



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Categorías de Contextos Formales

Gerardo Alcides Muñoz Quiñones

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

Categorías de Contextos Formales

Gerardo Alcides Muñoz Quiñones
gmunoz@udistrital.edu.co

Director:
Ph.D. RODRIGO DE CASTRO KORGI
rdecastrok@unal.edu.co

Tesis presentada como requisito para optar al título de:
Doctorado en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

A mis padres, a mi esposa y a mis hijos
por su amor, comprensión y alegría.

Agradecimientos

Agradezco a mi director, el profesor Rodrigo De Castro por orientar mi trabajo; a todos mis profesores, en particular al profesor Fernando Zalamea; a mi familia por haberme dado su incondicional apoyo; y a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por facilitarme los recursos necesarios para que yo pudiera empezar a poner mis pasos, ... muchos pequeños pasos, con la esperanza de encontrar en el camino los tesoros de la sede de la sabiduría que, en su generosidad, me quiera regalar.

Resumen

En [GW99] Rudolf Wille introdujo los enlaces (*bonds*) como morfismos entre Contextos Formales (estos últimos son conexiones de Galois entre familias de conjuntos). Sin embargo, ni en [GW99] ni en la bibliografía consultada se muestra que los enlaces cumplen los axiomas de morfismo categórico. Lo primero que se muestra en este trabajo es que los enlaces cumplen los axiomas de morfismos categóricos y su categoría se llama *BOND*.

En el camino de encontrar una categoría basada en los enlaces equivalente a los Dominios de Scott se definen la categoría \mathbb{APX} , que está basada en los conceptos aproximables de [ZS06] y [HZ04], y la categoría \mathbb{DIS} , en la que su equivalente en familias de conjuntos sólo se diferencia de los Dominios de Scott en que los morfismos preservan las intersecciones de conjuntos. Por tal motivo se desarrollaron las categorías basadas en los enlaces $\mathbb{CON SIS}$ y \mathbb{CORD} , las cuales fueron inspirada en los Sistemas de Información de Scott (SIS). Finalmente se probó, usando [Gom99], que \mathbb{CORD} es equivalente a la categoría de los Sistemas de Información de Scott con sus funciones aproximables.

Palabras clave: Análisis de conceptos formales, Contextos formales, categorías, categoría de enlaces, categorías de familias de conjuntos, Sistemas de Información de Scott, Dominios de Scott, operadores clausura.

Abstract

In [GW99] Rudolf Wille introduced the notion of bond as a morphism between Formal Contexts (which are Galois conexions between families of sets). However, neither [GW99] nor the subsequent bibliography shows that bonds satisfy the axioms of categorical morfisms. We first show in the present work that bonds satisfy the axioms of categorical morfisms and their category is named *BOND*.

While trying to find a category based in bonds and equivalent to Scott Domains, we define both the category \mathbb{APX} , based on the notion of approximable concepts used in [ZS06] and [HZ04], and the category \mathbb{DIS} whose only difference with Scott Domains (as families of sets are concerned) is that morhipms do preserve intersection of sets. Taking those considerations into account, we develop the categories $\mathbb{CON SIS}$ and \mathbb{CORD} inspired by Scott Information Systems (SIS). Lastly, by using [Gom99] we establish that \mathbb{CORD} is equivalent to the category of Scott Information Systems and approximable mappings.

Keywords: formal concept analysis, formal contexts, categories of families of sets, categories of bonds, Scott domains, Scott Information Systems, closure operators.

Índice general

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Introducción	1
1. Preliminares	6
1.1. Categorías	6
1.2. La categoría SIS	9
2. Familias de Conjuntos	12
2.1. Definición de familias de conjuntos	12
2.2. Definición de homomorfismos entre familias	13
2.3. Definición de la categoría FAM (familias) y algunas subcategorías	15
2.4. La categoría de los operadores clausura finitarios OCF	18
2.5. Definición de la categoría τ FAM y sus subcategorías	19
2.6. El funtor Destapar	20
2.7. La categoría CLO	21
3. Funciones Polares	23
3.1. Contextos y funciones polares	23
3.2. Reflexión de funciones polares	26
3.3. Comprensión y extensión	29
3.4. Ignorando cantonear y contonear	35
4. La Categoría BOND	40
4.1. Enlaces	40
4.2. Espacios de Chu	44
5. Equivalencia con $(\top)\cap$FAM	48
5.1. Los funtores BF y FB	48
5.2. La equivalencia categórica	53

6. La Categoría APX	57
6.1. Contexto y enlace aproximable	57
6.2. Equivalencia con $(\top)\sqcup\cap\mathbf{FAM}$	58
7. La Categoría DIS	61
7.1. Contexto con prohibición y enlace con prohibición	62
7.2. La equivalencia entre $\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}$ y DIS	64
7.3. Los contextos con prohibición y los sistemas de información de Scott	66
8. Las Categorías CONSIG y CORD	73
8.1. La categoría CONSIG	73
8.2. La categoría CORD	85
8.3. El funtor RL de CORD en CLO	86
8.4. El funtor LR de CLO en CORD	86
8.5. Isomorfismo de las categorías CLO y CORD	88

Introducción

Es propio del espíritu humano preguntarse cómo funciona su pensamiento. La teoría del conocimiento ha propuesto que

Todo concepto se caracteriza por su *comprensión* (conjunto de los caracteres considerados en los objetos) y por su *extensión* (conjunto de los objetos a los cuales se puede aplicar). Comprensión y extensión forman pues el aspecto lógico del concepto una vez elaborado, en tanto que *abstracción* y *generalización* son las dos operaciones gnoseológicas por medio de las cuales se elabora. [GEL, concepto].

Por ejemplo, para el concepto “deportista”, su comprensión consiste en atributos como: tiene buena salud, hace ejercicio regularmente, tiene buen estado físico, etc. Su extensión consiste en el conjunto de todos los deportistas.

En este documento preferimos usar las palabras ‘atributos’ y ‘sujetos’ en vez de ‘caracteres’ y ‘objetos’. El término ‘objetos’ se reserva para los objetos categóricos.

Rudolf Wille [Wil84], en su teoría del **Análisis de Conceptos Formales (FCA)** (por sus siglas en inglés), propuso una forma para modelar matemáticamente los conceptos, usando precisamente la relación binaria R que conecta los sujetos G con sus atributos M . A la tripla $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$, la llamó **Contexto Formal** o simplemente **Contexto**.

Contextos formales

El fundamento del FCA consiste en las **funciones polares**, las cuales vamos a llamar **abstracción** y **generalización**, ya que son las operaciones con las que se elabora el concepto. La **abstracción** de un conjunto de sujetos A consiste en el conjunto de atributos B que todos los sujetos de A tienen. La **generalización** de un conjunto de atributos B consiste en el conjunto de sujetos A que tienen todos los atributos que hay en B .

Como un concepto está formado por su comprensión ($B \subseteq M$) y su extensión ($A \subseteq G$), matemáticamente se define como la pareja $\langle A, B \rangle$. Wille definió que la forma en que la

generalización y la abstracción elaboran un concepto es cuando la extensión A es una generalización de la comprensión B y la comprensión B es una abstracción de la extensión A .

Personalmente, no puedo ocultar mi admiración al ver cómo esta teoría matemática se ajusta de manera tan natural a conceptos filosóficos mucho más antiguos. Lo cual me lleva a pensar que, o la matemática tiene un gran poder para modelar o esta teoría filosófica es muy “real”.

Debido a que en un Contexto después de una generalización se usa frecuentemente una abstracción y como esta composición es como un columpiarse sobre la relación binaria entonces le dí inicialmente a esta composición el nombre en inglés de *swing*. A la otra composición, en donde después de una abstracción se usa una generalización, le dí el nombre de *sway*. Los nombres (sin ‘w’) *sing* y *say* los asigné para cuando el Contexto de la generalización era diferente al de la abstracción. *Sing* y *say* se tradujeron como cantar y contar y para mantener el juego de palabras, *swing* y *sway* se tradujeron como **cantonear** y **contonear**. Al ser poco utilizadas estas palabras, recordamos que el significado de estos sinónimos, contonearse y cantonearse, es hacer al andar movimientos con los hombros y caderas [RAE01]. Con el ejemplo 3.1.5, en la sección 3.2, se le da un sentido a las palabras cantar y contar de acuerdo a este trabajo.

Morfismos entre Contextos

Cada vez que hay un nuevo enfoque de una noción matemática, como es el caso de los Contextos, surge la siguiente pregunta: ¿cómo conectar los objetos de manera que se preserve el enfoque? Responder esta pregunta lleva a pensar en los morfismos y, por lo tanto, en la categoría asociada. Los principales morfismos considerados en el presente documento son:

Enlaces. (*Bonds*, en inglés). Introducidos en [Wil84], consisten en una relación binaria entre los sujetos de un Contexto y los atributos de otro, asegurando que las abstracciones y las generalizaciones a través del enlace de cada singleton se conviertan en un concepto del respectivo Contexto.

Como dato anecdótico, este trabajo comenzó estudiando una estructura muy similar al enlace pero algo más estricta, ya que no sólo consideraba los singletons sino cualquier conjunto. Sin embargo, tal estructura resultó ser equivalente al enlace debido al resultado obtenido en 3.4.1. Esto permitió extrapolar todos los resultados obtenidos a los enlaces para construir una categoría que resultó equivalente a las \cap -familias con tope (\cap -estructuras con tope), donde los morfismos son funciones que preservan intersecciones.

Transformaciones de ‘Chu’. Históricamente, las construcciones de Chu [Bar79] convierten categorías autónomas (i. e. categorías monoidales simétricas y cerradas) en categorías

autónomas con objetos duales. Los espacios de Chu surgen al aplicar la construcción de Chu a la categoría de los conjuntos junto con las funciones [Gup94, 3.7]. Los objetos de la categoría de los espacios de Chu son relaciones binarias y los morfismos son las transformaciones de Chu.

Es conocido que las relaciones binarias obtenidas a partir de transformaciones de Chu son un caso particular de los enlaces [Kro05, 4.4.3]. Resulta que la composición de enlaces propuesta en el presente trabajo es compatible con la composición de las transformaciones de Chu (véase 4.2.5).

Sistemas de información de Scott

Los sistemas de información de Scott fueron propuestos por D. Scott [Sco82] para dar una presentación más natural a la semántica denotacional.

El análogo a los conceptos de un Contexto son los Elementos de un sistema de información, aunque no están directamente relacionados. En [ZS06] se presentan los conceptos aproximables los cuales si coinciden con los Elementos, pero los conceptos aproximables están restringidos a los sistemas de información con consistencia discreta.

Una de las principales diferencias entre los conceptos de un contexto y los Elementos de un sistema de información es que los conceptos (ordenados por contención de sujetos) tienen tope, el cual corresponde al conjunto de todos los sujetos. Mientras que los Elementos (ordenados por contención de sujetos) no necesariamente tienen tope. Uno de los resultados de este trabajo es dar unas condiciones al Contexto para poder remover el tope sin perder las propiedades propias de los sistemas de información de Scott.

Funciones aproximables

Las funciones aproximables son los morfismos entre dos sistemas de información de Scott y se pueden ver como inferencias entre los tokens del segundo sistema de información con los consistentes del primero.

En [HZ04] se define la categoría \mathbf{CXT} basada en Contextos formales que es equivalente la categoría \mathbf{ISIS} de los sistemas de información con consistencia discreta junto con las funciones aproximables. Infortunadamente los morfismos de la categoría \mathbf{CXT} no están basados directamente en la abstracción y la generalización sino que se extrapolan las funciones aproximables.

Categorías de Contextos formales y de Sistemas de información de Scott

Una de las preguntas que motivaron la realización de este trabajo fue: ¿existe una categoría de Contextos formales en donde los morfismos estén basados en la abstracción y la generalización que sea equivalente a la categoría de los Sistemas de Información de Scott? En busca de una respuesta se desarrollaron, entre otras, las siguientes categorías de Contextos formales `BOND`, `APX`, `DIS`, `CON SIS` y `CORD`. Estas cinco categorías las podemos dividir en dos grupos. En el primer grupo, formado por las primeras tres categorías, los morfismos están basados directamente en los enlaces definidos por Wille, pero estos morfismos preservan intersecciones, lo cual no permite realizar una equivalencia categórica con los sistemas de información de Scott. Con el segundo grupo se soluciona este problema logrando que la categoría `CORD` sea equivalente con la categoría `SISINF` de los sistemas de información (con cualquier consistencia) junto con las funciones aproximables.

Una de las expectativas que hay una vez concluido este trabajo es evaluar las ventajas de implementar los sistemas de información de Scott y sus morfismos usando las funciones de generalización y abstracción, las cuales son muy simples de construir con circuitos digitales.

Contenido del documento

Con el fin de dar a conocer la notación utilizada, en el Capítulo 1 (Preliminares) se da un vistazo rápido por categorías y los sistemas de información de Scott.

El segundo Capítulo retoma de la literatura las conocidas familias de conjuntos y sus morfismos, y las presenta de forma categórica, con una notación cómoda para designar las familias. También se presentan las conocidas conexiones de Galois y operadores clausura como morfismos entre familias de conjuntos.

Al final del capítulo se propone la definición de tope aislado y se muestra cómo una categoría de \cap -familias termina siendo equivalente a una subcategoría de \cap -familias con tope aislado. Esto permite extrapolar algunos resultados que se tienen en conjuntos de partes a otros conjuntos.

El tercer capítulo comienza con las definiciones usuales de Contextos y funciones polares. Sin embargo, la notación usada para las funciones polares difiere un poco de la usual debido al uso exhaustivo de subíndices. En la segunda sección se evidencia una de las principales diferencias de este trabajo con las referencias citadas, ya que en este trabajo se utiliza frecuentemente la composición de funciones polares de diferentes Contextos. Un aporte interesante en esta sección es un procedimiento para obtener afirmaciones duales, las cuales aparecen de manera prominente en todo el documento. En la tercera sección se presentan las definiciones usuales

de comprensión, extensión y concepto, con sus propiedades. En la última sección de este capítulo se caracteriza de dos formas cada uno de los axiomas de la definición usual de enlace. Me sorprendió lo sencilla de entender que resultó esta demostración, que terminó escondiendo todo el trabajo previo.

En la primera sección del cuarto capítulo se introducen los enlaces, pero no usando los axiomas tradicionales, sino usando las caracterizaciones encontradas, las cuales serán más útiles para construir la categoría que llamamos \mathbb{BOND} . El Teorema 4.1.5 es el que permite manipular de forma sencilla la composición de enlaces. Muchos de los resultados fueron primero obtenidos sin este teorema y las demostraciones resultaban bastante extensas y complicadas (por ejemplo, probar que la composición de enlaces es asociativa). En la segunda sección de este capítulo se muestra cómo la composición propuesta para los enlaces generaliza la composición de las relaciones binarias que surgen de las transformaciones de Chu.

En el capítulo quinto se presenta de manera detallada la equivalencia categórica entre la categoría \mathbb{BOND} y la categoría de las \cap -familias con tope, donde los morfismos son las funciones que preservan intersecciones.

El capítulo sexto contiene la versión algebraica de los enlaces, llamados enlaces aproximables, ya que la unión de conceptos finitos siempre se aproxima a un concepto. El capítulo finaliza mostrando la equivalencia categórica con las \cap -familias algebraicas con tope, donde los morfismos, además de preservar las intersecciones, también preservan las uniones de conjuntos finitos.

En el capítulo séptimo se definen los Contextos con prohibición (i. e. Contextos aproximables con un sujeto prohibido para todos los atributos). Estos Contextos están en correspondencia con los sistemas de información de Scott. Los Contextos con prohibición junto con unos morfismos que preservan la prohibición resultan equivalentes a una categoría de \cap -familias algebraicas no necesariamente con tope.

En el capítulo octavo se define la categoría de Contextos llamada $\mathbb{CON SIS}$ basada en los sistemas de información de Scott, cuyos automorfismos corresponden a las inferencias. También se define la categoría $\mathbb{COR ID}$, cuyos objetos son los automorfismos de $\mathbb{CON SIS}$. Esta categoría es equivalente a la categoría \mathbb{CLO} , que es una categoría formada por un tipo de operadores clausura. Estas categorías resultan equivalentes a la categoría de los sistemas de información de Scott junto con las funciones aproximables.

NOTA: *A partir del tercer capítulo, a los resultados tomados de la literatura se les ha colocado sus respectivas referencias; por lo tanto, aquellos resultados o ejemplos que no tienen referencias explícitas han sido obtenidos por el autor. Se hizo un gran esfuerzo para presentar demostraciones detalladas con el objeto de evitar posibles errores en los razonamientos matemáticos y facilitar su verificación (también por la costumbre del autor, un ingeniero electrónico, que especifica los diseños con tal detalle para que puedan ser interpretados por máquinas).*

1 Preliminares

En este capítulo se presenta la notación y algunos resultados que se usarán para las categorías y en particular se presenta la categoría de los sistemas de información de Scott.

1.1. Categorías

Un buen libro para comenzar a estudiar la teoría de categorías es [AM75]. Para hacer un estudio más detallado se recomienda [Mac71].

1.1.1. Definición de Categoría. Una Categoría \mathbb{C} consiste

- (i) en una clase $||\mathbb{C}||$ de **objetos de la categoría**,
- (ii) para todo $A, B \in ||\mathbb{C}||$, en un conjunto $\mathbb{C}[A, B]$ de **morfismos** desde A hasta B ,
- (iii) para cada $A, B, C, D \in ||\mathbb{C}||$, en una operación de **composición asociativa**,

$$\circ : \mathbb{C}[B, C] \times \mathbb{C}[A, B] \rightarrow \mathbb{C}[A, C] \quad (\text{operación de composición}), \quad (1.1)$$

tal que para todo $f \in \mathbb{C}[A, B]$, $g \in \mathbb{C}[B, C]$ y $h \in \mathbb{C}[C, D]$, se tiene que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (\text{la composición es asociativa}), \quad (1.2)$$

- (iv) para todo $A \in ||\mathbb{C}||$, en un morfismo **identidad** $id_A \in \mathbb{C}[A, A]$ tal que si $g \in \mathbb{C}[B, A]$ y $h \in \mathbb{C}[A, C]$, entonces

$$\begin{aligned} g &= id_A \circ g, \\ h &= h \circ id_A \end{aligned} \quad (\text{la identidad es ignorada}). \quad (1.3)$$

Como es usual, se denota un morfismo $f \in \mathbb{C}[A, B]$ como $f : A \rightarrow B$. Un morfismo $f \in \mathbb{C}[A, B]$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $f^{-1} \in \mathbb{C}[B, A]$ tal que $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$.

1.1.2. Funtores y equivalencia de categorías. Un **functor** \mathbf{F} desde una categoría \mathbb{A} hacia una categoría \mathbb{B} consiste en:

- (i) una correspondencia funcional desde $\|\mathbb{A}\|$ hacia $\|\mathbb{B}\|$, donde la imagen de un objeto $A \in \|\mathbb{A}\|$ es denotada por $\mathbf{F}(A)$,
- (ii) para todo $A, A' \in \|\mathbb{A}\|$ una función desde $\mathbb{A}[A, A']$ hacia $\mathbb{B}[\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(A')]$, donde la imagen de un morfismo $f \in \mathbb{A}[A, A']$ es denotada por $\mathbf{F}(f)$, tal que para todo $A, B, C \in \|\mathbb{A}\|$ y cada $f \in \mathbb{A}[A, B]$ y $g \in \mathbb{A}[B, C]$, se tienen que $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f)$ y $\mathbf{F}(id_A) = id_{\mathbf{F}(A)}$.

Un funtor \mathbf{F} entre \mathbb{A} y \mathbb{B} es **fiel y pleno** si al restringirlo a cada conjunto de morfismos $\mathbb{A}[A_1, A_2]$ (con $A_1, A_2 \in \|\mathbb{A}\|$) es una biyección con el conjunto de morfismos $\mathbb{B}[\mathbf{F}(A_1), \mathbf{F}(A_2)]$. \mathbf{F} es **representativo** si para cada $B \in \|\mathbb{B}\|$ hay un $A \in \|\mathbb{A}\|$ tal que $\mathbf{F}(A)$ es isomorfo a B .

La noción de **categorías isomorfas** se define de manera natural; sin embargo, ésta es una noción muy restrictiva. Con el fin de obtener más flexibilidad, se definen las transformaciones naturales, que permiten construir morfismos llamados equivalencias de categorías.

Una **transformación natural** entre dos funtores $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es una función que asigna a cada objeto $A \in \|\mathbb{A}\|$ un morfismo $\eta_A : \mathbf{F}(A) \rightarrow \mathbf{G}(A)$ en \mathbb{B} , tal que para todo morfismo $f \in \mathbb{A}[A, A']$ se tiene que $\eta_{A'} \circ \mathbf{F}(f) = \mathbf{G}(f) \circ \eta_A$. Esto es denotado por $\eta : \mathbf{F} \dot{\rightarrow} \mathbf{G}$ o por $\eta = \{\eta_A : \mathbf{F}(A) \rightarrow \mathbf{G}(A) \mid A \in \|\mathbb{A}\|\}$. Por ejemplo, para cualquier categoría \mathbb{C} , el conjunto de todas las identidades es una transformación natural trivial $id_{\mathbb{C}} := \{id_a \mid a \in \|\mathbb{C}\|\}$. Un **isomorfismo natural** es una transformación natural en la cual todos sus morfismos son isomorfismos. Es evidente que para cada categoría \mathbb{C} se tiene que $id_{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo natural.

Una **equivalencia de categorías** entre \mathbb{A} y \mathbb{B} consiste en $\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}, \eta, \epsilon \rangle$ donde $\mathbf{F} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ y $\mathbf{G} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ son un par de funtores y $\eta : \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} \dot{\rightarrow} id_{\mathbb{A}}$ y $\epsilon : \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \dot{\rightarrow} id_{\mathbb{B}}$ son un par de isomorfismos naturales, donde $id_{\mathbb{A}}$ y $id_{\mathbb{B}}$ son los funtores identidad de las respectivas categorías. Dos categorías son **equivalentes** cuando hay una equivalencia de categorías entre ellas. Un resultado conocido es que dos categorías son equivalentes si y sólo si hay un funtor de una a la otra que es fiel, pleno y representativo.

