

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**ESTUDIO DE LA DINAMICA DE SÓLIDOS DE
REVOLUCIÓN INMERSOS EN FLUIDOS**

Hugo Fernando Luque González
Maestría en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Julio 2023

Director:
William Javier Herrera
Profesor Titular
Departamento de Física

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	5
2. FLUIDOS POTENCIALES Y PRINCIPIOS VARIACIONALES	8
2.1. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO EN UN FLUIDO POTENCIAL	8
2.2. FLUIDOS POTENCIALES	9
2.3. FLUIDOS POTENCIALES EN 2D. POTENCIAL COMPLEJO	11
2.3.1. Flujo constante	12
2.3.2. Flujo de una fuente usando el potencial complejo	12
2.3.3. Flujo de un Dipolo	14
2.3.4. Flujo sobre un objeto de forma circular	16
2.4. CASO AXISIMÉTRICO	18
2.4.1. Ecuación diferencial para las funciones potenciales en Coordenadas Cilíndricas	18
2.4.2. Ecuación diferencial para las funciones potenciales en Coordenadas Esféricas	19
2.4.3. Esfera en un fluido potencial	20
2.5. MASA APARENTE	23
2.5.1. Paradoja de D'Alembert	27
2.6. CÁLCULO DE LA MASA APARENTE	29
2.7. PRINCIPIOS VARIACIONALES	31
2.7.1. Ecuación de Euler- Lagrange en 3 Dimensiones	32
2.7.2. Funcional para la ecuación de Laplace	34
2.8. Solución en coordenadas curvilíneas	35
3. FLUJO POTENCIAL. COORDENADAS GENERALIZADAS	38
3.1. FUNCIONAL PARA LA FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS ESFÉRICAS	38
3.2. FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS	39
3.2.1. FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS ESFÉRICAS	42
3.3. FUNCIONAL EN COORDENADAS GENERALIZADAS	45

3.4. FLUJO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS	47
3.4.1. Aplicación en coordenadas cilíndricas	49
3.4.2. Coordenadas esféricas	52
3.5. CONDICIÓN ASINTÓTICA	54
3.5.1. Aplicación condición asintótica: coordenadas esféricas	57
3.5.2. Aplicación condición asintótica: Coordenadas cilíndricas	57
4. FLUIDOS POTENCIALES. DIFERENTES SIMETRÍAS	59
4.1. CILINDRO EN UN FLUIDO POTENCIAL	59
4.1.1. Cilindro en fluido potencial con simetría en el eje z	60
4.2. PARABOLOIDE CILÍNDRICO EN UN FLUIDO POTENCIAL	64
4.3. ELIPSOIDE CILÍNDRICA EN FLUIDO POTENCIAL	67
4.4. PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN EN UN FLUIDO POTENCIAL	71
4.5. ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN EN UN FLUIDO POTENCIAL	75
4.5.1. Flujo potencial entre elipsoides de revolución	83
5. CONCLUSIONES	86
6. PERSPECTIVAS	88
A. ANEXO. Función de Flujo para simetría azimutal	93
B. ANEXO. Solución del elipsoide por separación de variables	97

Resumen

Hacemos una revisión de fluidos potenciales con el propósito de analizar el flujo alrededor de sólidos que presentan una simetría determinada, en particular, para objetos que presentan una simetría axisimétrica. Mostramos como se puede llegar a la ecuación de Laplace para fluidos potenciales y encontramos un funcional que corresponde a la misma con su generalización en coordenadas curvilíneas. Solucionamos en casos particulares como la esfera y el cilindro haciendo el cálculo de la masa aparente. Posteriormente, a partir de la función de flujo en simetrías conocidas, proponemos una ecuación diferencial para la función de flujo en coordenadas curvilíneas cuya solución pueda obtenerse a partir de aplicar condiciones de Dirichlet. Deducimos el funcional que, al minimizarse, corresponde a esta ecuación diferencial y mostramos métodos de solución de esta ecuación diferencial cuando se presenta una simetría en una de las coordenadas curvilíneas. Planteamos una estrategia para solucionar objetos con simetrías dadas inmersos en fluidos potenciales usando condiciones asintóticas para poder resolver problemas de objetos con simetrías parabólicas y elipsoidales tanto cilíndricas como esféricas.

Palabras Clave: Fluidos potenciales, sólidos de revolución, coordenadas curvilíneas, ecuación de Laplace

Abstract

STUDY ABOUT THE DYNAMICS OF SOLIDS OF REVOLUTION IN FLUIDS

We outline a review of potential fluids with the aim to analyze the flow around solids that have a given simmetry, i. e. axisymmetric bodies. We show how to reach the Laplace equation for potential fluids and find a Functional that is generalized in curvilinear coordinates. We solve the sphere and the cylinder and computing the apparent mass. Subsequently, starting from the stream function in given simmetries, we propose a differential equation for the stream function in curvilinear coordinates whose solution can be found by using Dirichlet conditions. We found the functional that corresponds to the differential equation and show methods of solution when there is a simmetry in one of the coordinates. We outline a strategy to solve objects with given symmetries in potential fluids using asymptotic behaviors in order to solve problems parabolic and elliptic shaped-objects with cylindrical and spherical simmetries.

Key words: Potential Flow, Solids of revolution, curvilinear coordinates, Laplace Equation.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme terminar mi tesis de maestría después de tanto tiempo, a los profesores William Herrera y Jose Daniel Muñoz por su apoyo y explicaciones para la realización de los objetivos planteados, los jurados de mi tesis por sus comentarios en la mejora de la misma, mis familiares por su acompañamiento constante y finalmente quiero agradecer al profesor Rodolfo Diaz quién fue el gestor de varias de las ideas que se desarrollaron en este proyecto.

INTRODUCCIÓN

El estudio de sólidos inmersos en fluidos es de gran interés ya que permite analizar y describir situaciones como la forma de cohetes y aeronaves que permitan disminuir la resistencia o la potencia aplicada sobre éstos. Aunque existen otras aproximaciones para fluidos como los gases enrarecidos [1], Se entiende que de manera general, este problema se reduce a solucionar la ecuación de Navier Stokes con condiciones de frontera definidas para así determinar el campo de velocidades en una región dada. La solución de esta ecuación se ha estudiado ampliamente desde el uso de métodos numéricos, a través de métodos ya sea analíticos o semi analíticos [2] o con el desarrollo de técnicas basadas en el método de elementos finitos [3] o el de diferencias finitas [4].

Dependiendo las condiciones que pongamos en el fluido o en la forma del flujo, es posible reducir las situaciones presentadas en la solución de sólidos inmersos en fluidos hasta un nivel en dónde algunas soluciones analíticas sean válidas. Como una primera aproximación, podemos trabajar con fluidos cuya viscosidad sea baja o despreciable y con fluidos incompresibles de tal forma que el problema se soluciona a partir de la ecuación de Euler[5], que junto con la ecuación de continuidad y las condiciones de frontera pueden dar solución al problema de cuerpos inmersos en fluidos si, de manera general, incluimos las ecuaciones de movimiento del cuerpo[6] y de donde se puede probar la continuidad de su solución [7]. Otro problema que se aborda con la ecuación de continuidad es aquel en el que el campo de velocidades no cambia explícitamente del tiempo, problema que también usa métodos numéricos y diferentes técnicas para encontrar este campo en diferentes situaciones [8]. Una tercera condición que se presenta es cuando el flujo es irrotacional con lo cual podemos discutir los fluidos potenciales que nos permiten simplificar los resultados del campo de velocidades para obtenerlo a partir de funciones potenciales ϕ , χ y ψ . Por ejemplo, en [9] usan esta aproximación de flujo ideal para representar el campo de velocidades cuando se colocan diferentes tipos de objetos que se mueven en el fluido.

A pesar que el trabajo de objetos inmersos en fluidos potenciales es muy útil, se conoce que el cálculo de la fuerza aplicada lleva a la llamada paradoja de D'Alembert [10] en la que ésta es nula cuando el objeto se mueve a velocidad constante. De aquí que sea necesario incluir el estudio de la masa aparente que es una forma de representar la fuerza aplicada sobre los objetos cuando éstos se aceleran en un fluido potencial [11]. En términos generales, esta masa se puede presentar como una matriz aunque se puede reducir para objetos con simetrías determinadas como una matriz diagonal [12]. Estos

cálculos permiten analizar cómo la simetría hace que los potenciales relacionados con el campo de velocidades tengan una solución analítica y de esta manera, estudiar lo que ocurre con un fluido potencial alrededor de un sólido y la potencia necesaria para acelerarlo usando la masa aparente.

Adicionalmente, es de especial atención observar cómo se pueden aplicar métodos variacionales en la formulación y búsqueda de diferentes soluciones que implican la interacción entre un fluido y un cuerpo. En [13] se muestra cómo por métodos variacionales se pueden proponer funciones usando el método de Raileigh Ritz para solucionar el flujo de un fluido incompresible en una cavidad mejorando la velocidad de computo de la solución. En [14] se propone el uso de métodos de variaciones para determinar el campo de presión a partir de conocer el campo de velocidades.

De esta manera, el cálculo de variaciones presenta de manera numérica la solución a un problema de Neumann o Dirichlet para fluidos en determinadas situaciones. Para el caso de fluidos incompresibles e irrotacionales, se presenta una gran similitud entre las soluciones encontradas en fluidos con aquellas encontradas en electrostática debido a que es aquí en donde los fluidos potenciales permiten tener soluciones a partir de la ecuación de Laplace [15]. Esto hace que la aplicación de estrategias de cálculo de variaciones o de solución de ecuaciones diferenciales parciales que se usan en electrostática puedan usarse en fluidos. De este modo, se puede aprovechar el uso de diferentes tipos de técnicas para encontrar la solución general de un sistema con una geometría específica para un fluido que interactúa con un cuerpo. Por ejemplo, en [16] se puede encontrar la solución para un sistema de conductores en coordenadas curvilíneas que podría extenderse para encontrar una solución similar con las condiciones de Neumann o que se pueda extender en fluidos potenciales para la función de flujo. Esto muestra que, desde el punto de vista analítico, aún se puede explorar el fluido alrededor de sólidos a partir de coordenadas curvilíneas usando ya sea la función de flujo o el potencial velocidad ya que numéricamente se pueden explorar muchas situaciones como las presentadas en [17].

Por otra parte, si se usan coordenadas curvilíneas se pueden aprovechar diferentes simetrías para encontrar la solución de problemas que incluyan fluidos potenciales u otro tipo de fluidos. En [18] muestran como pueden generar un sistema coordenado curvilíneo que se ajuste mejor a las condiciones de frontera expuestas y, de este modo, simplificar los cálculos numéricos en fluidos potenciales. Estas aplicaciones de generalizar problemas de mecánica de fluidos en coordenadas curvilíneas para optimizar el método numérico se aplica en muchas situaciones como la mostrada en [19]. De esta forma, a partir del análisis de fluidos potenciales en coordenadas generalizadas, es posible hacer que algunos problemas se simplifiquen hacia una solución analítica o a mejorar los procesos de cómputo al solucionar un problema con una simetría dada por una coordenada generalizada.

El objetivo de este trabajo de tesis de maestría es estudiar analíticamente los sólidos inmersos en fluidos potenciales a partir de la aplicación de las condiciones de Neumann para el potencial ϕ o de Dirichlet para la función de flujo ψ mostrando técnicas variacionales y estrategias de solución de ecuaciones diferenciales. Para lograrlo, se realiza una revisión de los fluidos potenciales tanto en 2D como en el caso axisimétrico

usando como referencia las coordenadas cilíndricas y esféricas. En este punto se explora el cálculo de la masa aparente en coordenadas esféricas y se muestra la consecución del funcional de la ecuación de Laplace que se encuentra, por ejemplo, en [20]. En esta parte se explora la solución de la ecuación de Laplace a partir de la superposición de funciones de potencial velocidad para obtener el flujo alrededor de algunos objetos. De esta manera se tiene una descripción de cómo a partir de la suma de diferentes potenciales se puede encontrar la solución de la ecuación de Laplace para el potencial velocidad.

A partir de esta revisión de fluidos y cálculo de variaciones, se inicia con la generalización de los cálculos en coordenadas curvilíneas manteniendo la simetría en una de estas coordenadas para mostrar el flujo en diferentes tipos de sólidos en donde se incluyen los sólidos de revolución. En este paso, se muestra cómo se puede obtener un funcional para la función de flujo a partir de la generalización dada por la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas y la velocidad del flujo cuando se tiene una simetría dada. Se termina mostrando cómo se puede solucionar en coordenadas generalizadas el problema de un cuerpo inmerso en un fluido potencial usando condiciones asintóticas y coordenadas generalizadas.

Finalmente, se analizan las posibles soluciones que se pueden encontrar en algunas simetrías específicas a través de la solución de la ecuación de Laplace usando las condiciones asintóticas o a través de la solución de la ecuación diferencial encontrada para la función de flujo.

FLUIDOS POTENCIALES Y PRINCIPIOS VARIACIONALES

En este capítulo se mostrarán los preliminares que permiten definir la exploración del trabajo final de tesis. Se presentarán las ecuaciones de movimiento del sistema fluido y cuerpo en el caso de los fluidos incompresibles, las relaciones que llevan a tener fluidos potenciales y las ecuaciones que se pueden presentar al respecto. Posteriormente, se hará una descripción de las bases del cálculo variacional, y como se puede pasar de un funcional a la ecuación de Euler Lagrange. Se revisarán los resultados aplicados para el problema de Sturm Liouville y la solución de la ecuación de Laplace para simetrías esféricas y cilíndricas. Finalmente, se mostrará la aplicación de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas curvilineas usando condiciones de Dirichlet y sus aplicaciones en electrostática.

2.1. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO EN UN FLUIDO POTENCIAL

Supongamos un cuerpo de una forma determinada masa m inmerso en un fluido incompresible con paredes no permeables que se mueve a una velocidad \mathbf{u}_s y que no se encuentra rotando. Del mismo modo, el fluido presenta un campo de velocidades dado por \mathbf{v} , tiene una densidad ρ y una viscosidad dinámica μ . Tomando como referencia a [6], podemos definir las ecuaciones del sistema como

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F} = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (2.4)$$

donde p es el campo de presión, $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la superficie del cuerpo. La ecuación (2.1) es la ecuación de Euler para flujo incompresible mostrada por la ecuación (2.2) mientras que la ecuación (2.3) presenta la condición en la frontera entre el objeto

y el fluido y (2.4) es la fuerza aplicada por el fluido sobre el cuerpo (omitiendo efectos gravitatorios sobre el cuerpo). Si usamos un sistema de referencia centrado en el cuerpo, entonces se tiene que $\mathbf{u}_s = 0$ y para un regimen no viscoso se encuentra

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F} = - \int_S p \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (2.8)$$

De esta manera, para estudiar el sistema fluido cuerpo, primero vamos a analizar el movimiento del fluido sobre un cuerpo en reposo para posteriormente aplicar el cambio de sistema de referencia a uno sobre el cuerpo. Estas son las ecuaciones que permiten estudiar el movimiento de sólidos de revolución inmersos en fluidos incompresibles. A partir de estas ecuaciones se formularán soluciones para sistemas usando coordenadas curvilíneas ortogonales.

2.2. FLUIDOS POTENCIALES

La ecuación de continuidad de un fluido es dada por

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.9)$$

Ahora, si el fluido está en régimen de flujo estacionario y además es incompresible, la densidad, ρ , es independiente del tiempo y de las coordenadas, lo que lleva a que la divergencia del campo de velocidades es cero

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.10)$$

De donde se puede afirmar que la velocidad puede ser descrita a partir del rotacional de una función vectorial Ψ ([5] sección 4.3, pag 99)

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi. \quad (2.11)$$

Esta función se puede expresar como $\Psi = \chi \nabla \psi$ en donde ψ se conoce como la **función de flujo**. Esto muestra que el vector Ψ es perpendicular a la superficie $\psi = cte$.

De este modo, podemos reescribir (2.11) como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times (\chi \nabla \psi), \\ &= \nabla \chi \times \nabla \psi + \chi \nabla \times \nabla \psi. \end{aligned}$$

Como el segundo término de esta expresión es 0,

$$\mathbf{v} = \nabla \chi \times \nabla \psi. \quad (2.12)$$

Este resultado presenta una información interesante acerca de los potenciales χ y ψ en relación a la velocidad del flujo ya que, al ser perpendicular a los gradientes, ésta es normal al plano que forman las superficies χ y ψ constantes tal y como se indica en la figura 2.1. También si usamos (2.11), se entiende que la velocidad viene de la circulación del vector Ψ en este mismo plano.

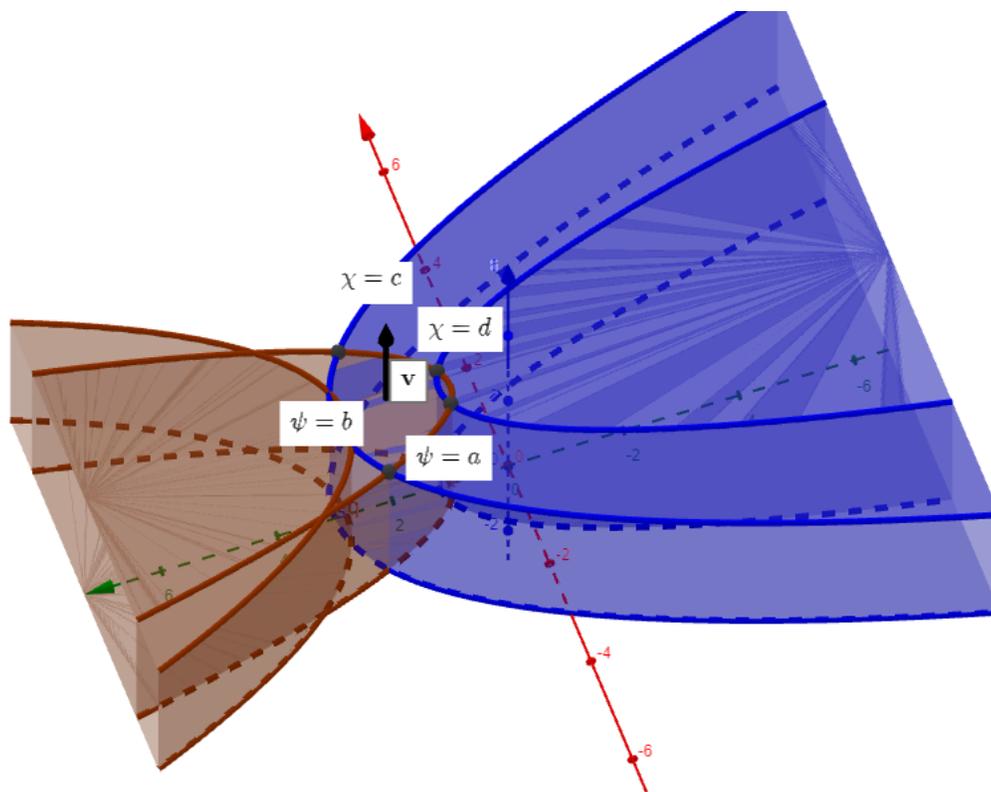


Figura 2.1: Equipotenciales de ψ y χ . La velocidad del flujo es perpendicular al plano que cruza las superficies $\psi = a$, $\psi = b$, $\chi = c$, $\chi = d$.

Ahora vamos a encontrar la segunda función potencial llamada **potencial velocidad**. Para lograrlo, vamos a asumir que el fluido es irrotacional

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \tag{2.13}$$

en este caso se tiene que la velocidad se puede expresar a partir del gradiente de una función ϕ

$$\mathbf{v} = \nabla\phi(\mathbf{r}, t), \tag{2.14}$$

en dónde ϕ se define como el **potencial velocidad**. Esto implica que la velocidad es perpendicular a las superficies en donde ϕ es constante y, por lo tanto, las equipotenciales de ϕ están sobre el plano que se forma con las equipotenciales de χ y ψ . Estos resultados muestran que los potenciales ϕ , ψ y χ nos permiten analizar un fluido incompresible e irrotacional ya que tienen una relación con la velocidad del flujo \mathbf{v} usando (2.14) y (2.12). De esta manera se encuentra que para fluidos incompresibles e irrotacionales las superficies dadas por $\psi = cte$, $\phi = cte$ y $\chi = cte$ son perpendiculares entre sí.

Es interesante observar que si se cumplen las condiciones descritas por (2.10) y (2.13), entonces usando la ecuación (2.14) se tiene

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (2.15)$$

Lo que implica que el potencial ϕ cumple con la ecuación de Laplace tal y como sucede en el caso electrostático sin fuentes para el potencial eléctrico. Si la ecuación (2.10) no se cumple, la ecuación (2.15) estaría dada por la ecuación de Poisson y, en principio, la función de flujo no se podría usar en la formulación del campo de velocidades. En [21] muestran como se puede usar la función de flujo para una ecuación de Poisson, dando mayor validez al uso de ψ en diferentes fluidos que no sean potenciales.

2.3. FLUIDOS POTENCIALES EN 2D. POTENCIAL COMPLEJO

Asumamos un fluido que está representado en dos dimensiones. En este caso, la superficie $\chi = cte$ se ubicará sobre el plano xy y así asegurar que la velocidad se ubica dentro del mismo. De aquí que podemos definir un campo de velocidades complejo, ver por ejemplo [22],

$$v = v_x(x, y) + iv_y(x, y). \quad (2.16)$$

Partiendo de la ecuación (2.14), se tiene

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad del fluido debe ser una función continua, esto implica que las componentes v_x y v_y son diferenciables lo que lleva a que ϕ debe ser una función armónica (hecho que se evidencia dado que cumple la ecuación de Laplace). Como la velocidad es perpendicular a las equipotenciales de ϕ , también serán tangentes al armónico conjugado de esta, es decir, a ψ . Entonces, definimos el potencial complejo como

$$w(z) = \phi + i\psi, \quad (2.18)$$

el cual es función de la variable compleja $z = x + iy$. Al tener en cuenta que la función $w(z)$ es analítica y, por lo tanto, diferenciable se tiene que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Esto también implica que la función ψ es analítica y, por lo tanto, también cumple la ecuación de Laplace. De este modo la derivada dw/dz se puede expresar de la forma

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad (2.20)$$

que lleva a que la velocidad del flujo sea el conjugado de la derivada del potencial complejo

$$v = \left(\frac{dw}{dz} \right)^* , \tag{2.21}$$

que es la velocidad del fluido en dónde las condiciones de Cauchy Riemann corresponden a las condiciones de incompresibilidad e irrotacional mostradas en (2.10) y (2.13). Esto permite que en 2 dimensiones, varios de los desarrollos pueden hacerse a partir del potencial complejo.

2.3.1. Flujo constante

Aunque es la solución más sencilla de la ecuación de Laplace, es de gran interés el potencial complejo:

$$w = v_0z = v_0x + iv_0y \tag{2.22}$$

que representa el flujo constante en dirección x , es decir, un flujo potencial con vector velocidad $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$. Tiene gran importancia debido a que puede funcionar cuando se requieren aplicar condiciones asintóticas para un fluido y así encontrar el flujo sobre objetos a través de la superposición de potenciales. En la figura 2.2 se muestran las equipotenciales de ψ y ϕ para esta situación.

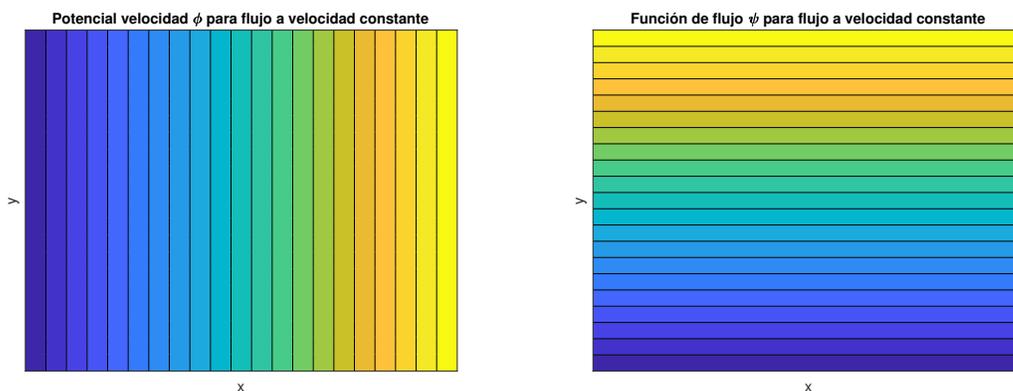


Figura 2.2: Representación de los potenciales ϕ y ψ para el flujo constante.

2.3.2. Flujo de una fuente usando el potencial complejo

Para mostrar la utilidad del potencial complejo, vamos a usar una representación en 2D de un flujo saliente del origen del plano complejo. En este caso, se entiende que las equipotenciales de ϕ deben ser círculos concéntricos para asegurar que la velocidad del flujo perpendicular esté en la dirección radial. Se puede pensar en una función de la forma $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, más sin embargo esta no cumple la ecuación de Laplace y

la función no es armónica. De esta manera se propone

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2} \ln(y^2 + x^2). \quad (2.23)$$

Para encontrar ψ , se pueden aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann. De esta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \\ \psi &= Ax \int \frac{1}{x^2 + y^2} dy + C(x), \\ &= A \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + C(x). \end{aligned}$$

Aplicando la otra condición de Cauchy-Riemann se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Ay}{x^2 + y^2}, \\ \psi &= -Ay \int \frac{1}{x^2 + y^2} dx + C(y), \\ &= A \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + C(y). \end{aligned}$$

De donde se deduce que para esta situación

$$\psi = A \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.24)$$

Entonces el potencial complejo se escribe de la forma

$$w(z) = \frac{A}{2} \ln(y^2 + x^2) + iA \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = A \ln(r) + iA\theta = A \ln(z), \quad (2.25)$$

donde r y θ son las componentes polares del número complejo $z = re^{i\theta}$. Es interesante observar como usando estas funciones armónicas que cumplen la ecuación de Laplace, se puede observar el flujo debido a una fuente puntual, es decir, es equivalente a la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = \delta(x)\delta(y)$. En este caso, se encuentra la dinámica de un fluido que sale del punto $(0, 0)$ tal y como se muestra en la figura 2.3.

A través de esta formulación de variable compleja en el potencial complejo y, por ende, de la velocidad del fluido, se pueden hacer diferentes representaciones de fluidos potenciales para diferentes situaciones, permitiendo encontrar soluciones para el fluido que bordea objetos en dos dimensiones. En [23] se pueden ver varios ejemplos además de los que se mostrarán en este texto y en [24] puede revisar varias aplicaciones que incluso muestran ejemplos usando mapeos conformes. Esta formulación permite incluso la simulación de vórtices si se invierten los potenciales ϕ y ψ para la fuente puntual. Así, a pesar de mostrar un fluido potencial, se pueden realizar cálculos de múltiples vórtices en el fluido [25].

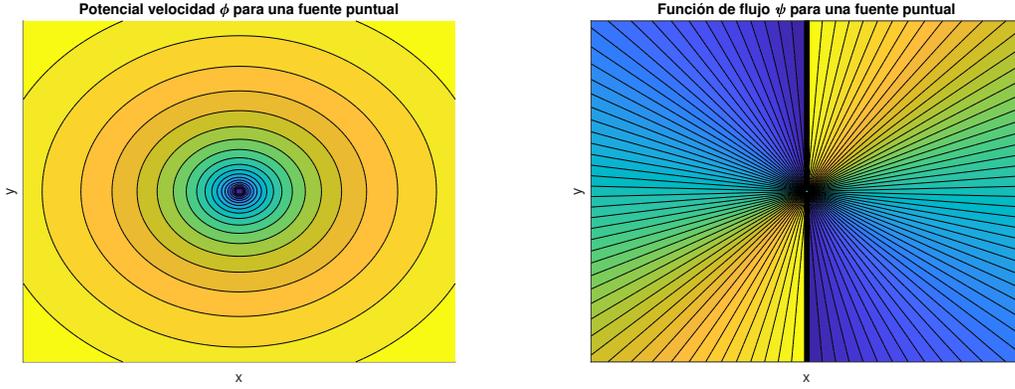


Figura 2.3: Líneas equipotenciales de ϕ y $\psi = cte$ en el plano complejo para simular una fuente de fluido puntual.

