precisos, podemos pensar en Ω como un contenedor cilíndrico térmicamente aislado, es decir, que no existe ninguna transferencia de calor entre el contenedor y el exterior; en cuyo interior tenemos agua congelada) y denotamos por

$$\theta := \theta(t, x)$$

la temperatura del agua en el punto $x \in \Omega$ en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Por simplicidad asumiremos que la temperatura del agua θ es mayor o igual a 0, ya que si damos una temperatura no negativa al contenedor, el agua en este empezara a sufrir un cambio de estado al derretirse el hielo. Así, denotamos por

$$\{\theta > 0\} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : \theta(t, x) > 0\},$$

y por,

$$\{\theta = 0\} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : \theta(t, x) = 0\}$$

los conjuntos que representan el agua y el hielo (respectivamente) que hay en el contenedor. Sabemos que la temperatura θ debe satisfacer la siguiente ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t \theta - \Delta\theta = 0 & \text{en la región } \{\theta > 0\} \\ \theta = 0 & \text{en la región } \{\theta = 0\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Por otro lado, determinar dónde existe una interfase entre el agua y el hielo (esto es, la superficie $\partial\{\theta > 0\}$) es una incógnita del problema, por tanto, es necesario considerar una condición extra, debida a la transferencia de calor entre el agua y el hielo, que viene de la *segunda ley de Fourier* y que en este caso particular es llamada *condición de Stefan*, que dice que

$$\partial_t \theta = |\nabla_x \theta|^2 \quad \text{en} \quad \partial\{\theta > 0\}. \tag{3.2}$$

Como mencionamos anteriormente, nuestro problema (que puede resumirse en (3.1) y (3.2)) no solo es encontrar la función desconocida θ, si no también describir el comportamiento de la interfase que separa el agua y el hielo, para ello es posible demostrar que después del cambio de variables

$$u(t, x) := \int_0^t \theta(\eta, x)\, d\eta,$$

la nueva función $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$, satisface la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= -\chi_{\{u>0\}} \\ u &\geq 0 \\ \partial_t u &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Este tipo de formulaciones es en extremo útil, pues goza de propiedades variacionales que permiten abordar cuestiones tales como la existencia y unicidad de las soluciones de (3.3), que implica, también, la existencia y unicidad de θ, solución de (3.1) y 3.2. Ahora si consideramos la versión "estacionaria"(que no depende del tiempo) del problema (3.3), al cual de ahora en adelante llamaremos como *problema de Stefan*, es el bastamente estudiado *problema del obstáculo* cuya formulación es:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \chi_{\{u>0\}} \\ u &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Una pregunta natural al atacar problemas del tipo *problema de Stefan* o el *problema del obstáculo* es la regularidad de sus soluciones, i.e. que grado de diferenciabilidad o integrabilidad poseen dichas soluciones. Una de las grandes dificultades en el estudio de la regularidad de soluciones de ecuaciones del tipo (3.4) es la discontinuidad que presenta el lado derecho, esto impide aplicar técnicas, de alguna manera, clásicas.

3.2. Establecimiento del problema

En esta tesis, estamos interesados en estudiar el trabajo [13] donde los autores llevaron a cabo un estudio sobre un problema unidimensional de Stefan con una fase, que incluye una frontera de Dirichlet nula, teniendo en cuenta el comportamiento de la frontera por medio de una función apropiada L y un término fuente (control) v en un dominio $\omega = (a, b)$.

Específicamente, consideremos $L_0 > 0$, $T > 0$, $0 < a < b < L_* < L_0$ y $y_0 \in L^\infty(0, L_0)$ dados. Se tiene el siguiente problema:

Problema 1. *Encontrar funciones $y = y(x,t)$ y $L \in C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ para todo $t \in [0,T]$ tal que*

$$L(0) = L_0 \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v1_\omega & x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T) \\ y(0,t) = 0, y(L(t),t) = 0 & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0) \end{cases} \tag{3.6}$$

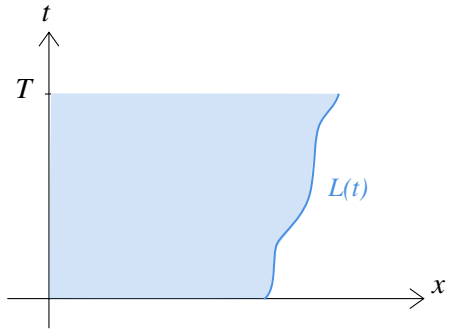
con las propiedades adicionales,

$$y_x(L(t),t) = -L'(t), \tag{3.7}$$

y

$$y(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T). \tag{3.8}$$

1_ω es la función característica de $\omega = (a,b)$. La función v es el control y la pareja (L, y) es el estado asociado.



Región $Q_L = \{(x,t) : x \in (0, L(t)), t \in (0,T)\}$.

Esencialmente, el objetivo de este trabajo es mostrar un resultado de controlabilidad nula, que garantiza la existencia de una función de temperatura $y = y(x,t)$, una función de frontera libre $L = L(t)$, y un control $v = v(x,t)$, de manera que la condición

$$y(x,T) = 0, \qquad \text{para} \quad 0 < x < L(T),$$

se cumpla. La demostración se basa en la utilización de una ecuación de punto fijo apropiada en un espacio funcional adecuado y en estimaciones de Carleman.

3.3. Resultado principal

Teorema 13. *Asumamos que $L_0 > 0, T > 0$ y $0 < a < b < L_* < L_0 < B$ son parámetros dados. Entonces el sistema (3.6) es nulamente controlable de manera local. Precisamente, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y*

$$\|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)} \leq \varepsilon,$$

existen L y (v, y), con

$$\begin{cases} L \in C^1([0,T]), L(0) = L_0, \quad L_* \leq L(t) \leq B, \\ v \in L^2(\omega \times (0,T)), y^* \in C^0\left([0,T]; H_0^1(0,B)\right), \end{cases}$$

satisfaciendo

$$\underbrace{y_x(L(t),t) = -L'(t)}_{\textit{Frontera Libre}}, \quad y \quad \underbrace{y(x,T) = 0}_{\textit{Controlabilidad Nula}}, \quad x \in (0, L(T)), \quad t \in (0,T), \tag{3.9}$$

3.3.1. Estado del arte

En cuanto a la relación entre la controlabilidad y el problema de frontera libre, hay pocas investigaciones disponibles. En realidad, según nuestro conocimiento, el primer trabajo en esta dirección es el de [13], que hemos utilizado como referencia para este estudio. Sin embargo, a partir de ese trabajo, surgieron otras investigaciones en esta área. Por ejemplo, en 2017, los autores en [12] consideran el sistema de control

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + f(y) = v1_\omega & (x,t) \in Q_L \\ y(0,t) = 0, y(L(t),t) = 0 & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0) \end{cases} \tag{3.10}$$

en el cual $L \in C^1(0, L(T))$ satisface $0 < L_* \leq L(t) \leq B$, con L_* y B dados, y

$$L'(t) = -y_x(L(t),t), \quad t \in (0,T), \qquad L(0) = L_0. \tag{3.11}$$

Aquí $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz global. El resultado principal se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 14. *Sea $L_* < L_0 < B$, existe $d > 0$ tal que si*

$$\|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)} < d,$$

entonces se puede elegir $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ de manera que exista una solución (y, L) de (3.10) y (3.11) tal que $L \in C^1([0,T])$, $L* \leq L(t) \leq B$, $y \in C([0,T]; H_0^1(0,B))$, satisfaciendo

$$y(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)).$$

Para probar el resultado, primero los autores consideran el problema de control lineal asociado al sistema para una nueva función desconocida w, con un término lineal $a(x,t)w$ en el cual $a \in L^\infty((0,B) \times (0,T))$. Por otro lado, en un segundo resultado, los autores demuestran que para cualquier dato inicial $w_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe una función de control $w_\epsilon \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que la solución $w_\epsilon \in C([0,T]; H_0^1(0,B))$ satisface

$$\|w_\epsilon(\cdot, T)\|_{L^2(0,L(T))} \leq \epsilon.$$

Además, se puede encontrar v_ϵ de manera que

$$\|v_\epsilon\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C\|w_0\|_{L^2(0,L_0)}.$$

La función v_ϵ es encontrada como $v_\epsilon = \phi_\epsilon$ solución de un sistema adjunto con valor final ϕ_ϵ^0 en el tiempo T minimizando el funcional

$$J_\epsilon\left(\phi^0, a, L\right) := \frac{1}{2}\int_{\omega\times(0,T)} |\phi^\epsilon|^2 + \epsilon\left\|\phi^0\right\|_{L^2(0,L(T))} + \left(\phi(\cdot,0), w^0\right)_{L^2(0,L_0)}.$$

En el segundo paso de la prueba, los autores consideran el caso en el que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y su derivada $f'(y)$ es uniformemente acotada y al considerar el sistema adjunto se construye una secuencia $(v_\epsilon, y_\epsilon, l_\epsilon)$, la cual converge a las funciones v, y, L si $\epsilon \to 0$, probando la afirmación del Teorema 14.

En 2019, los autores en [11] dan una nueva prueba del resultado de controlabilidad nula para el siguiente problema de Stefan en un espacio unidimensional:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = v1_{\mathcal{O}}, & x \in (0,\ell(t)), t \in (0,T) \\ u(0,t) = u(\ell(t),t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L) \\ \ell'(t) = -\frac{1}{k}u_x(\ell(t),t), & t \in (0,T) \\ \ell(0) = L \end{cases} \tag{3.12}$$

Aquí, $v = v(x,t)$ es el control actuando sobre $\mathcal{O} = \omega_0 \times (0,T)$, con $\omega_0 \subset (0,L)$. El problema es encontrar v tal que la solución (u,ℓ) de (3.12) satisface

$$u(x,T) = 0, \quad x \in (0,\ell(T))$$

Como veremos a más adelante, este problema fue resuelto en [13] utilizando un argumento de punto fijo y la ganancia gano de regularidad de las soluciones, que se centra en gran medida en la compacidad debido al entorno unidimensional. En este artículo, se introduce una nueva estrategia basada en la inversión local de cierto operador, que facilitaría las extensiones a dimensiones más altas, ya que se apoya en argumentos de completitud y contractividad. La estrategia se basa en un cambio de variables que transforma (3.12) en un problema parabólico en un dominio cilíndrico fijo, y la introducción de un funcional adecuado entre espacios de Banach para aplicar el Teorema de la Función Inversa de Lyusternik. Se prueba una estimación de Carleman mejorada para hacer frente a restricciones adicionales.

Otros referencias importantes:

En la actualidad, se pueden mencionar los siguientes trabajos relevantes que contribuyen al análisis del problema de controlabilidad y el problema de frontera libre para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas:

En 2022, los autores en [43] se ocupan de la controlabilidad local nula de un problema de frontera libre para una clase de ecuaciones parabólicas cuasi-lineales de una dimensión con un controlador interno de ubicación arbitraria. Se debe tener en cuenta que la no linealidad que aparece en el operador principal plantea nuevas dificultades, que difieren esencialmente del caso semilineal. A diferencia de la controlabilidad de un problema de frontera libre para las ecuaciones de calor lineales y semilineales, es necesario utilizar una estimación delicada de Carleman y resolver el problema de controlabilidad en el marco de soluciones clásicas. Ellos

demuestran que para cualquier estado inicial suficientemente pequeño, existe un control que lleva el estado exactamente al reposo en el tiempo $t = T$.

Por otro lado, en [2] estudian la controlabilidad nula del problema de Stefan unidimensional de dos fases con controles distribuidos. Este es un problema de frontera libre que modela procesos de solidificación o fusión. En cada fase se debe satisfacer una ecuación parabólica, completada con condiciones iniciales y de contorno; las fases están separadas por una interfaz de cambio de fase, donde se impone una condición adicional de frontera libre (la llamada condición de Stefan). Se supone que dos fuentes localizadas de controles de calentamiento / enfriamiento actúan sobre el sistema (una en cada fase). Mostramos el siguiente resultado de controlabilidad nula local: las temperaturas se pueden llevar a cero y, simultáneamente, la interfaz se puede llevar a una ubicación prescrita siempre que los datos iniciales y la posición de la interfaz estén suficientemente cerca de los objetivos. Los ingredientes de las pruebas son un argumento de compacidad y unicidad (que proporciona estimaciones de observabilidad adecuadas adaptadas a las restricciones) y una formulación de punto fijo y resolución del problema de controlabilidad (que proporciona el resultado para el sistema no lineal). También se demuestra un resultado negativo correspondiente al caso en que solo un control actúa sobre el sistema y la interfaz no se colapsa hacia la frontera.

Recientemente, en [8] están interesados en el análisis del control interno de un problema de frontera libre para la ecuación de calor 1D con no linealidades locales y no locales. Demuestran un resultado de controlabilidad nula local con controles distribuidos, localmente soportados en el espacio. La prueba se basa en el teorema del punto fijo de Schauder combinado con algunas estimaciones específicas apropiadas.

Finalmente, el artículo [44] trata sobre la controlabilidad nula de un problema de frontera libre para la ecuación del calor clásica en 1D, gobernada por un control multiplicativo, localmente soportado en el espacio. Los autores demuestran que para una clase de estado inicial no negativo, existe un control por piezas que lleva al estado exactamente al reposo en el tiempo $t = T$.

Observación 1. *Dado que en los trabajos citados anteriormente se extienden y se presentan nuevas estrategias y modificaciones del problema consignado en [13], es importante destacar que este trabajo no profundiza en esas discusiones, ya que está fuera de los objetivos iniciales de la tesis. No obstante, es valioso considerarlo como una referencia para futuros trabajos y análisis en esta área.*

3.4. El Buen Planteamiento

El buen planteamiento de una ecuación en derivadas parciales (EDP) es esencial en matemáticas, ya que establece las bases para la obtención de soluciones significativas. Un planteamiento claro y preciso garantiza la existencia y unicidad de soluciones, la estabilidad del sistema y la capacidad de realizar análisis matemáticos y numéricos confiables.

Para establecer la existencia y unicidad de soluciones de nuestro problemas, consideremos las siguientes parámetros

$$L_0 > 0, T > 0, 0 < a < b < L_* < L_0 \quad \text{y} \quad y_0 \in L^\infty(0, L_0). \tag{3.13}$$

Fijemos $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y asumamos que $L \in C^1([0, T])$ es una función que satisface $L(t) > 0$, $L(0) = L_0$ y

$$L_* \leq L \leq B,$$

en particular note que $L(t) > b$ para todo $t \in [0, T]$. Además usaremos la siguiente notación

$$N_L = \|L'\|_\infty, \quad N_0 = \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)}$$

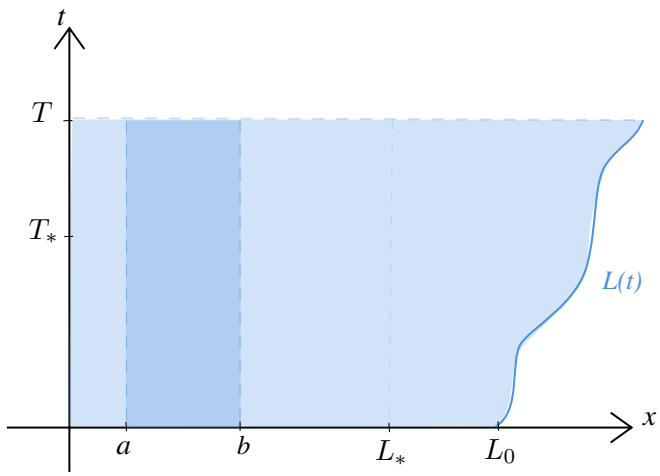


Figura 3.1: Región Q_L y ω.

.

Inicialmente, consideraremos el sistema lineal,

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v1_\omega, & (x,t) \in Q_L \\ y(0,t) = 0, \quad y(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0,L_0) \end{cases} \tag{3.14}$$

donde

$$Q_L = \{(x,t) : x \in (0,L(t)), t \in (0,T)\}, \ \omega = (a,b),$$

y estableceremos el buen planteamiento, es decir, existencia y unicidad de las soluciones en espacios apropiados de Sobolev. En este sentido, consideremos

$$y_0 \in H_0^1(0,L_0) \quad \text{y} \quad v \in L^2(\omega \times (0,T)).$$

Decimos que existe al menos una solución local en el tiempo para (3.14) si existe $T_* \in (0,T]$ y una pareja (L,y) que cumple con las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} L \in C^1((0,T_*)), & L(t) \geq L_* \text{ en } [0,T_*), \\ y \in L^2(Q_L^*), & \text{con } Q_L^* = \{(x,t) : x \in (0,L(t)), t \in (0,T_*)\} \\ L(0) = L_0, & y(x,0) = y_0(x) \text{ en } (0,L_0). \end{cases} \tag{3.15}$$

Además, esta pareja (L,y) satisface (3.14) en Q_L^* en el sentido distribucional, cumpliendo al mismo tiempo con las condiciones de frontera. Todo esto, teniendo en cuenta que se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

$$T_* = T \quad \text{o} \quad \lim_{t \to T_*^-} |L(t)| = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{t \to T_*^-} |L'(t)| = +\infty.$$

3.4.1. Buen Planteamiento I: Problema de Frontera Libre No-Homogéneo

Antonio Fasano y Mario Primicerio tienen una serie de trabajos denominados "General Free Boundary Problem for the Heat Equation I, II y II" en donde se estudia el buen planteamiento de problemas de frontera libre sobre diferentes condiciones generales relacionando la existencia de soluciones con una forma integral. Para nuestro caso, el buen planteamiento se sigue de lo estudiado en [10]. En términos de este trabajo se considera el siguiente sistema no-homogéneo:

Definición 11. *Diremos que una pareja* $(s(t), u(x,t))$ *es solución del siguiente sistema*

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = u_{xx} - u_t = q(x,t) & \text{en } D_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}, \\ u(x,0) = h(x), & 0 \leqslant x \leqslant s(0) \equiv b, \\ u(0,t) = \varphi(t), & 0 < t < T, \\ u(s(t),t) = f(s(t),t), & 0 < t < T, \\ u_x(s(t),t) = \lambda(s(t),t)\dot{s}(t) + \mu(s(t),t), & 0 < t < T, \end{cases} \tag{3.16}$$

si se cumple lo siguiente:

- $s(t)$ *es positivo en* $(0,T)$
- $s(t)$ *es continuamente diferenciable en* $(0,T)$ *y continuo en* $[0,T]$,
- $u(x,t)$ *es continua en* $\bar{D}_r$ *excepto para un número finito de discontinuidades en la frontera* $x = 0, t = 0$ *donde* $\liminf u(x,t)$ *y* $\limsup u(x,t)$ *son acotados,*
- $u_x(x,t)$ *es continua para* $0 < x \leqslant s(t), 0 < t < T$,
- $u_{xx}(x,t), u_t(x,t)$ *son continuas en* D_T.

donde las funciones $q(x,t), \lambda(x,t), \mu(x,t), f(x,t)$ *son definidas en plano* $x \geqslant 0, t \geqslant 0, \varphi(t)$, *es definido para* $t \geqslant 0$, *y* $h(x)$ *dado en* $[0,b]$, *si* $b > 0$.

Notemos que nuestro objetivo es considerar un caso particular de la definición anterior donde $f(s(t),t) = 0, s(t) = L(t), \lambda = -1$ y $\mu = 0$

Definición 12. *una pareja* $(s(t), u(x,t))$ *será llamada una solución en* $(0,T)$ *del sistema*

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = u_{xx} - u_t = q(x,t) & \text{en } D_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < s(t), 0 < t < T\}, \\ u(x,0) = h(x), & 0 \leqslant x \leqslant s(0) \equiv b, \\ u(s(t),t) = f(s(t),t), & 0 < t < T, \\ u_x(s(t),t) = \lambda(s(t),t)s(t) + \mu(s(t),t), & 0 < t < T, \end{cases} \tag{3.17}$$

con la condición

$$u_x(0,t) = g[u(0,t),t], \quad 0 < t < T,$$

donde $g(y,t)$ *es definido para* $-\infty < y < +\infty, t \geqslant 0$, *si se satisfacen las anteriores ecuaciones y las funciones* $s(t), u(x,t)$ *poseen las mismas propiedades de regularidad requeridas en la Definición 11 adicionando la siguiente condición.*

- $u_x(x,t)$ *es continua también para* $x = 0, 0 < t < T$.

El ejemplo más conocido de una situación física que conduce a problemas de este tipo es la conducción de calor en materiales en los que se produce un cambio de fase a una temperatura constante conocida (que se puede suponer que es cero). De acuerdo con este esquema, generalmente se supone que

$$\lambda(x,t) \leqslant -\lambda_0, \quad \lambda_0 > 0$$

y además para la definición (11):

$$h(x) \geqslant 0, \quad \varphi(t) \geq 0, \quad f(x,t) = 0, \quad q(x,t) \leqslant 0.$$

o para la definición (12):

$$h(x) \geqslant 0, \quad g(y,t) < 0 \text{ para } y \geqslant 0, \quad f(x,t) = 0, \quad q(x,t) \leqslant 0.$$

Para determinar las solución de los problemas (3.16) y (3.17) con respecto a las definiciones 11 y 12, respectivamente, debemos tener en cuentas las siguientes hipótesis. Primero notemos por $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty\}$ y supongamos que:

(A) $q(x,t)$ es localmente Hölder continua en $\bar{\Omega}$ con respecto a x o t, y

$$|q(x,t)| \leqslant Q, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}.$$

(B) $f(x,t)$ y $f_x(x,t)$ son funciones continuas y acotadas en $\bar{\Omega}$, y la diferencia $f_{xx} - f_t$ es acotada y localmente Hölder continua en $\bar{\Omega}$ con respeto a x o t.

(C1) $\varphi(t)$ es continua (por partes) para $t \geqslant 0$ y

$$|\varphi(t)| \leqslant \Phi, \quad t \geqslant 0.$$

(C2) La función $g(y,t)$ satisface la condición de Lipschitz respecto a y,

$$|g(y_1,t) - g(y_2,t)| \leqslant L'_g \mid y_1 - y_2 \mid$$

uniformemente respecto a $t \geqslant 0$, y cumple una de las condiciones $(\alpha_1), (\alpha_2)$ y una de las condiciones $(\beta_1), (\beta_2)$ enumeradas a continuación.