1.1.3. Subcategoría. Se dice que una categoría \mathbb{B} es a **subcategoría** de otra categoría \mathbb{A} (denotado como $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$) si

- los objetos de \mathbb{B} son objetos de \mathbb{A} ,
- si A y A' son objetos de \mathbb{B} entonces los morfismos de $\mathbb{B}[A, A']$ son morfismos de $\mathbb{A}[A, A']$,
- si B, B' y B'' son objetos de \mathbb{B} y si $f \in \mathbb{B}[B, B']$ y $f' \in \mathbb{B}[B', B'']$ entonces la composición en \mathbb{A} , $f' \circ f \in \mathbb{A}[B, B'']$ debe ser la composición en \mathbb{B} y por lo tanto $f' \circ f \in \mathbb{B}[B, B'']$,
- si B es un objeto de \mathbb{B} y si id_B es la identidad de B en la categoría \mathbb{A} , entonces id_B es la identidad de B en la categoría \mathbb{B} .

\mathbb{B} es una **subcategoría plena** de \mathbb{A} , si \mathbb{B} es una subcategoría de \mathbb{A} la cual tiene todos los posibles morfismos de \mathbb{A} . Esto es, para todo par de objetos B y B' de \mathbb{B} se tiene que

$$\mathbb{B}[B, B'] = \mathbb{A}[B, B']. \quad (1.4)$$

Dada una subcategoría \mathbb{B} de una categoría \mathbb{A} se puede definir el funtor **Incl** desde \mathbb{B} hacia \mathbb{A} , el cual hace corresponder los objetos y morfismos de \mathbb{B} con los ellos mismos en \mathbb{A} .

Dado un funtor $\mathbf{F} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ y una subcategoría \mathbb{A}' de \mathbb{A} , se dice que $\mathbf{H} : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{B}$ es el **functor \mathbf{F} restringido a \mathbb{A}'** si para cada objeto $A \in \|\mathbb{A}'\|$ se tiene que $\mathbf{H}(A) = \mathbf{F}(A)$ y si para cada morfismo $f \in \mathbb{A}'[A, A']$ se tiene que $\mathbf{H}(f) = \mathbf{F}(f)$.

Dada una transformación natural $\eta = \{\eta_A : \mathbf{F}(A) \rightarrow \mathbf{G}(A) \mid A \in \|\mathbb{A}\|\}$ y una subcategoría \mathbb{A}' de \mathbb{A} , se dice que $\epsilon = \{\eta_A \in \eta \mid A \in \|\mathbb{A}'\|\}$ es la **transformación natural η restringida a \mathbb{A}'** .

1.1.4. Definición de $\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}$. Si \mathbb{B} y \mathbb{C} son subcategorías de \mathbb{A} es fácil ver que la siguiente construcción denotada por $\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}$ es también una subcategoría de \mathbb{A} , \mathbb{B} y \mathbb{C} :

- Los objetos de $\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}$ son los objetos que están tanto en \mathbb{B} como en \mathbb{C} . $\|\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}\| := \|\mathbb{B}\| \cap \|\mathbb{C}\|$.
- Si A y A' son objetos de $\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}$ entonces los morfismos de $(\mathbb{B} \wedge \mathbb{C})[A, A']$ son los morfismos que están en $\mathbb{B}[A, A']$ y en $\mathbb{C}[A, A']$, dicho de otra forma $(\mathbb{B} \wedge \mathbb{C})[A, A'] = \mathbb{B}[A, A'] \cap \mathbb{C}[A, A']$.
- La composición y las identidades son las correspondientes como subcategorías de \mathbb{A} .

Esta definición se utilizara para definir subcategorías de \cap -familias en el capítulo 2.

1.1.5. Equivalencia de subcategorías. Dada una equivalencia $\langle F, G, \eta, \epsilon \rangle$ de las categorías \mathbb{A} y \mathbb{B} y dadas además \mathbb{A}' y \mathbb{B}' subcategorías de \mathbb{A} y \mathbb{B} respectivamente, se define

- \mathbf{F}' es el funtor \mathbf{F} restringido a \mathbb{A}' ,
- \mathbf{G}' es el funtor \mathbf{G} restringido a \mathbb{B}' ,
- η' es la transformación natural η restringida a \mathbb{A}' ,
- ϵ' es la transformación natural ϵ restringida a \mathbb{B}' .

Es sencillo ver que $\langle \mathbf{F}', \mathbf{G}', \eta', \epsilon' \rangle$ es una equivalencia de categorías entre \mathbb{A}' y \mathbb{B}' si satisface las siguientes condiciones:

- (I) si $A \in \|\mathbb{A}'\|$ entonces $\mathbf{F}'(A) \in \|\mathbb{B}'\|$,

- (II) si $f \in \mathbb{A}'[A, A']$ entonces $\mathbf{F}'(f) \in \mathbb{B}'[\mathbf{F}'(A), \mathbf{F}'(A')]$,
- (III) si $B \in \|\mathbb{B}'\|$ entonces $\mathbf{G}'(B) \in \|\mathbb{A}'\|$,
- (IV) si $g \in \mathbb{B}'[B, B']$ entonces $\mathbf{G}'(g) \in \mathbb{A}'[\mathbf{G}'(B), \mathbf{G}'(B')]$,
- (V) si $A \in \|\mathbb{A}'\|$ entonces η_A es un isomorfismo en \mathbb{A}' ,
- (VI) si $B \in \|\mathbb{B}'\|$ entonces ϵ_B es un isomorfismo en \mathbb{B}' .

1.2. La categoría SIS

Esta categoría esta formada por los sistemas de información de Scott (SIS) y las funciones aproximables.

1.2.1. Los objetos de la categoría. Un **sistema de información de Scott (SIS)** es una tripla $\Vdash = \langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$ donde T es un conjunto de *tokens*, $\mathcal{C}on$ es una familia de conjuntos finitos de T , (i. e. $\mathcal{C}on \subseteq \mathcal{F}in(T)$) y \vdash es una relación binaria entre $\mathcal{C}on$ y T (e.d. $\vdash \subseteq \mathcal{C}on \times T$) llamada inferencia, que cumplen las siguientes condiciones:

- Si $K \in \mathcal{C}on$ y $K' \subseteq K$ entonces $K' \in \mathcal{C}on$. (SIS1)
- Si $t \in T$ entonces $\{t\} \in \mathcal{C}on$. (SIS2)
- Si $K \in \mathcal{C}on$, $t \in T$ y $K \vdash t$ entonces $K \cup \{t\} \in \mathcal{C}on$. (SIS3)
- Si $K \in \mathcal{C}on$ y $t \in K$ entonces $K \vdash t$. (SIS4)
- Si $K, K' \in \mathcal{C}on$ y $t \in T$ satisfacen que $K' \vdash t$ y $(\forall k' \in K') K \vdash k'$, entonces $K \vdash t$. (SIS5)

Un par de casos comunes de $\mathcal{C}on$ son:

$$\mathcal{C}on := \mathcal{F}in(T) \quad \text{(consistencia discreta),} \quad (1.5)$$

$$\mathcal{C}on := \{\emptyset\} \cup \{\{t\} \mid t \in T\} \quad \text{(consistencia simple),} \quad (1.6)$$

y un caso común de inferencia es

$$\vdash := \{(K, t) \subseteq \mathcal{C}on \times T \mid t \in K\} \quad \text{(inferencia simple).} \quad (1.7)$$

Sea $P \subseteq T$, entonces definimos:

$$\overline{P} := \{t \in T \mid (\exists K \in P) K \vdash t\}. \quad (1.8)$$

Decimos que P es **consistente** en \Vdash , si todo subconjunto finito de P está en $\mathcal{C}on$, decimos que es **\vdash -cerrado** si $P = \overline{P}$ y decimos que es un **elemento del SIS** si es consistente y \vdash -cerrado. En [DP02, 9.18] se muestra que el conjunto de elementos es una $\sqcup \cap$ -familia.

En los siguientes ejemplos vamos a definir $\langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$.

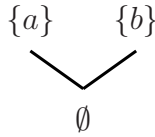
1.2.2 Ejemplo. El primer ejemplo es un SIS muy sencillo que consiste en:

$$T = \{a, b\}$$

$$Con = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

$$\vdash = \{(\{a\}, a), (\{b\}, b)\}$$

Los elemento generados son: \emptyset , $\{a\}$ y $\{b\}$. Y el respectivo diagrama de Hasse [DP02, pag. 11] se muestra en la siguiente figura.



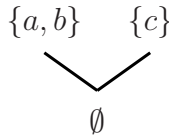
1.2.3 Ejemplo. Una pequeña variación del anterior ejemplo se tiene con

$$T = \{a, b, c\}$$

$$Con = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$$

$$\vdash = \{(\{a\}, a), (\{b\}, b), (\{c\}, c), (\{a, b\}, a), (\{a, b\}, b), (\{a, b\}, a)\}$$

Los elemento generados son: \emptyset , $\{a, b\}$ y $\{c\}$. Y el respectivo diagrama de Hasse [DP02, pag. 11] se muestra en la siguiente figura.



Los siguientes tres ejemplos son tomados o basados de [DP02, 9.15 y 16].

1.2.4 Ejemplo. Sea $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, el producto cartesiano de números naturales. Además, $\emptyset \in Con$ y $\{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\} \in Con$ si y sólo si $(a_i = a_j \Rightarrow b_i = b_j)$. Finalmente $Y \vdash \langle a, b \rangle$ si y sólo si $\langle a, b \rangle \in Y$. Los elementos están en correspondencia con las funciones parciales entre números naturales.

1.2.5 Ejemplo. $T = \Sigma^*$, el conjunto de todas las cadenas finitas de ceros y unos [DP02, 1.9]. $Con = \{Y \subseteq \Sigma^* \mid \sigma, \tau \in Y \Rightarrow \sigma \leq \tau \text{ o } \sigma \geq \tau\}$. $Y \vdash \sigma$ si y sólo si $\sigma \leq \tau$ para algún $\tau \in Y$. Los elementos están en correspondencia uno a uno con Σ^{**} , el conjunto de las cadenas binarias finitas o infinitas.

1.2.6 Ejemplo. $T = \{(x, y) \subseteq \mathbb{Q} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. $\{I_1, \dots, I_k\} \in Con$ si y solo si $I_1 \cap \dots \cap I_k \neq \emptyset$. $\{I_1, \dots, I_k\} \vdash (x, y)$ si y sólo si $I_1 \cap \dots \cap I_k \subseteq (x, y)$. Los elementos están asociados con intervalos de números reales.

1.2.7 Ejemplo. Sea \mathbb{C} una categoría tal que todos los morfismos forman el conjunto T (vamos a identificar los objetos con las identidades). Con está formado por todos los conjuntos finitos de morfismos. $F \vdash h$ si y sólo si h es la composición de algún subconjunto de F o si h es alguna identidad que se pueda componer con algún elemento f de F . Los elementos son las subcategorías de \mathbb{C} .

1.2.8. Los morfismos de la categoría. Sean $\mathbb{I}\vdash_A = \langle T_A, Con_A, \vdash_A \rangle$ y $\mathbb{I}\vdash_B = \langle T_B, Con_B, \vdash_B \rangle$ dos SIS. Una **función aproximable** \rightsquigarrow es un subconjunto de $Con_A \times T_B$ que satisface

(AM1) $K \rightsquigarrow l$ para todo $l \in L \in T_B$ implica

- (a) $L \in Con_B$.
- (b) $L \vdash_B b$ entonces $K \rightsquigarrow b$.

(AM2) para todo $h \in H$ si $K \vdash_A h$ y $H \rightsquigarrow b$ entonces $K \rightsquigarrow b$.

Si se denota $\tilde{K} := \{b \mid K \rightsquigarrow b\}$ se puede resumir (AM1) y (AM2) en $\tilde{K} = \tilde{\tilde{K}} = \overline{\tilde{K}}$ es consistente en el SIS $\mathbb{I}\vdash_B$.

La **composición de funciones aproximables** $\rightsquigarrow_1 \subseteq Con_A \times T_B$ y $\rightsquigarrow_2 \subseteq Con_B \times T_C$ es definida como es la composición usual de relaciones binarias:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow_2 \circ \rightsquigarrow_1 &= \rightsquigarrow_{2 \circ 1} \\ \{(K, c) \in Con_A \times T_C \mid (\exists L \subseteq T_B) L \rightsquigarrow_2 c \wedge (\forall l \in L) K \rightsquigarrow_1 l\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

La **identidad de una función aproximable** $\mathbb{I}\vdash_A = \langle T_A, Con_A, \vdash_A \rangle$, es $id_{\mathbb{I}\vdash_A} := \vdash_A$.

1.2.9. Los sistemas de información. En [Gom99, 4.3] se presenta la categoría SISINF de los sistemas de información. Además se muestra que los sistemas de información de Scott son equivalentes a los sistemas de información.

2 Familias de conjuntos, morfismos y categorías

Las familias de conjuntos son una herramienta muy útil en las matemáticas, empezando por la topología. En este trabajo las categorías de familias de conjuntos van a ser el punto de referencia con el que se comparan las demás categorías.

2.1. Definición de familias de conjuntos

En esta sección se presentan las familias de conjuntos que se usarán en este trabajo, algunas de las cuales se pueden encontrar con más detalle en [DP02].

2.1.1. Familia. Una **familia** es una pareja $\langle \mathcal{M}, X \rangle$, donde X es un conjunto y \mathcal{M} es una colección de subconjuntos de X .

2.1.2. \cap -familia. Una **\cap -familia** (o inter-familia) $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ es una familia tal que para toda subcolección $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ no vacía se tiene.

$$\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{M} \quad (\mathcal{M} \text{ es cerrada bajo intersecciones no vacías}). \quad (2.1)$$

En la literatura es corriente utilizar la terminología \cap -estructura o sistema clausura para referirse a una \cap -familia (véase, por ejemplo, [DP02]).

2.1.3. \sqcup -familia. Una **\sqcup -familia** (o familia algebraica) $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ es una familia tal que para toda subcolección $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$ dirigida¹ se tiene.

$$\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{M} \quad (\mathcal{M} \text{ es cerrado bajo uniones dirigidas}). \quad (2.2)$$

2.1.4. \top -familia. Una **\top -familia** (o familia con tope) $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ es una familia tal que

$$X \in \mathcal{M} \quad (\mathcal{M} \text{ tiene tope}). \quad (2.3)$$

¹Una subcolección \mathcal{D} es dirigida si para cualquier par de conjuntos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ hay un conjunto $D_3 \in \mathcal{D}$ tal que $D_1 \cup D_2 \subseteq D_3$.

2.1.5. \downarrow -familia. Una \downarrow -familia (o familia decreciente) $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ es una familia en la cual para todo $A \in \mathcal{M}$

$$A' \subseteq A \Rightarrow A' \in \mathcal{M} \quad (\mathcal{M} \text{ es decreciente}). \quad (2.4)$$

2.1.6. “Intersección” de familias. Una subfamilia de dos o más familias definidas previamente, utilizará los respectivos símbolos (\downarrow , \top , \sqcup , \cap). En particular una $\downarrow\sqcup$ -familia es una familia algebraica y decreciente, denominan en [Gom99, Prop. 141] **colección de carácter finito** Ya que todo conjunto que pertenece a la familia está determinado por sus subconjuntos finitos.

2.2. Definición de homomorfismos entre familias

A continuación se mencionan los morfismos entre familias de conjuntos que se utilizarán en este trabajo. Mayor información se encuentra en [DP02].

2.2.1. \subseteq -homomorfismo. Un **homomorfismo entre familias** $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ es una función $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tal que para todo par de conjuntos $L, L' \in \mathcal{M}_1$, se tiene

$$\text{si } L \subseteq L' \text{ entonces } f(L) \subseteq f(L') \quad (\text{función monótona}). \quad (2.5)$$

También se conoce como función monótona y la podemos designar como \subseteq -homomorfismo.

2.2.2. \cap -homomorfismo. Un **homomorfismo entre \cap -familias** $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ es una función monótona $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tal que para toda colección $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$ no vacía

$$f\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f(A) \quad (f \text{ preserva intersecciones no vacías}). \quad (2.6)$$

A estos morfismos los denominamos \cap -homomorfismos.

2.2.3. \sqcup -homomorfismo. Un **homomorfismo entre \sqcup -familias** $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ es una función monótona $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tal que para toda subcolección dirigida $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_1$

$$f\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} f(D) \quad (f \text{ preserva uniones dirigidas}). \quad (2.7)$$

Los homomorfismos ente \sqcup -familias también se conocen como **funciones continuas** [DP02, 8.6] o **Scott continuas** [Kro05, 2.2.2] y los denominamos \sqcup -homomorfismos.

Un hecho conocido es que si f es una función (no necesariamente homomorfismo) entre las \sqcup -familias $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ se cumple que

$$(\forall A \subseteq x_1) \left[f(A) = \bigcup_{K \in A} f(K) \right] \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_1 \text{ dirigido}) \left[f\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} f(D) \right].$$

$K \Subset A$ significa que K es un subconjunto finito de A .

2.2.4. \top -homomorfismo. Un **homomorfismo entre \top -familias** $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ es una función monótona $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tal que

$$f(X_1) = X_2 \quad (f \text{ preserva el tope}). \quad (2.9)$$

A estos morfismos los denominamos \top -homomorfismos.

2.2.5. Operador clausura. Un **operador clausura en X** es una función monótona $C : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ que también satisface para todo $A, B \in \mathcal{M}$

$$A \subseteq C(A) \quad (C \text{ es expansiva}), \quad (2.10)$$

$$C(C(A)) \subseteq C(A) \quad (C \text{ es idempotente}). \quad (2.11)$$

Cada $\top\cap$ -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ está en correspondencia biyectiva con un operador clausura C en X de la siguiente manera. A cada $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ se le asocia el operador clausura

$$C_{\langle \mathcal{M}, X \rangle} : \wp(X) \rightarrow \wp(X) \quad (2.12)$$

$$A \mapsto \bigcap \{L' \in \mathcal{M} \mid A \subseteq L'\}. \quad (2.13)$$

Debido a que

$$A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow C_{\langle \mathcal{M}, X \rangle}(A) = A, \quad (2.14)$$

es posible recuperar nuevamente la \cap -familia. Por lo tanto a a cada operador clausura C en X se le asocia la $\top\cap$ -familia $\langle \mathcal{M}_C, X \rangle$ donde

$$\mathcal{M}_C := \{A \subset X \mid C(A) = A\}. \quad (2.15)$$

Los operadores clausura C_1 en X_1 y C_2 en X_2 permiten extender una función $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ con $\mathcal{M}_1 \subseteq \wp(X_1)$ y $\mathcal{M}_2 \subseteq \wp(X_2)$ como se muestra a continuación

$$f' : \wp(X_1) \rightarrow \wp(X_2) \quad (2.16)$$

$$A \mapsto C_2(f(C_1(A))).$$

2.2.6. Operador clausura algebraico. Un **operador clausura algebraico** en X es un operador clausura que a su vez es un \sqcup -homomorfismo.

Como para las $\top\sqcup\cap$ -familias $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ se cumple que si $A \subseteq X$ entonces

$$\bigcap \{L \in \mathcal{M} \mid A \subseteq L\} = \bigcup_{K \Subset A} \bigcap \{L \in \mathcal{M} \mid K \subseteq L\}, \quad (2.17)$$

las $\top\sqcup\cap$ -familias en X están en correspondencia biyectiva con los operadores clausura algebraicos en X .

2.2.7. Operador clausura finitario. En [Gom99] se define un **operador clausura finitario** como una función algebraica, expansiva e idempotente $C : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ en donde \mathcal{L} es una $\downarrow\sqcup$ -familia.

Debido a que el conjunto de partes es una $\downarrow\sqcup$ -familia, entonces todo operador clausura algebraico es un operador clausura finitario.

2.2.8. Conexiones de Galois. Una **conexión de Galois que invierte el orden (CG)** entre las familias $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ se define como un par $\langle f, h \rangle$ donde $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ y $h : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1$ son funciones que satisfacen para todo $L_1, L'_1 \in \mathcal{M}_1$ y $L_2, L'_2 \in \mathcal{M}_2$

$$f(L_1) \supseteq L_2 \iff L_1 \subseteq h(L_2). \quad (2.18)$$

Toda conexión de Galois que invierte el orden satisface:

$$L_1 \subseteq h(f(L_1)) \quad \text{y} \quad L_2 \subseteq f(h(L_2)), \quad (2.19)$$

$$L_1 \subseteq L'_1 \Rightarrow f(L_1) \supseteq f(L'_1) \quad \text{y} \quad L_2 \subseteq L'_2 \Rightarrow h(L_2) \supseteq h(L'_2), \quad (2.20)$$

$$f(L_1) = f(h(f(L_1))) \quad \text{y} \quad h(L_2) = h(f(h(L_2))). \quad (2.21)$$

Una conexión de Galois que invierte el orden genera un operador clausura en cada una de las \cap -familias, así:

$$\begin{aligned} C_1 : \mathcal{M}_1 &\rightarrow \mathcal{M}_1 & C_2 : \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M}_2 \\ A &\mapsto g(f(A)) & B &\mapsto f(g(B)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

También se define una **conexión de Galois que preserva el orden** si

$$f(L_1) \subseteq L_2 \iff L_1 \subseteq h(L_2). \quad (2.23)$$

A cada \cap -homomorfismo $f : \langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle \mapsto \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ se le puede asociar un morfismo adjunto $g : \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle \mapsto \langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ definido así. Para cada $B \subseteq \mathcal{M}_2$

$$g(B) := \bigcap \{ A \subseteq \mathcal{M}_1 \mid B \subseteq f(A) \} \quad (2.24)$$

de tal forma que $\langle f, g \rangle$ forman una conexión de Galois que preserva el orden. Es más, en cada conexión de Galois que preserva el orden entre \cap -familias hay un \cap -homomorfismo.

En [DEW04] se tratan diferentes aspectos de las conexiones de Galois con mayor detalle.

2.3. Definición de la categoría FAM (familias) y algunas subcategorías

En el presente trabajo se estudiarán algunas familias de conjuntos desde el punto de vista categórico. Aunque muchas de las nociones sobre familias son ampliamente conocidas, en la

literatura no se han definido ni estudiado exhaustivamente como categorías de familias. A continuación se definen las categorías de familias de conjuntos que se usarán en este trabajo.

2.3.1. FAM. La **categoría FAM (o familias)** consta de familias junto con las funciones monótonas, donde la identidad y la composición son las usuales entre funciones.

2.3.2. \cap FAM. La **categoría \cap FAM** consta de \cap -familias junto con los \cap -homomorfismos.

2.3.3. \sqcup FAM. La **categoría \sqcup FAM** consta de \sqcup -familias junto con los \sqcup -homomorfismos.