2.3.3. Flujo de un Dipolo

Teniendo en cuenta la simetría circular del potencial complejo encontrado en (2.25), vamos a usar la constante $A = m/2\pi$ en donde m representa la fuerza del flujo tanto si es una fuente ($m > 0$) como si es un sumidero ($m < 0$). Usando esta definición, ahora supongamos un dipolo de flujo, es decir, una fuente de flujo m ubicada en el punto $(-\epsilon, 0)$ y un sumidero $-m$ en $(\epsilon, 0)$. De este modo la parte real de $w(z)$ se puede expresar de la forma [5]

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln \left(\sqrt{y^2 + (x + \epsilon)^2} \right) - \frac{m}{2\pi} \ln \left(\sqrt{y^2 + (x - \epsilon)^2} \right). \quad (2.26)$$

Para simplificar esta expresión, es necesario definir el vector dipolar:

$$\mathbf{d} = \sum \mathbf{x}_i m = -\epsilon m \hat{\mathbf{i}} + \epsilon(-m) \hat{\mathbf{i}} = -2m\epsilon \hat{\mathbf{i}} \quad (2.27)$$

y tomaremos el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $m \rightarrow \infty$. Usando estos límites, se puede reducir la parte logarítmica de ϕ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \ln \left(\sqrt{y^2 + (x \pm \epsilon)^2} \right) &= \ln \left(\sqrt{y^2 + x^2 \pm 2\epsilon x + \epsilon^2} \right), \\ &= \ln \left(\sqrt{y^2 + x^2} \sqrt{1 \pm 2\epsilon x/r^2 + \epsilon^2/r^2} \right), \\ &= \ln r + \ln \left(\sqrt{1 \pm 2\epsilon x/r^2 + \epsilon^2/r^2} \right), \\ &= \ln r + \ln \left(1 \pm \frac{\epsilon x}{r^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Despreciando términos de ϵ^2 y aproximando $\ln(1 + a) \approx a$

$$\ln \left(\sqrt{y^2 + (x \pm \epsilon)^2} \right) \approx \ln r \pm \frac{\epsilon x}{r^2}. \quad (2.28)$$

Usando este resultado en (2.71)

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{m}{2\pi} \left(\ln r + \frac{\epsilon x}{r^2} - \ln r + \frac{\epsilon x}{r^2} \right), \\
&= \frac{2m\epsilon x}{2\pi r^2}, \\
\phi &= -\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}{2\pi r^2}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Donde se ha usado (2.27) para el último resultado encontrado. Si usamos las coordenadas polares se puede usar $x = \cos \theta / r$ para escribir ϕ de la forma

$$\phi = \frac{d}{2\pi r} \cos \theta. \tag{2.30}$$

De esta manera se observa como hay una relación directa entre el potencial ϕ y el coseno del ángulo que va desde la posición radial hacia el eje x . Este hecho permite ver que en este caso, la forma polar o esférica podría ser más adecuada para representar el flujo de un dipolo.

Para determinar la función de flujo, se pueden usar las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares [22, Pág 69]

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{2.31}$$

y así, por medio de (2.30)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{d}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}, \\
r \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{d}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \\
\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{d}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}.
\end{aligned}$$

Realizando la integración respecto a θ

$$\psi = -\frac{d}{2\pi r} \sin \theta + C(r), \tag{2.32}$$

usando la segunda expression de (2.31)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{d}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \\
-r \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{d}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \\
\frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{d}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2},
\end{aligned}$$

realizando la integración respecto de r

$$\psi = -\frac{d}{2\pi r} \sin \theta + K(\theta). \quad (2.33)$$

A través de estos resultados se tiene que una función de flujo para el dipolo está determinada por

$$\psi = -\frac{d}{2\pi r} \sin \theta. \quad (2.34)$$

En la figura 2.4 se observan algunas líneas equipotenciales para el potencial velocidad y la función de flujo para el dipolo. Se puede observar la forma simétrica de los dos potenciales de acuerdo a su dependencia con $\cos \theta$ y $\sin \theta$.

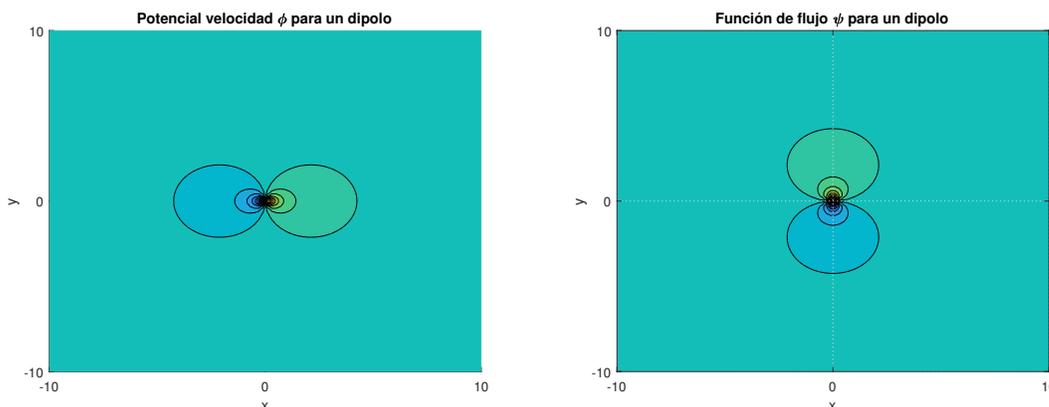


Figura 2.4: Representación de líneas equipotenciales del potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para un dipolo de flujo.

Por medio de (2.30) o (2.34) se puede describir el flujo de fluido para un dipolo que en este caso significa el flujo cuando en el origen hay una fuente y sumidero de flujo. Es importante tener en cuenta que estos resultados son válidos para $r \neq 0$ ya que en ese punto se presenta una singularidad y las ecuaciones que generan los potenciales velocidad y función de flujo no se cumplen.

2.3.4. Flujo sobre un objeto de forma circular

Al ser funciones armónicas, los potenciales permiten superposición entre ellos y aún solucionar la ecuación de Laplace. En ese sentido, podemos observar lo que ocurre si se superponen los potenciales de flujo constante (2.22) y los del dipolo (2.30) para ϕ y (2.34) para ψ , para ello escribimos el potencial complejo como

$$w = v_0 x + \frac{d}{2\pi r} \cos \theta + i \left(v_0 y - \frac{d}{2\pi r} \sin \theta \right). \quad (2.35)$$

Usando $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$

$$\begin{aligned} w &= \left(1 + \frac{d}{2\pi v r^2}\right) v r \cos \theta + i \left(1 - \frac{d}{2\pi v r^2}\right) v r \sin \theta, \\ &= \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) v r \cos \theta + i \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) v r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Donde se ha usado $a^2 = d/2\pi v$. Al graficar las líneas equipotenciales para esta superposición se tiene un flujo cuya equipotencial para ψ forma un círculo de radio a (ver figura 2.5). Esto implica que esta superposición está mostrando el flujo de un fluido que pasa sobre un cuerpo de simetría circular en dos dimensiones ya que las líneas de flujo cumplen la condición (2.7) para la frontera alrededor del círculo.

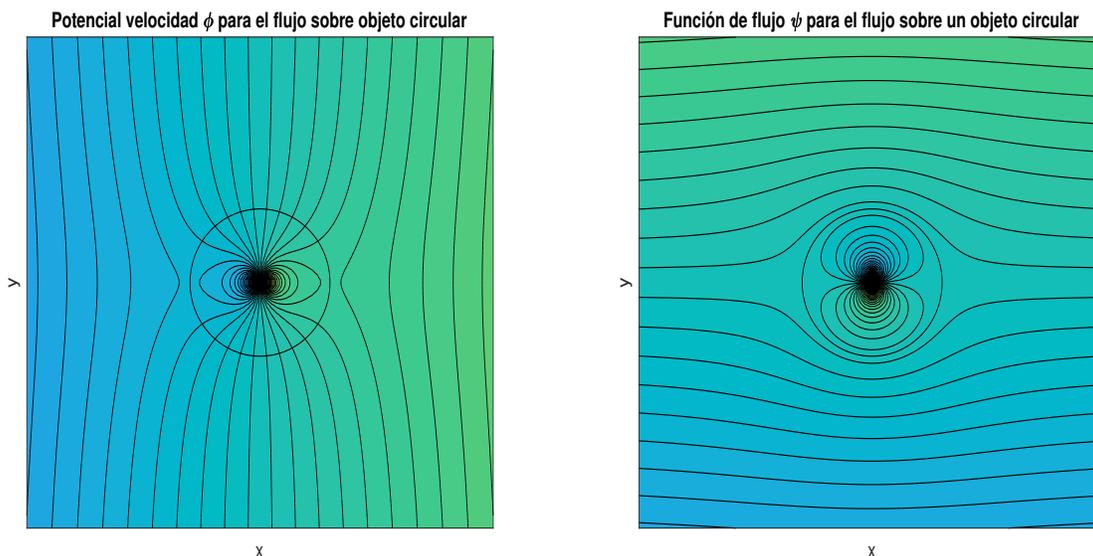


Figura 2.5: Potenciales velocidad ϕ y ψ para la superposición de un flujo constante y un dipolo. Se observa como una de las líneas equipotenciales de ψ es circular.

Obsérvese como dentro de la figura circular se encuentran líneas de flujo equipotenciales. Estas líneas se deben exclusivamente al uso de la superposición de los flujos teniendo en cuenta que el dominio de ambos flujos está dado para todo el espacio (a excepción del $r = 0$ para el dipolo). Para efectos prácticos en el caso de objetos sólidos, es necesario tener en cuenta que esta solución es válida para $r \geq a$.

Estos resultados del potencial complejo sirven para varios cálculos y análisis de fluidos en 2 Dimensiones que son incompresibles y que están sujetos a diferentes condiciones, tal y como se muestra en [36] para la formulación del campo Okubo-Weiss usado para analizar circulaciones de flujo atmosférico y oceánico. El potencial complejo en dos dimensiones tiene que ser consistente con la solución de la ecuación de Laplace para ϕ (2.15), usando las condiciones de frontera adecuadas en cada caso, hecho que revisaremos en las siguientes secciones.

2.4. FLUIDOS POTENCIALES EN EL CASO AXISIMÉTRICO

En esta sección, revisaremos las ecuaciones diferenciales que se deducen para los potenciales ψ y ϕ para simetrías cilíndrica y esférica. También se mostrará el cálculo de la masa aparente y de la potencia aplicada sobre una esfera en un fluido potencial.

2.4.1. Ecuación diferencial para las funciones potenciales en Coordenadas Cilíndricas

De acuerdo con [5] vamos a determinar el flujo y el campo de velocidad para una simetría cilíndrica. En este caso, tendremos en cuenta la condición que la velocidad del flujo axisimétrico no tiene componente en φ , es decir, tiene simetría azimutal. Partamos de la ecuación (2.12), que muestra que las superficies de χ y ψ constantes son perpendiculares al campo de velocidades. Se define $\chi = -\varphi$ de tal forma que aseguremos que su superficie es perpendicular a \mathbf{v} . De este modo en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) la velocidad se puede expresar de la forma

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{R}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \nabla\psi, \quad (2.37)$$

como la función ψ está relacionada con la dirección de la velocidad, esta tampoco tendrá dependencia de φ . Por tal motivo se tiene que

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R}\hat{\mathbf{R}} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}. \quad (2.38)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación para la velocidad, (2.37), se tiene

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{\mathbf{R}} + \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.39)$$

si aplicamos la condición de flujo irrotacional $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, entonces ψ cumple la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.40)$$

Es importante tener en cuenta que esta ecuación no representa una ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Sin embargo, en condiciones de fluido incompresible, la ecuación (2.15) se cumple para ϕ en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.41)$$

donde de nuevo se han eliminado los términos dependientes de φ usando la simetría azimutal. Las ecuaciones (2.40) y (2.41) representan las funciones potenciales del flujo en coordenadas cilíndricas cuando el flujo es independiente de φ , muy útil cuando se trabaja con simetría azimutal, por ejemplo, con sólidos de revolución.

2.4.2. Ecuación diferencial para las funciones potenciales en Coordenadas Esféricas

Si usamos el resultado de (2.12) en coordenadas esféricas (r, θ, φ) , con $\chi = -\varphi$

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \nabla \psi, \quad (2.42)$$

teniendo en cuenta el gradiente en coordenadas esféricas para ψ ,

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.43)$$

la expresión en (2.42) queda de la forma

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.44)$$

Ahora, si se tiene en cuenta la condición de irrotacional $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ y que no hay dependencia con φ

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0. \quad (2.45)$$

Usando (2.44) y la condición de irrotacionalidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= 0, \end{aligned}$$

y así se tiene la siguiente ecuación diferencial para el potencial ψ

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (2.46)$$

que muestra la ecuación diferencial para la función de flujo en coordenadas esféricas. Para la función potencial ϕ , se tiene la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.47)$$

De este modo, para encontrar el campo de velocidades de un fluido incompresible e irrotacional, se puede resolver cualquiera de las ecuaciones diferenciales (2.40) o (2.41) si la simetría es cilíndrica y (2.46) o (2.47) si la simetría es esférica.

2.4.3. Esfera en un fluido potencial

Ahora encontremos la solución de los potenciales ϕ y ψ para un fluido potencial que se mueve cerca a un objeto de forma esférica. Recordando que el potencial ϕ cumple la ecuación (2.14), que sobre el contorno del objeto esférico la velocidad del fluido se debe mover tangente a la esfera (no hay componente radial de la velocidad en el contorno del cuerpo) y definiendo que en distancias lejanas la velocidad del fluido va en la dirección z entonces se deben cumplir las siguientes condiciones de Neumann para el potencial velocidad.

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{para} \quad r = a, \quad (2.48)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{k}} = v \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Solucionando la ecuación (2.47) en coordenadas esféricas, se tiene luego de aplicación de separación de variables

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad (2.50)$$

donde $P_n(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre. Calculando el gradiente de ϕ se tiene

$$\nabla\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n n r^{n-1} - \frac{(n+1)B_n}{r^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.51)$$

Aplicando la condición (2.48) para $r = a$ se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n n a^{n+1} - \frac{(n+1)B_n}{a^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = 0, \\ B_n = \frac{n a^{2n+1}}{n+1} A_n. \quad (2.52)$$

Para que (2.49) sea válida y el gradiente de ϕ no tienda a infinito, se requiere que $n = 1$, por lo tanto, $A_n = 0$ para $n \neq 1$.

$$(\nabla\phi)_{r \rightarrow \infty} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \left(A_1 P_1(\cos \theta) \hat{\mathbf{r}} + A_1 \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot \hat{\mathbf{k}} = v, \\ A_1 \cos \theta (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) - A_1 \sin \theta (\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = v, \\ A_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = v,$$

donde se ha usado $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = -\sin \theta$. De esta forma:

$$A_1 = v, \quad (2.53)$$

y la función ϕ dada por la ecuación (2.50) es

$$\phi(r, \theta) = \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r v \cos \theta, \quad (2.54)$$

que corresponde a lo encontrado en [5]. Podemos ver esta expresión como la suma de dos términos

$$\phi(r, \theta) = vr \cos \theta + \frac{a^3}{2r^2} v \cos \theta, \quad (2.55)$$

el primer término corresponde a un flujo constante en la dirección $z = r \cos \theta$ tal y como el mostrado en (2.22) para el caso de dos dimensiones mientras que el segundo término tiene una forma similar al encontrado para el dipolo en 2 dimensiones, ecuación (2.30), si se amplía a tres dimensiones con el término r^3 y usando en este caso a $d = 2\pi v a^3$. De nuevo mostrando la utilidad que tiene el principio de superposición en la solución del potencial de flujo para la solución de este tipo de problemas. Reescribiendo la expresión (2.55) en términos del momento dipolar

$$\phi(r, \theta) = vr \cos \theta + \frac{d}{4\pi r^3} r \cos \theta. \quad (2.56)$$

Aunque esta forma podría carecer de importancia física debido a que el radio de la esfera a se conoce para la descripción de este problema, el uso del momento dipolar tiene mucha utilidad para el cálculo de la masa aparente que se verá en la siguiente sección. Ahora usemos la ecuación (2.44) y $\nabla \phi = \mathbf{v}$ para encontrar ψ

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (2.57)$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (2.58)$$

usando (2.57) y (2.54)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r v \cos \theta \right) \\ &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) v \cos \theta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) v r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \psi(r, \theta) &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) v r^2 \int \sin \theta \cos \theta d\theta + C(r), \\ \psi(r, \theta) &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{v r^2}{2} \sin^2 \theta + C(r). \end{aligned}$$

Del mismo modo, usando (2.58) y (2.54)

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r v \cos \theta \right) \\
 &= \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) v \sin \theta, \\
 \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r v \sin^2 \theta, \\
 \psi(r, \theta) &= v \sin^2 \theta \int \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r dr + K(\theta), \\
 &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{v r^2}{2} \sin^2 \theta + K(\theta).
 \end{aligned}$$

De acuerdo a estos resultados se tiene que la función de flujo para una esfera en un fluido potencial está dada por

$$\psi(r, \theta) = \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{v r^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (2.59)$$

Observe como la dependencia de ψ respecto a $\sin \theta$ en este caso es diferente al caso bidimensional incluyendo un término al cuadrado. En la Figura 3.5 se muestran los potenciales ϕ y ψ para la esfera en el fluido potencial usando un corte bidimensional dado.

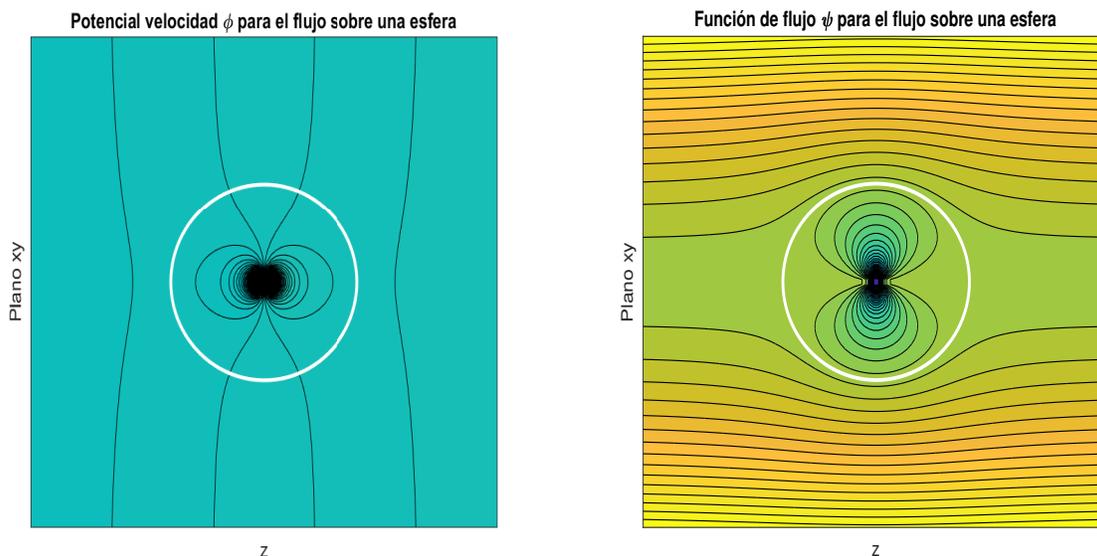


Figura 2.6: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para un fluido rodeando una esfera.

Se puede observar la similitud entre los equipotenciales del flujo sobre la esfera y el flujo sobre un objeto circular en dos dimensiones que se mostró en la figura 2.5.

Sin embargo, debido a la simetría esférica en tres dimensiones, las líneas del potencial de flujo se encuentran más cerca que en el caso bidimensional cuando pasan por las cercanías de la esfera y, de otra forma, se estén separando más cuando la líneas deben cruzar el objeto.

2.5. FUERZA APLICADA SOBRE UNA ESFERA EN UN FLUIDO POTENCIAL. MASA APARENTE

Calculemos la fuerza debida al fluido sobre la esfera. Retomando la ecuación (2.8)

$$\mathbf{F} = - \int_{esfera} p \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (2.60)$$

Para determinar esta fuerza, podemos calcular la presión usando el teorema de Bernoulli para el caso de fluidos irrotacionales e incompresibles [5, Pág 238] usando la ecuación (2.5).

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p,$$

usando el potencial ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi \right) = -\nabla p, \quad (2.61)$$

luego usando la independencia de las coordenadas espaciales respecto del tiempo e identidades vectoriales se puede reescribir de la forma

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (2.62)$$

que conlleva a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} = C, \quad (2.63)$$

de tal forma que

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - C \right), \quad (2.64)$$

luego la fuerza queda expresada como

$$\mathbf{F} = \int_{esfera} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - C \right) \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (2.65)$$

Como alrededor de cualquier superficie cerrada $\int \hat{\mathbf{n}} dA = 0$, el último término de la expresión (2.65) se cancela y, por lo tanto, la fuerza aplicada sobre el objeto es

$$\mathbf{F} = \int_{esfera} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (2.66)$$

que es un resultado general para un caso no estacionario, es decir, para $\phi(\mathbf{r}, t)$. Cabe añadir que hasta el momento, los cálculos presentados de ϕ no tienen una dependencia del tiempo dado que se ha asumido a cuerpos en el origen de sistema de coordenadas en reposo. Es por esta razón que, para trabajar con cuerpos en movimiento, vamos a usar los resultados anteriores y vamos a cambiar el sistema coordenado centrándolo en el cuerpo en movimiento y, así, lograr una dependencia de ϕ respecto del tiempo.

Tal y como se muestra en [5], para el caso de la esfera comencemos por la expresión (2.56)

$$\phi(r, \theta) = vr \cos \theta + \frac{d}{4\pi r^3} r \cos \theta, \quad (2.67)$$

teniendo en cuenta que el flujo se dirige en la dirección z , podemos definir los siguientes vectores

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{d} = -d\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.70)$$

de tal forma que (2.67) queda como

$$\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{4\pi r^3} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}. \quad (2.71)$$

Partamos de una esfera ubicada en un punto \mathbf{r}_s que se mueve a una velocidad \mathbf{u}_s que puede ser variable en el tiempo como se muestra en la figura 2.7. Podemos suponer que la esfera está sometida a una fuerza externa \mathbf{F}_E que permite que se mantenga la velocidad y la aceleración de la misma.

Para saber el potencial velocidad en este caso, se puede hacer el cambio de la (2.67) por un sistema coordenado centrado en la esfera con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$. De esta forma, las condiciones de frontera planteadas en (2.48) se cumplen para $\xi = a$. Esto implica que (2.71) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t)) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) - \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \\ \phi(\boldsymbol{\xi}(t)) &= \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{4\pi\xi^3} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Teniendo en cuenta que el primer término proporciona el flujo constante, esta parte es la contribución de fluido cuando $\xi \rightarrow \infty$. En este sentido, si el fluido esta en reposo, $\mathbf{v} = 0$,

$$\phi(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi\xi^3} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (2.73)$$

Ahora ubiquemos un sistema de referencia centrado en la esfera de tal forma que el fluido se mueve con velocidad $-\mathbf{u}_s$, entonces $\mathbf{d} = -2\pi a^3(-\mathbf{u}_s)$ y (2.73) queda como

$$\phi(\boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{u}_s(t)) = -\frac{a^3}{2\xi^3} \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (2.74)$$

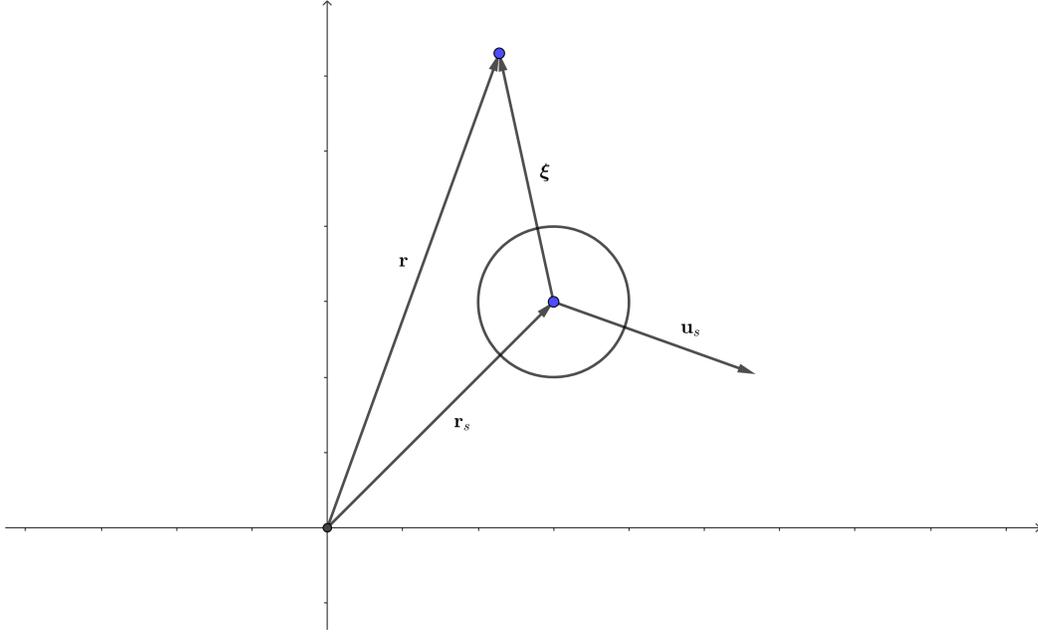


Figura 2.7: Esfera ubicada en el punto \mathbf{r}_s y con velocidad \mathbf{u}_s

Con este resultado, ahora se puede determinar la fuerza sobre la esfera usando (2.66). Primero usemos la ecuación (2.74) para calcular el gradiente de ϕ

$$\nabla\phi = -\frac{a^3}{2} \left(-\frac{3\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\xi}}{\xi^5} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\xi^3} \mathbf{u}_s \right). \quad (2.75)$$

Como la integral (2.66) se aplica sobre la esfera, esto implica que $\xi = a$, se tiene $\boldsymbol{\xi} = a\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Así se obtiene

$$(\nabla\phi)_a = \frac{3\mathbf{u}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}}{2} \hat{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_s, \quad (2.76)$$

por otra parte, para el término $\frac{\partial\phi}{\partial t}$, partamos del hecho que \mathbf{r} no depende del tiempo mientras que el término \mathbf{r}_s sí¹. Con esto, usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_{si}} \frac{\partial x_{si}}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial u_{si}} \frac{\partial u_{si}}{\partial t} \right) \quad (2.77)$$

donde x_{si} corresponden a las coordenadas del vector \mathbf{r}_s . Para el primer término de la parte derecha podemos usar $\frac{\partial\phi}{\partial x_{si}} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ debido a la dependencia de ϕ en términos de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_s$, lo que lleva a que este término sea igual a $-\nabla\phi = -\mathbf{v}$. Usando la ecuación (2.74) se puede determinar la segunda parte de la derecha de la ecuación y así tener

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\nabla\phi \cdot \mathbf{u}_s - \frac{a^3}{2\xi^3} \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}_s}{\partial t}. \quad (2.78)$$

¹En la figura 2.7 se muestra como \mathbf{r} representa la ubicación del elemento de fluido para halla ϕ , la cual, no depende del tiempo mientras que \mathbf{r}_s representa la ubicación del cuerpo que se está moviendo, luego tiene una dependencia con el tiempo.

Calculando en la superficie de la esfera ($\xi = a$ y $\boldsymbol{\xi} = a\hat{\boldsymbol{\xi}}$)

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_a = -(\nabla\phi)_a \cdot \mathbf{u}_s - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}_s}{\partial t} \quad (2.79)$$

usando (2.76)

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_a = -\frac{3}{2}(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}})^2 + \frac{1}{2}u_s^2 - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}_s}{\partial t} \quad (2.80)$$

El otro término que se requiere en (2.66) es $|\nabla\phi|^2$ que se calcula por medio de la ecuación (2.76)

$$|\nabla\phi|_a^2 = \frac{3}{4}(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}})^2 + \frac{1}{4}u_s^2. \quad (2.81)$$

Reemplazando en (2.66)

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{esfera} \left(\frac{9}{8}(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}})^2 - \frac{5}{8}u_s^2 + \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}_s}{\partial t} \right) \hat{\boldsymbol{\xi}} dA. \quad (2.82)$$

Ahora revisemos el caso particular en el que la velocidad y aceleración de la esfera están en la dirección z y la esfera está en el origen del sistema de coordenadas de tal forma que $\mathbf{u}_s = u_s\hat{\mathbf{k}}$, $\frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \frac{du_s}{dt}\hat{\mathbf{k}}$ y $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{esfera} \left(\frac{9}{8}u_s^2 \cos^2\theta - \frac{5}{8}u_s^2 + \frac{a}{2}\frac{\partial u_s}{\partial t} \cos\theta \right) \hat{\mathbf{r}} dA. \quad (2.83)$$

Usando $dA = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{9}{8}u_s^2 \cos^2\theta - \frac{5}{8}u_s^2 + \frac{a}{2}\frac{\partial u_s}{\partial t} \cos\theta \right) \hat{\mathbf{r}} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (2.84)$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta \hat{\mathbf{k}}$, la integral de φ hará que los términos en x y y se hagan 0 y sólo quede el término en z .