(α_1) Existe una constante $Y_1 > \text{máx}\{Hb, \sup_\Omega f(x,t)\}$ tal que

$$g(Y_1,t) \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

(α_2) Existen dos constantes Y' y G' tal que

$$g(y,t) \geqslant G' \text{ para } y \geqslant Y', \quad t \geqslant 0.$$

(β_1) Existe una constante $Y_2 < \text{mín}\{-Hb, \inf_\Omega f(x,l)\}$ tal que

$$g(Y_2,t) \leqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

(β_2) Existen dos constantes Y'' y G'' tal que

$$g(y,t) \leqslant G'' \text{ para } y \leqslant Y'', \quad t \geqslant 0.$$

(D) $\lambda(x,t)$ es continua en $\bar{\Omega}$ con su primera derivada y

$$|\lambda(x,t)| \geqslant \lambda_0 > 0, \quad (x,t) \in \Omega.$$

(E) $\mu(x,t)$ es continua en Ω, uniformemente Lipschitz continua en casi todo x en conjuntos acotados y

$$|\mu(x,t)| \leqslant M, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}.$$

(F) $h(x)$ es (por partes) continua en $[0,b]$ y existe una constante positiva H tal que

$$|h(x) - f(b,0)| \leqslant H(b-x), \quad x \in [0,b]$$

con (para el caso de la definición 11)

$$Hb \geqslant \Phi + |f(b,0)|.$$

Bajo estas hipótesis podemos garantizar la existencia de las soluciones de los problemas (3.16) y (3.17).

Teorema 15. *(ver [10, Theorem 3]) Existe una tripleta* $(T^*, s(t), u(x,t))$ *tal que* T^* *es el supremo de la amplitud de los intervalos de tiempo en los que la pareja* $(s(t), u(x,t))$ *es solución del problema* (3.16) *bajo la definición 11.*

Teorema 16. *(ver [10, Theorem 4]) Existe una tripleta* $(\hat{T}^*, \hat{s}(t), \hat{u}(x,t))$ *tal que* $\hat{T}^*$ *es el supremo de la amplitud de los intervalos de tiempo en los que la pareja* $(\hat{s}(t), \hat{u}(x,t))$ *solución del problema* (3.17) *bajo la definición 12.*

Por lo tanto para establecer la existencia de soluciones de nuestro problema basta con establecer la relación entre nuestro sistema y los sistemas (3.16) y/o (3.17). En efecto, del sistema 3.16 se identificarán las variables u, s, q y h con y, L, v y y_0, respectivamente. Además en nuestro caso la función λ será la función constante -1 y las funciones $\varphi(t)$, $f(x,t)$ y $\mu(x,t)$ se considerarán como la función nula.

3.4.2. Buen Planteamiento II: Ecuación del Calor en un Dominio No-Cilíndrico

Pensando a posteriori, en el sistema adjunto asociado a nuestro problema, debemos determinar el buen planteamiento del problema de la ecuación del calor homogénea/no-homogénea en un dominio no-cilíndrico determinado por la función L. En este sentido, la principal idea es reducir el problema a un modelo con coeficientes variables en un dominio cilíndrico. Así, siguiendo las ideas contenidas en [15] y [19], hacemos un cambio de variable adecuado que permite reescribir (3.14) como un problema similar de una EDP parabólica envolviendo coeficientes variables

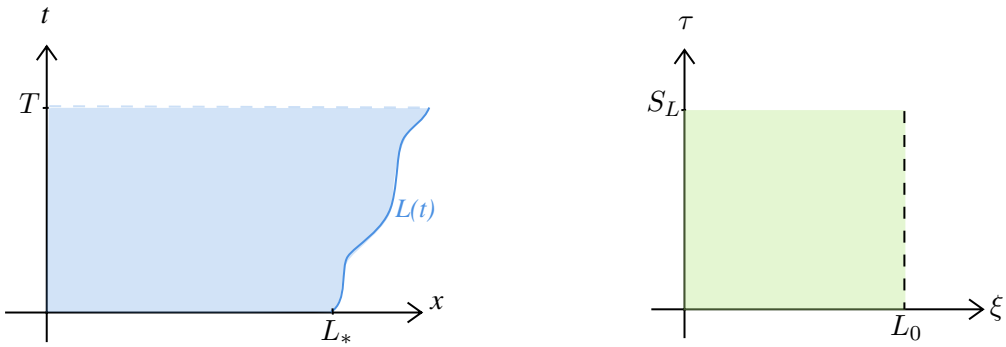
$$z_\tau - z_{\xi\xi} + h(\xi,\tau) z_\xi = w, \tag{3.18}$$

en un dominio cilíndrico con un coeficiente h acotado y una función cuadrado w. Dicho cambio de variable en Q_L sería

$$\xi = \frac{L_0}{L(t)} x, \quad \text{y} \quad \tau = L_0^2 \int_0^t \frac{1}{(L(s))^2}\, ds.$$

donde $z(\xi,\tau) := y(x,t)$. Así no es difícil ver que z esta bien definido en el rectángulo Q_*, donde

$$Q_* = (0, L_0) \times (0, S_L), \quad S_L := L_0^2 \int_0^T \frac{1}{(L(s))^2}\, ds.$$



Regiones Q_L y S_L

En términos de las nuevas variables se tiene que

$$y_t(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad y_x(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

además

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{L_0}{L(t)}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{L_0 L'(t)}{(L(t))^2} x, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2.$$

Además como y satisface el sistema (3.14), reemplazando estos valores obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \bar{v}(\xi, \tau)$$

donde $\bar{v}(\xi, \tau) = v(x, t)$. al continuar el reemplazo, se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(-\frac{L_0 L'(t)}{(L(t))^2} x\right) + \frac{\partial z}{\partial \tau}\left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2 = \bar{v}(\xi, \tau).$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + h_1(\xi, \tau)\frac{\partial z}{\partial \xi} = h_2(\xi, \tau)$$

donde $h_1(\xi, \tau) = \left(-\frac{L'(t)}{L_0} x\right)$ y $h_2(\xi, \tau) = \bar{v}(\xi, \tau)\frac{(L(t))^2}{L_0^2}$. Finalmente, deducimos que el sistema (3.14) es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + h_1(\xi, \tau)\frac{\partial z}{\partial \xi} = h_2(\xi, \tau) & \\ z(0, \tau) = z(L_0, \tau) = 0 & \tau \in (0, S_L) \\ z(\xi, 0) = y_0(x) & \xi \in (0, L_0). \end{cases} \tag{3.19}$$

donde desde la definición vemos que h_1 y h_2 son cuadrado integrables. Así, basta centrarnos en estudiar el buen planteamiento de la ecuación de calor con coeficientes variables en un domino acotado rectangular con condiciones de Dirichelt. En este sentido podemos mencionar algunos resultados más generales para el siguiente sistema. Considere la ecuación lineal de la forma

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \equiv u_t - a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + a_i(x, t)u_{x_i} + a(x, t)u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \psi_0(x). \end{cases} \tag{3.20}$$

Los problemas de valores en la frontera (o, lo que es lo mismo, problemas de valores en la frontera mixtos) en cilindros de la forma $Q_T = \Omega \times (0, T)$ (con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$), que consisten en determinar funciones $u(x, t)$ en $\bar{Q}_T$ que satisfacen la ecuación correspondiente en Q_T, la condición inicial en la base inferior de Q_T, y una de las condiciones de frontera en la superficie lateral $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, por ejemplo,

$$u|_{S_T} = \psi(s, t). \tag{3.21}$$

Note que en el caso del sistema (3.19), $n = 1$, $\Omega = (0, L_0) \subset \mathbb{R}$, $T = \tau$, $a_{ij} = 0$, $a_1 = h_1$, $a = 0$ y $f = h_2$.

Para el problema enunciado anteriormente (3.20)-(3.21), los teoremas de unicidad en su enunciado clásico son válidos siempre y cuando las funciones que componen las ecuaciones tengan cierta suavidad. Estos se demuestran con la ayuda del conocido principio del máximo. En su forma más simple, consiste en el hecho de que las soluciones u de la ecuación (3.20) con $a \equiv f \equiv 0$ asumen sus valores mínimos y máximos en $\bar{Q}_T$ en la frontera Γ_T. En una forma más general, encuentra su expresión en las estimaciones de $a \equiv f \equiv 0$ dadas a continuación por los siguientes teoremas. Se basa en el siguiente hecho: en los puntos de extremo interior de $u(x, t)$, las expresiones $u_t - a_{ij}u_{x_i x_j}$ y $u_t - \left(\partial a_i / \partial u_{x_j}\right) u_{x_i x_j}$, que forman la parte principal de los operadores parabólicos $\mathcal{L}u$, son o bien ambas no negativas o bien ambas no positivas.

Teorema 17 (Teorema 2.1 en [25]). *Supongamos que $u(x,t)$ es la solución clásica del problema* (3.20)-(3.21)*, en el cilindro Q_T, donde los coeficientes y el término libre en* (3.20)*, son funciones acotadas y*

$$a_{ij}(x,t)\xi \geq 0,\ \xi \geqslant 0.$$

Entonces, para cualquier $t_1 \in [0,T]$, la estimación

$$\sup_{\lambda>a_0} \text{mín}\left\{0; \min_{\Gamma_{t_1}}\left(\psi e^{\lambda(t_1-t)}\right); \frac{1}{\lambda-a_0}\min_{Q_{t_1}}\left(fe^{\lambda(t_1-t)}\right)\right\}$$
$$\leqslant u\left(x,t_1\right) \leqslant \inf_{\lambda>a_0} \text{máx}\left\{0; \max_{\boldsymbol{Q}_{t_1}}\left(\psi e^{\lambda(t_1-t)}; \frac{1}{\lambda-a_0}\max_{Q_{t_1}}\left(fe^{\lambda(t_1-t)}\right)\right\}$$

para $u(x,t)$ es válida, donde el número a_0 es igual a $\max_{Q_{t_1}}(-a(x,t)) = -\max_{Q_{t_1}} a(x,t)$, mientras que ψ coincide con $\psi_0(x)$ en Γ_0, y con $\psi(s,t)$ de (3.21) *en S_T.*

Además del teorema anterior se deduce el siguiente teorema de unicidad para las soluciones clásicas de los problemas de valor en la frontera. Es decir:

Teorema 18 (Teorema 2.4 en [25]). *Los problemas* (3.20)-(3.21) *bajo las condiciones correspondientes al teorema 17 no pueden tener más de una solución clásica.*

Para las ecuaciones (3.20) de forma general, **la solución fundamental fue construida por primera vez en el artículo** [9], en el cual se requería que los coeficientes en (3.20) pertenecieran a $H^{2+a,1+a/2}$. En [35, 36] se reducen las restricciones sobre la suavidad de los coeficientes a la condición de que sean Hölder continuas, y en una nota recientemente publicada en [30] se requiere que satisfagan la condición de Dini, más general que la condición de Hölder. Del mismo modo, la existencia de la solución fundamental y de la solución clásica del problema de Cauchy para la ecuación (3.20) se obtiene bajo restricciones que son algo más débiles que las del primer método. Pero los resultados obtenidos mediante la teoría del potencial sobre la solución de problemas de valores en la frontera no son exactos, debido a dificultades analíticas significativas que surgen en la estimación incluso de las primeras derivadas de potenciales de capa simple y doble cerca de la frontera.

3.4.3. Regularidad de las soluciones

La regularidad de las soluciones de ecuaciones parabólicas, es esencial en el análisis matemático. La suavidad de las soluciones depende en gran medida de la suavidad de los datos iniciales y las condiciones de contorno. En general, las soluciones tienden a ser más regulares cuando los datos iniciales y las condiciones de contorno son más suaves, y esto se relaciona con la teoría de problemas bien planteados. La regularidad implica que las soluciones suelen ser continuas y tienen derivadas parciales de diferentes órdenes que son continuas o al menos integrables. La teoría de la regularidad de ecuaciones parabólicas es un campo activo de investigación en matemáticas y análisis funcional, y es fundamental para comprender el comportamiento de sistemas físicos y naturales descritos por estas ecuaciones..

Para ver la regularidad vamos a considerar el par control-estado (v,y) dados anteriormente y el conjunto

$$R_L := Q_L \cap \{(x,t) : x > b', t \in [0,T]\},$$

donde $b < b' < L_*$.

Veremos en esta sección que para algún $k \in (0,1/2]$ que sólo depende de N_L, L_*, B, ω, T y N_0 se tiene que

$$y \in C^{1+k,k/2}_{x,t}(\overline{R_L}) \tag{3.22}$$

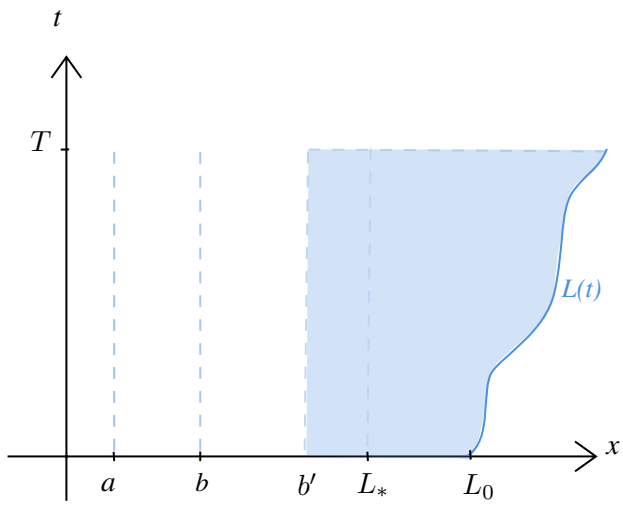


Figura 3.2: Región R_L.

donde $C^{1+k,k/2}_{x,t}(\bar{R}_L)$ es el espacio de funciones $z \in C^0(\bar{R}_L)$ que posee derivadas parciales de primer orden continuas con respecto a x en $\bar{R}_L$ y satisface

$$\sup_{(x,t),(x',t')\in\bar{R}_L} \left(\frac{|z(x,t)-z(x',t')|}{|x-x'|+|t-t'|^{k/2}} + \frac{|z_x(x,t)-z_x(x',t')|}{|x-x'|^k+|t-t'|^{k/2}} \right) < +\infty.$$

En efecto, sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño donde $b < b' - \delta < b' + \delta < L_*$.

Teniendo en cuenta los teoremas 17 y 18, existe $k \in (0, 1/2]$ que depende de N_L, L_*, B, ω, T y N_0 tal que

$$y \in C^{1+k,k/2}_{x,t}([b'-\delta, b'+\delta] \times [0,T]).$$

Considere

$$\xi = \frac{1}{L(t)-b'}(b'((L(t)-x)+L_0(x-b')) \quad \text{y} \quad \tau = (L_0-b')^2 \int_0^t \frac{1}{(L(s)-b')^2}\, ds. \tag{3.23}$$

Teniendo en cuenta el cambio de variable $z(\xi,\tau) := y(x,t)$ se puede ver fácilmente z esta bien definido en el rectángulo $\overline{R_*}$, donde

$$R_* = (b', L_0) \times (0, S_L), \quad S_L := L_0^2 \int_0^T \frac{1}{(L(s))^2}\, ds.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} =& \frac{b'L(t)[L(t)-b'] - [b'L(t) - b'x + L_0x - b'L_0]L'(t)}{(L(t)-b')^2} \\
=& \frac{b'L'(t)L(t) - (b')^2L(t) - b'L(t)L'(t) + b'xL'(t) - L_0xL'(t) + b'L_0L'(t)}{(L(t)-b')^2} \\
=& \frac{-L'(t)[(b')^2 - b'x + L_0x - L_0b'}{(L(t)-b')^2} \\
=& \frac{-L'(t)[-b'(x-b') + L_0(x-b')]}{(L(t)-b')^2} \\
=& \frac{-L'(t)(x-b')(L_0-b')}{(L(t)-b')^2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.23)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{L_0 - b'}{L(t) - b'}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{(L_0 - b')^2}{(L(t) - b')^2} = \left(\frac{L_0 - b'}{L(t) - b'}\right)^2.$$

Por otro lado, recordemos que $y_t - y_{xx} = v1_\omega$. Teniendo en cuenta que $z(\xi, \tau) := y(x, t)$ notemos que

$$y_t(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad y_x(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Por lo anterior se tiene que

$$\begin{cases} y_t(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\left(\frac{-L'(t)(x-b')(L_0-b')}{(L(t)-b')^2}\right) + \frac{\partial z}{\partial \tau}\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2, \\ \\ y_x = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \\ y_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2. \end{cases}$$

Ahora podemos decir que $y_t - y_{xx} = v1_\omega$ es equivalente a

$$\begin{aligned} z_\xi \frac{-L'(t)(x-b')(L_0-b')}{(L(t)-b')^2} + z_\tau\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2 - z_{\xi\xi}\left(\frac{L_0-b'}{(L(t)-b'}\right)^2 &= v1_\omega \\ z_\xi \frac{-L'(t)(x-b')}{L_0-b'}\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2 + z_\tau\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2 - z_{\xi\xi}\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2 &= v1_\omega \\ \left(z_\xi \frac{-L'(t)(x-b')}{L_0-b'} + z_\tau - z_{\xi\xi}\right)\left(\frac{L_0-b'}{L(t)-b'}\right)^2 &= v1_\omega \\ \left(z_\xi \frac{-L'(t)(x-b')}{L_0-b'} + z_\tau - z_{\xi\xi}\right) &= v1_\omega\left(\frac{L(t)-b'}{L_0-b'}\right)^2 \\ z_\tau - z_{\xi\xi} + h(\xi,\tau)z_\xi &= w. \end{aligned}$$

Donde $h(\xi,\tau) = \frac{-L'(t)(x-b')}{L_0-b'}$ y $w(\xi,\tau) = v1_\omega\left(\frac{L(t)-b'}{L_0-b'}\right)^2$.

Notemos que:

- $w(\xi,\tau) = 0, (\xi,\tau) \in R_*$ ya que $\omega \cap (b', L_0) = \emptyset$.
- Si $x = b'$ entonces

  $$\xi = \frac{1}{L(t)-b'}(b'((L(t)-b') + L_0(b'-b')) = b'.$$

  Así es claro que $z(b',\tau) = y(b',t)$, para $\tau \in (0, S_L)$.
- Si $x = L(t)$ entonces

  $$\xi = \frac{1}{L(t)-L(t)}(b'((L(t)-b') + L_0(L(t)-b')) = L_0.$$

  Luego es claro que $z(L_0,\tau) = y(L(t),t) = 0$, para $\tau \in (0, S_L)$.

Por consiguiente, tenemos que

$$\begin{cases} z_\tau - z_{\xi\xi} + h(\xi,\tau)z_\xi = 0, \quad (\xi,\tau) \in R_* \\ z(b',\tau) = y(b',t), \quad z(L_0,\tau) = 0, \quad \tau \in (0,S_L) \\ z(\xi,0) = y_o(\xi), \quad \xi \in (0,L_0). \end{cases}$$

donde $h \in C^0(\overline{R_*})$ y $\|h\|_\infty$ es acotada por una constante que depende solamente de N_L, b', L_0 y T. Por lo tanto deducimos que

$$z \in C^{1+k,k/2}_{\xi,\tau}(\overline{R_*}),$$

y así obtenemos (3.22).

Si consideramos la función V_L como

$$V_L(t); = y_x(L(t),t), \forall t \in [0,T].$$

Es claro que $V_L \in C^k([0,T])$. Además también se tiene que

$$\|V_L\|_{C^k([0,T])} \leq C_3\|y_0\|_\infty, \tag{3.24}$$

donde C_3 solamente depende de N_L, L_*, B, ω, T y N_0 y es no decreciente con respecto a N_L y N_0

3.5. Controlabilidad Nula en un dominio No-Cilíndrico

Nuestro objetivo principal en esta sección es mostrar la controlabilidad nula de 3.6, para ello vamos a usar argumentos estándar (revisar capítulo 2) con la herramienta principal que es la estimación global de Carleman de la cual se obtiene como consecuencia la desigualdad de observabilidad. Teniendo presente esto iniciaremos mostrando unos resultados con la finalidad de utilizarlos posteriormente para alcanzar el objetivo principal.

Consideremos el sistema adjunto asociado a (3.6)

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = g(x,t) & (x,t) \in Q_L \\ \varphi(0,t) = \varphi(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi^T(x), & x \in (0,L(T)), \end{cases} \tag{3.25}$$

donde $g \in L^2(Q_L)$ y $\varphi^T \in L^2(0,L(T))$

3.5.1. Desigualdad de Carleman

Como se menciona en [13] la estimación global de Carleman para la solución del sistema adjunto 3.25, que se mostrará a continuación está inspirada en las ideas Fursikov-Imanovilov [17] y tendrá como consecuencia principal la desigualdad de observabilidad. Inicialmente se considera el siguiente lema que será de utilidad para la estimación.

Lema 5. *Sea ω_0 un conjunto abierto no vacío tal que $\overline{\omega}_0 \subset \omega$. Entonces existe una función $\alpha_0 \in C^1(\overline{Q_L})$ con $\alpha_{0,xx} \in C^0(\overline{Q_L})$ tal que*

$$\begin{cases} \alpha_0(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \{(x,t) : x = 0 \ o \ x = L(t), 0 < t < T\} \\ |\alpha_{0,x}| > 0 & \overline{Q_L} \backslash (\omega_0 \times (0,T)) \\ \alpha_0(x,t) = 1 - \frac{x-b}{L(t)-b} & \forall x \in (b,L(t)), \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Demostración. Definamos la función $\alpha_0(x,t)$ como sigue

$$\alpha_0(x,t) := \begin{cases} \frac{x}{a}, & 0 \le x < a, \\ 1 + p\left(\frac{2(x-a)}{b-a}, \frac{b-a}{2a}\right), & a \le x < \frac{a+b}{2}, \\ 1 + p\left(\frac{2(b-x)}{b-a}, \frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right), & \frac{a+b}{2} \le x < b, \\ \frac{L(t)-x}{L(t)-b}, & b \le x \le L(t) \end{cases}$$

donde $p(w,z) := zw + (10-6z)w^3 + (8z-15)w^4 + (6-3z)w^5$

Notemos primero que para $a \le x < \frac{a+b}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_0(x,t) = 1 + \frac{(x-a)}{a} &+ \left(10 - 6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3 \\ &+ \left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right) - 15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^4 + \left(6 - 3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^5 \end{aligned}$$

y para $\frac{a+b}{2} \le x < b$, se sigue

$$\begin{aligned} \alpha_0(x,t) = 1 + \frac{b-x}{L(t)-b} &+ \left(10 - 6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3 \\ &+ \left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right) - 15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4 + \left(6 - 3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^5. \end{aligned}$$

También es importante recalcar que $\frac{2(x-a)}{b-a} = 1 = \frac{2(b-x)}{b-a}$ cuando $x = \frac{a+b}{2}$

Así, es evidente que

- $\lim\limits_{x\to a^-} \alpha_0(x,t) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{x}{a} = 1 = \lim\limits_{x\to a^+} \alpha_0(x,t),$

- $\lim\limits_{x\to b^-} \alpha_0(x,t) = 1 = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{L(t)-x}{L(t)-b} = \lim\limits_{x\to b^+} \alpha_0(x,t)$

Por lo tanto α_0 es continua en $x=a$ y $x=b$. Veamos que α_0 es continua en $x = \frac{a+b}{2}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{a+b}{2}^-} \alpha_0(x,t) &= \lim_{x\to \frac{a+b}{2}^-} \left[1 + \frac{(x-a)}{a} + \left(10 - 6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right) - 15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^4 + \left(6 - 3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^5\right] \\ &= 1 + \frac{b-a}{2a} + 10 - 6\frac{b-a}{2a} + 8\frac{b-a}{2a} - 15 + 6 - 3\frac{b-a}{2a} \\ &= 2 \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\alpha_0(x,t) &= \lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\left[1+\frac{b-x}{L(t)-b}+\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3\right.\\
&\quad+\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4\\
&\quad\left.+\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^5\right]\\
&= 1+\frac{b-a}{(L(t)-b)}+10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)+8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\\
&\quad-15+6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que α_0 es una función continua.

