Una Mirada al Problema del Coquecigrue: Algunas Soluciones y Estructuras Algebraicas

Sebastián Marulanda Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2025

Una Mirada al Problema del Coquecigrue: Algunas Soluciones y Estructuras Algebraicas.

Sebastián Marulanda Rodríguez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en ciencias - Matemáticas

Director:

Prof. José Gregorio Rodríguez Nieto

Codirector:

Prof. Raúl Eduardo Velásquez Ossa

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2025

Agradecimientos

A Olga Patricia Salazar, Raul Eduardo Velasquez y en especial a José Gregorio Rodríguez.

Todo aquellos quienes guiaron mis pasos y me enseñaron un camino.

Indiscutiblemente, a los amores de mi vida:

Milena, cuya presencia marcó parte de esta historia

A mi padre quien siempre me da una mano cuando la necesito.

Martin, la luz de mis ojos, quien me llena de vida desde que llegó.

Á Nito, mi mejor amigo y mi mayor fan

Y a ti, mamá, por haber existido

Resumen

En esta tesis, investigamos el problema del Coquecigrue, una generalización del Tercer Teorema de Lie, que profundiza en la conexión entre la topología diferencial y las estructuras algebraicas. El Tercer Teorema de Lie, en su versión categórica, establece una equivalencia de categorías entre los grupos de Lie simplemente conexos y las álgebras de Lie completas sobre campos de números reales o complejos. Este resultado es crucial en el estudio de las relaciones entre lazaciones. Nuestro enfoque se centra en el problems álgebras de Lie y los grupos de Lie, y sirve como punto de partida para explorar diversas generalia del Coquecigrue, cuya complejidad surge de la interacción entre la teoría de Lie y otras estructuras algebraicas, como los digrupos y los racks de Lie. A lo largo de este trabajo, revisamos las soluciones conocidas y proponemos nuevos enfoques para abordar este problema, con el objetivo de extender las soluciones a casos más generales. Este estudio aporta nuevas perspectivas a la comprensión del Tercer Teorema de Lie y sus posibles generalizaciones, contribuyendo al desarrollo de un marco más amplio para el análisis de las estructuras algebraicas en topología diferencial.

Palabras clave: Coquecigrue, grupo de Lie, álgebra de Lie, teoremas de Lie, espacio tangente, álgebra de Leibniz, Digrupo de Lie, Rack de Lie

A Look at the Coquecigrue Problem: Some Solutions and Algebraic Structures

Abstrac: This thesis investigates the Coquecigrue problem, a generalization of Lies Third Theorem that deepens the connection between differential topology and algebraic structures. Lies Third Theorem, in its categorical formulation, establishes an equivalence of categories between simply connected Lie groups and Lie algebras over the fields of real or complex numbers. This result plays a fundamental role in the study of the relationships between these structures.

The work focuses on the problem related to Lie algebras and Lie groups, serving as a starting point for exploring various generalizations of the Coquecigrue, whose complexity arises from the interaction between Lie theory and other algebraic structures, such as digroups and Lie racks. Throughout the research, known solutions are reviewed and new approaches are proposed to address this problem, with the aim of extending such solutions to more general cases.

This study provides new perspectives for the understanding of Lies Third Theorem and its possible generalizations, contributing to the development of a broader framework for the analysis of algebraic structures in differential topology.

Keywords: Coquecigrue, Leibniz Algebras, Lie's third theorem, Digroups, Lie's Racks.

Índice general

Resumen vii

Abstract ix

Índice general 11

1. Introducción 13

2. Categorías 17

3. Álgebras 23

4. Manifolds 31
4.1. Manifolds: Definición y ejemplos 31
4.2. Espacio tangente y fibrados vectoriales 34
4.2.1. Espacio tangente 34
4.2.2. Fibrados vectoriales 36
4.2.3. Fibrado tangente 38
4.2.4. Campos vectoriales y flujos 41

5. Grupos y álgebras de Lie 49
5.1. Grupos de Lie 49
5.2. Él álgebra de Lie de un grupo de Lie 50
5.3. La función exponencial 54
5.4. La representación adjunta 58
5.5. Tercer teorema de Lie 60

6. Coquecigrue 65

7. Digrupos 77

8. Conclusiones 87

Bibliografía 89

Capítulo 1

Introducción

Los grupos de Lie surgen de los trabajos del matemático Sophus Lie, motivado en la teoría de Galois, y juegan un papel importante en diferentes ramas de la matemática, en especial en geometría ya que uno puede considerar varias geometrías al especificar la acción de un grupo sobre un objeto topológico. Un grupo de Lie, a groso modo, es un manifold suave, que en adelante, por conveniencia, lo llamaremos simplemente manifold, dotado de estructura de grupo cuyas operaciones de multiplicación $(g, h) \mapsto gh$ e inversión $g \mapsto g^{-1}$ son funciones suaves. Por otro lado tenemos el concepto de álgebra de Lie. Un álgebra de Lie, $\mathcal{A}$, es un espacio vectorial junto con una función bilineal, $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ llamado el corchete de Lie en $\mathcal{A}$ tal que se cumplen para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, la antisimetría

$$[x, x] = 0$$

y la identidad de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Existe una fuerte relación entre los grupo de Lie y las álgebras de Lie a través del conocido Tercer Teorema de Lie, el cuál puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema 1. *Existe una equivalencia de categorías entre la categoría de grupos de Lie simplemente conexos y la categoría de álgebras de Lie.*

Este teorema relaciona un objeto diferenciable, como lo son los grupos de Lie, con una estructura puramente algebraica, que son las álgebras de Lie. De manera general, dado un Manifold G se le puede asignar un espacio vectorial de manera local, es decir, alrededor de una vecindad de un punto, conocido como el espacio tangente de G en p y denotado por $T_p(G)$. En el caso de que $p = e$ sea la identidad de G, $T_e(G)$ puede ser dotado de una estructura de álgebra de Lie, por lo que se asigna a cada grupo de Lie G el espacio tangente T_eG, además que dicha asignación es funtorial, es decir, existe una asignación de un álgebra de Lie para cada grupo de Lie, pero además a cada morfismo de grupos de Lie, que en dicha categoría son homomorfismos suaves, corresponden a homomorfismos de álgebra de Lie. Esta forma de presentar el Tercer Teorema de Lie trae ciertas ventajas, pues el lenguaje de categorías permite enunciar este teorema de una manera más general que el que se muestra en la forma clásica. Ahora bien, la correspondencia entre un grupo de Lie y un álgebra de Lie puede hacerse de distintas formas, por lo que la hipotésis de que el grupo de Lie sea simplemente conexo vuelve esta asignación única salvo isomorfismo.

De esta forma, este teorema nos permite relacionar dichos objetos de forma global, local y funtorial.

En 1965 A. Blokh, vease [1], introdujo el concepto de D-álgebra, que corresponde a la noción de álgebras de Leibniz estudiadas más tarde por J. L. Loday, vease [6]. Las álgebras de Leibniz constituyen una generalización de las álgebras de Lie donde la anti-simetría del corchete no es exigida y la identidad de Jacobi es reemplazada por la identidad de Leibniz.

Definición 1. *Un álgebra de Leibniz (a izquierda) es un espacio vectorial L, con un producto bilineal llamado el corchete de Leibniz $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ el cual satisface la* ***identidad de Leibniz (a izquierda)***

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$

para todo $x, y, z \in L$

Observe que si el corchete es anti-simétrico, la identidad de Leibniz se vuelve la identidad de Jacobi, por lo que el álgebra seria realmente un álgebra de Lie. De esta forma, podríamos pensar en una generalización natural del Tercer teorema de Lie, dando lugar a la siguiente cuestión:

¿Dada un álgebra de Leibniz (a izquierda) L existe un manifold con alguna estructura algebraica que generalice la noción de grupo, tal que el espacio tangente en un punto distinguido, llamado 1*, puede ser dotado de una estructura de álgebra de Leibniz que sea isormorfa al álgebra L?*

Este interrogante fue planteado por Loday en [6], y es conocido como el problema del Coquecigrue. La primera aproximación de la solución del problema del Coquecigrue fue propuesta por M. Kinyon [5] y resuelve el caso particular de las Álgebras de Leibniz escindidas.

Definición 2. *Dada un álgebra de Leibniz $(L,[\cdot,\cdot])$ se dice que es escindida si es isomorfa al producto semidirecto de un álgebra de Lie H y un módulo sobre esta álgebra H, es decir:*

$$L \cong H \oplus A$$
$$[(x,a),(y,b)] = ([x,y], x.a)$$

La solución parcial de M. Kinyon consiste de una variedad suave dotada con una estructura algebraica que es una generalización del concepto de grupo con dos operaciones binarias y lo llamó digrupo.

Definición 3. *Un digrupo es una conjunto D junto con dos operaciones asociativas, $\vdash, \dashv$, que satisfacen las relaciones de compatibilidad*

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z);$$
$$(x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z;$$
$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z);$$

Además, posee un elemento distinguido, llamado unidad barra e, que satisface $e \vdash x = x \dashv e = x$, y existen inversos, esto quiere decir que para todo $x \in D$, existe un único elemento x^{-1} tal que $x \vdash x^{-1} = x^{-1} \dashv x = e$.

De esta manera, podemos extender de forma natural el concepto de grupo de Lie a digrupo de Lie. En este caso un digrupo de Lie es una variedad suave en que las operaciones asociadas son funciones suaves. Apesar de que este objeto resuelve un caso particular del problema del coquecigrue queda por explorar el caso no escindido. Más aún, dado que las descomposición de un álgebra de Leibniz escindida no necesariamente es única, da lugar a cuestiones de unicidad de estos manifolds asociados, que incluso ya se presentaba en la teoría clasica de Lie, donde grupos de Lie que son localmente difeomorfos, pero no globalmente, tiene la misma álgebra Lie asociada.

Simon Covez en [4] abordó el problema del Coquecigrue y logró construir una solución parcial de manera local, además cuando se restringe este resultado al caso de las álgebras de Lie se observa que no coincide con la asignación usual del álgebra de Lie (la cual produce un grupo de Lie).
En [3], Bordemann y Wagemann realizan una nueva correspondencia de un álgebra de Leibniz de tal manera que cuando se reduzca al caso de un álgebra de Lie corresponda con el grupo de Lie clásico. Estas propuestas se acercan a una solución general, sin embargo, el problema se mantiene abierto, dado que en la construcción dada en [3] resulta no ser funtorial, así como en [4] resulta ser, por construcción, una respuesta local y no global, y como en el trabajo en [5] se limita a una clase muy particular de álgebras de Leibniz.

Nuestro propósito es explorar las diversas generalizaciones que se han propuesto para el Tercer Teorema de Lie, con un enfoque particular en el desafiante problema del Coquecigrue. Por lo tanto, comenzamos proporcionando una breve introducción al Tercer Teorema de Lie, para luego adentrarnos en las soluciones conocidas del problema del Coquecigrue, así como en las posibles soluciones para otros casos y en el enfoque que debemos adoptar para resolverlo.

Este documento está estructurado en varios capítulos. En el segundo capítulo, se presenta una introducción a la teoría de categorías, la cual sirve como fundamento para cualquier lenguaje en el que deseemos expresarnos. Luego, en el tercer capítulo, exploramos el concepto de álgebras en un sentido amplio, que incluye un espacio vectorial con un producto interno compatible y distributivo sobre la suma de vectores. Aunque solemos pensar en álgebras con productos conmutativos, asociativos y unitarios, en esta investigación ampliamos estos conceptos para incluir álgebras que no necesariamente cumplen con estas propiedades, como las álgebras de Lie, las de Jordan y las alternativas. Además, discutimos las álgebras de Leibniz y una estructura novedosa conocida como Dialgebra.

El cuarto capítulo se centra en los grupos de Lie, especialmente en la introducción de la noción de variedad (manifold), el espacio tangente en la identidad, los campos vectoriales y la función exponencial, explorando cómo estos conceptos convergen en el Tercer Teorema de Lie. En el quinto y sexto capítulo, introducimos soluciones aproximadas al problema del Coquecigrue, incluyendo el concepto de digrupo de Lie, el rack y la estructura suave de un álgebra de Leibniz escindida. Finalmente, en el séptimo capítulo, presentamos algunas conclusiones y posibles caminos para continuar con el estudio de este interesante problema.

Capítulo 2

Categorías

En este capítulo introduciremos brevemente algunos conceptos de la teoría de categorías, con el objetivo de otorgar la generalidad implícita que conlleva el uso del lenguaje categórico. Desde su aparición, esta teoría ha sido adoptada por la mayoría de las ramas de las matemáticas, ya que proporciona elementos valiosos y ha ganado notoriedad precisamente por su presencia en casi todas ellas, especialmente en aquellas que emplean álgebra.

Definición 4. *Una categoría $\mathscr{C}$ son dos colecciones bien determinadas:*

1. *Una colección $Obj(\mathscr{C})$ de objetos de $\mathscr{C}$.*
2. *Un conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in Obj\mathscr{C}$. A los elementos de este conjunto lo llamaremos morfismos de A a B.*
3. *Una operación de composición entre morfismos*

$$\begin{aligned}(,) :&Hom_{\mathscr{C}}(B,C) \times Hom_{\mathscr{C}}(A,B) &&\to Hom_{\mathscr{C}}(A,C)\\ &(f,g) &&\mapsto fg\end{aligned}$$

   Además esta operación de composición es asociativa, es decir, $(f,(g,h)) = ((f,g),h)$. Por comodidad escribiremos $(f,g) = fg$ y la asociatividad, en caso de que exista la compuesta, se escribiría $f(gh) = (fg)h$.

4. *Para cada objeto A, un morfismo $1_A : A \to A$ (denominado el morfismo identidad de A) tal que*

$$1_A f = f \qquad g1_A = g$$

   para todos los morfismos $f \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$

Observación. *El conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ junto con la operación de "composición" de morfismos tiene estructura de monoide.*

Esta definición es sencilla, general y parece natural. A continuación, se presentan algunos ejemplos importantes que ilustran precisamente los atributos mencionados.

Ejemplo 1. *Los ejemplos a continuación resultan ser la presentación perfecta de la noción de categoría;*

- ***Set**. La categoría de conjuntos: los conjuntos son los objetos y las funciones entre conjuntos son los morfismos de esta categoría.*

- ***Gr***. *La categoría de grupos: los grupos son los objetos y los homomorfismos de grupos son los morfismos de esta categoría.*
- ***Ab***. *La categoría de grupos abelianos: los grupos abelianos son los objetos y los homomorfismos de grupos son los morfismos de esta categoría.*
- ***Rings*** *La categoria de los anillos asociativos con unidad, donde los objetos son los anillos asociativos con unidad y los homomorfismos de anillos son los morfismos.*
- *mod*Λ*, donde* Λ *es un anillo asociativo con unidad, la categoría de los* $\Lambda-$*módulos (a izquierda) finitamente generados, donde los objetos son los* $\Lambda-$*módulos (a izquierda) finitamente generados y los morfismos corresponden a los homomorfismos de* $\Lambda-$*módulos.*

  En particular si tomamos $\Lambda = k$*, con* k *un campo, la categoría mencionada anteriormente se conoce como la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.*
- ***Top*** *la categoría de espacios topológicos donde los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos.*

  Observación. *En la mayoría de estos ejemplos, se verifica fácilmente que forman una categoría, ya que corresponden a teorías ampliamente estudiadas en matemáticas. Por ello, solo las enunciamos aquí sin demostraciones. Además, la esencia de la definición recae en los morfismos y su ley de composición. En los ejemplos anteriores, los morfismos coincidían con funciones, donde la operación de composición es bastante natural. Solo quedaría comprobar (lo cual representa el caso interesante) que la operación de composición sea cerrada, es decir, que al componer morfismos en la categoría de grupos abelianos se obtenga nuevamente un morfismo entre grupos abelianos.*
- *Sea* G *un grupo, definimos la categoría* $\mathscr{C}$ *dada por* $Obj(\mathscr{C}) = \{G\}$*, es decir,* $\mathscr{C}$ *solo tiene un objeto y* $Hom_{\mathscr{C}}(G,G) = G$*, es decir, los objetos son los elementos del grupo* G*. Aquí la operación de "composición" entre los morfismos corresponde al producto del grupo. Como habiamos comentado en una observación* $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *tiene estructura de monoide gracias a las propiedades que debe cumplir la operación de "composición" asociadas a este conjunto en la categoría; en este caso como* G *es un grupo en particular es un monoide, por lo que* $\mathscr{C}$ *es una categoría.*

  Este ejemplo nos muestra que la noción de categoría es más general y extraña de lo que parece, además de que nos dice que la idea de la operación "composición" es más general pues los elementos de $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *no necesariamente son funciones (aunque para los casos que vamos a presentar sí lo son).*

Definición 5. *Sea* $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *diremos que:*

- f *es un* ***monomorfismo*** *si* $fg = fh$ *implica* $g = h$*, para morfismos* $g, h \in Hom_{\mathscr{C}}(X,A)$*.*
- f *es un* ***epimorfismo*** *si* $gf = hf$ *implica* $g = h$*, para morfismos* $g, h \in Hom_{\mathscr{C}}(B,Y)$*.*
- f *es un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo* $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ *tal que* $gf = 1_A$ *y* $fg = 1_B$*.*

Un **funtor** es, en términos generales, una aplicación entre categorías que preserva la estructura categórica. Esto significa que asigna objetos y morfismos de una categoría

a otra de manera que respeta tanto la composición de morfismos como los morfismos identidad. Existen dos tipos principales de funtores: covariantes y contravariantes.

Definición 6. *Un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una asignación $F_0 : Obj(\mathscr{C}) \to Obj(\mathscr{D})$ y para cada $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ $F_1 : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(F_0(A), F_0(B))$ tales que:*

1. $F_1(f : A \to B) = F_1(f) : F_0(A) \to F_0(B)$
2. $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$
3. $F_1(f \circ g) = F_1(f) \circ F_1(g)$

Definición 7. *Un funtor cotravariante $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una asignación $G_0 : Obj(\mathscr{C}) \to Obj(\mathscr{D})$ y para cada $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ $G_1 : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(G_0(B), G_0(A))$ tales que:*

1. $G_1(f : A \to B) = G_1(f) : G_0(B) \to G_0(A)$
2. $G_1(1_A) = 1_{G_0(A)}$
3. $G_1(f \circ g) = G_1(g) \circ G_1(f)$

Nota. *De ahora en adelante cuando nos refiramos a un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ omitiremos las funciones F_0 y F_1 y asumiremos que si estamos hablando de objetos $F(A) = F_0(A)$ y en caso de morfismos $F(f) = F_1(f)$.*

Ejemplo 2.

- *Dada una categoría $\mathscr{C}$, cuyos objetos son conjuntos con una estructura adicional (por ejemplo, **Gr**, **Ab**, **Ani**, **mod** Λ, **Top**), existe un funtor covariante de $\mathscr{C}$ a **Set**, denominado el funtor olvido. Este funtor asigna a cada objeto A en $\mathscr{C}$ su conjunto subyacente en **Set**, omitiendo la estructura adicional. Asimismo, a cada morfismo $f : A \to B$, le asigna el morfismo correspondiente en **Set**, considerando únicamente la función entre los dos conjuntos.*

- *Un caso más interesante corresponde al funtor contravariante **Dual** en álgebra lineal*

$$D : modk \to modk$$

el cuál a cada k-espacio vectorial de dimensión finita V le asigna su espacio dual $D(V) = Hom_k(V, k)$ y que a cada transformación $k-$lineal $f : V \to W$ le asigna su transformación dual $D(f) = D(W) \to D(V)$ definida por $D(f)(l) = l \circ f$, para todo $l \in D(W) = Hom_k(W, k)$.

Definición 8. *Una transformación natural de los funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, denotada $\phi : F \to G$, consiste en una colección de morfismos $\{\phi_X : F(X) \to G(X)\}$ para cada objeto X de $\mathscr{C}$, de manera que el siguiente diagrama conmuta para todo morfismo $f : A \to B$:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle \phi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_B} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(B) \end{array}$$

Esto implica que se cumple la siguiente relación $G(f) \circ \phi_A = \phi_B \circ F(f)$.

Definición 9. *Si $\phi : F \to G$ y $\psi : G \to H$ son transformaciones naturales, entonces su composición $\psi \circ \phi : F \to H$ también es una transformación natural, con $(\psi \circ \phi)_A =$*

$\psi_A \circ \phi_A$ para todo objeto A. Además, la composición de transformaciones naturales es asociativa.

El siguiente ejemplo ilustra la definición anterior, proporcionando un caso simple que permite entender cómo funcionan las transformaciones naturales entre funtores.

Ejemplo 3. *La colección $\{1_{G(A)} : G(A) \to G(A)\}$ define una transformación natural $1_G : G \to G$, tal que si $\phi : F \to G$, $\psi : G \to H$ son transformaciones naturales, entonces*

$$1_G\phi = \phi \qquad \psi 1_G = \psi$$

Definición 10. *Una transformación natural $\phi : F \to G$ se denomina isomorfismo natural si existe una transformación natural $\psi : G \to F$ tal que $\phi\psi = 1_G$ y $\psi\phi = 1_F$. Dos funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ se denominan isomorfos si existe un isomorfismo natural $\phi : F \to G$; en este caso, escribimos $F \simeq G$*

Definición 11. *Decimos que un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una **equivalencia de categorias** si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$ y $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$*

A continuación, presentaremos un ejemplo bien conocido y fácil de entender sobre la equivalencia entre dos categorías. En dicho ejemplo, mostramos una equivalencia natural que existe entre la categoría de grafos (**Graph**) y la categoría de diagramas de grafos (**2Graph**). La categoría de grafos incluye objetos que llamaremos grafos, representados por conjuntos de vértices y aristas, y morfismos que son funciones que preservan la estructura de estos grafos. Por otro lado, la categoría de diagramas de grafos incluye objetos que serán llamados diagramas de grafos representados por puntos en el plano (nodos) y rectas o curvas simples que los unen. Un ejemplo de un diagrama de un grafo se muestra en la Figura 2.1.

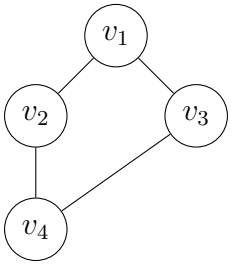


Figura 2.1: Ejemplo de un diagrama de un grafo

Ejemplo 4. *Consideremos las siguientes dos categorías:*

- *La categoría $\mathscr{C}$, denotada como* **Graph**, *tiene:*
  - *Objetos: Grafos, que consisten en un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas.*
  - *Morfismos: Funciones entre los conjuntos de vértices que preservan la estructura de aristas. Es decir, un morfismo $f : G_1 \to G_2$ es una función $f : V_1 \to V_2$ tal que, si $(u, v) \in E_1$, entonces $(f(u), f(v)) \in E_2$.*
- *La categoría $\mathscr{D}$, denotada como* **2Graph**, *tiene:*
  - *Objetos: Diagramas de grafos en el plano.*

- *Morfismos: Un morfismo entre dos diagramas de grafos es un par de funciones que respetan las funciones de los diagramas.*

Consideremos el funtor F : **Graph** $\to$ **2Graph**, *donde para un grafo* G, $F(G)$ *es el diagrama cuyos nodos están en correspondencia biunívoca con los vértices de* G, *y las aristas de* G *se representan como curvas simples en* $F(G)$ *que conectan los respectivos nodos. Para un morfismo* $f : G_1 \to G_2$ *en la categoría de grafos, el funtor* F *induce un morfismo natural* $F(f) : F(G_1) \to F(G_2)$, *que se define de tal manera que los vértices de* G_1 *se mapean a los vértices de* G_2 *de acuerdo con* f, *preservando la estructura de las aristas a través de las curvas simples en el diagrama. De manera similar, definimos el funtor inverso* G : **2Graph** $\to$ **Graph**, *donde para un diagrama* D, $G(D) = (V, E)$, V *es el conjunto de nodos de* D *y* E *es el conjunto de todos los conjuntos de la forma* $\{u, v\}$ *donde* u *y* v *son los extemos de las retas o curcvas simples en* D. *Para un morfismo* f *entre diagramas, simplemente tomamos el morfismo natural* $G(f)$ *entre los respectivos grafos inducido por* f.