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{k}} 2\pi\rho a^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{9}{8}u_s^2 \cos^2\theta - \frac{5}{8}u_s^2 + \frac{a}{2}\frac{\partial u_s}{\partial t} \cos\theta \right) \sin\theta \cos\theta d\theta, \quad (2.85)$$

realizando la integración, los primeros términos se reducen a 0 y se tiene

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{k}} \frac{2\pi\rho a^3}{3} \frac{du_s}{dt} = -\hat{\mathbf{k}} M_A \frac{du_s}{dt}. \quad (2.86)$$

El término $M_A = \frac{2\pi\rho a^3}{3}$ es llamada la **masa aparente** del cuerpo que representa la fuerza que ejerce el fluido sobre el cuerpo cuando este se acelera. Si se tiene en cuenta la segunda ley de Newton sobre el cuerpo $\mathbf{F}_E + \mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \hat{\mathbf{k}}$, con M la masa de la esfera, y reorganizando términos se tiene

$$\mathbf{F}_E = (M + M_A) \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.87)$$

De esta manera la potencia aplicada sobre el cuerpo $P_E = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{u}_s$ se puede escribir de la forma

$$P_E = \left(M + \frac{2\pi\rho a^3}{3} \right) u_s \frac{du_s}{dt}, \quad (2.88)$$

siendo la potencia entregada a una esfera inmersa en un fluido incompresible e irrotacional. Si se usa la masa de la esfera $M = 4\pi\rho_e a^3/3$ siendo ρ_e la densidad de la esfera

$$P_E = \frac{2\pi a^3}{3} (2\rho_e + \rho) u_s \frac{du_s}{dt}. \quad (2.89)$$

Este procedimiento se pueden replicar y revisar en otros sólidos de revolución para revisar los diferentes resultados de potencia para diferentes simetrías. Es importante tener en cuenta como (2.86) no depende de la velocidad del fluido lo que implica que para un cuerpo que se mueve a velocidad constante en un fluido potencial la fuerza del fluido es 0, hecho que se explica por medio de la paradoja de D'Alembert. [10, Pág. 355]

2.5.1. Paradoja de D'Alembert

En la sección anterior mostramos cómo la potencia aplicada sobre el cuerpo en un fluido potencial depende de la aceleración del mismo, es decir, que para cuerpos que se mueven a velocidad constante no habría fuerza de resistencia en la dirección de la velocidad del cuerpo. El desarrollo de este fenómeno se encuentra explicado en varios textos y artículos como [29] dónde presentan el desarrollo de la paradoja de D'Alembert desde los trabajos de Euler hasta la formulación final diferenciando los fluidos potenciales ideales y viscosos. Revisemos esta paradoja de manera general usando la aproximación mostrada por [30]. Debemos partir de las mismas suposiciones mostradas para el caso de la esfera, es decir, tener en cuenta que en el sistema de referencia centrado en el cuerpo, se tiene un fluido que se mueve a una velocidad $-\mathbf{u}_s$ que está en reposo para distancias muy grandes. Teniendo en cuenta que se aceptan las soluciones de la ecuación de Laplace donde ϕ depende del inverso de r y sus derivadas de orden superior, ya que se anulan al llegar a distancias largas. Eliminando términos de ordenes superiores se propone la solución de la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{A} \cdot \nabla(1/r) = -\frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (2.90)$$

donde \mathbf{A} es un vector constante que no depende de las coordenadas. El campo de velocidades del fluido, $\mathbf{v} = \nabla\phi$, es

$$\mathbf{v} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{A}}{r^3}. \quad (2.91)$$

De esta manera, tenemos una expresión para ϕ y \mathbf{v} que puede encontrarse al tener el vector \mathbf{A} que finalmente dependerá de la velocidad y la forma del cuerpo inmerso,

al aplicar las condiciones de frontera y solucionando la ecuación de Laplace para ϕ . Calculemos la energía cinética del fluido

$$E = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV, \quad (2.92)$$

donde el volumen V es el volumen del fluido. Para hacer la integración del volumen encerremos el sistema fluido - cuerpo en una esfera de tamaño R muy grande cuyo centro está en el origen (dónde esta el cuerpo) para posteriormente $R \rightarrow \infty$. Reescribamos $v^2 = v^2 - u_s^2 + u_s^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) + u_s^2$ y, teniendo en cuenta que u_s no depende de las coordenadas, la energía se puede reescribir

$$E = \frac{1}{2} \rho \left(u_s^2 (V - V_0) + \int_V (\mathbf{v} + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV \right), \quad (2.93)$$

la integral se puede determinar usando ϕ para reescribirla como

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{v} + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV &= \int_V (\nabla \phi + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV, \\ &= \int_V \nabla (\phi + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV, \\ &= \int_V \nabla \cdot ((\phi + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s)) dV, \end{aligned}$$

donde se ha usado la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Aplicando el teorema de la divergencia se tiene

$$\int_V (\mathbf{v} + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV = \oint_{(S+S_0)} (\phi + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (2.94)$$

donde S representa la superficie de la esfera de radio R y S_0 la superficie del cuerpo. La integral respecto a la superficie S_0 se cancela debido a las condiciones de frontera (2.7) y la integral respecto a S se puede calcular usando la expresión para ϕ y \mathbf{v} dadas por (2.90) y (2.91) de tal forma que, descartando los términos asintóticos en r , se tiene

$$\int_V (\mathbf{v} + \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) dV = \oint_S (3(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\mathbf{r}}) - (\mathbf{u}_s \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 r^3) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.95)$$

donde se ha tenido en cuenta el diferencial de área en coordenadas esféricas $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. De este modo la energía cinética del fluido luego de realizar la integración de esta última expresión está dada por

$$E = \frac{1}{2} \rho (4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_s - V_0 u_s^2). \quad (2.96)$$

Como se ha mostrado durante el capítulo, ϕ suele tener una dependencia lineal con u_s , razón por la cual, se puede inferir que \mathbf{A} debe tener la misma dependencia lineal con las componentes de \mathbf{u}_s y, de este modo, la energía se puede expresar como una forma cuadrática de las componentes de la velocidad

$$E = \frac{1}{2} M_{ij} u_i u_j, \quad (2.97)$$

donde encontramos a M_{ij} como el tensor de masa aparente que se describirá en la siguiente sección. Teniendo en cuenta que la variación infinitesimal de la energía se relaciona con la variación infinitesimal del momentum \mathbf{P} por $dE = \mathbf{u}_s \cdot d\mathbf{P}$ podemos definir al momentum del fluido como

$$P_j = M_{ij}u_j, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0\mathbf{u}_s, \quad (2.99)$$

Luego la fuerza aplicada del fluido sobre el cuerpo sería el opuesto al cambio en este momentum,

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (2.100)$$

$$F_i = -M_{ij}\frac{du_j}{dt}, \quad (2.101)$$

que muestra como esta fuerza aplicada depende de la aceleración del cuerpo y, por lo tanto, al moverse a velocidad constante, la fuerza aplicada sobre el fluido potencial es 0 de manera general y sin importar la geometría del cuerpo sumergido en el fluido. Esta es conocida como la paradoja de D'Alembert. Físicamente, se puede interpretar este fenómeno al pensar que para mantener el cuerpo a velocidad constante con una fuerza de arrastre, sería necesario la aplicación de una fuerza externa ya que se está disipando energía en el fluido ideal. Sin embargo, en estos fluidos no debería existir disipación de energía, por definición, hecho que hace que tal fuerza de arrastre sea nula. Es interesante que estos resultados que aplican a fluidos potenciales, se pueden extender a modelos con vórtices a partir de combinar los flujos debidos a la parte irrotacional y la dada por la vorticidad y, de este modo, replantear esta paradoja tal y como se muestra en [31] y [32].

2.6. CÁLCULO DE LA MASA APARENTE

El cálculo de la masa aparente se puede mostrar al describir la fuerza ejercida por el fluido en términos de razones de cambio de impulsos lineales relacionados con la viscosidad, la traslación y la rotación del cuerpo tal y como se muestra en [26]. Para lograr esta aproximación, se puede expresar el potencial velocidad en términos de potenciales ϕ_i que están relacionados con las distintas velocidades que puede tener el cuerpo inmerso en el fluido (componentes de la velocidad de traslación y rotación del cuerpo) [27]. Aquí mostraremos cómo se puede obtener la masa aparente del cuerpo usando lo mostrado en [28] teniendo en cuenta las condiciones presentadas al inicio del capítulo de no viscosidad y rotación del objeto dentro del fluido.

Para esta formulación tengamos en cuenta lo siguiente:

- Partiendo del sistema estacionario entre el cuerpo y el fluido, aplicamos un impulso \mathbf{I} sobre el cuerpo.

- El sistema evoluciona debido a una fuerza externa \mathbf{F}_E durante un intervalo muy corto δt .
- Aplicamos el impulso $-(\mathbf{I} + \delta\mathbf{I})$ para llevar el sistema al estado estacionario de nuevo.

Esto implica que el impulso final aplicado es 0, es decir, $\mathbf{I} + \mathbf{F}_E\delta t - \mathbf{I} - \delta\mathbf{I} = 0$ que conlleva en el límite a

$$\mathbf{F}_E = \frac{d\mathbf{I}}{dt}, \quad (2.102)$$

del mismo modo, en este periodo δt pequeño podemos encontrar el impulso debido a la fuerza del fluido dada por (2.66) teniendo en cuenta que el segundo término no depende del tiempo luego en el límite $\delta t \rightarrow 0$

$$\mathbf{I}_{fluido} = \int \rho\phi\hat{\mathbf{n}}dA, \quad (2.103)$$

entonces el impulso debido a la fuerza externa es igual al momentum del cuerpo que se mueve a velocidad \mathbf{u}_s menos el impulso debido al fluido

$$\mathbf{I} = m\mathbf{u}_s + \mathbf{I}_{fluido}. \quad (2.104)$$

En este punto, es conveniente introducir las funciones ϕ_j que se refieren a los potenciales velocidad en las direcciones j del movimiento. Así podemos expresar el potencial velocidad como

$$\phi = \sum_j \phi_j(\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{u}_s), \quad (2.105)$$

de donde se puede expresar el impulso $\mathbf{I} = \sum_i I_i\hat{\mathbf{e}}_i$ de la forma

$$I_i = m\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{u}_s + \sum_j M_{ij}(\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{u}_s), \quad (2.106)$$

con M_{ij} como el tensor de masa aparente dado por

$$M_{ij} = \rho\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \int \phi_j\hat{\mathbf{n}}dA. \quad (2.107)$$

Obsérvese que las funciones ϕ_j no tienen las mismas unidades de la función potencial ϕ y son funciones que están normalizadas a la velocidad del cuerpo u_s . También, téngase en cuenta que esta función implica que el flujo está en reposo en lugares lejanos al cuerpo, y por tal razón, para el uso de ϕ se omite la parte que implica la condición de flujo constante al infinito.

A modo de ejemplo, calculemos la masa aparente de la esfera en el fluido potencial con movimiento en la dirección z . Para este caso, usaremos ϕ definido por la ecuación (2.55) en dónde el término dado por el flujo constante no se tiene en cuenta

$$\phi = -\frac{a^3}{2r^2}u_s \cos\theta, \quad (2.108)$$

y hemos usado el hecho que en el sistema centrado en el cuerpo $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_s$. Este resultado implica que ϕ_3 viene dado por

$$\phi_3 = -\frac{a^3}{2r^2} \cos \theta, \quad (2.109)$$

Usando este resultado en la ecuación (2.107)

$$M_{33} = \rho \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \int \phi_3 \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (2.110)$$

$$= -\rho \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \int \hat{\mathbf{r}} \frac{a^3}{2r^2} \cos \theta r^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (2.111)$$

$$= -\frac{\rho a^3}{2} \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \int \hat{\mathbf{r}} \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (2.112)$$

usando $\hat{\mathbf{r}}$ en coordenadas cartesianas

$$M_{33} = -\frac{\rho a^3}{2} \int \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta, \quad (2.113)$$

$$M_{33} = \frac{2\pi \rho a^3}{3}, \quad (2.114)$$

que corresponde al resultado encontrado en la ecuación (2.86). De esta manera, usando esta formulación se puede usar el potencial velocidad estacionario para determinar la masa aparente del cuerpo en el fluido potencial. Aunque aquí se muestra una formulación para tenerla en términos del potencial velocidad dada la estructura de este trabajo de tesis, se pueden realizar los cálculos de la masa aparente a través del cálculo de la fuerza tal y como se mostró en la sección anterior y como se define en [33].

2.7. PRINCIPIOS VARIACIONALES APLICADOS A LA ECUACIÓN DE LAPLACE

En esta sección haremos una revisión de los métodos variacionales básicos que pueden ser aplicados en la solución de la ecuación de Laplace y, por ende, en fluidos potenciales. Para esto partamos del funcional [34]

$$F = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (2.115)$$

con la condición de extremos fijos $y(a) = A$ y $y(b) = B$. De aquí se entiende que f es doblemente diferenciable. El objetivo es encontrar la función $y(x)$ que hace que F sea mínimo. Para encontrarlo, vamos a usar las funciones de prueba $\bar{y}(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon \eta(x)$ de tal forma que cumplen

1. $\bar{y}(a, \epsilon) = A$ y $\bar{y}(b, \epsilon) = B$, es decir, $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

2. $\bar{y}(x, 0) = y(x)$ que es la función que minimiza F .
3. \bar{y} es una función continua con derivadas de al menos segundo orden.

De esta forma, convertimos el funcional F en una función de ϵ y nuestro objetivo es encontrar el extremal del mismo

$$\left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (2.116)$$

Aplicando esta condición en (2.115)

$$\left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d\bar{y}'}{d\epsilon} \right) dx = 0. \quad (2.117)$$

Teniendo en cuenta la diferenciabilidad de \bar{y} se puede intercambiar las derivadas del segundo término

$$\left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right) \right) dx = 0. \quad (2.118)$$

Este segundo término se puede simplificar usando integración por partes

$$\left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) \right) \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} dx = 0. \quad (2.119)$$

Como $\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} = \eta(x)$, entonces por las condiciones dadas este término es 0 en la frontera evaluada. Por otra parte, para que la integral sea 0, es necesario que el argumento entre parentésis sea 0 ya que $\eta(x)$ no lo es en el intervalo dado

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right) = 0 \quad (2.120)$$

que corresponde a la ecuación de **Euler-Lagrange** que nos permite encontrar la función f que hace que el funcional F tenga un extremo.

2.7.1. Ecuación de Euler- Lagrange en 3 Dimensiones

Podemos extender este problema para un volumen usando el funcional

$$F = \int_V f(\mathbf{r}, \phi, \nabla \phi) dV \quad (2.121)$$

con la condición de frontera

$$\phi(\mathbf{r}_f) = g(C) \quad (2.122)$$

donde \mathbf{r}_f representa la frontera y $g(C)$ el valor de ϕ en dicha frontera. En este caso, las condiciones a tener en cuenta para el extremal $\bar{\phi} = \phi + \epsilon \eta(\mathbf{r})$ son

1. $\bar{\phi} = g(C)$ en la frontera. Esto implica que $\eta(\mathbf{r}_f) = 0$ en la misma.
2. $\bar{\phi}$ debe ser continuamente derivable en el volumen V .

Aplicando el procedimiento análogo al usado para llegar a (2.118) (usando $\bar{\phi}_i = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}$)

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\epsilon} &= \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_i} \frac{d}{d\epsilon} (\bar{\phi}_i) \right) dV, \\ &= \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \right) \right) dV, \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} + \nabla_{\phi'} f \cdot \nabla \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \right) dV, \quad (2.124)$$

Donde se ha usado la segunda condición mencionada anteriormente y la notación de $\nabla_{\phi'}$ para notar el gradiente con derivadas respecto a $\bar{\phi}'$. El último término de esta expresión se puede reescribir usando la identidad vectorial

$$\mathbf{A} \cdot \nabla h = \nabla(\mathbf{A}h) - h \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.125)$$

con $\mathbf{A} = \nabla_{\phi'} f$ y $h = \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon}$.

$$\begin{aligned} \int_V \nabla_{\phi'} f \cdot \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} dV &= \int_V \nabla \cdot \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \nabla_{\phi'} f \right) dV - \int_V \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \nabla \cdot (\nabla_{\phi'} f) dV, \\ &= \oint_S \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \nabla_{\phi'} f dS - \int_V \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \nabla \cdot (\nabla_{\phi'} f) dV, \\ &= - \int_V \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \nabla \cdot (\nabla_{\phi'} f) dV, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta en la segunda línea el teorema de la divergencia y el hecho que sobre la frontera, que es donde se calcula la integral de área $\frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} = 0$. Usando este resultado en la ecuación (2.124)

$$\frac{dF}{d\epsilon} = \int_V \frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} - \nabla \cdot \nabla_{\phi'} f \right) dV. \quad (2.126)$$

Al aplicar la condición de extremal mínimo y, teniendo en cuenta que $\frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} \neq 0$ en el Volumen dado, se cumple

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} - \nabla \cdot \nabla_{\phi'} f = 0 \quad (2.127)$$

que sería la ecuación de Euler-Lagrange para un funcional en un Volumen dado. Una forma de escribir esta ecuación es a partir de las componentes

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_i} \right) = 0. \quad (2.128)$$

Este resultado permite redefinir problemas relacionados con ecuaciones diferenciales a través de funcionales y así presentar la solución a partir de principios variacionales.

2.7.2. Funcional para la ecuación de Laplace

Cuando se tienen condiciones de frontera de Dirichlet, se puede usar (2.127) o (2.128) para generar un funcional que este relacionado con la ecuación de Laplace (2.15). Como el Laplaciano proviene de la divergencia del gradiente, podemos inferir que el funcional f es independiente de ϕ para que el segundo término de (2.127) sea el único válido en la ecuación de Euler Lagrange. de tal forma que

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla \cdot \nabla_{\phi} f. \quad (2.129)$$

Esto se consigue si se define

$$f = \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (2.130)$$

que es proporcional a la densidad de energía. De esta forma el funcional a minimizar es

$$F[\phi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV. \quad (2.131)$$

Este resultado puede ser muy útil más adelante para lograr soluciones aproximadas de situaciones que involucren el flujo alrededor de un cuerpo. Es interesante observar que el funcional de la ecuación de Laplace es independiente explícitamente de ϕ . Es importante reiterar que (2.131) no se aplica cuando las condiciones de frontera son de Neumann o mixtas, ya que para este caso es necesario agregar otro término al funcional (2.131). [20, pág. 44]

$$F[\phi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV - \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi(\mathbf{r}) dS, \quad (2.132)$$

donde $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ corresponde a la condición de frontera sobre la superficie y la segunda integral se hace sobre la superficie cerrada que delimita el volumen V . Podemos probar como usando (2.131) se puede deducir la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas. En este sentido partamos que el volumen $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ y de la definición del gradiente en coordenadas curvilíneas

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 + \frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right)^2, \quad (2.133)$$

de aquí que la ecuación (2.131) se reescribe de la forma

$$F[\phi] = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 + \frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right)^2 \right) h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (2.134)$$

Entonces f está dada por

$$f[\phi] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 + \frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right)^2 \right) h_1 h_2 h_3. \quad (2.135)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange dada por la ecuación (2.128)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \phi} - \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \right) &= 0, \\ - \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \right) &= 0, \\ \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{2.136}$$

donde vemos que la ecuación (2.136) es la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas. De esta manera hemos extendido el funcional para ϕ a coordenadas curvilíneas.

2.8. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CURVILÍNEAS. CONDICIONES DE DIRICHLET

De acuerdo con [16] se puede usar la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas y teniendo una simetría determinada, generalizar la solución del sistema para cuando se tienen condiciones de frontera asociadas a una de las coordenadas. Partamos del sistema coordenado (u_1, u_2, u_3) y los factores de escala (h_1, h_2, h_3) de un sistema coordenado curvilíneo. En este caso, la ecuación de Laplace (2.15) se somete a las condiciones de frontera de Dirichlet

$$\phi_a(u_1 = u_a, u_2, u_3) = 1; \quad \phi_a(u_1 = u_b, u_2, u_3) = 0,\tag{2.137}$$

$$\phi_b(u_1 = u_b, u_2, u_3) = 1; \quad \phi_b(u_1 = u_a, u_2, u_3) = 0,\tag{2.138}$$

que implican unas condiciones de frontera sobre las superficies de $u_1 = u_a$ y $u_1 = u_b$ constantes tal y como se muestra en la figura 2.8. Como se puede observar, se desea buscar la solución de ϕ para el caso en el que la función está delimitada por las superficies S_1 y S_2 .

De esta manera, el objetivo es encontrar la solución de (2.15) en el dominio $u_a \leq u \leq u_b$. Partiendo de la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi_m}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi_m}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi_m}{\partial u_3} \right) = 0.\tag{2.139}$$

Que se aplica para cualquiera de las funciones ϕ_a o ϕ_b . Asumimos que la solución se puede separar de la forma

$$\phi_m(u_1, u_2, u_3) = U_m(u_1)\Theta(u_2, u_3).\tag{2.140}$$

La aplicación de la primera condición de frontera en (2.137) lleva a la expresión

$$\begin{aligned}\phi_m(u_m, u_2, u_3) &= 1, \\ U_m(u_m)\Theta(u_2, u_3) &= 1,\end{aligned}$$

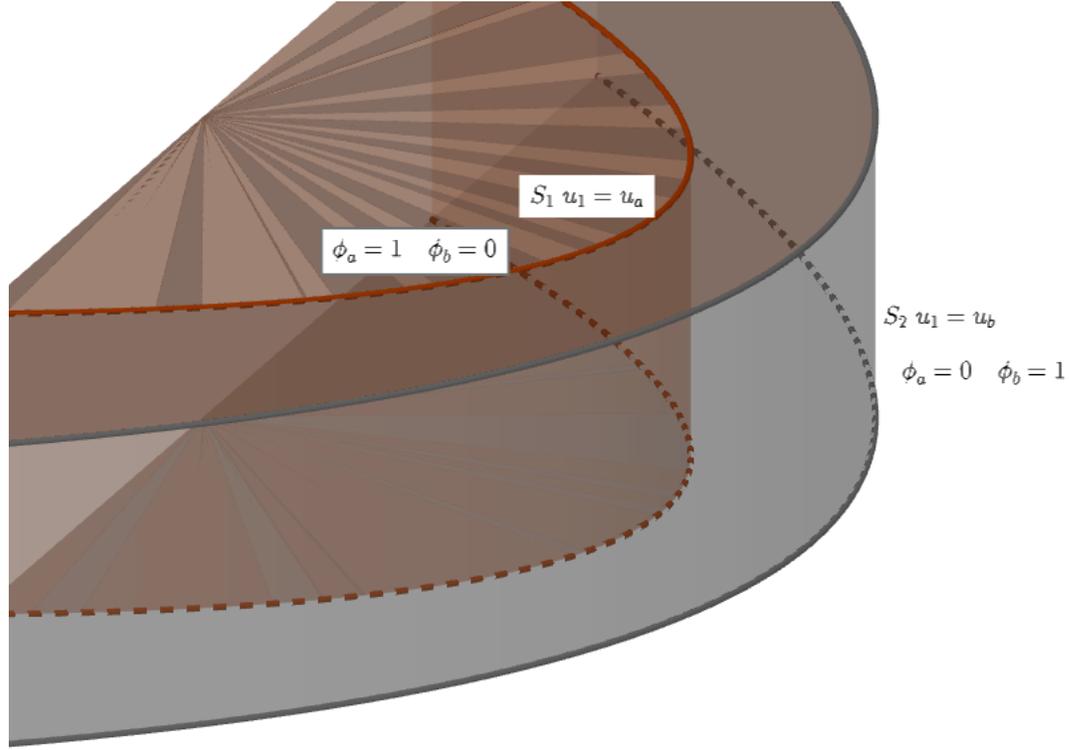


Figura 2.8: Superficies $u_1 = u_a$ y $u_1 = u_b$ para solucionar ϕ usando condiciones de Dirichlet.

$$\Theta(u_2, u_3) = \frac{1}{U_m(u_m)} = A_m. \quad (2.141)$$

Si aplicamos la segunda condición de frontera de (2.137)

$$\begin{aligned} \phi_m(u_n, u_2, u_3) &= 0 & m \neq n, \\ U_m(u_n)\Theta(u_2, u_3) &= 0, \\ U_m(u_n)A_m &= 0, \\ U_m(u_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2.142)$$

de tal forma que la solución de la ecuación de Laplace en este tipo de situaciones depende solo de u_1 . Siguiendo las condiciones (2.141) y (2.142)

$$\phi_m(u_1, u_2, u_3) = A_m U_m(u_1) = \bar{\phi}_m(u_1), \quad (2.143)$$

de este modo la ecuación de Laplace para este problema particular es

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \bar{\phi}_m}{\partial u_1} \right) = 0. \quad (2.144)$$

Esta solución conduce a

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \bar{\phi}_m}{\partial u_1} = k_m(v, w), \quad (2.145)$$

esto implica que, al ser $\frac{\partial \bar{\phi}_m}{\partial u_1}$ sólo dependiente de u , entonces $h_2 h_3 / h_1$ se puede separar en $G(u_1)H(u_2, u_3)$ lo que genera que (2.144) quede de la forma

$$\frac{d}{du_1} \left(G(u) \frac{d\bar{\phi}_m(u_1)}{du_1} \right) = 0 \quad G(u) \frac{d\bar{\phi}_m(u_1)}{du_1} = B_m. \quad (2.146)$$

Al separar variables se tiene

$$\phi_m(u_1) = B_m \int \frac{du_1}{G(u_1)} + C_m; \quad \phi_m(u_1) = B_m I(u_1) + C_m; \quad (2.147)$$

donde se ha eliminado la notación $\bar{\phi}$ debido a que las constantes de integración incluyen el término A_m de (2.143). Retomando la primera condición de frontera (2.137) se tiene

$$\begin{aligned} \phi_m(u_m) &= 1, \\ B_m I(u_m) + C_m &= 1. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Aplicando la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned} \phi_m(u_n) &= 0, \\ B_m I(u_n) + C_m &= 0. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Solucionando el sistema dado en (2.148) y (2.149) se encuentra

$$B_m = \frac{1}{I(u_m) + I(u_n)} \quad C_m = -\frac{I(u_n)}{I(u_m) + I(u_n)} \quad (2.150)$$

lo que lleva a que la solución de este problema con condiciones de Dirichlet (2.137) se pueda resolver a través de la función ϕ

$$\phi_m(u_1) = \frac{I(u_1) - I(u_n)}{I(u_m) - I(u_n)}. \quad (2.151)$$

Obsérvese como la función $I(u_m)$ que genera nuestra solución general de ϕ depende de los factores de escala a través de $G(u_1)$ lo que indica que es enteramente dependiente de la geometría propuesta. También es importante aclarar que esta solución aplica para los casos en los que $h_2 h_3 / h_1$ sean separables, hecho que funciona en muchas geometrías y diferentes tipos de coordenads curvilíneas. Aunque puede que, para fluidos potenciales, estas condiciones de frontera no tengan una aplicación con una explicación física adecuada, el procedimiento mostrado en esta sección puede ser usado para encontrar soluciones de la función de flujo como se mostrará más adelante.

FUNCIONES POTENCIALES EN COORDENADAS GENERALIZADAS

En este capítulo se realizará la generalización de los resultados encontrados para el potencial velocidad ϕ y la función de flujo ψ en coordenadas curvilíneas. Se mostrará cómo a partir de estas ecuaciones en coordenadas generalizadas se puede expresar el funcional para las función de flujo ψ y que se puede extender este resultado para encontrar la función de flujo de una manera general usando el problema de un sólido de revolución inmerso en un fluido.

3.1. FUNCIONAL PARA LA FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Partamos del funcional para la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet (2.131)

$$F[\phi] = \int_V \left| \frac{1}{2} \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) \right| dV. \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta que para los fluidos potenciales $\nabla \phi = \mathbf{v}$ y para nuestro caso en cuestión asumimos simetría azimutal, se puede reescribir (3.1) como

$$F[\phi] = \int_V \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right) dV. \quad (3.2)$$

Usando la ecuación (2.44) se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3.3)$$

de tal forma que el funcional (3.2) es

$$F[\psi] = \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (3.4)$$

Para verificar que este funcional sirve para las coordenadas esféricas, aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange (2.127)

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_\theta} \right) = 0, \quad (3.5)$$

usando

$$f = \frac{r^2 \sin \theta}{2} \left(\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 \right), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_r} \right) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_\theta} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

Que reemplazadas en (3.5) conducen a

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Que es un resultado identico a la ecuación (2.46). De esta manera minimizando el funcional definido en (3.6) se encuentra un método alternativo para determinar la función de flujo ψ de un fluido potencial encerrado en un volumen determinado.

3.2. FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Ahora vamos a generalizar el funcional ψ en coordenadas curvilíneas para situaciones en las que haya una simetría respecto a una de las coordenadas. Para ello, partamos de la ecuación (2.12) y usemos este tratamiento en coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3) con los factores de escala h_1, h_2, h_3 correspondientes. Ahora, supongamos que el sólido tiene simetría en la coordenada u_2

$$\chi = -u_2, \quad \nabla \chi = -\frac{1}{h_2} \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (3.8)$$

De esta forma la velocidad del fluido está dada por

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{h_2} \hat{\mathbf{e}}_2 \times \nabla \psi. \quad (3.9)$$

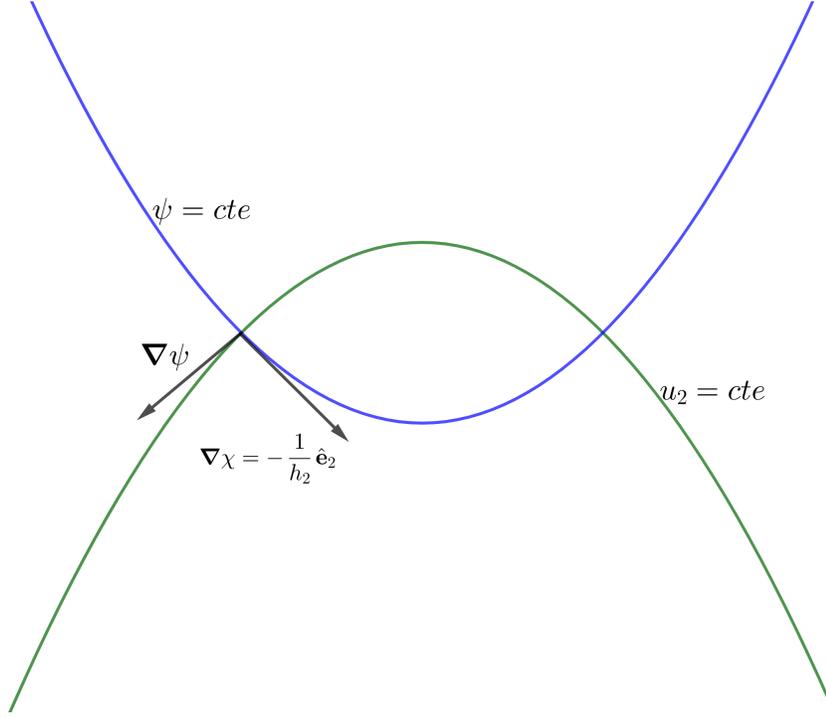


Figura 3.1: Representación gráfica de χ y ψ cuando el sistema tiene una simetría en la coordenada u_2 .