Ahora, note que

$$\alpha_{0x}(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0\le x<a,\\ p_x\left(\frac{2(x-a)}{b-a},\frac{b-a}{2a}\right), & a\le x<\frac{a+b}{2},\\ p_x\left(\frac{2(b-x)}{b-a},\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right), & \frac{a+b}{2}\le x<b,\\ \frac{-1}{L(t)-b}, & b\le x\le L(t), \end{cases} \tag{3.26}$$

Teniendo en cuenta que $w(x)$ es un polinomio de grado 1

$$p_x(w(x),z(t)) = w_x\left[z+3(10-6z)w^2+4(8z-15)w^3+5(6-3z)w^4\right]$$

Notemos primero que $|\alpha_{0,x}|\ge\eta$ en $\overline{Q_L}\backslash(\omega_0\times(0,T))$ donde

$$\frac{1}{\eta} = \text{máx}\left\{a,\ \text{máx}_{0\le t\le T}(L(t)-b)\right\}.$$

Por otro lado para $a\le x<\frac{a+b}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_{0x}(x,t) = \frac{2}{b-a}&\left[\frac{b-a}{2a}+3\left(10-6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^2\right.\\
&\left.+4\left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right)-15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3+5\left(6-3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^4\right]
\end{aligned}$$

y para $\frac{a+b}{2}\le x<b$, se sigue

$$\begin{aligned}
\alpha_{0x}(x,t) = -\frac{2}{b-a}&\left[\frac{b-a}{2(L(t)-b)}+3\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^2\right.\\
&\left.+4\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3+5\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4\right].
\end{aligned}$$

por lo que

- $\lim_{x\to a^-} \alpha_{0x}(x,t) = \lim_{x\to a^-} \frac{1}{a} = \frac{1}{a} = \lim_{x\to a^+} \alpha_{0x}(x,t)$,
- $\lim_{x\to b^-} \alpha_{0x}(x,t) = \lim_{x\to b^-} \frac{-1}{L(t)-b} = \frac{-1}{L(t)-b} = \lim_{x\to a^+} \alpha_{0x}(x,t)$,

Por lo tanto α_{0x} es continua en $x=a$ y $x=b$. Veamos que α_{0x} es continua en $x=\frac{a+b}{2}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^-} \alpha_{0x}(x,t) = & \lim_{x\to\frac{a+b}{2}^-} \frac{2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2a} + 3\left(10-6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^2\right. \\
& \left. +4\left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right)-15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3 + 5\left(6-3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^4\right] \\
& = \frac{2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2a} + 3\left(10-6\frac{b-a}{2a}\right) + 4\left(8\frac{b-a}{2a}-15\right) + 5\left(6-3\frac{b-a}{2a}\right)\right] \\
& = \frac{2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2a} + 30 - 18\frac{b-a}{2a} + 32\frac{b-a}{2a} - 60 - 30 - 15\frac{b-a}{2a}\right] \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+} \alpha_{0x}(x,t) = & \lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+} \frac{-2}{b-a}\left[\frac{b-x}{2(L(t)-b)} + 3\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^2\right. \\
& + 4\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3 \\
& \left. +5\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4\right] \\
& = \frac{-2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2(L(t)-b)} + 3\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\right. \\
& \left. + 4\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right) +5\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\right] \\
& = \frac{-2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2(L(t)-b)} + 30 - 18\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right. \\
& \left. + 32\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right) - 60 +30 - 15\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Por lo que α_{0x} es continua. Consideremos ahora

$$\alpha_{0t}(x,t) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{a+b}{2}, \\ p_t\left(\frac{2(b-x)}{b-a}, \frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right), & \frac{a+b}{2} \le x < b, \\ \frac{L'(t)(x-b)}{(L(t)-b)^2} & b \le x \le L(t). \end{cases} \tag{3.27}$$

donde $p_t(w(x), z(t)) := z_t(w + -6w^3 + 8w^4 - 3w^5)$.

Notemos que para $\frac{a+b}{2} \le x < b$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{0t}(x,t) = \frac{-L'(t)(b-a)}{2(L(t)-b)^2}\left[\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right) - 6\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3\right. \\
\left. +8\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4 - 3\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^5\right].
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\alpha_{0t}(x,t)=\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\frac{-L'(t)(b-a)}{2(L(t)-b)^2}\left[\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)-6\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3+8\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^4\right.$$
$$\left.-3\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^5\right]=\frac{-L'(t)(b-a)}{2(L(t)-b)^2}[1-6+8-3]=0=\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^-}\alpha_{0t}(x,t)$$

y $\lim_{x\to b^-}\alpha_{0t}(x,t)=0=\lim_{x\to b^+}\alpha_{0t}(x,t)$, así α_{0t} es continua, además es claro que $\alpha_{0xt}=\alpha_{0tx}$, con esto podemos concluir que $\alpha_0\in C^1(\overline{Q_L})$

Ahora consideramos

$$\alpha_{0xx}(x,t):=\begin{cases}0, & 0\le x<a,\\ p_{xx}\left(\frac{2(x-a)}{b-a},\frac{b-a}{2a}\right), & a\le x<\frac{a+b}{2},\\ p_{xx}\left(\frac{2(b-x)}{b-a},\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right), & \frac{a+b}{2}\le x<b,\\ 0, & b\le x\le L(t).\end{cases}\tag{3.28}$$

Teniendo en cuenta que $w(x)$ es un polinomio de grado 1

$$p_{xx}(w(x),z(t))=w_x\left[6(10-6z)w+12(8z-15)w^2+20(6-3z)w^3\right]$$

Notemos primero que para $a\le x<\frac{a+b}{2}$, obtenemos

$$\alpha_{0xx}(x,t)=\frac{2}{b-a}\left[6\left(10-6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)\right.$$
$$\left.+12\left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right)-15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^2+20\left(6-3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3\right]$$

y para $\frac{a+b}{2}\le x<b$, se sigue

$$\alpha_{0xx}(x,t)=-\frac{2}{b-a}\left[6\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)\right.$$
$$\left.+12\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^2+20\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3\right].$$

por lo que

- $\lim_{x\to a^-}\alpha_{0xx}(x,t)=0=\lim_{x\to a^+}\alpha_{0xx}(x,t)$,
- $\lim_{x\to b^-}\alpha_{0xx}(x,t)=0=\lim_{x\to a^+}\alpha_{0xx}(x,t)$,

Por lo tanto α_{0xx} es continua en $x=a$ y $x=b$. Veamos que α_{0xx} es continua en $x=\frac{a+b}{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^-}\alpha_{0xx}(x,t)=\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^-}\frac{2}{b-a}\left[6\left(10-6\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)\right.$$
$$\left.+12\left(8\left(\frac{b-a}{2a}\right)-15\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^2+20\left(6-3\left(\frac{b-a}{2a}\right)\right)\left(\frac{2(x-a)}{b-a}\right)^3\right]$$
$$=\frac{2}{b-a}\left[6\left(10-6\frac{b-a}{2a}\right)+12\left(8\frac{b-a}{2a}-15\right)+20\left(6-3\frac{b-a}{2a}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{b-a}\left[60-36\frac{b-a}{2a}+96\frac{b-a}{2a}-180+120-60\frac{b-a}{2a}\right]$$
$$=0$$

y además

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\alpha_{0xx}(x,t) = &\lim_{x\to\frac{a+b}{2}^+}\frac{-2}{b-a}\left[6\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)\right.\\
&+12\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)\\
&\left.+20\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\left(\frac{2(b-x)}{b-a}\right)^3\right]\\
=&\frac{-2}{b-a}\left[6\left(10-6\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\right.\\
&\left.+12\left(8\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-15\right)+20\left(6-3\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right)\right]\\
=&\frac{-2}{b-a}\left[60-36\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right.\\
&\left.+96\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)-180+120-60\left(\frac{b-a}{2(L(t)-b)}\right)\right]\\
=&\,0.
\end{aligned}
$$

Por lo que $\alpha_{0xx}\in C^0(\overline{Q_L})$.

Ahora sea $0<t<T$, Si $x=0$ entonces $\alpha_0(x,t)=\alpha_0(0,t)=\frac{0}{a}=0$, si $x=L(t)$ como $b<L(t)$ entonces $\alpha_0(x,t)=\alpha_0(L(t),t)=\frac{L(t)-L(t)}{L(t)-b}=0$ por lo tanto $\alpha_0(x,t)=0$ para todo $(x,t)\in\{(x,t):x=0 \text{ o } x=L(t), 0<t<T\}$.

Por último si $x\in[b,L(t)]$, entonces $\alpha_0(x,t)=\frac{L(t)-x}{L(t)-b}=\frac{L(t)-b+b-x}{L(t)-b}=1-\frac{x-b}{L(t)-b}$. □

En el siguiente resultado, establecemos la desigualdad de Carleman para el sistema adjunto, el cuál es un ingrediente fundamental para probar la desigualdad de observabilidad deseada y así tener nuestro resultado de controlabilidad. Consideremos inicialmente, las siguientes funciones:

$$
\begin{cases}
\alpha_1(x,t) &:=\alpha_0(x,t)+1,\\
\gamma(t) &:=t^k(T-t)^k,\\
\xi(x,t) &:=\dfrac{e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)},\\
\alpha(x,t) &:=\dfrac{e^{2\lambda|\alpha_1|_\infty}-e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)},
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

donde $\lambda>0$ y $k\geq 2$ son números reales.

Teorema 19 (Estimación global de Carleman)**.** *Sean α_0 la función considerada en el Lema 5 y las funciones ξ,α y γ como en (3.29). Entonces, existen λ_0, s_0 y C_0 constantes positivas que dependen solamente de N_L, L_*, B, ω y T tal que para cualquier $s\geq s_0$, $\lambda\geq\lambda_0$, $g\in L^2(Q_L)$ y $\phi^T\in L^2(0,L(T))$ se tiene que*

$$
\begin{aligned}
&\iint_{Q_L} e^{-2s\alpha}\left[(s\xi)^{-1}(|\varphi_t|^2+|\varphi_{xx}|^2)+\lambda^2(s\xi)|\varphi_x|^2+\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2\right]\,dx\,dt\\
&\quad+\int_0^T e^{-2s\alpha(L(t),t)}\lambda s\xi(L(t),t)|\varphi_x(L(t),t)|^2\,dt+\int_0^T e^{-2s\alpha(0,t)}\lambda s\xi(0,t)|\varphi_x(0,t)|^2\,dt\\
&\qquad\leq C_0\left(\iint_{Q_L} e^{-2s\alpha}|g|^2\,dx\,dt+\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2\,dx\,dt\right),
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

donde φ es la solución al sistema adjunto 3.25.

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{cases} \alpha_x = -\lambda\alpha_{1,x}\frac{e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)} = -\lambda\alpha_{0,x}\xi = -\xi_x \\ \alpha_{xx} = -\lambda\alpha_{0,x}\xi_x - \lambda\alpha_{0,xx}\xi = -\lambda^2\alpha_{0,x}^2\xi - \lambda\alpha_{0,xx}\xi. \end{cases} \tag{3.31}$$

Además, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_t =& -\lambda\alpha_{1,t}\frac{e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)} + \frac{kt^{k-1}(T-t)^k - kt^k(T-t)^{k-1}}{t^{2k}(T-t)^{2k}}\left(e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty} - e^{\lambda\alpha_1(x,t)}\right), \\ =& -\frac{k(T-2t)}{t^{k+1}(T-t)^{k+1}}\left(e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty} - e^{\lambda\alpha_1(x,t)}\right) - \lambda\alpha_{0,t}\xi. \qquad (3.32) \\ =& -\frac{k(T-2t)}{\gamma(t)^{1+\frac{1}{k}}}\left(e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty} - e^{\lambda\alpha_1(x,t)}\right) - \lambda\alpha_{0,t}\xi. \qquad (3.33) \end{aligned}$$

Se puede ver que para λ suficientemente grande se tienen las siguientes desigualdades y teniendo en cuenta que $k \geq 2$,

$$|\alpha_x| \leq C\lambda\xi, \quad |\alpha_{xx}| \leq C\lambda^2\xi, \quad \text{y} \quad |\alpha_t| \leq C\xi^{1+1/k} + C\lambda\xi \leq C\lambda\xi^{3/2}. \tag{3.34}$$

Ahora definamos ψ donde $\varphi := e^{s\alpha}\psi$. Derivando parcialmente, obtenemos

$$\begin{cases} \varphi_t &= s\alpha_t e^{s\alpha}\psi + e^{s\alpha}\psi_t \\ \varphi_x &= s\alpha_x e^{s\alpha}\psi + e^{s\alpha}\psi_x \\ \\ \varphi_{xx} &= s\alpha_{xx}e^{s\alpha}\psi + s^2\alpha_x^2 e^{s\alpha}\psi + s\alpha_x e^{s\alpha}\psi_x + s\alpha_x e^{s\alpha}\psi_x + e^{s\alpha}\psi_{tt} \\ &= e^{s\alpha}(\psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi + 2s\alpha_x\psi_x + s\alpha_{xx}\psi). \end{cases}$$

Remplazando estos valores en (3.25) se tiene que

$$-e^{s\alpha}(s\alpha_t\psi + \psi_t) - e^{s\alpha}(\psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi + 2s\alpha_x\psi_x + s\alpha_{xx}\psi) = g(x,t),$$

lo cual implica que

$$s\alpha_t\psi + \psi_t + \psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi + 2s\alpha_x\psi_x + s\alpha_{xx}\psi = -e^{-s\alpha}g,$$

es decir

$$(\psi_t + 2s\alpha_x\psi_x) + (\psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi) = -e^{-s\alpha}g - s\alpha_{xx}\psi - s\alpha_t\psi.$$

Por comodidad, se utilizará la siguiente notación

$$\begin{cases} U\psi := \psi_t + 2s\alpha_x\psi_x, \\ V\psi := \psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$U\psi + V\psi = -e^{-s\alpha}g - s\alpha_{xx}\psi - s\alpha_t\psi$$

Así desde las estimativas (3.34), se sigue

$$\begin{aligned} \|U\psi\|_{L^2(Q_L)}^2 + \|V\psi\|_{L^2(Q_L)}^2 + 2(U\psi, V\psi)_{L^2} &= \|e^{-s\alpha}g + s\alpha_{xx}\psi + s\alpha_t\psi\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\iint_{Q_L} e^{-2\alpha}|g|^2\,dx\,dt + C\iint_{Q_L}\lambda^4 s^2\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{3.35}$$

A partir de ahora usaremos una notación más simplificada para facilitar el manejo de los términos, notemos que

$$\begin{aligned}\langle U\psi, V\psi\rangle &= \langle \psi_t + 2s\alpha_x\psi_x\ , \psi_{xx} + s^2\alpha_x^2\psi\rangle \\ &= \langle \psi_t, \psi_{xx}\rangle + \langle \psi_t, s^2\alpha_x^2\psi\rangle + \langle 2s\alpha_x\psi_x, \psi_{xx}\rangle + \langle 2s\alpha_x\psi_x, s^2\alpha_x^2\psi\rangle.\end{aligned}$$

Ahora vamos a verificar qué nos resulta de cada uno de los términos de la suma, para ello vamos a tener en cuenta la siguiente regla integral de Leibniz.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx\right) = f(b(t),t)\cdot\frac{d}{dt}b(t) - f(a(t),t)\cdot\frac{d}{dt}a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx. \tag{3.36}$$

En efecto, calculando estos productos, se obtiene

$$\begin{aligned}\langle 2s\alpha_x\psi_x,\psi_{xx}\rangle &= \int_0^T\int_0^{L(t)} 2s\alpha_x\psi_x\psi_{xx}\ dx\ dt \\ &= \int_0^T\int_0^{L(t)} s\alpha_x(\psi_x^2)_x\ dx\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} s\alpha_{xx}\psi_x^2\ dx\ dt + \int_0^T s[\alpha_x\psi_x^2]_{x=0}^{x=L(t)}\ dt \\ &= -\iint_{Q_{L,T}} s\alpha_{xx}\psi_x^2\ dx\ dt + \int_0^T s\alpha_x(L(t),t)\psi_x^2(L(t),t)\ dt - \int_0^T s\alpha_x(0,t)\psi_x^2(0,t)\ dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 2s\alpha_x\psi_x, s^2\alpha_x^2\psi\rangle &= \int_0^T\int_0^{L(t)} 2s^3\alpha_x^3\psi_x\psi\ dx\ dt \\ &= \int_0^T\int_0^{L(t)} s^3\alpha_x^3(\psi^2)_x\ dx\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} s^3(\alpha_x^3)_x\psi^2\ dx\ dt + \int_0^T s^3[\alpha_x^3\psi^2]_{x=0}^{x=L(t)}\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} 3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx}\psi^2\ dx\ dt + \int_0^T \left(s^3\alpha_x^3(L(t),t)(\psi((L(t),t))^2 - s^3\alpha_x^3(0,t)\psi^2(0,t)\right) dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} 3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx}\psi^2\ dx\ dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_t, \psi_{xx}\rangle &= \int_0^T\int_0^{L(t)} \psi_t\psi_{xx}\ dx\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} \psi_{tx}\psi_x\ dx\ dt + \int_0^T [\psi_t\psi_x]_{x=0}^{x=L(t)}\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} \psi_{xt}\psi_x\ dx\ dt + \int_0^T [\psi_t(L(t),t)\psi_x(L(t),t) - \psi_t(0,t)\psi_x(0,t)]\ dt \\ &= -\int_0^T\int_0^{L(t)} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\psi_x^2\right]\ dx\ dt\end{aligned}$$

Aplicando 3.36

$$\begin{aligned}&= +\int_0^T \frac{1}{2}\psi_x^2(L(t),t)L'(t)\ dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{L(t)}\frac{1}{2}\psi_x^2\ dx\right]\ dt \\ &= +\int_0^T \frac{1}{2}\psi_x^2(L(t),t)L'(t)\ dt - \lim_{t\to T}\int_0^{L(t)}\frac{1}{2}\psi_x^2(x,t)dx + \lim_{t\to 0}\int_0^{L(t)}\frac{1}{2}\psi_x^2(x,t)\ dx.\end{aligned}$$

Recordemos que $\psi(x,t) = e^{-s\alpha(x,t)}\varphi(x,t)$ donde $\alpha(x,t) := \dfrac{e^{2\lambda|\alpha_1|_\infty} - e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{t^k(T-t)^k}$ Notemos que:

- $\psi_x(x,t) = -s\alpha_x(x,t)e^{-s\alpha(x,t)}\varphi(x,t) + e^{-s\alpha(x,t)}\varphi_x(x,t)$.
- Como $\lambda|\alpha_1|_\infty > \lambda\alpha_1(x,t)$ y e^x es una función creciente, entonces $e^{2\lambda|\alpha_1|_\infty} > e^{\lambda\alpha_1(x,t)}$, por lo tanto $\alpha(x,t) = \infty$ cuando $t \to T$ y así $e^{-s\alpha(x,t)} = 0$ cuando $t \to T$.
- $\alpha_x = -\lambda\alpha_{o,x}\frac{e^{\lambda\alpha_0(x,t)+\lambda}}{t^k(T-t)^k}$ donde $\alpha_0^T(x) = \alpha_0(x,T)$ es una función polinomial por lo tanto $\alpha_x(x,t) = \infty$ cuando $t \to T$.
- $\varphi(x,T) = \varphi^T(x)$ para $x \in (0, L(T))$.