Ambos funtores son equivalentes, ya que preservan la estructura de los objetos y morfismos, proporcionando así una equivalencia entre **Graph** *y* **2Graph**.

Introduciremos un teorema muy importante que nos facilita demostrar que dos categorías son equivalentes, para ello introduciremos las siguientes definiciones:

Definición 12. *Sea* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un funtor*

- F *se denomina* ***fiel*** *si para todo* $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ *el morfismo*

$$F_{A,B} : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

  que a cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ *le asocia le morfismo* $F(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$, *es un monomorfismo.*

- F *se denomina* ***pleno*** *si el morfismo* $F_{A,B}$ *es un epimorfismo para todos* $A, B \in Obj(\mathscr{C})$.

- *El funtor* F *se denomina* ***esencialmente sobreyectivo*** *si para cada objeto* $M \in \mathscr{D}$ *existe un objeto* $B \in \mathscr{C}$ *tal que* $F(B) \simeq M$

Teorema 2. *Un funtor covariante* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es una equivalencia de categorias si y solo si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.*

Demostración. Supongamos que el funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia. Entonces, existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, junto con isomorfismos naturales $\phi : GF \to 1_{\mathscr{C}}$ y $\psi : FG \to 1_{\mathscr{D}}$. Para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{C}$, tenemos un isomorfismo

$$\phi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(GF(A), GF(B))$$

dado por $\phi_{A,B}(f) = \phi_B^{-1} \circ f \circ \phi_A$. Este isomorfismo tiene una inversa bien definida. Observamos que $\phi_{A,B} = G_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B}$, lo que nos permite concluir que $F_{A,B}$ es un monomorfismo. Utilizando ahora el isomorfismo ψ, llegamos a la conclusión de que $F_{A,B}$ también es un epimorfismo. Por lo tanto, podemos afirmar que F es fiel y pleno. Sea ahora D un objeto en $\mathscr{D}$. Entonces, $G(D)$ es un objeto en $\mathscr{C}$ y tenemos que $F(G(D)) \simeq D$, lo que implica que F es también esencialmente sobreyectivo.

Recíprocamente, como F es un funtor pleno, entonces para cada morfismo $h : F(A) \to F(B)$ en $\mathscr{D}$, existe un morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ tal que $F(f) = h$. Por otro lado, dado que F es esencialmente sobreyectivo, para cada objeto D en $\mathscr{D}$, existe un objeto A en $\mathscr{C}$ tal que $F(A) \cong D$. Ahora, definamos el funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ de la siguiente manera: para cada objeto D en $\mathscr{D}$, seleccionamos un objeto A_D en $\mathscr{C}$ tal que $F(A_D) \cong D$. Para cada morfismo $g : D_1 \to D_2$ en $\mathscr{D}$, dado que F es pleno, existe un morfismo $f : A_{D_1} \to A_{D_2}$ en $\mathscr{C}$ tal que $F(f) = g$. Entonces, definimos $G(g) = f$.

Debemos probar que G es un funtor. En efecto, para cada objeto D en $\mathscr{D}$, tenemos: $G(1_D) = 1_{A_D}$, donde 1_D es la identidad en $\mathscr{D}$ y 1_{A_D} es la identidad en $\mathscr{C}$ correspondiente a A_D. Esto se cumple porque F es pleno. Por otro lado, para morfismos $g_1 : D_1 \to D_2$ y $g_2 : D_2 \to D_3$ en $\mathscr{D}$, debemos mostrar que: $G(g_2 \circ g_1) = G(g_2) \circ G(g_1)$. Esto se cumple ya que, por la definición de G y la plenitud de F, se tiene que $F(G(g_2 \circ g_1)) = g_2 \circ g_1$. Por lo tanto, hay un morfismo en $\mathscr{C}$ que corresponde a esta composición.

Ahora necesitamos establecer isomorfismos naturales: Primero, consideramos FG. Para cada objeto D en $\mathscr{D}$, $F(G(D)) \cong D$. Esto se debe a que $G(D)$ se eligió tal que $F(A_D) \cong D$. Ahora, para GF, para cada objeto A en $\mathscr{C}$, $G(F(A)) \cong A$. □

Capítulo 3

Álgebras

El concepto de álgebra se menciona con frecuencia desde la adolescencia, pero lo curioso es que su estudio implícito comienza desde la primera infancia, y con el tiempo nos acercamos progresivamente a su verdadera esencia. A pesar de ello, no sería sorprendente que pocas personas a nuestro alrededor pudieran ofrecer una definición formal del álgebra, aunque la mayoría tiene una noción intuitiva del concepto.

En este capítulo, se abordarán tipos de álgebras menos comunes, pero con aplicaciones significativas: las álgebras no necesariamente asociativas. Estas estructuras relajan algunas de las condiciones clásicas requeridas en la definición de un álgebra, lo que permite extender su campo de estudio y sus aplicaciones prácticas.

Un anillo R será entendido como un grupo abeliano aditivo en la cual existe una multiplicación, que satisface:

$$(xy)z = x(yz) \quad \textit{para todo } x, y, z \textit{ en } R \tag{1}$$

$$(x+y)z = xz + yz, \quad z(x+y) = zx + zy \quad \textit{para todo } x, y, z \textit{ en } R \tag{2}$$

Mientras un álgebra A sobre un campo K es un anillo, el cual es un espacio vectorial sobre K con

$$\lambda * (a \cdot b) = (\lambda * a) \cdot b = a \cdot (\lambda * b) \quad \textit{para todo } \lambda \in K, \quad x, y \in A \tag{3}$$

Esto quiere decir que la operación de producto por escalar es compatible con la operación de producto del anillo. No obstante, en el transcurso de esta tesis, la propiedad de asociatividad (1) no será cierta en general. Por esta razón, utilizaremos los términos ”anillo” y "álgebra"para referirnos a sistemas más generales que los habituales.

Definición 13. *Se definirá un anillo R como un grupo abeliano aditivo dotado con una operación, llamada multiplicación, la cual satisface la identidad (2).*

Definición 14. *Se define un álgebra A sobre un cuerpo K como un espacio vectorial sobre K con una mutiplicación que cumplen las identidades (2) y (3).*

En la literatura general, un álgebra (tal como se abordará aquí) será normalmente denominada *álgebra no necesariamente asociativa*, con la intención de enfatizar que la propiedad de asociatividad (1) no se exige. El uso de este término (álgebra) no implicará la connotación de que (1) se satisface, dado que no se asumirá que la asociatividad se tiene. Una

$K-$álgebra A se dice finito dimensional si A visto como espacio vectorial tiene dimensión finita.

Definición 15. *Sea K un campo*

- *Si A y B son $K-$álgebras, entonces un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ es llamado un **homomorfismo de K-álgebras** si f es un $K-$transformación lineal.*
- *Dos K-álgebras A y B se dicen **isomorfas** si existe un homomorfismo biyectivo de $K-$álgebras $f : A \to B$. En ese caso escribiremos $A \cong B$*
- *Un subespacio vectorial B de una $K-$álgebra A es llamada una $K-$subálgebra (o simplemente una subálgebra) de A si $bb_1 \in B$ para cualesquiera elementos $b, b_1 \in B$.*
- *Un subespacio vectorial I de una $K-$álgebra A es un ideal a izquierda de A (respectivamente, ideal a derecha de A) si $ax \in I$ (respectivamente, $xa \in I$) para cualequiera elementos $x \in I$ y $a \in A$. Un ideal a ambos lados de A (o simplemente un **ideal** de A) es un subespacio vectorial I de A el cual es un ideal a izquierda y a derecha.*
- *Dada un álgebra A sobre un campo K y un ideal I, se define el álgebra cociente A/I mediante la relación de equivalencia:*

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a - b \in I \quad Para\ a, b \in A$$

Y las operaciones del álgebra cociente corresponden a:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$
$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

para $a, b \in \mathfrak{A}$.

Se puede probar que esta relación esta bien definida y así A/I es una $K-$álgebra.

Ejemplo 5.

- *$\mathbb{R}$ resulta ser precisamente un $\mathbb{R}-$espacio vectorial donde el producto escalar coincide precisamente con el producto usual que hay en $\mathbb{R}$. Además, se define el producto entre elementos de $\mathbb{R}$ precisamente como el producto usual que existe en los números reales. Este ejemplo nos dice que llevamos trabajando con álgebras de manera intuitiva más tiempo del que se podría imaginar.*
- *Si K es un campo, entonces K es un álgebra precisamente sobre K.*
- *Denotamos como $M_n(K)$ al espacio de matrices cuadradas $n \times n$, donde $A \in M_n(K)$ si A es de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ii} \in K$.

Las operaciones de suma, producto escalar y producto de matrices se definen, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1}+ & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

estas operaciones se ven en un curso estándar de álgebra lineal. En esta tésis no se realizará una prueba de que estas operaciones hacen a $M_n(K)$ una $K-$álgebra, aunque si se remarca que está álgebra resulta ser el corazón del álgebra lineal y tendrá una conexión directa con todo lo que está incluido en este documento.

Además de las álgebras asociativas, existen ejemplos bien conocidos de álgebras, las cuales estudiaremos a través de esta tésis, como lo son:

- **Álgebras de Lie:** $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie si $\mathfrak{L}$ es un $K-$espacio vectorial junto con una función bilineal

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$$

que además cumple que es anticonmutativa y cumple la identidad de Jacobi, es decir:

$$\begin{aligned} &[x,x] = 0 && \forall x \in \mathfrak{L} \\ &[x,[y,z]] + [y,[z,x] + [z,[x,y]] = 0 && \forall x,y,z \in \mathfrak{L} \end{aligned}$$

Nota. *La anticonmutatividad, en general, se escribe como $x^2 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{L}$. Esto implica $xy = -yx$, para todo $x, y \in \mathfrak{L}$.*

Dado que:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2, \quad &\textit{pero por hipótesis } x^2 = 0 \textit{ para todo } x \in \mathfrak{L} \\ 0 = 0 + xy + yx + 0 \quad &\textit{lo cual implica} \quad xy = -yx \end{aligned}$$

De igual forma, si trabajamos en un campo de característica distinta de dos tal que $xy = -yx$ para todos $x, y \in \mathfrak{L}$, en particular con $x = y$ tenemos:

$$x^2 = -x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0$$

- **Álgebras de Jordan (conmutativas):** Un *álgebra de Jordan (conmutativa)* $\mathfrak{J}$ sobre K, es un álgebra cuya multiplicación cumple:
  - *Conmutatividad:* $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathfrak{J}$
  - *Identidad de Jordan:* $(xy)x^2 = x(yx^2)$, para todo $x, y \in \mathfrak{J}$
- **Álgebras alternativas:** Un *álgebra alternativa* $\mathfrak{A}$ sobre K es un álgebra donde la multiplicación cumple las siguientes identidades:
  - $x^2y = x(xy)$, para todo $x, y \in \mathfrak{U}$.
  - $yx^2 = (yx)x$, para todo $x, y \in \mathfrak{U}$

  Las cuales son conocidas respectivamente como *las leyes alternativas a izquierda y a derecha.*

Se introducirá una manera de asociar a un álgebra asociativa $\mathfrak{A}$, un álgebra de Lie, la cual se denotará $\mathfrak{A}^-$. Para ello considere el *conmutador*

$$[x, y] = xy - yx \tag{4}$$

Proposición 3. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra asociativa. Considere $\mathfrak{A}^-$ el cual coincide como espacio vectorial sobre K con $\mathfrak{A}$, pero la multiplicación esta definida por (4). Entonces $\mathfrak{A}^-$ es una álgebra de Lie.*

Demostración. Note primero que el *conmutador* cumple (2). Sean $x, y, x \in \mathfrak{U}^-$:

$$\begin{aligned}
[x+y, z] = (x+y)z - z(x+y) &= xz + yz - zx - zy = xz - zx + yz - zy \\
&= xz - zx + yz - zy = [x, z] + [y, z] \\
[z, x+y] = z(x+y) - (x+y)z &= zx + zy - xz - yz = zx - xz + zy - yz \\
&= zx - xz + zy - yz = [z, x] + [z, y]
\end{aligned}$$

Falta demostrar (3).

$$\begin{aligned}
\alpha[x, y] = \alpha(xy - yx) &= \alpha(xy) - \alpha(yx) \\
&= (\alpha x)y - y(\alpha x) = [\alpha x, y] \\
\alpha[x, y] = \alpha(xy - yx) &= \alpha(xy) - \alpha(yx) \\
&= x(\alpha y) - (\alpha y)x = [x, \alpha y]
\end{aligned}$$

Observe que se uso el hecho de que (2) y (3) se cumplía en $\mathfrak{A}$ con la multiplicación original. Con lo que ya se ha demostrado que $\mathfrak{U}^-$ es un álgebra.

Note que la *anticonmutatividad* es inmediata dado que $[x, x] = xx - xx = 0$.

Las cuentas para ver que se cumple la *identidad de Jacobi* son

$$\begin{aligned}
&[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = [xy - yx, z] + [yz - zy, x] + [zx - xz, y] \\
&= (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x - x(yz - zy) + (zx - xz)y - y(zx - xz) \\
&= (xy)z - (yx)z - z(xy) + z(yx) + (yz)x - (zy)x - x(yz) + x(zy) + \\
&(zx)y - (xz)y - y(zx) + y(xz) \\
&= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xyz + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde se aplicó la propiedad de la asociatividad de $\mathfrak{A}$. Por lo tanto, $\mathfrak{A}^-$ es un álgebra de Lie. □

Ejemplo 6. *Si V es un espacio vectorial entonces el espacio de endomorfismos lineales de V, $End(V)$, es un álgebra asociativa y por lo tanto un álgebra de Lie (dada por el corchete).*

Definición 16. *Si A es un álgebra asociativa entonces una derivación de A es una función lineal $D : A \to A$ tal que*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Denotamos por $Der(A)$ el espacio vectorial de todas las derivaciones de A.

Proposición 4. *$Der(A) \subset End(A)$ es un subalgebra de Lie.*

Demostración. Considere $D, D' \in Der(A)$, veamos que $[D, D'] = DD' - D'D$ es tambien una derivación. Para ello, note que:

$$\begin{aligned}
(DD' - D'D)(ab) &= D(D'(ab)) - D'(D(ab)) \\
&= D(D'(a)b + aD'(b)) - D'(D(a)b + aD(b)) \\
&= D(D'(a)b) + D(aD'(b)) - D'(D(a)b) - D'(aD(b)) \\
&= D(D'(a))b + \cancel{D'(a)D(b)} + \cancel{D(a)D'(b)} + aD(D'(b)) \\
&- D'(D(a))b - \cancel{D(a)D'(b)} - \cancel{D'(a)D(b)} - aD(D'(b)) \\
&= D(D'(a))b - D'(D(a))b + aD(D'(b)) - aD(D'(b)) \\
&= (D(D'(a)) - D'(D(a)))b + a(D(D'(b)) - D(D'(b))) \\
&= [D, D'](a)b + a[D, D'](b).
\end{aligned}$$

□

Ahora se introducirá un nuevo producto, conocido como el producto simétrico:

$$x * y = xy + yx \tag{5}$$

Fíjese que este producto produce una nueva álgebra cuyo producto es conmutativo. Veamos que cumplen las propiedades (2) y (3):

$$(x + y) * z = (x + y)z + z(x + y) = xz + yz + zx + zy = xz + zx + yz + zy = x * z + y * z$$
$$x * (y + z) = x(y + z) + (y + z)x = xy + xz + yx + zx = xy + yx + xz + zx = x * y + x * z$$

Así el producto simétrico cumple la propiedad (2).

$$\alpha(x * y) = \alpha(xy + yx) = \alpha(xy) + \alpha(yx) = (\alpha x)y + y(\alpha x) = (\alpha x) * y$$
$$\alpha(x * y) = \alpha(xy + yx) = \alpha(xy) + \alpha(yx) = x(\alpha y) + (\alpha y)x = x * (\alpha y)$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad (3).

Y, $x * y = xy + yx = yx + xy = y * x$, así se obtiene un álgebra conmutativa.

Si se trabaja con campos de característica distinta de 2, existe cierta ventaja en escribir

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) \tag{6}$$

Para obtener un álgebra $\mathfrak{A}^+$ de un álgebra asociativa $\mathfrak{U}$, que coincide con $\mathfrak{A}$ como espacios vectoriales, cuyo producto esta definido por (6) .

Proposición 5. *Las potencias de cualquier elemento $x \in \mathfrak{A}^+$ coincide con su potencia en $\mathfrak{U}$*

Demostración. Se probará por inducción sobre n.

- $n = 2$: $x \cdot x = \frac{1}{2}(xx + xx) = x^2$
- Suponga que se cumple para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, Se debe demostrar que se tiene para n

$$\begin{aligned} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad (n \text{ factores}) &= (x \cdot \ldots \cdot x) \cdot (x \cdot \ldots \cdot x) \\ &= x^i \cdot x^{n-i} \\ &= \frac{1}{2}(x^i x^{n-i} + x^{n-i} x^i) \\ &= x^n \end{aligned}$$

□

Si $\mathfrak{A}$ es asociativa, entonces la multiplicación en $\mathfrak{U}^+$ no solo es conmutativa, sino que tambien satisface la identidad de Jordan. Sean $x, y \in \mathfrak{U}^+$:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot (x \cdot x) &= \frac{1}{2}(xy + yx) \cdot (x^2) \\ &= \frac{1}{4}((xy)x^2 + (yx)x^2 + x^2(xy) + x^2(yx)) \\ x \cdot [y \cdot (x \cdot x)] &= x \cdot [y \cdot x^2] \\ &= x \cdot \left(\frac{1}{2}(yx^2 + x^2 y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x \cdot (yx^2 + x^2 y)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x(yx^2) + x(x^2 y)) + (yx^2)x + (x^2 y)x\right) \\ &= \frac{1}{4}((xy)x^2 + (yx)x^2 + x^2(xy) + x^2(yx)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x \cdot y) \cdot (x \cdot x) = x \cdot [y \cdot (x \cdot x)]$.

Así, si $\mathfrak{A}$ es un álgebra asociativa, entonces $\mathfrak{A}^+$ es un álgebra de Jordan. Un álgebra $\mathfrak{J}$ sobre F es llamada un *álgebra especial de Jordan* si $\mathfrak{J}$ es isomorfa a una sub-álgebra de $\mathfrak{A}^+$ para alguna álgebra asociativa $\mathfrak{U}$.

Sea A una $K-$álgebra finito dimensional. Sea $a_1, \ldots, a_n$ del $K-$espacio vectorial A. Entonces existen elementos $\alpha_{ijk} \in K, i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$a_j a_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} a_i,$$

para todo $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Los elementos α_{ijk} son llamados **las constantes de estructura** de A con respecto a la base $a_1, \ldots, a_n$.

Lema 6. *Considere A una $K-$álgebra finito dimensional asociativa. Entonces, para cualesquiera elementos $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple que:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}\alpha_{hil} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}\alpha_{hji} \tag{7}$$

Demostración. Para $j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}(a_j a_k)a_l &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}a_i\right) a_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}(a_i a_l) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hil}a_h\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{ijk}\alpha_{hil}\right) a_h \\ &= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk}\alpha_{hil}\right) a_h\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}a_j(a_k a_l) &= a_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}(a_j a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl} \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hji}a_h\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_{ikl}\alpha_{hji}\right) a_h \\ &= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ikl}\alpha_{hji}\right) a_h\end{aligned}$$

Por la asociatividad del producto del anillo y como la escritura en términos de la base es única, obtenemos el resultado deseado.

□

Las constantes de estructura caracterizan completamente las álgebras asociativas y son fundamentales para abordar el problema de clasificación de estas. Por ejemplo, si $\mathfrak{A}$ es un álgebra asociativa de dimensión 1 y consideramos $\beta_{\mathfrak{A}} = \{v\}$ como una base para $\mathfrak{A}$, entonces se cumple que $v \cdot v = \alpha v$. Así, si $\alpha = 0$, el álgebra $\mathfrak{A}$ es isomorfa al álgebra trivial. En cambio, si $\alpha \neq 0$, el álgebra es isomorfa al campo K con el producto usual.

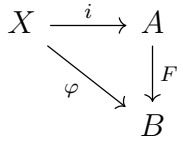
Definición 17. *Sea A una $K-$álgebra finito dimensional. Entendemos por una* ***representación*** *de A sobre K a un homomorfismos de $K-$álgebras $\Phi : A \to M_n(K)$, para algún $n \geq 1$. El entero n es llamado la dimensión de la representación. Diremos que dos representaciones $\Phi : A \to M_n(K)$ y $\Psi : A \to M_n(K)$ de A sobre K (de la misma dimensión) son* ***equivalentes*** *si existe una matriz $C \in Gl_n(K)$ tal que $\Psi(a) = C\Phi(a)C^{-1}$ para todo $a \in A$*

Sea K un campo y X un conjunto no vacío. El objetivo es construir una K-álgebra $U(X)$ generada por X, de modo que los elementos de dicha álgebra sean combinaciones lineales de productos de elementos de X. Es decir, A consiste en todas las expresiones de la forma:

$$a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n,$$

donde $a_i \in K$ y w_i es una palabra finita sobre X. La multiplicación en $U(X)$ se define concatenando las palabras y extendiendo linealmente. Esta estructura es conocida como **álgebra libre**, cuya definición formal se presenta a continuación.

Definición 18. *Decimos que A es un **álgebra libre sobre** X si existe una función inyectiva $i : X \to A$ y cumple que para toda función $\varphi : X \to B$, donde B es una K-álgebra, existe un único homomorfismo de K-álgebras $F : A \to B$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*



Capítulo 4

Manifolds

En este capítulo daremos un breve repaso de los conceptos de variedades, que por costumbre llamaremos *manifolds*, espacios tangentes y fibrados vectoriales, fundamentales para comprender el tercer teorema de Lie y que además proporcionan las herramientas necesarias para abordar el *problema del coquecigrue*, una generalización del tercer teorema de Lie, vease Capítulo 6. Exploraremos cómo las estructuras geométricas de las variedades, junto con los fibrados vectoriales, permiten desarrollar una teoría sólida para tratar estos problemas avanzados en geometría diferencial y teoría de Lie.

4.1. Manifolds: Definición y ejemplos

En esta sección, haremos una exploración corta y con un enfoque clásico sobre el estudio de la geometría, donde integramos herramientas del cálculo. Las variedades, o *manifolds*, introducidas por Georg Friedrich Bernhard Riemann, son espacios que presentan una estructura local isomorfa al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Esta característica fundamental permite que las construcciones básicas del cálculo se apliquen de manera efectiva en el contexto de estas variedades.

Definición 19. *Un manifold topológico de dimensión n es un espacio topólogico M Hausdorff y segundo contable, tal que para cada $x \in M$, existe una vecindad $x \in U \subset M$, que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$*

Ejemplos clásicos de un *manifold topológico* corresponden a:

1. $M = \mathbb{R}^n$
2. $U \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$
3. La esfera de dimensión n.

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

es un manifold de dimensión n. Para $i = 0, \ldots, n$, consideremos los abiertos:

$$U_i^+ = \{v \in S^n : x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{v \in S^n : x_i < 0\}$$

Entonces las funciones $\psi_i^+ : U_i^+ \to \mathbb{R}^n$ y $\psi_i^- : U_i^- \to \mathbb{R}^n$, dadas por:

$$\psi_i^+(x_0, \ldots, x_n) := (x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n)$$
$$\psi_i^-(x_0, \ldots, x_n) := (x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n)$$

Son homeomorfismos a su imagen, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Los manifolds topológicos son espacios localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, pero esta estructura resulta insuficiente para realizar cálculos en dichos espacios. Para superar esta limitación, es necesario introducir el concepto de manifold suave, lo que nos permitirá utilizar diversas herramientas del cálculo diferencial de manera natural.