Aplicando el gradiente en coordenadas curvilíneas

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{h_2} \hat{\mathbf{e}}_2 \times \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{e}}_3 \right), \\ &= -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Debido a la simetría azimutal, la derivada respecto a u_2 es 0, $\frac{\partial \psi}{\partial u_2} = 0$ con lo cual obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{e}}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (3.10)$$

Como en este caso el fluido es irrotacional, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ se tiene en coordenadas curvilíneas

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_2, \\ - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

entonces se tiene la ecuación diferencial para ψ

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Este resultado es congruente con las expresiones (2.40) para coordenadas cilíndricas con $h_1 = 1, h_2 = R$ y $h_3 = 1$. Del mismo modo, si la simetría es sobre la coordenada h_3 , es decir, $\chi = -u_3, \frac{d\psi}{du_3} = 0$, y (3.9) se desarrolla para obtener

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\frac{1}{h_3}\hat{\mathbf{e}}_3 \times \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{e}}_2 \right), \\ &= -\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{e}}_1, \quad (3.13)$$

que, al aplicar la condición de fluido irrotacional conduce a (3.12) realizando un cambio entre los factores de escala

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} \right) = 0, \quad (3.14)$$

resultado congruente con (2.46) para coordenadas esféricas con $h_1 = 1, h_2 = r$ y $h_3 = r \sin \theta$. Obsérvese que la velocidad de flujo encontrada en (3.13) tiene un cambio en los signos para cada componente respecto a (3.10). Este resultado se debe tener en cuenta a la hora de relacionar los potenciales ϕ y ψ dependiendo la simetría en u_2 y u_3 . Si la simetría se da en u_1 , se pueden intercambiar los factores de escalar de (3.13) $h_1 \rightarrow h_2$ y $h_2 \rightarrow h_3$ para encontrar la velocidad del flujo

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{e}}_3 + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\hat{\mathbf{e}}_2. \quad (3.15)$$

Que con la condición de irrotacionalidad se llega de nuevo a una ecuación muy similar a (3.12)

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_3} \right) = 0. \quad (3.16)$$

Como se puede observar, a pesar de las diferencias entre (3.10), (3.13) y (3.15) que influyen en el cálculo de la velocidad del flujo y, por ende, la relación entre el potencial velocidad ϕ y la función de flujo ψ las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.16) tienen la misma forma. De aquí que podemos generalizarlas para un fluido potencial que tenga simetría en la coordenada curvilínea u_a a través de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{h_n}{h_a h_m} \frac{\partial\psi}{\partial u_m} \right) + \frac{\partial}{\partial u_n} \left(\frac{h_m}{h_a h_n} \frac{\partial\psi}{\partial u_n} \right) = 0, \quad (3.17)$$

donde m y n son los subíndices que corresponden a las otras coordenadas curvilíneas. Esta ecuación corresponde a la encontrada por [35] si se tiene en cuenta el caso de coordenadas curvilíneas ortogonales. Obsérvese la diferencia entre (3.17) y la ecuación de Laplace. Esto induce a que haya una diferencia en como se plantea la ecuación

diferencial que soluciona ψ . También es de esperarse esta diferencia ya que el potencial velocidad ϕ debe conseguirse del potencial ψ usando el hecho que $\nabla\phi = \mathbf{v}$. Aunque en coordenadas cartesianas esto lleva a una ecuación de Laplace en ψ , para el caso de las coordenadas curvilíneas se deben incluir los factores de escala que permitan que cualquiera de los resultados de (3.10), (3.13) y (3.15) lleven a una igualdad con las componentes del gradiente de ϕ en coordenadas curvilíneas.

3.2.1. FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS ESFÉRICAS

En esta sección vamos a encontrar la solución de la función de flujo ψ para el caso de una geometría esférica y aplicando las condiciones de frontera para un objeto esférico. Partamos de la ecuación (2.46) en coordenadas esféricas para encontrar una solución al flujo

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) = 0, \quad (3.18)$$

Aplicando separación de variables

$$\psi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta),$$

Se llega a

$$\frac{1}{\sin\theta R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) \right) = 0,$$

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) \right) = 0.$$

De este modo, encontramos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = l(l+1), \quad (3.19)$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) \right) = -l(l+1). \quad (3.20)$$

Para solucionar (3.19), reescribimos la ecuación diferencial

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} - l(l+1)R(r) = 0, \quad (3.21)$$

donde usamos la expresión

$$\begin{aligned} R(r) &= r^\lambda, \\ \lambda(\lambda-1)r^\lambda - l(l+1)r^\lambda &= 0, \\ \lambda(\lambda-1) &= l(l+1), \\ \lambda &= l+1, \\ \lambda &= -l. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación radial es de la forma

$$R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}. \quad (3.22)$$

Ahora, tomando la ecuación (3.20)

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \right) + l(l+1) \frac{1}{\sin \theta} \Theta(\theta) = 0. \quad (3.23)$$

Podemos buscar una transformación para que tome una forma relacionada con la ecuación de Legendre

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_L(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta \Theta_L(\theta) = 0. \quad (3.24)$$

Para lograrlo, definamos

$$Y(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \quad (3.25)$$

De tal modo que al reemplazar en (3.23)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (Y) + l(l+1) \frac{1}{\sin \theta} \Theta &= 0, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} (Y) + l(l+1) \Theta &= 0. \end{aligned}$$

Derivando la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) + l(l+1) \frac{d\Theta}{d\theta} &= 0, \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta Y &= 0. \end{aligned}$$

Así que Y cumple la ecuación de los polinomios de Legendre,

$$Y = P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta}, \quad (3.26)$$

que permite determinar la función $\Theta(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} &= \sin \theta P_l(\cos \theta), \\ d\Theta &= \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta, \\ \Theta &= \int \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta, \\ \Theta &= \int P_l(x) dx + C. \end{aligned}$$

Esto muestra que nuestra función de flujo en coordenadas esféricas con simetría azimutal es de la forma

$$\psi(r, \theta) = \sum_l (A_l r^{l+1} + B r^{-l}) \left(\int P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) + C \right). \quad (3.27)$$

Ahora apliquemos las condiciones de frontera de tal forma que se encuentre la función de flujo para una esfera que se encuentra en un fluido potencial en donde para $z \rightarrow -\infty$ se tiene el flujo constante. De esta forma, las condiciones de frontera para el flujo vienen dadas por

$$\psi(r, \theta) = \frac{v}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad r \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow \pi, \quad (3.28)$$

$$\psi(a, \theta) = 0. \quad (3.29)$$

Para que la primera condición de frontera se cumpla, es necesario que $l = 1$ de tal forma que

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \left(A_1 r^2 + \frac{B}{r} \right) \left(\int P_1(\cos \theta) d(\cos \theta) + C \right), \\ &= \left(A_1 r^2 + \frac{B}{r} \right) \left(\int \cos \theta d(\cos \theta) + C \right), \\ &= \left(A_1 r^2 + \frac{B}{r} \right) \left(\frac{1}{2} \cos^2 \theta + C \right), \\ &= \left(A_1 r^2 + \frac{B}{r} \right) \left(-\frac{1}{2} \sin^2 \theta + 1 + C \right), \\ &= \left(A_1 r^2 + \frac{B}{r} \right) \left(-\frac{1}{2} \sin^2 \theta + C \right), \end{aligned}$$

donde se ha usado la identidad $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ y el 1 se ha incluido en la constante C . Simplificando la expresión

$$\frac{v}{2} r^2 \sin^2 \theta = -A_1 r^2 \sin^2 \theta + A_1 r^2 C - \frac{1}{2} \frac{B}{r} \sin^2 \theta + \frac{B}{r} C. \quad (3.30)$$

Que se cumple para $r \rightarrow \infty$ y $\theta \rightarrow \pi$ para $C = 0$ y $A_1 = -v$. Luego que la función de flujo se pueda escribir como

$$\psi(r, \theta) = \left(v r^2 - \frac{B}{r} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2}. \quad (3.31)$$

Ahora, si aplicamos la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned}\psi(a, \theta) &= \left(va^2 - \frac{B}{a} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2}, \\ 0 &= \left(va^2 - \frac{B}{a} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2}, \\ 0 &= \left(va^2 - \frac{B}{a} \right), \\ B &= va^3.\end{aligned}$$

Así que la función de flujo para la esfera en el fluido potencial es

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta) &= \left(vr^2 - \frac{va^3}{r} \right) \frac{\sin^2 \theta}{2}, \\ &= \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \frac{v}{2} r^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}\tag{3.32}$$

que es un resultado acorde con lo encontrado en (2.59). Obsérvese que este tratamiento muestra otra estrategia para saber el comportamiento de un fluido potencial alrededor de objetos ya que en el cuerpo se espera que la función ψ sea una equipotencial. Revisaremos como aplicar esta estrategia en otros sólidos de revolución para determinar si es posible de este modo solucionar de una forma más sencilla el fluido potencial alrededor de los mismos.

3.3. FUNCIONAL PARA LA FUNCIÓN DE FLUJO EN COORDENADAS GENERALIZADAS

Ahora vamos a usar el resultado de (3.17) para encontrar un funcional $f[\psi]$ usando un proceso similar al realizado para la ecuación de Laplace mostrado en la sección 2.7.2. Partiendo que (3.17) no depende explícitamente de ψ por lo que el primer término de (2.128) es 0. Esto implica que podemos escribir la ecuación diferencial para ψ como

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{h_n}{h_a h_m} \frac{\partial \psi}{\partial u_m} \right) + \frac{\partial}{\partial u_n} \left(\frac{h_m}{h_a h_n} \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{h_n h_a}{h_a^2 h_m} \frac{\partial \psi}{\partial u_m} \right) + \frac{\partial}{\partial u_n} \left(\frac{h_m h_a}{h_a^2 h_n} \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial u_m} \left(h_n h_a \frac{1}{h_a^2 h_m} \frac{\partial \psi}{\partial u_m} \right) + \frac{\partial}{\partial u_n} \left(h_m h_a \frac{1}{h_a^2 h_n} \frac{\partial \psi}{\partial u_n} \right),\end{aligned}\tag{3.33}$$

Si incluimos el subíndice j para expresar el factor de escala que no corresponde al subíndice i o a reescribimos en término de una sumatoria

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \right) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_j h_a \frac{1}{h_a^2 h_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right), \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_j h_a h_i^2}{h_a^2 h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Si comparamos este resultado con la ecuación de Euler - Lagrange el término entre parenthesis en (3.34) debe ser igual a $\frac{\partial f}{\partial \phi_i}$. que lleva a que se proponga

$$f = \sum_i \frac{h_j h_a h_i}{h_a^2} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right)^2. \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

Como el término entre parentesis es el gradiente de ψ en coordenadas generalizadas, lo reescribimos de la forma

$$f = \frac{h_1 h_2 h_3}{2 h_a^2} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (3.37)$$

y de este modo el funcional que corresponde a la solución de la función de flujo en coordenadas curvilíneas con simetría en la coordenada u_a está dado por

$$F[\psi] = \int_V \frac{1}{2 h_a^2} \nabla \psi \cdot \nabla \psi h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3, \quad (3.38)$$

donde usamos $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. Obsérvese que este resultado sólo es aplicable cuando existe una simetría respecto a la coordenada u_a y, por lo tanto, no es aplicable de manera general. De esta forma, se puede convertir este funcional hacia una integral de área sin perder generalidad.

Otra forma de encontrar este funcional se logra siguiendo la ecuación (2.131) del funcional para la ecuación de Laplace. Usemos los resultados trabajados en (3.1) para el caso de las coordenadas generalizadas presentadas usando $\nabla \phi$ dada por (3.10) (Sólo se mostrará para una simetría en u_2 sin pérdida de generalidad). De este modo, se tiene que

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} = - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1}. \quad (3.39)$$

Ahora, usando el funcional de la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas con simetría en la coordenada u_2 es

$$F[\phi] = \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 + \frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right)^2 \right) dV, \quad (3.40)$$

usando (3.39)

$$F[\psi] = \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_2^2 h_3^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right)^2 + \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right)^2 \right) dV. \quad (3.41)$$

que se puede finalmente escribir en la forma

$$F[\psi] = \int_V \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right)^2 + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right)^2 \right) \frac{dV}{h_2^2}, \quad (3.42)$$

para representar el funcional para ψ en coordenadas curvilíneas. Es posible reescribir este funcional de la forma

$$F[\psi] = \int_V \frac{1}{2h_2^2} \nabla \psi \cdot \nabla \psi h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3, \quad (3.43)$$

qué es consistente con (3.38) y, por lo tanto, es consistente con (3.12). Es necesario resaltar que este desarrollo del funcional se ha aplicado para un funcional de Laplace que obedece las condiciones de Dirichlet ya que para las condiciones de Neumann o mixtas, el funcional debe cambiar agregando un término adicional. Por esta razón es que el funcional (3.38) tiene significado ya que para fluidos que rodean objetos se tiene la condición de Dirichlet de $\psi = cte$ alrededor del cuerpo.

3.4. FLUJO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS CON CONDICIONES DE DIRICHLET

Es posible solucionar la ecuación (3.17) si aplicamos lo visto en la sección 2.8. Asumamos un fluido potencial, el cual, presenta dos superficies $u_1 = a$ y $u_1 = b$ en donde la función de flujo es constante y, por ende, la velocidad se mueve en la dirección de estas superficies tal y como se muestra en la figura 3.2.

Así, la función de flujo ψ cumple

$$\psi(b, u_3) = \psi_0 \quad \psi(a, u_3) = 0. \quad (3.44)$$

Esta situación puede presentar el caso de un fluido potencial que está delimitado por dos superficies curvilíneas en donde aseguramos que la velocidad del mismo es diferente sobre éstas. En este caso, se asume una simetría en la coordenada u_2 .

Del mismo modo, se puede plantear la solución a partir de la separación de variables $\psi(u_1, u_3) = U(u_1)\Theta(u_3)$. Al aplicar la segunda de las condiciones de frontera en (3.44)

$$\begin{aligned} \psi(a, u_3) &= 0, \\ U(a)\Theta(u_3) &= 0, \\ U(a) &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

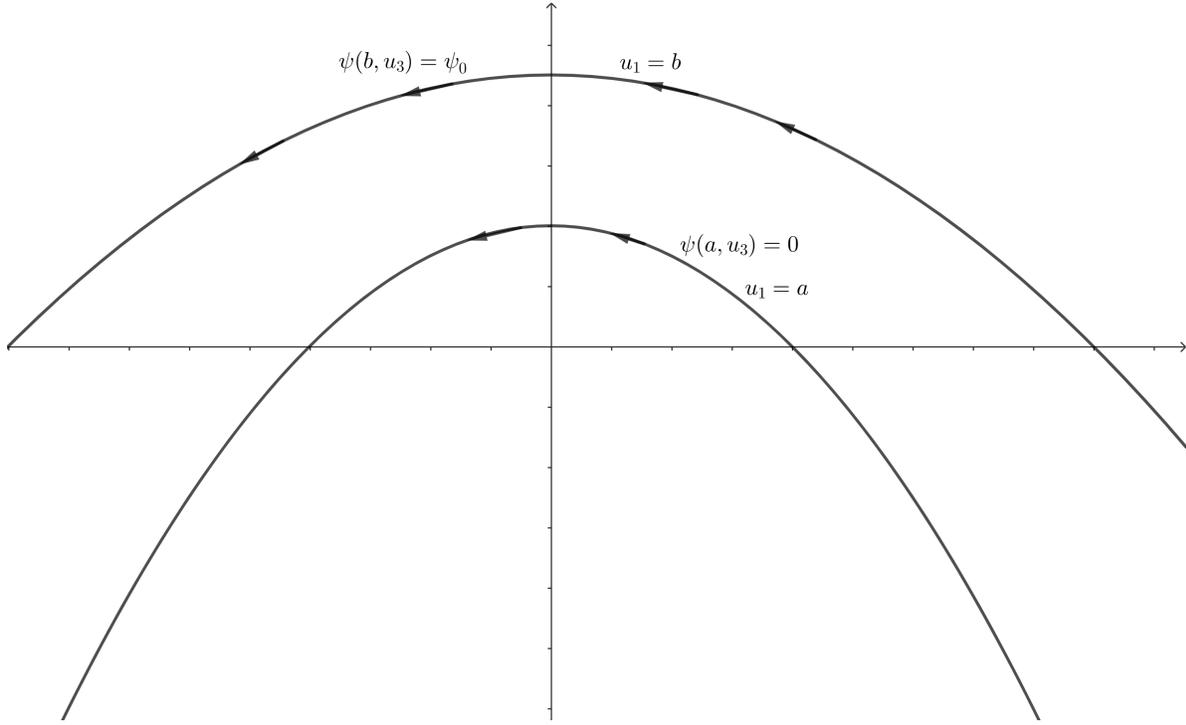


Figura 3.2: Condiciones de Dirichlet para la función de flujo para las superficies $u_1 = a$ y $u_1 = b$. Las flechas representan la dirección del flujo o de la velocidad.

Ahora, si aplicamos la primera condición de frontera

$$\begin{aligned} \psi(b, u_3) &= \psi_0, \\ U(b)\Theta(u_3) &= \psi_0, \\ \Theta(u_3) &= \frac{\psi_0}{U(b)} = A, \end{aligned} \quad (3.46)$$

lo que hace que en estas situaciones la función $\psi(u_1, u_3) = AU(u_1) = \bar{\psi}(u_1)$ luego (3.12) queda de la forma

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \bar{\psi}_m}{\partial u_1} \right) = 0. \quad (3.47)$$

Aplicando la misma metodología presentada para solucionar (2.144) se puede llegar a

$$G_\psi(u_1) \frac{d\psi}{du_1} = B_m, \quad (3.48)$$

donde $\frac{h_3}{h_1 h_2} = G_\psi(u_1)H_\psi(u_3)$. De este modo se tiene una solución similar a (2.151) para ψ

$$\psi(u_1) = \psi_0 \frac{I_\psi(u_1) - I_\psi(u_n)}{I_\psi(u_m) - I_\psi(u_n)} \quad (3.49)$$

con $I_\psi(u_1) = \int du_1/G_\psi(u_1)$. Aunque el resultado es muy similar al encontrado en (2.151), es importante tener en cuenta la diferencia entre las funciones $I(u_1)$ y $G(u_1)$

con las funciones $I_\psi(u_1)$ y $G_\psi(u_1)$. Hasta este punto, y debido a la simetría que tiene (3.17), este resultado es general sin importar si las superficies equipotenciales son intercambiadas por u_2 o u_3 al igual que la simetría en cualquiera de las coordenadas generalizadas. Sin embargo al momento de calcular la velocidad del flujo \mathbf{v} o el potencial velocidad ϕ es necesario tener en cuenta las ecuaciones (3.10), (3.13) o (3.15) de acuerdo a la simetría deseada. Si usamos una simetría en la coordenada u_2 como la descrita anteriormente se tiene la velocidad usando (3.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{e}}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{e}}_1, \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\psi_0}{(I_\psi(b) - I_\psi(a))} \frac{dI_\psi(u_1)}{du_1} \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{v} &= \frac{\psi_0}{h_1 h_2 (I_\psi(b) - I_\psi(a))} \cdot \frac{1}{G_\psi(u_1)} \hat{\mathbf{e}}_3,\end{aligned}\tag{3.50}$$

donde se tiene que $G_\psi(u_1)$ es la parte de $h_3/h_1 h_2$ que solo depende de u_1 . Para calcular el potencial velocidad, podemos tener en cuenta que la velocidad es igual a $\nabla \phi$, luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi_m}{\partial u_3} &= \frac{\psi_0}{h_1 h_2 (I_\psi(b) - I_\psi(a))} \cdot \frac{1}{G_\psi(u_1)}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial u_3} &= \frac{\psi_0}{I_\psi(b) - I_\psi(a)} \cdot \frac{1}{G_\psi(u_1)} \frac{h_3}{h_1 h_2}, \\ \phi(u_1, u_3) &= \frac{\psi_0}{I_\psi(b) - I_\psi(a)} \cdot \frac{1}{G_\psi(u_1)} \int \frac{h_3}{h_1 h_2} du_3 + K(u_1), \\ \phi(u_1, u_3) &= \frac{\psi_0}{I_\psi(b) - I_\psi(a)} \int H_\psi(u_3) du_3 + K(u_1),\end{aligned}\tag{3.51}$$

recordando que $H_\psi(u_3)$ corresponde a la parte que depende de u_3 para $h_3/h_1 h_2$. Como no hay componente de la velocidad en u_1 , la constante $K(u_1) = 0$ por lo que se tiene

$$\phi(u_3) = \frac{\psi_0}{I_\psi(b) - I_\psi(a)} \int H_\psi(u_3) du_3.\tag{3.52}$$

Obsérvese cómo este ejemplo muestra la dependencia de ψ respecto a las superficies equipotenciales en u_1 mientras que el potencial velocidad tiene una dependencia de la otra coordenada u_3 para asegurar que la velocidad vaya circulando alrededor de la función de flujo. Aunque este resultado puede ser general, es necesario tener en cuenta los cambios en los signos para cuando las superficies de ψ constante cambien por otras coordenadas generalizadas constantes hecho que de observará en los ejemplos siguientes.

3.4.1. Aplicación en coordenadas cilíndricas

Supongamos un sistema que esté en coordenadas cilíndricas con simetría en la coordenada z . A esto añadamos las condiciones de Dirichlet en las que la función

de flujo es constante para dos valores de $R = a$ y $R = b$. En este caso debemos intercambiar las coordenadas h_2 y h_3 en nuestros resultados de $G_\psi(u_1)$ y tener en cuenta que $h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1$. De este modo las condiciones de frontera (3.44) son

$$\psi(a, \varphi) = 0 \quad \psi(b, \varphi) = \psi_0. \quad (3.53)$$

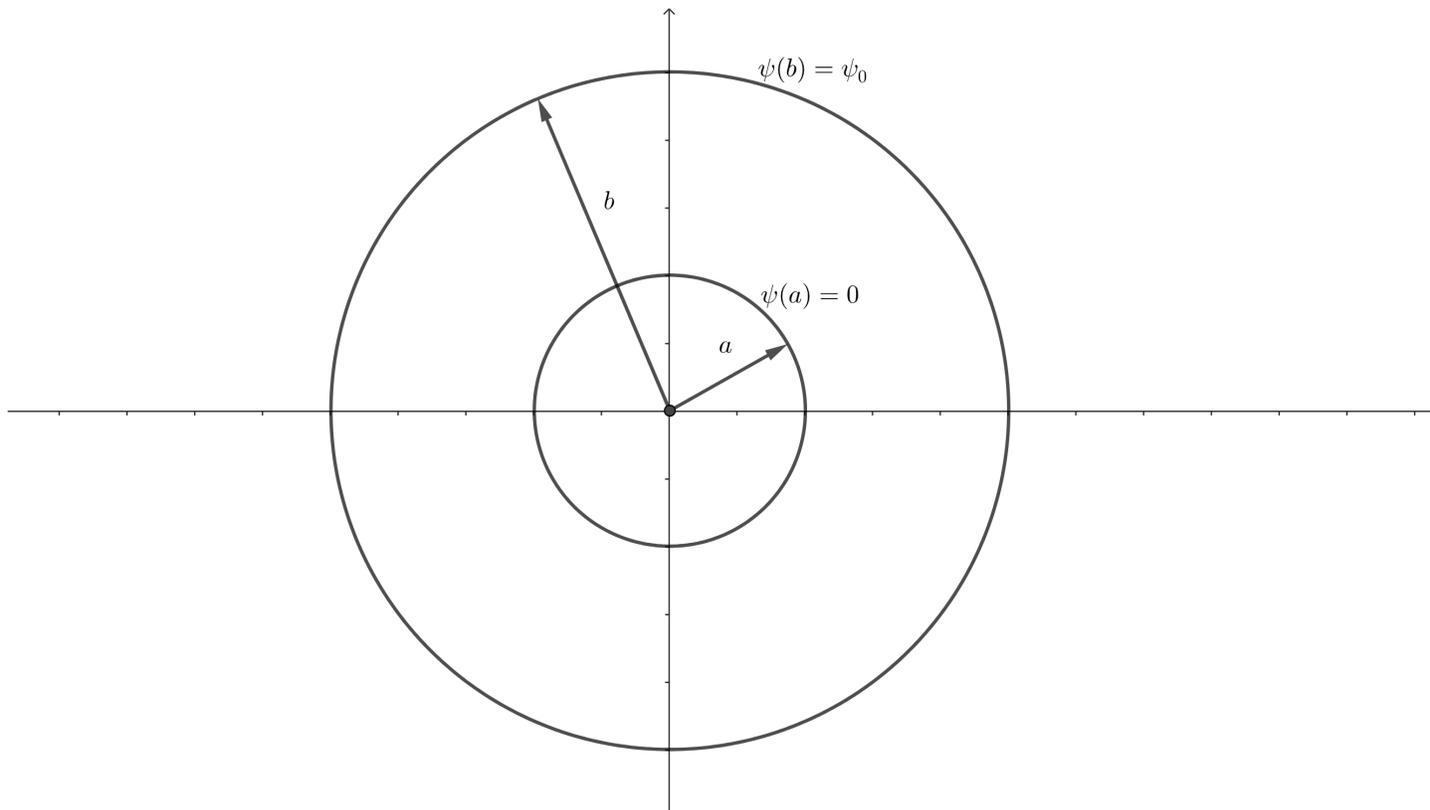


Figura 3.3: Cilindros concéntricos con simetrías en z . Se muestran las condiciones de Dirichlet para $R = a$ y $R = b$.

Recordando la definición de $I_\psi(R)$

$$\begin{aligned} I_\psi(R) &= \int \frac{dR}{G_\psi(R)}, \\ &= \int \frac{dR}{R}, \\ I_\psi(R) &= \ln(R). \end{aligned}$$

De esta forma la función de flujo ψ usando (3.49) está dada por

$$\begin{aligned} \psi(R) &= \psi_0 \frac{\ln(R) - \ln(a)}{\ln(b) - \ln(a)}, \\ \psi(R) &= \frac{\psi_0}{\ln(b/a)} \ln(R/a). \end{aligned} \quad (3.54)$$

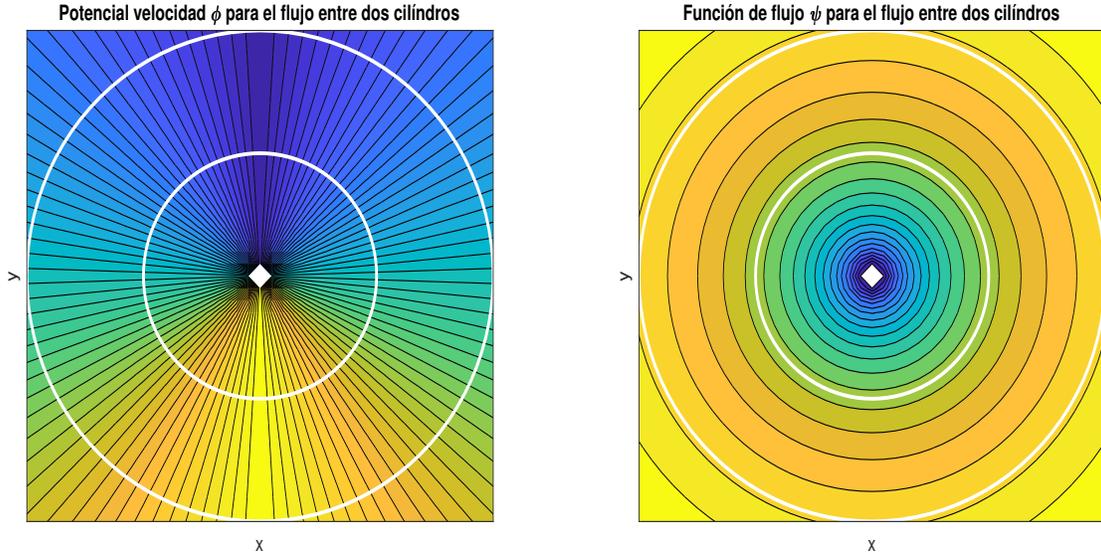


Figura 3.4: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para dos cilindros concéntricos usando condiciones de Dirichlet $\psi(b, \varphi) = \psi_0$ y $\psi(a, \varphi) = 0$

La velocidad calculada usando (3.13) debido al orden de simetría entre u_2 y u_3 . Usando las coordenadas $u_1 = R, u_2 = \varphi, u_3 = z$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial R} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_R, \\ \mathbf{v} &= -\frac{\psi_0}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.55)$$

y de donde podemos calcular el potencial velocidad de una manera similar a (3.52)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= -\frac{\psi_0}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{R}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= -\frac{\psi_0}{\ln(b/a)}, \\ \phi &= -\frac{\psi_0}{\ln(b/a)} \varphi. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Estos resultados son consistentes con los encontrados en [5] sobre el fluido que rota alrededor de un punto. Ejercicio que se realiza para el flujo en 2 dimensiones que se expresa usando el potencial complejo w . En la figura 3.4 se encuentran las líneas equipotenciales para este flujo. Obsérvese como están simétricamente alineadas e igualmente espaciadas las superficies equipotenciales y función de flujo constante para esta situación.