Estos argumentos nos sirven para ver que

$$\lim_{t\to T}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}\psi_x^2(x,t)dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to T}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2(x,t)\psi^2(x,t)\ dx = 0.$$

Haciendo un análisis análogo para cuando t tiende a cero se llega a la conclusión de que

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}\psi_x^2(x,t)dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 0}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2(x,t)\psi^2(x,t)\ dx = 0.$$

Con esto podemos concluir que

$$\langle \psi_t, \psi_{xx}\rangle = +\int_0^T \frac{1}{2}\psi_x^2(L(t),t)L'(t)\ dt.$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_t, s^2\alpha_x^2\psi\rangle &= \int_0^T\int_0^{L(t)} s^2\alpha_x^2\psi_t\psi\ dx\ dt \\
&= \int_0^T\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2\frac{\partial}{\partial t}(\psi^2)\ dx\ dt \\
&= \int_0^T\int_0^{L(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}s^2\alpha_x^2\psi^2\right] - \frac{1}{2}s^2\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_x^2)\psi^2\right)\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2\psi^2\ dx\right]\ dt - \int_0^T \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2(L(t),t)\psi^2(L(t),t)L'(t)\ dt \\
&\quad - \int_0^T\int_0^{L(t)} s^2\alpha_x\alpha_{xt}\psi^2\ dt\ dx \\
&= \lim_{t\to T}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2(x,t)\psi^2(x,t)\ dx - \lim_{t\to 0}\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x^2(x,t)\psi^2(x,t)\ dx \\
&\quad - \int_0^T\int_0^{L(t)} \frac{1}{2}s^2\alpha_x\alpha_{xt}\psi^2\ dt\ dx.
\end{aligned}$$

De manera similar como en la estimación anterior, obtenemos

$$\langle \psi_t, s^2\alpha_x^2\psi\rangle = -\int_0^T\int_0^{L(t)} s^2\alpha_x\alpha_{xt}\psi^2\ dt\ dx.$$

Así el producto interno de los operadores U y V esta dado por

$$\langle U\psi, V\psi\rangle = s\int_0^T\int_0^{L(t)}(-\alpha_{xx})|\psi_x|^2\,dx\,dt - \int_0^T\int_0^{L(t)}(3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx}+s^2\alpha_x\alpha_{xt})|\psi|^2\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\left(s\alpha_x(L(t),t)+\frac{1}{2}L'(t)\right)|\psi_x(L(t),t)|^2\,dt - \int_0^T s\alpha_x(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\,dt. \quad (3.37)$$

Note que desde (3.31) y (3.32), tenemos

$$\begin{cases} -\alpha_x^2\alpha_{xx} = -(\lambda|\alpha_{0,x}|\xi)^2\left(-\lambda^2|\alpha_{0,x}|^2\xi - \lambda\alpha_{0,xx}\xi\right) = \lambda^4|\alpha_{0,x}|^4\xi^3 + \lambda^3|\alpha_{0,x}|^2\alpha_{0,xx}\xi^3 \\ -\alpha_{xx} = \lambda^2|\alpha_{0,x}|^2\xi + \lambda\alpha_{0,xx}\xi, \end{cases}$$

y por Lema 5, se sigue que

$$\begin{cases} -\alpha_x^2\alpha_{xx} \geq C\lambda^4\xi^3 - C\lambda^3\xi^3 \ \text{ en } \overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T)), \\ -\alpha_{xx} \geq C\lambda^2\xi - C\lambda\xi \ \text{ en } \overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T)). \end{cases} \quad (3.38)$$

Por definición (3.26), (3.27) y (3.28), vemos que $-\alpha_x^2\alpha_{xx}$ y $-\alpha_{xx}$ son funciones positivas en $\overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T))$ y desde (3.38), para λ suficientemente grande, estas dos funciones son positivas también en ω_0, por lo tanto también serian positivas en todo el dominio Q_L. Por tanto

$$\begin{aligned} s\int\int_{Q_L}(-\alpha_{xx})|\psi_x|^2\,dx\,dt &\geq s\int\int_{\overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T))}(-\alpha_{xx})|\psi_x|^2\,dx\,dt \\ &\geq C\int\int_{\overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T))} s\lambda^2\xi|\psi_x|^2\,dx\,dt \\ &= C\int\int_{Q_L} s\lambda^2\xi^2|\psi_x|^2\,dx\,dt - C\int\int_{(\omega_0\times(0,T))} s\lambda^2\xi|\psi_x|^2\,dx\,dt, \end{aligned} \quad (3.39)$$

y

$$\begin{aligned} \int\int_{Q_L}(-3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx})|\psi|^2\,dx\,dt &\geq \int\int_{\overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T))}(-3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx})|\psi^2\,dx\,dt \\ &\geq C\int\int_{\overline{Q_L}/(\omega_0\times(0,T))} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt \\ &= C\int\int_{Q_L} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt - C\int\int_{(\omega_0\times(0,T))} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Además, note que desde el Lema 5, obtenemos

$$\begin{aligned} -\alpha_x\alpha_{xt} &= (\lambda\alpha_{0,x}\xi)\left(-\lambda\alpha_{0,xt}\xi - \lambda\alpha_{0,x}\xi_t\right) = -\lambda^2\alpha_{0,x}\alpha_{0,xt}\xi^2 - \lambda^2\alpha_{0,x}^2\xi\xi_t \\ &\geq -C\lambda^2\xi^2 - C\lambda^2\xi\xi_t \end{aligned}$$

y note que

$$\xi_t = \left(\lambda\alpha_{0,t} - \frac{k(T-2t)}{t(T-t)}\right)\xi.$$

Así tenemos

$$-\alpha_x\alpha_{xt} \geq -C\lambda^2\xi^2 - C\lambda^2\xi\xi_t = -C\lambda^2\left(1+\lambda\alpha_{0,t} - \frac{k(T-2t)}{t(T-t)}\right)\xi^2$$

Luego, de la estimativa (3.40),

$$\begin{aligned}\int\int_{Q_L}(-3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx}-s^2\alpha_x\alpha_{xt})|\psi|^2\,dx\,dt \geq C\int\int_{Q_L} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt \\ - C\int\int_{(\omega_0\times(0,T))} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt \\ - C\int\int_{Q_L} s^2\lambda^2\left(1+\lambda\alpha_{0,t}-\frac{k(T-2t)}{t(T-t)}\right)\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Así, tomando λ y s suficientemente grandes, obtenemos

$$\begin{aligned}\int\int_{Q_L}(-3s^3\alpha_x^2\alpha_{xx}-s^2\alpha_x\alpha_{xt})|\psi|^2\,dx\,dt \geq C\int\int_{Q_L} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt \\ - C\int\int_{(\omega_0\times(0,T))} s^3\lambda^4\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt. \quad (3.41)\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando las estimativas (3.26), (3.29) y (3.31), obtenemos

$$\alpha_x(L(t),t)=\frac{\lambda e^{\lambda}}{(L(t)-b)t^k(T-t)^k}\geq C\xi(L(t),t)>0 \qquad \text{en } (0,T)$$

y

$$-\alpha_x(0,t)=\frac{\lambda e^{\lambda}}{at^k(T-t)^k}\geq C\xi(0,t)>0 \text{ en } (0,T).$$

Por tanto, podemos estimar los siguientes términos

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(s\alpha_x(L(t),t)+\frac{1}{2}L'(t)\right)|\psi_x(L(t),t)|^2\,dt-\int_0^T s\alpha_x(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\,dt \\ \geq \int_0^T\left(Cs\xi(L(t),t)+\frac{1}{2}L'(t)\right)|\psi_x(L(t),t)|^2\,dt+C\int_0^T s\xi(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Así redimensionando la anterior estimativa con s suficientemente grande, tenemos la existencia de constante positiva C, tal que

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(s\alpha_x(L(t),t)+\frac{1}{2}L'(t)\right)|\psi_x(L(t),t)|^2\,dt-\int_0^T s\alpha_x(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\,dt \\ \geq \int_0^T\left(Cs\xi(L(t),t)\right)|\psi_x(L(t),t)|^2\,dt+C\int_0^T s\xi(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\,dt. \quad (3.42)\end{aligned}$$

Utilizando las estimativas (3.39), (3.41) y (3.42) en la ecuación (3.37), obtenemos para s y λ suficientemente grandes,

$$\begin{aligned}(U\psi,V\psi)_{L^2(Q_L)} \geq C\iint_{Q_L}((s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2+(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2)\,dx\,dt \\ + Cs\lambda\int_0^T\left(\xi(L(t),t)||\psi_x(L(t),t)|^2+\xi(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\right)\,dx\,dt \\ - C\iint_{\omega_0\times(0,T)}((s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2+(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2)\,dx\,dt. \quad (3.43)\end{aligned}$$

Podemos deducir entonces de la ecuación (3.35), lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\|U\psi\|^2_{L^2(Q_L)} + \|V\psi\|^2_{L^2(Q_L)} + C\iint_{Q_L}((s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2)\,dx\,dt.\\
+ Cs\lambda\int_0^T \left(\xi(L(t),t)||\psi_x(L(t),t)|^2 + \xi(0,t)|\psi_x(0,t)|^2\right)\,dx\,dt\\
\leq C\iint_{Q_L} e^{-2\alpha}|g|^2\,dx\,dt + +C\iint_{Q_L}\lambda^4 s^2\xi^3|\psi|^2\,dx\,dt\\
C\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\,dx\,dt + C\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2\,dx\,dt.\\
\leq C\iint_{Q_L} e^{-2\alpha}|g|^2\,dx\,dt + C\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\,dx\,dt\\
+ C\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Por otro lado, notemos que

$$
\|V\psi\|^2_{L^2(Q_L)} \geq C\iint_{Q_L}(s\xi)^{-1}|\psi_{xx}|^2\,dx\,dt - C\iint_{Q_L}(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\,dx\,dt.
$$

entonces vemos que

$$
\|U_\psi\|^2_{L^2(Q_L)} \geq C\iint_{Q_L}(s\xi)^{-1}|\psi_t|^2\,dx\,dt - C\iint_{Q_L}(s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2\,dx\,dt.
$$

También se probó que para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar un C_ϵ tal que

$$
\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2\,dx\,dt \leq \epsilon\iint_{Q_L}(s\xi)^{-1}|\psi_{xx}|^2\,dx\,dt - C_\epsilon\iint_{\omega_0\times(0,T)}(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\,dx\,dt.
\tag{3.45}
$$

Al unir todo lo anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
\iint_{Q_L}((s\xi)^{-1}(|\psi_t|^2 + |\psi_{xx}|^2) + (s\xi)\lambda^2|\psi_x|^2 + (s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2)\,dx\,dt\\
+s\lambda\int_0^T(\xi(L(t),t)\psi_x(L(t),t)|^2 + \xi(0,t)|\psi_x(0,t)|^2)\,dt\\
\leq C\left(\iint_{Q_L} e^{-2\alpha}|g|^2\,dx\,dt + \iint_{\omega\times(0,T)}(s\xi)^3\lambda^4|\psi|^2\,dx\,dt\right).
\end{aligned}
$$

volviendo a la variable original se obtiene el resultado deseado. □

3.5.2. Desigualdad de Observabilidad

Como consecuencia de la estimación de Carleman se sigue la siguiente propiedad de observabilidad para el problema adjunto homogéneo asociado a nuestro problema 1.

Proposición 3. *Existe $C > 0$ que depende solamente de N_L, L_*, B, ω y T tal que para algún $\varphi^T \in L^2(0, L(T))$, la solución asociada al problema adjunto homogéneo* (3.25) *(con $g = 0$) que satisface*

$$
\int_0^{L_0}|\varphi(x,0)|^2\,dx \leq C\iint_{\omega\times(0,T)}|\varphi|^2\,dx\,dt.
\tag{3.46}
$$

Demostración. Sea φ la solución del problema adjunto con $g = 0$. Multiplicando la primera ecuación del problema adjunto por la solución φ e integrando en $(0, L(t))$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^{L(t)} \varphi_t(x,t)\varphi(x,t)dx - \int_0^{L(t)} \varphi_{xx}(x,t)\varphi(x,t)dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L(t)} \varphi^2(x,t)dx + \int_0^{L(t)} \varphi_x^2 dx - \varphi_x(L(t),t)\varphi(L(t),t) + \varphi_x(0,t)\varphi(0,t) \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones de contorno del problema adjunto, podemos notar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L(t)} \varphi^2(x,t)dx = 2\int_0^{L(t)} \varphi_x^2(x,t)dx \geq 0.$$

Lo cual implica que la energía es creciente con respecto al tiempo, es decir

$$\int_0^{L(0)} |\varphi(x,0)|^2\, dx \leq \int_0^{L(t)} |\varphi(x,t)|^2; \quad \forall t \in (0,T).$$

En particular,

$$\frac{T}{2}\int_0^{L(0)} |\varphi(x,0)|^2\, dx \leq \int_{T/4}^{3T/4}\int_0^{L(t)} |\varphi(x,t)|^2\, dx\, dt. \tag{3.47}$$

Por otro lado, consideremos $\lambda = \lambda_0$ y $s = s_0$ como en la desigualdad de observabilidad (3.30), lo cuál implica

$$\iint_{Q_L} e^{-2s_0\alpha}\xi^3|\varphi|^2\, dx\, dt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} e^{-2s_0\alpha}\xi^3|\varphi|^2\, dx\, dt$$

Basta notar que la función

$$e^{-2s_0\alpha}\xi^3 = \frac{e^{-2s_0\alpha(x,t)}e^{3\lambda\alpha_1(x,t)}}{t^{3k}(T-t)^{3k}} \geq C > 0, \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,L(t)) \times (T/4, 3T/4).$$

Luego tenemos

$$\int_{T/4}^{3T/4}\int_0^{L(t)} |\varphi|^2\, dx\, dt \leq C\int_{T/4}^{3t/4}\int_0^{L(t)} e^{-2s_0\alpha}\xi^3|\varphi|^2\, dx\, dt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2\, dx\, dt.$$

Finalmente, desde (3.47) y la estimativa anterior, se sigue (3.46). □

3.5.3. Controlabilidad Aproximada

En dirección a obtener nuestro resultado principal con respecto a la controlabilidad nula del problema de frontera libre, debemos establecer un resultado de controlabilidad aproximada.

Consideremos $L_0 > 0$, $T > 0$, y además

$$0 < a < b < L_* < L_0 < B.$$

Asumimos que L es una función fija que satisface

$$\begin{cases} L \in C^1([0,T]) \text{ tal que } L_* \leq L(t) \leq B,\ L(0) = L_0 \\ L(t) > b \text{ para todo } t \in [0,T] \text{ donde tenemos} \\ N_L := \|L'\|_\infty, \quad N_0 := \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Teorema 20. *Sea L una función satisfaciendo* (3.48)*. Para cualquier $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y cualquier $\beta > 0$ existen pares (v_β, y_β) con*

$$v_\beta \in L^2(\omega \times (0,T)), \quad y_\beta^* \in C^0([0,T]; H_0^1(0,B))$$

que satisface (3.6) *y*

$$\|y_\beta(\cdot, T)\|_{L^2(0,L(T))} \leq \beta. \tag{3.49}$$

Además se puede encontrar v_β tal que

$$\|v_\beta\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C_1 \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)}, \tag{3.50}$$

donde C_1 depende de N_L, L_*, B, ω y T pero es independiente de β

Demostración. Inspirados por los resultados del Capítulo 2, donde se establece la controlabilidad aproximada para la ecuación de calor en un cilindro, nuestro enfoque se fundamenta en asociar un funcional adecuado al caso no cilíndrico (3.6). En efecto, sea $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ y $\beta > 0$ dados y definamos el funcional $J_{L,\beta} : L^2(0, L(T)) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_{L,\beta}(\varphi^T) := \frac{1}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, dx \, dt + \beta \|\varphi^T\|_{L^2(0,L(T))} + (\varphi(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,L_0)}, \quad \forall \varphi^T \in L^2(0, L(T)) \tag{3.51}$$

donde para cada $\varphi^T \in L^2(0, L(T))$ denotamos por φ a la única solución del problema adjunto (3.25) (con $g = 0$). Similarmente como fue establecido en la prueba del Lema 2 del Capítulo 2, tenemos que $J_{L,\beta}$ posee un único minimizador $\hat{\varphi}_\beta^T$ y el control es dado por

$$v_\beta = \hat{\varphi}_\beta|_{\omega\times(0,T)}$$

donde $\hat{\varphi}_\beta$ es la solución del problema adjunto (3.25) asociada a $\hat{\varphi}_\beta^T$. Entonces de la desigualdad $J_{L,\beta}(\hat{\varphi}_\beta^T) \leq J_{L,\beta}(0) = 0$ y de la desigualdad de observabilidad (3.46), deducimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\beta|^2 \, dx \, dt + \beta \|\hat{\varphi}_\beta^T\|_{L^2(0,L(T))} \\
&\qquad \leq -(\hat{\varphi}_\beta(\cdot, 0), y_0)_{L^2(0,L_0)} \leq \frac{1}{4C} \|\hat{\varphi}_\beta(\cdot, 0)\|_{L^2(0,L_0)}^2 + C\|y_0\|_{L^2(0,L^0)}^2 \\
&\qquad \leq \frac{1}{4} \iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\beta|^2 \, dx \, dt + C_2 \|y_0\|_{L^2(0,L_0)}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|v_\beta\|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 \leq \iint_{\omega\times(0,T)} |\hat{\varphi}_\beta|^2 \, dx \, dt + 4\beta \|\hat{\varphi}_\beta^T\|_{L^2(0,L(T))} \leq 4C_2 \|y_0\|_{L^2(0,L_0)}^2. \tag{3.52}$$

□

Un resultado realmente directo sería la controlabilidad nula del problema del calor en el dominio no cilíndrico (con L fijo).

Corolario 1. *Sea L una función satisfaciendo* (3.48)*. Para cualquier $y_0 \in H_0^1(0, L_0)$ existe un par (v, y) con*

$$v \in L^2(\omega \times (0,T)), y^* \in C^0([0,T]; H_0^1(0,B))$$

satisfaciendo (3.6) *y* (3.8)*. Además puede encontrarse v tal que*

$$\|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C_1 \|y_0\|_{H_0^1(0,L_0)},$$

donde C_1 depende de N_L, L_*, B, ω y T.

3.6. Resultado Principal: Controlabilidad Nula del Problema de Frontera Libre

En esta sección presentamos la demostración del resultado principal de este capítulo:

Demostración del Teorema 13. Para probar este resultados utilizaremos un argumento de punto fijo para garantizar la existencia de la función L garantizando la condición de la frontera libre y utilizaremos un argumento de compacidad y unicidad para que a partir de la controlabilidad aproximada podemos tener una solución adicional que satisfaga la propiedad de la controlabilidad nula.

En efecto, sea $\beta > 0$ y $R > 0$ dados, consideremos en conjunto

$$\mathcal{M} : \left\{ l \in C^1([0,T]) : L_* \leq l \leq B,\ l(0) = L_0,\ N_l := \|l'\|_\infty \leq R \right\}.$$

Por otro lado, definamos el operador

$$\Lambda_\beta : \mathcal{M} \mapsto C^1([0,T])$$

dado por

$$\Lambda_\beta(l) = L \text{ con } L(t) = L_0 - \int_0^t y_x(l(s), s)\, ds \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.53}$$

donde y es la solución al sistema lineal

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = v 1_\omega, & (x,t) \in Q_l \\ y(0,t) = 0, \quad y(l(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), & x \in (0, L_0) \end{cases} \tag{3.54}$$

y v es el $\beta-$control de norma mínima en $L^2(\omega \times (0,T))$ asociado a l, es decir la única solución al problema

$$\begin{cases} \text{minimizar } \iint_{\omega\times(0,T)} |v|^2\, dx\, dt \\ \text{sujeto a } v \in L^2(\omega \times (0,T)) \\ y \text{ solución de (3.54)} \\ \text{satisfaciendo } \|y_\beta(\cdot,T)\|_{L^2(0,L(T))} \leq \beta. \end{cases} \tag{3.55}$$

Notemos inicialmente que que el espacio $\mathcal{M}$ es un subconjunto convexo no vacío acotado y cerrado de $C^1([0,T])$. Además el problema (3.54)-(3.55) posee exactamente una solución para cada $l \in \mathcal{M}$ en virtud de la controlabilidad aproximada del problema no-cilíndrico, Teorema (20) y en la convexidad estricta de la norma $L^2(\omega \times (0,T))$. Por tanto, la aplicación Λ_β **está bien definida**

Aplicaremos el Teorema de Schauder (41) para demostrar la existencia de un punto fijo para el operador Λ_β. Cabe resaltar que este punto fijo garantiza la condición de frontera libre. Para este propósito debemos probar que el operador es continuo y compacto:

(i) **Veamos que Λ_β es continua:** Para esto, asumamos que $l_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \geq 1$ y

$$l_n \to l \quad \text{en} \quad C^1([0,T]).$$

Debemos probar que $\Lambda_\beta(l_n) \to \Lambda_\beta(l)$.

En efecto, denotamos por (v^n, y^n) al par control-estado asociado a l_n ((v^n,y^n) es la solución al problema (3.54)-(3.55)). Desde el Capitulo 1, teniendo en cuenta las primeras condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad, sabemos que

$$v^n = \hat{\varphi}_n|_{\omega\times(0,T)}$$

donde $\hat{\varphi}_n$ es la solución al problema adjunto (no-cilíndrico) con frontera dada por la función l_n y dato final $\hat{\varphi}_n^T$. Cabe resaltar que este dato final $\hat{\varphi}_n^T$ es el único minimizador del funcional $J_{l_n,\beta}$ dado por (3.51).

De (3.52) vemos que control $\|\hat{\varphi}_n^T\|_{L^2(0,l(t)))}$ es acotado uniformemente. Por lo tanto, al menos para una subsecuencia (nuevamente subindizada sobre n) se tiene:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_n^T \to \hat{\varphi}^T & \text{débilmente en } L^2(0,l(T)), \\ \hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi} & \text{fuertemente en } L^2(\omega\times(0,T)) \\ \hat{\varphi}_n(\cdot,0) \to \hat{\varphi}(\cdot,0) & \text{fuertemente en } L^2(0,L_0). \end{cases}$$

Así, por el Lema de Fatou, obtenemos

$$\liminf_{n\to\infty} J_{l_n,\beta}(\hat{\varphi}_n^T) \geq J_{l,\beta}(\hat{\varphi}^T). \tag{3.56}$$

Por otro lado, veamos que que $\hat{\varphi}^T$ es el único minimizador de $J_{l,\beta}$, esto probará que toda la secuencia $\{\hat{\varphi}\}_n^T$ converge a $\hat{\varphi}^T$.

Así, consideremos $\varphi^T \in L^2(0,l(T))$ y las funciones $\varphi_n^T \in L^2(0,l_n(T))$ tal que su extensión a cero converge fuertemente en $L^2(0,B)$ a la extensión a cero de φ^T, respectivamente. Denotemos por φ_n (respectivamente φ) la solución a (3.25) con $L = l_n$ y $\varphi^T = \varphi_n^T$ (respectivamente $L = l$). Entonces es claro que $\varphi_n \to \varphi$ fuertemente en $L^2(\omega\times(0,T))$ y $\varphi_n(\cdot,0) \to \varphi(\cdot,0)$ fuertemente en $L^2(0,L_0)$ y por lo tanto

$$J_{l_n,\beta}(\varphi_n^T) \to J_{l,\beta}(\varphi^T). \tag{3.57}$$

Una consecuencia directa de (3.56) y (3.57) es

$$J_{l,\beta}(\hat{\varphi}^T) \leq \liminf_{n\to\infty} J_{l_n,\beta}(\hat{\varphi}_n^T) \leq \liminf_{n\to\infty} J_{l_n,\beta}(\varphi_n^T) = J_{l,\beta}(\varphi^T).$$

Dado que φ^T es arbitrario, $\hat{\varphi}^T$ minimiza $J_{l,\beta}$ en $L^2(0,l(t))$.

Una consecuencia inmediata es que el control v^n converge fuertemente a la solución a (3.55). Además, el estado y^n converge fuertemente al estado asociado y en la norma L^2. Finalmente para las estimaciones en la sección 3.4.3 donde se establece la regularidad de las soluciones de nuestro problema, es claro que

$$\begin{aligned} y_x^n(l_n(\cdot),\cdot) \to y_x(l(\cdot),\cdot) &\quad \text{fuertemente en } C^0([0,T]) \\ \Lambda_\beta(l_n) \to \Lambda_\beta(l) &\quad \text{fuertemente en } C^1([0,T]), \end{aligned}$$

por lo tanto Λ_β es continua.