Definición 20. *Un atlas suave para un manifold topológico M es una familia*

$$\{U_\alpha, \varphi, V_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

donde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento de M, cada V_α es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ es un homeomorfismo tal que las funciones, que se llaman de transición,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

son difeomorfismos. Vease Figura 4.1.

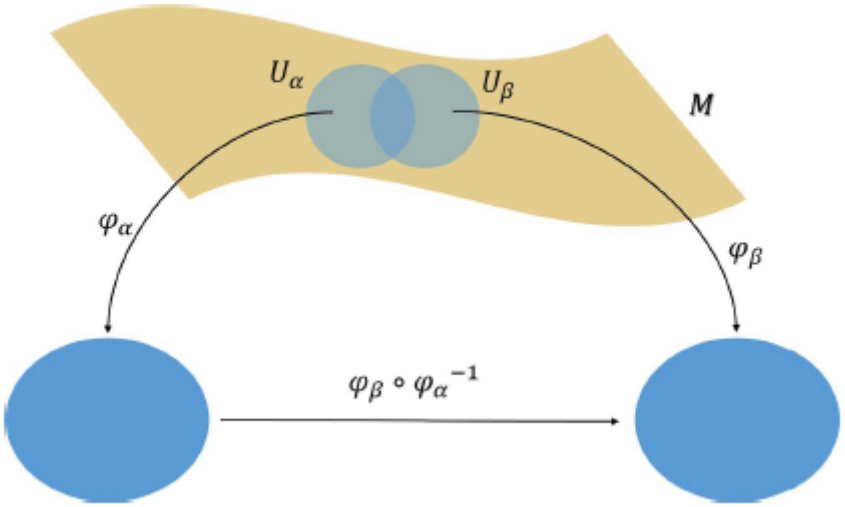


Figura 4.1: Descripción gráfica de un atlas

La noción de atlas nos permite realizar cálculo diferencial en estructuras distintas a $\mathbb{R}^n$. A cada tripleta $(U_\alpha, \varphi, V_\alpha)$ se le llamará *sistema coordenado local*. Note que dos atlas distintos no necesariamente inducen la misma estructura diferencial en un manifold, por eso introducimos las siguientes definiciones.

Definición 21. *Sea M un manifold topológico, dos atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ y $\{U_\beta, \phi_\beta, V_\beta\}_{\beta \in \mathbb{B}}$ son compatibles si la unión de ellos es un atlas.*

Definición 22. *Una atlas se dice maximal si no existe un atlas más grande que lo contenga*

Definición 23. *Un manifold suave (diferenciable) es un manifold topológico junto con un atlas maximal.*

Se resalta el hecho de que todo atlas está contenido en un único atlas maximal. En nuestra definición, un manifold suave requiere un único atlas maximal; no obstante, por el comentario anterior, solo se requiere exhibir un atlas, dado que la estructura diferencial del manifold viene dada por el único atlas maximal que contiene el atlas inicial.

En general, probar directamente que un espacio topológico es un manifold suave resulta complicado, ya que requiere mostrar un atlas y probar que las funciones de transición son difeomorfismos. Enunciaremos teoremas clásicos que nos permitirán demostrar de manera indirecta que algunos espacios topológicos poseen estructura de manifold suave, estas pruebas pueden consultarse en [15] capítulo 1 .

Teorema 7. *(Teorema de la función inversa). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave y $p \in U$ un punto tal que $Df(p)$ es no singular. Entonces existe un abierto $W \subset U$ que contiene a p tal que $f(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y*

$$f|_W : W \to f(W)$$

es un difeomorfismo

Definición 24. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Un punto $p \in U$ se llama un punto crítico de f sí $Df(p)$ es singular, es decir, no tiene rango maximal. Un punto que no es singular se llama punto regular. Un punto $q \in \mathbb{R}^n$ se llama un valor regular si todos los puntos en $f^{-1}(q)$ son puntos regulares.*

Teorema 8. *(Teorema del valor regular) Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Si q es un valor regular de f entonces $f^{-1}(q)$ es un manifold de dimensión m.*

Es claro que todo subconjunto abierto U de un manifold M de dimensión n es también un manifold de dimensión n. Esto se debe al hecho de que si (X, φ, V) es un sistema coordenado local para M, entonces $(X \cap U, \varphi\,|_{X\cap U}, V \cap \varphi(U))$ es un sistema coordenado local para U.

Ejemplo 7. *Consideremos el espacio topológico:*

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{\psi \in End(\mathbb{R}^n) : \phi \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

Este conjunto es un subespacio del espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes reales y por tanto es un espacio topológico. Veamos que $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto del espacio de matrices, y por lo tanto un manifold. Consideremos la función $det : End(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi \mapsto det(\psi)$, que a cada isomorfismo lineal le asocia su determinante. Esta función es un polinomio y por lo tanto es suave. Por otro lado:

$$GL(n, \mathbb{R}^n) = f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

concluyendo que $GL(n, \mathbb{R})$ es un manifold de dimensión n^2.

Observe que el manifold $GL(n, \mathbb{R})$ tiene estructura de grupo con respecto a la multiplicación de matrices. Este resulta ser precisamente un ejemplo de un grupo de Lie.

Definición 25. *Sean M y N manifolds. Una función continua $f : M \to N$ es diferenciable (o suave) si para todo punto $p \in M$ y coordenadas locales, $\varphi : p \in U \to V \subset \mathbb{R}^m$, $\psi : f(p) \in W \to Z \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que la función: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable.*

Observación. *La identidad es siempre una función suave, y la composición de funciones suaves es suave. De esta manera, obtenemos una categoría cuyos objetos son los manifolds y cuyos morfismos son las funciones suaves.*

Definición 26. *Un difeomorfismo es un isomorfismo en la categoría de los manifolds suaves, es decir, una función suave $f : M \to N$ que es biyectiva y tiene inversa suave.*

Definición 27. *El espacio de funciones suaves de M a $\mathbb{R}$ se denota por $C^\infty(M)$. Este es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:*

1. $\lambda f(p) = \lambda(f(p))$
2. $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$

además, es un anillo conmutativo cuyo producto está dado por:

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \tag{1}$$

En conclusión, $C^\infty(M)$ tiene estructura de un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$.

4.2. Espacio tangente y fibrados vectoriales

Es bien sabido que los espacios tangentes en una variedad diferenciable describen las posibles direcciones de movimiento en cada punto. Un fibrado vectorial, como el fibrado tangente, asocia a cada punto un espacio vectorial que varía suavemente, formando una estructura global. Estos conceptos son esenciales para entender la geometría local y las propiedades topológicas de las variedades, por lo que en este capítulo los estudiaremos brevemente.

4.2.1. Espacio tangente

En esta sección M denotará un manifold suave. La siguiente teoría puede encontrarse en [15] y en [12]

Definición 28. *Sea $p \in M$ un punto de M. Una curva que pasa por p, es una función suave $\gamma : I \to M$ (I un intervalo abierto que contiene al cero), tal que $\gamma(0) = p$.*

Existe una relación de equivalencia natural en el conjunto de las curvas que pasan por p.

Definición 29. *Decimos que dos curvas γ y β son equivalentes si y solo si*

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$$

Para cualquier coordenada $\varphi : p \in U \to V$

Definición 30. *El espacio tangente en el punto $p \in M$, que denotaremos por T_pM, es el conjunto de las clases de equivalencia de curvas que pasan por el punto p.*

Teorema 9. *T_pM tiene la estructura de espacio vectorial con dimensión $m = dim(M)$*

Prueba. Fijemos coordenadas $\varphi : U \to V$. Esta elección determina una biyección:

$$\begin{aligned} F_\varphi : & T_pM \to \mathbb{R}^m \\ & \gamma \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

Esta función es biyectiva porque tiene inversa dada por:

$$\begin{aligned}(F_\varphi)^{-1} :&\mathbb{R}^m \to T_pM\\ &v \mapsto (F_\varphi)^{-1}(v) = [\gamma]\end{aligned}$$

Donde:

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv + \varphi(p))$$

Esta biyección dota a T_pM de estructura de espacio vectorial. Hace falta ver que esta estructura no depende de la elección de coordenadas. Para esto es suficiente probar que si $\phi : U \to V$ es otra elección de coordenadas entonces $F_\varphi \circ F_\phi^{-1}$ es un isomorfismo lineal. En efecto, puesto que

$$F_\varphi \circ F_\phi^{-1}(v) = (\varphi \circ F_{\phi^{-1}}(v))'|_{t=0} = (\varphi \circ \phi^{-1}(tv + \phi(p)))'|_{t=0} = D(\varphi \circ \phi^{-1})(v).$$

Concluimos que $F_\varphi \circ F_\phi^{-1}$ es un isomorfismo lineal que está definido por la multiplicación de matrices $D(\varphi \circ \phi^{-1})(v)$.

■

Definición 31. *Si $f : M \to N$ es una función suave y $p \in M$, entonces la derivada de f en p, denotada Df_p ó $Df(p)$, es la función lineal*

$$\begin{aligned}Df_p : T_pM &\to T_{f(p)}N\\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma]\end{aligned}$$

Proposición 10. *La derivada de f esta bien definida y es una transformación lineal.*

Prueba. Sean α y β curvas en T_pM tales que $[\alpha] = [\beta]$, es decir, dada una coordenada $\phi : p \in U \to V \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$

Sea $\psi : f(p) \in W \to Z \subset \mathbb{R}^m$ una coordenada en N, observe que

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)'(0) &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})' \circ (\phi \circ \alpha)(0) \cdot (\phi \circ \alpha)'(0)\\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})' \circ (\phi(\alpha(0))) \cdot (\phi \circ \beta)'(0)\\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})' \circ (\phi(\beta(0))) \cdot (\phi \circ \beta)'(0)\\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \beta)'(0)\\ &= (\psi \circ f \circ \beta)'(0)\end{aligned}$$

De lo anterior sabemos que $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$, por lo tanto, la función Df_p está bien definida.

Para completar la prueba de que la función diferencial Df_p es lineal, demostraremos que:

$$Df_p([\alpha] + c[\beta]) = Df_p([\alpha]) + cDf_p([\beta]),$$

donde $[\alpha]$ y $[\beta]$ son dos vectores tangentes en T_pM representados por clases de curvas equivalentes, y $c \in \mathbb{R}$ es un escalar. En efecto, sean $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ curvas en M tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, y sea $\phi : p \in U \to V \subset \mathbb{R}^n$ una carta local alrededor de p en M, y $\psi : f(p) \in W \to Z \subset \mathbb{R}^m$ una carta local alrededor de $f(p)$ en N. Dado que los vectores tangentes están definidos por las derivadas de las curvas en las cartas, tenemos:

$$[\alpha] + c[\beta] = [\gamma(t)]\,,$$

donde $\gamma(t)$ es la curva $\gamma(t) = \alpha(t) + c\beta(t)$. Ahora, calculamos el diferencial aplicado a $\gamma(t)$, que por definición es $Df_p([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. En las cartas locales, esto se traduce en:

$$(\psi \circ f \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ f \circ (\alpha + c\beta))'(0) = (\psi \circ f)' \circ \phi(p) \cdot (\phi \circ (\alpha + c\beta))'(0).$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$(\phi \circ (\alpha + c\beta))'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0) + c(\phi \circ \beta)'(0).$$

Por lo tanto, el cálculo para $Df_p([\alpha] + c[\beta])$ es:

$$Df_p([\alpha] + c[\beta]) = (\psi \circ f)' \circ \phi(p) \cdot [(\phi \circ \alpha)'(0) + c(\phi \circ \beta)'(0)]\,.$$

Usando la linealidad de la multiplicación de matrices, esto se convierte en:

$$Df_p([\alpha] + c[\beta]) = (\psi \circ f)' \circ \phi(p) \cdot (\phi \circ \alpha)'(0) + c(\psi \circ f)' \circ \phi(p) \cdot (\phi \circ \beta)'(0).$$

Por lo que

$$Df_p([\alpha] + c[\beta]) = Df_p([\alpha]) + cDf_p([\beta]).$$

Por lo tanto, Df_p es un operador lineal entre los espacios tangentes T_pM y $T_{f(p)}N$.

■

4.2.2. Fibrados vectoriales

Iniciamos esta sección con la siguiente definición.

Definición 32. *Un fibrado vectorial sobre M de rango k es un manifold E junto con una función $\pi : E \to M$ tal que:*

1. *Para todo $p \in M$ tenemos que $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ es un espacio vectorial.*
2. *Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M y difeomorfismos*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ U_\alpha & \xrightarrow{id} & U_\alpha \end{array}$$

Donde P denota la proyección natural.

3. La restricción de ϕ_α a cada fibra es un isomorfismo lineal, es decir, la función

$$\phi_\alpha|_{\pi^{-1}\{p\}} : \pi^{-1}\{p\} \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$$

es un isomorfismo lineal.

Observación. *Si $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial, es usual denotar el espacio vectorial $\pi^{-1}\{p\}$ por E_p y llamarlo la fibra sobre p.*

Ejemplo 8. *$M \times \mathbb{R}^k$ es un fibrado vectorial sobre M y es llamado el fibrado vectorial trivial.*

Definición 33. *Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una sección E es una función suave $\alpha : M \to E$ tal que $\pi \circ \alpha = id_M$. Denotamos por $\Gamma(E)$ el conjunto de todas las secciones de E.*

Observación. *$\Gamma(E)$ tiene estructura de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$ con las siguientes operaciones:*

- $(f * \alpha)(p) = f(p)\alpha(p) \in E_p$
- $(\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p)$

Dado un manifold M, vamos a considerar la categoría de fibrados vectoriales sobre M, que denotamos $Vect(M)$. Definimos $Vect(M)$ de la siguiente manera: los objetos de $Vect(M)$ son los fibrados vectoriales sobre M. Si E y F son fibrados vectoriales sobre M, entonces un morfismo $\phi : E \to F$ es una función suave tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

y tal que la restricción de ϕ a cada fibra es una función lineal. La composición de morfismos es un morfismo y por lo tanto $Vect(M)$ es una categoría.

Supongamos que $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es un cubrimiento abierto de M, tal que para cada α hay trivializaciones locales $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$. Entonces, para cada par de índices α, β, obtenemos difeomorfismos lineales en las fibras:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : U_\beta \cap U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to U_\beta \cap U_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

Es decir, para cada $p \in U_\beta \cap U_\alpha$ obtenemos un automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$. Esto define funciones suaves:

$$f_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(n, \mathbb{R})$$

Además, estas funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$f_{\beta\alpha} \circ f_{\alpha\beta} = id$$
$$f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\gamma\alpha}$$

Estas dos condiciones se llaman condiciones de cociclo.

Definición 34. *Una familia de cociclos es un cubrimiento abierto de M, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ junto con funciones suaves*

$$f_{\beta\alpha} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(\mathbb{R}^k)$$

tal que

$$f_{\beta\alpha} \circ f_{\alpha\beta} = id$$
$$f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\gamma\alpha}$$

Dada una familia de cociclos $f_{\beta\alpha}$ existe un fibrado vectorial definido de la siguiente manera. Como conjunto, E es la unión disjunta de los conjuntos $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$:

$$E := \coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^k / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$(p, v) \sim (p, f_{\beta,\alpha}(v)).$$

La proyección $\pi : E \to M$ es la proyección en la primera componente y la topología de E está caracterizada por la propiedad que para cada α, la función natural:

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha). \tag{2}$$

es un difeomorfismo

4.2.3. Fibrado tangente

Vamos a ver que el conjunto TM, definido como la unión disjunta de la familia T_pM con $p \in M$:

$$TM = \coprod_{p\in M} T_pM$$

tiene naturalmente la estructura de fibrado vectorial sobre M. La proyección $\pi : TM \to M$ está dada por $\pi[\gamma] = p$ si $[\gamma] \in T_pM$. Si $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ es una coordenada local entonces φ induce una biyección

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) &\to U \times \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\mapsto (\pi([\gamma]), (\varphi \circ \gamma)'(0)) \,. \end{aligned}$$

Proposición 11. *Existe una única topología en TM tal que π es continua y para cualquier elección de coordenadas, la biyección ψ es un homeomorfismo*

Prueba. Como M se puede cubrir por abiertos que son el dominio de unas coordenas locales, es suficiente probar que si $\varphi : U \to V$ y $\varphi' : U' \to V'$ son dos coordenadas entonces las correspondientes topologías inducidas en $\pi^{-1}(U \cap U')$ son iguales. Para ello es suficiente ver que la función:

$$\psi' \circ \psi^{-1} : (U \cap U') \times \mathbb{R}^m \to (U \cap U') \times \mathbb{R}^m$$

es un homeomorfismo. Pero esta función está dada por:

$$(p, v) \to (p, D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(v))$$

Como $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo, concluimos que $\psi' \circ \psi^{-1}$ no solo es un homeomorfismo, sino que también es un difeomorfismo y que es lineal en las fibras. ■

De forma analoga, se puede probar que:

Proposición 12. *Existe una única estructura de manifold suave en TM tal que para cualquier elección de coordenadas, la identificación $\psi : \pi^{-1} \to U \times \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo lineal en las fibras*

Para probar que TM es un fibrado vectorial sobre M solo resta probar que la topología de TM es Hausdorff y segundo contable.

Proposición 13. *TM con la topología mencionada en 11 es Hausdorff.*

Prueba.

Sean $[\gamma], [\theta] \in TM$ tales que $p = \pi([\gamma])$ y $q = \pi([\theta])$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1: Si $p \neq q$, dado que M es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_p y U_q tales que $p \in U_p$ y $q \in U_q$. Dado que π es continua, las preimágenes $\pi^{-1}(U_p)$ y $\pi^{-1}(U_q)$ son abiertos en TM y son disjuntos, lo que permite separar $[\gamma]$ y $[\theta]$.

Caso 2: Si $p = q$, consideremos una carta local $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^m$. En esta representación, los puntos $[\gamma]$ y $[\theta]$ se pueden separar dentro de $\pi^{-1}(U)$ porque podemos distinguir sus coordenadas en $U \times \mathbb{R}^m$.

En ambos casos, hemos mostrado que $[\gamma]$ y $[\theta]$ pueden ser separados por abiertos disjuntos en TM.

■

Proposición 14. *TM con la topología mencionada en 11 es segundo contable.*

Prueba. Consideremos una base contable $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ para M tal que para cada elemento de la base sea el dominio de una coordenada y por tanto

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$

Para cada α tomamos una base contable $\{W_\beta^\alpha\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ para $\pi^{-1}(U_\alpha)$ y así $\{W_\alpha^\beta\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ es una base contable para TM ■

Definición 35. *Un campo vectorial X en un manifold M es una sección del fibrado tangente TM. El conjunto de todos los campos vectoriales en M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.*

Observación. *Hemos visto que dadas coordenadas locales $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ existe una identificación*

$$D\varphi : TM|_U \simeq TU \to U \times \mathbb{R}^m$$

y por tanto una identificación a nivel de secciones

$$\mathfrak{X}(U) \simeq \Gamma(U \times \mathbb{R}^m) \simeq C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$$

Es usual denotar por $\frac{\partial}{\partial x_i}$ el campo vectorial que corresponde a la función constante con valor e_i bajo esta identificación. De esta manera obtenemos que un campo vectorial general $X \in \mathfrak{X}(U)$ se puede escribir de manera única de la forma:

$$X = \sum_{i=1}^{m} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Geométricamente, un campo vectorial es una manera de elegir una dirección de movimiento en cada punto de M. Hemos visto que, en general, $\Gamma(E)$ es un módulo sobre $C^\infty(M)$. Si $E = TM$, existe una estructura adicional: $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie.

Teorema 15. *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$L : \mathfrak{X}(M) \to Der(C^\infty(M))$$

dado por $X \to L_X$, donde

$$L_X(f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$$

para una curva γ tal que

$$X(p) = [\gamma] \in T_pM.$$

Demostración. La prueba puede resultar algo larga y bastante técnica. Para ello, enunciaremos los items generales de la prueba:

- La función esta bien definida.
- L_X es una derivación.
- L es lineal.
- L es un isomorfismo en el caso $M = \mathbb{R}^m$, donde la inyectividad de L resulta casi inmediata al notar que los campos vectoriales en $\mathbb{R}^m$ tienen la forma $\sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Además, en este caso, se tiene que:

  $$L_X(g) = \sum_i f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

- Para la sobreyectividad en el caso $M = \mathbb{R}^m$, se toma $\delta \in Der(C^\infty(M))$ y se define:

  $$Y := \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

  donde $h_i = \delta(x_i)$. Los siguientes pasos involucran considerar el camino $\gamma(t) = (1-t)p + tx$ y usar el teorema fundamental del cálculo entre cero y uno para una función $g \in C^\infty(M)$.

- Para el caso general, consideramos $U \subset M$. Se considera las siguiente restricción

  $$\rho_1 : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(U)$$
  $$V \mapsto V|_U$$

- Tambien se tiene el homomorfismo restricción

$$\rho_2 : Der(C^\infty(M)) \to Der(C^\infty(U))$$

El cual está caracterizado por la propiedad:

$$\rho_2(\delta)(g)(p) = \delta(\tilde{g}(p))),$$

si $g \in C^\infty(U), p \in U, y, \tilde{g} \in C^\infty(M)$ es tal que $|_U$.

Los detalles restantes por probar resultan ser precisamente la existencia de un único homomorfismo ρ_2 con estas propiedades. La prueba inicia mostrando la existencia de una función $\tilde{g}$ y un abierto $W \subset U$ tal que $g|_W = \tilde{g}|_w$. Esta existencia corresponde a detalles técnicos que involucran ciertas funciones suaves especiales.

Se define así:

$$\rho_2(\delta)(g)(p) := \delta(\tilde{g})(p)$$

Donde se debe verificar la buena definición, es decir, que ρ_2 no depende de la escogencia de $\tilde{g}$

- El homomorfismo $L : \mathfrak{M} \to Der(C^\infty(M))$ conmuta con las restricciones, es decir, para todo abierto $U \subset M$ se tiene que

$$\rho_2 \circ L = L \circ \rho_1$$

- Si existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ de M tal que $L_\alpha : \mathfrak{X}(U_\alpha) \to Der(C^\infty(U_\alpha))$ es un isomorfismo para todo $\alpha \in \mathfrak{A}$ entonces $L : \mathfrak{X}(M) \to Der(C^\infty(M))$ también es un isomorfismo.

□

4.2.4. Campos vectoriales y flujos

Definición 36. *Un flujo local en M es un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times M$ cuya intersección con $\mathbb{R} \times \{p\}$ es un intervalo que contiene al cero, junto con una función*

$$H : \Omega \to M,$$
$$(t, p) \mapsto H(t, p),$$

tal que

- $H(0, p) = p$, *y*
- $H(s + t, p) = H(s, H(t, p))$, *cuando ambos lados están definidos.*

Un flujo es un flujo local tal que $\Omega = \mathbb{R} \times M$.

Definición 37. *Dado un flujo local H sobre M, el campo vectorial X inducido por H esta definido por*

$$X(p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(t, p).$$

El campo vectorial X se llama el generador infinitesimal del flujo local H.