3.4.2. Coordenadas esféricas

Partamos de dos cascarones esféricos en los que aseguramos la simetría azimutal. Vamos a colocar como condición que para las superficies en los cascarones esféricos es constante. Esto se puede expresar de la forma

$$\psi(b, \theta) = \psi_0 \quad \psi(a, \theta) = 0. \quad (3.57)$$

Podríamos interpretar este problema como un fluido potencial que pasa entre los dos cascarones esféricos por un pequeño agujero que se encuentra en $\theta = \pi$. Usando las coordenadas r, θ, φ con factores de escala $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$. De esta forma la función $G_\psi(r)$ y la función $H_\psi(\theta)$ se encuentran

$$\begin{aligned} G_\psi(r)H_\psi(\theta) &= \frac{h_2}{h_1 h_3} = \frac{r}{r \sin \theta}, \\ G_\psi(r) &= 1, \\ H_\psi(\theta) &= \sin \theta, \end{aligned}$$

de aquí que $I_\psi(r) = r$. Entonces ψ se encuentra usando

$$\psi(r) = \psi_0 \frac{r - a}{b - a}. \quad (3.58)$$

Es sencillo observar como esta expresión cumple con (3.17), ya que no depende de θ , entonces cumple

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi_0 \frac{r - a}{b - a} \right) \right) = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \left(\psi_0 \frac{1}{b - a} \right) \right) = 0, \quad (3.60)$$

siendo la derivada de la constante 0. Obsérvese como la dependencia lineal de ψ respecto de r implica que las líneas equipotenciales de la función deflujo son cascarones esféricos cuyas distancias estan separadas en la misma proporción tal y como se muestra en la figura 3.5. Usando (3.13) encontramos la velocidad del flujo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r, \\ \mathbf{v} &= -\frac{\psi_0}{(b - a)r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En este caso, si $b > a$, la velocidad del flujo circula en la dirección de $-\hat{\mathbf{e}}_\theta$ o antihorario en la figura 3.5 y en sentido opuesto si $a > b$. Aplicando el hecho que el

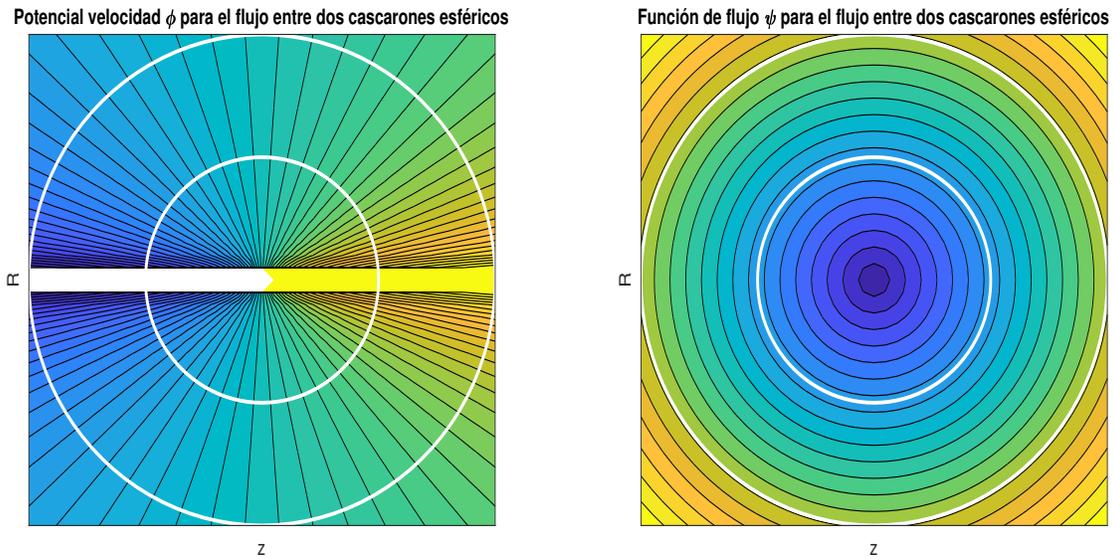


Figura 3.5: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para dos cascarones esféricos concéntricos usando condiciones de Dirichlet $\psi(b, \varphi) = \psi_0$ y $\psi(a, \varphi) = 0$

potencial velocidad ϕ es el gradiente de la velocidad

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{\psi_0}{(b-a)r \sin \theta}, \\
 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\frac{\psi_0}{(b-a) \sin \theta}, \\
 \phi(\theta) &= -\frac{\psi_0}{(b-a)} \int \frac{d\theta}{\sin \theta}, \\
 \phi(\theta) &= \frac{\psi_0}{(b-a)} \ln(\csc \theta + \cot \theta), \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

donde se ha omitido la constante que depende de r debido a que el potencial debe depender sólo de la coordenada θ . Se pide mostrar que efectivamente $\nabla^2 \phi = 0$. En la figura 3.5 se muestran las líneas equipotenciales para ψ y ϕ .

Se puede observar como las equipotenciales para ϕ se separan conforme llegan al plano xy , es decir, conforme θ se aproxima a $\pi/2$. Esto se explica a través del término $1/\sin \theta$ que está en la velocidad mostrada por (3.61). Tengase en cuenta que tanto la velocidad como el potencial no están definidos para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ que pueden indicar la entrada y salida del fluido potencial.

3.5. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CURVILÍNEAS, CONDICIÓN ASINTÓTICA

Para el caso de interés de este proyecto, tengamos en cuenta un fluido potencial que a una distancia considerable del cuerpo se mueve a una velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{k}}$ (o $\hat{\mathbf{i}}$) y que en la superficie del cuerpo la velocidad vaya tangencial al mismo. No asumimos rotación del cuerpo aunque se puede mostrar que existen soluciones únicas [37]. Partamos del hecho que el cuerpo tiene simetría en la coordenada u_2 (o u_3) y que su superficie está dada por $u_1 = a$. De este modo, las condiciones de frontera para esta situación están dadas por

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{k}} = v \quad u_1 \rightarrow \infty, \quad (3.63)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \quad u_1 = a. \quad (3.64)$$

Para simplificar este problema, vamos a proponer la solución a partir de la superposición de dos potenciales velocidad. Uno que cumpla con la condición de frontera en infinito o de flujo constante $\phi_1 = vz$ (o vx dependiendo la simetría) y otro que permita que la condición de frontera en el cuerpo se cumpla (Figura 3.6), para esto, se propone

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad (3.65)$$

$$\phi_1 = vz, \quad (3.66)$$

$$\nabla\phi_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = -v\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{para } u_1 = a, \quad (3.67)$$

$$\nabla\phi_2(u_1, u_3 \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.68)$$

Por medio de la superposición de las soluciones, ϕ_2 cumple la ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas con simetría en u_2

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi_2}{\partial u_3} \right) = 0. \quad (3.69)$$

De este modo, y para que cumpla las condiciones de frontera, se propone la siguiente solución

$$\phi_2(u_1, u_3) = U(u_1)W(u_3), \quad (3.70)$$

con la restricción que $\nabla\phi_2(u_1 \rightarrow \infty, u_3) = 0$ para que se cumpla la ecuación (3.68). Si se aplica la condición (3.67) se tiene

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1} U'(u_1)W(u_3). \quad (3.71)$$

$$(3.72)$$

Para $u_1 = a$

$$\frac{1}{h_1} U'(a)W(u_3) = -v\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (3.73)$$

$$W(u_3) = -\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3), \quad (3.74)$$

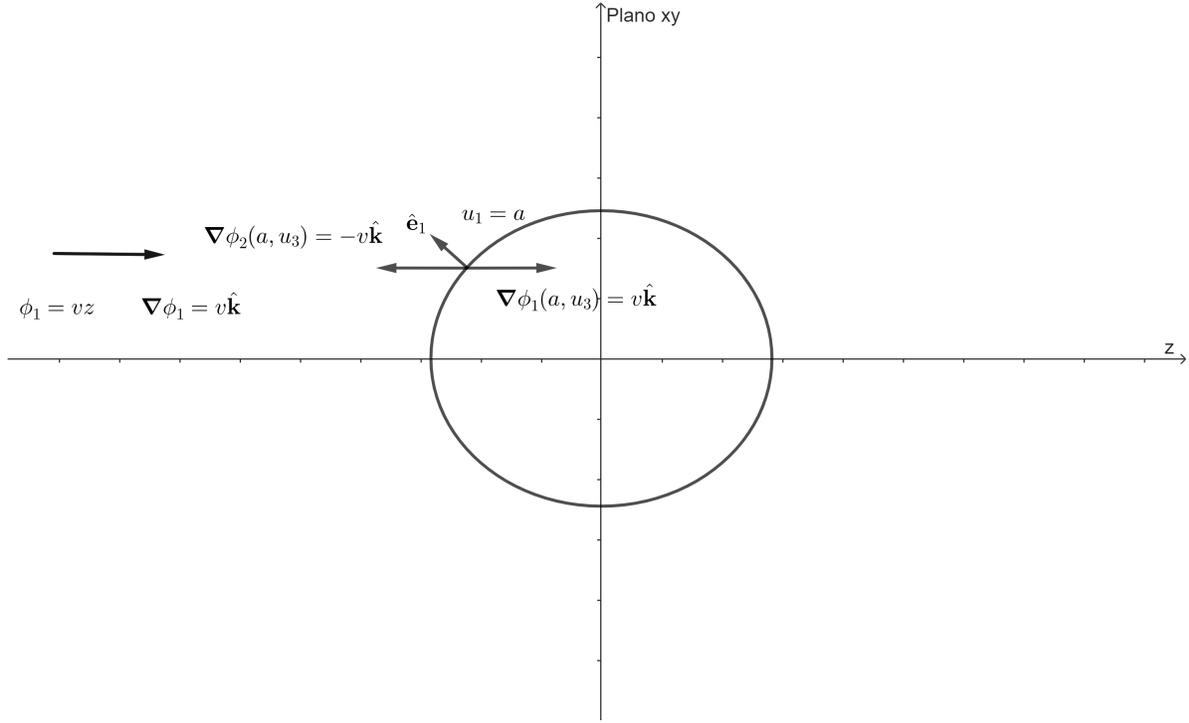


Figura 3.6: Construcción del potencial velocidad para la solución de un objeto cuya superficie está dada por $u_1 = a$ con condición de frontera de flujo uniforme lejos del mismo. De la figura se encuentra que $\nabla\phi = \nabla\phi_1 + \nabla\phi_2 = 0$ para $u_1 = a$.

donde se ha usado la definición del vector unitario

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

para encontrar una expresión para la función $W(u_3)$. Ahora, para aplicar la separación de variables en (3.69), introduzcamos por conveniencia los siguientes términos

$$\alpha(u_1, u_3) = \alpha_1(u_1)\alpha_3(u_3) = \frac{h_2 h_3}{h_1}, \quad (3.75)$$

$$\beta(u_1, u_3) = \beta_1(u_1)\beta_3(u_3) = \frac{h_1 h_2}{h_3}, \quad (3.76)$$

que deben ser independientes de u_2 teniendo en cuenta la simetría respecto a esta coordenada. Lo que conlleva a (3.69) a la forma

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\alpha_1 \alpha_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\beta_1 \beta_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial u_3} \right) = 0. \quad (3.77)$$

Usando (2.15) y dividiendo entre $\alpha_3 \beta_1 U(u_1) W(u_3)$ se tiene

$$\frac{1}{\beta_1 U(u_1)} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\alpha_1 \frac{\partial U(u_1)}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{\alpha_3 W(u_3)} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\beta_3 \frac{\partial W(u_3)}{\partial u_3} \right) = 0. \quad (3.78)$$

De esta manera se puede aplicar separación de variables

$$\frac{d}{du_1} \left(\alpha_1 \frac{dU(u_1)}{du_1} \right) + k^2 \beta_1 U(u_1) = 0, \quad (3.79)$$

$$\frac{d}{du_3} \left(\beta_3 \frac{dW(u_3)}{du_3} \right) - k^2 \alpha_3 W(u_3) = 0, \quad (3.80)$$

con k^2 siendo la constante de la separación de variables. Usando la ecuación (3.74) en (3.80) obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{du_3} \left(\beta_3 \frac{d}{du_3} \left(-\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3) \right) \right) - k^2 \alpha_3 \left(-\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3) \right) &= 0, \\ \frac{d}{du_3} \left(\beta_3 \frac{d}{du_3} \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3) \right) \right) - k^2 \alpha_3 \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

que en principio sólo tiene como incógnita a la constante k^2 . Si esta constante se puede obtener a partir de la ecuación (3.81), entonces puede ser usada en la ecuación diferencial (3.79) para ser solucionada. De estos resultados, el potencial ϕ_2 se encuentra por medio de (3.70) usando (3.74) para $W(u_3)$ ¹

$$\begin{aligned} \phi_2(u_1, u_3) &= U(u_1)W(u_3), \\ &= U(u_1) \left(-\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3) \right), \\ &= -\frac{v}{U'(a)} U(u_1) \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Finalmente, la solución para el fluido potencial que interactúa con un sólido con simetría en u_2 y que tiene solución asintótica con fluido en movimiento en infinito es

$$\phi(u_1, u_3) = vz(u_1, u_3) - \frac{v}{U'(a)} U(u_1) \frac{\partial z}{\partial u_1}(a, u_3). \quad (3.83)$$

Es importante tener en cuenta que para algunos sistemas coordenados puede ser mejor usar la condición asintótica en otro eje coordenado para lo que tan sólo se debe cambiar z por la coordenada necesaria. Es necesario remarcar que la ecuación (3.83) se cumple siempre y cuando el segundo término referente a ϕ_2 tenga la condición asintótica en su gradiente para así asegurar que en el infinito se encuentra la solución de flujo constante. Esto se puede detectar rápidamente si al realizar la solución de (3.79), la función encontrada tiene (o no) condición asintótica. En caso de no poderse lograr una condición de este tipo, la solución del sistema de interacción fluido potencial y objeto se debe realizar a través de otros métodos de solución de ecuaciones diferenciales. De esta manera, el resultado de la ecuación (3.83) nos muestra un método eficiente para el cálculo del potencial velocidad cuando se tiene una simetría y con objetos que tengan la forma de un sistema curvilíneo dado.

¹Es posible encontrar la solución de ϕ_2 cuando la simetría está en la coordenada u_3 , de tal forma que la solución del sistema puede estar dada tan solo con un intercambio entre los subíndices 3 y 2 en las soluciones encontradas.

3.5.1. Aplicación condición asintótica: coordenadas esféricas

Para ilustrar el método anterior consideremos el caso de una esfera inmersa en un fluido potencial de tal forma que usamos las coordenadas esféricas (r, θ, φ) con factores de escala $(1, r, r \sin \theta)$ y simetría en φ . Así se obtienen los siguientes resultados (intercambiando los subíndices 3 por 2):

$$\alpha(r, \theta) = r^2 \sin \theta \quad \alpha_1 = r^2 \quad \alpha_2 = \sin \theta, \quad (3.84)$$

$$\beta(r, \theta) = \sin \theta \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = \sin \theta. \quad (3.85)$$

Aplicando estos resultados en (3.74) se tiene $W(\theta) = A \cos \theta$ y, por lo tanto, de la ecuación (3.80)

$$-\sin \theta \cos \theta (k^2 + 2) = 0, \quad (3.86)$$

lo que implica que $k^2 = -2$. Usando este resultado en (3.79)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} (U(r)) \right) - 2U(r) = 0. \quad (3.87)$$

Esta expresión puede ser simplificada a la ecuación diferencial

$$r^2 \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + 2r \frac{dU(r)}{dr} - 2U(r) = 0. \quad (3.88)$$

La solución de esta ecuación es dada por

$$U(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r^2} \quad (3.89)$$

donde $A_1 = 0$ para asegurar que que (3.68) se cumpla cuando $r \rightarrow \infty$. Usando esta función en la ecuación (3.82) se obtiene

$$\phi_2(r, \theta) = \frac{a^3}{2r^3} vr \cos \theta. \quad (3.90)$$

De este modo, se tiene que

$$\phi(r, \theta) = vr \cos \theta + \frac{a^3}{2r^3} vr \cos \theta = \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) vr \cos \theta \quad (3.91)$$

Que está de acuerdo con la ecuación (2.54) encontrada anteriormente.

3.5.2. Aplicación condición asintótica: Coordenadas cilíndricas

Tengamos en cuenta el caso de un cilindro ubicado de tal forma que el fluido se mueva en dirección $\hat{\mathbf{i}}$, lo que implica que la simetría está en la coordenada z . De este modo, las coordenadas (R, φ, z) y factores de escala $(1, R, 1)$ tenemos (De nuevo intercambiando los subíndices 3 y 2)

$$\alpha(R, \varphi) = R \quad \alpha_1 = R \quad \alpha_2 = 1, \quad (3.92)$$

$$\beta(R, \varphi) = \frac{1}{R} \quad \beta_1 = \frac{1}{R} \quad \beta_2 = 1. \quad (3.93)$$

Así se tiene que $W(\varphi) = A \cos \varphi$ que al reemplazarse en la ecuación (3.80) conlleva a

$$-\cos \varphi (k^2 + 1) = 0 \quad (3.94)$$

por lo que $k^2 = -1$. Usando este resultado en (3.79) y simplificando se llega a

$$R^2 \frac{d^2 U}{dR^2} + R \frac{dU}{dR} - U(R) = 0, \quad (3.95)$$

que conlleva a la solución $U(R) = AR + B/R$. En este caso, $A = 0$ para que la condición asintótica (3.68) se cumpla. Entonces ϕ_2 queda

$$\phi_2 = \frac{a^2}{R^2} Rv \cos \varphi, \quad (3.96)$$

y usando a $\phi_1 = vx = vR \cos \varphi$ se tiene como solución

$$\phi(R, \varphi) = \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) Rv \cos \varphi, \quad (3.97)$$

resultado que corresponde a la solución de un objeto circular en 2D.

CÁLCULO DEL FLUJO EN FLUIDOS POTENCIALES CON DIFERENTES SIMETRÍAS

Se han descrito hasta el momento cuatro estrategias para encontrar el potencial velocidad, la función de flujo y el campo de velocidades cuando se tienen sistemas con diferentes simetrías, estas son

1. Solucionando la ecuación de Laplace para el potencial velocidad y aplicando las condiciones de Neumann correspondientes.
2. Solucionando la ecuación diferencial para la función de flujo (3.17) usando condiciones de Dirichlet. Cuando la geometría está dada por dos superficies $u_1 = a$ y $u_1 = b$, podemos solucionar la ecuación diferencial usando la ecuación (3.49).
3. En el caso de un objeto inmerso en un fluido con velocidad uniforme inicialmente, la condición asintótica y la suma de los potenciales de flujo constante con el potencial que cumple la condición de Neumann no homogénea dada por la condición (3.68).
4. Usando el funcional de Laplace o el funcional de la función de flujo dado en la expresión (3.43) y minimizarlo.

En este capítulo se mostrarán algunas soluciones para el potencial velocidad ϕ y la función de flujo ψ en diferentes sistemas coordenados como los parabólicos esféricos, cilíndricos, elípticos esféricos y cilíndricos usando lo mostrado en el capítulo anterior. Se trabajan algunos resultados en otros sólidos de revolución y se explora el cálculo de la masa aparente de éstos sólidos.

4.1. CILINDRO EN UN FLUIDO POTENCIAL

En esta sección vamos a mostrar cómo se puede usar la primera estrategia presentada en la solución de un problema conocido como es el cilindro con simetría en el eje z . A partir de esta solución se muestra la consecución de la masa aparente para este objeto siguiendo la metodología presentada en la sección 2.5. Partamos de la ecuación para (2.14) en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) para el potencial velocidad

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.1)$$

Deseamos resolver esta ecuación en diferentes configuraciones, para ello consideremos primero el caso de simetría a lo largo del eje z .

4.1.1. Cilindro en fluido potencial con simetría en el eje z

Consideremos un cilindro de radio a y altura h que se encuentra inmerso en un fluido potencial cuyo flujo asintótico está dado por $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$ tal y como se muestra en la figura 4.1

De este modo (4.1) queda de la forma

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.2)$$

La solución de esta ecuación luego de aplicar separación de variables es

$$\phi(R, \varphi) = (B_m R^m + B_{-m} R^{-m}) (A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)). \quad (4.3)$$

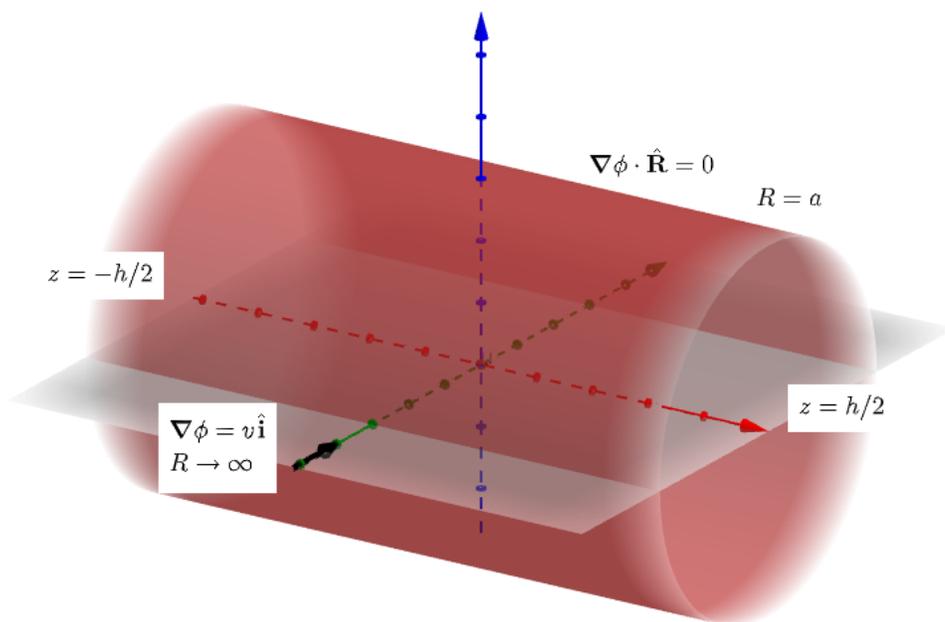


Figura 4.1: Cilindro inmerso en fluido potencial con condición asintótica en la dirección del eje x

De acuerdo a lo realizado para una esfera con las ecuaciones (2.48) e (2.49), las

condiciones de Neumann en este caso son:

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{R}} = 0 \quad \forall R = a, \quad (4.4)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{i}} = v \quad \forall R \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

La primera expresión muestra el fluido que va alrededor del cilindro y la segunda ecuación muestra la velocidad del fluido en el infinito que debe ser igual a la velocidad en una de las coordenadas cartesianas. Calculando el gradiente de ϕ se tiene

$$\begin{aligned} \nabla\phi = & m(B_m R^{m-1} - B_{-m} R^{-m-1})(A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) \hat{\mathbf{R}} \\ & + \frac{m}{R}(B_m R^m + B_{-m} R^{-m})(A_1 \cos(m\varphi) - A_2 \sin(m\varphi)) \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aplicando (4.4) se tiene:

$$m(B_m a^{m-1} - B_{-m} a^{-m-1})(A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) = 0, \quad (4.7)$$

resultado que implica que la primera expresión en parentesis sea 0 y se llegue a $B_{-m} = a^{2m} B_m$. De este modo el gradiente de ϕ queda de la forma

$$\begin{aligned} \nabla\phi = & m(R^{m-1} - a^{2m} R^{-m-1})(A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) \hat{\mathbf{R}} \\ & + \frac{m}{R}(R^m + a^{2m} R^{-m})(A_1 \cos(m\varphi) - A_2 \sin(m\varphi)) \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Donde la constante B_m se ha incluido a las constantes A_i que están en la funciones sinusoidales. Para aplicar (4.5) es necesario que $m = 1$ para que ϕ no diverga en $R \rightarrow \infty$ y usando $\hat{\mathbf{i}} = \cos\varphi \hat{\mathbf{R}} - \sin\varphi \hat{\varphi}$ se tiene

$$\begin{aligned} v = & (A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi) \cos\varphi \\ & - (A_1 \cos\varphi - A_2 \sin\varphi) \sin\varphi \end{aligned} \quad (4.9)$$

que lleva a que $A_2 = v$. De este modo, (4.3) queda de la forma

$$\phi(R, \varphi) = R \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) (A_1 \sin\varphi + v \cos\varphi). \quad (4.10)$$

Si se tiene en cuenta la simetría del cilindro, se debe cumplir $\phi(R, \varphi) = \phi(R, 2\pi - \varphi)$. Como esta condición no se cumple para $\sin\varphi$, entonces $A_1 = 0$ y por lo tanto se tiene

$$\phi(R, \varphi) = vR \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) \cos\varphi. \quad (4.11)$$

Que equivale al potencial encontrado en (3.97) respecto a un objeto circular en 2D, caso que es de esperarse debido a la simetría en z . Aunque es de interés la solución del cilindro con simetría en φ , la solución del cilindro con condiciones asintóticas está incompleta y se puede realizar para un cilindro semiinfinito y, por lo tanto, se deja como un anexo.

Masa Aparente y Potencia sobre el cilindro con simetría en eje z

Vamos a aplicar los procedimientos empleados en la sección 2.5 para encontrar la masa aparente de este cilindro que se acelera en un fluido potencial y que lleva una velocidad $\hat{\mathbf{u}}_s = u_s \hat{\mathbf{i}}$. Para lograrlo, primero reescribamos (4.11) en términos de la suma del flujo constante y el dipolo en 2D

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= vR \cos \varphi + \frac{a^2}{R^2} vR \cos \varphi, \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \frac{a^2}{r^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r},\end{aligned}\quad (4.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que el cilindro tiene su centro de masa sobre el eje z . Si tenemos en cuenta que en lugares lejanos al cuerpo el fluido está en reposo y, por lo tanto, el primer término se puede asumir 0. En el segundo término, usemos $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_s$ que es la velocidad del cuerpo. Si el cuerpo se encuentra en la posición \mathbf{r}_s reescribimos el potencial velocidad de la forma

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \mathbf{u}_s) = -\frac{a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \quad (4.13)$$

Retomemos la ecuación para la fuerza aplicada por el fluido sobre el cuerpo (2.66)

$$\mathbf{F} = \int_{Cilindro} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (4.14)$$

De donde podemos calcular esta fuerza usando (4.13). Si tenemos en cuenta (2.77) y asumimos las mismas suposiciones para la esfera,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\nabla \phi \cdot \mathbf{u}_s + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u_{si}} \frac{\partial u_{si}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\nabla \phi \cdot \mathbf{u}_s - \frac{a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Calculando el gradiente del potencial velocidad

$$\begin{aligned}\nabla \phi &= \frac{2a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^4} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) (\mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)) - \frac{a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} \mathbf{u}_s, \\ \nabla \phi &= -\frac{a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} \left(\mathbf{u}_s - \frac{2(\mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \right).\end{aligned}\quad (4.16)$$

Para determinar la fuerza, debemos calcular estos resultados sobre la superficie del cilindro $\mathbf{r} - \mathbf{r}_s = a \hat{\xi}$ siendo este el vector unitario de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_s$ tal y como se mostró en la sección 2.5. Usando esta definición

$$(\nabla \phi)_a = - \left(\mathbf{u}_s - 2(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\xi}) \hat{\xi} \right), \quad (4.17)$$

del mismo modo, podemos calcular $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ sobre el cilindro

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_a &= -\nabla\phi \cdot \mathbf{u}_s - a\hat{\xi} \cdot \frac{d\mathbf{u}_s}{dt}, \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_a &= -2(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\xi})^2 + u_s^2 - a\hat{\xi} \cdot \frac{d\mathbf{u}_s}{dt}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Ahora calculando $(\nabla\phi)_a^2 = u_s^2$ lo que lleva a que (4.14) a la forma

$$\mathbf{F} = \rho \int_{Cilindro} \left(-2(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\xi})^2 + u_s^2 - a\hat{\xi} \cdot \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} + \frac{1}{2}u_s^2 \right) \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (4.19)$$

Partiendo que la velocidad del cuerpo es $\mathbf{u}_s = u_s \hat{\mathbf{i}}$ y asumiendo que en este punto el cuerpo está sobre el origen, se tiene que $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{i} = \hat{\mathbf{R}}$ de tal forma que la fuerza se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\rho \int_{Cilindro} \left(2(\mathbf{u}_s \cdot \hat{\xi})^2 - \frac{3}{2}u_s^2 + a\hat{\xi} \cdot \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \right) \hat{\mathbf{n}} dA, \\ &= -\rho \int_{Cilindro} \left(2\cos^2\varphi - \frac{3}{2}u_s^2 + a\cos\varphi \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \right) \hat{\mathbf{R}} a dz d\varphi, \\ \mathbf{F} &= -\rho a z \int_{Cilindro} \left(2\cos^2\varphi - \frac{3}{2}u_s^2 + a\cos\varphi \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} \right) (\cos\varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin\varphi \hat{\mathbf{j}}) d\varphi.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Realizando las integraciones respectivas se tiene

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}}\rho a^2 \pi h \frac{du_s}{dt} = -\hat{\mathbf{i}}m_a \frac{du_s}{dt} \quad (4.21)$$

de donde se encuentra la masa aparente del cilindro con simetría en el eje z . Como se puede observar, en este caso la masa aparente es equivalente a la masa del cuerpo. Lo que implica que al acelerar el cilindro con simetría en el eje z , su masa se verá duplicada debido al fluido potencial. Observese que los resultados son consistentes con la paradoja de D'Alembert ya que la Fuerza aplicada depende de la aceleración y no de la velocidad del cuerpo. Usando este resultado, la potencia aplicada sobre el cuerpo para mantener esta aceleración está dada por

$$P_e = -2\rho a^2 \pi h \frac{du_s}{dt} u_s. \quad (4.22)$$

en donde el término 2 en la expresión está de acuerdo con el hecho que la Fuerza externa que mueve el cuerpo debe ser igual a la suma del término $m \frac{du_s}{dt}$ y el encontrado en (4.21).