(ii) **Veamos que la aplicación Λ_β es compacta:** De hecho, todos los $\Lambda_\beta(\ell)$ con $\ell \in \mathcal{M}$ pertenecen a un conjunto compacto fijo de $C^1([0,T])$ (independiente de β). Esto se puede ver de la siguiente manera: en vista de la definición del operador Λ_β dada en (3.53) y las estimaciones sobre la regularidad (3.24) (donde C_3 depende solo de N_L, L_*, B, ω, T y N_0), los $\Lambda_\beta(\ell)$ pertenecen a un conjunto acotado fijo de $C^{1+\kappa}([0,T])$ para algún $\kappa \in (0,1/2]$ que es independiente de ℓ; esto, junto con la compacidad de la inclusión $C^{1+\kappa}([0,T]) \hookrightarrow C^1([0,T])$, permite concluir la compacidad del operador Λ_β.

(iii) Λ_β **mapea $\mathcal{M}$ en sí mismo:** veamos que si N_0 es suficientemente pequeño (de manera uniforme con respecto a β), entonces Λ_β mapea $\mathcal{M}$ en sí mismo. De hecho, esto es claro a partir de (3.24). En efecto, por construcción,

$$\Lambda_\beta(\ell) \in C^1([0,T]) \text{ y } \Lambda_\beta(\ell)(0) = L_0;$$

también tenemos

$$\left|\Lambda_\beta(\ell)'(t)\right| = |y_x(\ell(t),t)| \leq C_3 \|y_0\|_\infty \leq C_4 N_0$$

y

$$|\Lambda_\beta(\ell)(t) - L_0| \leq C_3 T \|y_0\|_\infty \leq C_4 T N_0, \quad \text{para todo } t \in [0,T],$$

donde C_3 y C_4 dependen de R, L_*, B, ω, T y N_0 y son no-decrecientes con respecto a N_0. Por lo tanto, si elegimos ε suficientemente pequeño y además con $N_0 \leq \varepsilon$, tendremos

$$N_0 \leq \text{mín}\left(\frac{R}{C_4}, \frac{B-L_0}{C_4 T}, \frac{L_0 - L_*}{C_4 T}\right),$$
$$\left|\Lambda_\beta(\ell)'(t)\right| \leq R \text{ and } L_* \leq \Lambda_\beta(\ell)(t) \leq B \quad \forall t \in [0,T],$$

por lo que se cumple la propiedad deseada $\Lambda_\beta(\ell) \in \mathcal{M}$.

Teniendo (i), (ii) y (iii) y aplicando el Teorema de Shauder, garantizamos la existencia de L_β un punto fijo de Λ_β para cada $\beta > 0$. Entonces, es claro que L_β satisface, junto con algunos v_β y y_β, (3.5),(3.6), (3.7), (3.8) y (3.49). Además, L_β y v_β están acotados uniformemente en $C^{1+\kappa}([0,T])$ y $L^2(\omega \times (0,T))$, respectivamente. Ahora, al menos para una subsecuencia, se tiene

$$L_\beta \to L \text{ fuertemente en } C^1([0,T]) \text{ y } v_\beta \to v \text{ débilmente en } L^2(\omega \times (0,T)), \text{ cuando } \beta \to 0.$$

Obviamente, L satisface las propiedades establecidas para el problema de frontera libre y la respectiva solución satisface la noción de controlabilidad nula bajo el control v, demostrando el Teorema. $\square$

Capítulo 4

Controlabilidad Nula de la ecuación de calor bajo un retardo en el tiempo en un dominio no-cilíndrico

4.1. Ecuaciones Diferenciales con Retardo

En el campo de las matemáticas, las ecuaciones diferenciales de retardo (EDR) se caracterizan como un tipo de ecuación diferencial funcional donde la derivada de una función desconocida en un instante específico se expresa en función de los valores de esa función en instantes previos. Además de su denominación como sistemas de retardo de tiempo o ecuaciones diferenciales retardadas en el tiempo, estas EDR también son conocidas como ecuaciones de diferencia diferencial. Se clasifican dentro de la categoría de ecuaciones diferenciales funcionales, que se distinguen por su dimensión infinita, en contraposición a las ecuaciones diferenciales ordinarias, que operan en un espacio de estado de dimensión finita.

La variedad de EDR que existen es bastante amplia. Enunciaremos las más simples. Para generalizar la notación, al término retardado lo representaremos por x_t y nos referiremos a las EDR de primer orden, aunque los conceptos que siguen se pueden extender al caso de orden $n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x_t, x', x_t^t, \ldots, x^{(n-1)}, x_t^{(n-1)}\right), \text{ donde } x^{(k)} := \frac{d^n x}{dt^n}$$

Se define una Ecuación Diferencial con Retardo fijo de primer orden para $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, a aquellas de la forma:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x_t\right) = f(t, x(t), x(t-\tau)),$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ y $\tau \geq 0$ es un retardo. Obsérvese que cuando $\tau = 0$ se tiene una Ecuación Diferencial Ordinaria.

También se pueden definir ecuaciones diferenciales con retardo variables. Por ejemplo, en el caso de una EDR de primer orden de este tipo, se verifica:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))).$$

En este caso el retardo es una función del tiempo $\tau : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$.

Existen ecuaciones diferenciales con múltiples retardos discretos:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x_t\right) = f\left(t, x(t), x\left(t-\tau_1\right), x\left(t-\tau_2\right), \ldots, x\left(t-\tau_n\right)\right)$$

donde $f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ y los retardos τ_j son constantes no negativas para todo $1 \leq j \leq n$.

Las ecuaciones diferenciales con retardo distribuido se definen como:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x_t\right) = f\left(t, x(t), \int_0^\tau w(s)x(t-s)ds\right).$$

En este último caso la función integrable $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un peso, o función de densidad. Pueden plantearse combinaciones más complejas de los casos anteriores. Todas las definiciones para ecuaciones diferenciales mencionadas se pueden extender al caso vectorial, es decir, sistemas de la forma

$$X'(t) = F\left(t, X(t), X_t\right) \quad \text{donde} \quad X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

es una función a valores vectoriales derivable desconocida y $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial.

Como ocurre con las EDO, las EDR también se clasifican en autónomas cuando no dependen de t , es decir $f\left(t, x(t), x_t\right) = f\left(x(t), x_t\right)$ en el caso escalar o $F\left(t, X(t), X_t\right) = F\left(X(t), X_t\right)$ en el caso vectorial y no autónomas, cuando existe dependencia del tiempo t.

4.2. Contexto del Problema

En este capítulo, consideramos el siguiente problema de control para el problema de frontera libre con la presencia de un retardo en el tiempo para la ecuación de calor:

Para un entero positivo N, consideramos un parámetro de retardo real $h > 0$. Además, sean $T > 0, L_0 > 0$ y los parámetros, $0 < a < b < L_* < L_0$. Notemos todos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
&\Omega_{L_0} = (0, L_0), \quad \Omega_{L(t)} = (0, L(t)), \quad \omega = (a, b) \subset \Omega_{L_0} \\
&Q_{L,(0,T)} = \{(x,t) : x \in (0, L(t)), \quad t \in (0,T)\} \\
&Q_{L,(-h,0)} = \{(x,t) : x \in (0, L(t)), \quad t \in (-h,0)\} \\
&Q_L = Q_{L,(0,T)} \cup Q_{L,(-h,0)}.
\end{aligned}$$

Los datos iniciales serán denotados por $u_0 \in L^2\left(\Omega_{L_0}\right)$, $\theta \in L^2(\Omega_{L,-h})$ con $\theta(x,0) = u_0(x)$ y $c \in L^\infty(Q_{L,(0,T)})$ y $u \in L^2(Q_{L,(0,T)})$.

Consideraremos el siguiente problema de controlabilidad nula para un dominio no cilíndrico:

Sea $L \in C([-h,0]) \cap C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ y

$$L(t-h) = L(t), \quad L(0) = L_0. \tag{4.1}$$

Deseamos encontrar una función $u = u(x,t)$ y un control $v \in L^2((0,T) \times \omega)$ tal que

$$\begin{cases}
u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = c(x,t)u(x,t-h) + 1_\omega v(x,t), & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\
u(0,t) = 0, \quad u(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_{L_0} \\
u(x,t) = \theta(x,t) & (x,t) \in \Omega_{L(-h,0)}
\end{cases} \tag{4.2}$$

con

$$u(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)). \tag{4.3}$$

Denotaremos por $\Sigma_{[0,T],L}$ la frontera lateral de $Q_{[0,T],L}$:

$$\Sigma_{L,[0,T]} = \{(x,t) : x = 0 \text{ o } x = L(t), \quad 0 < t < T\},$$

donde 1_ω es la función característica de ω y c es una función dada en L^∞ definida en $Q_{L_0} \times (0,T)$. Aquí, la función v es el control interno y (L,u) es el estado asociado. **En este capitulo, estamos interesados en estudiar las propiedades de control para el sistema** (4.1)**-**(4.2)**.**

Resultado Principal

El principal resultado de este capitulo es el siguiente:

Teorema 21. *Sean $T > 0$, $h > 0$, $L_0 > 0$ y los parámetros $0 < a < b < L_* < L_0$. Entonces, para cualquier dato inicial $(u_0, \theta) \in L^2(0, L_0) \times L^2(Q_{L,(-h,0)})$ y una función $L \in C([-h,0]) \cap C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ satisfaciendo 4.1 , podemos encontrar un control $v \in L^2((0,T) \times \omega)$ tal que la correspondiente solución u de* (4.2) *satisface la condición*

$$u(x,T) = 0, \quad x \in (0, L(T)). \tag{4.4}$$

4.3. Problema Adjunto: Buen Planteamiento

4.3.1. Sistema en un dominio No-Cilíndrico

Desde el trabajo de Artola en [1], tenemos el buen planteamiento del problema (4.2). De hecho, un apropiado cambio de variables nos permite reescribir el sistema (4.2) a un problema similar para una ecuación parabólica con retardo en la siguiente forma:

$$z_\tau - z_{\xi\xi} + h_1(\xi,\tau) z_\xi + h_2(\xi,\tau) z(\tau - \sigma(\tau)) = h_3(\xi,\tau) \tag{4.5}$$

en un dominio cilíndrico, con h_3 cuadrado integrable y un retardo dependiendo del tiempo. En efecto, consideremos el siguiente cambio de variable en Q_L:

$$\xi(x,t) = \frac{L_0}{L(t)} x, \quad \text{y} \quad \tau(t) = L_0^2 \int_0^t \frac{1}{(L(s))^2} ds, \quad t \in [-h,T]. \tag{4.6}$$

Introduzcamos el mapeo

$$\Phi : Q_{L,(0,T)} \to R_L^* \quad \text{con} \quad \Phi(x,t) = (\xi(x,t), \tau(t)) \tag{4.7}$$

donde el rectángulo R_L^* es dado por

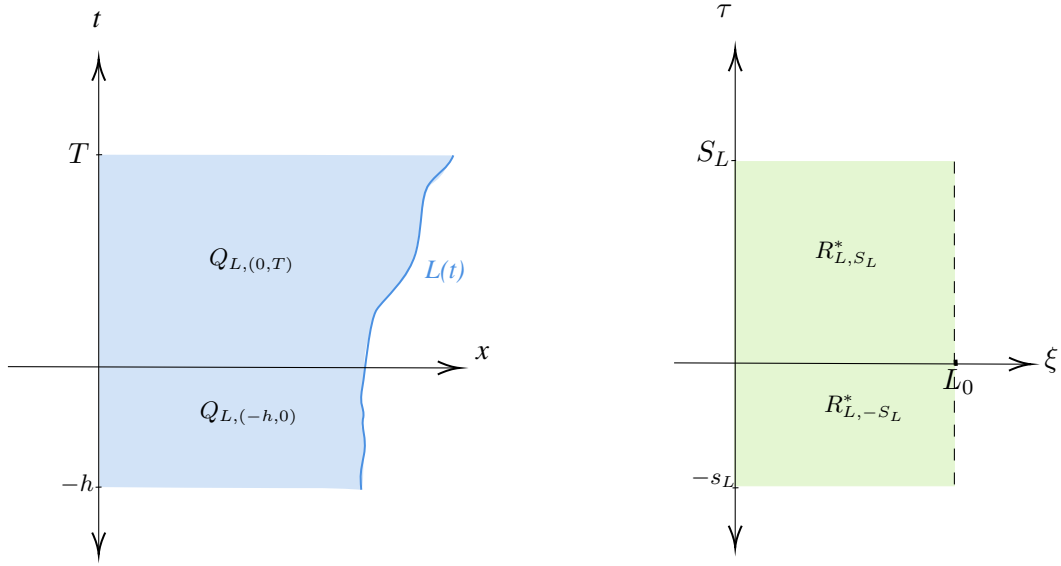
$$R_L^* = (0, L_0) \times (-s_L, S_L), \quad \text{con} \quad S_L := L_0^2 \int_0^T \frac{1}{(L(s))^2} ds, \quad \text{y} \quad s_L := L_0^2 \int_{-h}^0 \frac{1}{(L(s))^2} ds.$$

Note que

$$R_L^* = R_{L,S_L}^* \cup R_{L,-s_L}^*, \quad \text{donde} \quad R_{L,S_L}^* = (0,L_0) \times (0,S_L) \quad \text{y} \quad R_{L,-s_L}^* = (0,L_0) \times (-s_L, 0).$$

Es posible ver que Φ es un difeomorfismo en $Q_{L,(0,T)}$. Definamos $z(\Phi^{-1}(\xi,\tau)) := u(x,t)$. No es difícil de ver que z esta bien definido en R_L^*. Por otro lado, note que

$$u_t(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad u_x(x,t) = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$



Además,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{L_0}{L(t)}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{L_0 L'(t)}{(L(t))^2} x, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2.$$

Así, desde (4.2), se sigue que

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \bar{c} z(\xi(x, t-h), \tau(t-h)) = \bar{v}, \tag{4.8}$$

donde $\bar{c}(\xi, \tau) = c(x, t)$ y $\bar{v}(\xi, \tau) = v(x, t)$. Note que para todo $t \in [0, T]$, se sigue que

$$\xi(x, t-h) = \frac{L_0}{L(t-h_i)} x = \frac{L_0}{L(t)} x = \xi(x, t), \tag{4.9}$$

$$\tau(t-h) = L_0^2 \int_0^{t-h} \frac{1}{(L(s))^2} ds = \tau(t) - \omega_h(t), \quad \omega_h(t) = L_0^2 \int_{t-h}^{t} \frac{1}{(L(s))^2} ds. \tag{4.10}$$

Por tanto, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(-\frac{L_0 L'(t)}{(L(t))^2} x\right) + \frac{\partial z}{\partial \tau}\left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{L_0}{L(t)}\right)^2 - \bar{c}(\tau) z(\xi(x, t-h), \tau(t-h)) = \bar{v}(\xi, \tau) \tag{4.11}$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + h_1(\xi, \tau)\frac{\partial z}{\partial \xi} + h_2(\xi, \tau) z(\xi(x, t), \tau(t) - \omega_h(t)) = h_3(\xi, \tau),$$

donde $h_1(\xi, \tau) = \left(-\frac{L'(t(\tau))}{L_0} x(\xi)\right)$, $h_2(\xi, \tau) = -\frac{\bar{c}(\xi,\tau)(L(t(\tau)))^2}{L_0^2}$ y $h_3(\xi, \tau) = \frac{\bar{v}(\xi,\tau)(L(t(\tau)))^2}{L_0^2}$. Note además que

$$h_1(\xi, \tau) = -\frac{L'(t(\tau)) L(t(\tau))}{L_0^2} \xi. \tag{4.12}$$

Así, deducimos que la ecuación (4.2) toma la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + h_1(\xi, \tau)\frac{\partial z}{\partial \xi} + h_2(\xi, \tau) z(\tau - \sigma_h(\tau)) = h_3(\xi, \tau) & (\xi, \tau) \in R^*_{L,S_L} \\ z(0, \tau) = z(L_0, \tau) = 0, & \tau \in (0, S_L) \\ z(\xi, 0) = z_0(\xi), & \xi \in (0, L_0) \\ z(\xi, \tau) = \bar{\theta}(\xi, \tau), & (\xi, \tau) \in R^*_{L,-s_L} \end{cases} \tag{4.13}$$

donde $\sigma_h(\tau) = \omega_h(t(\tau))$, $z_0(\xi) = u_0(x)$ y $\bar{\theta}(\xi,\tau) = \theta(x,t)$. Note que el sistema representado por la ecuación (4.13) es una ecuación parabólica en un cilindro con una variable de retardo. En dirección de aplicar la metodología presentada en [1] a la ecuación (4.13), necesitamos probar que

(i) La función $\tau \to \sigma_h(\tau)$ definida para $\tau \in (0, S_L)$ es medible;

(ii) Existe $\tau_0 \in (0, S_L)$, tal que $\tau - \sigma_h(\tau) > 0$ para $\tau \in (\tau_0, S_L)$.

Consideramos adicionalmente que

$$-\eta_0 = \inf_{\tau\in(0,\tau_0)} [\tau - \sigma_h(\tau)]. \tag{4.14}$$

En efecto, (i) se satisface ya que σ_h es una función continua. Por otro lado, consideremos la función $g(\tau) = \tau - \sigma_h(\tau)$ y note que $g(0) = 0$. Además, se sigue que

$$\frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} = 1 - \frac{\partial \sigma_h(\tau)}{\partial \tau} = 1 - \frac{\partial \omega_h(t)}{\partial t}\frac{\partial t(\tau)}{\partial \tau} = 1 - L_0^2\left(\frac{1}{L(t)^2} - \frac{1}{L(t-h)^2}\right)\frac{\partial t(\tau)}{\partial \tau} = 1 > 0$$

para todo $\tau \in [0, S_L]$, así (ii) se satisface. Así derivamos el siguiente resultado con respecto al buen planteamiento:

Teorema 22. *Si* $\left(z_0, \bar{\theta}, h_3\right) \in L^2\left(\Omega_{L_0}\right) \times L^2\left(R^*_{L,-s_L}\right) \times L^2\left(R^*_{L,S_L}\right)$, $h_1 \in L^\infty(R^*_{L,-s_L})$ *y* $h_2 \in L^\infty(R^*_{L,S_L})$. *Entonces, existe una única solución* $z \in L^1(-\eta_0, S_L; L^2(\Omega_{L_0}))$ *de* (4.13) *tal que*

$$z \in L^2\left(0, S_L; H_0^1(\Omega_{L_0})\right) \cap C\left([0, S_L]; L^2(\Omega_{L_0})\right),$$

donde η_0 *es dado por* (4.14).

En el siguiente resultado establecemos algunas estimativas claves:

Proposición 4. *Si* $\left(z_0, \bar{\theta}, h_3\right) \in L^2\left(\Omega_{L_0}\right) \times L^2\left(R^*_{L,-s_L}\right) \times L^2\left(R^*_{L,S_L}\right)$, $h_1 \in L^\infty(R^*_{L,-s_L})$ *y* $h_2 \in L^\infty(R^*_{L,S_L})$. *Entonces, la solución* z *satisface la siguiente estimativa.*

$$\sup_{\tau\in(0,S_L)} \|z(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \int_0^{S_L} \|z_\xi\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} ds$$
$$\leq C\left(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|h_3\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})} + \|\theta\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})} ds\right),$$

donde C *es una constante positiva dependiendo de* T *y* h_2.

Demostración. Multiplicando (4.13) por z e integrando in $(0,\tau) \times (0, L_0)$ para $\tau \in [0, S_L]$, obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^{L_0} \frac{\partial}{\partial \tau}|z|^2 d\xi ds - \int_0^\tau \int_0^{L_0} z_{\xi\xi} z d\xi ds + \int_0^t \int_0^{L_0} h_1 z_\xi z d\xi ds$$
$$+ \int_0^\tau \int_0^{L_0} h_2 z(\tau - \sigma_h(\tau)) z(\tau) d\xi ds = \int_0^\tau \int_0^{L_0} h_3 z d\xi ds$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{L_0} |z(\tau)|^2 d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{L_0} |z_0|^2 d\xi + \int_0^\tau \int_0^{L_0} |z_\xi|^2 d\xi ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^{L_0} h_1 (z^2)_\xi d\xi ds$$
$$+ \int_0^\tau \int_0^{L_0} h_2 z(s - \sigma_h(s)) z(s) d\xi ds = \int_0^\tau \int_0^{L_0} h_3 z d\xi ds$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{L_0}|z(\tau)|^2d\xi+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}|z_\xi|^2d\xi ds+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}h_2z(s-\sigma_h(s))z(s)d\xi ds$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}h_{1,\xi}z^2d\xi ds=\frac{1}{2}\int_0^{L_0}|z_0|^2d\xi+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}h_3zd\xi ds.$$

De (4.12), note que $h_{1,\xi}(\xi,\tau)=-\frac{L'(t(\tau))L(t(\tau))}{L_0^2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{L_0}|z(\tau)|^2d\xi+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}|z_\xi|^2d\xi ds+\int_0^{\tau}\frac{L'(t(s))L(t(s))}{2L_0^2}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{L_0}|z_0|^2d\xi+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}h_3zd\xi ds+\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}h_2z(s-\sigma_h(s))z(s)d\xi ds$$

$$\int_0^{L_0}|z(\tau)|^2d\xi+2\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}|z_\xi|^2d\xi ds\leq\int_0^{L_0}|z_0|^2d\xi+2\int_0^{\tau}\|h_3(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}dds$$
$$+2\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})}\int_0^{\tau}\|z(s-\sigma_h(s))\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

Para estimar $\int_0^{\tau}\|z(s-\sigma_h(s))\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$, notemos que

$$\int_0^{\tau}\|z(s-\sigma_h(s))\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\|z(s-\sigma_h(s))\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

Haciendo el cambio de variable $\omega(s)=s-\sigma_h(s)$, tenemos

$$w(0)=-\sigma_h(0)=-\omega_h(t(0))=-s_L$$
$$w(\tau)=\tau-\sigma_h(\tau)=\tau-\omega_h(t(\tau))\leq\tau$$
$$dw=ds-(\sigma_h(s))_s=ds-\frac{\partial\omega_h(t)}{\partial t}\frac{\partial t(s)}{\partial s}=ds-L_0^2\left(\frac{1}{L(t(s))^2}-\frac{1}{L(t(s)-h)^2}\right)\frac{\partial t(s)}{\partial s}=ds.$$

Por tanto

$$\int_0^{\tau}\|z(s-\sigma_h(s))\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_{-s_L}^{\tau-\sigma_h(\tau)}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_{-s_L}^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-s_L}^{0}\|\bar\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds+\int_0^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

Así, se sigue que

$$\int_0^{L_0}|z(\tau)|^2d\xi+2\int_0^{\tau}\int_0^{L_0}|z_\xi|^2d\xi ds\leq\int_0^{L_0}|z_0|^2d\xi+2\int_0^{\tau}\|h_3(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}\|z(s)\|_{L^2(\Omega_{L_0})}dds$$
$$+\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})}\int_{-s_L}^{0}\|\bar\theta(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds+2\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})}\int_0^{\tau}\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

Luego

$$\|z(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + 2\int_0^\tau \|z_\xi\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds \leq \|z_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|h_3\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}ds$$
$$+ \|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})}\int_{-s_L}^0 \|\bar{\theta}(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds + (1+2\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})})\int_0^\tau \|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

$$\|z(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + 2\int_0^\tau \|z_\xi\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds \leq \|z_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|h_3\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}$$
$$+ \|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,-s_L})}\|\bar{\theta}\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})} + (1+2\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})})\int_0^\tau \|z(s)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds.$$

Por una aplicación del Lema de Gronwall, se sigue lo siguiente

$$\|z(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \int_0^\tau \|z_\xi\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds \leq Ce^{MT}\Big(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|h_3\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}$$
$$+\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,-s_L})}\|\bar{\theta}\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}ds\Big),$$

donde $C = \text{máx}\{1, \|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,-s_L})}\}$ y $M = 1 + 2\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,S_L})}$. Así, tenemos

$$\sup_{\tau\in(0,S_L)} \|z(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \int_0^{S_L} \|z_\xi\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}ds \leq Ce^{MT}\Big(\|z_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|h_3\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}$$
$$+\|h_2\|_{L^\infty(R^*_{L,-s_L})}\|\bar{\theta}\|^2_{L^2(R^*_{L,S_L})}ds\Big).$$

□

Dado que la transformación (4.6) **es un difeomorfismo, Tenemos el siguiente resultado de buen planteamiento para el sistema** (4.2)**:**

Teorema 23. *Si* $(u_0, \theta, v) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right) \times L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right)$. *Entonces, la solución* u *de* (4.2) *satisface*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \int_{Q_{L,(0,T)}} |u_x|^2 dtdx$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \|\theta\|^2_{L^2(Q_{L,(-h,0)})} + \|v\|^2_{L^2(Q_{L,(0,T)})}\right)$$

para alguna constante positiva $C = C(T, L, L_0)$.