Teorema 16 (Existencia y unicidad de E.D.O)**.** *Si $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y V es un campo vectorial de U, entonces para cada $p \in U$ existe un abierto $U_p \subseteq U$ y $\epsilon > 0$ tal que para cada $a \in U_p$ existe una única curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$*

Proposición 17. *Si H y Γ son flujos locales que tienen el mismo generador infinitesimal, entonces H y Γ coinciden en la intersección de sus dominios*

Prueba. Sean Ω_H y Ω_Γ los dominios correspondientes. Veamos que $H(t,p) = \Gamma(t,p)$ con $(t,p) \in \Omega_H \cap \Omega_\Gamma$ Supongamos sin pérdidad de generalidad $t > 0$. Observe que $(s,p) \in \Omega_H \cap \Omega_\Gamma$ para $0 \leq s \leq t$. Sea p fijo y consideremos las funciones

$$\alpha(s) = H(s,p); \beta(s) = \Gamma(s,p), \text{ para } s \in [0,t]$$

Veamos que $\alpha = \beta$. Por el teorema anterior es suficiente ver que ambas son curvas integrales del campo vectorial X con las mismas condiciones iniciales. Claramente , $\alpha(0) = p = \beta(0)$. Calculemos la derivada

$$\alpha'(s) = \frac{d}{ds}\alpha(s) = \frac{d}{ds}H(s,p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(t, H(s,p)) = X(H(s,p)) = X(\alpha(s)).$$

De igual forma

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds}\beta(s) = \frac{d}{ds}\Gamma(s,p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Gamma(t, \Gamma(s,p)) = X(\Gamma(s,p)) = X(\beta(s)).$$

Por lo tanto, gracias al teorema de existencia y unicidad, concluimos $\alpha = \beta$ ■

Definición 38. *Un flujo local H generado por X se llama maximal si cualquier otro flujo local generado por X tiene dominio contenido en Ω_H.*

Proposición 18. *Todo flujo local está contenido en un único flujo local maximal.*

Demostración. Para realizar esta prueba, consideramos todos los flujos locales generados por X. Definimos la familia

$$\mathcal{F} = \{\Omega_i : H_i : \Omega_i \to M; H_i \text{ es un flujo local generado por } X\}.$$

Veamos que toda cadena está acotada superiormente por un elemento de la familia. Sea:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_i \subset \cdots \tag{3}$$

Consideremos $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ y la función $H : \Omega \to M$ definida por $H(t,p) = H_i(t,p)$ para i tal que $(t,p) \in \Omega_i$. Veamos que $\Omega \in \mathcal{F}$ y para eso, demostraremos que H es un flujo local.

Primero, comprobemos la buena definición. Si $(t,p) \in \Omega_i \cap \Omega_j$, entonces, por la proposición anterior, como ambos flujos tienen el mismo generador infinitesimal, coinciden en la intersección de sus dominios. Por lo tanto, H no depende del índice i. Dado que los Ω_i están encadenados, las propiedades de un flujo local se cumplen trivialmente.

Para demostrar que H es suave, utilizamos la idea de particiones de la unidad. Como los conjuntos Ω_i son abiertos, podemos cubrir Ω con una colección de funciones suaves $\{\varphi_i\}$ tal que:

$$\sum_i \varphi_i(t,p) = 1, \quad \text{para todo } (t,p) \in \Omega,$$

donde φ_i tiene soporte en Ω_i.

Definimos la función H de la siguiente manera:

$$H(t,p) = \sum_i \varphi_i(t,p) H_i(t,p).$$

Ahora, verificamos que esta definición de H es suave. Dado que cada H_i es suave por hipótesis, y las funciones φ_i son suaves y tienen soporte en Ω_i, la suma ponderada también será suave.

Finalmente, verificamos que H cumple las propiedades de un flujo local. En particular, debemos comprobar que:

1. $H(0,p) = p$. En efecto,

$$H(0,p) = \sum_i \varphi_i(0,p) H_i(0,p) = \sum_i \varphi_i(0,p) p = p,$$

ya que $H_i(0,p) = p$ para cada i.

2. $H(s+t,p) = H(s,H(t,p))$: Para $(s+t,p) \in \Omega$, consideremos que $(s,p) \in \Omega_i$ y $(t,H(s,p)) \in \Omega_j$. Luego, podemos escribir:

$$H(s+t,p) = \sum_k \varphi_k(s+t,p) H_k(s+t,p) = \sum_k \varphi_k(s+t,p) H_k(s,H(t,p)).$$

Al aplicar la propiedad de flujo local de cada H_k, podemos mostrar que esta relación se cumple, dado que H_k se comporta de manera coherente en los conjuntos abiertos.

Por lo tanto, hemos demostrado que H es un flujo local en Ω, y dado que hemos construido Ω como la unión de los Ω_i, se concluye que H pertenece a la familia $\mathcal{F}$.

□

Teorema 19. *La función que a un flujo local le asocia su generador infinitesimal establece una correspondencia biyectiva entre campos vectoriales en M y flujos locales maximales en M.*

Demostración. La correspondencia es inyectiva por la Proposición 17. Consideremos ahora la sobreyectividad, es decir, ver que todo campo vectorial es el generador de un flujo local maximal. Ahora bien, hemos visto que todo flujo local se puede extender a un único flujo maximal, por lo tanto solo debemos demostrar que un campo vectorial genera un flujo local. Además, dado que los flujos locales con el mismo generador coinciden en su intersección, es suficiente probar todo campo vectorial en un abierto de $\mathbb{R}^m$ genera un flujo local. Tomemos $M = U \subset \mathbb{R}^m$ y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(U)$. Por el primer teorema de esta sección existe un cubrimiento $\{U_p\}_{p\in U}$ abierto y números $\epsilon^p > 0$ Tal que para todo $a \in U_p$ existe una única solución

$$\gamma_a : (-\epsilon^p, \epsilon^p) \to U,$$

con $\gamma_a(0) = a$ y $\dot{\gamma}_a = X(\gamma_a)$. Definimos H de la siguiente manera:

$$\Omega := \cup_{p\in U}(-\epsilon^p, \epsilon^p) \times U_p$$
$$H(t, a) := \gamma_a(t)$$

La función H esta bien definida por la unicidad de la solución. Hace falta ver que H es un flujo local. Es claro que $H(0, a) = \gamma_a(0) = a$

Demostremos que $H(s + t, a) = H(s, H(t, a))$

Fijemos t, a y consideremos las siguientes funciones de s:

$$\eta(s) = H(s + t, a); \omega(s) = H(s, H(t, a))$$

Usaremos el teorema de existencia y unicidad, para ello mostraremos que η, ω son curvas integrales e X con las mismas condiciones iniciales.

Claramente, por definición tienen las mismas condiciones iniciales.

Calculemos las derivadas:

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = \frac{d}{ds}H(s, H(t, a)) = \frac{d}{ds}\gamma_{H(t,a)}(s) = X(\gamma_{H(t,a)}(s)) = X(\omega(s))$$

$$\frac{d}{ds}\eta(s) = \frac{d}{ds}H(s + t, a) = \frac{d}{ds}\gamma_a(s + t) = X(\gamma_a(s + t)) = X(\eta(s))$$

□

Definición 39. *Sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo y $X \in \mathfrak{X}(M)$. El push-forward de X con respecto a ϕ, $\phi_*(X)$, es el campo vectorial en N definido así:*

$$\phi_*(X)(q) = D\phi(\phi^{-1}(q))X(\phi^{-1}(q)).$$

Si $f \in C^\infty(M)$, entonces el push-forward de f con respecto a ϕ es:

$$\phi_*(f) := f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(N).$$

Definición 40. *Sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo y $f \in C^\infty(N)$ y un campo vectorial $W \in \mathfrak{X}(N)$, definimos el pull-back*

$$\phi^*(W) = (\phi^{-1})_*(W) = D\phi^{-1}(\phi(q))X(\phi(q)) \in \mathfrak{X}(M)$$
$$\phi^*(f) = (\phi^{-1})_*(f) = f \circ \phi \in C^\infty(M)$$

Lema 20. *Sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(N)$. Entonces*

$$\phi_*(X)(f) = \phi_*(X(\phi^*(f))) \in C^\infty(N)$$

Demostración. Evaluando el lado izquierdo en $p \in N$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\phi_*(X)(f)(p) &= df(p)(\phi_*(X)(p)) \\ &= df(p) \circ D\phi(\phi^{-1}(p))X(\phi^{-1}(p)).\end{aligned}$$

Evaluando el lado derecho en $p \in N$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi_*(X(\phi^*(f)))(p) &= X(\phi^*(f))(\phi^{-1}(p)) \\ &= D(\phi^*(f))(\phi^{-1}(p))X(\phi^{-1}(p)) \\ &= D(f \circ \phi)(\phi^{-1}(p))X(\phi^{-1}(p)) \\ &= df(p) \circ D\phi(\phi^{-1}(p))X(\phi^{-1}(p)).\end{aligned}$$

□

Definición 41. *Sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo, $\delta \in Der(C^\infty(M))$. El push-forward de δ, $\phi_*(\delta) \in Der(C^\infty(N))$ está definido por:*

$$\phi_*(\delta)(g) := \phi_*(\delta(\phi^*(g))); \forall g \in C^\infty(N).$$

Lema 21. *Sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces:*

$$\phi_*(L_X) = L_{\phi_*(X)}.$$

Demostración. Evaluemos ambos lados de la ecuación en $g \in C^\infty(N)$. Por un lado:

$$\begin{aligned}\phi_*(L_X)(g)(q) &= \phi_*(L_X(\phi^*(g)))(q) \\ &= L_X(phi^*(g))(\phi^{-1}(q)) \\ &= d(\phi^*(g))(\phi^{-1}(q))(X(\phi^{-1}(q))) \\ &= d(g \circ \phi)(\phi^{-1}(q))(X(\phi^{-1}(q))) \\ &= d(g)(q) \circ D\phi(\phi^{-1}(q))(X(\phi^{-1}(q))).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}L_{\phi_*(X)}(g)(p) &= dg(q)\phi_*(X)(q) \\ &= dg(q) \circ D\phi(\phi^{-1}(q))(X(\phi'^{1}(q))).\end{aligned}$$

□

Lema 22. *Seam X y Y campos vectoriales que generam los flujos H y Γ, respectivamente, y sea $f \in C^\infty(M)$. Entonces:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t)^*(f)(p) &= X(f)(p) \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t)^*(Y)(p) &= [X,Y](p).\end{aligned}$$

Demostración. Para probar la primera ecuación, calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t)^*(f)(p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(H(t,p)) \\ &= df(p)\frac{d}{dt}|_{t=0} H(t,p) \\ &= df(p)X(p) = X(f)(p).\end{aligned}$$

Para probar la segunda ecuación es suficiente mostrar que los dos campos inducen la misma derivación. Considere una función $g \in C^\infty(M)$ y calculemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t)^*(Y)(g) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t^{-1})_*(Y)(g) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(H_{-t})_*(Y)(g) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(H_{-t})_*(Y(H^*_{-t}(g))) && \text{Usando el lema 20} \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Y(H^*_{-t}(g)) + \frac{d}{dt}|_{t=0} H^*_t(g) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Y H^*_{t=0}(g) + \frac{d}{dt}|_{t=0} H^*_t(Y(g)) \\ &= -YX(g) + XY(g) = [X,Y](g).\end{aligned}$$

□

Lema 23. *Si H es el flujo local generado por X entonces:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} H(t,p) = X(H(t_0,p)).$$

Demostración. Calculemos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0} H(t,p) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0} H(t-t_0, H(t_0,p)) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0} H(s, H(t_0,p)) \\ &= X(H(t_0,p)).\end{aligned}$$

□

Lema 24. *Si H es el flujo local generado por X y $[X,Y]=0$ entonces:*

$$(H_t)^*(Y) = Y.$$

Demostración. Es suficiente probar que $\frac{d}{dt}|_{t=0}(H_t)^*(Y)(p) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0}(H_t)^*(Y)(p) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(H_{t-t_0}\circ H_{t_0})^*(Y)(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(H_{t_0})^*(H^*_{t-t_0}(Y))(p)\\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0}(H_{t_0})^*(H^*_s(Y)(p))\\ &= D(H_{-t_0})\frac{d}{ds}|_{s=0}H^*_s(Y)(p)\\ &= D(H_{-t_0})[X,Y](p) = 0.\end{aligned}$$

□

Teorema 25. *Sean H y Γ flujos locales generados por X y Y respectivamente, Entonces $[X,Y] = 0$ si y solo si:*

$$H_t\Gamma_s = \Gamma_s H_t,$$

para todo $s,t \in \mathbb{R}$ donde ambos lados estén definidos

Demostración. Considere los siguientes calculos:

$$\begin{aligned}[X,Y](p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}H^*_t(Y)(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(H_{-t})_*(Y)(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(DH_{-t})(H_t(p))\frac{d}{ds}|_{s=0}\Gamma_s(H_t(p))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}H_{-t}\Gamma_s H_t(p).\end{aligned}$$

Por lo que, $[X,Y] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}H_{-t}\Gamma_s H_t(p)$. Si los flujos conmutan se tiene que:

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}H_{-t}\Gamma_s H_t(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}\Gamma_s H_{-t}H_t(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}\Gamma_s(p)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}Y(p) = 0.\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad, $Y(p)$ no depende de t.

Análogamente, si $[X,Y] = 0$, considere $p \in M$ y calculemos $H_{-t}\Gamma_s H_t\Gamma_{-s}(p)$

Es suficiente probar que:

$$\frac{d}{ds}H_{-t}\Gamma_s H_t\Gamma_{-s}(p) = 0 \quad .$$

Ahora calculamos:

$$\frac{d}{ds}H_{-t}\Gamma_s H_t\Gamma_{-s}(p) = \frac{d}{ds}|_{s=s_0}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s}(p) + \frac{d}{ds}|_{s=s}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s_0}(p).$$

Como $[X, Y] = 0$, entonces $(H_{-t})(Y) = Y$. Por un lado

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|_{s=s}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s_0}(p) &= DH_{-t}\left(\frac{d}{ds}|_{s=s_0}\Gamma_s H_t\Gamma_{-s_0}(p)\right)\\ &= H_{-t}(Y(\Gamma_{s_o}H_t\Gamma_{-s_0})(p))\\ &= Y(H_{-t}\Gamma_{s_o}H_t\Gamma_{-s_0}(p)).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|_{s=s_0}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s}(p) &= DH_{-t}\circ D\Gamma_{s_0}\circ DH_t\frac{d}{ds}|_{s=s_0}\Gamma_{-s}(p)\\ &= -DH_{-t}\circ D\Gamma_{s_0}\circ DH_t(Y(\Gamma_{s_0}(p)))\\ &= -(H_{-t})_*\circ(\Gamma_{s_0})_*\circ(H_t)_*Y(H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s_0}(p))\\ = -Y(H_{-t}\Gamma_{s_o}H_t\Gamma_{-s_0}(p)).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}|_{s=s_0}H_{-t}\Gamma_s H_t\Gamma_{-s}(p) &= \frac{d}{ds}|_{s=s}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s_0}(p) + \frac{d}{ds}|_{s=s_0}H_{-t}\Gamma_{s_0}H_t\Gamma_{-s}(p)\\ &= Y(H_{-t}\Gamma_{s_o}H_t\Gamma_{-s_0}(p)) + (-Y(H_{-t}\Gamma_{s_o}H_t\Gamma_{-s_0}(p))) = 0.\end{aligned}$$

Terminando la prueba. □

Capítulo 5

Grupos y álgebras de Lie

En este capítulo se presentarán algunos aspectos relevantes de la teoría de Lie, entre ellos se muestra explicitamente la definición de un grupo de Lie y se mostrará un funtor covariante entre la categoría de grupos de Lie y álgebras de Lie. Estableciendo una conexión categorica entre estos objetos aparentemente tan diferentes, uno topologico y otro algebraico. Para ello usaremos fuertemente los campos vectoriales, en particular, se introducen los campos vectoriales invariantes a izquierda.

Adicionalmente, se mostrará la función exponencial, la cual resulta esencial al momento de mostrar precisamente los resultados de la conexión categorica.

El tercer teorema de Lie se puede mostrar en varios niveles. Inicialmente se mostrará el funtor que asigna a un grupo de Lie el espacio tangente en la identidad. Este funtor es precisamente el que establece una relación categórica entre las categorias previamente mencionadas. A medida que a este funtor se le restringe el dominio", es decir, si le agregamos propiedades a un grupo de Lie este funtor empieza adquirir propiedadas como ser fiel, pleno o esencialmente sobreyectivo.

5.1. Grupos de Lie

Iniciamos esta sección con la definición de grupo de Lie.

Definición 42. *Un grupo de Lie es un grupo G que además es un manifold suave tal que la multiplicación:*

$$\begin{aligned} m :& G \times G \to G; \\ & (g, h) \mapsto gh \end{aligned}$$

y la inversión:

$$\begin{aligned} i :& G \to G; \\ & g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son funciones suaves.

Revisemos algunos ejemplos

- $\mathbb{R}$ es un grupo con la multiplicación y claramente es un 1-manifold.

- Es bien sabido que $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ es un *manifold*, y así, $GL(n,\mathbb{R})$ también es un *manifold* de dimensión n^2. Recordemos que la función determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una función polinómica, por lo tanto, es continua. Así, el conjunto $U = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = GL(n,\mathbb{R})$ es un conjunto abierto. Además, $GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo con la multiplicación de matrices, y tanto la multiplicación como la inversión son funciones suaves, ya que son algebraicas.
- El grupo especial lineal real $SL(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices con entradas reales y determinante 1. Nótese que $SL(n,\mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ y también es un *manifold* de dimensión $n^2 - 1$.
- El grupo ortogonal consiste en los automorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ que preservan el producto interno:
$$O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^t = I\}$$
$O(n)$ es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ y es un grupo de Lie.

Definición 43. *Un homomorfismo de grupos de Lie es un homorfismo de grupos que es también una función suave. Denotados por GLie a la categoría cuyos objetos son los grupos de Lie y los morfismos son los homomorfismos de grupos de Lie.*

Ejemplo 9. *La función determinante es un homomorfismos de grupos de Lie. La inclusión $i : U(n) \to GL(n,\mathbb{R})$ es también un homorfismo de grupos de Lie.*

Definición 44. *Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo de Lie de G es un subgrupo H de G que también es un submanifold.*

Lema 26. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G. Si existe una vecindad U de la identidad tal que $U \cap H$ es un submanifold de G entonces H es un subgrupo de Lie de G.*

Demostración. Debemos probar que H es, en realidad, un submanifold de G. En efecto, sea $h \in H$ y consideremos la función $L_h : G \to G$, donde $L_h(g) = hg$. Como G es un grupo, L_h es un difeomorfismo que envía U en hU. Además, $L_h(H \cap U) = H \cap hU$. Ahora bien, por hipótesis, $U \cap H$ es un submanifold de U, entonces $H \cap hU$ es un submanifold de hU. Dado que h es arbitrario y $e \in U$, concluimos que H es un submanifold de G. □

5.2. Él álgebra de Lie de un grupo de Lie

Si $g \in G$ es un elemento de un grupo de Lie G, denotaremos por $L_g : G \to G$ la función dada por multiplicación a izquierda. Esta función es un difeomorfismo con inversa $L_{g^{-1}}$-

Definición 45. *Un campo vectorial X en G se dice invariante si satisface*

$$X(hg) = (DL_h)(g)(X(g)),$$

para todo $h \in G$ y $g \in G$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(G)^G$ al espacio vectorial de campos vectoriales invariantes.

Note que la definición anterior se puede reescribir en términos del push-forward de X con respecto a L_h, dado que

$$L_{h*}(X)(g) = DL_h((L_h)^{-1}(hg))(X(h^{-1}hg)) = DL_h(g)(X(g)) = X(hg),$$

si estamos en el caso en que X es invariante a izquierda. Luego, la nueva definición resulta ser precisamente la siguiente.

Definición 46. *Un campo vectorial X en G se dice invariante si satisface*

$$L_{h*}(X)(g) = X(hg)$$

Donde $L_{h*}(X)$ denota el push-forwar de X respecto a L_h.

Mostraremos ahora las condiciones en coordenadas locales para que un campo sea invariante. Sea G un grupo de Lie de dimensión m. Sean $\gamma, h \in G$, con coordenadas respectivas $(x^1, \dots, x^m)$ y $(z^1, \dots, z^m)$, donde (U, φ) es una carta. Supongamos que en coordenadas locales, la operación del grupo en el elemento $g = \gamma h$ está determinada por las coordenadas

$$(p^1(x^1, \dots, x^m, z^1, \dots, z^m), \dots, p^m(x^1, \dots, x^m, z^1, \dots, z^m))$$

con $p^1, \dots, p^m \in C^\infty(\varphi(U) \times \varphi(U))$. Luego

$$\begin{aligned} (DL_\gamma)_h : T_hG &\to T_{\gamma g}G \\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\bigg|_h &\mapsto \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bigg|_{\gamma h} \end{aligned}$$

De forma que si $X = \sum_\alpha f^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\bigg|_h$ con $f^\alpha \in C^\infty(\varphi(U))$. Entonces, si X es invariante

$$\begin{aligned} (DL_\gamma)_h X_h &= \sum_{\mu,\alpha=1}^{m} f^\alpha(z^1, \dots, z^m)\frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bigg|_{\gamma h} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} f^\mu(p^1(x,z), \dots, p^m(x,z))\frac{\partial}{\partial p^\mu}\bigg|_{\gamma h} \\ &= X_{\gamma h} \end{aligned}$$

Esto lo podemos resumir en el siguiente lema.

Lema 27. *En coordenadas locales, X es invariante si y sólo si para todo $\mu \in \{1, \dots, m\}$ y para todos $x, z \in \mathbb{R}^m$ se cumple que*

$$\sum_{\alpha=1}^{m} f^\alpha(z)\frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x,z) = f^\mu(p^1(x,z), \dots, p^m(x,z)) \tag{1}$$

Si pensamos ahora el sistema coordenado (U, φ) esta centrado en el elemento neutro del grupo, es decir, $\varphi(e) = 0$, y consideramos $z = 0$ en la ecuación anterior, notando primero que $p(x, 0) = x$, ya que corresponderian a las coordenadas del punto $g = \gamma e = \gamma$, por lo tanto

$$\sum_{\mu,\alpha=1}^{m} f^\alpha(0)\frac{\partial p^\mu}{\partial z^\alpha}(x,0) = f^\mu(p(x,0)) = f^\mu(x) \tag{2}$$

$\forall \mu = 1, \dots, m$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$

Proposición 28. *Un campo vectorial X en G es invariante si y solo si $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g$ para todo $g \in G$, $f \in C^\infty(G)$.*

Prueba. Sean $g, h \in G$ y $f \in C^\infty(G)$. Como X es invariante

$$X(f \circ L_g)(h) = X_h(f \circ L_g) = (DL_g)_h(X_h(f)) = X_{gh}(f) = (Xf)(gh) = (Xf) \circ L_g(h)$$

Como h es un elemento arbitario, de la igualdad anterior se concluye la equivalencia ■

Teorema 29. *$\mathfrak{X}(G)^G$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$*

Prueba. Basta ver que $\mathfrak{X}(G)^G$ es cerrado con el corchete. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)^G$, usando la proposición 28 tenemos que

$$\begin{aligned}
[X,Y](f \circ L_g) &= X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) \\
&= X((Yf) \circ L_g) - Y((Xf) \circ L_g) \\
&= (X(Yf)) \circ L_g - (Y(Xf)) \circ L_g \\
&= (X(Yf) - Y(Xf)) \circ L_g \\
&= ([X,Y](f)) \circ L_g
\end{aligned}$$

Para todo $f \in C^\infty(G)$. De ahí se sigue que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(G)^G$

■

Teorema 30. *Sea G un grupo de Lie, se tiene que:*

$$\mathfrak{X}(G)^G \simeq T_e(G)$$

Demostración. Considere $f : \mathfrak{X}(G)^G \to T_e(G)$ dada por $f(X) = X(e)$. Claramente esta función está bien definida. Veamos la inyectividad:

Supongamos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)^G$ tal que $f(X) = f(Y)$, es decir, $X(e) = Y(e)$. Considere $g \in G$ arbitrario, observe que

$$X(g) = X(ge) = (DL_g)(e)(X(e)) = (DL_g)(e)(Y(e)) = Y(ge) = Y(g)$$

Probando así la inyectividad. Para la sobreyectividad, considere $v \in T_e(G)$ un vector tangente en la identidad. Considere v^L el campo vectorial invariante dado por:

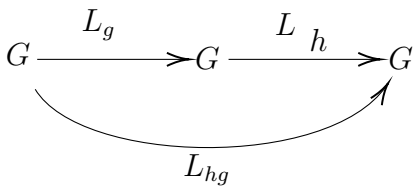
$$v^L(g) = DL_g(e)(v)$$

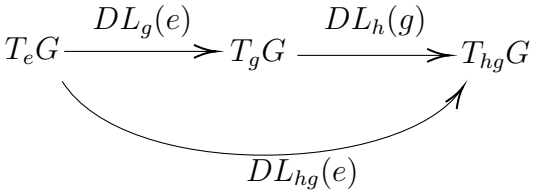
donde $g \in G$.

$$\begin{aligned}
L_g &: G \to G \\
DL_g(e) &: T_e(G) \to T_g(G)
\end{aligned}$$

Observe que v^L tiene por dominio a G y para un $g \in G$ arbitrario se tiene que $v^L(g) \in T_g(G)$, luego $v^L \in \mathfrak{X}(G)$.