2.3.4. \top FAM. La **categoría \top FAM** consta de \top -familias junto con los \top -homomorfismos.

2.3.5. $(\top)\cap$ FAM. La **categoría $(\top)\cap$ FAM** es la subcategoría plena de \cap FAM donde los objetos son restringidos a $\top\cap$ -familias. Cada objeto $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ de esta categoría está en correspondencia biyectiva con a un operador clausura en X . Los morfismos de esta categoría son conexiones de Galois.

2.3.6. $\sqcup\cap$ FAM. La **categoría $\sqcup\cap$ FAM** se define como

$$\sqcup\cap\text{FAM} := (\cap\text{FAM}) \wedge (\sqcup\text{FAM}). \quad (2.25)$$

2.3.7. $(\top)\sqcup\cap$ FAM. La **categoría $(\top)\sqcup\cap$ FAM** se define como

$$(\top)\sqcup\cap\text{FAM} := (\sqcup\cap\text{FAM}) \wedge ((\top)\cap\text{FAM}). \quad (2.26)$$

2.3.8. $\sqcup(\cap)$ FAM. La **categoría $\sqcup(\cap)$ FAM** es una subcategoría plena de la categoría \sqcup FAM, donde los objetos deben ser también \cap -familias.

2.3.9. $\top\sqcup(\cap)$ FAM. La **categoría $\top\sqcup(\cap)$ FAM** se define como

$$\top\sqcup(\cap)\text{FAM} := (\top\text{FAM}) \wedge (\sqcup(\cap)\text{FAM}). \quad (2.27)$$

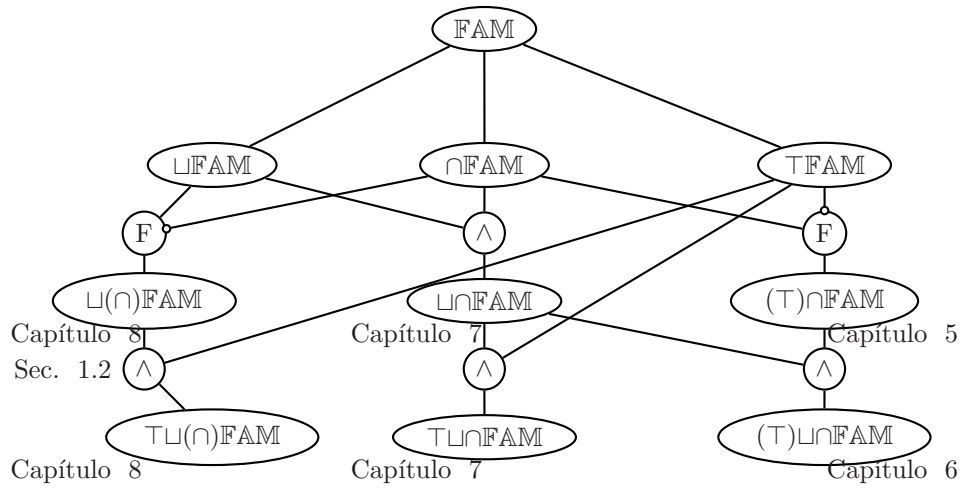
Los objetos de esta categoría están en correspondencia biyectiva con los operadores clausura algebraicos en X .

2.3.10. $\top\sqcup\cap$ FAM. La **categoría $\top\sqcup\cap$ FAM** se define como

$$\top\sqcup\cap\text{FAM} := (\top\text{FAM}) \wedge (\sqcup\cap\text{FAM}). \quad (2.28)$$

2.3.11. Categorías bien definidas. A partir de las definiciones se puede demostrar que las categorías FAM, \cap FAM, \sqcup FAM y \top FAM están bien definidas. La demostración de que las otras categorías están bien definidas se sigue de las secciones 1.1.3 y 1.1.4.

2.3.12. Resumen de las categorías. Las categorías definidas se muestran en la siguiente figura, donde el nodo \bigcirc representa la “intersección” de categorías como se define en (1.1.4) y el nodo $\textcircled{\text{F}}$ representa la obtención de una subcategoría plena (1.1.3), donde los objetos son restringidos a los de la categoría indicada por el arco que tiene un pequeño círculo. En el diagrama se indican los capítulos en los que las subcategorías se estudian.



La siguiente tabla resume las categorías, luego se muestra el respectivo retículo conceptual (véase 3.3) generado con ToscanaJ disponible en <http://toscanaj.sourceforge.net/>.

	Objetos			Morfismos		
	cerrado para intersecciones no vacías	cerrado para uniones dirigidas	con tope	preserva intersecciones no vacías	preserva uniones dirigidas	preserva el tope
$nFAM$	X			X		
$\sqcup FAM$		X			X	
$TFAM$			X			X
$\sqcup nFAM$	X	X		X	X	
$\sqcup(n)FAM$	X	X			X	
$(T)nFAM$	X		X	X		
$T\sqcup(n)FAM$	X	X	X		X	X
$T\sqcup nFAM$	X	X	X	X	X	X
$(T)\sqcup nFAM$	X	X	X	X	X	

2.4.2. El funtor \mathbf{FO} de $\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$ a \mathbb{OCF} . El funtor \mathbf{FO} envía una $\sqcup\cap$ -familia \mathcal{M} en el operador clausura finitario C en $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, en donde

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} := \{L \in \bigcup \mathcal{M} \mid (\exists A \in \mathcal{M}) L \subseteq A\}, \quad (2.33)$$

y para todo $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

$$C_{\mathcal{M}}(A) := \bigcap \{L \in \mathcal{M} \mid A \subseteq L\}. \quad (2.34)$$

La intersección nunca es vacía por la definición de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$.

El funtor también envía un \sqcup -homomorfismo $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ en un morfismo de \mathbb{OCF} $C_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2} : \mathcal{L}_{\mathcal{M}_1} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{M}_2}$ en donde

$$C_{f_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}} = C_{\mathcal{M}_2} \circ f \circ C_{\mathcal{M}_1}. \quad (2.35)$$

Debido a que el operador clausura es idempotente entonces el morfismo entre operadores clausura es compatible con estos.

2.4.3 Proposición. *Las categorías \mathbb{OCF} y $\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$ son isomorfas.*

Demostración. $C_{f_{C_1, 2}} = C_{1, 2}$ debido a que $C_{1, 2} = C_2 \circ C_{1, 2}|_{\mathcal{M}_{C_1}} \circ C_2$ y $f_{C_f} = f$ porque $C_{\mathcal{M}_2} \circ f \circ C_{\mathcal{M}_1}|_{\mathcal{M}_1} = f$. \square

2.5. Definición de la categoría $\tau\mathbb{FAM}$ y sus subcategorías

En una $\top\sqcup\cap$ -familia de conjuntos $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ decimos que el tope está **aislado** del resto de la $\sqcup\cap$ -familia si se puede eliminar sin alterar las propiedades de clausura de la $\sqcup\cap$ -familia (i. e. ser cerrado para intersecciones no vacías y uniones dirigidas). En esta sección se muestra como las categorías con tope aislado son equivalentes a sus respectivas categorías sin tope.

2.5.1. Definición del elemento aislado. En una familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ vamos a decir que un elemento $a \in X$ está **aislado** si no pertenece a ningún otro subconjunto $L \in \mathcal{M}$ esto es

$$(\forall L \in \mathcal{M}) [a \in L \Rightarrow L = X] \quad (a \text{ es aislado}). \quad (2.36)$$

2.5.2. Definición de las τ -familias. Un objeto de la categoría $\tau\mathbb{FAM}$ es una τ -familia (**familia con tope aislado**) que corresponde a una \top -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ con un elemento aislado.

Un τ -homomorfismo o un **homomorfismo entre τ -familias** es un \top -homomorfismo ($f : \langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$) donde $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ son $\tau\sqcup\cap$ -familias y f **preserva fuertemente el tope**,

$$f(L) = X_2 \Leftrightarrow L = X_1 \quad (\text{el tope se preserva fuertemente}). \quad (2.37)$$

Se puede ver que las τ -familias con sus homomorfismos son una categoría con la composición y la identidad usual; esta categoría se denota $\tau\mathbb{FAM}$.

2.5.3 Proposición. *La categoría $\tau\mathbb{FAM}$ es una subcategoría de la categoría $\mathbb{T}\mathbb{FAM}$.*

2.5.4 Proposición. *En una $\tau\sqcup$ -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$, si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$ es una familia dirigida de subconjuntos de X y $X \notin \mathcal{D}$ entonces \mathcal{D} **no alcanza el tope**, esto es,*

$$\bigcup \mathcal{D} \neq X \quad (\mathcal{D} \text{ no alcanza el tope}). \quad (2.38)$$

*En una \cap -familia $\langle \mathcal{A}, X \rangle$, si $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{A} \neq \{X\}$ entonces $\bigcap \mathcal{A}$ **ignora el tope**, esto es*

$$\bigcap \mathcal{A} \cup \{X\} = \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A} \setminus \{X\} \quad (\bigcap \mathcal{A} \text{ ignora el tope}). \quad (2.39)$$

Demostración. \mathcal{D} no alcanza el tope debido a que ningún elemento aislado pertenece a algún conjunto $D \in \mathcal{D}$. $\bigcap \mathcal{A}$ ignora el tope porque \mathcal{A} tiene un conjunto más pequeño que X . \square

2.5.5 Proposición. *Las categorías $\tau\cap\mathbb{FAM}$, $\tau\sqcup\mathbb{FAM}$, $\tau\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$ y $\tau\sqcup\cap\mathbb{FAM}$ son subcategorías de $\tau\mathbb{FAM}$.*

Demostración. Esto se debe a las afirmaciones de las secciones 1.1.3 y 1.1.5. \square

2.6. El functor Destapar

2.6.1. Definición del functor Destapar. El functor **Destapar** va de $\tau\mathbb{FAM}$ a \mathbb{FAM} el cual retira el tope aislado de una τ -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{X\}, \quad (2.40)$$

y también los elementos aislados

$$X' = X \setminus \{x \in X \mid x \text{ es aislado}\}, \quad (2.41)$$

con el fin de obtener una familia que no requiere tope,

$$\mathbf{Destapar}(\langle \mathcal{M}, X \rangle) := \langle \mathcal{M}', X' \rangle. \quad (2.42)$$

El functor **Destapar** aplicado a un τ -homomorfismo $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ simplemente lo restringe

$$\mathbf{Destapar}(f) = f' := f|_{\mathcal{M}'_1}. \quad (2.43)$$

2.6.2 Proposición. *Si $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle$, $\langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ y $\langle \mathcal{M}_3, X_3 \rangle$ son tres τ -familias y si $f_1 : \langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ y $f_2 : \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}_3, X_3 \rangle$ son dos τ -homomorfismos entonces:*

- (I) El funtor **Destapar** está bien definido además es fiel, pleno y representativo.
- (II) **Destapar** restringido de $\tau \cap \mathbb{FAM}$ a $\cap \mathbb{FAM}$ está bien definido además es fiel, pleno y representativo.
- (III) **Destapar** restringido de $\tau \sqcup \mathbb{FAM}$ a $\sqcup \mathbb{FAM}$ está bien definido además es fiel, pleno y representativo.
- (IV) Las categorías $\tau \cap \mathbb{FAM}$ y $\sqcup \cap \mathbb{FAM}$ son equivalentes así como también $\tau \sqcup (\cap) \mathbb{FAM}$ y $\sqcup (\cap) \mathbb{FAM}$.

Demostración. (I) A partir de las definiciones se deduce que **Destapar** está bien definido y que es fiel y pleno. Para ver que es representativo es necesario construir una τ -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ desde cualquier familia $\langle \mathcal{M}', X' \rangle$. Para lo cual se necesita adicionar un elemento que no pertenezca al conjunto X' , el cual será el elemento aislado. Si se adopta el axioma de regularidad de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, se concluye que $X' \notin X'$. Por lo tanto, se puede definir X' como elemento aislado. Así, el conjunto X y la familia de conjuntos \mathcal{M} quedarán definidos de la siguiente forma:

$$X := X' \cup \{X'\}, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}' \cup \{X\}. \quad (2.45)$$

De tal forma que $\mathbf{Destapar}(\langle \mathcal{M}, X \rangle) = \langle \mathcal{M}', X' \rangle$.

- (II) Este inciso es directo de la propiedad que en las $\tau \cap$ -familia se ignora el tope (2.39).
- (III) Se deduce por la propiedad que familias dirigidas no alcanzan el tope (2.38).
- (IV) Se deduce de los incisos anteriores. □

2.7. La categoría \mathbb{CLO}

2.7.1. Definición de la categoría \mathbb{CLO} . Los objetos de la categoría \mathbb{CLO} son operadores clausura algebraicos C sobre un conjunto X , que cada uno tiene un único elemento **cercano** $c \in X$, donde el elemento cercano c satisface

$$C(\{c\}) = X \quad (c \text{ es cercano a todos}). \quad (2.46)$$

Un morfismo de \mathbb{CLO} desde C_1 sobre X_1 hasta C_2 sobre X_2 es una función continua de Scott (2.7) $C_{1,2} : \wp(X_1) \rightarrow \wp(X_2)$ tal que

$$C_{1,2} = C_2 \circ C_{1,2} \quad (C_{1,2} \text{ es compatible con } C_2), \quad (2.47)$$

$$C_{1,2} = C_{1,2} \circ C_1 \quad (C_{1,2} \text{ es compatible con } C_1), \quad (2.48)$$

y para cualquier $A \subseteq X_1$

$$C_{1,2}(A) = X_2 \Leftrightarrow C_1(A) = X_1 \quad (2.49)$$

$(C_{1,2}$ **preserva cercanos a todos**).

La identidad de un objeto de \mathbb{CLO} C_1 es el mismo objeto $C_{1,1}$. Como la composición de funciones continuas de Scott es también una función continua de Scott entonces \mathbb{CLO} es una categoría. Es más, es una subcategoría de \mathbb{OCF} (2.4).

De las definiciones se sigue el siguiente resultado.

2.7.2 Proposición. *El funtor **OF** restringido de \mathbb{CLO} en $\tau\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$ es fiel, pleno y representativo y por lo tanto las categorías \mathbb{CLO} , $\tau\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$, $\sqcup(\cap)\mathbb{FAM}$, \mathbb{OCF} y \mathbb{SISINF} son equivalentes.*

3 Funciones Polares

En este capítulo se comienza introduciendo la teoría de los contextos formales, luego se presentan algunos resultados fundamentales para construir la categoría de los enlaces.

3.1. Contextos y funciones polares

3.1.1. Definición de Contexto. Un **Contexto** es una tripla $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ donde G es un conjunto cualquiera de **sujetos**¹, M es un conjunto cualquiera de **atributos** y $R \subseteq G \times M$ es una relación binaria. Si no hay confusión, un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ será referido como R . Wille desarrolló la teoría de los conceptos formales en la década de los 80s, y publicó los fundamentos matemáticos en [GW99].

En este documento se va a usar usualmente la letra A para representar un subconjunto de G , y la letra B para representar un subconjunto de M . Las letras a, b, g y m representan elementos de los conjuntos A, B, G y M , respectivamente.

3.1.2. Imagen directa e inversa. Es bien conocido que cada relación binaria $R \subseteq G \times M$, induce las siguientes funciones llamadas imagen directa e inversa:

$$\underline{R} : \wp(G) \rightarrow \wp(M) \quad (\text{imagen directa}) \quad (3.1)$$

$$A \mapsto \underline{R}(A) := \{m \in M \mid (\exists a \in A) \text{ tq. } \langle a, m \rangle \in R\}.$$

$$\overline{R} : \wp(M) \rightarrow \wp(G) \quad (\text{imagen inversa}) \quad (3.2)$$

$$B \mapsto \overline{R}(B) := \{g \in G \mid (\exists b \in B) \text{ tq. } \langle g, b \rangle \in R\}.$$

Como las funciones son relaciones binarias entonces se puede usar esta notación también con funciones.

3.1.3. Definición de las funciones polares. Otras funciones conocidas son las funciones polares a derecha e izquierda definidas en [Bri67], llamadas también abstracción y generalización en la introducción.

$$\overrightarrow{R} : \wp(G) \rightarrow \wp(M) \quad (\text{polar derecha (p. d.)}) \quad (3.3)$$

¹En la literatura son conocidos como ‘objetos’, pero se va a usar ‘sujetos’ para evitar confusiones con los objetos de las categorías. En cualquier caso, objeto y sujeto son traducciones válidas de la palabra original en Alemán “Gegenstände”.

$$\begin{aligned}
A &\mapsto \vec{R}(A) := \{m \in M \mid (\forall a \in A) \text{ tal que } \langle a, m \rangle \in R\}, \\
\overleftarrow{R} : \wp(M) &\rightarrow \wp(G) && \textbf{(polar izquierda (p. i.))} \\
B &\mapsto \overleftarrow{R}(B) := \{g \in G \mid (\forall b \in B) \text{ tal que } \langle g, b \rangle \in R\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La teoría del Análisis de Contextos Formales (FCA por sus siglas en inglés) es una teoría relacionada con las funciones polares.

Usualmente en la literatura de los Contextos formales no se usan las flechas sino que las relaciones se escriben como superíndices, los cuales no se usaron en primer lugar porque las relaciones frecuentemente tendrán subíndices, y en segundo lugar porque la notación tradicional no diferencia una función polar derecha de una izquierda.

En [DP02, 7.22] se muestra que la polar derecha y la polar izquierda forman una conexión de Galois que invierte el orden.

$$A \subseteq \overleftarrow{R}(B) \Leftrightarrow \vec{R}(A) \supseteq B \quad \textbf{(polares derecha e izquierda son CG)}. \tag{3.5}$$

Dada una polar derecha \vec{R} o izquierda \overleftarrow{R} se puede recuperar la relación binaria R que las generó por la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
R &= \{\langle g, m \rangle \in G \times M \mid m \in \vec{R}(\{g\})\} \\
&= \{\langle g, m \rangle \in G \times M \mid g \in \overleftarrow{R}(\{m\})\} \quad \textbf{(R puede ser recuperada)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Esto permite mostrar la siguiente trivial pero útil cadena de equivalencias de relaciones binarias $R_1 \subseteq G \times M$ y $R_2 \subseteq G \times M$ arbitrarias.

$$R_1 = R_2, \tag{3.7}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2, \tag{3.8}$$

$$(\forall A \subseteq G) \vec{R}_1(A) = \vec{R}_2(A), \tag{3.9}$$

$$(\forall g \in G) \vec{R}_1(\{g\}) = \vec{R}_2(\{g\}), \tag{3.10}$$

$$\overleftarrow{R}_1 = \overleftarrow{R}_2, \tag{3.11}$$

$$(\forall B \subseteq M) \overleftarrow{R}_1(B) = \overleftarrow{R}_2(B), \tag{3.12}$$

$$(\forall m \in M) \overleftarrow{R}_1(\{m\}) = \overleftarrow{R}_2(\{m\}). \tag{3.13}$$

Se tiene que (3.7) \Rightarrow (3.8) \Rightarrow (3.9) \Rightarrow (3.10) \Rightarrow (3.7); la última implicación se sigue de (3.6). Las otras equivalencias se obtienen de manera similar.

3.1.4 Ejemplo. Sean X y Y conjuntos y sean $\mathcal{M}_X \subseteq \wp(X)$ y $\mathcal{M}_Y \subseteq \wp(Y)$ familias de subconjuntos. Se pueden definir los Contextos $\mathcal{R}_X = \langle \mathcal{M}_X, X, R_X \rangle$ y $\mathcal{R}_Y = \langle \mathcal{M}_Y, Y, R_Y \rangle$ donde $R_X \subseteq \mathcal{M}_X \times X$ y $R_Y \subseteq \mathcal{M}_Y \times Y$ coinciden con \exists .

Ahora sea $f : \wp(X) \rightarrow \wp(Y)$ cualquier función, se va a definir un Contexto $\mathcal{S} = \langle \mathcal{M}_X, Y, S \rangle$ que enlaza los Contextos \mathcal{R}_X y \mathcal{R}_Y usando (3.6),

$$S = \{ \langle L, y \rangle \in \mathcal{M}_X \times Y \mid y \in f(L) \}.$$

El siguiente ejemplo va a inspirar los nombres de las relaciones polares.

3.1.5 Ejemplo. Sea $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ un Contexto donde M_1 es un conjunto de estados emocionales de una primera persona, $M_1 = \{ \text{feliz (f), triste (t), nerviosa (n), conmovida (c)} \}$.

G_1 es un conjunto de acciones humanas, $G_1 = \{ \text{clamar (C), llorar (L), reír (R), sollozar (S)} \}$.

R_1 representa la relación entre estados emocionales y acciones, i. e., las posibles acciones tomadas a partir de un estado emocional.

Se puede representar un Contexto como una tabla donde los renglones corresponden a los sujetos en G_1 y las columnas corresponden a los atributos en M_1 . Se escribe una 'X' en la celda con coordenadas g y m si $\langle g, m \rangle \in R_1$. El nombre del renglón va a la izquierda y/o a la derecha, y el nombre de la columna abajo y/o arriba, como se muestra en la tabla.

	f	t	n	c	
C	X	X	X		C
L		X			L
R	X		X		R
S		X		X	S
\mathcal{R}_1	f	t	n	c	

Sea $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ otro Contexto donde M_2 es un conjunto de estados emocionales de una segunda persona, $M_2 = \{ \text{nerviosa (n), enojada (e), asustada (a)} \}$. G_2 es un conjunto de acciones humanas, $G_2 = \{ \text{insultar (I), temblar (T), protestar (P)} \}$. R_2 representa otra relación entre estados emocionales y acciones, i. e., las posibles acciones tomadas a partir de un estado emocional.

	n	e	a	
I	X	X		I
T	X	X	X	T
P		X		P
\mathcal{R}_2	n	e	a	

Finalmente, considere el Contexto $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$,

	f	t	n	c		n	e	a	\mathcal{S}_1
C	X	X	X		C	X		X	C
L			X		L	X			L
R	X			X	R	X			R
S			X		S		X		S
\mathcal{R}_1	f	t	n	c		n	e	a	
					I	X	X		I
					T	X	X	X	T
					P		X		P
					\mathcal{R}_2	n	e	a	

donde los sujetos son los sujetos de la primera persona, los atributos son los atributos de la segunda persona y la relación binaria S_1 representa la relación entre acciones y estados emocionales, i. e., los posibles estados emocionales generados en la segunda persona causados por algunas acciones de la primera persona.