4.2. PARABOLOIDE CILÍNDRICO EN UN FLUIDO POTENCIAL

Asumamos ahora un paraboloido cilíndrico en un fluido potencial. En este caso se tiene una parábola en 2D que se extiende por el eje z . En este caso, las coordenadas curvilíneas a trabajar son parabólicas cilíndricas (σ, τ, z)

$$x = \sigma\tau, \quad (4.23)$$

$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad (4.24)$$

$$z = z, \quad (4.25)$$

donde $\sigma = (0, \infty)$, $\tau = (0, \infty)$ y $z = (-\infty, \infty)$. En la figura 4.2 se muestran las superficies para σ y τ constantes. Así σ representa una familia de parábolas con concavidad positiva en plano xy mientras que τ representan otra familia de parábolas con concavidad negativa.

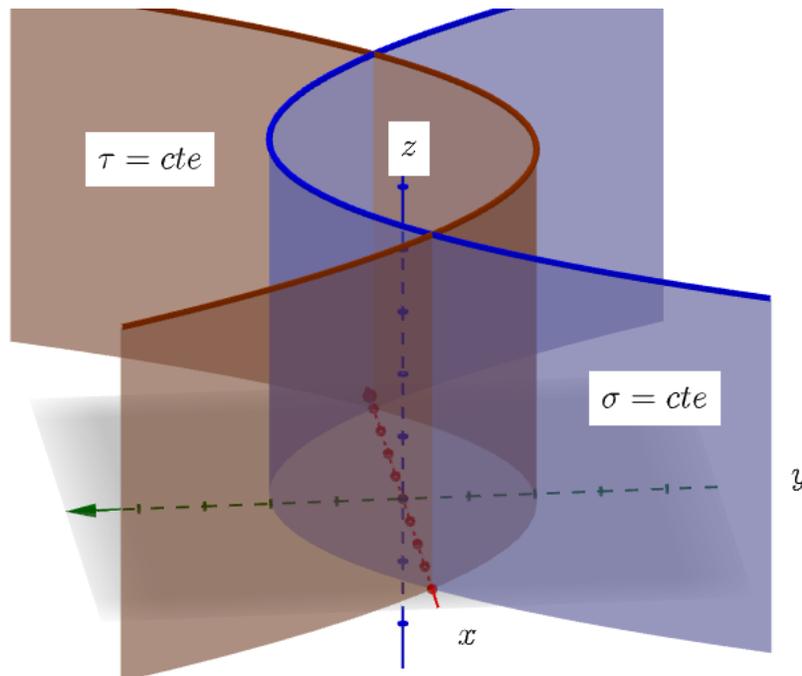


Figura 4.2: Superficies de σ y τ constantes para el sistema de coordenadas parabólico cilíndrico.

Para esta simetría los factores de escala están dados por $h_1 = h_2 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ y $h_3 = 1$. En esta situación vamos a adoptar una simetría en la coordenada z y el fluido

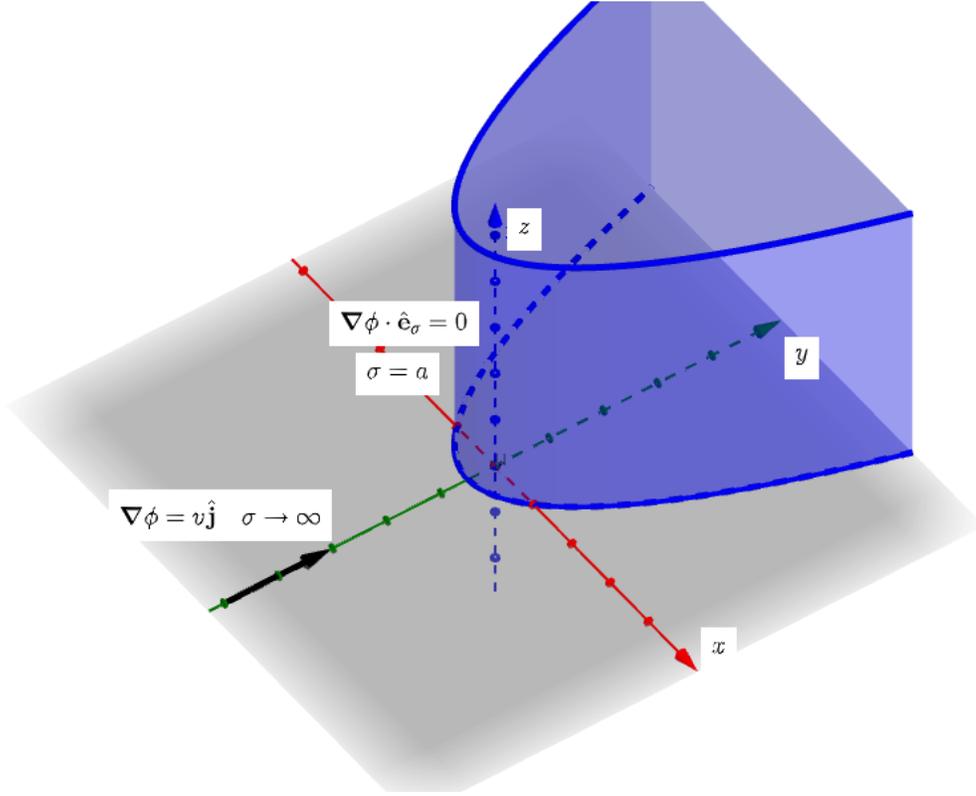


Figura 4.3: Representación de un objeto con forma de parábola cilíndrica inmerso en un fluido potencial.

potencial va a estar viniendo con velocidad $v\hat{\mathbf{j}}$. De acuerdo a estas condiciones, para nuestro potencial velocidad tenemos las condiciones de frontera (ver figura 4.3

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{j}} = v \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad (4.26)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma = 0 \quad \sigma = a. \quad (4.27)$$

Realizando la separación asintótica entre ϕ_1 y ϕ_2 , tenemos para $W(\tau)$

$$\begin{aligned} W(\tau) &= -\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial y}{\partial \sigma}(a, \tau), \\ &= \frac{va}{U'(a)}, \end{aligned}$$

,es decir, $W(\tau) = C$ tal y como se verá más adelante en las parábolicas esféricas con la expresión (4.61). Esto también implica que $k^2 = 0$. Si se usan los factores de escala y las definiciones de $\alpha(\sigma, \tau)$ y $\beta(\sigma, \tau)$ se encuentra

$$\alpha(\sigma, \tau) = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} = 1 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1, \quad (4.28)$$

$$\beta(\sigma, \tau) = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} = 1 \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 1, \quad (4.29)$$

de esta forma la ecuación (3.79)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U(\sigma)}{\partial \sigma^2} &= 0, \\ U(\sigma) &= A_1 \sigma^2 + A_2 \sigma + A_3.\end{aligned}$$

Que, aplicando la condición asintótica supone que $A_1 = 0$ y al ser A_3 una constante que solo cambia el valor inicial de ϕ_2 podemos asumir que también es cero. Esto implica que $U(\sigma)$ está dada por

$$U(\sigma) = A_2 \sigma. \quad (4.30)$$

Reemplazando $U(\sigma)$ y $W(\tau)$ para determinar ϕ_2

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{va}{U'(a)} A_2 \sigma, \\ &= va \sigma.\end{aligned} \quad (4.31)$$

Luego la solución del potencial velocidad dada por la ecuación (3.83) es

$$\phi = \frac{1}{2} v (\tau^2 - \sigma^2) + va \sigma. \quad (4.32)$$

Obsérvese cómo la función ϕ_2 no depende de τ y por lo tanto, la dependencia recae sobre el potencial relacionado con la condición de flujo constante. Calculando la velocidad usando el gradiente de ϕ se tiene

$$\mathbf{v} = \frac{v}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (a - \sigma) \hat{\mathbf{e}}_\sigma + \frac{v\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \hat{\mathbf{e}}_\tau \quad (4.33)$$

donde se observa como para $\sigma = a$ la velocidad en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_\sigma$ se cancela. La función de flujo se calcula teniendo en cuenta que la simetría está dada en la coordenada u_3 usando la ecuación (3.13)

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_\tau + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_\sigma, \quad (4.34)$$

que conduce para la velocidad en σ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= \frac{v}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (a - \sigma), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= v (a - \sigma), \\ \psi &= v\tau (a - \sigma) + C(\sigma).\end{aligned}$$

Por otra parte, si usamos la velocidad en τ

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} &= \frac{v\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} &= -v\tau, \\ \psi &= -v\tau\sigma + C(\tau).\end{aligned}$$

Estas dos expresiones se hacen iguales si se elige $C(\sigma) = 0$ y $C(\tau) = va\tau$ para así obtener la función de flujo

$$\psi(\sigma, \tau) = v(a - \sigma)\tau, \tag{4.35}$$

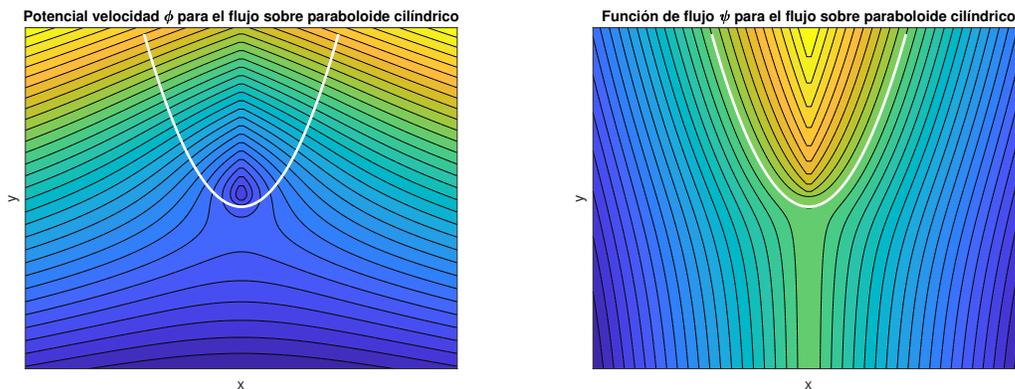


Figura 4.4: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para un fluido potencial alrededor de un paraboloido cilíndrico.

que tiene una forma que invita a entender esta función como una traslación de la coordenada σ respecto a a . En la figura 4.4 se muestran las equipotenciales para el potencial velocidad y la función de flujo respectivamente. Se puede observar como en este caso las líneas equipotenciales de la función de flujo se encuentran menos distanciadas que para las encontradas en el paraboloido de revolución de la figura 4.9 del mismo modo que ocurre con las líneas de flujo para la esfera y el cilindro con simetría en z que se observaron en el capítulo 2.

4.3. ELIPSOIDE CILÍNDRICA EN FLUIDO POTENCIAL

Supóngase una elipsoide cilíndrica en un fluido potencial cuya condición asintótica tiene a un fluido con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$. Este caso puede verse en 2D como el de un objeto con forma de Elipse en un fluido potencial de tal forma que la simetría va en la coordenada z . Para esta situación vamos a introducir las coordenadas elípticas cilíndricas (ξ, η, z) definidas de la forma

$$x = \cosh \xi \cos \eta, \tag{4.36}$$

$$y = \sinh \xi \sin \eta, \tag{4.37}$$

$$z = z, \tag{4.38}$$

donde $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$ y $z = (-\infty, \infty)$. En este caso tenemos superficies definidas por elipses para $\xi = cte$, hipérbolas para $\eta = cte$ y planos para $z = cte$ (ver figura 4.5).

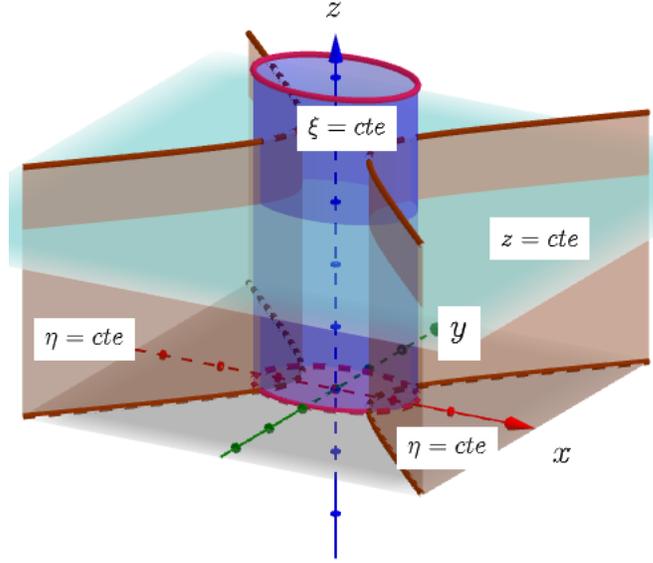


Figura 4.5: Superficies generadas por las coordenadas $\xi = cte$, $\eta = cte$ y $z = cte$ en el caso de un elipsoide cilíndrico.

Como nuestro objeto tiene una forma elíptica (ver figura 4.6, entonces vamos a añadir la condición de frontera para un valor de $\xi = a$. [38, Pág 19]

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{i}} = v \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.39)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\xi = 0 \quad \xi = a. \quad (4.40)$$

Los factores de escala para este sistema coordenado están dados por

$$h_1 = \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}, \quad (4.41)$$

$$h_2 = \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}, \quad (4.42)$$

$$h_3 = 1. \quad (4.43)$$

Partiendo de nuestra solución asintótica que tenemos para ϕ_2 y usando (3.74) para $W(\eta)$ se encuentra

$$\begin{aligned} W(\eta) &= -\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial x}{\partial \xi}(a, \eta), \\ &= -\frac{v}{U'(a)} \sinh a \cos \eta. \end{aligned} \quad (4.44)$$

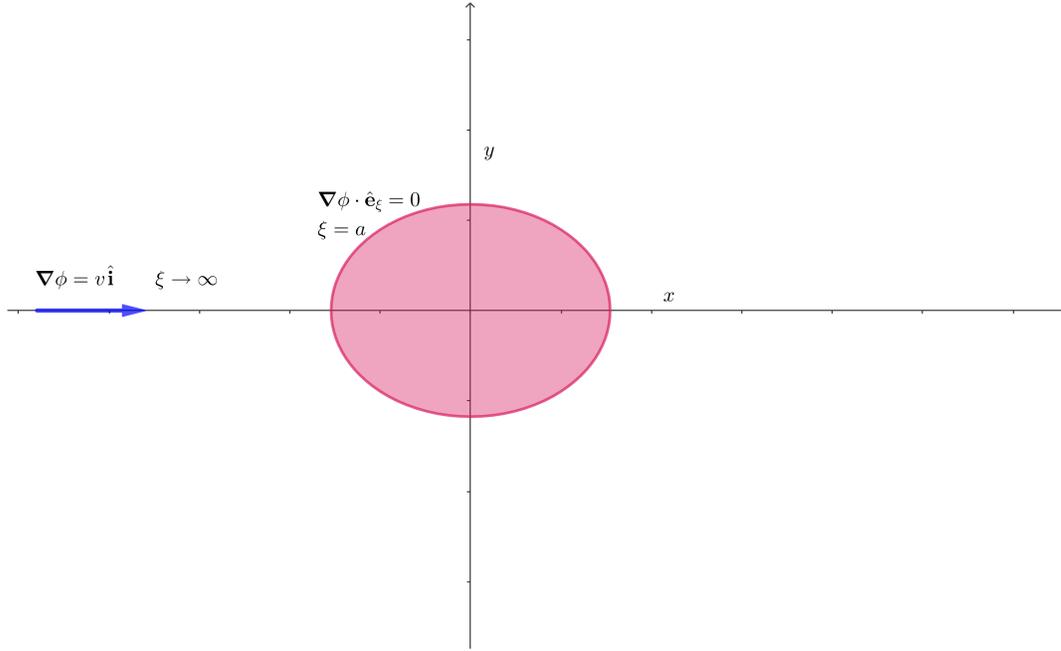


Figura 4.6: Perfil de objeto con forma de elipsoide cilíndrico con sus respectivas condiciones de frontera.

Partiendo de los factores de escala, se obtiene que $\alpha = \beta = 1$ y por lo tanto la ecuación diferencial (3.80) es

$$\frac{d^2W(\eta)}{d\eta^2} - k^2W(\eta) = 0. \quad (4.45)$$

Como $W(\eta) = C \cos \eta$, esta ecuación es válida si $k^2 = -1$. Usando este valor de k^2 en la ecuación diferencial (3.79) obtenemos

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} - U(\xi) = 0 \quad (4.46)$$

que se soluciona para

$$U(\xi) = Ae^\xi + Be^{-\xi}. \quad (4.47)$$

Debido a que debemos asegurar la condición asintótica $A = 0$ lo que lleva a que $U(\xi)$ sea de la forma

$$U(\xi) = Be^{-\xi} \quad (4.48)$$

Aplicando estos resultados para encontrar ϕ_2

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) &= U(\xi)W(\eta), \\ &= -\frac{v \sinh a}{U'(a)} Be^{-\xi} \cos \eta, \\ &= -\frac{v \sinh a}{-Be^{-a}} Be^{-\xi} \cos \eta, \\ &= ve^{-(\xi-a)} \sinh a \cos \eta, \end{aligned} \quad (4.49)$$

de tal forma que la solución se encuentra añadiendo el potencial velocidad de flujo constante $\phi_1 = vx = v \cosh \xi \cos \eta$

$$\phi = v \cos \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a). \quad (4.50)$$

Ahora hagamos uso del gradiente de ϕ para encontrar el campo de velocidades para el fluido potencial alrededor del objeto de forma eliptica

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} (v \cos \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a)) \hat{\mathbf{e}}_\xi \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} (v \cos \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a)) \hat{\mathbf{e}}_\eta, \\ \mathbf{v} &= \frac{v \cos \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a)}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \hat{\mathbf{e}}_\xi \\ &- \frac{v \sin \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a)}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}} \hat{\mathbf{e}}_\tau. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Usando (3.13) determinamos la función de flujo para esta situación iniciando primero con la componente en ξ

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= \frac{v \cos \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a)}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= v \cos \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a), \\ \psi &= v \sin \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a) + C(\xi). \end{aligned}$$

Trabajando con la componente en η se encuentra

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -\frac{v \sin \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a)}{\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= v \sin \eta (\cosh \xi + e^{-(\xi-a)} \sinh a), \\ \psi &= v \sin \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a) + C(\eta). \end{aligned}$$

Que se hacen la misma función cuando $C(\xi) = C(\eta) = 0$. De esta manera la función de flujo para el fluido potencial alrededor de un objeto con forma de elipse es

$$\psi(\xi, \eta) = v \sin \eta (\sinh \xi - e^{-(\xi-a)} \sinh a). \quad (4.52)$$

Es interesante observar el término exponencial que aparece en las ecuaciones (4.50), (4.51) y (4.52) que muestra como de una manera más rápida que una forma $1/r$ el fluido se va normalizando hacia el flujo constante. Obsérvese como para $\xi = a$, se tiene que la función de flujo es 0 y por lo tanto tenemos una línea de flujo constante sobre la elipsoide cilíndrica. También si aplicamos la condición para $\xi \rightarrow \infty$ tenemos

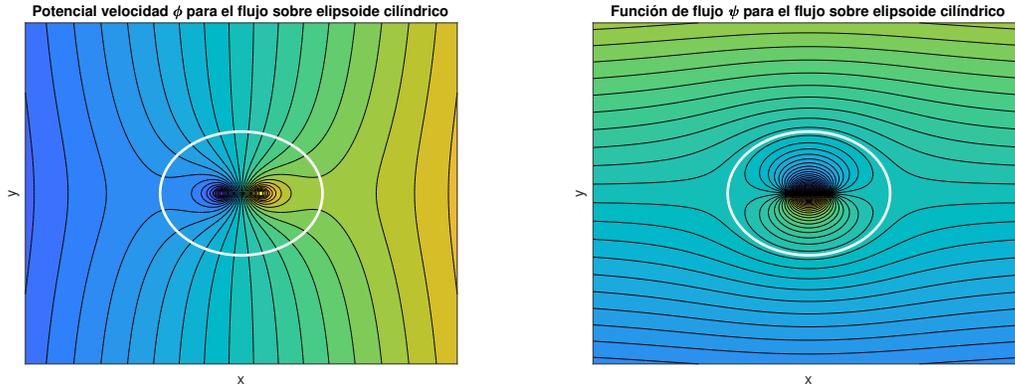


Figura 4.7: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para fluido potencial sobre un elipsoide cilíndrico.

que $\psi = v \sin \eta \sinh \xi = vy$ que es equivalente al flujo constante mostrando así, que la ecuación (4.52) cumple con las condiciones solicitadas para el objeto con forma de elipsoide cilíndrico inmerso en un fluido potencial. Como se puede observar en la figura 4.7, el potencial velocidad y la función de flujo son similares a los encontrados para el objeto circular en 2 dimensiones (figura 2.5) teniendo en cuenta el achatamiento debido a la forma elíptica en este caso.

4.4. PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN EN UN FLUIDO POTENCIAL

Ahora vamos aplicar los resultados encontrados en la sección 3.5 para un objeto con forma de un paraboloides de revolución inmerso en un fluido potencial como el mostrado en la figura 4.8. Asumamos que el objeto se extiende sobre el eje z a una distancia lo suficientemente grande como para suponer que el fluido no pasa por la parte de atrás del objeto situada sobre el eje z positivo. Para la descripción de nuestro objeto, vamos a usar las coordenadas parabólicas esféricas (σ, τ, φ) que se forman a partir de la rotación de dos parábolas dadas por los parámetros σ y τ alrededor del eje z . De esta forma se definen las coordenadas cartesianas a partir de las parabólicas esféricas por medio de las relaciones [38, Pág. 34]

$$x = \sigma\tau \cos \varphi, \quad (4.53)$$

$$y = \sigma\tau \sin \varphi, \quad (4.54)$$

$$z = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad (4.55)$$

donde $\sigma = [0, \infty)$, $\tau = [0, \infty)$ y $\varphi = [0, 2\pi)$.

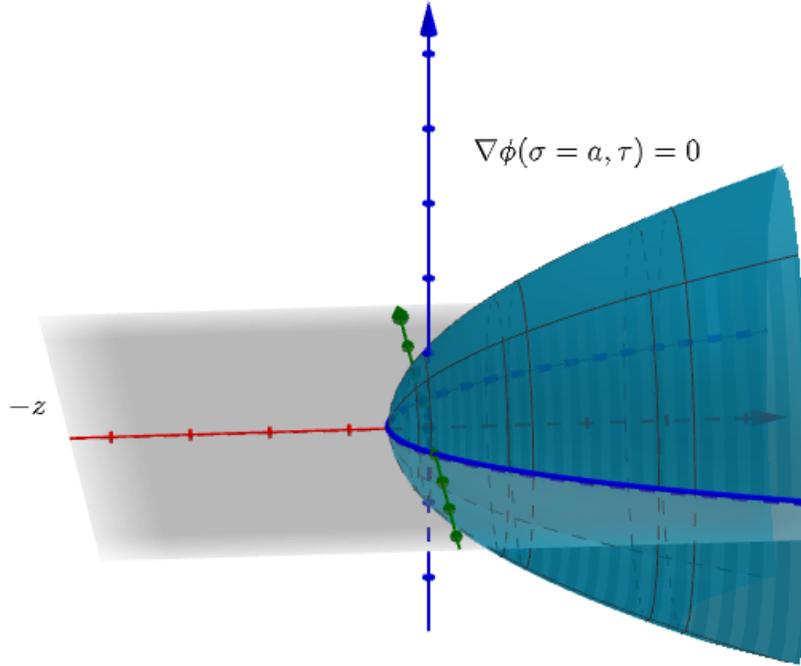


Figura 4.8: Paraboloides de revolución inmerso en un fluido potencial. Se construye a partir de la superficie $\sigma = a$, con la condición $\nabla\phi(a, \tau) = 0$.

Los factores de escala están dados por

$$h_1 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (4.56)$$

$$h_2 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (4.57)$$

$$h_3 = \sigma\tau. \quad (4.58)$$

De esta forma las condiciones de frontera para el potencial velocidad ϕ presentado en (3.63) está dado por¹

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{k}} = v \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad (4.59)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma = 0 \quad \sigma = a. \quad (4.60)$$

En la figura 4.8 se observa el paraboloides cuya punta se encuentra hacia la dirección $-z$. La condición de frontera sobre la superficie muestra que el fluido se mueve en dirección tangencial al paraboloides.

¹Se intercambian todas las coordenadas h_2 por h_3 de la sección 3.5.

Para calcular la función $W(\tau)$, usamos

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = -\sigma,$$

que reemplazando en (3.74) es

$$\begin{aligned} W(\tau) &= -\frac{v}{U'(a)}(-a), \\ W(\tau) &= \frac{av}{U'(a)} = W_0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

que muestra que la función ϕ_2 no depende de τ . Revisaremos esta independencia más adelante. Usando la ecuación (3.80) se encuentra que $k^2 = 0$ y la ecuación (3.79) es

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\alpha_1 \frac{d}{d\sigma} (U(\sigma)) \right) = 0. \quad (4.62)$$

El término $\alpha = h_2 h_3 / h_1 = \sigma \tau$ y, por ende, $\alpha_1 = \sigma$ luego la ecuación diferencial a solucionar es

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} \right) &= 0, \\ \sigma \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} &= A, \\ U(\sigma) &= A \ln(\sigma) + B, \end{aligned} \quad (4.63)$$

que funciona para cualquier constante A y B ya que $U'(\sigma) = 1/\sigma$ que tiende a 0 conforme $\sigma \rightarrow \infty$ cumpliendo la condición asintótica. De tal forma que ϕ_2 dado por la expresión (3.82) con el uso de las ecuaciones (4.63) y (4.61)

$$\begin{aligned} \phi_2(\sigma, \tau) &= U(\sigma)W(\tau), \\ &= (A \ln(\sigma) + B) \left(\frac{av}{U'(a)} \right), \\ &= a^2 v (A \ln(\sigma) + B), \\ &= a^2 v (\ln(\sigma) + C). \end{aligned} \quad (4.64)$$

La constante C se puede asumir $-\ln(\sigma_0)$ ya que solo proporcionaría un cambio constante en el potencial velocidad que no va a influir en la velocidad del flujo o el cálculo de la función de flujo. Del mismo modo usemos $\sigma_0 = 1$ en las unidades apropiadas para que el término dentro del logaritmo sea adimensional. Finalmente el resultado de la función potencial que soluciona el sistema está dada por

$$\phi(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} v (\tau^2 - \sigma^2) + a^2 v \ln(\sigma) \quad \sigma \geq a. \quad (4.65)$$

Usando el gradiente en coordenadas curvilíneas encontramos la velocidad del flujo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \hat{\mathbf{e}}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \hat{\mathbf{e}}_\tau, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\left(\frac{a^2}{\sigma} - \sigma \right) v \hat{\mathbf{e}}_\sigma + v \tau \hat{\mathbf{e}}_\tau \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}(\sigma, \tau) = \frac{v}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\left(\frac{a^2}{\sigma} - \sigma \right) \hat{\mathbf{e}}_\sigma + \tau \hat{\mathbf{e}}_\tau \right), \quad (4.66)$$

que concuerda con las condiciones de frontera solicitadas en (4.59) apesar que ϕ diverga en $\sigma \rightarrow \infty$. Partamos ahora de (3.13) para determinar la función de flujo con simetría en φ

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\sigma\tau\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \hat{\mathbf{e}}_\tau + \frac{1}{\sigma\tau\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \hat{\mathbf{e}}_\sigma. \quad (4.67)$$

Para el caso de la coordenada de la velocidad en σ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\tau\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= \frac{v}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{a^2}{\sigma} - \sigma \right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= v\sigma\tau \left(\frac{a^2}{\sigma} - \sigma \right), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= v\tau (a^2 - \sigma^2), \\ \psi &= \frac{1}{2}v(a^2 - \sigma^2)\tau^2 + C_\sigma(\sigma), \end{aligned}$$

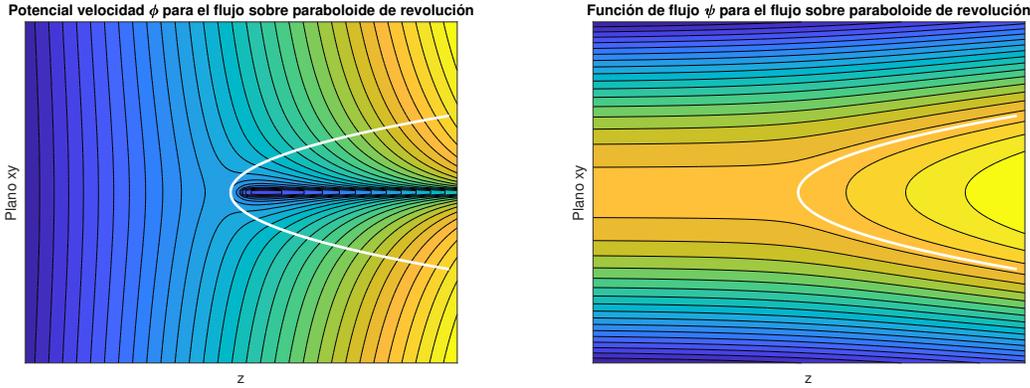


Figura 4.9: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para un fluido potencial rodeando un paraboloides de revolución.