Observe que $DL_{hg}(e) = DL_h(g) \circ DL_g(e)$, lo cual se deduce del siguiente diagrama





Además, $v^L(hg) = DL_{hg}(e)(v) = DL_h(g)DL_g(e)(v) = DL_h(g)(v^L(g))$. Por lo tanto, v^L es un campo vectorial invariante.

Finalmente, calculemos $f(v^L) = v^L(e) = DL_e(e)(v) = D(id)(e)(v) = [id \circ v] = v$. Probando así la sobreyectividad. □

Observación. *De lo anterior tenemos que $\mathfrak{X}(G)^G$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, y más aún $dim\mathfrak{X}(G)^G = dimG$. Además podemos inducir una estructura de álgebra de Lie en T_eG a partir de la de $\mathfrak{X}(G)^G$ definiendo*

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]_e \tag{3}$$

Definición 47. *Sea $\varphi : M \to N$ una función suave. Decimos que los campos vectoriales $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $X' \in \mathfrak{X}(N)$ están relacionados por φ si*

$$D\varphi(X(p)) = X'(\varphi(p))$$

En este caso escribimos $X \sim_\varphi X'$.

Teorema 31. *Sea $\varphi : M \to N$ una función suave y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X', Y' \in \mathfrak{X}(N)$ tales que $X \sim_\varphi X'$ y $Y \sim_\varphi Y'$. Entonces $[X, Y] \sim_\varphi [X', Y']$*

Proposición 32. *Sea X un campo vectorial G-invariante, entonces X genera un flujo.*

Teorema 33. *Existe un funtor $Lie : GLie \to ALie$ tal que si G es un grupo de Lie entonces*

$$Lie(G) = T_eG \cong \mathfrak{X}(G)^G,$$

y si $\varphi : G \to H$ es un morfismo entonces:

$$Lie(\varphi) = D_e\varphi.$$

Demostración. La regla de la cadena implica

$$Lie(\varphi \circ \phi) = D_e(\varphi \circ \phi)D_e\varphi \circ D_e\phi \circ D_e\phi = Lie\varphi \circ Lie\phi.$$

También se cumple que $Lie(id) = D_e(id) = id$. Sola falta verificar que $Lie(\varphi) : T_eG \to T_eH$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Veamos que si $v \in T_eG$ entonces $v^L \sim_\varphi (D_e\varphi(v))^L$. Basta computar:

$$\begin{aligned} D_g(\varphi)(v^L(g)) &= D_g(\varphi) \circ D_e(L_g)(v) \\ &= D_e(\varphi \circ L_g)(v) \\ &= D_e(L_{\varphi(g)} \circ \varphi)(v) \\ &= (D_eL_{\varphi(g)}) \circ D_e\varphi(v) \\ &= (D_e\varphi(v))^L\varphi(g). \end{aligned}$$

esto completa la afirmación. Ahora podemos probar fácilmente que preserva el bracket:

$$Lie(\varphi)([v,w]) = D_e(\varphi)([v^L, w^L](e)) = [D_e(\varphi)(v)^L, D_e(\varphi)(w)^L] = [Lie(\varphi)(v), Lie(\varphi)(w)].$$

□

5.3. La función exponencial

En la sección anterior, se observó que los campos vectoriales en G generan flujos. Esta propiedad es fundamental, ya que permite construir una función natural que relaciona el álgebra de Lie con el grupo de Lie: la función exponencial. En esta sección, exploraremos cómo esta función se define y sus implicaciones en la teoría de grupos de Lie.

Definición 48. *La función exponencial $exp : T_eG \to G$ está definida por*

$$exp(v) := H_v(1, e),$$

donde H_v es el flujo asociado al campo vectorial v^L.

Recuerde que $v^L(g) = DL_g(e)(v)$, y que, $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} H_v(t,p) = v^L(H_v(t_0,p))$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H_v(t,p) = v^L(p)$$

Proposición 34. *La función exponencial cumple:*

1. $exp(tv) = H_v(t, e)$
2. $exp((s+t)v) = exp(tv)exp(sv)$
3. $D(exp)(0) = id.$

En particular, exp es un difeomorfismo local en un abierto que contiene al $0 \in T_eG$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$

1. Note que

$$\begin{aligned}(tv)^L(p) &= DL_p(e)(tv)\\ &= [(L_p \circ tv)'(0)]\\ &= [(p \cdot tv)'(0)]\\ &= [(tp \cdot v)'(0)]\\ &= [(L_{tp} \circ v)'(0)] = DL_{tp}(e)(v) = v^L(tp) = tv^L(p).\end{aligned}$$

   El siguiente argumento se utilizará con frecuencia y revela el hecho de que la solución de una ecuación diferencial es única. Consideremos las funciones $\sigma(s) = H_{tv}(s, e)$, $\gamma(s) = H_v(s, e)$, $f(s) = ts$, y $\alpha(s) = (\gamma \circ f)(s) = H_v(ts, e)$.

   Note que

$$\frac{d}{ds}\Big|_s \sigma(s) = \frac{d}{ds}\Big|_s H_{tv}(s,e) = (tv)^L(H_{tv}(s,e)) = v^L(tH_{tv}(s,e)).$$

Además,

$$\frac{d}{ds}\Big|_s \alpha(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{ts} \gamma(ts)\frac{d}{ds}\Big|_s ts = \frac{d}{ds}\Big|_{ts} H_v(ts,e)\frac{d}{ds}\Big|_s ts = tv^L(H_v(ts,e)).$$

Esto demuestra que ambas ecuaciones son soluciones de la misma ecuación diferencial. Por el principio de unicidad de soluciones, podemos concluir que $\alpha(s) = \gamma(s)$ para todo s. En particular, al evaluar en $s = 1$, obtenemos la relación $\exp(tv) = H_{tv}(1,e) = H_v(t,e)$.

2. Considere las curvas $\alpha(t) = H_v(s,e)H_v(t,e)$ y $\beta(t) = H_v(s+t,e)$. Veremos que ambas curvas solucionan la misma ecuación diferencial con las mismas condiciones iniciales, para ello note que $\alpha(0) = H_v(s,e)e = H_v(s+0,e) = \beta(0)$. Además:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d}{dt}H_v(s,e)H_v(t,e) = \frac{d}{dt}L_{H_v(s,e)}(H_v(t,e))\\ &= DL_{H_v(s,e)}(H_v(t,e))(\frac{d}{dt}H_v(t,e))\\ &= DL_{H_v(s,e)}(H_v(t,e))(v^L(H_v(t,e)))\\ &= DL_{H_v(s,e)}(H_v(t,e))DL_{H_v(t,e)}(e)(v).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$v^L(\alpha(t)) = DL_{H_v(s,e)H_v(t,e)}(e)(v).$$

Note que $L_{H_v(s,e)}L_{H_v(t,e)} = L_{H_v(s,e)H_v(t,e)}$. Si derivamos ambos lados con respecto a t y usamos la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d}{dt}L_{H_v(t,e)} = L_{H_v(t,e)} \cdot \frac{d}{dt}H_v(t,e).$$

Así, al evaluar en t, obtenemos:

$$\alpha'(t) = v^L(\alpha(t)).$$

Esto muestra que la derivada del flujo en el grupo de Lie está relacionada con la acción del campo vectorial v a la izquierda sobre la trayectoria $\alpha(t)$.

Adicionalmente,

$$\beta'(t) = \frac{d}{dt}H_v(s+t,e) = \frac{d}{d(s+t)}H_v(s+t,e) = v^L(H_v(s+t,e)) = v^L(\beta(t)).$$

Por la unicidad de la solución de una ecuación diferencial obtenemos que $\alpha(t) = \beta(t)$.

3. Sean $X \in Lie(G)$ y $g \in G$, definimos en $G \times Lie(G)$ el siguiente campo vectorial:

$$V_{g,X} = (X_g, 0) \in T_gG \times T_XLie(G) \cong T_{g,X}(G \times Lie(G))$$

El flujo generado por V que empieza en (g, X) resulta ser precisamente $\theta_t(g, X) = (gexp(tX), X)$, Denotando por π_G la proyección en la primera coordenada, entonces para $t = 1$ y $g = e$ se cumple que

$$\pi_G \circ \theta_1 e, X = \pi_G(expX, X) = expX$$

Por lo tanto, $expX$ es composición de aplicaciones diferenciables, concluyendo así que es diferenciable.

Además, $D(exp)(0) : T_0 Lie(G) \cong Lie(G) \to T_e G \cong Lie(G)$, calculemos:

$$\begin{aligned} D(exp)(0)(v) &= D(exp)(0)\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} tv\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} exp(tv)\right) = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} H_v(t, e)\right) = v^L(e) = v \end{aligned}$$

Como la función exponencial es no singular en $0 \in T_e(G)$, por el teorema de la función inversa induce un difeomorfismo $exp : \mathfrak{U} \to U$, donde $\mathfrak{U}, U$ son entornos abiertos de 0 y e.

□

Ejemplo 10. *El álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Como $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto del espacio de matrices entonces:*

$$T_e(GL(n, \mathbb{R})) = End(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

Calculemos el bracket:

$$\begin{aligned} [X, Y] = [X^L, Y^L] &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (H_t)^*(Y)(e) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} DH_{-t}((Y)(exp(tX))) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} DR_{exp(-tX)} \circ DL_{exp(tX)}(Y) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} DL_{exp(tX)}(Y) + DR_{exp(-tX)}(Y) \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

Consideremos el caso $G = GL(V)$. Se vio que $T_e(GL(V)) = End(V)$. Si $X \in End(V)$ entonces:

$$X^L(A) = DL_A(X) = AX$$

Si $X \in End(V)$ es un endomorfismo lineal de V podemos definir

$$e^X = \sum_{k \geq 0} \frac{X^k}{k!}$$

Resulta un ejercicio clásico probar que esta expresión es convergente y define un endomorfismo de V.

Proposición 35. *La función $e^X : V \to V$ cumple:*

- $e^0 = 1$
- $e^{V+V'} = e^V e^{V'}$ *si* V *y* V' *conmutan*
- $e^V e^{V'} = id$

Demostración.

- Es claro que $e^0 = 1 + 0 + \frac{0^2}{1} + \frac{o^3}{6} + \cdots = 1$.
- Para la segunda propiedad se tiene que:

$$e^V e^{V'} = \sum_{k\geq 0} \frac{V^k}{j!} \sum_{j\geq 0} \frac{V'^j}{j!} = \sum_{j,k} \frac{V^k V'^j}{k!j!}$$

Por otro lado,

$$e^{V+V'} = \sum_k \frac{(V+V')^k}{k!} = \sum_k \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} V^j (V')^{k-j} \right)$$
$$= \sum_k \sum_{j=0}^{k} \frac{V^j (V')^{k-j}}{j!(k-j)!}$$

Haciendo, $l = k - j, h = l + j$ tenemos

$$\sum_{l+j\geq 0} \sum_{j=0}^{l+j} \frac{V^j (V')^l}{j!(l)!}$$

- Es claro que $-V$ y V conmutan, por lo que, $e^{-V} e^V = e^{-V+V} = e^0 = id$

□

Proposición 36. *Si $G = GL(V)$ entonces para $X \in T_e G = End(X)$ se cumple*

$$exp(X) = e^X$$

Demostración. Nuevamente usaremos el argumento de la unicidad de solución de ecuaciones diferenciales. En esta ocasión nuestras curvas son $exp(tX)$ y e^{tX}. Claramente, $exp(0) = e^0 = id$. Calculemos la derivadad de $exp(tX)$

$$\frac{d}{dt}(exp(tX)) = \frac{d}{dt} H_X(t, e) = X^L(H_X(t, e)) = X^L(exp(tX))$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dt}(e^{tX}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tX)^k}{k!} \right)$$
$$= \sum_{k\geq 0} \frac{t^{k-1} X^k}{(k-1)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{k t^{k-1} X^k}{k!}$$
$$= \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tX)^{k-1}}{(k-1)!} \right) X = e^{tX} X = X^L(e^{tX})$$

Por el teorema ya mencionado, el cual se vuelve una argumento bastante usual en esta sección, usando $t = 1$ se tiene que $exp(X) = e^X$ □

Proposición 37. *Si $\varphi : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{D\varphi(e)} & T_eH \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Demostración. Consideremos las curvas $exp(D_e(\varphi)(tX))$ y $\varphi \circ exp(tX)$. Como es usual en esta sección, veremos que ambas resuelven la misma ecuación diferencial.

$$\alpha'(t) = (D_e(\varphi)(X))^L(\alpha(t))$$

Para $t = 0$, $exp(D_e(\varphi)(0X)) = e = \varphi \circ exp(0X)$.

Por un lado:

$$\frac{d}{dt}exp(D_e(\varphi)(tX)) = \frac{d}{dt}H_{D_e(\varphi)(X)}(t, e) = (D_e(\varphi)(X))^L(exp(D_e(\varphi)(tX))$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(exp(tX)) &= D(\varphi)(exp(tX)) \circ \left(\frac{d}{dt}(exp(tX))\right) \\ &= D(\varphi)(X^L(exp(tX))) \\ &= D(\varphi) \circ D(L_{exp(tX)})(X) \\ &= D(\varphi \circ L_{exp(tX)})(X) \\ &= D(L_{exp(tX)} \circ \varphi)(X) \\ &= D(L_{exp(tX)}) \circ D_e(\varphi)(X) \\ &= (D_e(\varphi)(X))^L(\varphi(exp(tX))) \end{aligned}$$

Probando la igualdad entre ambas curvas. Luego, reemplazando en $t = 1$ se tiene que el diagrama conmuta. □

5.4. La representación adjunta

Definición 49. *Sea V un espacio vectorial. Una representación de G es un homomorfismo $\rho : G \to GL(V)$. Una representación de $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$*

Proposición 38. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La función $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ dada por*

$$Ad(g)(v) = DR_{g^{-1}} \circ DL_g(v)$$

es una representación de G en su álgebra de Lie llamada la representación adjunta de G

Demostración. Es claro que Ad es una función suave. Veamos que Ad es un homorfismo de grupos. Claramente, $Ad(e) = DR_e \circ DL_e = id$

De igual manera,

$$\begin{aligned} Ad(gh) &= DR_{(gh)^{-1}} \circ DL_{gh} \\ &= DR_{g^{-1}} \circ DR_{h^{-1}} \circ DL_h \circ DL_g \\ DR_{g^{-1}} \circ DL_g \circ DL_{h^{-1}} \circ DL_h & \\ &= Ad(g)Ad(h) \end{aligned}$$

□

Definición 50. *La función de conjugación por g es :*

$$\begin{aligned} C_g : G &\to G; \\ C_g(h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Observación. *Claramente, $C_g = R_g^{-1} \circ L_g$ y por lo tanto, $D_e(C_g) = Ad(g)$.*

En particular, $Ad(g)$ resulta ser un homomorfismo de álgebras de Lie, ya que es la derivada de un homomorfismo de grupos.

Corolario 39. *Para todo $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} T_eG & \xrightarrow{Ad(g)} & T_eH \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow{C_g} & H \end{array}$$

Definición 51. *La función $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ dada por $ad(v)(w) = [v, w]$ es una representación de $\mathfrak{g}$ llamada la representación adjunta.*

Proposición 40. *La derivada de la función Ad en la identidad es la función ad. Es decir, $D_e(Ad) = ad$.*

En particular, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & GL(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Demostración. Denotemos por H el flujo generado por v^L y computemos

$$\begin{aligned} D_e(ad)(v)(w) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad(exp(tv))(w) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} DR_{exp(-tv)} \circ DL_{exp(tv)}(w) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (H_t)^*(w^L)(e) \\ &= [v, w] \end{aligned}$$

□

5.5. Tercer teorema de Lie

En esta sección enunciaremos teoremas que establecen conexiones bastantes fuertes entre objetos topológicos y algebraicos. Algunos de estos resultados, como el teorema de Ado, tienen un prueba bastante extensa y no se colocará la prueba. En particular, el teorema mencionado anteriormente tiene una prueba puramente algebraica, por lo que no se produciría ningún argumento circular.

Empezaremos enunciando algunas definiciones

Definición 52. *Una distribución en un manifold M es un subfibrado vectorial del fibrado tangente a M.*

Por ejemplo, si $\pi : M \to N$ es una submersión, el kernel de $D\pi$ es una distribución de rango $m - n$

Lema 41. *Sea $\pi : M \to N$ una submersión sobreyectiva. Por el teorema del valor regular 8, sabemos que $\pi^{-1}q$ es un manifold. Entonces, para $p \in \pi^{-1}q$ se cumple que:*

$$ker(D_p\pi) = T_p(\pi^{-1}(q))$$

Demostración. Los dos lados de la igualdad son subespacios vectoriales de T_pM de dimensión $m-n$. Basta probar que uno está contenido en el otro. Tomemos $v = [\gamma] \in T_p(\pi^{-1}(q))$ y calculemos

$$D_p\pi(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}_{t=0} p = 0$$

Concluimos que $v \in ker D_p\pi$ □

Lema 42. *Supongamos que $\pi : M \to N$ es una submersión sobreyectiva. Consideremos la ditribución $E = ker D\pi$. Entonces $\Gamma(E) \subset \mathfrak{X}(M)$ es una subálgebra de Lie del álgebra de campos vectoriales en M.*

Demostración. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es tangente a E si y solo si $X \sim_\pi 0$. Sabemos que si $X \sim_\pi 0$ y $Y \sim_\pi 0$ se tiene que $[X, Y] \sim_\pi [0, 0] = 0$. Por lo tanto, $[X, Y] \in \Gamma(E)$. □

Definición 53. *Una distribución E en M se llama una foliación si $\Gamma(E) \subset \mathfrak{X}(M)$ es una subálgebra de Lie*

Proposición 43. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = Lie(G)$ es una subálgebra de Lie. Entonces hay una foliación en G definida así*

$$E_g = \{x \in T_gG : x = v^L(g), para \quad v \in \mathfrak{h}\}$$

Definición 54. *Sea E una foliación en M y $p \in M$. La hoja de p es el conjunto:*

$$S_p := \{q \in M : existe \quad \gamma : [0, 1] \to M \quad tal\ que \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \gamma'(t) \in E_{\gamma(t)}\}$$

Lema 44. *Sea E una foliación en M. Se tiene:*

- *Si $q \in S_p$ entonces $S_p = S_q$*
- *La relación $p \sim q$ si y solo si $p \in S_q$ es una relación de equivalencia. En particular, M es la unión disjunta de las hojas de la foliación.*
- *Si S es una hoja de E entonces S admite una única estructura de manifold tal que la inclusión $i : S \to M$ es una inmersión.*

Enunciaremos el teorema de Ado, el cual corresponde a un resultado en extremo poderoso, aunque precisamente llega a ser más útil el enunciado que la misma prueba, la cual es extensa, la cuál tiene en consideración varios casos particulares, la prueba totalmente es algebraica y puede ser consultada en [12], a partir de la página 54.

Teorema 45. *Toda álgebra de Lie de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$*

Definición 55. *Denotaremos por $GLie^0$ a la categoría de grupo de Lie conexos y por $\tilde{G}Lie$ a la categoría de grupos de Lie simplemente conexos.*

Proposición 46. *Un subgrupo abierto de un grupo de Lie es también cerrado.*

Lema 47. *Sea G un grupo de Lie conexo y $U \subset G$ un abierto que contiene la identidad. Entonces todo elemento $g \in G$ se puede escribir de la forma $g = g_1 g_2 \dots g_n$ donde $g_i \in U$*

Lema 48. *El funtor $Lie : GLie^0 \to ALie$ es fiel, es decir, si G es un grupo de Lie conexo y $\phi, \varphi : G \to H$ son homomorfismos tales que $D_e(\varphi) = D_e(\phi)$ entonces $\varphi = \phi$*

Demostración. Si $g = exp(v)$ entonces:

$$\varphi(exp(v)) = exp(D_e(\varphi)(v)) = exp(D_e(\phi)(v)) = \phi(exp(v))$$

Es decir, ϕ coincide con φ en la imagen de la exponencial. Como la imagen de la exponencial contiene un abierto alrededor de la identidad, el lema anterior implica que $\varphi = \phi$ □

Proposición 49. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie. Entonces existe un grupo de Lie H y un morfismo de grupos de Lie $i : H \to G$ tal que $Lie(H) \cong \mathfrak{h}$ y $Di = \iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$*

Prueba.

La subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ determina una foliacion E en G, generada por los campos vectoriales invariantes v^L con $v \in \mathfrak{h}$. Definimos H como la hoja de E que pasa por la identidad. Veamos que si

$$H' := \{exp(v_1) \cdots exp(v_k) | v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{h}\}$$

Entonces $H = H'$. Probemos $H' \subseteq H$ por inducción sobre k. Para $k = 0$ es claro. Supongamos que la afirmación se cumple para $k-1$ entonces $exp(v_1) \dots exp(v_(k-1)) \in H$. La curva

$$\gamma(t) = exp(v_1) \dots exp(v_(k-1)) exp(tv_k)$$

es un camino tangente a la foliacion y por tanto $exp(v_1) \dots exp(v_k) \in H$. Probemos ahora que $H \subseteq H'$. Razonemos por contradicción. Supongamos que $H - H' \neq \emptyset$. Veamos que en

este caso $H - H'$ es abierto en H. Sea $x \in H - H'$ y $U = -U \subseteq H$ un abierto alrededor del cero tal que $exp : U \to exp(U)$ es un difeomorfismo. Entonces $exp(U)x \subseteq H$ es un abierto. Veamos que no intersecta a H'. Si $exp(v)x \in H'$ entonces $exp(v)x = exp(v_1) \dots exp(v_k)$ y por tanto $x = exp(-v)exp(v_1) \dots exp(v_k) \in H'$. Concluimos que H' es cerrado en H. Por otro lado, como la multiplicación es una funcion abierta, también sabemos que H' es abierto en H. Como H es conexo, concluimos que $H' = H$. Por una proposición sabemos que H tiene una única estructura de manifold tal que la inclusion $i : H \to G$ es una inmersión. La estructura de grupo en H es suave porque es la restriccion de la estructura de grupo en G. Concluimos que H tiene la estructura de grupo de Lie. Por construccion tenemos también que $Di(e) : Lie(H) \to Lie(G)$ identifica a $Lie(H)$ con $\mathfrak{h}$. ■

Corolario 50. *El funtor $Lie : GLie^0 \to ALie$ es esencialmente sobreyectivo.*

Demostración. Por el teorema de Ado sabemos que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = Lie(GL(n, \mathbb{R}))$, la proposición 49 implica que existe un grupo G tal que $Lie(G) \cong \mathfrak{g}$ □

Sea M un manifold conexo y fijemos un punto $p \in X$. La cubierta universal de X con base en $p \in X$ es el conjunto de clases de homotopia de caminos en X cuyo punto inicial es p.

$$\tilde{M} = \{[\gamma] | \gamma : [0, 1] \to M; \gamma(0) = p\},$$

donde la clase de equivalencia es respecto a la relación de homotopía de caminos con extremos constantes. Hay una proyección natural $\pi : \tilde{M} \to M$ dada por $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$

Si M es un manifold, $\tilde{M}$ se puede dotar de una única estructura de manifold tal que $\pi : \tilde{M} \to M$ es una cubierta. Además, $\tilde{M}$ es simplemente conexo.