Si la primera persona está clamando (C), la segunda persona puede estar nerviosa (n) o asustada (a). Esto se representa con la polar derecha, $\overrightarrow{S_1}(\{C\}) = \{n, a\}$. En este caso, la segunda persona muy probablemente está temblando (T), $\overleftarrow{R_2 S_1}(\{C\}) = \overleftarrow{R_2}(\{n, a\}) = \{T\}$.

Pero si la primera persona está clamando (C) y riendo (R), lo más seguro es que la segunda persona esté nerviosa (n), $\overrightarrow{S_1}(\{C, R\}) = \{n\}$. Y en este otro caso, la segunda persona puede estar temblando (T) o insultando (I), $\overleftarrow{R_2 S_1}(\{C, R\}) = \overleftarrow{R_2}(\{n\}) = \{T, I\}$.

3.2. Reflexión de funciones polares

Una función polar derecha se puede componer con una función polar izquierda, y viceversa. Para denominar estas composiciones se utilizarán nombres inspirados por el Ejemplo 3.1.5:

- La composición $\overleftarrow{R_2 S_1}$ representa cómo las expresiones de la primera persona generan expresiones en la segunda persona. La palabra **cantar** permite transportar expresiones humanas.
- La composición $\overrightarrow{S_1 R_1}$ representa cómo las emociones de la primera persona generan emociones en la segunda persona. La palabra **cantar** permite transportar emociones.

3.2.1. Definición de cantar y contar. Sean $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ dos Contextos, y sea $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ un Contexto que enlaza los Contextos \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 .

Nos vamos a referir a la composición de una polar izquierda con una polar derecha como un **cantar**,

$$\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1} \text{ o } \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{S_1} \quad (\text{cantar}), \quad (3.14)$$

(se verá en 3.3.9 que ambos cantares forman una conexión de Galois) y la composición de una polar derecha con una polar izquierda como un **contar**

$$\overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \text{ o } \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_1} \quad (\text{contar}). \quad (3.15)$$

3.2.2. Definición de la reflexión de composiciones. Como axiomáticamente no hay diferencia entre sujetos y atributos es posible intercambiarlos con el fin de obtener una sentencia dual. Dados dos Contextos $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ se define la siguiente **reflexión de composiciones** con respecto al Contexto $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$.

$$\begin{array}{l} \text{Se intercambia} \quad \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1} : \quad \wp(M_1) \xrightarrow{\overleftarrow{R_1}} \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{S_1}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{R_2}} \wp(G_2), \\ \text{con} \quad \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} : \quad \wp(G_2) \xrightarrow{\overrightarrow{R_2}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{S_1}} \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{R_1}} \wp(M_1). \end{array}$$

Concretamente,

- Se intercambian las polares izquierdas (\leftarrow) con las polares derechas (\rightarrow).
- Se intercambia la relación binaria R_1 con R_2 .
- Se intercambia el conjunto de sujetos G_1 con el conjunto de atributos M_2 .
- Se intercambia el conjunto de sujetos G_2 con el conjunto de atributos M_1 .
- Se intercambia un subconjunto de sujetos A con un subconjunto de atributos B .
- Se intercambia cada sujeto a o g con el atributo b o m , respectivamente.
- Se efectúan todas las consecuencias de estos cambios, por ejemplo en la sección 3.3 son definidos los retículos duales: retículo de comprensión \mathcal{M}_{R_1} y retículo de extensión \mathcal{G}_{R_2} , los cuales hay que intercambiar.

Se obtienen también las siguientes reflexiones de cantar y contar con respecto al Contexto $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$.

$$\begin{array}{l} \text{Se intercambia el cantar} \quad \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1} : \quad \wp(M_1) \xrightarrow{\overleftarrow{R_1}} \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{S_1}} \wp(M_2), \\ \text{con el contar} \quad \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} : \quad \wp(G_2) \xrightarrow{\overrightarrow{R_2}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{S_1}} \wp(G_1). \\ \\ \text{Se intercambia el cantar} \quad \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1} : \quad \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{S_1}} \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{R_1}} \wp(M_1), \end{array}$$

con el contar $\overleftarrow{R_2 S_1} : \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{S_1}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{R_2}} \wp(G_2).$

Esta dualidad va a ayudar a transformar una prueba en la prueba dual. Por ejemplo,

$$\overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_2} \left(\bigcup_{a \in A} (\overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) \right),$$

usada en la prueba del Teorema 3.4.1 es reflejada sobre \mathcal{S}_1 en

$$\overleftarrow{R_1} \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1} \left(\bigcup_{b \in B} (\overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1}(\{b\})) \right).$$

En algunos casos se usarán los Contextos $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle G_2, M_3, S_2 \rangle$ reflejados con respecto al Contexto $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$. En este caso se intercambia

$$\overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2} : \wp(M_3) \xrightarrow{\overleftarrow{S_2}} \wp(G_2) \xrightarrow{\overrightarrow{R_2}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{S_1}} \wp(G_1),$$

con

$$\overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} : \wp(G_1) \xrightarrow{\overrightarrow{S_1}} \wp(M_2) \xrightarrow{\overleftarrow{R_2}} \wp(G_2) \xrightarrow{\overrightarrow{S_2}} \wp(M_3).$$

3.2.3. Definición de cantonear y contonear. Hay un caso especial de las composiciones cantar y contar, cuando los tres Contextos $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ y \mathcal{S}_1 son el mismo Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$. Como se usará frecuentemente se introduce una terminología y una notación especial para estas composiciones.

$$\overleftrightarrow{R} := \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} \quad (\text{cantonear}), \quad (3.16)$$

$$\overleftarrow{\overleftrightarrow{R}} := \overleftarrow{R} \overrightarrow{R} \quad (\text{contonear}). \quad (3.17)$$

En este caso especial, la reflexión con respecto a \mathcal{R} se reduce a lo siguiente:

- Se intercambian las polares izquierdas con las polares derechas.
- Se intercambia el conjunto de sujetos G con el conjunto de atributos M .
- Se intercambia un subconjunto de sujetos A con un subconjunto de atributos B .
- Se intercambia cada sujeto a o g con el atributo b o m , respectivamente.
- Se intercambian todas las consecuencias de estos cambios.

A continuación se ilustra esta dualidad.

3.2.4. Algunas propiedades de las funciones polares. Las siguientes propiedades, mencionadas en [DP02, 3.5], se siguen del hecho que \overrightarrow{R} y \overleftarrow{R} son una conexión de Galois (3.5). Sean $A, A', A_j \subseteq G$ y $B, B', B_j \subseteq M$ para $j \in J$.

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} \overrightarrow{R} \quad (\text{dos p. d. ganan a una p. i.}), \quad (3.18)$$

$$\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R} \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} \quad (\text{dos p. i. ganan a una p. d.}),$$

$$\overrightarrow{R}\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} \overrightarrow{R}(A_j) \quad (\text{p. d. hala } \cup \text{ como } \cap), \quad (3.19)$$

$$\overleftarrow{R}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} \overleftarrow{R}(B_j) \quad (\text{p. i. hala } \cup \text{ como } \cap),$$

$$A \subseteq A' \Rightarrow \overrightarrow{R}(A) \supseteq \overrightarrow{R}(A') \quad (\text{p. d. invierte el orden}), \quad (3.20)$$

$$B \subseteq B' \Rightarrow \overleftarrow{R}(B) \supseteq \overleftarrow{R}(B') \quad (\text{p. i. invierte el orden}),$$

$$A \subseteq A' \Rightarrow \overleftrightarrow{R}(A) \subseteq \overleftrightarrow{R}(A') \quad (\text{contonear preserva el orden}), \quad (3.21)$$

$$B \subseteq B' \Rightarrow \overleftrightarrow{R}(B) \subseteq \overleftrightarrow{R}(B') \quad (\text{cantonear preserva el orden}),$$

$$A \subseteq \overleftrightarrow{R}(A) \quad (\text{cantonear es expansivo}), \quad (3.22)$$

$$B \subseteq \overleftarrow{R}(B) \quad (\text{contonear es expansivo}).$$

Se aprecia que el cantonear y el contonear son operadores clausura. También se sigue, de manera directa, las siguientes propiedades que se usarán más adelante. Sea $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ un Contexto y supóngase que $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$, entonces

$$\overrightarrow{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \overrightarrow{R}(\{a\}) \quad \text{por (3.19),} \quad (3.23)$$

$$a \in \overleftarrow{R}(B) \Leftrightarrow B \subseteq \overrightarrow{R}(\{a\}) \text{ y } a \in G \quad \text{por (3.5).} \quad (3.24)$$

También se tienen las correspondientes sentencias duales dadas por la reflexión.

3.3. Retículos de comprensión y extensión

Como se muestra en [GW99], si en un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$, un conjunto de sujetos $A \subseteq G$ es un punto fijo de un contonear de R entonces A se llama una **extensión** de \mathcal{R} . Dualmente, si un conjunto de atributos $B \subseteq M$ es un punto fijo de un cantonear de R entonces B se llama una **comprensión** de \mathcal{R} . En el ejemplo 3.1.5, una comprensión de cualquiera de las personas es un conjunto de estados emocionales, y una extensión es

un conjunto de acciones. Por esta definición y por la Propiedad 3.18 se tiene la siguiente equivalencia para cualquier $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$:

$$A \text{ es extensión} \Leftrightarrow A = \overleftarrow{R}(A) \quad (\text{extensión ignora contonear}), \quad (3.25)$$

$$B \text{ es comprensión} \Leftrightarrow B = \overrightarrow{R}(B) \quad (\text{comprensión ignora cantonear}), \quad (3.26)$$

$$[A = \overleftarrow{R}(A) \text{ y } B = \overrightarrow{R}(B)] \Leftrightarrow [B = \overrightarrow{R}(B) \text{ y } A = \overleftarrow{R}(A)]. \quad (3.27)$$

En (3.27) se relaciona una extensión A con su dual, una comprensión B . La pareja $\langle A, B \rangle$ que satisface ambos lados de la equivalencia (3.27) es llamada un **concepto** de \mathcal{R} .

La familia de todas las comprensiones \mathcal{M}_R de un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es una $\top\cap$ -familia (y por lo tanto un retículo completo) [DP02, 3.6], llamado el **retículo de comprensión**. Este se puede definir de tres formas:

$$\mathcal{M}_R := \{B \subseteq M \mid B = \overrightarrow{R}(B)\} \quad (3.28)$$

$$= \{\overrightarrow{R}(B) \mid B \subseteq M\} \quad (3.29)$$

$$= \{\overleftarrow{R}(A) \mid A \subseteq G\} \quad (\text{retículo de comprensión}). \quad (3.30)$$

Es fácil de ver que el conjunto (3.28) está incluido en el conjunto (3.29). Al mismo tiempo, el conjunto (3.29) está incluido en el conjunto (3.30). Para ver que el conjunto (3.30) está incluido en el conjunto (3.28) es suficiente hacer $B = \overrightarrow{R}(A)$ y aplicar la propiedad que dos polares derechas ganan a una polar izquierda (3.18).

Dualmente, la $\top\cap$ -familia construida por todas las extensiones de un Contexto \mathcal{R} es un retículo completo llamado el **retículo de extensión** y se denota por \mathcal{G}_R .

$$\mathcal{G}_R := \{A \subseteq G \mid A = \overleftarrow{R}(A)\} \quad (3.31)$$

$$= \{\overleftarrow{R}(A) \mid A \subseteq G\} \quad (3.32)$$

$$= \{\overrightarrow{R}(B) \mid B \subseteq M\} \quad (\text{retículo de extensión}). \quad (3.33)$$

Los retículos de extensión y de comprensión son antiisomorfos. En la literatura se conoce más el **retículo conceptual** formado por todos los conceptos ordenados por la contención de las extensiones.

El retículo de extensión y comprensión permiten caracterizar el cantonear y el contonear, aplicando (3.23) y (3.24) a (3.30). (Vease también (2.14) o (5.4)). Por lo tanto, se tiene para todo $A \subseteq G$ y $B \subseteq M$,

$$\overrightarrow{R}(B) = \bigcap \{L \in \mathcal{M}_R \mid B \subseteq L\}, \quad (3.34)$$

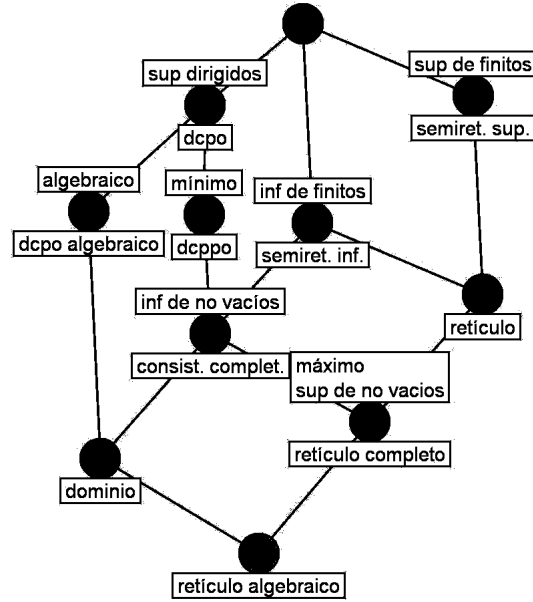
$$\overleftarrow{R}(A) = \bigcap \{L \in \mathcal{G}_R \mid A \subseteq L\}. \quad (3.35)$$

3.3.1. Ejemplo con conjuntos ordenados.

Considérese el Contexto de estructuras ordenadas presentado en la siguiente tabla (para las definiciones pertinentes puede consultar [DP02] y [AJ94]). Los sujetos son conjuntos ordenados estudiados frecuentemente en la literatura, y los atributos son algunas de sus propiedades más elementales.

Se presenta luego el retículo conceptual correspondiente el cual fue generado usando el programa ToscanaJ.

	mínimo	máximo	sup finito	inf finito	sup no vacío	inf no vacío	algebricidad	sup dirigidos
Semiretículo de sups			x					
Semiretículo de infs				x				
Retículo			x	x				
Retículo completo	x	x	x	x	x	x		x
Retículo algebraico	x	x	x	x	x	x	x	x
dcpo								x
dcpo algebraico							x	x
dcppo	x							x
Semiretículo completo	x			x		x		x
Dominio	x			x		x	x	x



A continuación se presentan cuatro diferentes contextos inspirados en los ejemplos 1.2.4, 1.2.5 y 1.2.6.

3.3.2. Ejemplo de un Contexto de cadenas binarias. Sea $\mathcal{R}_\Sigma = \langle G_\Sigma, M_\Sigma, R_\Sigma \rangle$ en donde:

- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $G_\Sigma = \Sigma^{**} \setminus \Sigma^*$. El conjunto de todas las cadenas infinitas de ceros y unos. Una cadena infinita se representa por $(d_0d_1\dots)$ en donde $d_i \in \{0, 1\}$ con $i \in \mathbb{N}$.
- $M_\Sigma = \Sigma^*$. El conjunto de todas las cadenas finitas de ceros y unos. Una cadena finita se representa por $(c_0c_1\dots c_n)$ en donde $c_i \in \{0, 1\}$ con $i = 0 \dots n$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\langle (d_0d_1\dots), (c_0c_1\dots c_n) \rangle \in R_\Sigma \Leftrightarrow (c_i = d_i, i = 0 \dots n)$.

Una comprensión consiste en los prefijos de una determinada cadena. El retículo de comprensión sin el tope es isomorfo a Σ^{**} , el conjunto de todas las cadenas de ceros y unos, ordenadas por prefijos.

3.3.3. Ejemplo de un Contexto de funciones sobre \mathbb{N} . Sea $\mathcal{R}_f = \langle G_f, M_f, R_f \rangle$ en donde:

- $G_f = (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\})$ = el conjunto de todas las funciones de \mathbb{N} que van a cero o a uno. Una función se representa con f .

- $M_f = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. El conjunto de todas las parejas ordenadas donde la primera componente es un número natural y la segunda componente es cero o uno. Una pareja ordenada se representa con $\langle a, b \rangle$.
- $\langle f, \langle a, b \rangle \rangle \in R_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Una comprensión es el grafo de una función parcial. El retículo de comprensión sin el tope es isomorfo a $(\mathbb{N} \xrightarrow{\circ} \{0, 1\})$, el conjunto de todas las funciones parciales de \mathbb{N} en $\{0, 1\}$, ordenadas por contención de grafos.

3.3.4. Ejemplo de un Contexto de intervalos racionales. Sea $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}} = \langle G_{\mathbb{Q}}, M_{\mathbb{Q}}, R_{\mathbb{Q}} \rangle$ en donde:

- $G_{\mathbb{Q}} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales entre 0 y 1 inclusive. Un número racional se representa con la letra q o en binario como una cadena infinita $0.z_0z_1\dots$ donde $z_i \in \{0, 1\}$.
- $M_{\mathbb{Q}} = \{(p, r) \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q} \mid p, r \in \mathbb{Q} \text{ y } p \leq r\}$. El conjunto de los intervalos abiertos de números racionales entre cero y uno. Un intervalo se representa con (p, r) .
- $\langle q, (p, r) \rangle \in R_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow q \in (p, r)$.

Una comprensión consiste en todos los intervalos de $M_{\mathbb{Q}}$ que contienen un determinado intervalo. El retículo de comprensión es anti-isomorfo a un conjunto de intervalos entre cero y uno ordenados por contención.

3.3.5. Ejemplo de un Contexto de subconjuntos de números naturales. Sea $\mathcal{R}_{\mathbb{N}} = \langle G_{\mathbb{N}}, M_{\mathbb{N}}, R_{\mathbb{N}} \rangle$ en donde:

- $G_{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. El conjunto de los números naturales. Un número natural se representa con j .
- $M_{\mathbb{N}} = \wp(\mathbb{N})$. La familia de subconjuntos de números naturales. Un conjunto de números naturales se representa con A .
- $\langle j, A \rangle \in R_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow j \in A$.

Cada conjunto de naturales es una comprensión y el retículo de comprensión es $\wp(\mathbb{N})$.

3.3.6. Ejemplos de Contextos que enlazan el Contexto de las cadenas binarias con los otros Contextos. Antes de definir los nuevos Contextos vamos a resumir los anteriores

en la siguiente tabla.

Ejem	G	M	R
\mathcal{R}_Σ 3.3.2	$\Sigma^{**} \setminus \Sigma^*$ $(d_0 d_1 \dots)$	Σ^* $(c_0 c_1 \dots c_n)$	$\langle (d_1 d_2 \dots), (c_0 c_1 \dots c_n) \rangle \in R_\Sigma$ $\Leftrightarrow (c_i = d_i, i = 0, \dots, n)$
\mathcal{R}_f 3.3.3	$(\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\})$ f	$\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ $\langle a, b \rangle$	$\langle f, \langle a, b \rangle \rangle \in R_f$ $\Leftrightarrow f(a) = b$
$\mathcal{R}_\mathbb{Q}$ 3.3.4	$[0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$ $q = 0.z_0 z_1 \dots$	$\{(p, r) p, r \in G_\mathbb{Q}\}$ (p, r)	$\langle q, (p, r) \rangle \in R_\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow q \in (p, r)$
$\mathcal{R}_\mathbb{N}$ 3.3.5	\mathbb{N} j	$\wp(\mathbb{N})$ A	$\langle j, A \rangle \in R_\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow A \in j$

En la primera columna de la siguiente tabla están los conceptos que usan los sujetos o atributos definidos en los anteriores ejemplos, en la segunda columna se definen las relaciones binarias en función de un objeto o un atributo definido en el ejemplo correspondiente.

$\langle G_f, M_\Sigma, S_{f\Sigma} \rangle$	$\langle f, (c_0 c_1 \dots c_n) \rangle \in S_{f\Sigma} \Leftrightarrow f(i) = c_i, i = 0 \dots n$
$\langle G_\mathbb{Q}, M_\Sigma, S_{\mathbb{Q}\Sigma} \rangle$	$\langle 0.z_0 z_1 \dots, (c_0 c_1 \dots c_n) \rangle \in S_{\mathbb{Q}\Sigma} \Leftrightarrow z_i = c_i, i=0 \dots n$
$\langle G_\mathbb{N}, M_\Sigma, S_{\mathbb{N}\Sigma} \rangle$	$\langle j, (c_0 c_1 \dots c_n) \rangle \in S_{\mathbb{N}\Sigma} \Leftrightarrow j \leq n$ y $c_j = 1$
$\langle G_\Sigma, M_f, S_{\Sigma f} \rangle$	$\langle (d_0 d_1 \dots), \langle a, b \rangle \rangle \in S_{\Sigma f} \Leftrightarrow d_a = b$
$\langle G_\Sigma, M_\mathbb{Q}, S_{\Sigma\mathbb{Q}} \rangle$	$\langle (d_0 d_1 \dots), (p, r) \rangle \in S_{\Sigma\mathbb{Q}} \Leftrightarrow 0.d_0 d_1 \dots \in (p, r)$
$\langle G_\Sigma, M_\mathbb{N}, S_{\Sigma\mathbb{N}} \rangle$	$\langle (d_0 d_1 \dots), A \rangle \in S_{\Sigma\mathbb{N}} \Leftrightarrow i \in A \leftrightarrow d_i = 1, i \in \mathbb{N}$

Estos ejemplos serán desarrollados en las siguientes secciones: 3.4.3, 4.1.2, 4.1.4, 5.1.3, 6.1.2, 7.1.2 y 7.1.3.

3.3.7. Propiedades de los contextos. Cuando dos Contextos tienen el mismo retículo de comprensión, también tienen otras propiedades en común, que serán útiles para mostrar la equivalencia de categorías en la proposición 5.2.3.