Si se hace el procedimiento análogo con la velocidad en τ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma\tau\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= \frac{v\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} &= -v\tau^2\sigma, \\ \psi &= -\frac{1}{2}v\tau^2\sigma^2 + C_\tau(\tau). \end{aligned}$$

Estas dos soluciones de ψ pueden hacerse iguales si elegimos $C_\sigma(\sigma) = 0$ y $C_\tau(\tau) = a^2v\tau^2/2$ y así llegamos a la función de flujo para el paraboloides de revolución como

$$\psi(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}v\tau^2(a^2 - \sigma^2), \quad (4.68)$$

Nótese que apesar que ϕ_2 no depende de τ , todos los resultados que le siguen para ϕ , \mathbf{v} y ψ si lo hacen de tal forma que permiten que el fluido bordee el cuerpo con la simetría parabólica de revolución. En la figura 4.9 se muestran los potenciales ϕ y ψ para el fluido que llega a un paraboloides de revolución.

Obsérvese cómo el potencial velocidad se va partiendo de su posición perpendicular al eje z y va tomando una forma simétrica que es perpendicular al paraboloides de revolución. Por otro lado, se nota cómo las líneas de la función de flujo se separan notablemente cuando están cerca a la punta del paraboloides y se acercan cuando se alejan del mismo. Esta situación es parecida a la encontrada para la esfera en un fluido potencial.

4.5. ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN EN UN FLUIDO POTENCIAL

Revisemos el caso de un objeto con forma de esferoide de revolución inmerso en un fluido potencial. Para este caso, vamos a usar las coordenadas esferoidales prolatas ξ, η, φ definidas por

$$x = d \sinh \xi \sin \eta \cos \varphi, \quad (4.69)$$

$$y = d \sinh \xi \sin \eta \sin \varphi, \quad (4.70)$$

$$z = d \cosh \xi \cos \eta, \quad (4.71)$$

donde $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y d es la mitad de la distancia entre los focos de la elipse que se forma entre el plano xy y el eje z . En la figura 4.10 se observan las superficies generadas al tener $\xi = cte$ y $\eta = cte$. Al tener en cuenta que la coordenada ξ constante está dada por un elipsoide, entonces las superficies $\xi = a$ representan una elipse de revolución (figura 4.11).

Si tomamos la simetría azimutal, entonces la velocidad del flujo constante está en la dirección z , y así las condiciones de frontera son

$$\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{k}} = v \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.72)$$

$$\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\xi = 0 \quad \xi = a. \quad (4.73)$$

Usamos los factores de escala teniendo en cuenta que la simetría es respecto a φ o la coordenada 3 son:

$$h_1 = d \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad (4.74)$$

$$h_2 = d \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad (4.75)$$

$$h_3 = d \sinh \xi \sin \eta. \quad (4.76)$$

Entonces para los cálculos de $W(u_3)$ los hacemos respecto a la segunda coordenada sin

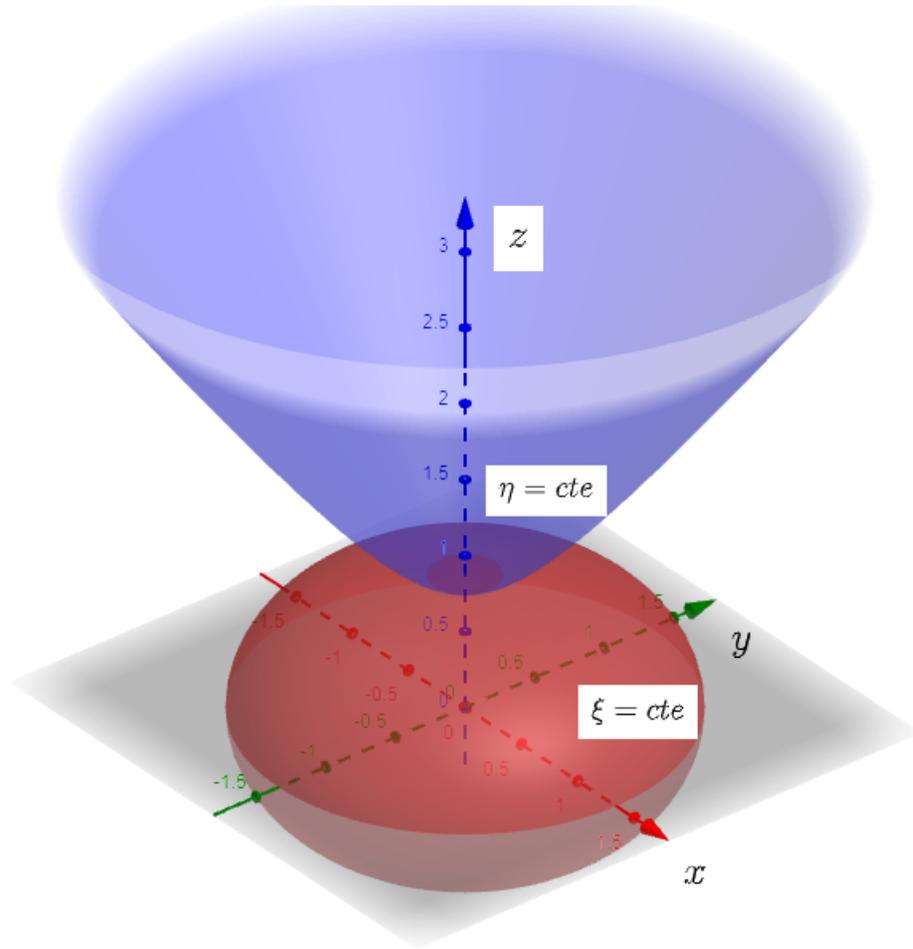


Figura 4.10: Superficies de $\xi = cte$ y $\eta = cte$ para un sistema coordenado eliptico esferoidal prolata.

perder la generalidad. Usando la ecuación (3.74)

$$\begin{aligned}
 W(\eta) &= -\frac{v}{U'(a)} \frac{\partial z}{\partial \xi}(a, \eta), \\
 &= -\frac{vd}{U'(a)} \sinh a \cos \eta.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Para solucionar las ecuaciones diferenciales (3.80) y (3.79) usamos las definiciones de α y β

$$\alpha = \frac{h_2 h_3}{h_1} = d \sinh \xi \sin \eta, \tag{4.78}$$

$$\beta = \frac{h_1 h_3}{h_2} = d \sinh \xi \sin \eta, \tag{4.79}$$

de donde tenemos que $\alpha_1 = d \sinh \xi$, $\alpha_2 = \sin \eta$, $\beta_1 = d \sinh \xi$ y $\beta_2 = \sin \eta$. Por medio

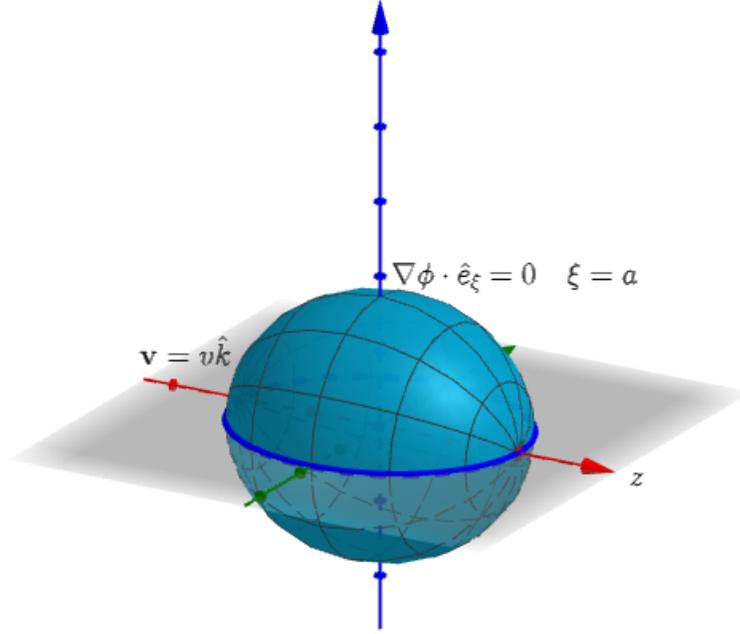


Figura 4.11: Elipsoide de revolución en un fluido potencial. Se observan las condiciones de frontera asintóticas y la condición sobre el objeto en $\xi = a$.

de las ecuaciones (3.80) y (4.77)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\eta} \left(\sin \eta \frac{d}{d\eta} \left(-\frac{vd \sinh a}{U'(a)} \cos \eta \right) \right) - k^2 \sin \eta \left(-\frac{vd \sinh a}{U'(a)} \cos \eta \right) &= 0, \\
 -\frac{d}{d\eta} (\sin^2 \eta) - k^2 \sin \eta \cos \eta &= 0, \\
 -2 \sin \eta \cos \eta - k^2 \sin \eta \cos \eta &= 0, \\
 -\sin \eta \cos \eta (2 + k^2) &= 0, \\
 k^2 &= -2. \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Con este resultado de k^2 tenemos la ecuación diferencial para $U(\xi)$ usando (3.79)

$$\frac{d}{d\xi} \left(\sinh \xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right) - 2 \sinh \xi U(\xi) = 0. \quad (4.81)$$

Esta ecuación diferencial se soluciona para $U(\xi) = A \cosh \xi$. Sin embargo, está solución no es aceptable ya que no cumpliría con la condición asintótica para ϕ_2 bajo la cual

$\nabla\phi_2 = 0$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Al tener una solución y ser una ecuación diferencial de segundo grado, podemos obtener una segunda solución si reescribimos la ecuación (4.81) de la forma

$$\sinh \xi \frac{d^2 U(\xi)}{d\xi^2} + \cosh \xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} - 2 \sinh \xi U(\xi) = 0, \quad (4.82)$$

$$\frac{d^2 U(x)}{d\xi^2} + \coth \xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} - 2U(\xi) = 0, \quad (4.83)$$

Luego la segunda solución se encuentra a través de la primera por medio de

$$U_2(\xi) = \cosh \xi \int \frac{e^{-\int \coth \xi d\xi}}{\cosh^2 \xi} d\xi, \quad (4.84)$$

calculando la integral de la exponencial, es $\ln \sinh \xi$, por lo tanto la integral a solucionar es

$$U_2(\xi) = \cosh \xi \int \frac{d\xi}{\sinh \xi \cosh^2 \xi}, \quad (4.85)$$

al resolver esta integral se tiene

$$U_2(\xi) = \cosh \xi \left(\ln \left| \frac{\cosh \xi - 1}{\sinh \xi} \right| + \frac{1}{\cosh \xi} \right). \quad (4.86)$$

Se puede demostrar que cuando $\xi \rightarrow \infty$, $U_2 \rightarrow 1$ y por lo tanto su derivada tiende a 0. De este modo tenemos una solución para la ecuación (4.81) que cumple la condición asintótica. Vamos a reescribir el término entre paréntesis de la ecuación (4.86) como $g(x)$ y así tenemos la expresión

$$U_2(\xi) = g(\xi) \cosh \xi, \quad (4.87)$$

con

$$g(\xi) = \ln \left| \frac{\cosh \xi - 1}{\sinh \xi} \right| + \frac{1}{\cosh \xi}, \quad (4.88)$$

$$g' = \frac{1}{\sinh \xi \cosh^2 \xi}. \quad (4.89)$$

Usando estas relaciones, tenemos que

$$U_2'(\xi) = g(\xi) \sinh \xi + g'(\xi) \cosh \xi = g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi}, \quad (4.90)$$

que usada en la ecuación (4.77)

$$\begin{aligned} W(\eta) &= -\frac{vd}{g(a) \sinh a + \frac{1}{\sinh a \cosh a}} \sinh a \cos \eta, \\ &= -vd \frac{\sinh^2 a \cosh a}{g(a) \sinh^2 a \cosh a + 1} \cos \eta, \\ &= -vdA(a) \cos \eta, \end{aligned} \quad (4.91)$$

en donde

$$A(a) = \frac{\sinh^2 a \cosh a}{g(a) \sinh^2 a \cosh a + 1}, \quad (4.92)$$

entonces la solución de $\phi_2 = U(\xi)W(\eta)$ es dada por

$$\phi_2(\xi, \eta) = -vdA(a)g(\xi) \cosh \xi \cos \eta. \quad (4.93)$$

Las componentes de la velocidad del flujo la calculamos a partir del gradiente de la función ϕ_2

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \phi_2, \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta, \end{aligned}$$

obteniendose

$$v_\xi = -\frac{vA(a)}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) \cos \eta, \quad (4.94)$$

$$v_\eta = \frac{vA(a)}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} g(\xi) \cosh(\xi) \sin \eta. \quad (4.95)$$

Usando la ecuación (3.13) encontramos la función de flujo ψ , primero usando v_ξ

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= v_\xi, \\ \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= -\frac{vA(a)}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) \cos \eta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= -vd^2 A(a) \sinh \xi \sin \eta \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) \cos \eta, \\ \psi &= -\frac{vd^2 A(a)}{2} \sinh \xi \sin^2 \eta \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) + C(\xi), \quad (4.96) \end{aligned}$$

ahora si usamos v_η encontramos.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= v_\eta, \\ -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{vA(a)}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} g(\xi) \cosh(\xi) \sin \eta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -vd^2 A(a) \sin^2 \eta g(\xi) \cosh \xi \sinh \xi, \\ \psi &= -vd^2 A(a) \sin^2 \eta \int \sinh \xi \cosh \xi g(\xi) d\xi, \\ \psi &= -\frac{vd^2 A(a)}{2} \sinh \xi \sin^2 \eta \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) + C(\eta), \quad (4.97) \end{aligned}$$

que son iguales para $C(\xi) = C(\eta) = 0$. Así tenemos la función de flujo dada por

$$\psi(\xi, \eta) = -\frac{vd^2 A(a)}{2} \sinh \xi \sin^2 \eta \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right). \quad (4.98)$$

Así, hemos encontrado el potencial velocidad, la función de flujo y el campo de velocidades para una elipsoide de revolución. Al añadir la función de flujo constante tenemos como solución al fluido potencial alrededor del elipsoide de revolución como

$$\phi(\xi, \eta) = vd \cosh \xi \cos \eta (1 - A(a)g(\xi)), \quad (4.99)$$

$$v_\xi = \frac{v \cos \eta}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} \left(\sinh \xi - A(a) \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) \right) \quad (4.100)$$

$$v_\eta = \frac{v \cosh \xi \sin \eta}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}} (A(a)g(\xi) - 1), \quad (4.101)$$

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{vd^2}{2} \sinh \xi \sin^2 \eta \left(\sinh \xi - A(a) \left(g(\xi) \sinh \xi + \frac{1}{\sinh \xi \cosh \xi} \right) \right) \quad (4.102)$$

que muestran la solución de los potenciales y la velocidad para el elipsoide de revolución inmersa en un fluido potencial con condición asintótica. En la figura 4.12 se observan

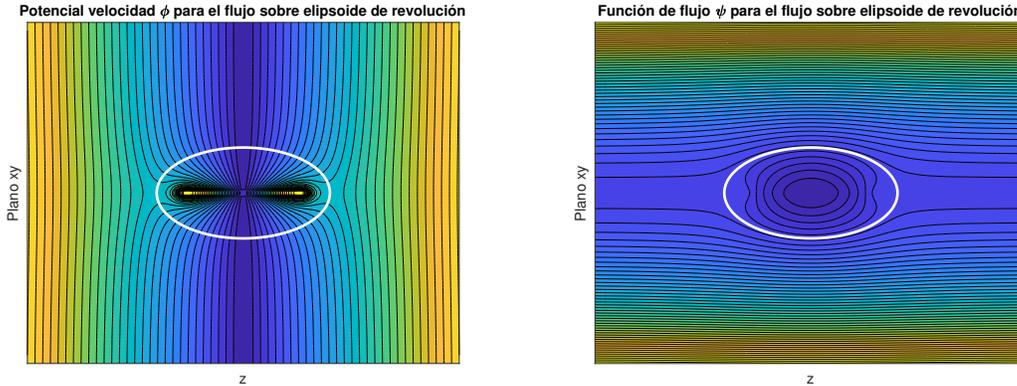


Figura 4.12: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para fluido potencial alrededor de un elipsoide de revolución para valores de $d = 3$ y $a = 0,8$.

el potencial velocidad y la función de flujo para el elipsoide de revolución. Las líneas equipotenciales se encuentran más separadas que las del elipsoide cilíndrico mientras que las líneas de flujo están más cercanas en la frontera del elipsoide y con una mayor separación en lugares donde cruza la superficie de revolución. También es importante recalcar como los potenciales para esta elipsoide son similares tanto en simetría como en forma a los encontrados en la figura 3.5 que muestra la esfera en el fluido potencial. Estos resultados son de esperarse ya que la esfera podría ser un caso particular del elipsoide de revolución. Para tener el caso de la esfera a partir de estos potenciales es necesario que $d \rightarrow 0$ mientras que $a \rightarrow \infty$ ya que en coordenadas elípticas los semiejes

mayor y menor están dados por $d \cosh(a)$ y $d \sinh(a)$ respectivamente. En las figuras 4.13 y 4.14 se muestra la función de flujo para diferentes valores de d y a de tal forma que la elipse se aproxime a una esfera. Se puede observar como las líneas de flujo se van aproximando a la encontrada en la figura 3.5. Esto muestra que los resultados encontrados en las ecuaciones (4.99) y (4.102) son correctos.

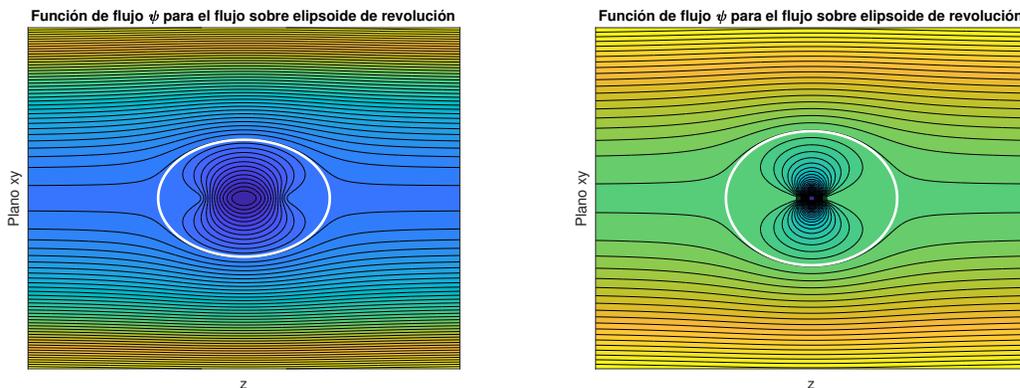


Figura 4.13: Función de flujo ψ para fluido potencial alrededor de un elipsoide de revolución para valores de $d = 2$, $a = 1,31$ (izquierda) y $d = 1$, $a = 2,06$ (derecha).

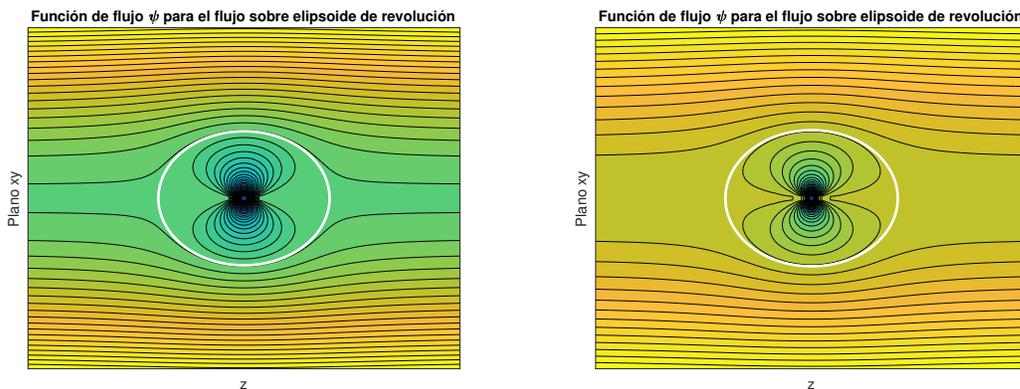


Figura 4.14: Función de flujo ψ para fluido potencial alrededor de un elipsoide de revolución para valores de $d = 0,5$, $a = 2,76$ (izquierda) y $d = 0,1$ y $a = 4,38$ (derecha).

Masa aparente sobre elipsoide de revolución

Usemos el resultado encontrado en la ecuación (4.99) para determinar la masa aparente sobre un elipsoide de revolución que se mueve en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$ con una velocidad u_s que varía en el tiempo. Para lograrlo, vamos a usar la formulación presentada

en [28] para determinar los términos de la matriz de masa aparente para un cuerpo en un fluido incompresible

$$M_{ij} = \rho \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \int \phi_j \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (4.103)$$

en dónde ϕ_j se refiere al potencial en la dirección j del movimiento normalizado a la velocidad del cuerpo, y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal entrando en la superficie del objeto. En este caso, $\phi_i = \phi$ la función potencial definida por (4.99) sin tener en cuenta el término referente al flujo constante, ya que se va a suponer que en el infinito la velocidad del flujo constante es nula.

$$\phi(\xi, \eta) = u_s d A(a) g(\xi) \cosh \xi \cos \eta, \quad (4.104)$$

recordando que $u_s = -v$. De esta manera, tenemos para la masa aparente del elipsoide de revolución que

$$M_{ij} = \rho \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \int dA(a) g(\xi) \cosh \xi \cos \eta (-\hat{\mathbf{e}}_\xi) h_2 h_3 d\eta d\varphi, \quad (4.105)$$

como $\phi(\xi, \eta)$ no depende de φ y $\hat{\mathbf{e}}_\xi = d(\cosh \xi \sin \eta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cosh \xi \sin \eta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \sinh \xi \cos \eta \hat{\mathbf{k}})/h_1$, tenemos que al integrar sobre φ , las componentes en x y y se cancelan y sólo queda la componente en la dirección z , así usando $h_1 = h_2$ encontramos

$$M_{zz} = -\rho d \int A(a) g(\xi) \cosh \xi \cos \eta (\sinh \xi \cos \eta) d^2 \sinh \xi \sin \eta d\eta d\varphi, \quad (4.106)$$

como estamos sobre la superficie del elipsoide de revolución $\xi = a$, entonces la masa aparente queda de la forma

$$\begin{aligned} M_{zz} &= -\rho d^3 A(a) g(a) \cosh a \sinh^2 a \int \cos^2 \eta \sin \eta d\eta d\varphi, \\ &= -\frac{4\pi}{3} \rho d^3 A(a) g(a) \cosh a \sinh^2 a. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Si usamos la ecuación (4.92) para el valor de la constante $A(a)$

$$M_{zz} = -\frac{4\pi}{3} \rho d^3 \frac{g(a) \sinh^4 a \cosh^2 a}{g(a) \sinh^2 a \cosh a + 1}, \quad (4.108)$$

que muestra la masa aparente sobre un elipsoide de revolución que se somete a una fuerza externa. Se puede observar como se tiene el factor $4\pi\rho/3$ que hace parte del término que aparece en la masa aparente de una esfera. De esta manera, la forma elíptica esta representada por el último término del lado derecho de la ecuación (4.108).

Ahora, si graficamos la masa aparente normalizada $M_{zz}/(\frac{4\pi}{3}\rho)$ para diferentes valores de la razón $\cosh a/\sinh a$, es decir, haciendo $d \rightarrow 0$ y de esta manera $\cosh a/\sinh a \rightarrow 1$ se tiene que el valor de la masa aparente se aproxima a 0,5 como lo indica la figura 4.15, efecto que evidencia como este resultado lleva a la masa aparente de una esfera encontrada por la ecuación (2.86).

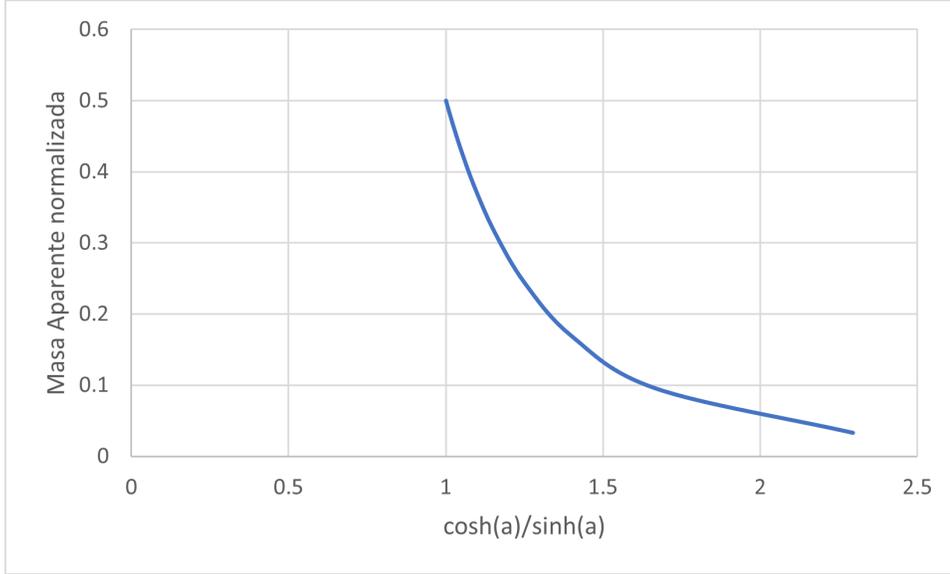


Figura 4.15: Relación entre masa aparente normalizada y $\cosh a/\sinh a$. Se observa como cuando la razón se acerca a 1, la masa aparente normalizada es 0,5 que corresponde al factor de la masa aparente de la esfera.

Si bien, los resultados de la masa aparente y el potencial velocidad encontrados en las ecuaciones (4.108) y (4.99) pueden diferir en forma a otros resultados como los presentados en [39], hemos mostrado que conllevan a las mismas condiciones para la simetría esférica. Así, tenemos una manera alternativa de encontrar los potenciales velocidad, función de flujo y campo de velocidades de diferentes sólidos de revolución inmersos en un fluido potencial que se mueve a una velocidad \mathbf{v} en dirección del eje de simetría.

4.5.1. Flujo potencial entre elipsoides de revolución

Para aproximarnos a la solución del problema presentado en esta sección, vamos a usar la propuesta para la solución de la función de flujo presentada en la sección 3.4 para observar el flujo alrededor de dos regiones equipotenciales para la función de flujo. Una interpretación de este problema sería el de un fluido potencial moviéndose entre dos cáscaras elípticas de tal forma que en las superficies de éstos se mueve sin viscosidad. De esta manera, proponemos dos superficies formadas por elipsoides de revolución para valores $\xi = a$ y $\xi = b$. De esta manera añadimos las condiciones de frontera de Dirichlet de la forma

$$\psi(a, \eta) = 0, \tag{4.109}$$

$$\psi(b, \eta) = \psi_0. \tag{4.110}$$

De esta manera, vamos a calcular la función de flujo haciendo uso de la ecuación (3.49) teniendo en cuenta que la simetría es sobre la coordenada u_3 . De esta forma

encontramos las funciones $G_\psi(\xi)$ y $H_\psi(\eta)$ usando los factores de escala

$$G_\psi(\xi)H_\psi(\eta) = \frac{h_2}{h_1h_3} = \frac{1}{\sinh \xi \sin \eta}, \quad (4.111)$$

$$G_\psi(\xi) \frac{1}{\sinh \xi} \quad H_\psi(\eta) = \frac{1}{\sin \eta}, \quad (4.112)$$

de aqui que la función $I_\psi(\xi)$ es

$$\begin{aligned} I_\psi(\xi) &= \int \frac{d\xi}{G_\psi(\xi)} = \int \sinh \xi d\xi, \\ &= \cosh(\xi). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Entonces, la función de flujo viene expresada como

$$\psi(\xi) = \psi_0 \frac{\cosh \xi - \cosh a}{\cosh b - \cosh a}. \quad (4.114)$$

Ahora, calculando la velocidad del flujo por medio de (3.13) se tiene

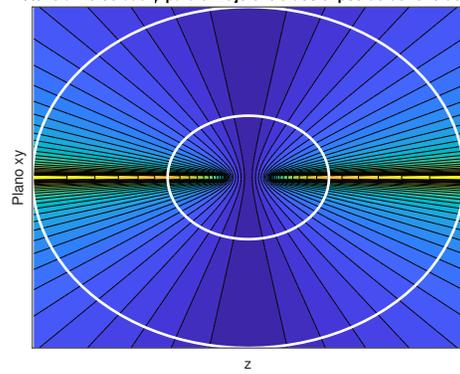
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\eta, \\ &= \frac{\psi_0}{\cosh b - \cosh a} \frac{\sinh \xi}{\sinh \xi \sin \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta, \\ &= \frac{\psi_0}{(\cosh b - \cosh a)} \frac{1}{\sin \eta (\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta})} \hat{\mathbf{e}}_\eta. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Aplicando el gradiente de ϕ se puede encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\psi_0}{(\cosh b - \cosh a)} \frac{1}{\sin \eta (\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta})}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\psi_0}{(\cosh b - \cosh a)} \frac{1}{\sin \eta}, \\ \phi(\eta) &= \frac{\psi_0}{(\cosh b - \cosh a)} \int \frac{d\eta}{\sin \eta}, \\ &= \frac{\psi_0}{(\cosh b - \cosh a)} \ln(\csc \eta + \cot \eta). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Que muestra la solución del fluido alrededor de las dos superficies de los elipsoides de revolución dadas por $\xi = a$ y $\xi = b$. Obsérvese la similitud entre los resultados encontrados en las ecuaciones (4.114) y (4.116) con los encontrados para las esferas concéntricas (3.58) y (3.62) con el cambio de variables $r \rightarrow \cosh \xi$ y $\theta \rightarrow \eta$ que nos lleva a pensar como en las coordenadas elípticas prolatas deben tener resultados similares a los de una esfera. En la figura (4.16) se pueden observar las líneas de flujo constante y las equipotenciales correspondientes y observar su similitud con los resultados encontrados para las coordenadas esféricas. Aunque se observa una diferencia en la forma de las equipotenciales, éstas también presentan la misma separación cerca del plano xy y se acercan conforme llegan a $z = 0$.