Además, si $M = G$ es un grupo de Lie y $p = e$ entonces tiene una única estructura de grupo de Lie tal que $\pi : \tilde{G} \to G$ es un homormorfismo de grupos de Lie.

Proposición 51. *Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos que además es un difeomorfismo local, entonces $Lie(G) = Lie(H)$*

Proposición 52. *Sea H un grupo de Lie conexo y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo.Entonces φ es un espacio recubridor si y solo si $D\varphi(e)$ es un isomorfismo lineal.*

Corolario 53. *El funtor $Lie : \tilde{G}Lie \to ALie$ es esencialmente sobreyectivo.*

Prueba. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimension finita. Por el corolario 50 sabemos que existe un grupo de Lie G tal que $\mathfrak{g} \cong Lie(G)$. Por otro lado, $Lie(G) \cong Lie(G_e) \cong Lie(\tilde{G}_e)$. Concluimos que $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Lie de un grupo simplemente conexo. ■

Proposición 54. *Sea $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Considere el espacio vectorial:*

$$\mathcal{G}(\varphi) := \{(v, z) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} : z = \varphi(v)\}$$

Entonces:

- *$\mathcal{G}(\varphi)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$*
- *La función $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}(\varphi)$ dada por $v \mapsto (v, \varphi(v))$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

Proposición 55. *El funtor* $Lie : \tilde{G}Lie \to ALie$ *es pleno. Es decir, dado un grupo de Lie* G *simplemente conexo y un morfismo* $\varphi : Lie(G) \to Lie(H)$ *existe* $\bar{\varphi} : G \to H$ *tal que* $Lie(\bar{\varphi}) = \varphi$

Demostración. Escribamos $\mathfrak{g} = Lie(G)$, $\mathfrak{h} = Lie(H)$ y consideremos la subálgebra $\mathcal{G}(\varphi) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Por la proposición 49 existe un subgrupo inmerso conexo $\bar{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ tal que $Lie(\bar{\mathcal{G}}) = \mathcal{G}(\varphi)$. Sean π_1, π_2 las proyecciones de $\mathcal{G}$ en la primera y segunda coordenada. Las funciones π_i son la composición de la inclusión $\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ con las proyecciones, y por tanto son homomorfismos de grupos. Además, la derivada de π_1 en la identidad es un isomorfismo, por lo tanto, es un espacio recubridor. Como G es simplemente conexo y $\bar{\mathcal{G}}$ es conexo, concluimos que π_1 es un isomorfismo de grupos. Sea ϕ la función inversa de π_1 y definamos $\bar{\varphi} := \pi_2 \circ \phi$. Además

$$Lie(\bar{\varphi}) = D_e(\bar{\varphi}) = D_e(\pi_2) \circ D_e((\pi_1)^{-1}) = \varphi$$

□

Teorema 56. *El funtor* $Lie : \tilde{G}Lie \to ALie$ *es una equivalencia de categorías.*

Este resultado se convierte realmente en un corolario, dado que nociones como que el funtor es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo se mostraron con anterioridad.

Capítulo 6

Coquecigrue

El conocido "tercer teorema de Lie" establece una correspondencia fundamental entre los grupos de Lie y las álgebras de Lie, además de definir una equivalencia de categorías entre las álgebras de Lie y los grupos de Lie simplemente conexos. Una generalización de las álgebras de Lie son las álgebras de Leibniz, lo que plantea una pregunta natural: ¿existe un objeto algebraico que extienda el concepto de grupo de Lie y sirva como la "integración" de un álgebra de Leibniz, tal como los grupos de Lie integran las álgebras de Lie? Si tal estructura existiera, se denominaría *coquecigrue*, y por esta razón, este interrogante se conoce como el problema del coquecigrue.

A continuación daremos la definición de álgebra de Leibniz.

Definición 56. *Un álgebra de Leibniz sobre un campo K es un espacio vectorial L sobre K, con un producto bilineal llamado el corchete de Leibniz $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ el cual satisface la* ***identidad de Leibniz***

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] \tag{1}$$

para todo $x, y, z \in L$

Toda álgebra de Lie es un álgebra de Leibniz, para ello note que:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= 0 && \textit{identidad de Jacobi}\\
[x,[y,z]] &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] &&\\
[x,[y,z]] &= [y,-[z,x]] + [[x,y],z] && \textit{usamos bilinealidad y la antisimetría}\\
[x,[y,z]] &= [y,[x,z]] + [[x,y],z] && \textit{nuevamente se usa la antisimetria}\\
[x,[y,z]] &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] &&
\end{aligned}$$

Es importante aclarar que, en general, el corchete de un álgebra de Leibniz no es antisimétrico. Dada esta defición, quisieramos darle una generalización al teorema ya mencionado, por lo que la primera pregunta sería ¿cuál sería la correcta generalización de grupo de Lie? Establecemos como principio, que por lo menos, esta generalización del tercer teorema de Lie para algebras de Leibniz debe reducirse al teorema usual para algebras de Lie.

Introduciremos un concepto, el cuál es familiar, y es precisamente el de $\mathfrak{h}$-módulo, donde $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie.

Definición 57. *Un $\mathfrak{h}-$módulo es un $K-$espacio vectorial V junto con una aplicación $K-$bilineal*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \times V &\to V \\ (x, v) &\mapsto x \cdot v \end{aligned}$$

Que satisface la condición:

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) \tag{2}$$

Para todo $x, y \in \mathfrak{h}$ y $v \in V$

En este capítulo, el campo sobre el cual están definidas todas estas álgebras será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Sea L un álgebra de Leibniz como la definimos anteriormente. Si definimos la función multiplicación por izquierda como $ad(X)Y := [X, Y]$, entonces la identidad de Leibniz puede ser asumida como la siguiente afirmación: $ad(X) \in Der(L)$ para todo $X \in L$, donde $Der(L)$ denota el Álgebra de Lie de las derivaciones de L.

Está última afirmación se debe al hecho de que una derivación D cumple que:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

Luego,

$$\begin{aligned} ad(X)([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z]. \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{S} := \langle [X, X] : X \in L \rangle$ el ideal de L generado por todos los cuadrados. Observe que $\mathcal{S}$ es el menor ideal de L con la propiedad de que $\mathfrak{h} = L/\mathcal{S}$ es un álgebra de Lie. Para ello, note que si $\mathfrak{h}_1 = L/S_1$ es un álgebra de Lie, entonces, para cualquier elemento $\hat{X} \in \mathfrak{h}_1$, tenemos que $[\hat{X}, \hat{X}] = 0$, lo que implica que $[X, X] \in S_1$, y por tanto, concluimos que $\mathcal{S} \subset S_1$. Además, observe que el morfismo proyección $\pi : L \to \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Leibniz, es decir, $\pi([X, Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$ para todo $X, Y \in L$. También es un morfismo de $\mathfrak{h}$-módulos a izquierda, lo que significa que $\pi(\hat{\xi} \cdot X) = [\hat{\xi}, \pi(X)]$ para todo $X \in L$ y $\hat{\xi} \in \mathfrak{h}$. Recordemos que L se comporta como un $\mathfrak{h}$-módulo, donde el producto de un elemento $\hat{\xi} \in \mathfrak{h}$ con un elemento $X \in L$ está dado por la fórmula $\hat{\xi} \cdot X = [\xi, X]$. Veamos que está bien definido. En efecto, primero debemos verificar que la acción no depende del representante escogido. Supongamos que $\hat{\xi} \equiv \hat{\eta} \mod \mathcal{S}$, entonces $\xi - \eta \in \mathcal{S}$. Así, $\xi - \eta = \sum_{i=1}^{k} [X_i, X_i]$ para algunos $X_i \in L$. Por lo tanto

$$(\hat{\xi} - \hat{\eta}) \cdot X = [\xi - \eta, X] = \left[\sum_{i=1}^{k} [X_i, X_i], X \right] = \sum_{i=1}^{k} [[X_i, X_i], X].$$

Ahora aplicamos la identidad de Leibniz,

$$[X_i, [X_i, X]] = [[X_i, X_i], X] + [X_i, [X_i, X]].$$

Entonces, $[[X_i, X_i], X] = 0$. Con lo que $(\hat{\xi} - \hat{\eta}) \cdot X = 0$. En otras palabras, $\hat{\xi} \cdot X = \hat{\eta} \cdot X$. La linealidad se obtiene directamente del hecho de que el corchete de Leibniz es bilineal.

Ahora probemos que para todo $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathfrak{h}$ y $X \in L$, se cumple que:

$$[[\hat{\xi}, \hat{\eta}], X] = [\hat{\xi}, [\hat{\eta}, X]] - [\hat{\eta}, [\hat{\xi}, X]].$$

En efecto, por definición $[[\hat{\xi}, \hat{\eta}], X] = [[\xi, \eta], X]$. Por la definición de la acción, tenemos que el lado derecho de la igualdad es $[\xi, [\eta, X]] - [\eta, [\xi, X]]$. Por la identidad de Jacobi, tenemos que

$$[\xi, [\eta, X]] = [[\xi, \eta], X] + [\eta, [\xi, X]].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [[\hat{\xi}, \hat{\eta}], X] &= [[\xi, \eta], X] \\ &= [\xi, [\eta, X]] - [\eta, [\xi, X]] \\ &= [\hat{\xi}, [\hat{\eta}, X]] - [\hat{\eta}, [\hat{\xi}, X]]. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que L es un $\mathfrak{h}$-módulo, bajo el producto $\hat{\xi} \cdot X = [\xi, X]$, para $\hat{\xi} \in \mathfrak{h}$ y $X \in L$. Así, tenemos:

$$\pi(\hat{\xi} \cdot X) = [\pi(\xi), \pi(X)] = [\hat{\xi}, \pi(X)].$$

Recíprocamente, sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, L un $\mathfrak{h}$-módulo, y $\pi : L \to \mathfrak{h}$ un epimorfismo de $\mathfrak{h}$-módulos. Definamos una estructura de álgebra de Leibniz en L mediante $[X, Y] := \pi(X)Y$. Es claro que este corchete es bilineal. Verifiquemos ahora la identidad de Leibniz:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= \pi(X) \cdot [Y, Z] = \pi(X) \cdot (\pi(Y) \cdot Z) \\ &= [(\pi(X), \pi(Y)] \cdot Z + \pi(Y) \cdot (\pi(X) \cdot Z) \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]. \end{aligned}$$

Recordemos $[[X, Y], Z] = \pi([X, Y]) \cdot Z = \pi(\pi(X)Y) \cdot Z = [\pi(X), \pi(Y)] \cdot Z$

Definición 58. *Sea L un álgebra de Leibniz, y sea $\mathcal{E} \subset L$ un ideal tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset ker(ad)$. Entonces L se escinde sobre $\mathcal{E}$ si existe una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset L$ tal que $L = \mathcal{E} \oplus \mathfrak{h}$, es una suma directa de espacios vectoriales.*

En este caso, para $u, v \in \mathcal{E}$, $X, Y \in \mathfrak{h}$, se tiene

$$[u + X, v + Y] = Xv + [X, Y] \tag{3}$$

Ya que

$$[u + X, v + Y] = [u, v] + [u, Y] + [X, v] + [X, Y]$$

Dado que, $\mathcal{E} \subset ker(ad)$, se tiene que, $[u, \cdot] = 0$ para todo $u \in \mathcal{E}$.

Reciprocamente, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y un $\mathfrak{h}-$módulo V, considere $L := V \oplus \mathfrak{h}$, y defina el corchete dado por 3. Entonces, $(L, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Leibniz llamada el producto demisemidirecto de V y $\mathfrak{h}$.

Observación. *Los siguientes items se deducen a partir de la definición anterior:*

- $(L, [\cdot,\cdot])$ *es un álgebra de Leibniz, con* $L = V \oplus \mathfrak{h}$*, con el corchete dado por:*

$$[u + X, v + Y] = Xv + [X, Y]$$

Prueba. *Observe que el corchete es bilineal, por lo que resta probar que:*

$$[u + X, [v + Y, w + Z]] = [[u + X, v + Y], w + Z] + [v + Y, [u + X, w + Z]].$$

Para ello note que

$$\begin{aligned}
[u + X, [v + Y, w + Z]] &= [u + X, Yw + [Y, Z]] = X(Yw) + [X, [Y, Z]] \\
[[u + X, v + Y], w + Z] &= [Xv + [X, Y], w + Z] = [X, Y]w + [[X, Y], Z] \\
[v + Y, [u + X, w + Z]] &= [v + Y, Xw + [X, Z]] = Y(Xw) + [Y, [X, Z]]
\end{aligned}$$

Luego, usando la propiedad de $\mathfrak{h}-$*módulo, la identidad de Leibniz y los cálculos realizados arriba tenemos,*

$$\begin{aligned}
X(Yw) + [X, [Y, Z]] &= [X, Y]w + Y(Xw) + [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\
&= [X, Y]w + [[X, Y], Z] + Y(Xw) + [Y, [X, Z]]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[u+X, [v+Y, w+Z]] = [[u+X, v+Y], w+Z]+[v+Y, [u+X, w+Z]]$ ■

- $S \cong \mathfrak{h}V$

Prueba. *Recordemos, como* V *es un* $\mathfrak{h}-$*módulo, se define* $\mathfrak{h}V = \langle\{Xv | X \in \mathfrak{h}, v \in V\}\rangle$*.*

Por otro lado, $S = \langle[v+X, v+X] | v \in V, X \in \mathfrak{h}\rangle$*, pero* $[v+X, v+X] = Xv+[X, X] = Xv$*, por lo que* $S = \langle Xv | v \in V, X \in \mathfrak{h}\rangle = \mathfrak{h}V \oplus 0 \cong \mathfrak{h}V$ ■

- $ker(ad) = V \oplus \{X \in \mathfrak{h} : Xv = 0\ \forall v \in V\} \cap Z(\mathfrak{h})$

Prueba. $u + X \in ker(ad)$ *si y solo si* $ad(u + X)(v + Y) = 0$ *para todo* $v + Y \in L$ *si y solo si* $[u + X, v + Y] = Xv + [X, Y] = 0$ *si y solo si* $Xv = 0$ *y* $[X, Y] = 0$*. Finalmente, esto es equivalente a que* $u \in V$ *(u no tiene restricciones) y* $X \in \{X \in \mathfrak{h} : Xv = 0\ \forall v \in V\} \cap Z(\mathfrak{h})$ *pues* $Xv = 0$ *y* $[X, Y] = 0$*, probando así la igualdad.* ■

- $V = V \oplus 0$ *es un ideal tal que* $\mathcal{S} \subset V \subset ker(ad)$

Prueba. *Ya vimos que* $S = \mathfrak{h}V \oplus 0 \subset V \oplus 0$*, además, por el item anterior* $V \oplus 0 \subset ker(ad)$*. Veamos que* $V \oplus 0$ *es un ideal, para ello calculemos* $[v, u + X]$ *y* $[u + X, v]$*.*

$$\begin{aligned}
[v + 0, u + X] &= 0u + [0, X] = 0 \in V \\
[u + X, v + 0] &= Xv + [X, 0] = Xv \in V
\end{aligned}$$

Luego, $V \oplus 0$ *es un ideal.* ■

- $L/V \cong \mathfrak{h}$*, para ello considere el homomorfismo de álgebras* $f : L \to \mathfrak{h}$ *dado por* $f(v + X) = X$*, note que* $f([u + X, v + Y]) = f(Xv + [X, Y]) = [X, Y] = [f(u + X), f(v+Y)]$*. Claramente,* f *es un homomorfismo sobreyectivo con kernel* V*, luego por el primer teorema de isomorfismo tenemos el isomorfismo deseado.*

El último item nos permite concluir que L *es split sobre* V

Teorema 57. *Sea L un álgebra de Leibniz, y sea $\mathcal{E}$ un ideal de L tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset ker(ad)$. Entonces L se escinde sobre $\mathcal{E}$ si y solo si L es un producto demisemidirecto de $\mathcal{E}$ con un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Adicionalmente, probemos las siguientes afirmaciones

- Si un álgebra de Leibniz L es split sobre $\mathcal{S}$ con la subalgebra de Lie complementaria $\mathfrak{h}$, entonces $\mathfrak{h} \cdot \mathcal{S} = \mathcal{S}$

  Prueba. Anteriormente, ya se había probado que si $L = V \oplus \mathfrak{h}$ entonces $S \cong \mathfrak{h}V$, luego si $V = S$ se tiene que $\mathfrak{h} \cdot S = S \oplus 0 = S$ ■

- De manera reciproca, si $L = V \oplus \mathfrak{h}$ es un producto semidirecto y si $\mathfrak{h} \cdot V = V$, entonces $\mathcal{S} \cong V$.

  Prueba. Anteriormente, se había probado que $\mathfrak{h} \cdot V \cong S$ y como $\mathfrak{h} \cdot V = V$ concluimos que $S \cong V$ ■

Observación. *Un álgebra de Leibniz puede escindirse sobre más de un ideal.*

Ejemplo 11. *Sea $V := \mathbb{R}^n$ y sobre $\mathfrak{g} := V \oplus gl(V) \oplus gl(V)$, defina*

$$[u + X + Y, v + U + V] := Yv + [X, U] + [Y, V]$$

para $u, v \in V, X, Y, U, V \in gl(V)$. Luego:

- $S \cong V$
- $ker(ad) = V \oplus \{aI : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{0\}$*, donde $I \in gl(V)$ denota la matriz identidad.*
- $\mathfrak{g}$ *se escinde sobre S con complemento $gl(V) \oplus gl(V)$.*
- $\mathfrak{g}$ *también se escinde sobre $ker(ad)$ con complemento $sl(V) \oplus gl(V)$.*

Prueba.

- $[u + X + Y, u + X + Y] = Y(u) + [X, X] + [Y, Y] = Y(u)$ con $Y \in gl(V)$ y $u \in V$ como Y es arbitrario, podemos considerar un operador sobreyectivo, así $S = \langle [u + X + Y, u + X + Y] | u + X + Y \in \mathfrak{g} \rangle = \langle V \oplus 0 \oplus 0 \rangle \cong V$
- Calculemos, $ad(x)(y) = [x, y]$ con $x = u + X + Y, y = v + U + V$, $x \in ker(ad), y \in \mathfrak{g}$, luego

  $$0 = ker(x)(y) = [u + X + Y, v + U + V] = Y(v) + [X, U] + [Y, V]$$

  Luego, tenemos que: $Y(v) = 0$ para todo $v \in V$. Como v es arbitrario, entonces necesariamente se tiene que $Y = 0$. Finalmente, como $XU - UX = [X, U] = 0$ se tiene que $XU = UX$ para todo $U \in gl(V)$. Luego, X es una matriz que conmuta con todas las matrices, necesariamente se tiene que X es una matriz diagonal, es decir, $X = aI$ donde $a \in \mathbb{R}$ y I es la matriz identidad.
- Claramente, $\mathfrak{g} \cong S \oplus gl(V) \oplus gl(V)$ por la primera afirmación de este ejemplo. Además, $gl(V) \oplus gl(V)$ es un álgebra de Lie. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ está escindida sobre S.

- Observe que $\mathfrak{g} := V \oplus gl(V) \oplus gl(V) = (V \oplus \{aI : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{0\}) \oplus (0 \oplus sl(V) \oplus gl(V))$, donde solo resta probar que $gl(V) = sl(V) \oplus \{aI : a \in \mathbb{R}\}$, lo cual se puede resolver como un ejercicio de álgebra lineal, donde basta con escribir la diagonal de una matriz arbitraria A como la suma de una matriz diagonal constante y una cuyos elementos de la diagonal suman cero, se plantean $n+1$ ecuaciones y resta probar que estas ecuaciones tienen una única solución.

■

Definición 59. *Una* ***dialgebra*** $(\mathcal{A}, \vdash, \dashv)$ *es un espacio vectorial* $\mathcal{A}$ *junto con dos aplicaciones asociativas y bilineales* $\vdash, \dashv \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *que satisfacen los siguientes axiomas. Para todos* $x, y, z \in \mathcal{A}$*,*

$$(D1) \qquad x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \dashv z$$
$$(D2) \qquad x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$$
$$(D3) \qquad (x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z)$$

Proposición 58. *Dada una dialgebra* $(\mathcal{A}, \vdash, \dashv)$*, definiendo el corchete por* $[x, y] = x \vdash y - y \dashv x$ *vuelve a* $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$ *un álgebra de Leibniz.*

Prueba. Realicemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] &= [x, y \vdash z - z \dashv y] \\
&= x \vdash (y \vdash z - z \dashv y) - (y \vdash z - z \dashv y) \dashv x \\
&= x \vdash (y \vdash z) - x \vdash (z \dashv y) - (y \vdash z) \dashv x + (z \dashv y) \dashv x \\
[[x, y], z] &= [x \vdash y - y \dashv x, z] \\
&= (x \vdash y - y \dashv x) \vdash z - z \dashv (x \vdash y - y \dashv x) \\
&= (x \vdash y) \vdash z - (y \dashv x) \vdash z - z \dashv (x \vdash y) + z \dashv (y \dashv x) \\
[y, [x, z]] &= [y, x \vdash z - z \dashv x] \\
&= y \vdash (x \vdash z - z \dashv x) - (x \vdash z - z \dashv x) \dashv y \\
&= y \vdash (x \vdash z) - y \vdash (z \dashv x) - (x \vdash z) \dashv y + (z \dashv x) \dashv y
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad $D3$ y $D1$ tenemos que:

$$(y \dashv x) \vdash z = (y \vdash x) \vdash z = y \vdash (x \vdash z)$$

Además, usando la propiedad $D2$ y la asociatividad de $\dashv$, tenemos que:

$$z \dashv (x \vdash y) = z \dashv (x \dashv y) = (z \dashv x) \dashv y$$

Realicemos los siguientes calculos:

$$\begin{aligned}
[[x, y], z] + [y, [x, z]] &= (x \vdash y) \vdash z - (y \dashv x) \vdash z - z \dashv (x \vdash y) + z \dashv (y \dashv x) + \\
&\quad y \vdash (x \vdash z) - y \vdash (z \dashv x) - (x \vdash z) \dashv y + (z \dashv x) \dashv y \\
&= (x \vdash y) \vdash z - \cancel{y \vdash (x \vdash z)} - \cancel{(z \dashv x) \dashv y} + z \dashv (y \dashv x) + \\
&\quad \cancel{y \vdash (x \vdash z)} - y \vdash (z \dashv x) - (x \vdash z) \dashv y + \cancel{(z \dashv x) \dashv y} \\
&= (x \vdash y) \vdash z + z \dashv (y \dashv x) - y \vdash (z \dashv x) - (x \vdash z) \dashv y \\
&= (x \vdash y) \vdash z - (x \vdash z) \dashv y - y \vdash (z \dashv x) + z \dashv (y \dashv x)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la propiedad $D1$ y la asociatividad (tanto de $\vdash$ como $\dashv$), podemos concluir que:

$$\begin{aligned}[[x,y],z]+[y,[x,z]] &= x \vdash (y \vdash z) - x \vdash (z \dashv y) - (y \vdash z) \dashv x + (z \dashv y) \dashv x \\ &= [x,[y,z]]\end{aligned}$$

Probando así que este producto define un álgebra de Leibniz.

■

Ejemplo 12. *Sea V un espacio vectorial. En $\mathcal{A} := V \oplus End(V)$, se define:*

$$\begin{aligned}(u,X) \vdash (v,Y) &:= (Xv, XY) \\ (u,X) \dashv (v,Y) &:= (0, XY)\end{aligned}$$

Entonces el álgebra de Leibniz $(\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$ resulta ser exactamente el producto demisemidirecto de V con el álgebra de Lie $gl(V) = End(V)$.