3.3.8 Proposición. Sean $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ dos Contextos con $M_1 = M_2 = M$. Entonces, las siguientes sentencias son equivalentes.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}_2}, \quad (\text{i})$$

$$\overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2}, \quad (\text{ii})$$

$$\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_1} \text{ y } \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{R_2}. \quad (\text{iii})$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Suponga que $B \subseteq M$,

$$\overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1}(B) = \bigcap \{L \in \mathcal{M}_{R_1} \mid B \subseteq L\} \quad \text{por (3.34),}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap \{L \in \mathcal{M}_{R_2} \mid B \subseteq L\} && \text{por hipótesis,} \\
&= \overrightarrow{\overleftarrow{R_2} R_2}(B) && \text{por (3.34).}
\end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overleftarrow{R_2} R_2} \overrightarrow{R_1} &= \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1} && \text{por hipótesis y (3.18),} \\
\overrightarrow{R_1} \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{R_2} &= \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{R_2} && \text{por hipótesis y (3.18).}
\end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i).

$$\begin{aligned}
L \in \mathcal{M}_{R_1} &\Rightarrow (\exists A_1 \subseteq G_1) L = \overrightarrow{R_1}(A_1) && \text{por (3.30),} \\
&\Rightarrow (\exists A_1 \subseteq G_1) L = \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_1}(A_1) && \text{por hipótesis,} \\
&\Rightarrow (\exists A_2 \subseteq G_2) L = \overrightarrow{R_2}(A_2) && \text{haciendo } A_2 = \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_1}(A_1), \\
&\Rightarrow L \in \mathcal{M}_{R_2} && \text{por (3.30).}
\end{aligned}$$

Se probó que $\mathcal{M}_{R_1} \subseteq \mathcal{M}_{R_2}$. Pero como \mathcal{M}_{R_1} y \mathcal{M}_{R_2} son arbitrarios, entonces se puede concluir que $\mathcal{M}_{R_1} = \mathcal{M}_{R_2}$. \square

Para todas estas propiedades se puede obtener una propiedad dual, pero sólo se mencionará cuando se necesite. La siguiente proposición muestra que cantar es una conexión de Galois entre dos retículos de comprensión.

3.3.9 Proposición. Sean $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ dos Contextos, se tiene que $\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}$ es la adjunta derecha de una conexión de Galois que preserva el orden entre las comprensiones de \mathcal{R}_1 y las comprensiones de \mathcal{S}_1 . Más aún $\overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1}$ es la adjunta izquierda.

Demostración. Sean $B_1 \in \mathcal{M}_{R_1}$ y $B_2 \in \mathcal{M}_{S_1}$ comprensiones de \mathcal{R}_1 y \mathcal{S}_1 respectivamente.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(B_1) \supseteq B_2 \\
\Leftrightarrow &\overleftarrow{R_1}(B_1) \subseteq \overleftarrow{S_1}(B_2) && \overrightarrow{S_1} \text{ es CG (3.5),} \\
\Leftrightarrow &\overleftarrow{R_1}(B_1) \supseteq \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1}(B_2) && \overrightarrow{R_1} \text{ invierte el orden (3.20),} \\
\Leftrightarrow &B_1 \supseteq \overrightarrow{R_1} \overleftarrow{S_1}(B_2) && B_1 \text{ ignora cantonear (3.26).} \quad \square
\end{aligned}$$

Usando la reflexión sobre S_1 se puede obtener una proposición que permite concluir que contares de 3.15 forman una conexión de Galois entre los retículos de extensión.

3.4. Ignorando cantonear y contonear

Así como se necesita que la comprensión ignore cantonear para probar que la composición de dos polares forman una conexión de Galois (proposición 3.3.9), también se va a necesitar que

un Contexto ignore cantonear para probar que la composición de tres polares es una conexión de Galois (4.10). Pero primero se necesita definir cómo un Contexto $\mathcal{S}_1 = \langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ ignora el cantonear del Contexto $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$. Se pueden considerar cuatro diferentes formas de ignorar un cantonear:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1(\{g\}) &= \overleftarrow{R_2} \vec{S}_1(\{g\}) && \text{para todo } g \in G_1, \\ \vec{S}_1 &= \overleftarrow{R_2} \vec{S}_1, \\ \overleftarrow{S}_1 &= \overleftarrow{S}_1 \overleftarrow{R_2}, \\ \overleftarrow{S}_1(\{m\}) &= \overleftarrow{S}_1 \overleftarrow{R_2}(\{m\}) && \text{para todo } m \in M_2. \end{aligned}$$

Podría parecer sorprendente que las primeras tres sentencias son equivalentes entre sí, pero la última no lo es, como se puede observar en el contraejemplo 3.4.2. El siguiente teorema va a permitir encontrar una caracterización más conveniente para los enlaces (vea la sección 4.1).

3.4.1 Teorema (Ignorando cantonear o cantonear). *Si $\langle G_1, M_1, R_1 \rangle$, $\langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ y $\langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ son Contextos. Las siguientes tres igualdades son equivalentes entre sí.*

$$\vec{S}_1(\{g\}) = \overleftarrow{R_2} \vec{S}_1(\{g\}) \quad \text{para todo } g \in G_1, \tag{i}$$

$$\vec{S}_1 = \overleftarrow{R_2} \vec{S}_1 \quad (S_1 \text{ ignora cantonear}), \tag{ii}$$

$$\overleftarrow{S}_1 = \overleftarrow{S}_1 \overleftarrow{R_2}. \tag{iii}$$

Dualmente, las siguientes igualdades son equivalentes entre sí.

$$\overleftarrow{S}_1(\{m\}) = \overleftarrow{R_1} \overleftarrow{S}_1(\{m\}) \quad \text{para todo } m \in M_2, \tag{iv}$$

$$\overleftarrow{S}_1 = \overleftarrow{R_1} \overleftarrow{S}_1, \tag{v}$$

$$\overleftarrow{S}_1 = \overleftarrow{S}_1 \overleftarrow{R_1} \quad (S_1 \text{ ignora cantonear}). \tag{vi}$$

Es sorprendentemente sencilla de entender esta demostración y no refleja para nada el trabajo que requirió encontrar esta relación. De hecho fue casi al final de este trabajo que se encontró que los axiomas con que se habían trabajado eran equivalentes a los del enlace y por lo tanto fue necesario reescribir prácticamente todo el documento unificando la notación con la de los enlaces.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Para todo $A \subseteq G_1$

$$\vec{S}_1(A) = \bigcap_{a \in A} \vec{S}_1(\{a\}) \quad \vec{S}_1 \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) && \text{por hipótesis,} \\
&= \overrightarrow{R_2} \left(\bigcup_{a \in A} (\overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) \right) && \overrightarrow{R_2} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\
&= \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{R_2} \left(\bigcup_{a \in A} (\overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) \right) && \overrightarrow{R_2} \text{ doble gana (3.18),} \\
&= \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \left(\bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) \right) && \overrightarrow{R_2} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\
&= \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \left(\bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{S_1}(\{a\})) \right) && \text{por hipótesis,} \\
&= \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) && \overrightarrow{S_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19).}
\end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Es evidente.

(ii) \Rightarrow (iii) Suponga que $A \subseteq G_1$ y $B \subseteq M_2$

$$\begin{aligned}
A \subseteq \overleftarrow{S_1}(B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{S_1}(A) \supseteq B && S_1 \text{ es CG (3.5),} \\
&\Leftrightarrow \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) \supseteq B && \text{por hipótesis,} \\
&\Leftrightarrow \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) \subseteq \overleftarrow{R_2}(B) && R_2 \text{ es CG (3.5),} \\
&\Leftrightarrow \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) \supseteq \overleftarrow{R_2}(B) && R_2 \text{ invierte el orden (3.20),} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{S_1}(A) \supseteq \overleftarrow{R_2}(B) && \text{por hipótesis,} \\
&\Leftrightarrow A \subseteq \overleftarrow{S_1} \overleftarrow{R_2}(B) && S_1 \text{ es CG (3.5).}
\end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (ii)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S_1} &= \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{S_1} && \overrightarrow{S_1} \text{ doble gana (3.18),} \\
&= \overrightarrow{S_1} (\overleftarrow{S_1} \overleftarrow{R_2} \overleftarrow{R_2}) \overrightarrow{S_1} && \text{por hipótesis,} \\
&= (\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{S_1}) \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \text{composición es asociativa,} \\
&\supseteq \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \overleftarrow{S_1} \text{ es expansiva (3.22),} \\
&\supseteq \overrightarrow{S_1} && \overleftarrow{R_2} \text{ es expansiva (3.22).}
\end{aligned}$$

La segunda parte se sigue de la primera reflejando sobre S_1 . □

3.4.2 Ejemplo. En la tabla

	m_1^1	m_1^2	m_1^3		m_2^1	m_2^2	m_2^3	m_2^4	\mathcal{S}
g_1^3	X	X		g_1^3	X	X		X	g_1^3
g_1^2	X		X	g_1^2	X		X	X	g_1^2
g_1^1	X			g_1^1	X				g_1^1
\mathcal{R}_1	m_1^1	m_1^2	m_1^3		m_2^1	m_2^2	m_2^3	m_2^4	
				g_2^3	X	X		X	g_2^3
				g_2^2	X		X	X	g_2^2
				g_2^1	X				g_2^1
				\mathcal{R}_2	m_2^1	m_2^2	m_2^3	m_2^4	

se muestran tres relaciones binarias que no satisfacen (vi) del Teorema 3.4.1.

$$\vec{S}(\{g_1^2, g_1^3\}) = \{m_2^1, m_2^4\} \neq \{m_2^4\} = \vec{S} \overleftarrow{R}_1(\{g_1^2, g_1^3\}),$$

pero para todo $g \in G_1$, $\vec{S}(\{g\}) = \vec{S}_1 \overleftarrow{R}_1(\{g\})$, se mantiene porque

$$\vec{S}(\{g_1^1\}) = \{m_2^1\} = \vec{S} \overleftarrow{R}(\{g_1^1\}),$$

$$\vec{S}(\{g_1^2\}) = \{m_2^1, m_2^3, m_2^4\} = \vec{S} \overleftarrow{R}(\{g_1^2\}),$$

$$\vec{S}(\{g_1^3\}) = \{m_2^1, m_2^2, m_2^4\} = \vec{S} \overleftarrow{R}(\{g_1^3\}).$$

3.4.3. Ejemplos. La siguiente tabla retoma los ejemplos 3.3.6 e indica cuáles ignoran contonear y cuáles cantonear.

Contexto 1	Contexto 2	Rel Bin	Ig. contonear	Ig. cantonear
\mathcal{R}_Σ	\mathcal{R}_f	$S_{\Sigma f}$	No	Sí
\mathcal{R}_Σ	$\mathcal{R}_\mathbb{Q}$	$S_{\Sigma\mathbb{Q}}$	Sí	Sí
\mathcal{R}_Σ	$\mathcal{R}_\mathbb{N}$	$S_{\Sigma\mathbb{N}}$	Sí	No
\mathcal{R}_f	\mathcal{R}_Σ	$S_{f\Sigma}$	Sí	Sí
$\mathcal{R}_\mathbb{Q}$	\mathcal{R}_Σ	$S_{\mathbb{Q}\Sigma}$	Sí	Sí
$\mathcal{R}_\mathbb{N}$	\mathcal{R}_Σ	$S_{\mathbb{N}\Sigma}$	Sí	No

Una de las propiedades más importantes que deben cumplir el cantar y el contar es preservar las intersecciones; se verá que esto se obtiene si se ignoran el contonear y el cantonear, respectivamente.

3.4.4. Cantonear y contonear preservan intersecciones. Para los siguientes tres Contextos $\langle G_1, M_1, R_1 \rangle$, $\langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ y $\langle G_1, M_2, S_1 \rangle$ se tiene que

- si \mathcal{S}_1 ignora cantonear (i. e. satisface (iv), (v), (vi) del Teorema 3.4.1)) y \mathcal{B} es una familia no vacía de comprensiones de \mathcal{R}_1 , entonces

$$\overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} (B) \right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \left(\overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} (B) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \mathcal{S}_1 \text{ preserva } \cap \\ \text{de comprensiones} \end{array} \right). \quad (3.36)$$

- si \mathcal{S}_1 ignora cantonear (i. e. satisface (i), (ii), (iii) del Teorema 3.4.1) y \mathcal{A} es una familia no vacía de extensiones de \mathcal{R}_1 , entonces

$$\overleftarrow{\mathcal{S}_1} \overrightarrow{\mathcal{R}_2} \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A) \right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \left(\overleftarrow{\mathcal{S}_1} \overrightarrow{\mathcal{R}_2} (A) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \mathcal{S}_1 \text{ preserva } \cap \\ \text{de extensiones} \end{array} \right). \quad (3.37)$$

(3.36) se debe a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} (B) \right) &= \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} (\overrightarrow{\mathcal{R}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} (B)) \right) && (\forall B \in \mathcal{B}) B = \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \overrightarrow{\mathcal{R}_1} (B) \quad (3.29), \\ &= \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \overrightarrow{\mathcal{R}_1} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} (\overleftarrow{\mathcal{R}_1} (B)) \right) && \overrightarrow{\mathcal{R}_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \quad (3.19), \\ &= \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} (\overleftarrow{\mathcal{R}_1} (B)) \right) && \text{por hipótesis,} \\ &= \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \left(\overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} (B) \right) && \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \quad (3.19). \end{aligned}$$

(3.37) se prueba reflejando sobre \mathcal{S}_1 .

4 La Categoría BOND

Basado en los resultados del capítulo anterior se construye la categoría de los enlaces y se compara con la categoría de los espacios de Chu.

4.1. Enlaces

En [GW99, Def. 69] se definen los enlaces. En esta definición el mismo símbolo puede estar refiriéndose a funciones polares diferentes, por lo que puede requerir un esfuerzo adicional distinguir a qué función polar se refiere cada símbolo. Por esta razón en este documento vamos a trabajar las funciones polares de un enlace de igual manera que se trabajan las funciones polares de un Contexto. Con nuestra notación la definición de enlace es la siguiente.

4.1.1. Definición de enlace. Un **enlace** se define como una tripla $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ donde $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ son Contextos, y $S_1 \subseteq G_1 \times M_2$ es una relación binaria tal que

- $\vec{S}_1(\{g\})$ es una comprensión para todo $g \in G_1$,
- $\overleftarrow{S}_1(\{m\})$ es una extensión para todo $m \in G_1$.

Cada uno de estos dos axiomas son equivalentes a cada uno de los siguientes axiomas, respectivamente.

- $\vec{S}_1(\{g\}) = \overleftarrow{R}_2 \vec{S}_1(\{g\})$ para todo $g \in G_1$,
- $\overleftarrow{S}_1(\{m\}) = \overrightarrow{R}_1 \overleftarrow{S}_1(\{m\})$ para todo $m \in G_1$.

Estos axiomas coinciden con las definiciones de ignorar cantonear y contonear. Ahora podemos escoger entre las diferentes posibilidades dadas por el Teorema 3.4.1. Para la definición de enlace vamos a usar los axiomas

$$\vec{S}_1 = \overleftarrow{R}_2 \vec{S}_1 \quad (S_1 \text{ ignora cantonear}), \quad (4.1)$$

$$\vec{S}_1 = \overrightarrow{S}_1 \overleftarrow{R}_1 \quad (S_1 \text{ ignora contonear}), \quad (4.2)$$

ya que con estos axiomas podemos satisfacer de manera inmediata los axiomas de las identidades de una categoría (1.3). Al parecer la falta de estos axiomas es, a mi entender, la razón para que no se haya definido previamente en la literatura la categoría \mathbb{BOND} . Disponer de esta categoría permite relacionarla con otras categorías existentes. Se mostrará que la categoría \mathbb{BOND} es equivalente a una cierta categoría de interestructuras (ver Capítulo 5).

Si no hay confusión, un enlace $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ será referido simplemente como S_1 .

4.1.2 Ejemplo. De acuerdo con la tabla del ejemplo 3.4.3, se tiene que las siguientes triplas $\mathcal{S}_{f\Sigma} = \langle \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_\Sigma, S_{f\Sigma} \rangle$, $\mathcal{S}_{\Sigma\mathbb{Q}} = \langle \mathcal{R}_\Sigma, \mathcal{R}_\mathbb{Q}, S_{\Sigma\mathbb{Q}} \rangle$ y $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}\Sigma} = \langle \mathcal{R}_\mathbb{Q}, \mathcal{R}_\Sigma, S_{\mathbb{Q}\Sigma} \rangle$ son enlaces.

4.1.3. La categoría \mathbb{BOND} . En la categoría \mathbb{BOND} los objetos son Contextos y los morfismos son enlaces. La composición de enlaces se define como en [GW99, prop. 84].

$$\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle \square \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle := \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3, S_2 \overset{R_2}{\square} S_1 \rangle, \quad (4.3)$$

donde $S_2 \overset{R_2}{\square} S_1$ es la **composición de relaciones binarias** S_1 y S_2 a través de R_2 definida como

$$S_2 \overset{R_2}{\square} S_1 := \{ \langle g, m \rangle \in G_1 \times M_3 \mid m \in \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{g\}) \}. \quad (4.4)$$

Si R_2 es implícito, la composición $S_2 \overset{R_2}{\square} S_1$ será denotada como $S_2 \square S_1$. Si no hay confusión, la composición $\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle \square \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ será también denotada como $S_2 \square S_1$.

El **enlace identidad** de un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es definido como el enlace

$$id_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle. \quad (4.5)$$

Si no hay confusión, un enlace identidad $id_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle$ puede ser denotado como R .

4.1.4 Ejemplo. Al componer los enlaces $\mathcal{S}_{f\Sigma} = \langle \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_\Sigma, S_{f\Sigma} \rangle$ y $\mathcal{S}_{\Sigma\mathbb{Q}} = \langle \mathcal{R}_\Sigma, \mathcal{R}_\mathbb{Q}, S_{\Sigma\mathbb{Q}} \rangle$, del Ejemplo 4.1.2, se obtiene el enlace $\mathcal{S}_{f\mathbb{Q}} = \langle \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_\mathbb{Q}, S_{f\mathbb{Q}} \rangle$ en donde $[\langle f, (p, q) \rangle \in S_{f\mathbb{Q}}] \Leftrightarrow [0.f(0)f(1)f(2)\dots \in (p, q)]$.

Antes de probar que la categoría \mathbb{BOND} está bien definida, se necesita el siguiente resultado.

4.1.5 Teorema (Caracterización de la composición de enlaces). *Para cualquier par de enlaces $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ se tiene que*

$$\overrightarrow{S_2 \square S_1}(\{a\}) = \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\}) \quad \text{para todo sujeto } a \text{ en } \mathcal{R}_1, \quad (4.6)$$

$$\overleftarrow{S_2 \square S_1}(\{b\}) = \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2}(\{b\}) \quad \text{para todo atributo } b \text{ en } \mathcal{R}_3, \quad (4.7)$$

$$\overrightarrow{S_2 \square S_1} = \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}, \quad (4.8)$$

$$\overleftarrow{S_2 \square S_1} = \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2}. \quad (4.9)$$

Demostración. Prueba de (4.6). Es directo de las definiciones de composición (4.4) y función polar derecha (3.3).

Prueba de (4.7). Sea a un sujeto de R_1 y b un atributo de R_3 .

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{S_2} \square \overleftarrow{S_1}(\{b\}) \ni a & \\
\Leftrightarrow b \in \overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1}(\{a\}) & \quad \overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1} \text{ es CG (3.5),} \\
\Leftrightarrow b \in \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\}) & \quad \text{por (4.6),} \\
\Leftrightarrow \overleftarrow{S_2}(\{b\}) \supseteq \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\}) & \quad \overrightarrow{S_2} \text{ es CG (3.5),} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2}(\{b\}) \subseteq \overrightarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\}) & \quad \overrightarrow{R_2} \text{ invierte el orden (3.20),} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2}(\{b\}) \subseteq \overrightarrow{S_1}(\{a\}) & \quad \overrightarrow{S_1} \text{ ignora cantonear (4.1),} \\
\Leftrightarrow \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2}(\{b\}) \ni a & \quad \overrightarrow{S_1} \text{ es CG (3.5).}
\end{aligned}$$

Prueba de (4.8). Sea A cualquier subconjunto de sujetos de R_1 .

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) &= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\bigcup_{a \in A} (\{a\})) && \text{inmediato,} \\
&= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2}(\bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{S_1}(\{a\}))) && \overrightarrow{S_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\
&= \bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{a\})) && \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \text{ preserva } \cap \text{ de conceptos (3.36),} \\
&= \bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1}(\{a\})) && \text{por la definición de composición (4.6),} \\
&= \overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1}(\bigcup_{a \in A} (\{a\})) && \overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\
&= \overrightarrow{S_2} \square \overrightarrow{S_1}(A) && \text{inmediato.}
\end{aligned}$$

Prueba de (4.9). Es dual de la prueba de (4.8), reflejando sobre R_2 . \square

Debido a (4.8), (4.9) y a que las polares derechas e izquierdas forman una conexión de Galois (3.5) podemos concluir que.

$$\overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} \text{ y } \overleftarrow{S_1} \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{S_2} \text{ forman una conexión de Galois.} \quad (4.10)$$

Ahora se puede concluir lo siguiente.

4.1.6 Proposición. *La categoría BOND está bien definida.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ son enlaces. Primero, se necesita probar que $S_2 \square S_1$ satisface las condiciones de ignorar contonear (4.2) y cantonear

(4.1), lo cual se prueba en [GW99, prop. 83]. A continuación hacemos otra prueba.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_2 \square S_1} &= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ &= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1} && S_1 \text{ ignora contonear (4.2),} \\ &= \overrightarrow{S_2 \square S_1} \overleftarrow{R_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_2 \square S_1} &= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ &= \overleftarrow{R_3} \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && S_2 \text{ ignora cantonear (4.1),} \\ &= \overleftarrow{R_3} \overrightarrow{S_2 \square S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8).} \end{aligned}$$

Ahora se prueba que la composición entre enlaces es asociativa. Para lo cual también se considera un enlace $\mathcal{S}_3 = \langle \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, S_3 \rangle$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_3} \overleftarrow{R_3} (\overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}) &= (\overrightarrow{S_3} \overleftarrow{R_3} \overrightarrow{S_2}) \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \text{composición de funciones es asociativa,} \\ \Rightarrow \overrightarrow{S_3} \overleftarrow{R_3} (\overrightarrow{S_2 \square S_1}) &= (\overrightarrow{S_3 \square S_2}) \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ \Rightarrow \overrightarrow{S_3 \square (S_2 \square S_1)} &= (\overrightarrow{S_3 \square S_2}) \overrightarrow{S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ \Rightarrow S_3 \square (S_2 \square S_1) &= (S_3 \square S_2) \square S_1 && \text{equivalencia de polar (3.7) y (3.8).} \end{aligned}$$

Finalmente, se necesita probar que la identidad está bien definida. Un resultado similar se encuentra en [Gan07]. Sea $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ un Contexto, entonces $id_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle$ es el morfismo identidad. Ahora suponga que $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ son dos enlaces, entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_1} &= \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1} && S_1 \text{ ignora cantonear (4.1),} \\ \Rightarrow \overrightarrow{S_1} &= \overrightarrow{R_2 \square S_1} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ \Rightarrow S_1 &= R_2 \square S_1 && \text{por equivalencia de polar (3.7) y (3.8).} \end{aligned}$$

También se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_2} &= \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} && S_2 \text{ ignora contonear (4.2),} \\ \Rightarrow \overrightarrow{S_2} &= \overrightarrow{S_2 \square R_2} && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ \Rightarrow S_2 &= S_2 \square R_2 && \text{por equivalencia de polar (3.7) y (3.8).} \end{aligned}$$

□

4.2. Espacios de Chu

Históricamente, las construcciones de Chu [Bar79] convierten categorías autónomas (i. e. categorías monoidales simétricas y cerradas) en categorías autónomas con objetos duales. Los espacios de Chu surgen al aplicar la construcción de Chu a la categoría de los conjuntos, junto con las funciones [Gup94, 3.7]. Los objetos de la categoría de los espacios de Chu son relaciones binarias (Contextos) y los morfismos son las transformaciones de Chu.