4.3.2. Sistema Adjunto

Consideremos inicialmente el sistema homogéneo

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - c(x,t)u(x,t-h) = 0, & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_{L_0}. \end{cases}$$

Es posible reescribir el anterior sistema en la siguiente forma

$$\begin{cases} u_t + M_h^L(u) = 0, & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_{L_0}, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde el operador M_h^L es definido por

$$M_h^L(u) = -u_{xx}(x,t) - c(x,t)u(x,t-h), \tag{4.16}$$

con dominio

$$D(M_h^L) = \left\{u \in H^2(Q_{L,(0,T)}) : u(0,t) = u(L(t),t) = 0,\ t \in (0,T).\right\} \tag{4.17}$$

Para establecer la controlabilidad nula del sistema (4.2), consideremos el *sistema auxiliar adjunto*:

$$\begin{cases} -\varphi_t + [M_h^L]^*(\varphi) = 0, & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x), & x \in \Omega_{L_0}. \end{cases} \tag{4.18}$$

donde $[M_h^L]^*\varphi = -\varphi_{xx}(x,t) - 1_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)$, con dominio

$$D([M_h^L]^*) = \left\{\varphi \in H^2(Q_{L,(0,T)}) : \varphi(0,t) = \varphi(L(t),t) = 0,\ t \in (0,T)\right\} \subset L^2(Q_{L,(0,T)}). \tag{4.19}$$

En efecto, consideremos una función suave φ y notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{L(t)} (-u_{xx}(x,t) - c(x,t)u(x,t-h))\varphi dxdt \\
&\quad = -\int_0^T \int_0^{L(t)} u_{xx}\varphi dxdt - \int_0^T \int_0^{L(t)} c(x,t)u(x,t-h))\varphi dxdt \\
&\quad = -\int_0^T \int_0^{L(t)} u\varphi_{xx} dxdt + \int_0^T [u\varphi_x - u_x\varphi]_{x=0}^{x=L(t)} dt - \int_0^T \int_0^{L(t)} c(x,t)u(x,t-h)\varphi dxdt \\
&\quad = -\int_0^T \int_0^{L(t)} u\varphi_{xx} dxdt - \int_0^T [u_x\varphi]_{x=0}^{x=L(t)} dt - \int_{-h}^{T-h} \int_0^{L(t)} c(x,t+h)u(x,t)\varphi(x,t+h) dxdt \\
&\quad = -\int_0^T \int_0^{L(t)} u(x,t)\left(\varphi_{xx}(x,t) + 1_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)\right) dxdt - \int_0^T [u_x\varphi]_{x=0}^{x=L(t)} dt.
\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema (4.18) toma la forma

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx}(x,t) - \chi_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h) = 0, & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ \varphi(0,t) = 0, \quad \varphi(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x), & x \in \Omega_{L_0}. \end{cases} \tag{4.20}$$

El buen planteamiento de (4.20) se establece a través de una metodología análoga a la sección anterior utilizando el Teorema 22, e utilizando los conceptos introducidos en [1].

Teorema 24. *Sean $T > 0$ y $L \in C([-h,0]) \cap C^1([0,T])$ con $L(t) > 0$ y*

$$L(t-h) = L(t), \quad L(0) = L_0. \tag{4.21}$$

. Si $\varphi_T \in L^2(\Omega_{L_0})$, existe una única solución φ de (4.20) tal que

$$\varphi \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega_{L(T)})\right) \cap C\left([0,T]; L^2(\Omega_{L(T)})\right).$$

Además

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})} + \int_{Q_{L,(0,T)}} |\varphi_x|^2 dtdx \le C\|\varphi_T\|^2_{L^2(\Omega_{L_0})}$$

para alguna constante positiva $C = C(T, L, L_0)$.

4.4. Controlabilidad Nula

En esta sección, establecemos una caracterización para obtener la controlabilidad nula del sistema lineal (4.2). Para obtener esto, definimos u^v como la solución de (4.2) con $u_0 = 0$, $\theta = 0$, y cualquier $v \in L^2(\Omega_T)$. Adicionalmente, designamos u^H como la solución de (4.2) con $v = 0$ y un dato inicial arbitrario $(u_0, \theta) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right)$. Así, introducimos el operador solución para $T > 0$,

$$\begin{array}{rcl} S_T : L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right) & \to & L^2(\Omega_{L(T)}) \\ (u_0, \theta) & \mapsto & S_T(u_0, \theta) = u^H(T) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} P_T : L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right) & \to & L^2(\Omega_{L(T)}) \\ v & \mapsto & P_T v = u^v(T). \end{array}$$

A partir de los resultado de existencia de la sección anterior, es evidente que

$$S_T \in \mathcal{L}\left(L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right), L^2(\Omega_{L(T)})\right) \text{ y } P_T \in \mathcal{L}\left(L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right), L^2(\Omega_{L(T)})\right).$$

Si u representa la solución (4.2) correspondiente a (u_0, θ, v), entonces:

$$u(T) = S_T(u_0, \theta) + P_T v. \tag{4.22}$$

Usando esta notación, la controlabilidad nula en L^2 en tiempo $T > 0$ puede ser expresada equivalentemente como:

$$\begin{cases} \text{Para todo } (u_0, \theta) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right) \\ \text{encontrar } v \in L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right), \\ \text{tal que } P_T v = -S_T(u_0, \theta). \end{cases} \tag{4.23}$$

Notando el rango del operador P como $R(P)$, la existencia de una solución del problema anterior mencionado se obtiene siempre y cuando la siguiente condición se satisfaga:

$$R(S_T) \subset R(P_T) \tag{4.24}$$

En efecto, esta inclusión implica (4.23). Recíprocamente, sí (4.23) tiene una solución, entonces para todo $(u_0, \theta) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right)$, se debe tener que $S_T(u_0, \theta) \in R(P_T)$, estableciendo (4.24). Por tanto, desde [45, 13, Theorem 2.2, p. 208] con $X = L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right)$, $Y = L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right)$, $Z = L^2(\Omega_{L(T)})$, $F = S_T$ y $G = L_T$ la inclusión en (4.24) es entonces equivalente a la siguiente estimativa

$$\|S_T^* \varphi_T\|^2_{L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right),} \leq C_T \|L_T^* \varphi_0\|^2_{L^2(\Omega_T)}, \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega),$$

donde $C_T > 0$ no depende de φ_0.

Lema 6. *Sea $\varphi_T \in L^2(\Omega_{T_0})$ y φ la solución asociada al problema* (4.20)*. Entonces*

$$S_T^* \varphi_T = \left(\varphi(0), \left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]} c\varphi\right)(\cdot + h)\right), \quad P_T^* \varphi_T = \chi_\omega \varphi. \tag{4.25}$$

Demostración. Sea u solución de (4.2) asociada con

$$(u_0, \theta, v) \in L^2(\Omega_{L_0}) \times L^2\left(Q_{L,(-h,0)}\right) \times L^2\left(Q_{L,(0,T)}\right)$$

y φ la solución de (4.20) asociada con φ_T. Multiplicando la ecuación de (4.2) por φ e integrando sobre $Q_{L,(0,T)}$ se mantiene la siguiente igualdad

$$\int_0^T \int_0^{L(t)} u_t \varphi dxdt = \int_0^T \int_0^{L(t)} u_{xx} \varphi dxdt + \int_0^T \int_0^{L(t)} cu(t-h)\varphi dxdt + \int_0^T \int_0^{L(t)} \chi_\omega v \varphi dxdt.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^{L(t)} u_t \varphi dxdt &= \int_0^{L(T)} u(T)\varphi_T dx - \int_0^{L_0} u_0 \varphi(0) dx - \int_0^T \int_0^{L(t)} u\varphi_t dxdt \\ &= \int_0^{L(T)} u(T)\varphi_T dx - \int_0^{L_0} u_0 \varphi(0) dx + \int_0^T \int_0^{L(t)} u\varphi_{xx} dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{L(t)} u \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)(t+h) dxdt.\end{aligned}$$

Por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}&\int_0^{L(T)} u(T)\varphi_T dx - \int_0^{L_0} u_0 \varphi(0) dx + \int_0^T \int_0^{L(t)} u(t) \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)(t+h) dxdt \\ &\qquad = \int_0^T \int_0^{L(t)} \chi_\omega v(t)\varphi(t) dxdt + \int_0^T \int_0^{L(t)} c(t)u(t-h)\varphi(t) dxdt. \quad (4.26)\end{aligned}$$

Tenemos que analizar dos casos:

- Si $0 < T \leq h$, note que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^{L(t)} c(t)u(t-h)\varphi(t) dxdt &= \int_0^T \int_0^{L(t)} c(t)\theta(t-h)\varphi(t) dxdt \\ &= \int_{-h}^{T-h} \int_0^{L(t+h)} c(t+h)\theta(t)\varphi(t+h) dxdt \\ &= \int_{-h}^{0} \int_0^{L(t)} \theta(t) \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)(t+h) dxdt.\end{aligned}$$

- Si $T > h$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^{L(t)} c(t)u(t-h)\varphi(t) dxdt &= \int_0^h \int_0^{L(t)} c(t)\theta(t-h)\varphi(t) dxdt \\ &\quad + \int_h^T \int_0^{L(t)} c(t)u(t-h)\varphi(t) dxdt \\ &= \int_{-h}^{0} \int_0^{L(t)} \theta(t) (c\varphi)(t+h) dxdt + \int_0^{T-h} \int_0^{L(t+h)} u(t)c(t+h)\varphi(t+h) dxdt \\ &= \int_{-h}^{0} \int_0^{L(t)} \theta(t) (c\varphi)(t+h) dxdt + \int_0^{T} \int_0^{L(t)} u(t) \left(\chi_{[h,T]} c\varphi\right)(t+h) dxdt.\end{aligned}$$

Notando que $\chi_{[0,T]}(t+h) = \chi_{[h,T]}(t+h)$ con $t \in [0,T]$, podemos resumir estos dos casos escribiendo

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^{L(t)} c(t)u(t-h)\varphi(t) dxdt &= \int_{-h}^{0} \int_0^{L(t)} \theta(t) \left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]} c\varphi\right)(t+h) dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{L(t)} u(t) \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)(t+h) dxdt. \quad (4.27)\end{aligned}$$

Por tanto, desde (4.22)-(4.26), se sigue que

$$\begin{aligned}\langle S_T(u_0,\theta)+P_Tv,\varphi_T\rangle_{L^2(\Omega_{L(T)})} &= \langle u_0,\varphi(0)\rangle_{L^2(\Omega_{L_0})}\\ &+\left\langle\theta,\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(\cdot+h)\right\rangle_{L^2(\Omega_{Q_{L,(-h,0)}})}+\langle v,\chi_\omega\varphi\rangle_{L^2(Q_{L,(0,T)})}.\end{aligned}$$

Sucesivamente, substituyendo $(u_0,\theta)=(0,0)$ y $v=0$ en la ultima expresión, se tiene (4.25). □

La consecuencia subsiguiente es una implicación directa de los lemas mencionados anteriormente, siendo la desigualdad de observabilidad crucial para establecer la nulidad de control del sistema (4.2).

Proposición 5. *Sea $T>0$. El sistema* (4.2) *es nulamente controlable en L^2 en tiempo T si y solo si existe una constante $C_T>0$ tal que para cualquier $\varphi_T\in L^2(\Omega_{L_0})$, la solución φ del sistema* (4.20) *satisface la estimativa*

$$\int_{\Omega_{L_0}}\varphi^2(x,0)dx+\int_{-h_N}^0\int_0^{L(t)}\left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(x,t+h)\right|^2dxdt\le C_T\int_0^T\int_\omega\varphi^2(x,t)dxdt. \tag{4.28}$$

4.4.1. Desigualdad de Observabilidad

En la subsección anterior, se hace evidente que el problema de la nulidad de control se reformula eficazmente como la tarea de establecer la desigualdad de observabilidad (4.28), un objetivo logrado mediante la aplicación de los siguientes Lemas.

Primero, recordemos las estimaciones de Carleman para la ecuación del calor en un dominio no cilíndrico. (ver el capitulo anterior y/o [13] para más detalles). Para algunos números reales ℓ,σ con $\ell>0$, consideremos la ecuación del calor

$$\begin{cases}\psi'+\Delta\psi=g\in L^2(Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}), & \text{en } Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}\\ \psi(0,t)=\psi(L(t),t)=0 & \text{en } (\sigma,\sigma+\ell)\\ \psi(\sigma+\ell)=\psi_0\in L^2(\Omega_{\sigma+\ell}) & \text{en } \Omega_{L(\sigma+\ell)}\end{cases} \tag{4.29}$$

La siguiente estimativa de Carlemann estimada del capitulo anterior o específicamente de [13]. Primeramente, sea ω_0 un subconjunto no vacío con $\overline{\omega_0}\subset\omega$. Sabemos que existe una función $\alpha_0\in C^1\left(\overline{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}}\right)$ con $\alpha_{0,xx}\in C^0\left(\overline{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}}\right)$ tal que

$$\begin{cases}\alpha_0(x,t)=0 \quad \forall(x,t)\in\Sigma_{L,(\sigma,\sigma+\ell)},\\ |\alpha_{0,x}|>0 \quad \text{en } \overline{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}}\setminus(\omega_0\times(\sigma,\sigma+\ell)) \text{ y}\\ \alpha_0(x,t)=1-\frac{x-b}{L(t)-b}\forall x\in(b,L(t)), \quad \forall t\in[\sigma,\sigma+\ell].\end{cases}$$

En particular, note que $|\alpha_{0,x}|\ge\eta$ in $\overline{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}}\setminus(\omega_0\times(\sigma,\sigma+\ell))$, donde

$$\frac{1}{\eta}=\text{máx}\left\{a,\ \text{máx}_{\sigma\le t\le\sigma+\ell}(L(t)-b)\right\}. \tag{4.30}$$

Introduzcamos los pesos ξ, α y las funciones α_1 y γ, con

$$\xi(x,t):=\frac{e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)},\alpha(x,t):=\frac{e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{\gamma(t)},\alpha_1(x,t):=\alpha_0(x,t)+1, \tag{4.31}$$

y

$$\gamma(t):=(t-\sigma)^k(\sigma+\ell-t)^k, \tag{4.32}$$

donde $\lambda>0$ y $k\ge2$ son números reales.

Teorema 25. *Sea α_0, α, γ y ξ las funciones definidas anteriormente. Entonces existen constantes positivas λ_0, s_0 y C_0, y solo dependiendo σ, ℓ, N_L, L_*, B, y ω, tal que, para cualquier $s \geq s_0$, y cualquier $\lambda \geq \lambda_0$, y $g \in L^2\left(Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}\right)$ y cualquier $\psi_0 \in L^2(\Omega_{\sigma+\ell})$, tenemos*

$$\iint_{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}} e^{-2s\alpha}\left[(s\xi)^{-1}\left(|\varphi_t|^2+|\varphi_{xx}|^2\right)+\lambda^2(s\xi)\,|\varphi_x|^2+\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2\right]dxdt$$
$$+\int_\sigma^{\sigma+\ell} e^{-2s\alpha(L(t),t)}\lambda s\xi(L(t),t)\,|\varphi_x(L(t),t)|^2\,dt+\int_\sigma^{\sigma+\ell} e^{-2s\alpha(0,t)}\lambda s\xi(0,t)\,|\varphi_x(0,t)|^2\,dt$$
$$\leq C_0\left(\iint_{Q_{L,(\sigma,\sigma+\ell)}} e^{-2s\alpha}|g|^2dxdt+\iint_{\omega\times(\sigma,\sigma+\ell)} e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2dxdt\right),$$

donde φ es la correspondiente solución de (4.33).

Esencialmente, los siguientes lemas establecerán la desigualdad de observabilidad del problema adjunto asociado al problema de la ecuación de calor en un dominio no-cilíndrico bajo la presencia de un retardo en el tiempo:

Lema 7. *Sea $T > 0$ y $T_h = \text{máx}\,(0, T-h)$. Asumamos que $c \in L^\infty\left(Q_{L,(0,T)}\right)$. Entonces, existe una constate positiva $C_h = C(L, h, T, \omega, B, L_*)$, tal que para cualquier $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, la solución asociada φ de* (4.20) *satisface*

$$\int_{T_h}^{T}\int_0^{L(t)} \varphi^2 dtdx \leq C_h \int_{\omega_T} \varphi^2 dtdx$$

Demostración. Note que en (T_h, T), el termino $\left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)(\cdot + h) = 0$, así el sistema (4.20) toma la forma

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in Q_{L,(T_h,T)}, \\ \varphi(0,t) = 0, \quad \varphi(L(t),t) = 0, & t \in (T_h, T) \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x), & x \in \Omega_{L(T)}. \end{cases} \tag{4.33}$$

Aplicando el Teorema 25 para el sistema (4.33) con $\sigma = T_h$ y $\ell = T - T_h$, se sigue que

$$\iint_{Q_{L,(T_h,T)}} e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2dxdt \leq C_0\left(\iint_{\omega\times(T_h,T)} e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2dxdt\right),$$

donde en (4.30)-(4.32), $\gamma(t) = (t-T_h)^k(T-t)^k$ para todo $t \in (T_h, T)$. note que

$$0 < \left(\frac{T-T_h}{2}\right)^{2k} = \gamma\left(\frac{T+T_h}{2}\right) \leq \gamma(t) \leq T^k h^k.$$

Así, se sigue

$$\frac{e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{T^k h^k} \leq \xi(x,t) \leq \frac{4^k e^{\lambda\alpha_1(x,t)}}{(T-T_h)^{2k}}. \tag{4.34}$$

ay

$$0 < \frac{e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}\left(e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-1\right)}{(Th)^k} \leq \frac{e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{\gamma(t)} \leq \alpha(x,t) \leq \frac{e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{\gamma(t)} \leq \frac{4^k e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{(T-T_h)^{2k}}$$

Así, deducimos que

$$\lambda^4 s^3 \frac{e^{3\lambda m_h} e^{-2s\frac{4^k e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{(T-T_h)^{2k}}}}{(Th)^{3k}} \iint_{Q_{L,(T_h,T)}} |\varphi|^2 dxdt \leq \iint_{Q_{L,(T_h,T)}} e^{-2s\alpha}\lambda^4(s\xi)^3|\varphi|^2dxdt$$
$$\leq C_0 \frac{4^{3k}\lambda^4 s^3 e^{3\lambda\|\alpha_1\|_\infty} e^{-\frac{2se^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}\left(e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-1\right)}{(Th)^k}}}{(T-T_h)^{6k}} \iint_{\omega\times(T_h,T)} |\varphi|^2 dxdt$$

donde $m_h = \inf_{(x,t)\in Q_{L,(T_h,T)}} \alpha_1(x,t)$. Finalmente, tenemos

$$\iint_{Q_{L,(T_h,T)}} |\varphi|^2 dxdt \leq C_h \iint_{\omega\times(T_h,T)} |\varphi|^2 dxdt$$

cojn

$$C_h = C_0 \frac{4^{3k} e^{3\lambda\|\alpha_1\|_\infty} e^{-\frac{2se^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}\left(e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-1\right)}{(Th)^k}}}{(T-T_h)^{6k}} \frac{(Th)^{3k}}{e^{3\lambda m_h} e^{-2s\frac{4^k e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{(T-T_h)^{2k}}}} > 0 \tag{4.35}$$

□

Como es habitual, establecer la estimación de observabilidad requiere un argumento de monotonía aplicado a una funcional de energía a lo largo de las trayectorias del sistema inverso. En este contexto, puede expresarse de la siguiente manera.

Lema 8. *Sea $K = 1 + \|c\|_\infty^2$. Entonces para cualquier φ satisfaciendo la ecuación* (4.20)*, la función*

$$E(t) := e^{Kt}\left(\int_{\Omega_{L(t)}} \varphi^2(t)dx + \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds\right), \quad t\in[0,T]$$

satisface $E'(t) \geq 0$.