Para ello note que:

$$\begin{aligned}[(u,X),(v,Y)] =& (u,X) \vdash (v,Y) - (v,Y) \dashv (u,X) \\ =& (Xv, XY) - (0, YX) = (Xv, [X,Y])\end{aligned}$$

Solo queda demostrar que $(\mathcal{A}, \vdash, \dashv)$ es una dialgebra. Sin embargo, esta verificación se puede realizar de manera directa mediante cálculos explícitos, por lo que omitiremos los detalles aquí.

Definición 60. *Un rack puntuado $(Q, \circ, 1)$ es un conjunto Q con una operación binaria $\circ$ y un elemento distinguido $1 \in Q$ tal que los siguientes axiomas se satisfacen*

1. *$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$ (distributividad por izquierda)*
2. *Para cada $a, b \in Q$, existe un único $x \in Q$ tal que $a \circ x = b$*
3. *$1 \circ x = x$ y $x \circ 1 = 1$ para todo $x \in Q$*

Para un magma $(Q, \circ)$, sea $Aut(Q)$ el conjunto de permutaciones de Q que preserva $\circ$, esto es, una permutación ψ de Q está en $Aut(Q)$ sí solo sí $\psi(x \circ y) = \psi(x) \circ \psi(y)$ para todo $x, y \in Q$. Si denotamos las traslaciones a izquierda en un rack $(Q, \circ)$ por $\phi(x)(y) := x \circ y$, entonces los axiomas de distribución a izquierda simplemente se vuelven en que $\phi(x) \in Aut(Q)$ para todo $x \in Q$.

Proposición 59. *En un grupo G la operación $x \circ y = xyx^{-1}$ convierte a $(G, \circ, 1)$ en un rack puntuado, donde 1 es el elemento identidad de G.*

Prueba.

1. Observe las siguiente igualdades:

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) = x(yzy^{-1})x^{-1} &= xyx^{-1}xzx^{-1}xy^{-1}x^{-1} \\ &= (xyx^{-1})(xzx^{-1})(xyx^{-1})^{-1} \\ &= (x \circ y) \circ (x \circ z) \end{aligned}$$

Lo cual verifica la primera propiedad de rack puntuado.

2. Sean $a, b \in G$ y considere $x = a^{-1}ba$ entonces

$$a \circ x = axa^{-1} = aa^{-1}baa^{-1} = b$$

Esto muestra la existencia de este x, para la unicidad note que si x cumple que $a \circ x = b$ entonces:

$$b = a \circ x = axa^{-1} \Rightarrow x = a^{-1}ba$$

Mostrando así la unicidad.

3. $1 \circ x = 1x1^{-1} = x$ y $x \circ 1 = x1x^{-1} = xx^{-1} = 1$ para todo $x \in Q$.

■

Definición 61. *Un Rack de Lie $(Q, \circ, 1)$ es un manifold suave Q con la estructura de un rack puntuado en el cual la operación $\circ : Q \times Q \to Q$ es una función suave.*

Note que la operación de conjugación en un grupo de Lie lo vuelve un *rack de Lie*.

Lema 60. *Sea H un grupo de Lie y sea V un H-módulo. En $Q := V \times H$ definamos una operación binaria $\circ$ por*

$$(u, A) \circ (v, B) := (Av, ABA^{-1}) \tag{4}$$

para todos $u, v \in V, A, B \in H$. Definiendo $\mathbf{1} = (0, 1)$, se tiene que $(Q, \circ, \mathbf{1})$ es un rack de Lie, el cual se conoce como rack de Lie lineal

Prueba. Sean $u, v, w \in V$ y $A, B, C \in H$

1. $(u, A) \circ ((v, B) \circ (w, C)) = (u, A) \circ (Bw, BCB^{-1}) = (ABw, ABCB^{-1}A^{-1})$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} ((u, A) \circ (v, B)) \circ ((u, A) \circ (w, C)) &= (Av, ABA^{-1}) \circ (Aw, ACA^{-1}) \\ &= (ABA^{-1}Aw, ABA^{-1}ACA^{-1}AB^{-1}A^{-1}) \\ &= (ABw, ABCB^{-1}A^{-1}) \\ &= (u, A) \circ ((v, B) \circ (w, C)) \end{aligned}$$

donde en la penúltima linea se usa las propiedades del H- módulo y las propiedades del grupo.

2. Sean $a = (u, A)$ y $b = (v, B)$ dos elementos de Q, considere $x := (A^{-1}v, A^{-1}BA)$. Note que

$$a \circ x = (u, A) \circ (A^{-1}v, A^{-1}BA) = (AA^{-1}v, AA^{-1}BAA^{-1}) = (v, B))$$

donde hemos probado la existencia de la solución de la ecuación $a \circ x = b$. Supongamos que $y = (w, C)$ es una solución de la ecuación, tenemos que:

$$(v, B) = b = a \circ y = (u, A) \circ (w, C) = (Aw, ACA^{-1})$$

Luego, $Aw = v$ y $B = ACA^{-1}$. Poniendo a actuar A^{-1} en la primera igualdad y usando propiedades del grupo tenemos (respectivamente) que $w = A^{-1}v$ y $C = A^{-1}BA$, por lo tanto, $x = y$. Probando de esta manera la unicidad.

3. Sea $x = (w, C)$ y $\mathbf{1} = (0, 1)$. Se tiene que:

$$(0,1) \circ (w,C) = (1w, 1C1^{-1}) = (w,C)$$
$$(w,C) \circ (0,1) = (C0, C1C^{-1}) = (0, CC^{-1}) = (0,1)$$

■

Teorema 61. *Sea $(Q, \circ, 1)$ un rack de Lie, y sea $\mathfrak{g} = T_1Q$. Entonces existe una función bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que:*

1. *$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Leibniz.*
2. *Para cada $x \in Q$, $\Phi(x) := D_1\phi(x)$ es un automorfismo de $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$.*
3. *Si $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ es definida por $X \mapsto ad(X)$, donde $ad(X)(Y) = [X, Y]$, entonces $ad = D_1\Phi(x)$*

Prueba. Sea Q un rack de Lie. Para cada $x \in Q$, $\phi(x)(1) = x \circ 1 = 1$, derivando la función $\phi(x) : Q \to Q$ se obtiene la función lineal $\Phi(x) = D\phi(x) : T_1Q \to T_1Q$. Además, cada $\phi(x)$ es invertible, por lo que cada $\Phi(x) \in GL(T_1Q)$.

Considere la función $\Phi : Q \to GL(T_1Q)$, la cuál satisface que $\Phi(1) = I$, pues

$$\Phi(1) = D_1\phi(1) : T_1Q \to T_1Q$$

Donde, si $X \in T_1Q, D_1(\phi(1))(X) = \phi(1) \circ X$, así, para un $a \in Dom(X), X(a) \in Q$ y $\phi(1)(X(a)) = 1 \circ X(a) = X(a)$, donde en la última cadena de igualdades "$\circ$" hace referencia a la operación del rack, además muestra que $\Phi(1) = D_1(\phi(1)) = I$, donde I es la función identidad.

Derivando la función $\Phi : Q \to GL(T_1Q)$, obtenemos $ad := D_1(\Phi(x)) : T_1Q \to gl(T_1Q)$. Donde se realiza la identificación usual del espacio tangente en la identidad de $GL(V)$ para un espacio vectorial con el álgebra general lineal de Lie $gl(V)$. Consideremos entonces:

$$[X, Y] := ad(X)(Y)$$

para todos $X, Y \in T_1Q$.

En términos de las multiplicaciones $\phi(x)$, la propiedad distributiva de los racks puede expresarse de la siguiente manera:

$$\phi(x)(\phi(y)z) = x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ y) = (\phi(x)y) \circ (\phi(x)z) = \phi(\phi(x)y)(\phi(x)z) \quad (5)$$

Derivando la ecuación 5 en $1 \in Q$, primero respecto a z y luego respecto a y obtenemos

$$\Phi(x)[Y, Z] = [\Phi(x)Y, \Phi(x)Z] \quad (6)$$

para todo $x \in Q$, $Y, Z \in T_1Q$. Esto expresa la condición de que para cada $x \in Q$, $\Phi(x) \in Aut(T_1Q, [\cdot,\cdot])$.

Si se deriva 6 en 1 se obtiene:

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \tag{7}$$

para todo $X, Y, Z \in T_1Q$

■

Ejemplo 13. *Para ilustrar el teorema inmediatamente anterior, describiremos la estructura del álgebra de Leibniz tangente del rack de Lie lineal $(Q, \circ, 1)$ del lema 60. Sea $\mathfrak{h}$ el algebra de Lie del grupo de Lie H. Podemos identificar T_1Q con $\mathfrak{g} := V \oplus \mathfrak{h}$. Para $u \in V, A \in H$, la derivada $\Phi(u, A) = D_1\phi(u, A) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ está dado por:*

$$\Phi(u, A)(v + X) = Av + Ad(A)X$$

para todo $v \in V, X \in \mathfrak{h}$, donde $Ad : H \to GL(\mathfrak{h})$ es la representación adjunta. Derivando esta, se obtiene que

$$[u + X, v + Y] = Xv + [X, Y] \tag{8}$$

para todo $u, v \in V, X, Y \in \mathfrak{h}$. Se puede observar precisamente, que el álgebra de Leibniz tangente en la identidad para el Rack de Lie $Q = V \times H$ resulta ser el producto demisemidirecto de V con $\mathfrak{h}$

Teorema 62. *Sea H un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, sea V un $H-$módulo, y sea $(Q, \circ, 1)$ el Rack de Lie lineal definido por 4, donde $Q = V \times H$. Entonces el álgebra de Leibniz tangente de Q es el producto demisemidirecto $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$ con el corchete dado por 8.*

Recíprocamente, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Leibniz escindida. Entonces existe un Rack de Lie lineal Q con álgebra de Leibniz tangente isomorfo a $\mathfrak{g}$.

Prueba. Mostraremos únicamente la segunda afirmación. Sea $\mathfrak{g} = E \oplus \mathfrak{h}$ un álgebra escindida, donde E es un ideal con $S \subset \mathcal{E} \subset ker(ad)$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie. Ya se mostró que $\mathfrak{g}$ es el producto demisemidirecto de E con $\mathfrak{h}$. Sea H el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Sea $Q = E$, y note que podemos identificar $\mathfrak{g}$ con T_1Q. Dotemos a Q con estructura de Rack de Lie $(Q, \circ, 1)$ donde $\circ$ esta dado por 4. Finalmente, el resultado se sigue de la discusión inmediatamente anterior al enunciado de este teorema. ■

Resulta natural especular que los Rack de Lie en si mísmos constituyen una respuesta al problema del Coquecigrue. No obstante, mostraremos que cada álgebra de Leibniz es el algebra de Lie tangente de un rack. En efecto, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Leibniz con $ad(X)Y = [X, Y]$. En $\mathfrak{g}$, defina

$$X \circ Y := exp(ad(X)Y)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} X \circ (Y \circ Z) &= exp(ad(X)exp(ad(Y)Z)) \\ &= exp(exp(ad(X)AD(Y)))exp(ad(X)Z) \\ &= exp(ad(exp(ad(X)Y)))exp(ad(X)Z) \\ &= (X \circ Y) \circ (X \circ Y) \end{aligned}$$

También, $X \circ 0 = 0$ y $0 \circ X = X$. Así $(\mathfrak{g}, \circ)$ es un rack de Lie.

Ahora bien, dado que la motivación de todo este capítulo se trata de una generalización del tercer teorema de Lie, se esperaría que en el caso de un álgebra de Lie se asocie con un grupo de Lie, dado que no es el caso, el rack no cumple con las condiciones mínimas para ser el coquecigrue de un álgebra de Leibniz.

Ejemplo 14. *Analizaremos como $(\mathfrak{g}, \circ)$ está relacionado al rack conjugado del grupo de Lie G. Esta relación puede ser observaba en la estructura del fibrado tangente del grupo de Lie $TG = \mathfrak{g} \rtimes G$. La conjugación en TG está dada por*

$$(X, a) \circ (Y, b) = (X + Ad(a)Y - Ad(a^{-1})X, aba^{-1})$$

Para $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in G$. Considere ahora el gráfico $\{(X, expX) : X \in \mathfrak{g}\}$ del mapa exponencial. Este gráfico no es, en general, un subgrupo de TG. No obstante, es un subrack; de lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} (X, expX) \circ (Y, expY) &= (Ad(expX)Y, expXexpYExp(-X)) \\ &= (Ad(expX)Y, exp(Ad(expX)Y)) \end{aligned}$$

Este subrack claramente es solo una copia de $(\mathfrak{g}, \circ)$. En realidad, es el gráfico del homomorfismo de racks $(\mathfrak{g}, \circ) \to (Aut(\mathfrak{g}), \circ); X \mapsto Ad(expX)$

Capítulo 7

Digrupos

En este capítulo presentamos un objeto central en el estudio del problema del coquecigrue, cuya relevancia radica en su profunda conexión con los racks de Lie. En particular, mostraremos que dichos racks pueden ser construidos de manera natural a partir de estructuras denominadas digrupos, las cuales ofrecen un marco algebraico adecuado para comprender y generalizar varios aspectos clave de este problema.

Definición 62. *Un disemigrupo* $(G, \vdash, \dashv)$ *es un conjunto* G *junto con dos operaciones binarias* $\vdash$ *y* $\dashv$ *que satisfacen los siguientes axiomas. Para cada* $x, y, z \in G$

- *(G1)* $(G, \vdash)$ *y* $(G, \dashv)$ *son semigrupos.*
- *(G2)* $x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \dashv z$.
- *(G3)* $x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$.
- *(G4)* $(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z$

  Un disemigrupo es un dimonoide si

- *(G5) existe un elemento* $1 \in G$ *tal que* $1 \vdash x = x \dashv 1 = x$ *para todo* $x \in G$

  Un dimonoide es un digrupo si

- *(G6) para todox* $\in G$ *existe* $x^{-1} \in G$ *tal que* $x \vdash x^{-1} = x^{-1} \dashv x = 1$

Definición 63. *Un elemento* e *en un disemigrupo es llamado una unidad barra si este satisface* $e \vdash x = x \dashv e = x$ *para todo* x.

Observación. *El axioma (G5) afirma que una unidad barra existe en un dimonoide, pero no se asume que sea única. Note que un digrupo es un grupo si y solo si* $\vdash = \dashv$ *si y solo si* 1 *es la única bar-unidad.*

De igual forma, gracias al axioma (G2), la expresión $x \vdash y \dashv z$ *no presenta ninguna ambigüedad.*

Lema 63. *Sea* H *un grupo y* M *un conjunto en el cuál* H *actúa por la izquierda. Suponga que exista un punto fijo* $e \in M$*, es decir,* $h \cdot e = e$ *para todo* $h \in H$*, y suponga que* H *actúa transitivamente en* $M \backslash \{e\}$*, es decir, para todos* $m, n \in M \backslash \{e\}$ *existe un* $h \in H$ *tal*

que $m = h \cdot n$. En $G := M \times H$, se define:

$$(u,h) \vdash (v,k) = (h \cdot v, hk)$$
$$(u,h) \dashv (v,k) = (u, hk)$$

Para todo $u, v \in M$, $h.k \in H$. Entonces $(G, \vdash, \dashv)$ es un digrupo con una bar-unidad distinguida $(e, 1)$. El inverso de (u,h) es (e, h^{-1})

Prueba.

- (G1) Es inmediato que $\vdash, \dashv$ son cerradas. Verifiquemos que estas operaciones son asociativas:

$$((u,h) \vdash (v,k)) \vdash (w,l) = (hv, hk) \vdash (w,l) = (hk \cdot w, hkl)$$
$$(u,h) \vdash ((v,k) \vdash (w,l)) = (u,h) \vdash (k \cdot w, kl) = (h \cdot (k \cdot w), hkl)$$

  Para todos $u, v, w \in M$ y $h, k, l \in H$, donde la igualdad resulta de las dos lineas anteriores y el hecho de que H actua por izquierda sobre M.

  Ver que $\dashv$ es asociativa resulta ser similar, pues se debe replicar las cuentas realizadas con $\vdash$.

- (G2) Considere $u, v, w \in M$ y $h, k, l \in H$

$$(u,h) \vdash ((v,k) \dashv (w,l)) = (u,h) \vdash (v, kl) = (h \cdot v, hlk)$$
$$((u,h) \vdash (v,k)) \dashv (w,l) = (h \cdot v, hk) \dashv (w,l) = (h \cdot v, hkl)$$

  Mostrando así que se cumple (G2)

- (G3) Considere $u, v, w \in M$ y $h, k, l \in H$

$$(u,h) \dashv ((v,k) \vdash (w,l)) = (u,h) \dashv (k \cdot w, kl) = (u, hkl)$$
$$(u,h) \dashv ((v,k) \dashv (w,l)) = (u,h) \dashv (v, kl) = (u, hkl)$$

  Mostrando así que se cumple (G3)

- (G4) Considere $u, v, w \in M$ y $h, k, l \in H$

$$((u,h) \dashv (v,k)) \vdash (w,l) = (u, hk) \vdash (w,l) = ((hk) \cdot w, hkl)$$
$$((u,h) \vdash (v,k)) \vdash (w,l) = (h \cdot v, hk) \vdash (w,l) = ((hk) \cdot w, hkl)$$

  Mostrando así que se cumple (G4)

- (G5) Veamos que $(e, 1)$ es la unidad-barra buscada. Para ello, considere $(u,h) \in M \times H$

$$(e,1) \vdash (u,h) = (1 \cdot v, 1h) = (v,h)$$
$$(u,h) \dashv (e,1) = (u, h1) = (u,h)$$

  Mostrando así que se cumple (G5)

- (G6) Veamos que para $(u,h) \in M \times H$, su "inverso" es (e, h^{-1})

$$(u,h) \vdash (e,h^{-1}) = (h \cdot e, hh^{-1}) = (e,1)$$
$$(e,h^{-1}) \dashv (u,h) = (e, h^{-1}h) = (e,1)$$

  Mostrando así que se cumple (G6)

Hemos probado los 6 axiomas de digrupo. ■

Sea $(G, \vdash, \dashv)$ un digrupo. Se supone que el semigrupo $(G, \vdash)$ tiene un elemento neutro a izquierda e inversos a derecha x^{-1} para cada $x \in G$. Los semigrupos con esta estructura adicional fueron llamados por Kinyon como "semigrupos a la derecha", si bien no es como suelen llamarla en la literatura de semigrupos corresponde a un descripción de las propiedades que tiene, por esa razón Kinyon lo nombró así y por esa misma razón los llamaremos así en este trabajo. Análogamente, $(G, \dashv)$, el cuál tiene un elemento neutro a derecha 1 e inversos a derecha x^{-1} para cada $x \in G$, es un "semigrupo a la izquierda".

Lema 64. *Sea $(G, \vdash)$ un semigrupo a la derecha, sea $J := \{x^{-1} : x \in G\}$, y sea $E := \{e : e \vdash x = x, \forall x \in G\}$.*

1. *$x^{-1} \vdash x \vdash y = x \vdash x^{-1} \vdash y = y$ para todo $x, y \in G$*
2. *$x \vdash 1 = (x^{-1})^{-1}$ para todo $x \in G$.*
3. *$((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$ para todo $x \in G$.*
4. *$(x \vdash y)^{-1} = y^{-1} \vdash x^{-1}$ para todo $x, y \in G$.*
5. *J es un grupo y E es un semigrupo nulo a derecha.*
6. *$G \to J; x \mapsto (x^{-1})^{-1}$ es un homomorfismo sobreyectivo de semigrupos a la derecha con kernel E.*
7. *$G \to E; x \mapsto x^{-1} \vdash x$ es un homomorfismo sobreyectivo de semigrupos a la derecha con kernel J.*
8. *$G = J \vdash E$ es isomorfo a la suma directa de J y E*

Prueba.

1. $(x^{-1} \vdash x) \vdash y = (x^{-1} \dashv x) \vdash y = 1 \vdash y = y$ donde usamos las propiedades (G4), (G6) y (G5). Adicionalmente, $(x \vdash x^{-1}) \vdash y = 1 \vdash y = y$ donde usamos las propiedades (G6) y (G5).
2. Realizaremos las siguiente demostración, y es que los inversos a la derecha son únicos, para ello consideremos $x \in G$ y x^{-1}, y tales que $x \vdash x^{-1} = x \vdash y = 1$. Por el item anterior y la igualdad anterior, tenemos que $y = x^{-1} \vdash (x \vdash y) = x^{-1} \vdash (x \vdash x^{-1}) = x^{-1}$. Probando la unicidad de los inversos a derecha. Note que $(x^{-1} \vdash x) \vdash 1 = (x^{-1} \dashv x) \vdash 1 = 1 \vdash 1 = 1$ donde usamos las propiedades (G4) y (G6), cómo el inverso en un grupo es único, se tiene que $x \vdash 1 = (x^{-1})^{-1}$
3. Usando el item anterior con x^{-1}, se tiene que $x^{-1} \vdash 1 = ((x^{-1})^{-1})^{-1}$ entonces, $x^{-1} \vdash (x^{-1})^{-1} = 1$. Usando la unicidad del inverso en grupos, tenemos que $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$.
4. Note que, $x \vdash y \vdash y^{-1} \vdash x^{-1} = x \vdash (y \vdash y^{-1}) \vdash x^{-1} = x \vdash (1 \vdash x^{-1}) = x \vdash x^{-1} = 1$. Por la unicidad de los inversos a derecha, se tiene que $(x \vdash y)^{-1} = y^{-1} \vdash x^{-1}$
5. Veamos primero que $(J, \vdash)$ es un grupo. Por el item 4, es claro que la multiplicación es cerrada en J. Y por definición de $\vdash$ es una operación asociativa. De igual forma, existe un neutro y un inverso cuando se multiplica por derecha, veremos que en este caso son inversos tambien por derecha. Sea $x^{-1} \in J$, su inverso $(x^{-1})^{-1}$ cumple que $x^{-1} \vdash (x^{-1})^{-1} = 1$, adicionalmente, por el item 3 $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$, luego

$((x^{-1})^{-1})^{-1} \vdash x^{-1} = 1$, probando la existencia de inversos por ambos lados. Para ver la existencia de un neutro, calculemos $x^{-1} \vdash 1$, el cual es igual a $((x^{-1})^{-1})^{-1}$ por el item 2, finalmente, usando el item 3, se tiene que $x^{-1} \vdash 1 = x^{-1}$. Probando que J es un grupo.

Para ver que E es un semigrupo nulo a derecha, veamos primero que es cerrado, para ello considere $e, f \in E$ y $x \in G$ entonces, $(e \vdash f) \vdash x = e \vdash (f \vdash x) = e \vdash x = x$, probando así que E es cerrado. Resulta claro que $\vdash$ es asociativo. Finalmente, es un semigrupo nulo a derecha por la misma definición del conjunto.

6. Sean $x, y \in G$, $((x \vdash y)^{-1})^{-1} = (y^{-1} \vdash x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \vdash (y^{-1})^{-1})$ lo cual muestra que esta función es un hmomorfismo de grupos a derecha. Para ver la sobreyectividad, considere $x^{-1} \in J$, su preimagen es precisamente x^{-1}, ya que por el item 3 se tiene que $((x^{-1})^{-1})^{-1} = x^{-1}$. Finalmente, $x \in G$ esta en el kernel del homomorfismo si y solo si $(x^{-1})^{-1} = 1$ y por el item 2, tenemos que $x \vdash 1 = (x^{-1})^{-1}$, sea $y \in G$, entonces, $x \vdash y = x \vdash 1 \vdash y = (x^{-1})^{-1} \vdash y = 1 \vdash y = y$ y esto ocurre si y solo si $x \in E$.