4.2.1. Definición de transformación de Chu. Una **transformación de Chu (T. Chu)** de un Contexto $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ a un Contexto $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ es un par de funciones $\langle f, l \rangle$ con $f : G_1 \rightarrow G_2$ y $l : M_2 \rightarrow M_1$ para todo $g \in G_1$ y $m \in M_2$, tales que

$$\langle f(g), m \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle g, l(m) \rangle \in R_1. \quad (4.11)$$

Cada transformación de Chu $\langle f, l \rangle$ induce un enlace $S_{f,l} \subseteq M_1 \times G_2$, definido de la siguiente forma:

$$S_{f,l} := \{ \langle g, m \rangle \in G_1 \times M_2 \mid \langle g, l(m) \rangle \in R_1 \} \quad (4.12)$$

$$= \{ \langle g, m \rangle \in G_1 \times M_2 \mid \langle f(g), m \rangle \in R_2 \}. \quad (4.13)$$

Antes de probar que $S_{f,l}$ es un enlace, se necesitan algunas propiedades elementales mencionadas en [Zha04, 3.7 y 3.8]. Para todo $B_1 \subseteq M_1$, $B_2 \subseteq M_2$, $A_1 \subseteq G_1$ y $A_2 \subseteq G_2$ se tiene:

$$\overrightarrow{R}_2(\underline{f}(A_1)) = \underline{l}(\overrightarrow{R}_1(A_1)), \quad (4.14)$$

$$\overleftarrow{R}_1(\underline{l}(B_2)) = \underline{f}(\overleftarrow{R}_2(B_2)), \quad (4.15)$$

donde \underline{f} , \overleftarrow{f} , \underline{l} y \overleftarrow{l} son imágenes directa ($\underline{\quad}$) e inversa ($\overleftarrow{\quad}$) de $f : G_2 \rightarrow G_1$ y $l : M_1 \rightarrow M_2$ definidas como en (3.1) y (3.2).

En (4.14) se representa la polar derecha de S_{fl} y en (4.15) se representa la polar izquierda de S_{fl} como se muestra a continuación.

4.2.2 Proposición. *Sea $\langle f, l \rangle$ una transformación de Chu entre los contextos $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$, entonces*

$$\overrightarrow{S}_{f,l} = \overrightarrow{R}_2(\underline{f}), \quad (4.16)$$

$$\overleftarrow{S}_{f,l} = \overleftarrow{R}_1(\underline{l}). \quad (4.17)$$

Demostración. Sea A un conjunto de sujetos

$$\overrightarrow{S}_{f,l}(A) = \bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{S}_{f,l}(\{a\})) \quad S_{f,l} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{a \in A} (\overrightarrow{R_2}(\{f(a)\})) && \text{definición de } S_{f,l} \text{ (4.13),} \\
&= \overrightarrow{R_2}(\bigcup_{a \in A} (\{f(a)\})) && R_2 \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\
&= \overrightarrow{R_2}(\underline{\rightarrow} f(A)) && \text{imagen directa (3.1).}
\end{aligned}$$

Ahora, sea B un conjunto de atributos, de manera similar se obtiene

$$\overleftarrow{S}_{f,l}(B) = \bigcap_{b \in B} (\overleftarrow{S}_{f,l}(\{b\})) = \bigcap_{b \in B} (\overleftarrow{R_1}(\{l(b)\})) = \overleftarrow{R_1}(\underline{\leftarrow} l(B)).$$

□

En [Kro05, 4.4.3] se muestra que $S_{f,l}$ es un caso especial de enlace. Aquí se presenta otra prueba de este hecho.

4.2.3 Proposición. *Toda relación $S_{f,l}$ inducida por una transformación de Chu $\langle f, l \rangle$ es un enlace.*

Demostración. Sea $\langle f, l \rangle$ una transformación de Chu (T. Chu) entre los Contextos $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$, y sea $S_{f,l}$ la correspondiente relación binaria, como es definida por (4.12) o (4.13). Primero se va a probar la condición de ignorar contonear (4.2).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S}_{f,l}(A) &= \overrightarrow{R_2}(\underline{\rightarrow} f(A)) && \text{polar derecha de } S_{f,l} \text{ (4.16),} \\
&= \underline{\leftarrow} (\overrightarrow{R_1}(A)) && \text{identidades de t. Chu (4.15),} \\
&= \underline{\leftarrow} (\overrightarrow{R_1} \overleftrightarrow{R_1}(A)) && \text{doble gana (3.18),} \\
&= \overrightarrow{R_2}(\underline{\rightarrow} f(\overleftrightarrow{R_1}(A))) && \text{identidades de t. Chu (4.15),} \\
&= \overrightarrow{S}_{f,l} \overleftrightarrow{R_1}(A) && \text{polar derecha de } S_{f,l} \text{ (4.16).}
\end{aligned}$$

Ahora, se probará la condición de ignorar cantonear (4.1).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S}_{f,l}(A) &= \overrightarrow{R_2}(\underline{\rightarrow} f(A)) && \text{polar derecha de } S_{f,l} \text{ (4.16),} \\
&= \overleftrightarrow{R_2} \overrightarrow{R_2}(\underline{\rightarrow} f(A)) && \text{doble gana (3.18),} \\
&= \overleftrightarrow{R_2} \overrightarrow{S}_{f,l}(A) && \text{polar derecha de } S_{f,l} \text{ (4.16).} \square
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de 4.2.3 no se cumple.

4.2.4 Ejemplo. En la tabla

	m_1^1	m_1^2		m_2^1	m_2^2	\mathcal{S}
g_1^2		X	g_1^2	X		g_1^2
g_1^1	X		g_1^1	X		g_1^1
\mathcal{R}_1	m_1^1	m_1^2		m_2^1	m_2^2	
			g_2^2		X	g_2^2
			g_2^1	X		g_2^1
			\mathcal{R}_2	m_2^1	m_2^2	

a continuación se puede ver que \mathcal{S} es un enlace porque satisface (4.1) y (4.2),

$$\begin{aligned}\vec{S}(\emptyset) &= M_2 = \overrightarrow{R_2} \vec{S}(\emptyset) = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(\emptyset), \\ \vec{S}(\{g_1^1\}) &= \{m_2^1\} = \overrightarrow{R_2} \vec{S}(\{g_1^1\}) = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(\{g_1^1\}), \\ \vec{S}(\{g_1^2\}) &= \{m_2^2\} = \overrightarrow{R_2} \vec{S}(\{g_1^2\}) = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(\{g_1^2\}), \\ \vec{S}(G_1) &= \{m_2^1\} = \overrightarrow{R_2} \vec{S}(G_1) = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(G_1).\end{aligned}$$

Sin embargo, no hay una transformación de Chu que genere \mathcal{S} , porque las cuatro posibles funciones $l_1, l_2, l_3, l_4 : M_1 \rightarrow M_2$ generan relaciones binarias (4.12) que son diferentes de \mathcal{S} como se puede ver en la siguiente tabla:

T. Chu	m_2^1	m_2^2	
$l_1(m_2^1) := m_1^1$			g_1^2
$l_1(m_2^2) := m_1^1$	X	X	g_1^1
$l_2(m_2^1) := m_1^1$		X	g_1^2
$l_2(m_2^2) := m_1^2$	X		g_1^1
$l_3(m_2^1) := m_1^2$	X		g_1^2
$l_3(m_2^2) := m_1^1$		X	g_1^1
$l_4(m_2^1) := m_1^2$	X	X	g_1^2
$l_4(m_2^2) := m_1^2$			g_1^1
	m_2^1	m_2^2	

En la Proposición 4.2.3 se afirma que las relaciones inducidas por transformaciones de Chu son enlaces. Esto permite tener dos tipos de composiciones para estas relaciones inducidas, una debida a las transformaciones de Chu y otra debida a los enlaces. El siguiente resultado muestra que ambos tipos de composiciones son compatibles.

4.2.5 Proposición. Sean $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$, $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ y $\mathcal{R}_3 = \langle G_3, M_3, R_3 \rangle$ Contextos y sean $\langle f_1 : G_1 \rightarrow G_2, l_1 : M_2 \rightarrow M_1 \rangle$ y $\langle f_2 : G_2 \rightarrow G_3, l_2 : M_3 \rightarrow M_2 \rangle$ transformaciones de Chu, entonces

$$S_{f_2, l_2} \square S_{f_1, l_1} = S_{f_2 \circ f_1, l_1 \circ l_2}. \quad (4.18)$$

Demostración. Por la equivalencia polar derecha, (3.7) y (3.8), es suficiente probar que $\overrightarrow{S_{f_2, l_2} \square S_{f_1, l_1}} = \overrightarrow{S_{f_2 \circ f_1, l_1 \circ l_2}}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{f_2, l_2} \square S_{f_1, l_1}} &= \overrightarrow{S_{f_2, l_2} R_2 S_{f_1, l_1}} && \text{por composición de enlaces (4.8),} \\ &= \overrightarrow{R_3 \xrightarrow{f_2} R_2 \xleftarrow{f_1}} && \text{polar derecha de } S_{f, l} \text{ (4.16),} \\ &= \overrightarrow{l_2 \xleftarrow{R_2} R_2 \xrightarrow{R_2} f_1} && \text{por equivalencia de T. Chu (4.14),} \\ &= \overrightarrow{l_2 \xrightarrow{R_2} f_1} && \text{doble gana (3.18),} \\ &= \overrightarrow{R_3 \xrightarrow{f_2} f_1} && \text{por equivalencia de T. Chu (4.14),} \\ &= \overrightarrow{R_3 \xrightarrow{f_2} f_1} && \text{inmediato,} \\ &= \overrightarrow{S_{f_2 \circ f_1, l_1 \circ l_2}} && \text{polar derecha de } S_{f, l} \text{ (4.16).} \end{aligned}$$

□

Esto permite construir el funtor **CB** de CHU en BOND que deja los Contextos iguales y convierte las transformaciones de Chu $\langle f, l \rangle$ en la relación binaria $S_{\langle f, l \rangle}$.

5 Equivalencia de las Categorías

$(\top)\cap\mathbf{FAM}$ y \mathbf{BOND}

En la sección 2.3 se definió la categoría $(\top)\cap\mathbf{FAM}$ cuyos objetos son $\top\cap$ -familias y sus morfismos son homomorfismos entre \cap -familias. Ahora se va a mostrar que esta categoría es equivalente a la categoría \mathbf{BOND} .

5.1. Los funtores \mathbf{BF} y \mathbf{FB}

5.1.1. Definición del functor \mathbf{BF} de \mathbf{BOND} a $(\top)\cap\mathbf{FAM}$. El functor \mathbf{BF} transforma un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ en su retículo de comprensión

$$\begin{aligned} \mathbf{BF}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_R &= \{B \subseteq M \mid B = \overleftrightarrow{R}(B)\} && \text{definido en (3.28),} \\ &= \{\overleftrightarrow{R}(B) \mid B \subseteq M\} && \text{ver (3.29),} \\ &= \{\overrightarrow{R}(A) \mid A \subseteq G\} && \text{ver (3.30).} \end{aligned}$$

Recordemos que un retículo de comprensión es una $\top\cap$ -familia. \mathbf{BF} también transforma un enlace $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ en un homomorfismo entre \cap -familias

$$\begin{aligned} \mathbf{BF}(\mathcal{S}) = f_S : \mathcal{M}_{R_1} &\rightarrow \mathcal{M}_{R_1} && (5.1) \\ L &\mapsto \overrightarrow{S}\overleftarrow{R_1}(L). \end{aligned}$$

Si no hay confusión, se puede escribir \mathcal{M}_i en vez de \mathcal{M}_{R_i} y f_i en vez de f_{S_i} , donde i es algún subíndice. \mathbf{BF} está bien definido por las siguientes razones.

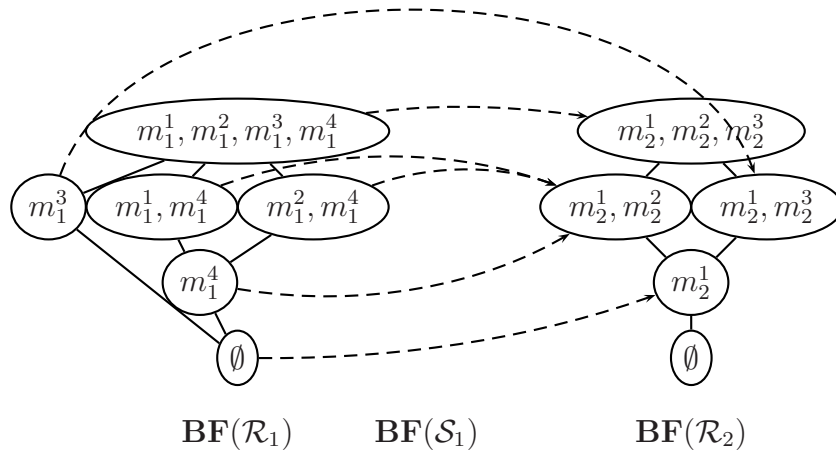
- si $L \in \mathcal{M}_{R_1}$ entonces $\overrightarrow{S}\overleftarrow{R_1}(L) \in \mathcal{M}_{R_1}$ (3.29) porque \overrightarrow{S} ignora cantonear (4.1).
- f_S es un homomorfismo entre \cap -familias porque los enlaces preservan intersecciones de conceptos (3.36).
- $\mathbf{BF}(S_2 \square S_1) = \mathbf{BF}(S_2) \circ \mathbf{BF}(S_1)$ por la caracterización de la composición de enlaces (4.8).

- $\mathbf{BF}(id_{\mathcal{R}_1}) = id_{\mathbf{BF}(\mathcal{R}_1)}$ por la definición de identidad de enlace (4.5), la definición de identidad de homomorfismo entre \cap -familias (2.6) y la definición de retículo de comprensión (3.29).

5.1.2 Ejemplo. Sea $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ un enlace definido por la tabla:

	m_1^1	m_1^2	m_1^3	m_1^4		m_2^1	m_2^2	m_2^3	\mathcal{S}_1
g_1^1	X			X	g_1^1	X	X		g_1^1
g_1^2		X		X	g_1^2	X	X		g_1^2
g_1^3			X		g_1^3	X		X	g_1^3
g_1^4				X	g_1^4	X	X		g_1^4
\mathcal{R}_1	m_1^1	m_1^2	m_1^3	m_1^4		m_2^1	m_2^2	m_2^3	
					g_2^1				g_2^1
					g_2^2	X			g_2^2
					g_2^3	X	X		g_2^3
					g_2^4	X		X	g_2^4
					\mathcal{R}_2	m_2^1	m_2^2	m_2^3	

El diagrama de un homomorfismo entre $\top\cap$ -familias $\mathbf{BF}(\mathcal{S}_1)$ es



5.1.3 Ejemplo. Volviendo nuevamente al Ejemplo 3.3.6, el functor **BF** transforma el contexto \mathcal{R}_Σ en el retículo de comprensión que, sin el tope, resulta ser isomorfo a Σ^{**} , el isomorfismo convierte una comprensión en el prefijo más grande que tienen todas las cadenas de la comprensión.

El funtor **BF** también transforma el contexto \mathcal{R}_f en el retículo de comprensión el cual resulta, al quitarle el tope, ser isomorfo a $(\mathbb{N} \xrightarrow{\circ} \mathbb{N})$.

En ambos casos se puede considerar el tope como un caso contradictorio.

La relación $\mathcal{S}_{f\Sigma} = \langle \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_\Sigma, \mathcal{S}_{f\Sigma} \rangle$ es transformada por este funtor en una función que le asigna, a una función total o parcial $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, la cadena de ceros y unos $d_0d_1\dots$, tal que $d_i = f(i)$. Esta cadena es infinita si f es una función total. En caso contrario, la cadena es finita, de longitud n , con n el menor entero tal que $f(n+1)$ no está definida.

5.1.4. Definición del funtor FB desde $(\top)\cap\text{FAM}$ hacia BOND. El funtor **FB** transforma una $\top\cap$ -familia $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ en el Contexto $\mathcal{R}_\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}, X, R_\mathcal{M} \rangle$, donde $R_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \times X$ es la relación binaria \ni ,

$$R_\mathcal{M} := \{ \langle L, x \rangle \in \mathcal{M} \times X \mid L \ni x \}. \quad (5.2)$$

El funtor **FB** transforma un homomorfismo entre \cap -familias $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ en el enlace $\mathcal{S}_f = \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_2}, \mathcal{S}_f \rangle$ donde $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{M}_1 \times X_2$ es la relación binaria \ni ,

$$\mathcal{S}_f := \{ \langle L, x \rangle \in \mathcal{M}_1 \times X_2 \mid f(L) \ni x \}. \quad (5.3)$$

5.1.5 Ejemplo. Sean $\langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle, \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ las dos $\top\cap$ -familias del Ejemplo 5.1.2, donde

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\ X_2 &= \{x_1, x_2, x_3\}, \\ \mathcal{M}_1 &= \{\emptyset, \{x_4\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}, \\ \mathcal{M}_2 &= \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}, \end{aligned}$$

y sea $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un homomorfismo entre \cap -familias definido por

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \{x_1\}, & f(\{x_4\}) &= \{x_1, x_2\}, \\ f(\{x_1, x_4\}) &= \{x_1, x_2\}, & f(\{x_2, x_4\}) &= \{x_1, x_2\}, \\ f(\{x_3\}) &= \{x_1, x_3\}, & f(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) &= \{x_1, x_2, x_3\}. \end{aligned}$$

Entonces, **FB**(f) es

	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	\mathcal{S}_1
					\emptyset	X			\emptyset
$\{x_1, x_4\}$	X			X	$\{x_1, x_4\}$	X	X		$\{x_1, x_4\}$
$\{x_2, x_4\}$		X		X	$\{x_2, x_4\}$	X	X		$\{x_2, x_4\}$
$\{x_3\}$			X		$\{x_3\}$	X		X	$\{x_3\}$
$\{x_4\}$				X	$\{x_4\}$	X	X		$\{x_4\}$
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	X	X	X	X	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	X	X	X	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
\mathcal{R}_1	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	
					\emptyset				\emptyset
					$\{x_1\}$	X			$\{x_1\}$
					$\{x_1, x_2\}$	X	X		$\{x_1, x_2\}$
					$\{x_1, x_3\}$	X		X	$\{x_1, x_3\}$
					$\{x_1, x_2, x_3\}$	X	X	X	$\{x_1, x_2, x_3\}$
					\mathcal{R}_2	x_1	x_2	x_3	

Para probar que **FB** está bien definido, se necesitan algunas de las siguientes propiedades.

5.1.6 Teorema. *Sea $f_1 = \langle \mathcal{M}_1, X_1 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle$ un morfismo de $(\top) \cap \text{FAM}$. Asuma que $A \subseteq X_1$, $L \in \mathcal{M}_1$ y $\emptyset \neq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_1$. Entonces se tiene*

$$L = \bigcap \{L' \in \mathcal{M}_1 \mid L \subseteq L'\} \quad \left(\begin{array}{l} \cap \text{ de} \\ \text{comprensiones} \\ \text{mayores} \end{array} \right), \quad (5.4)$$

$$\overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_1}(A) = \{L' \in \mathcal{M}_1 \mid A \subseteq L'\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{familia de} \\ \text{comprensiones} \\ \text{mayores} \end{array} \right), \quad (5.5)$$

$$\overrightarrow{S}_{f_1}(\mathcal{N}) = f_1(\bigcap \mathcal{N}) \quad (\text{imagen de } \cap), \quad (5.6)$$

$$\overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_1}(A) = \bigcap \{L' \in \mathcal{M}_1 \mid A \subseteq L'\} \quad (\text{cantonear es una } \cap), \quad (5.7)$$

$$\overrightarrow{S}_{f_1} \overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_1}(L) = f_1(L) \quad (\text{cantar recupera } f_1), \quad (5.8)$$

$$L \in \overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_2} \overrightarrow{S}_{f_1}(\mathcal{N}) \Leftrightarrow f_1(\bigcap \mathcal{N}) \subseteq L \quad (\text{elementos del contar}). \quad (5.9)$$

Si $f_2 = \langle \mathcal{M}_2, X_2 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}_3, X_3 \rangle$ es otro homomorfismo entre \cap -familias, entonces

$$\overrightarrow{S}_{f_2} \overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_2} \overrightarrow{S}_{f_1}(\mathcal{N}) = f_2(f_1(\bigcap \mathcal{N})) \quad (5.10)$$

$$= \overrightarrow{S_{f_2 \circ f_1}}(\mathcal{N}) \quad (\text{imagen de la imagen de } \cap).$$

Demostración. El inciso (5.4) fue mencionado en (2.14), su demostración es sencilla:

(\subseteq) Para todo L' , se tiene que $L \subseteq L'$.

(\supseteq) Como $L \in \mathcal{M}_1$ se hace $L = L'$.

Prueba de (5.5). Es inmediato de la definición de $R_{\mathcal{M}_1}$ (5.2) y función polar derecha (3.3).

Prueba de (5.6).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{f_1}}(\mathcal{N}) &= \overrightarrow{S_{f_1}}\left(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} \{N\}\right) && \text{inmediato,} \\ &= \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \overrightarrow{S_{f_1}}(\{N\}) && S_{f_1} \text{ hala } \cup \text{ como } \cap \text{ (3.19),} \\ &= \bigcap_{N \in \mathcal{N}} f_1(N) && \text{por la definición de } S_f \text{ (5.3),} \\ &= f_1\left(\bigcap \mathcal{N}\right) && f_1 \text{ preserva } \cap \text{ (2.6).} \end{aligned}$$

Prueba de (5.7). Esto se deduce del hecho de que las conexiones de Galois generan operadores clausura (2.22). También se sigue de (5.5) y (5.6) donde $f_1 = id_{\mathcal{M}_1}$.