Demostración. Recordemos la siguiente regla de integración de Leibniz:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx\right) = f(b(t),t)\cdot\frac{d}{dt}b(t) - f(a(t),t)\cdot\frac{d}{dt}a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx. \tag{4.36}$$

Denotemos $f(x,s) = \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dx = \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dx$, $m_h = \text{mín}\{h,T\}$ y

$$E_1(t) = \left(\int_{\Omega_{L(t)}} \varphi^2(t)dx + \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds\right).$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{L(t)}} \varphi^2(t)dx &= \frac{d}{dt}\int_0^{L(t)} \varphi^2(x,t)dx = \varphi^2(L(t),t)\frac{dL(t)}{dt} + 2\int_0^{L(t)} \varphi(x,t)\frac{d}{dt}\varphi(x,t)dx \\ &= 2\int_0^{L(t)} \varphi(x,t)\left(-\varphi_{xx}(x,t) - \chi_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)\right)dx\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_t^{t+m_h} f(x,s)ds &= f(x,t+m_h) - f(x,t) \\ &= \int_0^{L(t+m_h)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+m_h)dx - \int_0^{L(t)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t)dx.\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E_1'(t) + KE_1(T) = 2\int_0^{L(t)} \varphi_x^2(x,t)dx - 2\int_0^{L(t)} \chi_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)\varphi(x,t)dx \\
+ \int_0^{L(t+m_h)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+m_h)dx - \int_0^{L(t)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t)dx \\
+ K\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds.
\end{aligned}
$$

Ahora, usando la desigualdad de Young, obtenemos

$$
\begin{aligned}
E_1'(t) + KE_1(T) \geq -2\int_0^{L(t)} \chi_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)\varphi(x,t)dx \\
+ \int_0^{L(t+m_h)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+m_h)dx \\
+ \left(K - \|c\|_\infty^2\right)\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds.
\end{aligned}
$$

Tenemos que analizar dos casos:

- Si $m_h = T$, tenemos que $\left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)(t+h) = 0$ en $(0,T)$, así

$$
\begin{aligned}
E_1'(t) + KE_1(T) \geq \int_0^{L(t+T)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+T)dx \\
+ \left(K - \|c\|_\infty^2\right)\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+T} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds
\end{aligned}
$$

- Si $m_h = h$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
E_1'(t) + KE_1(T) &\geq -2\int_0^{L(t)} \chi_{[0,T]}(t+h)c(x,t+h)\varphi(x,t+h)\varphi(x,t)dx \\
&+ \int_0^{L(t+h)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+h)dx \\
&+ \left(K - \|c\|_\infty^2\right)\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+h} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds \\
&\geq -\int_0^{L(t)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+h)dx - \int_0^{L(t)} \varphi^2(x,t)dx \\
&+ \int_0^{L(t)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(t+h)dx \\
&+ \left(K - \|c\|_\infty^2\right)\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+h} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds \\
&\geq \left(K - \|c\|_\infty^2 - 1\right)\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx + K\int_t^{t+h} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds.
\end{aligned}
$$

Por tanto, en cualquier caso, tenemos que $E_1'(t) + KE_1(t) \geq 0$. Dado que $E(t) = e^{Kt}E_1(t)$, esto implica que $E'(t) \geq 0$. □

Estamos equipados con todos los componentes necesarios para inferir la desigualdad de observabilidad denotada (4.28).

Lema 9. *Bajo las hipótesis de los Lemas 7 y 8, respectivamente, asumamos además que* $b \in L^\infty(Q_{L,(0,T)})$. *Entonces, para cualquier* $T > 0$, *existe una constante* $C_h = C_T(\omega, \|c|_\infty, T, h, L_*, B) > 0$ *talque cualquier solución de* (4.20) *satisface*

$$\int_{\Omega_{L_0}} \varphi^2(x,0)dx + \int_{-h_N}^{0}\int_0^{L(t)} \left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(x,t+h)\right|^2 dxdt \leq C_T \int_0^T \int_\omega \varphi^2(x,t)dxdt \tag{4.37}$$

Demostración. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} E(0) &= \int_{\Omega_{L_0}} \varphi^2(0)dx + \int_0^{\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dsdx \\ &\geq \left(\int_{\Omega_{L_0}} \varphi^2(0)dx + \int_{-h}^{0}\int_0^{L(s)} \left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(s+h)\right|^2 dsdx\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

De hecho,

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{0}\int_0^{L(s)} \left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(s+h)\right|^2 dsdx &\leq \int_{-h}^{\text{mín}\{h,T\}-h}\int_0^{L(s)} \left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(s+h)\right|^2 dsdx \\ &= \int_0^{\text{mín}\{h,T\}}\int_0^{L(s-h)} \left|\left(\chi_{[0,\text{mín}\{h,T\}]}c\varphi\right)(s)\right|^2 dsdx \\ &\leq \int_0^{\text{mín}\{h,T\}}\int_0^{L(s)} \left|\left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)(s)\right|^2 dsdx. \end{aligned}$$

Subsecuentemente, demostrando que $E(0) \leq C_T \int_0^T \int_\omega \varphi^2(x,t), dx, dt$, (4.37) se satisface. Así, utilizando la desigualdad de Carlemann con $\nu = \frac{T-T_h}{4}$, se sigue que

$$\int_{T_h+\nu}^{T}\int_0^{L(t)} |\varphi|^2 dxdt \leq C_h \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt$$

con

$$C_h = C_0 \frac{4^{3k} e^{3\lambda\|\alpha_1\|_\infty} e^{-\frac{2se^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}\left(e^{\lambda\|\alpha_1\|_\infty}-1\right)}{(Th)^k}}}{(T-T_h)^{6k}} \frac{(Th)^{3k}}{e^{3\lambda m_h} e^{-2s\frac{4^k e^{2\lambda\|\alpha_1\|_\infty}}{(T-T_h)^{2k}}}} > 0. \tag{4.39}$$

Recordemos que

$$\int_0^{L(t)} \varphi^2(t)dx = e^{-Kt}E(t) - \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds, \quad t \in [0,T]$$

Así,

$$\int_{T_h+\nu}^{T} \left(e^{-Kt}E(t) - \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxds\right) dt \leq C_h \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{T_h+\nu}^{T} e^{-Kt}E(t)dt \leq C_h \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \int_{T_h+\nu}^{T}\int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxdsdt.$$

Desde el Lema 8, se sigue que

$$\begin{aligned} 3\nu e^{-KT}E(0) \leq \int_{T_h+\nu}^{T} e^{-Kt}E(0)dt &\leq \int_{T_h+\nu}^{T} e^{-Kt}E(t)dt \\ &\leq C_h \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \int_{T_h+\nu}^{T}\int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_{\Omega_{L(s)}} \left(\chi_{[0,T]}c\varphi\right)^2(s)dxdsdt \end{aligned}$$

Por tnato,

$$E(0) \leq \frac{C_h}{3\nu e^{-KT}} \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \frac{1}{3\nu e^{-KT}} \int_{T_h+\nu}^T \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)^2 (s) dxdsdt. \tag{4.40}$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}
\int_{T_h+\nu}^T \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)^2 (s) dxdsdt &\leq \int_{T_h+\nu}^T \int_{T_h+\nu}^T \int_0^{L(s)} (c\varphi)^2 (s) dxdsdt \\
&= 3\nu \int_{T_h+\nu}^T \int_0^{L(s)} (c\varphi)^2 (s) dxds \\
&\leq 3\nu \|b\|_\infty^2 \int_{T_h+\nu}^T \int_0^{L(s)} \varphi^2(s) dxds.
\end{aligned}$$

Usando el Lema 7, podemos deducir que

$$\int_{T_h+\nu}^T \int_t^{t+\text{mín}\{h,T\}} \int_0^{L(s)} \left(\chi_{[0,T]} c\varphi\right)^2 (s) dxdsdt \leq 3\nu \|b\|_\infty^2 C_h \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt. \tag{4.41}$$

Así, de (4.40) y (4.41), tenemos

$$E(0) \leq \frac{C_h \left(1 + 3\nu \|b\|_\infty^2\right)}{3\nu e^{-KT}} \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt. \tag{4.42}$$

□

Prueba del Teorema 21. Proposición 5 y Lema (9) implican la controlabilidad nula del sistema lineal (4.2). □

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis se basa en un estudio sobre las condiciones de controlabilidad para la ecuación del calor en un dominio no cilíndrico. Esto implica la búsqueda de una función, que llamaremos L, que modele la frontera del dominio donde la ecuación está actuando. En términos generales, nuestro objetivo fué investigar cuándo, a través de la aplicación de un control interno, podemos lograr la propiedad de controlabilidad nula. Además de esto, al agregar ciertas suposiciones sobre la frontera, deseamos explorar la relación entre la derivada de la función frontera y la derivada de la solución, lo cual se conoce técnicamente como la propiedad de frontera libre. En este sentido, esta tesis abordó dos tipos de problemas:

1. Controlabilidad nula y frontera libre.

2. Controlabilidad nula en un dominio no cilíndrico bajo la actuación de un retardo en el tiempo.

Fundamentalmente, en el Capítulo 3 abordamos de manera exhaustiva la controlabilidad nula de un problema de frontera libre. Este enfoque monográfico se ha adoptado siguiendo la metodología presentada en [13]. Por otro lado, en el Capítulo 4 establecimos la controlabilidad nula en un dominio no cilíndrico.

5.1. Avances establecidos

Esta tesis presenta dos avances significativos. En primer lugar, el exhaustivo estudio monográfico realizado en el primer capítulo proporciona a los lectores una comprensión más profunda y eficiente de los cálculos realizados, lo que facilita una mejor comprensión de la relación entre la controlabilidad nula y el problema de frontera libre. Este enfoque meticuloso contribuye a clarificar los fundamentos teóricos subyacentes y a establecer una base sólida para el análisis posterior.

Por otro lado, es importante destacar el avance significativo en cuanto a la propiedad de controlabilidad en un dominio no cilíndrico con retardo, un resultado que, hasta donde conocemos, es original en la literatura. Este hallazgo inédito abre nuevas perspectivas en el estudio de la controlabilidad nula y la frontera libre en presencia de fenómenos como los retardos en el tiempo. Esta contribución no solo amplía el ámbito de aplicación de la teoría de control, sino que también brinda nuevas oportunidades para explorar fenómenos físicos y matemáticos más complejos.

5.2. Perspectivas Futuras y/o Problemas Abiertos

A medida que esta investigación avanza y se profundizan los conocimientos sobre la controlabilidad nula y los problemas de frontera libre, surgen nuevas áreas de interés y desafíos por abordar. En esta sección, exploraremos algunas perspectivas futuras y problemas abiertos que representan oportunidades para futuras investigaciones:

- **Extensiones a sistemas más complejos:** Una dirección prometedora es la extensión de los resultados obtenidos en esta tesis a sistemas de ecuaciones más complejos, como las ecuaciones de onda o las ecuaciones de Schrödinger. Estudiar la controlabilidad nula y la frontera libre en estos contextos puede ofrecer una comprensión más completa de los fenómenos físicos subyacentes.

- **Incorporar el propiedad de frontera libre en el sistema** (4.2)**:** Esto significa estudiar el siguiente problema:

  Encontrar $(L, v) \in C([-h, 0]) \cap C^1([0, T]) \times L^2((0, T) \times \omega)$ con $L(t) > 0$ para todo t y una función $u = u(x, t)$ solución de

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \underbrace{c(x,t)u(x,t-h)}_{\text{retardo temporal}} + 1_\omega v(x,t), & (x,t) \in Q_{L,(0,T)}, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L(t),t) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega_{L_0} \\ u(x,t) = \theta(x,t) & (x,t) \in \Omega_{L,-h} \end{cases} \tag{5.1}$$

  con

$$\underbrace{u_x(L(t),t) = -L'(t)}_{\text{Frontera Libre}}, \quad t \in (0,T) \quad \text{y} \quad \underbrace{u(x,T) = 0}_{\text{Controlabilidad Nula}} \quad , \quad x \in (0, L(T)).$$

- **Ley de difusión de calor dada por la ley de Cattaneo:** La ley de Cattaneo, también conocida como la ecuación de Cattaneo, es una extensión de la ecuación de conducción de calor que tiene en cuenta los efectos de la inercia térmica. Mientras que la ecuación de conducción de calor de Fourier asume que la velocidad de propagación del calor es instantánea, la ecuación de Cattaneo incluye un término de retardo temporal para la propagación del calor. La forma general de la ecuación de Cattaneo para la difusión del calor es:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

  donde ρ es la densidad del material, c es la capacidad calorífica específica, T es la temperatura, t es el tiempo, k es la conductividad térmica del material y τ es el retardo.

  Esta ecuación tiene en cuenta la velocidad finita de propagación del calor en lugar de asumir instantaneidad como lo hace la ecuación de calor usual dada por la ley de Fourier. La introducción del término de retardo temporal permite modelar de manera más precisa fenómenos transitorios en la transferencia de calor, como la difusión del calor en materiales con características no homogéneas o en sistemas donde las velocidades de cambio de temperatura son significativas. La ley de Cattaneo es útil en situaciones donde la ecuación de Fourier no proporciona resultados precisos, como en la modelización de la propagación del calor en materiales con baja conductividad térmica o en sistemas donde hay flujos de calor no estacionarios.

  Por lo tanto una pregunta interesante, teniendo en cuenta el sistema con retardo (5.1) es la siguiente

¿Es posible controlar el sistema (5.1) **con la ley de Cattaneo y el problema de frontera libre de manera simultanea?**

- **Incorporación de no linealidades y perturbaciones:** Investigar cómo las no linealidades y las perturbaciones afectan la controlabilidad nula y los problemas de frontera libre con retardo es un área de investigación importante y desafiante. Es decir, incluir no linealidad al sistema (5.1).

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Notación básica y terminología

A continuación se presenta un listado con la notación básica y terminología utilizada en esta tesis, es importante tener en cuenta que el lector debe contar con nociones de Teoría de la Medida y Análisis Funcional para que pueda abordar mejor la lectura de este documento.

Notación geométrica

- $\mathbb{R}^n$ es el espacio real $n-$dimensional, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.
- $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) = i$-ésimo vector unitario.
- Usualmente un punto en $\mathbb{R}^n$ es de la forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$, dependiendo del contexto x puede verse como fila o como columna.
- $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ y $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- Un punto en R^{n+1} usualmente es denotado $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$.
- Ω, U, V y W usualmente son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial U =$ frontera de U, $\overline{U} = U \cup \partial U =$ clausura de U.
- $U_T = U \times (0, T]$.
- $\Gamma_t = \overline{U}_T - U_T =$ frontera parabólica de U_T.
- $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \, |x - y| < r\} =$ bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ con centro en x y radio $r > 0$.
- $B^0(x, r) =$ bola abierta con centro x y radio $r > 0$.
- Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ están en $\mathbb{R}^n$,

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \ |a| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\mathbb{C}^n =$ espacio complejo $n-$dimensional; $\mathbb{C}$ el plano complejo. Si $z \in \mathbb{C}$, usamos $Re(z)$ para la parte real de z y $Im(z)$ para la parte imaginaria.
- $H =$ un espacio de funciones de Hilbert

Notación para funciones

- Si $u : U \to \mathbb{R}$con$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, decimos que u es suave si u es infinitamente diferenciable.
- Si u, v son dos funciones, escribimos $u \equiv v$ para decir que u es idénticamente igual a v. Usamos la notación $u := v$ para definir a u como igual a v.

  El soporte de una función u es denotado por $supp(u)$.
- Si σ es una superficie $(n-1)-$dimensional suave en $\mathbb{R}^n$, escribimos

$$\int_\sigma f dS$$

  para la integral de f sobre σ, con respecto a la superficie $(n-1)-$dimensional medible.
- La función característica de un espacio E, es dada por: $1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$
- Una función u se dice Lipschitz continua si

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$$

  para alguna constante C y todo $x, y \in U$.

Notación para derivadas

Se supone $u : U \to \mathbb{R},\ x \in U$

- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$, cuando el límite existe.
- Regularmente se escribirá u_{x_i} para denotar $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.
- Similarmente $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = u_{x_i, x_i, x_k}$, etc.
  Notación de multiíndice:
  - Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_i + \cdots + \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un entero no negativo, es llamado multiindice de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
  - Dado un multiindice α, se define:

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u.$$

  - Si k es un entero no negativo

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\},$$

    es el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k.
    Asumiendo algún orden a las diversas derivadas parciales, también podemos considerar $D^k u](x)$ como un punto en $\mathbb{R}^{n^k}$.
  -

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}.$$

- Casos especiales: Si $k = 1$, consideramos los elementos de Du están dispuestos en un vector $\nabla u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ = vector gradiente. Por lo tanto $\nabla u \in \mathbb{R}^n$. Algunas veces también escribimos
$$u_r := \frac{x}{|x|}.\nabla u$$
para la derivada radial de u. Si $k = 2$, consideramos los elementos de D^2u están dispuestos en una matriz:
$$D^2u := \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_nx_1} & \cdots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix} = \text{Matriz Hesiana.}$$
Entonces $D^2u \in S^n$, el espacio de matrices simétricas reales $n \times n$.
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} = tr(D^2u)$ = Laplaciano de u.
- A veces se emplea un subíndice adjunto a los símbolos D, D^2,etc. para indicar las variables que se diferencian, por ejemplo si $u = u(x, y)(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$, entonces $D_xu = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, y $D_yu = (u_{y_1}, \ldots, u_{y_m})$.

Espacios de funciones

- $C(U) = \{u : U \to \mathbb{R} | u \text{ continua}\}$.
$C^k(U) = \{u : U \to \mathbb{R} | u \text{ es } k-\text{continualmente diferenciable}\}$.
$C^k(U) = \{u \in C^k(U) | D^\alpha u \text{ es uniformemente continua sobre subconjuntos acotadas de } U, \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$.
- $C^\infty = \{u : U \to \mathbb{R} | u \text{ es infinitamente diferenciable }\} = \cap_{k=0}^\infty C^k(U)$
- $C_c(U), C_c^k(U)$,etc. denota las funciones en $C(U), C^k(U)$, etc con soporte compacto.
- $\mathcal{D}(U)$ denota las funciones en $C^\infty(U)$ con soporte compacto.
- $L^p(U) = \{u : U \to \mathbb{R} | u \text{ Lebesgue medible, } \|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$, donde
$$\|u\|_{L^p(U)} := \left(\int_U |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty).$$
$L^\infty(U) = \{u : U \to \mathbb{R} | u \text{es Lebesgue medible, } \|u\|_{L^p(U)} < \infty\}$, donde
$$\|u\|_{L^\infty(U)} := ess \sup_U |u|.$$
- $\|\nabla u\|_{L^p(U)} = \||\nabla u|\|_{L^p(U)}$.
$\|D^2u\|_{L^p(U)} = \||D^2u|\|_{L^p(U)}$.
- $W^{k,p}(U), H^k(U), etc. (k = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leq p \leq \infty)$

Funciones

- Si $m > 1$ y $u : U \to \mathbb{R}^m$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, se define $D^\alpha u = (D^\alpha u^1, \ldots, D^\alpha u^m)$ para cada multiíndice α. Entonces $D^k u = \{D^\alpha u | \|\alpha\| = k\}$y
$$|D^k u| := \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- En el caso especial $k = 1$, se escribe

$$Du := \begin{pmatrix} u^1_{x_1} & \cdots & u^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^m_{x_1} & \cdots & u^m_{x_n} \end{pmatrix}_{m\times n} = matrizGradiente.$$

- Si $m = n$

$$divu := tr(Du) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} = divergenciadeu.$$

- Los espacios $C(U;\mathbb{R}^m)$, $L^p(U,\mathbb{R}^m)$,etc.Son espacios con funciones $U \to \mathbb{R}^m, u = (u^1,\ldots,u^m)$ con $u \in C(U), L^p(U)$, etc.(i=1,...,m).

6.2. Espacios Funcionales

Definición 13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el soporte de φ, denotado $supp(\varphi)$, como la clausura del conjunto de puntos de Ω que no se anulan con φ, es decir*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Note que $supp(\varphi)$ es un subconjunto cerrado de Ω.

Una $n-$upla de enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ se llama multi-índice y su orden es definido por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Representamos por D^α al operador derivación de orden $|\alpha|$, esto es,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0,0,\ldots,0)$ definimos $D^0u = u$, para toda función u.

Definición 14. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones de clase C^∞ en Ω que poseen soporte compacto en Ω. Diremos que una secuencia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ en $C_0^\infty(\Omega)$ cuando se satisfacen las siguientes opciones:*

I) *Existe un compacto $K \subset \Omega$, tal que $supp(\varphi) \subset K$ y $supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$,*

II) *$D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ uniformemente en K para todo multi-índice α.*

Definición 15. *El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$, dotado con la noción de convergencia dada anteriormente es llamado el espacio de las funciones test sobre Ω y será denotado por $D(\Omega)$. Una distribución (escalar) sobre Ω es todo funcional lineal continuo sobre $D(\Omega)$. Más precisamente una distribución sobre Ω es un funcional $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:*

I) *$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi,\psi \in D(\Omega)$,*

II) *T es continua, esto es, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ en $D(\Omega)$, entonces $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.*

Denotamos el valor de la distribución T en φ por $\langle T,\varphi\rangle$.

Definición 16. *El conjunto de las distribuciones escalares sobre Ω es un espacio vectorial real, denotado por $D'(\Omega)$. Diremos que una secuencia de distribuciones escalares $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D'(\Omega)$ converge para T en $D'(\Omega)$, si*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ en } \mathbb{R}, \text{ cuando } n \to \infty,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

Definición 17. *Sean T una distribución sobre Ω y α un multi-índice. La derivada $D^\alpha T$ (en el sentido de las distribuciones) de orden $|\alpha|$ de T es el funcional definido en $D(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

6.3. Espacios de Sobolev

Definición 18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Denotamos por $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tales que $|u|^p$ es Lebesgue integrable en Ω. $L^P(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso de $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de las (clases de) funciones Lebesgue medibles y esencialmente limitadas en Ω, es decir, existe una constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ casi siempre en } \Omega.$$

Este es un espacio de Banach equipado con la norma

$$\|u\|_{L^\infty}(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

En particular, si $p = 2$ tenemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya norma y producto interno serán denotados respectivamente por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Diremos que una secuencia (φ_n) en $L^p(\Omega)$ converge para φ en $L^p(\Omega)$, si $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. cuando $n \to \infty$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 19. *Considerando el espacio $L^p(\Omega)$ hacemos la siguiente identificación para el dual topológico*

$$[L^p(\Omega)]' \approx L^q(\Omega),$$

donde p y q son índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cuando $p = 1$, hacemos la identificación

$$[L^1(\Omega)]' \approx L^\infty(\Omega),$$

Además si $1 \leq p < \infty$ entonces $L^p(\Omega)$ es separable y si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ es reflexivo.

Definición 20. *(Espacios de Sobolev). Sean $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev de orden m, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ como el espacio vectorial de las (clases de) funciones en $L^p(\Omega)$, para las cuales sus derivadas de orden $|\alpha|$, en el sentido de las distribuciones, pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$, es decir,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ equipados con las normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ cuando } 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} ess|D^\alpha u(x)|, \text{ cuando } p = \infty,$$

son espacios de Banach.