7. Para $x \in G$, es claro que $x^{-1} \vdash x \in E$ por el item 1. Sean $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}(x \vdash y)^{-1} \vdash (x \vdash y) &= y^{-1} \vdash x^{-1} \vdash x \vdash y && \text{(item 3)}\\ &= y^{-1} \vdash y && \text{(item 1)}\\ &= x^{-1} \vdash x \vdash y^{-1} \vdash y && \text{(item 1)}\end{aligned}$$

Probando el homormofismo. Veamos la sobreyectividad. Sea $e \in E$, observe que $(e^{-1})^{-1} = e \vdash 1 = 1$, luego, como $e^{-1} \vdash (e^{-1})^{-1} = 1$ concluimos que $e^{-1} \vdash 1 = 1$. El elemento e proviene de mismo, ya que $e^{-1} \vdash e = e^{-1} \vdash (1 \vdash e) = (e^{-1} \vdash 1) \vdash e = 1 \vdash e = e$.

Finalmente, calculemos el kernel del homomorfismo. x está en el kernel si y solo si $x^{-1} \vdash x = 1$ si y solo si $(x^{-1})^{-1} = x$ (dado que los inversos a derecha son únicos) entonces $x \in J$. Analogamente, si $x \in J$, como J es un grupo se tiene que $x^{-1} \vdash x = 1$ y esto implica que x pertenece al kernel, probando la igualdad de conjuntos.

8. Sea $x \in G$, observe que $(x^{-1})^{-1} \vdash x^{-1} \vdash x = x$ por el item 1, adicionalmente $(x^{-1})^1 \in J$ y $x^{-1} \vdash x \in E$ esta última afirmación por el item 1. De igual forma, sea $x \in J \cap E$. Observe que $x \vdash x^{-1} = 1$, pero como $x \in E$, $1 = x \vdash x^{-1} = x^{-1}$, finalmente, como $x \in J$ $x = y^{-1}$, luego $1 = y^{-1} \vdash (y^{-1})^{-1} = y^{-1} \vdash 1 = ((y^{-1})^{-1})^{-1} = y^{-1} = x$. Con lo que $J \cap E = \{1\}$, mostrando que $G = J \vdash E$, es decir, G es isomorfo a la suma directa de J y E.

■

Observación. *El conjunto E suele ser llamado el "halo". El resultado anterior que indica las propiedades de los grupos por derecha puede extenderse a los grupos por izquierda, donde la demostración es análoga.*

Además, el hecho de que los semigrupos por derecha y los semigrupos por izquierda compartan una unidad barra es sufiente para decir que ellos comparte en realidad todas las unidades barra.

Lema 65. *Sea $(G, \vdash, \dashv)$ un dimonoide. Entonces $e \in G$ es un elemento neutro por izquierda para $(G, \vdash)$ si y solo si es un elemento neutro por derecha de $(G, \dashv)$*

Prueba. Supongamos que $e \in G$ es un elemento neutro por izquierda para el grupo por derecha $(G, \vdash)$, luego satisface $e \vdash x = x$ para todo $x \in G$. Entonces $e^{-1} = 1$ (como se puede ver en la prueba del anterior lema), así, $1 \dashv e = e^{-1} \dashv e = 1$, por lo tanto, $x \dashv e = (x \dashv 1) \dashv e = x \dashv (1 \dashv e) = x \dashv 1 = x$. Concluyendo que e es un elemento neutro por derecha para el grupo por izquierda $(G, \dashv)$. El otro sentido es similar. ■

Lema 66. *Sea $(G, \vdash, \dashv)$ un digrupo.*

1. *$x \vdash 1 = 1 \vdash x$ para todo $x \in G$.*
2. *$(x \vdash y)^{-1} = y^{-1} \vdash x^{-1}y^{-1} \dashv x^{-1} = (x \dashv y)^{-1}$ para todos $x, y \in G$.*
3. *$J := \{x^{-1} : x \in G\}$ es un grupo en el cual $\vdash = \dashv$.*
4. *$G \to J; x \mapsto (x^{-1})^{-1}$ es un homomorfismo sobreyectivo de digrupos con kernel E.*

Prueba.

1. Usando el lema 64 item 2 y su dual para grupos a izquierda tenemos

$$x \vdash 1 = (x^{-1})^{-1} = 1 \dashv x$$

2. Por (G3) y (G4) los inversos de $x \vdash y$ y $x \vdash y$ coinciden. Además, usando 64 item 5 y su dual para grupos a izquiera tenemos que

$$y^{-1} \vdash x^{-1} = (x \vdash y)^{-1} = (x \dashv y)^{-1} = y^{-1} \dashv x^{-1}$$

3. Observe que $\dashv = \vdash$ en J por el item anterior. Y por el lema 64 item 5 y su dual se sabe que $(J, \vdash) = (J, \dashv)$ son grupos.

4. Es conviente especificar cual es el kernel de un homomorfismo de digrupos, el cuál viene dado por $E := \{e \in G : e \vdash x = x \vdash e = x \quad \forall x \in G\}$. Definir el kernel de esta forma puede generar confusión con la notación pues ya se había usado una notación similar en el lema 64, no obstante, gracias al lema inmediatamente anterior, estas notaciones coinciden. Así, por el lema 64 item 6, resulta este ser precisamente un homormorfismo de digrupos (es un homormorfismo con cada operación) y precisamente el kernel es E.

■

Observación. *Se examinará un poquito más la estructura de digrupos. Si $(G, \vdash, \dashv)$ es un digrupo con E el conjunto de todas las bar-unidades y J el grupo de todos los inversos, entonces por el lema 64, $G = J \vdash E$ es isomorfo a la suma directa de J y el semigrupo nulo a derecha E. De forma analoga, por las propiedades del grupo dual (grupo por izquierda) del lema 64, $G = E \dashv J$ es isomorfo a la suma directa de J y el semigrupo nulo a izquierda E. Sin embargo, la proyección de un elemento en E con respecto a $\vdash$ podría no coincidir con la proyección en E con respecto a $\dashv$*

Lema 67. *Para el digrupo $G = M \times H$ del ejemplo 63, se tiene que $E = M \times \{1\}$ y $J = \{e\} \times H$. Además, la proyecto de (u, h) en E respecto a $\vdash$ es $(h^{-1}u, 1)$, mientras que su proyección en E respecto a $\dashv$ es $(u, 1)$*

Prueba. En este caso $J := \{(u,h)^{-1} : (u,h) \in M \times H\}$, y sea $E := \{(m,k) : (m,k) \vdash (u,h) = (u,h) \dashv (m,k)(u,h), \forall (u,h) \in M \times H\}$. El inverso de (u,h) es (e,h^{-1}), por lo que $M = e \times \{H\}$. Para $(u,h) \in G$, $(m,k) \in E$, tenemos:

$$(u,h) = (m,k) \vdash (u,h) = (ku, kh)$$
$$(u,h) = (u,h) \dashv (m,k) = (u, hk)$$

De donde, $kh = h$ y por lo tanto $k = 1$. Observe que realmente m no se ve involucrado, por lo que $E = M \times \{1\}$.

Finalmente, para $(u,h) \in G$ se tiene que $(e,h) \vdash (h^{-1}u, 1) = (hh^{-1} \cdot u, h1) = (u,h)$ y $(u,1) \dashv (e,h) = (u,1h) = (u,h)$. Así la proyección de (u,h) con respecto a $\vdash$ es $(h^{-1} \cdot u, 1)$ y la proyección respecto a $\dashv$ es $(u,1)$. Si u es distinto del elemento e y M tiene más de dos elementos, entonces necesariamente $h^{-1} \cdot u \neq u$, probando que las proyecciones son distintas.

■

Dado el ejemplo anterior, se busca una generalización de la conjugación de digrupos, para ello:

Definición 64. *Sea $(G, \vdash, \dashv)$ un digrupo, la conjungación de un elemento $x \in G$ sobre $y \in G$, $x \circ y$, se define como:*

$$x \circ y := x \vdash y \dashv x^{-1} \tag{1}$$

Lema 68. *Sea G un digrupo, sea $\circ$ definida en 1, sea E el conjunto de todas las unidades-barra, y sea J el grupo de todos los inversos. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *$x \circ (y \circ z) = (x \vdash y) \circ z = (x \dashv y) \circ z$ para todos $x, y, z \in G$.*
2. *$1 \circ x = x$ y $x \circ 1 = 1$ para todo $x \in G$.*
3. *$x \circ u \in E$ para todo $x \in G, u \in E$.*
4. *J actúa en E, via $\circ$.*

Prueba.

- Realicemos los siguientes calculos:

$$\begin{aligned}
x \circ (y \circ z) &= x \circ (y \vdash z \dashv y^{-1}) \\
&= x \vdash (y \vdash z \dashv y^{-1}) \dashv x^{-1} \\
&= (x \vdash y) \vdash z \dashv (y^{-1} \dashv x^{-1}) && \text{usamos la asociatividad de las operaciones} \\
&= (x \vdash y) \vdash z \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1}) && \text{usamos G3} \\
&= (x \vdash y) \vdash z \dashv (x \dashv y)^{-1} && \text{usamos el lema 66 item 2} \\
&= (x \vdash y) \circ z
\end{aligned}$$

Para la otra igualdad, observe que:

$$\begin{aligned}(x \vdash y) \circ z &= (x \vdash y) \vdash z \dashv (x \vdash y)^{-1} \\ &= (x \vdash y) \vdash z \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1}) && \text{usamos el lema 66 item 2} \\ &= (x \vdash y) \vdash z \dashv (y^{-1} \dashv x^{-1}) && \text{usando G3} \\ &= (x \dashv y) \vdash z \dashv (y^{-1} \vdash x^{-1}) && \text{usando G4} \\ &= (x \dashv y) \vdash z \dashv (x \dashv y)^{-1} && \text{usamos el dual del lema 66 item 2}\end{aligned}$$

- $1 \circ x = 1 \vdash x \dashv 1 = x \dashv 1 = x$ y $x \circ 1 = (x \vdash 1) \dashv x^{-1} = (1 \dashv x) \dashv x^{-1}$ donde usamos el lema 66 item 1. Observe que $1 \dashv x \dashv x^{-1} = 1 \dashv x \vdash x^{-1}$ por G3 y $1 \dashv x \vdash x^{-1} = 1 \dashv 1 = 1$ donde usamos G6.
- Considere $x \in G, u \in E$ y $y \in G$ arbitrario

$$\begin{aligned}(x \circ u) \vdash y &= (x \vdash u \dashv x^{-1}) \vdash y \\ &= (x \vdash u \vdash x^{-1}) \vdash y && \text{usando G4} \\ &= x \vdash x^{-1} \vdash y && \text{usamos el hecho que } u \in E \\ &= 1 \vdash y = y && \text{usamos G5 y G6}\end{aligned}$$

  Por lo tanto, $x \circ u \in E$
- J es un grupo con $\vdash = \dashv$ por el lema 66 item 3, además $x \circ u \in E$ con $x \in J, u \in E$ por el item 3 de este lema, lo que implica que es una operación cerrada. El item 1 de este lema nos indica que la acción de grupo es compatible con el producto del grupo. La primera igualdad del item 2 de este lema nos indica que la identidad actua de manera natural sobre los elementos de E.

■

Finalmente, se exhibirá el principal resultado de los digrupos, el cuál resulta ser precisamente que todos los digrupos tienen la forma del ejemplo 63

Teorema 69. *Sea $(G, \vdash, \dashv)$ un digrupo con $E \subset G$ el conjunto de las unidades-barra y $J \leq G$ el grupo de los inversos. Entonces G es isomorfo al digrupo $(E \times J, \vdash, \dashv)$ donde $\vdash$ y $\dashv$ están definidos por*

$$(u, h) \vdash (v, k) = (h \circ v, h \vdash k) \tag{2}$$
$$(u, h) \dashv (v, k) = (u, h \dashv k) \tag{3}$$

Prueba. Es importante tener presente que las ecuaciones 2 y 3 involucran dos veces los simbolos $\vdash, \dashv$, cuando hacen referencia de la operación del digrupo $E \times J$ funciona como en las ecuaciones mencionadas.

El dual del lema 64 item 8 nos indica que $G = E \dashv J$ es isomorfo como grupo a izquierda a $(E \times J, \dashv)$, esta operación corresponde a la del digrupo G, no obstante, es equivalente a la de 3, pues la operación de G nos dice que $(u, h) \dashv (v, k) = (u \dashv v, h \vdash k) = (u, h \dashv k)$ pues $v \in E$. Definamos $\theta : E \times J \to E \dashv J$ dada por $(u, h) \mapsto u \dashv h$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\theta(u,h) \vdash \theta(v,k) &= (u \dashv h) \vdash (v \dashv k) \\
&= u \vdash h \vdash v \dashv k && \text{usando G4} \\
&= h \vdash v \dashv k && \text{pues } u \in E \\
&= h \vdash v \dashv h^{-1} \dashv h \dashv k && \text{usando G6} \\
&= (h \circ v) \dashv h \dashv k \\
&= (h \circ v) \dashv (h \vdash k) && \text{usamos G5} \\
&= \theta((h \circ v, h \vdash k)) \\
&= \theta((u,h) \vdash (v,k)) && \text{usando 2}
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
\theta(u,h) \dashv \theta(v,k) &= (u \dashv h) \dashv (v \dashv k) \\
&= u \dashv h \dashv k && \text{pues } v \in E \\
&= u \dashv (h \dashv k) \\
&= \theta((u, h \dashv k)) \\
&= \theta((u,h) \dashv (v,k)) && \text{usando 3}
\end{aligned}$$

Probando que es un isomorfismo de digrupos. ■

Lema 70. *Sea G un digrupo y sea $\circ$ definido en 1. Las siguientes propiedades se cumplen para todos $x, y, z \in G$*

1. $x \vdash y = (x \circ y) \vdash x$
2. $x \circ (y \vdash z) = (x \circ y) \vdash (x \circ z)$
3. $x \circ (y \dashv z) = (x \circ y) \dashv (x \circ z)$
4. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$

Prueba.

1. Observe que $x \vdash y = x \vdash y \dashv 1 = x \vdash y \dashv x^{-1} \vdash x = (x \vdash y \dashv x^{-1}) \dashv x = (x \circ y) \vdash x$ donde usamos progresivamente las propiedades G5, G6 y G3, junto con la definición de $\circ$.

2. Considere los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
x \circ (y \vdash z) &= x \vdash (y \vdash z) \dashv x^{-1} \\
&= x \vdash y \vdash\vdash 1 \vdash z \dashv x^{-1} && \text{usamos G5} \\
&= x \vdash y \vdash\vdash x \vdash x^{-1} \vdash z \dashv x^{-1} && \text{usamos G6} \\
&= x \vdash y \vdash\vdash x \dashv x^{-1} \vdash z \dashv x^{-1} && \text{usamos G3} \\
&= (x \vdash y \vdash x^{-1}) \circ (x \circ z) \\
&= (x \vdash y \dashv x^{-1}) \circ (x \circ z) && \text{usando G3} \\
&= (x \circ y) \vdash (x \circ z)
\end{aligned}$$

3. Se realiza un procedimiento similar al item 2, pero se usa ahora el axioma G4.

4. Considere

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= (x \vdash y) \circ z && \text{usamos el lema 68 item 1} \\ &= ((x \circ y) \vdash x) \circ z && \text{usamo el item 1 del lema actual} \\ &= (x \circ y) \circ (x \circ z) && \text{usamos el lema 68 item 1} \end{aligned}$$

■

Corolario 71. *Sea G un digrupo, y sea $\circ$ definida en 1. Entonces $(G, \circ, 1)$ es un rack.*

Definición 65. *Un Lie digrupo $(G, \vdash, \dashv)$ es un manifold suave G con la estructura de un digrupo tal que las operaciones $\vdash, \dashv$: $G \times G \to G$ y la inversión $(\cdot)^{-1} : G \to G$ son funciones suaves*

Lema 72. *Si $(G, \vdash, \dashv)$ es un digrupo de Lie, entonces su rack inducido es un rack de Lie. Así, el espacio tangente T_1G tiene estructura de un álgebra de Leibniz*

Ejemplo 15. *Sea H un grupo de Lie, V un $H-$módulo, y sea $G = V \times H$. Como en el ejemplo 63, definimos*

$$(u, A) \vdash (v, B) = (Av, AB) \tag{4}$$
$$(u, A) \dashv (v, B) = (U, AB) \tag{5}$$

Para todo $u, v \in V$, $A, B \in H$. Entonces $(G, \vdash, \dashv)$ es un digrupo de Lie, el cual llamaremos digrupo de Lie lineal. El elemento distinguido unidad barra es $(0, 1)$. El inverso de (u, A) es $(0, A^{-1})$

Teorema 73. *Sea $G = V \times H$ con H un digrupo de Lie y V un $H-$módulo. Si $(G, \vdash, \dashv)$ es el digrupo lineal de Lie, entonces el rack inducido $(G, \circ, 1)$ es el rack de Lie lineal. Reciprocamente, cada rack de Lie lineal es inducido por un digrupo de Lie lineal.*

Prueba. Considere los siguientes cálculos:

$$(u, A) \circ (v, B) = (u, A) \vdash (v, B) \dashv (0, A^{-1}) = (Av, ABA^{-1})$$

■

Corolario 74. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Leibniz escindida. Existe un digrupo de Lie lineal G con álgebra de Leibniz tangente isomorfa a $\mathfrak{g}$*

Prueba. Por el teorema 61, existe un rack de Lie lineal G con algebra de Leibniz tangente isomorfa a $\mathfrak{g}$. Por el teorema 73, G tiene una estructura de digrupo de Lie que induce la estructura del rack. ■

Lema 75. *Sea $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ un álgebra de Lie, y sea $D \in Der(\mathfrak{g})$ que satisface $D^2 = 0$. Definamos un nuevo bracket por $[X, Y]_D := [DX, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_D)$ es un álgebra de Leibniz. En general, $\mathfrak{g}$ no se escinde sobre ningún ideal entre $S = \langle [DX, D] : X \in \mathfrak{g} \rangle$ y $ker(ad) = \{Y : [DX, Y] = 0\}$*

Prueba. Claramente $[,]_D$ es lineal en ambas componentes, pues tanto el corchete original como D son lineal, debemos revisar la propiedad de Leibniz, para ello considere $x, y, z \in \mathfrak{g}$

y:

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]_D]_D &= [Dx,[Dy,z]] \\
[[x,y]_D,z]_D + [y,[x,z]_D]_D &= [[Dx,y],z]_D + [Dy,[Dx,z]] \\
&= [D([Dx,y]),z] + [Dy,[Dx,z]] \\
&= [[D(Dx),y] + [Dx,Dy],z] + [Dy,[Dx,z]] \\
&= [[Dx,Dy],z] + [Dy,[Dx,z]] \\
&= [Dx,[Dy,z]] - [Dy,[Dx,z]] + [Dy,[Dx,z]] \\
&= [Dx,[Dy,z]]
\end{aligned}$$

■

Lema 76. *Considere $\mathbb{R}^2$ con base e_1, e_2 y el corchete de Lie dado por $[x,y] = (x_1y_2 - x_2y_1)e_1$ y $\Delta(x) = x_2e_1$. Definiendo un corchete por $[x,y]_\Delta = [\Delta x, y] = x_2y_2e_1$, resulta un un álgebra de Leibniz, la cuál no es escindida.*

Prueba. Aquí el ideal K ($ker(ad)$) es generado por e_1 y además coincide con S por lo que esta álgebra solo se puede escindir por K. Para ver esto considere $x_1e_1+x_2e_2 = x \in ker(ad)$ y note que para todo $y \in \mathbb{R}^2$:

$$0 = ad(x)(y) = [x,y]_\Delta = x_2y_2e_1$$

Como esto es para todo $y \in \mathbb{R}^2$ se concluye que, si $x \in K$ entonces $x_2 = 0$ y por lo tanto $x = x_1e_1$, es decir, $x \in \langle e_1 \rangle$.

Análogamente, si $x \in S$ entonces x es una combinación lineal de elementos de la forma $[y,y]_\Delta = y_2y_2e_1$, es decir, $x \in \langle e_1 \rangle$. No obstante, cualquier subespacio $\mathfrak{h}$ que se complementario a K debe ser de la forma $\mathfrak{h} = \langle f = \alpha e_1 + e_2 \rangle$. Computando el corchete en el generador nos da que $[f,f]_\Delta = e_1 \notin \mathfrak{h}$. Entonces $\mathfrak{h}$ no puede ser una subalgebra. ■

Capítulo 8

Conclusiones

Durante este documento se presentaron bastantes conceptos, en particular, se presentó el tercer teorema de Lie con toda la teoría que este implica para ser autocontenido y no tener que remitirnos a otros libros. Este teorema establece, en su versión más fuerte, una equivalencia de categorías entre los grupos de Lie simplemente conexos y las álgebras de Lie.

De igual forma, introducimos el concepto de álgebra de Leibniz como una generalización de un álgebra de Lie. En particular, se intentó generalizar el tercer teorema de Lie, aunque a priori en una versión más débil, pues inicialmente establecimos una asignación entre las álgebras de Leibniz escindidas y un objeto topológico con estructura algebraica llamada "rac". Este caso fue cubierto mostrando como esta asignación resultaba exitosa, no obstante, presentaba varios problemas, entre ellos destacamos principalmente el hecho de que cuando nos limitamos a un álgebra de Lie (que es álgebra de Leibniz) su asignación mediante esta técnica resulta ser un rack de Lie sin estructura de Grupo de Lie. Otro problema relevante es que no toda álgebra de Leibniz se puede escindir sobre un ideal, lo que nos deja con un caso general sin resolver.

Se han realizado varios trabajos en esta línea, sin éxito aún. No obstante, estas aproximaciones resultar ser prometedoras e incluso ponen a los digrupos y otras estructuras similares en la búsqueda de este Coquecigrue.

Finalmente, existen otras álgebras no asociativas que corresponden a versiones más fuertes de álgebras conocidas, lo que nos motiva a buscar generalizar los teoremas conocidos en las diversas estructuras conocidas, en particular las álgebras de Jordan y las álgebras alternativas. La búsqueda del Coquecigrue está inconclusa, no obstante, ha abierto una puerta que nos dirije a nuevas y sorprentes estructuras.

Bibliografía

[1] A.M. Blokh, On a generalization of the concept of Lie Algebra, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 1965, 471-473* (in Russian)

[2] A.M. Blokh , Cartan-Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 175, 1967, 824-826* (in Russian)

[3] M. Bordemann, F. Wagemann. Global integration of Leibniz algebras. Journal of Lie Theory, Heldermaan Verlag, 2017, 27(2), pp. 555-567.

[4] S. Covez, The local integration of Leibniz algebras, *Annales de I'Institut Fourier*, vol. 63, no. 1, pp. 1-35, 2013.

[5] M.K. Kinyon, Leibniz algebras, Lie racks, and digroups, *Journal of Lie Theory*, vol. 17, no.1, pp. 99-114, 2007.

[6] J.L. Loday. Une version non conmmutative des algebre de Lie: Les algebres de Leibniz. *Enseign. Math., II. Ser.* 39(3-4). pp. 269-293. 1993.

[7] J.L. Loday and T. Pirashvili, The tensor category of linear maps and Leibniz algebras, *Georgian Mathemical Journal*, vol.5,no.3,pp.263-276, 1998.

[8] J. Mostovoy, A comment on the integration of Leibniz algebras, *Communications in Algebra*, vol. 41, no. 1, pp. 185-194, 2013.

[9] F. Ongay, $\varphi-$dialgebras and a class of matriz coquecigruea, *Canadian Mathematical Bulletin*, vol.50, no.1, pp. 185-194, 2013.

[10] J. Monterde, F. Ongay. On integral manifolds for Leibniz algebras. Hindawi Publishing Corporation. Algebra. Volumen 2014, Article ID 875981, 11 pages. 2014.

[11] G. Ruiz. Geometría de los grupos de Lie, 2020.

[12] C. Arias, S. Díaz. Grupos y álgebras de Lie, notas de curso.2018.

[13] E. A. Roque. Introducción a los grupos de Lie. Notas. 2018.

[14] V. D. Ban. Lie groups. Lecture notes. 2010.

[15] F. W Warner. Foundations od Differentiable Manifold and Lie Groups. Springer Verlag. 1983.