Prueba de (5.8). Se sigue de (5.4), (5.5) y (5.6). Prueba de (5.9).

$$\begin{aligned} L &\in \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_2}} \overrightarrow{S_{f_1}}(\mathcal{N}), \\ \Leftrightarrow L &\in \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_2}}(f_1(\bigcap \mathcal{N})) && \text{imagen de } \cap \text{ (5.6),} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_2}}(\{L\}) &\supseteq f_1(\bigcap \mathcal{N}) && \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_2}} \text{ es CG (3.5),} \\ \Leftrightarrow L &\supseteq f_1(\bigcap \mathcal{N}) && \text{imagen de } \cap \text{ (5.6).} \end{aligned}$$

Prueba de (5.10). La primera identidad de (5.10) se sigue de

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{S_{f_2}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_2}} \overrightarrow{S_{f_1}}(\mathcal{N}) \\ &= \overrightarrow{S_{f_2}}(\{L \in \mathcal{M}_2 \mid f_1(\bigcap \mathcal{N}) \subseteq L\}) && \text{por elementos del contar (5.9),} \\ &= f_2\left(\bigcap \{L \in \mathcal{M}_2 \mid f_1(\bigcap \mathcal{N}) \subseteq L\}\right) && \text{por imagen de } \cap \text{ (5.6),} \\ &= f_2(f_1(\bigcap \mathcal{N})) && \text{por } L = \bigcap_{L' \in \mathcal{M}} L' \text{ (2.14).} \end{aligned}$$

La segunda identidad de (5.10) se sigue de (5.6). □

FB está bien definido por los siguientes hechos:

- **FB**(f_S) es un enlace porque ignora cantonear (4.1) (al reemplazar f_2 por la identidad en (5.10)), además ignora contonear (4.2) (al reemplazar f_1 por la identidad en (5.10)).

- $\mathbf{FB}(f_2 \circ f_1) = \mathbf{FB}(f_2) \square \mathbf{FB}(f_1)$ por el Teorema de Caracterización de Composición de Enlaces (4.8) y la imagen de la imagen de \cap (5.10).
- $\mathbf{FB}(id_{\mathcal{M}_1}) = id_{\mathbf{BF}(\mathcal{M}_1)}$ por la Definición del Enlace Identidad (4.5) y la definición del homomorfismo identidad entre \cap -familia en la sección 2.3.

5.2. La equivalencia categórica

Primero se va a mostrar que la composición $\mathbf{BF} \cdot \mathbf{FB}$ coincide con el funtor identidad de $(\top) \cap \mathbf{FAM}$.

5.2.1 Proposición. *Si $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ y $\langle \mathcal{M}', X' \rangle$ son dos $\top \cap$ -familias y $f : \langle \mathcal{M}, X \rangle \rightarrow \langle \mathcal{M}', X' \rangle$ es un homomorfismo entre \cap -familias entonces*

$$\mathbf{BF} \cdot \mathbf{FB} (\mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{BF} \cdot \mathbf{FB} (f) = f. \quad (\text{ii})$$

Demostración. Para mostrar (i), es suficiente ver que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{R_{\mathcal{M}}}$, que se tiene por la definición de funtores \mathbf{BF} , \mathbf{FB} y el retículo de comprensión \mathcal{M}_R (3.30).

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{M}_{R_{\mathcal{M}}} &\Leftrightarrow (\exists \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}) L = \overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}) && \text{por la def. de } \mathcal{M}_R \text{ (3.30),} \\ &\Leftrightarrow (\exists \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}) L = \bigcap \mathcal{N} && \text{imagen de } \cap \text{ (5.6),} \\ &\Leftrightarrow L \in \mathcal{M} && \left\{ \begin{array}{l} (\Rightarrow) \text{ def. de } \cap\text{-familia (2.1),} \\ (\Leftarrow) \text{ haciendo } \mathcal{N} = \{L\}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Con el fin de mostrar (ii) es suficiente probar que para todo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ se tiene que $f(\overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N})) = f_{S_f}(\overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}))$.

$$\begin{aligned} f_{S_f}(\overrightarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N})) &= \overrightarrow{S_f}(\overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}(\overrightarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}))) && \text{por la def. de } f_S \text{ (5.1),} \\ &= f(\bigcap \mathcal{N}) && \text{por imagen de la imagen de } \cap \text{ (5.10),} \\ &= f(\overrightarrow{R_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N})) && \text{por imagen de } \cap \text{ (5.6).} \quad \square \end{aligned}$$

5.2.2. Definición del isomorfismo natural \mathcal{N} . Aunque la composición de los funtores $\mathbf{FB} \cdot \mathbf{BF}$ no corresponde al funtor identidad, como se puede deducir de los Ejemplos 5.1.2 y 5.1.5, sí genera un isomorfismo natural en \mathbb{BOND} .

$$\mathcal{N} := \{\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \mid \mathcal{R} \text{ es un Contexto}\} \quad (5.11)$$

donde

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}} := \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}, R_{\mathcal{M}_R} \rangle, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}_R} = \langle \mathcal{M}_R, M, R_{\mathcal{M}_R} \rangle := \mathbf{FB} \cdot \mathbf{BF} (\mathcal{R}). \quad (5.13)$$

El inverso de $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ corresponde a

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} := \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R \rangle. \quad (5.14)$$

Antes de probar que \mathcal{N} está bien definido vamos a ver que para cualquier Contexto \mathcal{R} y su imagen $\mathbf{FB} \cdot \mathbf{BF} (\mathcal{R})$ generan el mismo retículo de comprensión.

5.2.3 Proposición. *Sea \mathcal{R} un Contexto, entonces*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}}, \quad (5.15)$$

$$\overrightarrow{\overleftarrow{R}} \overleftarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}}, \quad (5.16)$$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overrightarrow{R} \text{ y } \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} = \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}}, \quad (5.17)$$

$$\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R} \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \text{ y } \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} = \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overrightarrow{R} \overleftarrow{R}, \quad (5.18)$$

$$R = R_{\mathcal{M}_R} \begin{array}{c} R_{\mathcal{M}_R} \\ \square \end{array} R \text{ y } R_{\mathcal{M}_R} = R \begin{array}{c} R \\ \square \end{array} R_{\mathcal{M}_R}. \quad (5.19)$$

Demostración. Primero se va a probar (5.16). Asuma $A \subseteq G$.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}}}(A) \\ &= \bigcap \{ \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}}(\{L\}) \mid \\ & \quad A \subseteq \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}}(\{L\}), L \in \mathcal{M}_R \} \quad \text{porque } \overleftarrow{\overrightarrow{R}}(A) = \bigcap_{A \subseteq L \in \mathcal{M}} L \quad (3.35), \\ &= \bigcap \{ L \in \mathcal{M}_R \mid A \subseteq L \} \quad \text{por imagen de } \cap \text{ (5.6),} \\ &= \overleftarrow{\overrightarrow{R}}(A) \quad \text{porque } \overleftarrow{\overrightarrow{R}}(A) = \bigcap_{A \subseteq L \in \mathcal{M}} L \quad (3.35). \end{aligned}$$

Se tienen (5.15) y (5.17) por la equivalencia de la sección 3.3.8.

Se tiene (5.18) por la equivalencia de cantonear y contonear, vea 3.4.1.

Para probar (5.19) se parte de (5.17) y aplicando el Teorema de Caracterización de Composiciones de Enlaces (4.8) se obtiene

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \begin{array}{c} R_{\mathcal{M}_R} \\ \square \end{array} R \text{ y } \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} = \overrightarrow{R} \begin{array}{c} R \\ \square \end{array} R_{\mathcal{M}_R}.$$

Finalmente, se aplica la equivalencia de polar derecha (3.7) con (3.8). \square

5.2.4 Proposición. *Sea $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ un Contexto, entonces:*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \text{ y } \mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} \text{ son enlaces,} \quad (5.20)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \square \mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} = id_R, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} \square \mathcal{N}_{\mathcal{R}} = id_{R_{\mathcal{M}_R}}. \quad (5.22)$$

Demostración. Prueba de (5.20). $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1}$ son enlaces porque ignoran contonear (4.2) e ignoran cantonear (4.1), por (5.17) y (3.18).

Prueba de (5.21).

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \square \mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} \\ &= \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R_{\mathcal{M}_R} \square R \rangle && \text{por composición de enlaces (4.3),} \\ &= \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle && \text{porque } R_{\mathcal{M}_R} \square R = R \text{ (5.19),} \\ &= id_R && \text{por } id \text{ de enlaces (4.5).} \end{aligned}$$

Prueba de (5.22).

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1} \square \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \\ &= \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R \rangle \square \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}, R_{\mathcal{M}_R} \rangle \\ &= \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R \square R_{\mathcal{M}_R} \rangle && \text{por composición de enlaces (4.3),} \\ &= \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R_{\mathcal{M}_R} \rangle && \text{porque } R \square R_{\mathcal{M}_R} = R_{\mathcal{M}_R} \text{ (5.19),} \\ &= id_{R_{\mathcal{M}_R}} && \text{por } id \text{ de enlaces (4.5).} \end{aligned}$$

□

Se va ahora a probar que el isomorfismo natural \mathcal{N} conmuta de manera adecuada.

5.2.5 Proposición. *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ un enlace, entonces*

$$\mathcal{S} \square \mathcal{N}_{\mathcal{R}_1} = \mathcal{N}_{\mathcal{R}_2}^{-1} \square \mathcal{S}_{f_S}. \quad (5.23)$$

Demostración. Por la definición de composición de enlaces (4.3) hay que probar

$$S \square^{R_1} R_{\mathcal{M}_{R_1}} = R_{\mathcal{M}_{R_2}} \square^{R_{\mathcal{M}_{R_2}}} S_{f_S},$$

y por la equivalencia de polar derecha (3.7) and (3.8) es suficiente probar que

$$\overrightarrow{S \square^{R_1} R_{\mathcal{M}_{R_1}}} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{R_2}} \square^{R_{\mathcal{M}_{R_2}}} S_{f_S}}.$$

Para lo cual asumimos $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_{R_1}$.

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{R_{\mathcal{M}_{R_2}}} R_{\mathcal{M}_{R_2}} \square S_{f_S}(\mathcal{N}) \\
& = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{R_2}}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_{R_2}}} \overrightarrow{S_{f_S}}(\mathcal{N}) && \text{la composición de enlaces (4.8),} \\
& = f_S(\bigcap \mathcal{N}) && \text{imagen de la imagen de } \cap \text{ (5.10),} \\
& = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(\bigcap \mathcal{N}) && \text{def. de } f_S \text{ (5.1),} \\
& = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(\overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{R_1}}}(\mathcal{N})) && \text{imagen de } \cap \text{ (5.6),} \\
& = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{R_1}}}(\mathcal{N}) \\
& = S \square^{R_1} R_{\mathcal{M}_{R_1}}(\mathcal{N}) && \text{la composición de enlaces (4.8).}
\end{aligned}$$

□

Ahora se puede concluir el principal teorema de esta sección.

5.2.6 Teorema. *Las categorías BOND y $(\top)\cap\text{FAM}$ son equivalentes.*

Demostración. La equivalencia entre BOND y $(\top)\cap\text{FAM}$ es dada por la siguiente cuadrupla $\langle \mathbf{FB}, \mathbf{BF}, id_{(\top)\cap\text{FAM}}, \mathcal{N} \rangle$, donde

- $\mathbf{BF} : \text{BOND} \rightarrow (\top)\cap\text{FAM}$ es un functor por la Proposición 5.1.1.
- $\mathbf{FB} : (\top)\cap\text{FAM} \rightarrow \text{BOND}$ es un functor por las Proposiciones 5.1.4 y 5.1.6.
- $id_{(\top)\cap\text{FAM}} := \{id_{\mathcal{M}} \mid \mathcal{M} \text{ es una } \top\cap\text{-familia}\}$ es la clase de las identidades de la categoría $(\top)\cap\text{FAM}$, la cual corresponde al isomorfismo natural de la composición $\mathbf{BF} \cdot \mathbf{FB}$ (ver Proposición 5.2.1).
- $\mathcal{N} : \mathbf{FB} \cdot \mathbf{BF} \xrightarrow{\cdot} id_{\text{POL}}$ es un isomorfismo natural por las Proposiciones 5.2.4 y 5.2.5. □

6 La Categoría \mathbb{APX}

En [ZS06, 6.1] se definen los conceptos aproximables, donde la principal idea es que el concepto puede ser aproximado a partir de conjuntos finitos. En este capítulo introducimos la definición de Contexto aproximable en el cual todo concepto es aproximable.

Estos conceptos han sido usados para formar la categoría \mathbb{CXT} [HZ04, Teorema 3]. Sin embargo, los morfismos de esta categoría no son enlaces. A continuación definimos la categoría \mathbb{APX} formada por los Contextos aproximables y la versión aproximable de los enlaces. Al parecer las categorías \mathbb{CXT} y \mathbb{APX} no son equivalentes. Al final del capítulo se muestra la equivalencia de la categoría \mathbb{APX} con una categoría de \cap -familias algebraicas.

6.1. Contexto y enlace aproximable

6.1.1. Definición de Contexto aproximable y enlace aproximable. Un **Contexto aproximable** es un Contexto $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ en el cual el cantonear de un conjunto es la unión de cantoneos de sus subconjuntos finitos. Esto es, para todo subconjunto B de M se tiene

$$\overrightarrow{R}(B) = \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{R}(K)) \quad (\text{unión cantoneos conjuntos finitos}). \quad (6.1)$$

Se recuerda que $K \in B$ significa que K es un subconjunto finito de B .

Un **enlace aproximable** es un enlace donde \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son Contextos aproximables y para todo subconjunto B de M_1 se tiene

$$\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(B) = \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(K)) \quad (\text{unión cantares conjuntos finitos}). \quad (6.2)$$

Debido a (2.8) se puede concluir que si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ es un enlace, entonces \mathcal{S}_1 es un enlace aproximable si y sólo si para cualquier familia dirigida $\mathcal{D} \subseteq \wp(M_1)$ de conjuntos de atributos de \mathcal{R}_1 , se tiene que

$$\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(\bigcup(\mathcal{D})) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} (\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(D)) \quad (\text{cantares preservan } \sqcup). \quad (6.3)$$

6.1.2 Ejemplo. Los Contextos R_Σ , R_f y $R_\mathbb{Q}$ del Ejemplo 3.3.6 son Contextos aproximables, pero $R_\mathbb{N}$ no lo es, ya que si B consiste en los conjuntos cofinitos que contienen el 1, entonces $\{1\} \in \overleftarrow{R}_\mathbb{N}(B)$ pero $\{1\} \notin \bigcup_{K \in B} \overleftarrow{R}_\mathbb{N}(K)$. El enlace $\mathcal{S}_{f\Sigma} = \langle \mathcal{R}_f, \mathcal{R}_\Sigma, \mathcal{S}_{f\Sigma} \rangle$ es aproximable.

6.1.3. Definición de la categoría \mathbb{APX} .

- (I) Los objetos de la categoría son Contextos aproximables.
- (II) Los morfismos son enlaces aproximables.
- (III) La composición es la composición de los enlaces.
- (IV) La identidad de un Contexto aproximable \mathcal{R} es la misma identidad de los enlaces.

6.1.4 Proposición. *La categoría \mathbb{APX} está bien definida.*

Demostración. Se necesita probar que la composición de dos enlaces aproximables $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{S}_2 \rangle$ es aproximable. Sea $B \subseteq M_1$

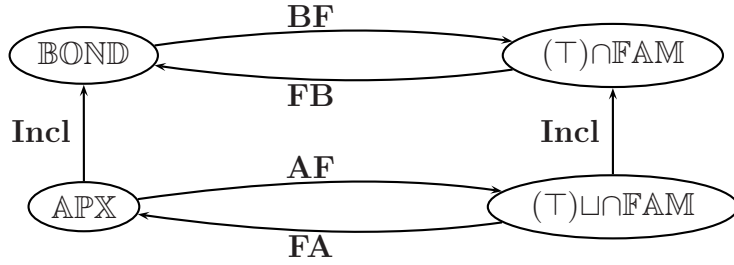
$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathcal{S}_2 \square \mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1}(B) \\
&= \overrightarrow{\mathcal{S}_2} \overleftarrow{\mathcal{R}_2} \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1}(B) && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\
&= \overrightarrow{\mathcal{S}_2} \overleftarrow{\mathcal{R}_2} \left(\bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1}(K)) \right) && \text{unión de cantares de conjuntos finitos (6.2),} \\
&= \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{\mathcal{S}_2} \overleftarrow{\mathcal{R}_2} \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1}(K)) && \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1} \text{ es monótono (3.20) y} \\ \overrightarrow{\mathcal{S}_2} \overleftarrow{\mathcal{R}_2} \text{ preserva uniones dirigidas (6.3),} \end{array} \right. \\
&= \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{\mathcal{S}_2 \square \mathcal{S}_1} \overleftarrow{\mathcal{R}_1}(K)) && \text{por la composición de enlaces (4.8).}
\end{aligned}$$

También se requiere probar que la identidad $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_1} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{I}_{\mathcal{R}_1} \rangle$ (4.5) de un Contexto \mathcal{R}_1 es aproximable y esto se obtiene porque \mathcal{R}_1 es aproximable. \square

6.2. Equivalencia de las categorías \mathbb{APX} y $(\top) \sqcup \cap \mathbb{FAM}$

Basados en la equivalencia $\langle \mathbf{FB}, \mathbf{BF}, id_{(\top) \cap \mathbb{FAM}}, \mathcal{N} \rangle$ del Teorema 5.2.6 vamos a probar la equivalencia entre \mathbb{APX} y $(\top) \sqcup \cap \mathbb{FAM}$, para lo cual vamos a definir lo siguiente:

- \mathbf{AF} es el funtor \mathbf{BF} restringido a \mathbb{APX} .
- \mathbf{FA} es el funtor \mathbf{FB} restringido a $(\top) \sqcup \cap \mathbb{FAM}$.
- $\mathcal{N}' = \{\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{N} \mid \mathcal{R} \text{ es aproximable}\}$, donde \mathcal{N} es el isomorfismo natural definido en (5.11).



Se probará la equivalencia de subcategorías usando el resultado de la sección 1.1.5 y [ZS06, 6.3].

- (I) Si $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es un Contexto aproximable entonces $\mathcal{M}_R := \mathbf{BF}(\mathcal{R})$ es una $\top\sqcup\cap$ -familia porque si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_R$ es una familia dirigida, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D &= \bigcup_{D \in \mathcal{D}} (\overrightarrow{R} \overleftarrow{R}(D)) && \text{por la definición de } \mathcal{M}_R \text{ (3.29),} \\ &= \overrightarrow{R} \overleftarrow{R}(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D) && \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} \text{ preserva uniones dirigidas (6.3).} \end{aligned}$$

entonces $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \in \mathcal{M}_R$ por la definición de \mathcal{M}_R (3.29).

- (II) Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ es un enlace aproximable entonces $f_S = \mathbf{BF}(\mathcal{S})$ es un homomorfismo entre $\sqcup\cap$ -familias porque preserva uniones dirigidas (6.3).
- (III) Si \mathcal{M}_1 es una $\top\sqcup\cap$ -familia entonces hay que probar que $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1} = \langle G_{\mathcal{M}_1}, M_{\mathcal{M}_1}, R_{\mathcal{M}_1} \rangle$ es aproximable. Lo cual se obtiene por (2.17) y (5.7).
- (IV) Si $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ es un homomorfismo entre $\sqcup\cap$ -familias entonces el enlace definido como $\mathcal{S}_f = \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}, S_f \rangle := \mathbf{FA}(f)$ es aproximable porque para todo $B \subseteq M_1$

$$\begin{aligned} \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{S_f} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_1}}(K)) &= \bigcup_{K \in B} f(K) && f \text{ es recuperado por cantonear (5.8),} \\ &= f(\bigcup_{K \in B} K) && f \text{ preserva uniones dirigidas (2.7),} \\ &= \overrightarrow{S_f} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_1}}(B) && f \text{ es recuperado por cantonear (5.8).} \end{aligned}$$

- (V) $id_{(\top)\sqcup\cap\text{FAM}}$ es el isomorfismo natural de $id_{(\top)\cap\text{FAM}}$ restringido a $(\top)\sqcup\cap\text{FAM}$.
- (VI) Si $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es un Contexto aproximable entonces $\mathcal{N}_R = \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}, R_{\mathcal{M}_R} \rangle$ y $\mathcal{N}_R^{-1} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R \rangle$ son enlaces aproximables porque para todo $B \in M$,

$$\bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}}(K)) = \bigcup_{K \in B} (\overrightarrow{R} \overleftarrow{R}(K)) \quad \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \quad (5.16),$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{\overleftarrow{R}} \overleftarrow{R}(B) && \mathcal{R} \text{ es aproximable (6.1),} \\
&= \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{\mathcal{R}}}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_{\mathcal{R}}}}(B) && \overrightarrow{\overleftarrow{R}} \overleftarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_{\mathcal{R}}}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_{\mathcal{R}}}} \text{ (5.16).}
\end{aligned}$$

Para probar que $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}^{-1}$ es aproximable, se procede de manera similar.

Entonces $\langle \mathbf{FA}, \mathbf{AF}, id_{(\mathbb{T})\sqcup\cap\mathbb{FAM}}, \mathcal{N}' \rangle$ es una equivalencia entre $(\mathbb{T})\sqcup\cap\mathbb{FAM}$ y $\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{X}$, y por lo tanto se puede afirmar el siguiente teorema.

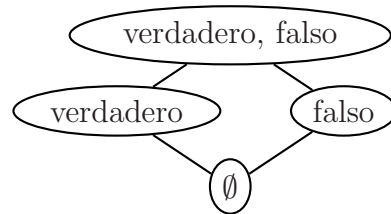
6.2.1 Teorema. *Las categorías $(\mathbb{T})\sqcup\cap\mathbb{FAM}$ y $\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{X}$ son equivalentes.*

7 La Categoría DIS

El retículo conceptual siempre tiene tope. Sin embargo, algunas veces el Contexto representa un “semiretículo”. Vamos a ilustrar mejor esto considerando el llamado “Principio del Tercio Excluido” de la lógica clásica, según el cual, los únicos posibles valores de verdad para una afirmación son “verdadero” o “falso”, pero no ambos.