Potencial velocidad ϕ para el flujo entre dos elipsoide de revolución



Función de flujo ψ para el flujo entre elipsoide de revolución

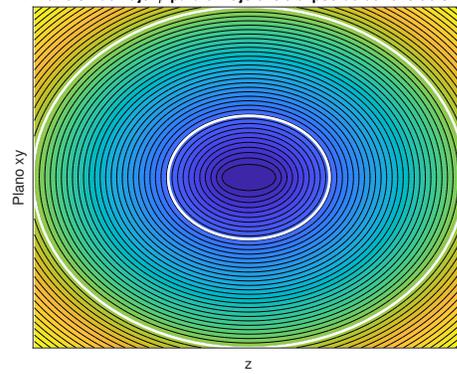


Figura 4.16: Potencial velocidad ϕ y función de flujo ψ para fluido potencial entre dos elipsoides de revolución.

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se han presentado los elementos y las definiciones de fluidos potenciales que permiten analizar la interacción y la forma que asume el fluido alrededor de diferentes tipos de objetos que presentan simetrías dadas por sistemas coordenados curvilíneos. Se ha mostrado cómo, a partir de las ecuaciones diferenciales del potencial velocidad y la función de flujo, se puede proponer una ecuación diferencial general y un funcional para esta última en coordenadas curvilíneas. Esta presentación abre la puerta para la solución de problemas usando diferentes tipos de simetrías usando coordenadas generalizadas.

Por medio de estos resultados se encuentra que para la solución de objetos inmersos en fluidos potenciales se pueden usar varias estrategias: solucionar la ecuación de Laplace aplicando las condiciones de Neumann necesarias; solucionar la ecuación diferencial general para la función de flujo (3.17) usando condiciones de Dirichlet; aplicando principios variacionales a través de los funcionales encontrados en la ecuación (3.38) o aplicando una condición asintótica no homogénea para ϕ . Se ha mostrado la aplicación de estos problemas y técnicas en simetrías conocidas mostrando además el cálculo de la masa aparente de esferas y cilindros y se generaliza la solución para un fluido potencial que está contenido entre dos líneas equipotenciales de ψ para una coordenada curvilínea u_1 . Finalmente, se aplicaron las estrategias mostradas en simetrías parabólicas y elipsoidales mostrando los alcances de las técnicas mostradas durante este trabajo.

Es importante resaltar la manera en que usamos los resultados de [16] para proponer una solución al problema de un fluido que se ubica entre dos superficies $u_1 = a$ y $u_1 = b$. Al tener en cuenta que, para estos casos en fluidos potenciales, la condición para ϕ es de Neumann, la solución más adecuada para fluidos potenciales es a través de la función de flujo ψ y su respectiva ecuación diferencial (3.17). Con esta generalización pudimos determinar los potenciales entre cilindros, cascarones esféricos y cascarones elípticos mostrando como estos últimos se asemejan a los encontrados para la simetría esférica como es lo esperado. Asimismo, la ecuación (3.17) abre una exploración en la solución de objetos inmersos en fluidos potenciales en coordenadas curvilíneas a través de simplificar el problema por medio de condiciones de Dirichlet.

Para estudiar los sólidos inmersos en fluidos que no están sometidos a una frontera, se mostró la condición asintótica y cómo esta puede simplificar la solución a partir de usar la suma del flujo constante con el potencial ϕ_2 . De esta manera, el problema

de Neumann realizado no requiere de una frontera que no se encuentre en el infinito. Esta estrategia presenta sus limitaciones debido a que las ecuaciones (3.79) y (3.80) deben llevar a un sistema asintótico ($\nabla\phi_2(u_1 \rightarrow \infty, u_3) = 0$) y ayudan a entender para que tipos de coordenadas curvilíneas es válida ya que si no se cumple, la solución probablemente deba realizarse mediante una condición que no sea para $u_1 \rightarrow \infty$ tal y como se encontró para el caso de la simetría elíptica esferoidal prolata. Es interesante ver como la aplicación de condición asintótica no homogénea funciona para paraboloides cilíndricos, de revolución y elipsoides cilíndricos lo que muestra que la estrategia se puede ampliar a muchas otras simetrías que involucren otros sistemas coordenados curvilíneos.

La solución analítica de los problemas presentados en este trabajo de grado muestran como, dentro de los fluidos potenciales, aún se puede ahondar más en el uso analítico de las soluciones para diferentes geometrías que se ajusten a un sistema coordenado generalizado. Por otra parte, este trabajo puede abrir la puerta al estudio del cálculo de la masa aparente de objetos con diferentes simetrías y de esta manera proponer perfiles de objetos que disminuyan la potencia externa aplicada sobre un objeto usando técnicas variacionales.

PERSPECTIVAS

Esta tesis de maestría se inició a partir del trabajo presentado en [40] con el que se analizan los momentos de inercia de sólidos de revolución usando técnicas variacionales. A partir de aquí, se propuso comenzar el análisis de los sólidos con diferentes simetrías y de revolución que están inmersos en fluidos usando como primer paso coordenadas curvilíneas y fluidos potenciales. La ecuación diferencial para ψ , el funcional $F[\psi]$ y las propuestas de solución de ϕ y ψ con condiciones de frontera entre superficies y asintóticas con simetría en la coordenada curvilínea u_α son el principal aporte de esta tesis. Los análisis presentados para encontrar los potenciales velocidad y la función de flujo en coordenadas curvilíneas permiten que este trabajo de tesis se puede extender:

- Al cálculo de masas aparentes en diferentes geometrías y sus implicaciones. Al tener ahora una solución general para ϕ o ψ en coordenadas curvilíneas, es posible determinar ahora la Masa aparente por medio de la ecuación (4.103). El cálculo de esta se puede extender también al de la potencia aplicada sobre un cuerpo con una geometría definida y así poder compararlo con la potencia en otros casos como la esfera o el cilindro.
- Al uso de métodos variacionales para la solución de diferentes objetos en fluidos potenciales. A partir del funcional $F[\psi]$ de la ecuación (3.38) que usa condiciones de frontera de Dirichlet abre la posibilidad de encontrar las funciones de flujo y el potencial velocidad en simetrías con coordenadas curvilíneas parametrizando $F[\psi]$ y de este modo extender los resultados a partir de métodos como el de Rayleigh Ritz o FEM en coordenadas curvilíneas.
- Para la optimización de objetos inmersos en fluidos potenciales. Usando el funcional y la masa aparente, es posible plantearse la forma del sólido (o los parámetros del sólido en una geometría dada) que minimice la potencia entregada y así complementar trabajos como el presentado por [41].
- Al incluir en el estudio del movimiento del sólido, la rotación del mismo y, asimismo, encontrar soluciones generales para los potenciales ϕ y ψ en coordenadas curvilíneas.
- Al analizar el perfil de presiones que se reparte alrededor de un sólido de revolución que se forma a partir de superficies en coordenadas curvilíneas.

Bibliografia

- [1] Plakhov, A., & Aleksenko, A. (2008). The problem of the body of revolution of minimal resistance. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16(1), 206–220. <https://doi.org/10.1051/cocv:2008070>
- [2] Ershkov, S. V., Prosviryakov, E. Y., Burmasheva, N. V., & Christianto, V. (2021). Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 53(4), 044501. <https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0>
- [3] Hu, X., Mu, L., & Ye, X. (2019). A weak Galerkin finite element method for the Navier–Stokes equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 362, 614–625. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.08.022>
- [4] Pinelli, A., Naqavi, I. Z., Piomelli, U., & Favier, J. (2010). Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier–Stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229(24), 9073–9091. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.021>
- [5] Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R., PhD. (2012). *Fluid Mechanics*. Academic Press.
- [6] Olivier Glass, Christophe Lacave, Franck Sueur. On the motion of a small body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid. *Bulletin de la société mathématique de France*, 2014, 142 (3), pp.489-536. <10.24033/bsmf.2672>. <hal-00589499>
- [7] Glass, O., Sueur, F., & Takahashi, T. (2012). Smoothness of the motion of a rigid body immersed in an incompressible perfect fluid. *Annales Scientifiques De L Ecole Normale Supérieure*, 45(1), 1–51. <https://doi.org/10.24033/asens.2159>
- [8] Talischi, C., Pereira, A., Paulino, G. H., Menezes, I. F. M., & Carvalho, M. S. (2013). Polygonal finite elements for incompressible fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74(2), 134–151. <https://doi.org/10.1002/flid.3843>
- [9] Nasser, M. M. S., & Green, C. C. (2018). A fast numerical method for ideal fluid flow in domains with multiple stirrers. *Nonlinearity*, 31(3), 815–837. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa99a5>

- [10] Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H. (1998). *Fundamentals of Fluid Mechanics* (3rd ed.). Wiley.
- [11] Drew, D. A., & Lahey, R. (1987). The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. *International Journal of Multiphase Flow*, *13*(1), 113–121. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(87\)90011-5](https://doi.org/10.1016/0301-9322(87)90011-5)
- [12] McIver, M., & McIver, P. (2016). The added mass for two-dimensional floating structures. *Wave Motion*, *64*, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.02.007>
- [13] Sysoev, D. V., Sisoeva, A. A., Sazonova, S., Zvyagintseva, A. V., & Mozgovoij, N. V. (2021). Variational method for solving the boundary value problem of hydrodynamics. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *1047*(1), 012195. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1047/1/012195>
- [14] Cai, Z., Liu, Y., Chen, T., & Liu, T. (2020). Variational method for determining pressure from velocity in two dimensions. *Experiments in Fluids*, *61*(5). <https://doi.org/10.1007/s00348-020-02954-2>
- [15] Rodríguez, D. E., Martínez, R., & Rendón, L. (2011). Solución de la Ecuación de Laplace Para Flujos Potenciales. *Revista Colombiana De Física*, *43*(2).
- [16] Morales, M. J., Diaz, R. A., & Herrera, W. J. (2015). Solutions of Laplace’s equation with simple boundary conditions, and their applications for capacitors with multiple symmetries. *Journal of Electrostatics*, *78*, 31–45. <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2015.09.006>
- [17] Qiu, J., Peng, B., & Tian, Z. (2018). A compact streamfunction-velocity scheme for the 2-D unsteady incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary curvilinear coordinates. *Journal of Hydrodynamics*, *31*(4), 827–839. <https://doi.org/10.1007/s42241-018-0171-x>
- [18] Thompson, J. F., Thames, F. C., & Mastin, C. W. (1974). Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, *15*(3), 299–319. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(74\)90114-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(74)90114-4)
- [19] Nikitin, N. (2006). Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, *217*(2), 759–781. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.036>
- [20] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.
- [21] Haitjema, H. M., & Kelson, V. A. (1997). Using the stream function for flow governed by Poisson’s equation. *Journal of Hydrology*. [https://doi.org/10.1016/s0022-1694\(95\)02992-3](https://doi.org/10.1016/s0022-1694(95)02992-3)

- [22] Brown, J., & Churchill, R. (2009). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- [23] Orloff, J., MIT OpenCourseWare, & Libretexts. (2021, September 5). *7: Two dimensional hydrodynamics and complex potentials*. Mathematics LibreTexts. Retrieved July 23, 2023, from [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Complex_Variables_with_Applications_\(Orloff\)/C](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Complex_Variables_with_Applications_(Orloff)/C)
- [24] Ponce, J. C. (2019). *Complex analysis*. Applications of Conformal Mappings. Retrieved July 23, 2023, from <https://complex-analysis.com/content/applications-conformal.html>
- [25] Zemlyanova, A. Y., Manly, I., & Handley, D. (2017). Vortex generated fluid flows in multiply connected domains. *Complex Variables and Elliptic Equations*, *63*(2), 151–170. <https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1289516>
- [26] Eldredge, J. D. (2009). A reconciliation of viscous and inviscid approaches to computing locomotion of deforming bodies. *Experimental Mechanics*, *50*(9), 1349–1353. <https://doi.org/10.1007/s11340-009-9275-0>
- [27] Howe, M. S. (1995). ON THE FORCE AND MOMENT ON A BODY IN AN INCOMPRESSIBLE FLUID, WITH APPLICATION TO RIGID BODIES AND BUBBLES AT HIGH AND LOW REYNOLDS NUMBERS. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, *48*(3), 401–426. <https://doi.org/10.1093/qjmam/48.3.401>
- [28] Graham, W. (2019). Decomposition of the forces on a body moving in an incompressible fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, *881*, 1097–1122. doi:10.1017/jfm.2019.788
- [29] Grimberg, G., Pauls, W., & Frisch, U. (2008). Genesis of d’Alembert’s paradox and analytical elaboration of the drag problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *237*(14–17), 1878–1886. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.015>
- [30] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1985). *Mecánica de fluidos* (2nd ed., Vol. 6). Reverte.
- [31] Eyink, G. L. (2021). Josephson-Anderson relation and the classical D’Alembert paradox. *Physical Review X*, *11*(3). <https://doi.org/10.1103/physrevx.11.031054>
- [32] Hao, Q., & Eyink, G. L. (2022). Onsager Theory of turbulence, the Josephson-Anderson Relation, and the D’Alembert Paradox. *arXiv (Cornell University)*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2206.05326>
- [33] Gratton, J., & Perazzo, C. A. (2009). EFECTO DE LA MASA INDUCIDA SOBRE LA ACELERACIÓN DE CUERPOS DE BAJA DENSIDAD. *Anales AFA*, *21*(1). <https://anales.fisica.org.ar/index.php/analesafa/article/view/49>

- [34] Byron, F. W., & Fuller, R. W. (1992). *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Courier Corporation.
- [35] Sparenberg, J. A. (1989). Note on the stream function in curvilinear coordinates. *Fluid Dynamics Research*, 5(1), 61–67. [https://doi.org/10.1016/0169-5983\(89\)90011-7](https://doi.org/10.1016/0169-5983(89)90011-7)
- [36] Yamasaki, K., Yajima, T., & Iwayama, T. (2011). Differential geometric structures of stream functions: incompressible two-dimensional flow and curvatures. *Journal of Physics A*. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/15/155501>
- [37] Houot, J., Martín, J. S., & Tucsnak, M. (2010). Existence of solutions for the equations modeling the motion of rigid bodies in an ideal fluid. *Journal of Functional Analysis*, 259(11), 2856–2885. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.07.006>
- [38] Hernández, J. A. (2012). *Familias de Campos Ondulatorios Fundamentales de la Ecuación de Helmholtz en Sistemas de Coordenadas Curvilíneas Ortogonales* [PhD]. Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica. <https://inaoe.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1009/289/1/HernandezNoJA.pdf>
- [39] YAVUZ, T. (1986). Theretical Evaluations of Apparent Masses for Certain Classes of Bodies in Frictionless Fluid. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1986), 335-350.
- [40] Diaz, R. A., Herrera, W. J., & Martinez, R. (2006). Moments of inertia for solids of revolution and variational methods. *European Journal of Physics*, 27(2), 183–192. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/27/2/001>
- [41] Mohammadi, B., & Pironneau, O. (2004). SHAPE OPTIMIZATION IN FLUID MECHANICS. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1), 255–279. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.121926>

ANEXO. Función de Flujo para simetría azimutal

Revisemos cómo se puede usar la función de flujo en coordenadas cilíndricas para encontrar el potencial velocidad usando una simetría azimutal. Este caso se puede entender como el caso del cilindro de la figura 4.1 con un flujo asintótico en la dirección z . En este caso presentaremos una solución general al problema para compararlo con la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas cuando se tiene una simetría azimutal. Partamos de la ecuación diferencial para la función de flujo en cilíndricas (2.40) con simetría azimutal

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Para solucionar esta ecuación diferencial, tomaremos una estrategia similar a la usada para la función de flujo en esféricas presentada en la sección 3.2.1. De esta forma vamos a proponer la separación de variables

$$\psi(R, z) = Q(R)S(z), \quad (\text{A.2})$$

que reemplazada en (A.1) conlleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial Q(R)S(z)}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 Q(R)S(z)}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{R}{Q(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial Q(R)}{\partial R} \right) + \frac{1}{S(z)} \frac{\partial^2 S(z)}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

de donde se puede hacer la separación de variables introduciendo el término m^2 para tener las ecuaciones diferenciales

$$R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{dQ(R)}{dR} \right) + m^2 Q(R) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2 S(z)}{dz^2} - m^2 S(z) = 0. \quad (\text{A.4})$$

La ecuación (A.4) presenta una solución de la forma

$$S(z) = A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}. \quad (\text{A.5})$$

Para (3.79) proponemos la sustitución

$$Y(R) = \frac{1}{R} \frac{dQ(R)}{dR}. \quad (\text{A.6})$$

Así que la ecuación diferencial se puede transformar

$$\begin{aligned} R \frac{d}{dR} (Y(R)) + m^2 Q(R) &= 0, \\ \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} (Y(R)) \right) + m^2 \frac{dQ(R)}{dR} &= 0, \\ \frac{d}{dR} \left(R \frac{d}{dR} (Y(R)) \right) + m^2 R Y(R) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

que representa una ecuación diferencial de Bessel. La solución general de está ecuación se puede presentar usando las funciones de Bessel y Neumann

$$Y(R) = B_1 J_0(mR) + B_2 Y_0(mR), \quad (\text{A.8})$$

luego usando la sustitución de $Y(R)$ dada por (A.6)

$$\frac{1}{R} \frac{dQ(R)}{dR} = B_1 J_0(mR) + B_2 Y_0(mR), \quad (\text{A.9})$$

$$Q(R) = B_1 \int R J_0(mR) dR + B_2 \int R Y_0(mR) dR + C. \quad (\text{A.10})$$

Para calcular esta integral, podemos hacer uso de la identidad aplicada a las funciones de Bessel, usando $x = mR$

$$\frac{dJ_1}{dx} = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x), \quad (\text{A.11})$$

$$J_0(x) = \frac{dJ_1}{dx} + \frac{1}{x} J_1(x), \quad (\text{A.12})$$

$$\int x J_0(x) dx = \int x \frac{dJ_1}{dx}(x) dx + \int J_1(x) dx. \quad (\text{A.13})$$

La primera integral del lado derecho se puede realizar por partes

$$\begin{aligned} \int x J_0(x) dx &= x J_1(x) - \int J_1(x) dx + \int J_1(x) dx, \\ \int x J_0(x) dx &= x J_1(x). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Como estas identidades también se aplican para las funciones de Neumann $Y_0(mR)$ reescribimos para $Q(R)$

$$Q(R) = B_1 \frac{R}{m} J_1(mR) + B_2 \frac{R}{m} Y_1(mR) + C, \quad (\text{A.15})$$

luego la solución general para la función ψ en el cilindro es

$$\psi(R, z) = \left(B_1 \frac{R}{m} J_1(mR) + B_2 \frac{R}{m} Y_1(mR) + C \right) (A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}). \quad (\text{A.16})$$

Que representa la función de flujo en cilíndricas. Nótese que esta solución va a depender de las condiciones de frontera deseadas. Por ejemplo, si se asume un flujo asintótico en la dirección z $A_1 \rightarrow 0$, o si se asume que para $R = 0$ la función de flujo no diverge, entonces $B_2 = 0$. Por el momento mantendremos esta expresión general para hacer el cálculo respectivo de la velocidad y el potencial velocidad para probar que la solución de ϕ cumple con la ecuación de Laplace. Usando (2.39) para la velocidad con una simetría azimutal en coordenadas cilíndricas tenemos para la coordenada en z de la velocidad se tiene

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \\ &= \frac{1}{R} (A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}) \left(B_1 \frac{R}{m} J_1(mR) + B_2 \frac{R}{m} Y_1(mR) + C \right), \\ &= \frac{1}{R} (A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}) (B_1 R J_0(mR) + B_2 R Y_0(mR)), \\ &= (B_1 J_0(mR) + B_2 Y_0(mR)) (A_1 e^{mz} + A_2 e^{-mz}). \end{aligned}$$

Mientras que para la coordenada radial obtenemos

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ &= -\frac{m}{R} \left(B_1 \frac{R}{m} J_1(mR) + B_2 \frac{R}{m} Y_1(mR) + C \right) (A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz}), \\ &= -\left(B_1 J_1(mR) + B_2 Y_1(mR) + \frac{mC}{R} \right) (A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz}). \end{aligned}$$

De esta manera la velocidad del flujo está representada por

$$\mathbf{v} = v_R \hat{\mathbf{R}} + v_z \hat{\mathbf{k}}. \quad (\text{A.17})$$

Para encontrar el potencial velocidad, usamos el gradiente de ϕ como referencia. De esta manera si usamos v_r

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial R} &= -\left(B_1 J_1(mR) + B_2 Y_1(mR) + \frac{mC}{R} \right) (A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz}), \\ \phi &= -(A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz}) \int \left(B_1 J_1(mR) + B_2 Y_1(mR) + \frac{mC}{R} \right) dR, \\ \phi &= (A_1 e^{mz} - A_2 e^{-mz}) \left(\frac{B_1}{m} J_0(mR) + \frac{B_2}{m} Y_0(mR) - mC \ln(R) \right) + K(\text{A.18}) \end{aligned}$$

Ahora usando la componente de la velocidad en z se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial z} &= (B_1J_0(mR) + B_2Y_0(mR))(A_1e^{mz} + A_2e^{-mz}), \\ \phi &= (B_1J_0(mR) + B_2Y_0(mR)) \int (A_1e^{mz} + A_2e^{-mz}) dz \\ \phi &= \frac{1}{m} (B_1J_0(mR) + B_2Y_0(mR))(A_1e^{mz} - A_2e^{-mz}) + K(R).\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

Para asegurar que los resultados sea iguales, $K(R) = K(z) = 0$ además de añadir que $C = 0$ ya que el término $1/\ln R$ no cumple la ecuación de Laplace. Así tenemos que el potencial ϕ en coordenadas cilíndricas esta dado por la ecuación

$$\phi(R, z) = \frac{1}{m} (B_1J_0(mR) + B_2Y_0(mR))(A_1e^{mz} - A_2e^{-mz}) \quad (\text{A.20})$$

Esta expresión es solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Al ajustar la constante $C = 0$ las componentes de la velocidad del flujo y la función de flujo quedan de la forma

$$v_r(R, z) = -(B_1J_1(mR) + B_2Y_1(mR))(A_1e^{mz} - A_2e^{-mz}), \quad (\text{A.21})$$

$$v_z(R, z) = (B_1J_0(mR) + B_2Y_0(mR))(A_1e^{mz} + A_2e^{-mz}), \quad (\text{A.22})$$

$$\psi(R, z) = \frac{R}{m} (B_1J_1(mR) + B_2Y_1(mR))(A_1e^{mz} + A_2e^{-mz}). \quad (\text{A.23})$$

De esta manera se ha mostrado como desde la ecuación diferencial para la función de flujo se encuentran las soluciones de ϕ de manera que la ecuación de Laplace se cumpla. Dependiendo las condiciones de frontera solicitadas, se pueden encontrar los potenciales y el fluido alrededor de superficies con simetría azimutal. Para un flujo que esté definido en $R = 0$ y que cumpla la condición asintótica de $\nabla\phi = 0$ cuando $R \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow \infty$ se tendrían los siguientes potenciales velocidad y función de flujo

$$\phi(R, z) = -\frac{A}{m}e^{-mz}J_0(mR), \quad (\text{A.24})$$

$$\psi(R, z) = \frac{A}{m}Re^{-mz}J_1(mR). \quad (\text{A.25})$$

De esta manera los potenciales presentan funciones de Bessel acotadas por la exponencial en z .

ANEXO. Solución del elipsoide por separación de variables

Para encontrar la solución de las ecuaciones (3.79) y (3.80) en coordenadas elípticas prolatas vamos a usar $k^2 = -n(n+1)$ y los valores de α y β encontrados anteriormente. De esta forma reescribimos las ecuaciones diferenciales como

$$\frac{d}{d\xi} \left(\sinh \xi \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right) - n(n+1) \sinh \xi U(\xi) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\sin \eta \frac{dW(\eta)}{d\eta} \right) + n(n+1) \sin \eta W(\eta) = 0. \quad (\text{B.2})$$

La ecuación (B.2) es una ecuación diferencial de Legendre al hacer la sustitución $\cos \eta = x$ y, por lo tanto su solución se puede encontrar por medio de los polinomios de Legendre

$$W(\eta) = P_n(\cos \eta). \quad (\text{B.3})$$

Para la ecuación (B.1) se puede hacer la sustitución $t = \cosh \xi$ para llegar a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \left((t^2 - 1) \frac{dU(t)}{dt} \right) - n(n+1)U(t) = 0, \quad (\text{B.4})$$

que no es una ecuación diferencial de Legendre debido a que $t = [1, \infty)$. Es por esta razón que es necesario acudir a otro sistema para solucionar esta ecuación diferencial. Propongamos una solución en series de potencias de la forma:

$$U(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j, \quad (\text{B.5})$$

que presenta las derivadas dadas por

$$U'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j t^{j-1}, \quad (\text{B.6})$$

$$U''(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1) t^{j-2}. \quad (\text{B.7})$$

Para poder sustituir en (B.4), vamos a simplificarla para conseguir

$$(t^2 - 1)U''(t) + 2tU'(t) - n(n+1)U(t) = 0, \quad (\text{B.8})$$

reemplazando las series de potencias en esta ecuación

$$(t^2 - 1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1)t^{j-2} + 2t \sum_{j=0}^{\infty} a_j j t^{j-1} - n(n+1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1)t^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1)t^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} 2a_j j t^j - \sum_{j=0}^{\infty} n(n+1)a_j t^j = 0 \quad (\text{B.10})$$

donde podemos reexpresar el segundo término de la parte izquierda de la ecuación, si usamos $k = j - 2$, de la forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1)t^{j-2} = \sum_{k=-2}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)t^k, \quad (\text{B.11})$$

luego podemos reescribir nuestra ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (a_j j(j-1) - a_{j+2}(j+2)(j+1) + 2a_j j - n(n+1)a_j) t^j &= 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \{(j(j-1) + 2j - n(n+1))a_j - a_{j+2}(j+2)(j+1)\} t^j &= 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \{(j(j+1) - n(n+1))a_j - a_{j+2}(j+2)(j+1)\} t^j &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Para que esta ecuación se cumpla es necesario que el término entre corchetes sea nulo

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+2)(j+1)} a_j, \quad (\text{B.13})$$

bajo el cual se tiene la solución de nuestro sistema diferencial al que le aplicaremos las condiciones de frontera dadas por (4.72). Si desarrollamos los primeros términos de (B.13) tendríamos dos diferentes representaciones para los términos pares e impares de nuestra solución en series de potencias

$$a_{jn} = \frac{((j-1)(j-2) - n(n+1))((j-2)(j-3) - n(n+1)) \dots (1 - n(n+1))}{j!} \quad j = \text{par} \quad (\text{B.14})$$

$$a_{jn} = \frac{((j-1)(j-2) - n(n+1))((j-2)(j-3) - n(n+1)) \dots (2 - n(n+1))}{j!} \quad j = \text{impar} \quad (\text{B.15})$$

de esta manera la solución general de la ecuación diferencial (B.4) está dada por

$$U_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} t^j, \quad (\text{B.16})$$

lo que conduce a la solución para el potencial de la forma

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(\cosh \xi) P_n(\cos \eta), \quad (\text{B.17})$$

teniendo en cuenta que $P_n(\cos \eta)$ corresponden a los polinomios de Legendre. Con esta expresión y las condiciones de frontera, se puede encontrar el potencial ϕ para una configuración determinada en coordenadas elípticas.