En particular, $p = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable y reflexivo, es denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

cuya norma y producto interno serán denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } \langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Definición 21. *Sean X y Y dos espacios normados con $X \subset Y$, diremos que X está inmerso continuamente en Y si existe $C > 0$ tal que*

$$\|X\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X$$

En este caso, escribimos $X \hookrightarrow Y$.

Observación (i) Note que decir que la inmersión es continua es equivalente a decir que la aplicación identidad $i : X \hookrightarrow Y$ dada por $i(x) = x$, para $x \in X$ es continua. (ii) Note que con una estructura topológica como la anterior tenemos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Definición 22. *Definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$.*

El dual topológico del espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ es representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, con p y q índices conjugados. Si $\varphi \in W_0^{-m,q}(\Omega)$, entonces $\varphi\Big|_{D(\Omega)}$ pertenece a $D'(\Omega)$. En el caso de $p = 2$ $W_o^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H_0^m(\Omega)$ cuyo dual es $H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 26 (Teorema de inmersión)**.** *Sean $m \geq 1, 1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, limitado y con frontera regular.*

1. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ Entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.*
2. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ Entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ donde $q \in [p, +\infty)$*
3. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ Entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*

Siendo estas inmersiones continuas.

Ver demostración en [32].

Teorema 27 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y con frontera Γ regular*

1. *Si $n > 2m$, entonces $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^P(\Omega)$, donde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right)$.*

2. *Si* $n = 2m$, *entonces* $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^P(\Omega)$, *donde* $p \in [1, +\infty)$.

3. *Si* $n < 2m$, *entonces* $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c C^k(\overline{\Omega})$, *donde* k *es un entero no negativo tal que* $k < m - \left(\frac{n}{2}\right) < k + 1$.

donde el símbolo $\hookrightarrow_c$ *denota inmersión compacta.*

Ver demostración en [4].

Teorema 28 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *El conjunto* $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ *es compacto para la topología débil** $\sigma(E', E)$, *donde* E *es un espacio de Banach.*

Ver demostración en [4].

Teorema 29 (Teorema de la traza)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto acotado de clase* C^{m+1} *con frontera* Γ. *Entonces existe una aplicación traza* $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ *de* $H^m(\Omega)$ *en* $(L^2(\Omega))^m$, *tal que*

1. *Si* $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *entonces* $\gamma_0(v) = v|_\Gamma, \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial e}|_\Gamma, \ldots, \gamma_{m-1}(v) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial e^{m-1}}|_\Gamma$ *donde* e *es el vector normal unitario exterior a la frontera* Γ

2. *La imagen de* γ *es el espacio* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.

3. *El núcleo de* γ *es* $H_0^m(\Omega)$.

Ver demostración en [22].

6.4. Desigualdades Importantes

Lema 10 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sea* $z(t)$ *una función real absolutamente continua en* $[0, a)$, *tal que para todo* $t \in [0, a)$, *se tiene*

$$z(t) = C + \int_0^t z(s)\, ds.$$

Entonces $z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a)$.

Ver demostración en [6].

Lema 11 (Desigualdad diferencial de Gronwall)**.** *Sea* $u(t)$ *una función no negativa y diferenciable en* $[0, T]$ *que satisface*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

donde $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones integrables en* $[0, T]$, *entonces*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau}\, ds \right], \forall t \in [0, T].$$

Si $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones no negativas , entonces la expresión se torna*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s)\, ds \right], \forall t \in [0, T].$$

Ver demostración en [6].

Lema 12 (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado en alguna dirección x_i de $\mathbb{R}^n$, es decir, existe una dirección e_i talque $|\pi_i(\Omega)| < C$, donde C es una constante, $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre el eje e_i. Entonces, existe una constante $C_\Omega > 0$, tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para cualquier $u \in H^1_0(\Omega)$.

Ver demostración en [32]. Note que por el lema 12 tenemos que las normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}$ son equivalentes en $H^1_0(\Omega)$

Lema 13 (Desigualdad de Young). *Sean a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ver demostración en [4].

Lema 14 (Desigualdad de Hölder). *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ver demostración en [4].

6.5. Interpolación de Espacios de Sobolev

Los resultados que enunciaremos y sus demostraciones pueden ser encontrados en (Lions; Magenes; 1968).

Sean X y Y dos espacios de Hilbert separables, con inmersión continua y densa, $X \hookrightarrow Y$. Sean $\langle \dot{;} \rangle_X$ y $\langle \dot{;} \rangle_Y$ los productos internos de X y Y respectivamente. Indicaremos por $D(S)$, el conjunto de todas las funciones u definidas en X, tal que la aplicación $u \mapsto \langle u, v \rangle_X, v \in X$, es continua en la topología inducida por Y. Entonces $\langle u, v \rangle_X = \langle Su, v \rangle_Y$ define S como el operador limitado en Y con dominio $D(S)$ denso en Y.

Observe que S es un operador auto-adjunto y estrictamente positivo. Usando la descomposición espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir $S^\theta, \theta \in \mathbb{R}$. En particular usaremos $A = S^{1/2}$. El operador A, es auto-adjunto, definido positivo en Y, con dominio X y

$$\langle u, v \rangle_X = \langle Au, Av \rangle_Y, \forall u, v \in X.$$

Definición 23. *Con las hipótesis anteriores definimos el espacio intermediario*

$$[X, Y]_\theta = D\left(A^{1-\theta}\right), 0 \leq \theta \leq 1,$$

donde $D\left(A^{1-\theta}\right)$ representa el dominio de $A^{1-\theta}$, equipado con la norma

$$\|u\|^2_{[X,Y]_\theta} = \|u\|^2_Y + \|A^{1-\theta} u\|^2_Y.$$

observemos que:

1. $X \hookrightarrow [X, Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|^{1-\theta}_X \|u\|^\theta_Y$.

3. *Si* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ *entonces* $[X, Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta_1}$.

4. $[[X; Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Teorema 30. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, s > \frac{1}{2}$. *Entonces,*

$$H^s_= = \left\{ u : u \in H^s(\Omega), \frac{\partial^j u}{\partial \nu_j} = 0, 0 \leq j < s - \frac{1}{2} \right\}.$$

Teorema 31. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, s_1 \geq s_2 \geq 0, s_1$ *y* s_2 *diferentes de* $k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$. *Si* $s = (s - \theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, *entonces*

$$[H^{s_1}_0(\Omega), H^{s_2}_0(\Omega)]_\theta = H^s_0(\Omega)$$

y

$$[H^m_0(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H^s_0(\Omega), \text{ con } s = (1 - \theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

con las normas equivalentes.

Teorema 32. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto con frontera* C^∞. $\overline{u}$ *una extensión de* u *es una aplicación continua de* $H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *si y solamente si* $0 \leq s < \frac{1}{2}$, *además,* $\overline{u}$ *es una aplicación continua de* $H^s_0(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *para* $s > \frac{1}{2}$ *si y solamente si* $s \neq k + \frac{1}{2}$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

6.6. Espacios

$L^p(0, T; X)$

Definición 24. *Sean* X *un espacio de Bancha y* $T > 0$. *Denotamos por* $L^p(0, T; X), 1 \leq p < \infty$, *el espacio vectorial de las (clases de) funciones* $u : (0, T) \to X$ *fuertemente medibles tales que la función* $t \mapsto \|u(t)\|^p_X$ *y es Lebesgue integrable en* $(0, T)$, *equipado con la norma*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$ *y* X *un espacio de Hilbert, el espacio* $L^2(0, T; X)$ *es también un espacio de Hilbert cuyo producto interno está dado por*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_x.$$

Si $p = \infty$, *denotamos por* $L^\infty(0, T; X)$, *el espacio vectorial de las (clases de) funciones* $u : (0, T) \to X$, *fuertemente medibles, tales que la función* $t \mapsto \|u(t)\|_X$ *pertenezca a* $L^\infty(0, T)$, *que equipado con la norma*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X,$$

es un espacio de Banach.

Observe que cuando X es reflexivo, separable y $1 < p < \infty$, tenemos que $L^p(0, T; X)$ es un espacio reflexivo y separable cuyo dual topológico se identifica como el espacio de Banach $L^q(o, T; X')$, donde p y q son índices conjugados y X' es el dual de X.

Teorema 33 (Aubin-Lions)**.** *Sean B_0, B y B_1 espacios de Banach tales que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

donde B_0 y B_1 son reflexivos $\hookrightarrow$ denota la inmersión continua y $\hookrightarrow_c$ inmersión compacta. Defina

$$W = \{u \in L^p(0,T;B_0) : u' \in L^q(0,T;B_1)\},$$

donde $1 < p, q < \infty$ y $T > \infty$, equipado con la norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow_c L^p(0,T;B)$.

Ver demostración en [28]. Una consecuencia del teorema es la siguiente: Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia limitada en $L^2(0,T;B_0)$ y $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia limitada en $L^2(0,T;B_1)$, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada en W, donde existe una subsecuencia limitada $(u_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \to u$ fuerte en $L^2(0,T;B)$, cuando $k \to \infty$

Definición 25. *Sean X espacio de Banach y $T > 0$. Entonces definimos el espacio de las funciones débilmente continuas como el espacio de las (clases de) funciones $u \in L^\infty(0,T;X)$, tales que $u : [0,T] \to X$ es la aplicación $t \mapsto \langle \varphi, u(t)\rangle$ es continua de $[0,T]$ en $\mathbb{R}$ para todo $\varphi \in X' = \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$. Este espacio será denotado por $C_w([0,T];X)$.*

Teorema 34. *Sean X y Y espacios de Banach tales que, $X \hookrightarrow Y$ y X reflexivo. Entonces tenemos que*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_\omega([0,T];Y) = C_\omega([0,T];X).$$

Ver demostración en [41].

6.7. Teoría de Semigrupos

Definición 26. *Sea X un espacio de Banach. Una aplicación $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo de operadores lineales limitados de X, se*

1. *$S(0) = I$, donde I es la aplicación identidad del espacio X.*
2. *$S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.*

Diremos que S es de clase C_0, o fuertemente continuo, si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \forall x \in X.$$

Y S es uniformemente continuo si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Los siguientes resultados tienen su demostración en [37].

Teorema 35. *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0, entonces existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$, tales que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Corolario 2. *Sea $(S(t))_{t\leq 0}$ un semigrupo de clase C_0, entonces para cada $x \in X$, la aplicación*

$$t \hookrightarrow S(t)x$$

es continua. Equivalentemente para cada $x \in X$.

$$\lim_{t\to s} S(t)x = S(s)x, \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Definición 27. *Si $\|S(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, diremos que S es un semigrupo de contracciones.*

Definición 28. *El operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ s \in X : \lim_{h\to o^+} \frac{S(h)x - x}{h} \ \ existe \right\}$$

y

$$A(x) := \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

es llamado generador infinitesimal del semigrupo S.

Note que A es un operador lineal y $D(A)$ es un subespacio de X.

Teorema 36. *Sea $(S(t))_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces,*

1. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x, \forall x \in X.$
2. $\int_0^t S(s)x \, ds \in D(A), \forall x \in X,$ *y* $A\left(\int_0^t S(s)x \, ds\right) = S(t)x - x.$
3. *Para todo* $x \in D(A), S(t)x \in D(A)$ *y* $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$
4. *Para todo* $x \in D(A), S(t)x - S(s)x = \int_0^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax \, d\tau.$

Corolario 3. *El generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 es un operador lineal cerrado y su dominio es un espacio vectorial denso en X.*

Proposición 6. *Un operador cerrado con dominio denso y el generador infinitesimal de el maximo un semigrupo de clase C_0.*

Ver demostración en [18].

Definición 29. *Sean X espacio de Banach, X^* el dual de X y $\langle \dot{;} \rangle$ la dualidad entre X y X^*, defina*

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = |x^*|_{X^*}^2 \right\}$$

Note que, por el teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$.

Definición 30. *Una aplicación de dualidad es una aplicación $j : X \to X^*$,tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$ es decir, $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.*

Definición 31. *Diremos que el operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es disipativo si para alguna aplicación de dualidad j,*

$$Re\langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Si además existe $\lambda > 0$ tal que $IM(\lambda I - A) = X$, entonces diremos que A es $m-$disipativo.

Observe que si X es un espacio de Hilbert, entonces diremos que $A : D(A) \subset X \to X$ es disipativo si

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Diremos que $A \in G(M, \omega)$, cuando A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, denotado por $(S(t))_{t\geq 0}$ que satisface

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Teorema 37 (Lumer- Phillips)**.** *$A \in G(1, 0)$ si y solamente si A es $m-$disipativo y posee dominio denso en X.*

Ver demostración en [37].

Proposición 7. *Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal y X un espacio de Banach. Si $\overline{D(A)} = X, A, A^*$ son disipativos y A es cerrado (condición equivalente $A^{**} = A$), entonces $A \in G(1, 0)$.*

Ver demostración en [37].

6.8. Problema de Cauchy Abstracto

Sean X un espacio de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ de clase C_0 y $f \in L^1(o, T; x)$. Dado $u_0 \in D(A)$ el problema de Cauchy abtracto consiste en determinar una función $u(t)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), t > 0, \\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Definición 32. *Diremos que u es la solución clásica (o fuerte) de (6.1) en $[0, +\infty)$ si u satisface (6.1) y $C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.*

Teorema 38. *Si $A \in G(M, \omega)$ y $u_0 \in D(A)$, el problema (6.1) posee una solución clásica.*

Ver demostración en [18]. Considere Ahora el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), t > 0, \\ \qquad\qquad u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{6.2}$$

Definición 33. *Una función $u : [0, +\infty) \to X$ es una solución clásica de (6.2) en $[0, +\infty)$ si u satisface (6.2) en $[0, +\infty)$ y si $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Una función $u \in C([0, T]; X)$, dada por*

$$u(t) = S(y)u_0 + \int_0^t S(t - s)f(s, u(s))\, ds,$$

es llamada "mild solution" o solución generalizada de (6.2) en $[0, T]$.

Note que si $f \equiv 0$, entonces $u(t) = S(t)u_0$, con $u_0 \in X$ es llamada la "mild solution" de (

Teorema 39. *Sea $f : [0, +\infty) \times X \to X$ una función continua en t. Suponga que para cada $\tau > 0$, existe una constante $L = L(\tau)$, tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in X \text{ y } \forall t \in [0, \tau].$$

Entonces para cada $u_0 \in X$, (6.2) posee una única mild solution $u \in C([0, \tau]; X)$. Además la aplicación $u_0 \to u$ es continua de X en $C([0, \tau]; X)$.

Ver demostración en [18].

6.9. Resultados Importantes

Teorema 40 (Punto fijo de Banach)**.** *Sean E un espacio de Banach y $F \subset E$ un subespacio cerrado de E. Si $f : F \to F$ es una contracción, entonces existe un único $z \in F$, tal que $f(z) = z$.*

Ver demostración en [38].

Teorema 41 (Punto fijo de Shauder)**.** *Sea X un espacio de Banach y sea K un conjunto compacto de X. Si $f : K \to K$ es una aplicación continua, entonces existe al menos un punto fijo de T, es decir, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.*

Ver demostración en [4].

Teorema 42. *Sea X un espacio normado y $\overline{B_1(0)} \subset X$ la bola cerrada unitaria, entonces $\overline{B_1(0)}$ es compacta si y solo si, X posee dimensión finita.*

Ver demostración en [4].

Teorema 43. *Si X es un espacio vectorial normado y M es un subespacio de X de dimensión finita, entonces M es cerrado.*

Ver demostración en [3].

Teorema 44 (Convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sean (f_n) una secuencia de funciones medibles de Ω, $f : \Omega \to X$ y $g \in L^1(\Omega)$. Si*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ casi siempre en} \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ casi siempre en } \Omega,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Ver demostración en [14].

Teorema 45 (Teorema de unicidad de Holmgren)**.** *Sea P un operador diferencial con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^n$. Sea u una solución de $Pu = 0$ en Q_1 donde Q_1 es un conjunto abierto de R^n. suponga que $u = 0$ en Q_2 donde Q_2 es un subconjunto abierto no vacío de Q_1.*

Entonces $u = 0$ en Q_3, donde Q_3 es un subconjunto abierto de Q_1 que contiene a Q_2 y tal que cualquier hiperplano característico del operador P que sea intersecado por Q_3 también interseca a Q_1.

Ver demostración en[21].

Bibliografía

[1] Artola, M. *Sur les perturbations des équations d'évolution: Application à des problèmes avec retard*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 2 : 137-253,1969.

[2] Araújo, R. K., Fernández-Cara, E., Límaco, J., Souza, D. A. *Remarks on the control of two-phase stefan free-boundary problems.* SIAM Journal on Control and Optimization, 60(5): 3078-3099, 2022.

[3] Bachman, G.; Narici, L. *Functional Analysis. 2nd Ed.* Dover Publications, 1998.

[4] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces And Partial Differential Equations.* Springer-verlag New York, 2010.

[5] Cannarsa, P. *Control of Partial Differential Equations: Cetraro*, Italy 2010. Springer, 2012.

[6] Coddington, E. A.; Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* mcgraw-hill, 1987.

[7] Coron, J. M. *Control and nonlinearity* (No. 136). American Mathematical Soc, 2007.

[8] Costa, V., Límaco, J., Lopes, A. R., *Prouvée, L. On the Controllability of a Free-Boundary Problem for 1D Heat Equation with Local and Nonlocal Nonlinearities.* Applied Mathematics and Optimization, 87(1), 11, 2023.

[9] Dressel, F. G. *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Math. J. 7 , 186-203. MR 2, 204, 1940.

[10] Fasano, A., Primicerio, *General free-boundary problems for the heat equation*, I, J. Math. Anal. Appl. 57, 694-723,1977.

[11] Fernández-Cara, E., Hernández, F., Límaco, J. *Local null controllability of a 1D Stefan problem.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 50, 745-769, 2019.

[12] Fernández-Cara, E., Ivaldo Tributino de Sousa. *Local null controllability of a free-boundary problem for the semilinear 1D heat equation.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 48.2 : 303-315,2017.

[13] Fernández-Cara, E., Limaco, J., de Menezes, S. B. *On the controllability of a free-boundary problem for the 1D heat equation.* Systems and Control Letters 87 (2016): 29-35.

[14] Folland, G. B, *Real Analysis: Modern Techniques And Their Applications. 2nd Ed.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 1999.

[15] Friedman, A. *Analyticity of the free boundary for the Stefan problem.* Arch. Rat. Mech. Anal., 61, pp. 97-125, 1976.

[16] Fourier, J. *Théorie analytique de la chaleur.* Vol. 1. Paris: Chez l'auteur, 1822.

[17] Fursikov, A., Imanuvilov, O. Yu. *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Ser., vol.34, Seoul National University, Korea, 1996.

[18] Gomes, A. M. *Semigrupos De Operadores Lineares e Aplicações ás Equações De Evolução.* 2 Ed. Ufrj - Im, 2005. (rio De Janeiro).

[19] Gupta, S.C., *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*, Elsevier Science B.V., Amster-dam, 2003.

[20] Hoffmann, K. H., Kenmochi, N. *Two-phase Stefan problems with feedback controls.* Birkhäuser Basel,(pp. 239-260) 1989.

[21] Hörmander, L. *Linear Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1969.

[22] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis And Applications.* Wiley Easterm Limited, 1989.

[23] Khodja, F.A., Bouzidi, C., Dupaix, C., Maniar, L. *Null controllability of retarded parabolic equations.* Math. Control Relat. Fields, 4(1), 1-15, 2014.

[24] Komornik, V. *Exact controllability and stabilization: the multiplier method* (Vol. 36). Elsevier Masson, 1994.

[25] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Uraltseva, N. N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968.

[26] Lebeau, G., Robbiano, L. *Controle exact de lequation de la chaleur.* Comm. Part. Differ. Equat.20, 335–356, 1995.

[27] Le Rousseau, J., Lebeau, G. *On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations.* ESAIM Control Optim. Calc. Var, 2011.

[28] Lions, J. L. *Quelques Méthodes De Résolutions Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires.* Dunod Gauthier-villars, Paris, 1969.

[29] Lions, J. L. *Controlabilite exacte, perturbations et stabilisation de systemes distribues*, Tomes 1 and 2. Masson, RMA 8 and 9, Paris, 1988.

[30] Matiicuk, M. I., Eidel man, S. D. *On parabolic systems with coefficients satisfying a Dint condition*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 165(1965), 482-485 Soviet Math. Dokl- 6(1965), 1461-1464. MR 32 - 7962.

[31] Medeiros, L. A., Miranda, M. M., Lourêdo, A. T. *Introduction exact control theory: Method Hum.* EDUEPB, Campina Grande, 2013.

[32] Medeiros, L. A., Miranda, M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos).* Im - Ufrj, 2000.

[33] Micu, S., Zuazua, E. *An introduction to the controllability of partial differential equations. Quelques questions de théorie du contrôle.* Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, to appear. 2004.

[34] Miller,L. *A direct lebeau–robbiano strategy for the observability of heat-like semigroups.* Discrete Continuous Dyn. Syst. Series B 14, 1465–1485 (2010)

[35] Pogorzelski, W. *Etude de la solution fondamentale de Vequation parabolique*, Ricerche Mat. 5, 25-57. MR 18, 47. 1956.

[36] Pogorzelski, W. *An investigation of the integrals of a parabolic equation and of boundary value problems in an unbounded domain*, Mat. Sb. 47(89) , 397-430. (Russian) MR 22 - 2791.1959.

[37] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, New York, 1999.

[38] Rudin, W. *Principles Of Mathematical Analysis.* 3d Ed. Mcgraw-hill, 1976. (international Series In Pure And Applied Mathematics).

[39] Russell,D.L. *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions.* SIAM Rev. 20, 639–739, 1978.

[40] Sontag, E. D. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems* (Vol. 6). Springer Science & Business Media, 2013.

[41] Temam, R. *Navier-stokes Equations.* 3. Ed. North- Holland Pu- Blishing Co,Amsterdam, 1984. V. 2. (Studies in Mathematics and its Applications, V. 2).

[42] Tenenbaum,G., Tucsnak, M. *On the null-controllability of diffusion equations.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 17(4), 2010.

[43] Wang, L., Lan, Y., Lei, P. *Local null controllability of a free-boundary problem for the quasi-linear 1D parabolic equation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 506.2: 125676. 2022.

[44] Wang, L., Lei, P., Wu, Q. *Null controllability of a 1D Stefan problem for the heat equation governed by a multiplicative control.* Systems and Control Letters 171 : 105417. 2023.

[45] Zabczyk,J. *Mathematical Control Theory: An Introduction, Systems and Control: Foundations and Applications*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[46] Zuazua, E. *Exact controllability for the semilinear wave equation.* J. Math. Pures Appl. (9) 69(1), 1–31, 1990.