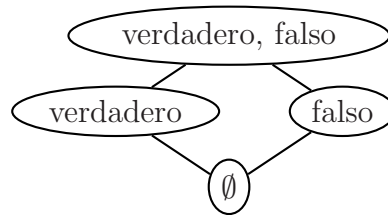
Sin embargo, hay otras lógicas que no asumen el Principio del Tercio Excluido, como la lógica trivalente de Łukasiewicz en la cual los posibles valores de verdad son “verdadero”, “falso” y “posible” [Urq01]. A continuación vamos a comparar estas lógicas usando conceptos formales. El siguiente contexto muestra los tres valores de verdad de la lógica de Łukasiewicz.

	verdadero	falso
{verdadero}	X	
{falso}		X
{verdadero,falso}	X	X
	verdadero	falso

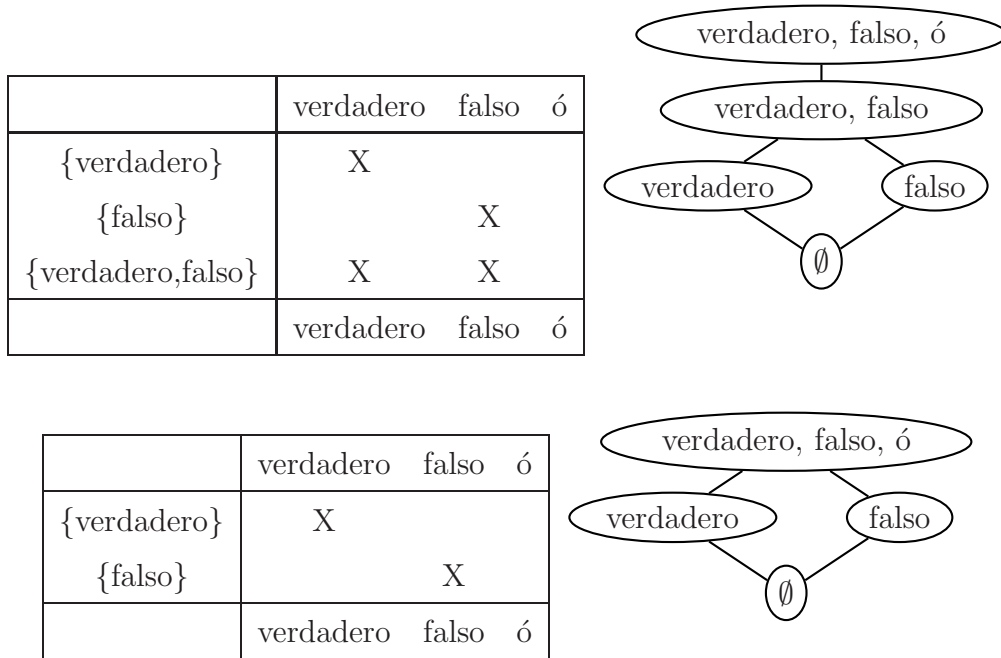


El siguiente Contexto presenta el caso de la lógica clásica. Sin embargo, no se ve cambio en el retículo conceptual.

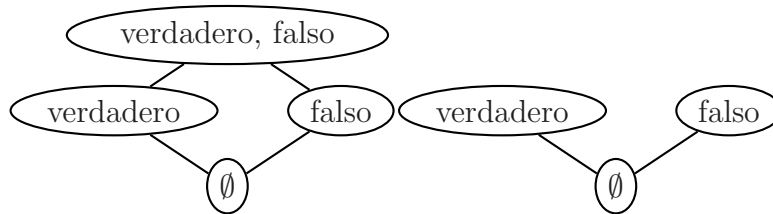
	verdadero	falso
{verdadero}	X	
{falso}		X
	verdadero	falso



Ahora presentaremos la propuesta de Contextos que generan retículos de comprensión que sí diferencian las dos lógicas. La propuesta radica en que se adiciona un atributo “prohibido” para todos los sujetos (ó).



Si solamente consideramos los conceptos que no tienen el atributo “ó” entonces obtenemos los siguientes diagramas que representan mejor los valores de verdad de las lógicas de Łukasiewicz y clásica.



A continuación se definen formalmente los elementos prohibidos y sus respectivos Contextos y morfismos.

7.1. Contexto con prohibición y enlace con prohibición

7.1.1. Definición de Contexto con prohibición y enlace con prohibición. Sea $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ un Contexto aproximable. Un atributo $m \in M$ es una **prohibición** si no tiene ningún sujeto, (i.e. $\overleftarrow{R}(\{m\}) = \emptyset$). El conjunto de todas las prohibiciones de \mathcal{R} se denota como $Forb_{\mathcal{R}}$.

Un **Contexto con prohibición** es un Contexto aproximable $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ tal que

$$Forb_{\mathcal{R}} \neq \emptyset. \tag{7.1}$$

Es sencillo ver que en un Contexto con prohibición, $m \in M$ es una prohibición si y sólo si el cantonear de $\{m\}$ es M .

$$Forb_{\mathcal{R}} = \{m \in M \mid \overrightarrow{R}(\{m\}) = M\}. \quad (7.2)$$

Esto nos permite concluir que en un Contexto con prohibición, la única comprensión con prohibición es M . A todas las demás comprensiones sin prohibiciones las llamaremos **comprensiones permitidas**, ya que se usarán frecuentemente. La siguiente equivalencia resulta evidente en un Contexto con prohibición, para toda comprensión B .

$$B \text{ es comprensión permitida,} \quad (7.3)$$

$$Forb_{\mathcal{R}} \cap B = \emptyset, \quad (7.4)$$

$$B \neq M. \quad (7.5)$$

Un **enlace con prohibición** es un enlace aproximable $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ donde $\mathcal{R}_1 = \langle G_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle G_2, M_2, R_2 \rangle$ son Contextos con prohibición y \mathcal{S}_1 preserva comprensiones permitidas. Esta definición se puede escribir con cualquiera de las sentencias equivalentes (7.6), (7.7) o (7.8) que están a continuación. Para toda comprensión B de \mathcal{R}_1

$$(Forb_{\mathcal{R}_1} \cap B = \emptyset) \Rightarrow (Forb_{\mathcal{R}_2} \cap \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(B) = \emptyset), \quad (7.6)$$

$$(\overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(B) = M_2) \Rightarrow (B = M_1), \quad (7.7)$$

o para todo subconjunto de objetos $A \subseteq G_1$

$$(\overrightarrow{S_1}(A) = M_2) \Rightarrow (\overrightarrow{R_1}(A) = M_1) \quad (\mathcal{S}_1 \text{ preserva permitidas}). \quad (7.8)$$

7.1.2 Ejemplo. Del Ejemplo 3.3.6, R_f , $R_{\mathbb{Q}}$ y R_{Σ} no son Contextos con prohibición. En cambio $R_{\mathbb{N}}$ sí lo es.

Un Contexto aproximable sin prohibición se convierte en un Contexto con prohibición al adicionarle un nuevo atributo.

7.1.3 Ejemplo. Vamos a definir la versión con prohibición \mathcal{R}_f del Contexto R_f de 3.3.6. Se define $\mathcal{R}_f = \langle G_f, M_f, R_f \rangle$ con $G_f = G_f$, $M_f = M_f \cup \{\sigma\}$ y $R_f = R_f$, donde σ es un elemento que no pertenece a M_f . De esta misma forma se definen los Contextos $\mathcal{R}_{\dot{\mathbb{Q}}}$ y $\mathcal{R}_{\dot{\Sigma}}$.

7.1.4. Definición de la categoría DIS. La categoría DIS es una subcategoría de la categoría APX en la que los Contextos se restringen a los Contextos con prohibición y los morfismos se restringen a los enlaces con prohibición. El nombre DIS se debe a que los conceptos se dispersan, a diferencia de la categoría APX, donde los conceptos se reúnen en el tope.

A continuación se presentan dos proposiciones necesarias para mostrar que la categoría DIS está bien definida.

7.1.5 Proposición. Si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ son enlaces con prohibición entonces $S_2 \square S_1$ es un enlace con prohibición.

Demostración. Como la categoría \mathbb{APX} está bien definida (6.1.4) sólo se necesita probar que la composición de enlaces con prohibición preserva comprensiones permitidas. Suponga que $A \subseteq G_1$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_1 \square S_2}(A) = M_3 &\Rightarrow \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) = M_3 && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{R_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(A) = M_2 && \overrightarrow{S_2} \text{ preserva permitidas (7.8),} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{S_1}(A) = M_2 && \overrightarrow{S_1} \text{ ignora cantonear (4.1) ,} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{R_1}(A) = M_1 && \overrightarrow{S_1} \text{ preserva permitidas (7.8).} \end{aligned}$$

□

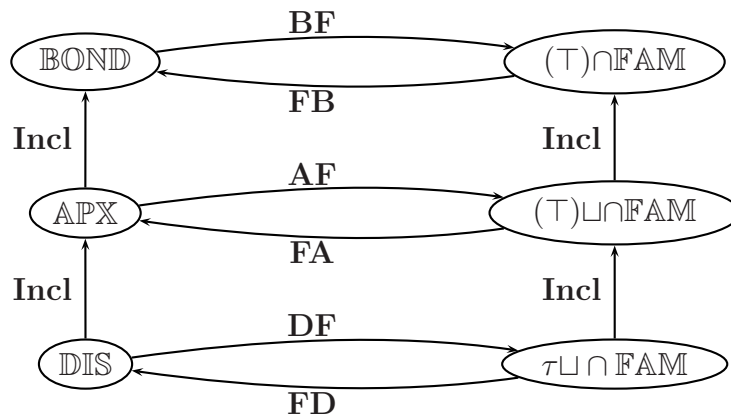
7.1.6 Proposición. Si $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es un Contexto con prohibición entonces $id_{\mathcal{R}} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, R \rangle$ es un enlace con prohibición.

Demostración. Como la categoría \mathbb{APX} está bien definida, ver 6.1.4, sólo es necesario probar que la identidad preserva comprensiones permitidas y esto se deduce usando 7.8, ya que $\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{R_1}$. □

Ahora se puede concluir que

7.1.7 Teorema. DIS es una subcategoría de \mathbb{APX} .

7.2. La equivalencia entre $\tau \sqcup \cap \text{FAM}$ y DIS



7.2.1. Los funtores \mathbf{DF} y \mathbf{FD} y el isomorfismo natural \mathcal{N}'' . Para probar la equivalencia entre las categorías \mathbf{DIS} y $\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}$ se procederá de manera similar que en la Sección 6.2, restringiendo la equivalencia $\langle \mathbf{FA}, \mathbf{AF}, \mathcal{I}d_{(\top)\sqcup\cap\mathbf{FAM}}, \mathcal{N}' \rangle$ a las categorías \mathbf{DIS} y $\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}$. Para lo cual se define:

- \mathbf{DF} como el funtor \mathbf{AF} restringido a \mathbf{DIS} .
- \mathbf{FD} como el funtor \mathbf{FA} restringido a $\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}$.
- $\mathcal{N}'' = \{\mathcal{N}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{N}' \mid \mathcal{R} \text{ es un Contexto con prohibición}\}$.

Para poder probar la equivalencia de categorías usando 1.1.5, se necesitan probar primero los siguientes incisos:

- (I) Si $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es un Contexto con prohibición entonces $\mathcal{M}_R = \mathbf{AF}(\mathcal{R})$ es una $\tau\sqcup\cap$ -familia, porque $Forb_{\mathcal{R}}$ es el conjunto no vacío de los elementos aislados.
- (II) Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ es un enlace con prohibición entonces $(f_S : \mathcal{M}_{R_1} \rightarrow \mathcal{M}_{R_2}) = \mathbf{AF}(\mathcal{S})$ es un homomorfismo entre $\tau\sqcup\cap$ -familias porque el tope se preserva fuertemente, como se muestra a continuación. Supóngase que $L \in \mathcal{M}_{R_1}$,

$$\begin{aligned} f_S(L) = M_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{S} \overleftarrow{R_1}(L) = M_2 && \text{por la definición de } f_S \text{ (5.1.1),} \\ &\Leftrightarrow L = M_1 && \begin{cases} (\Rightarrow) \text{ por (7.7),} \\ (\Leftarrow) \text{ porque } \overleftarrow{R_1}(\{M_1\}) = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

- (III) Si $\langle \mathcal{M}, X \rangle$ es una $\tau\sqcup\cap$ -familia entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{M}, X, R_{\mathcal{M}} \rangle := \mathbf{FA}(\mathcal{M})$ es un Contexto con prohibición porque cada elemento aislado a es una prohibición, como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}}(\{a\}) \\ &= \bigcap \{L \in \mathcal{M} \mid a \in L\} && \overrightarrow{\overleftarrow{R_{\mathcal{M}}}}(\{a\}) \text{ es } \cap \text{ de comprensiones (5.4),} \\ &= \bigcap \{X\} && \text{por la definición de elemento aislado (2.36),} \\ &= X. \end{aligned}$$

- (IV) Si $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ es un homomorfismo entre $\tau\sqcup\cap$ -familias entonces el enlace definido como $\mathcal{S}_f = \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_2}, S_f \rangle := \mathbf{FA}(f)$ es un enlace con prohibición porque \mathcal{S}_f preserva permitidas, ya que en $f = \overrightarrow{S_f} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_1}}$ (5.8) el tope se preserva fuertemente (2.37).

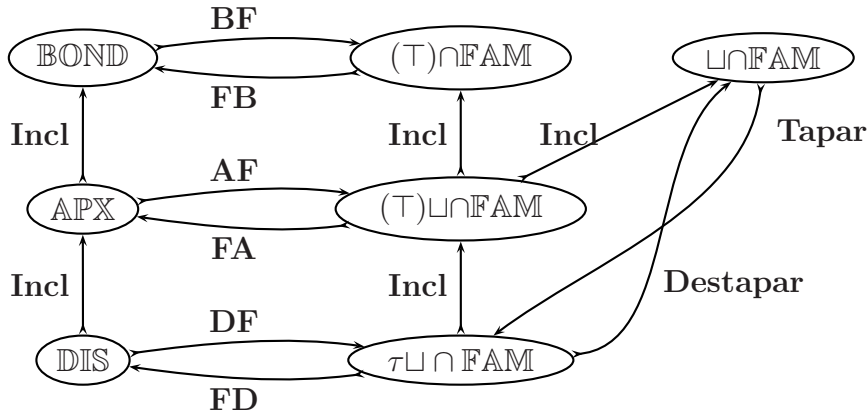
- (V) $id_{\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}}$ es el isomorfismo natural de $id_{(\top)\sqcup\cap\mathbf{FAM}}$ restringido a $\tau\sqcup\cap\mathbf{FAM}$.

(VI) Si $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ es un Contexto con prohibición entonces $\mathcal{N}'_R := \langle \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, \mathcal{R}, R_{\mathcal{M}_R} \rangle$ y $\mathcal{N}'_R^{-1} := \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}_R}, R \rangle$ son enlaces con prohibición porque preservan permitidas (7.7) como se muestra a continuación. Si B es una comprensión de \mathcal{R} (e. i. $B \in \mathcal{M}_R$) entonces

$$\begin{aligned} \overleftarrow{R}_{\mathcal{M}_R}(B) = M_{\mathcal{M}_R} &\Rightarrow \overleftrightarrow{R}(B) = M_{\mathcal{M}_R} && \text{porque } \overrightarrow{R} \overleftarrow{R} = \overrightarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \overleftarrow{R_{\mathcal{M}_R}} \quad (5.16), \\ &\Rightarrow \overleftrightarrow{R}(B) = M && \text{porque } M = M_{\mathcal{M}_R}, \\ &\Rightarrow B = M && \text{como } B \in \mathcal{M}_R \text{ entonces } B = \overleftrightarrow{R}(B). \end{aligned}$$

para \mathcal{N}'_R^{-1} es similar.

Entonces $\langle \mathbf{DF}, \mathbf{FD}, id_{\tau \sqcup \cap \mathbf{FAM}}, \mathcal{N}'' \rangle$ es una equivalencia entre $\tau \sqcup \cap \mathbf{FAM}$ y \mathbf{DIS} y por lo tanto se puede concluir el siguiente teorema.



7.2.2 Teorema. *Las categorías \mathbf{DIS} , $\tau \sqcup \cap \mathbf{FAM}$ y $\sqcup \cap \mathbf{FAM}$ son equivalentes.*

Una versión débil de este resultado nos permite hacer corresponder los enlaces con un atributo prohibido con las conexiones de Galois entre \cap -familias, al considerar las respectivas categorías que no exigen que se preserve las uniones de dirigidos.

7.3. Los contextos con prohibición y los sistemas de información de Scott

Los Contextos con prohibición están en correspondencia con los SIS debido a que cada uno está en correspondencia con las \cap -familias. A continuación veremos esta correspondencia de manera directa.

7.3.1. Construcción de Contextos con prohibición a partir de Sistemas de Información de Scott. Con un SIS $\langle T, Con, \vdash \rangle$ podemos construir el Contexto con prohibición $\mathcal{R}_+ = \langle G_+, M_+, R_+ \rangle$, donde G_+ está formado por los conjuntos consistentes, M_+ es el conjunto de los *tokens* T unido con un elemento que no pertenece a T , por ejemplo T (asumiendo la teoría de conjuntos clásica). La relación binaria R_+ relaciona un conjunto consistente C con un *token* t , si t puede ser deducido por algún subconjunto finito $K \in C$, es decir

$$G_+ := \{C \subseteq T \mid (\forall K \in C) K \in Con\}, \quad (7.9)$$

$$M_+ := T \cup \{T\}, \quad (7.10)$$

$$R_+ := \{\langle C, t \rangle \in G_+ \times M_+ \mid \exists (K \in C)[K \vdash t]\}. \quad (7.11)$$

7.3.2 Ejemplo. A continuación se presentan los Contextos con prohibición que generan los SIS de los Ejemplos 1.2.2 y 1.2.3.

	a	b	$\{a, b\}$
\emptyset			
$\{a\}$	X		
$\{b\}$		X	
	a	b	$\{a, b\}$

	a	b	c	$\{a, b, c\}$
\emptyset				
$\{a\}$	X	X		
$\{b\}$	X	X		
$\{a, b\}$	X	X		
$\{c\}$			X	
	a	b	c	$\{a, b, c\}$

Es inmediato ver que $\mathcal{R}_+ = \langle G_+, M_+, R_+ \rangle$ es un Contexto. Para poder probar que efectivamente es un contexto con prohibición se necesita probar antes algunas propiedades de este Contexto.

7.3.3 Proposición. Usando la notación anterior se cumplen las siguientes afirmaciones

(I) Si $K \in Con$ se cumple que $K \vdash t$ si y sólo si $t \in \overrightarrow{R_+}(\{K\})$.

(II) $\overrightarrow{R_+}(\{T\}) = M_+$.

- (III) Si $\{T\} \in B \subset M_+$ entonces $\overrightarrow{R_+}(B) = M_+$.
- (IV) Si $T \ni K \notin \text{Con}$ entonces $\overrightarrow{R_+}(K) = M_+$.
- (V) Si $T \supseteq B$ no es consistente entonces $\overrightarrow{R_+}(B) = M_+$.
- (VI) Si $B \subseteq T$ y B es consistente entonces $B \in \overleftarrow{R_+}(B)$.
- (VII) Si $B \subseteq T$ y B es consistente entonces $\overrightarrow{R_+}(B) \neq M_+$.
- (VIII) Si $K \in \text{Con}$, $t \in \overrightarrow{R_+}(\{K\})$ y $C \in \overleftarrow{R_+}(K)$ entonces $t \in \overrightarrow{R_+}(C)$.
- (IX) Si $K \in \text{Con}$ entonces $\overrightarrow{R_+}(\{K\}) = \overrightarrow{R_+}(K)$.
- (X) Si $B \subseteq M$ se cumple que $\overrightarrow{R_+}(B) = \bigcup_{K \in B} \overrightarrow{R_+}(K)$.
- (XI) $\mathcal{R}_+ = \langle G_+, M_+, R_+ \rangle$ es un contexto con prohibición.
- (XII) C es un elemento de $\langle T, \text{Con}, \vdash \rangle$ si y sólo si C es una comprensión permitida de $\mathcal{R}_+ = \langle G_+, M_+, R_+ \rangle$.

Demostración. ■ Prueba de (I). Es inmediato de la definición de R_+ y de la definición de las funciones polares en la Sección 3.3.

- Prueba de (II). Porque $\overleftarrow{R_+}(\{T\}) = \emptyset$.
- Prueba de (III). Porque $M_+ = \overrightarrow{R_+}(\{T\}) \subseteq \overrightarrow{R_+}(B) \subseteq M_+$ debido a (3.21).
- Prueba de (IV). Porque ningún consistente $C \in G_+$ pertenece a $\overleftarrow{R_+}(K)$, porque si pertenece contradice (IS3).
- Prueba de (V). Como B no es consistente entonces existe $K \in B$ tal que $K \notin \text{Con}$ y por (IV) y por (3.18) se tiene que $\emptyset = \overleftarrow{R_+}(K) \supseteq \overleftarrow{R_+}(B)$.
- Prueba de (VI). Debido a (IS4).
- Prueba de (VII). Si B es consistente entonces por (VII) $B \in \overleftarrow{R_+}(B)$, y como $\{T\} \notin \overrightarrow{R_+}(\{B\})$ entonces $\{T\} \notin \overrightarrow{R_+}(B)$ y por lo tanto $\overrightarrow{R_+}(B) \neq M_+$.
- Prueba de (VIII). Si $C \in \overleftarrow{R_+}(K)$ entonces para cada $k \in K$ existe un $J_k \in C$ tal que $J_k \vdash k$. Definamos $J = \bigcup_{k \in K} J_k$, entonces $J \in C$ tal que para cada $k \in K$ se tiene que $J_k \vdash k$. Usando la hipótesis y por (IS5) podemos concluir que $J \vdash t$.

- Prueba de (IX). (\subseteq) por el item (VIII) haciendo $C = K$, ya que (VI) lo permite.
 (\supseteq) por el item (VI) tenemos que $K \subseteq \overleftarrow{R}_+(K)$ y por 3.20 se tiene que $\overrightarrow{R}_+(\{K\}) \supseteq \overleftarrow{R}_+(K)$.
- Prueba de (X). Vamos a dividir la prueba en tres casos: Caso 1, si $\{T\} \in B$ entonces $\overleftarrow{R}_+(B) = M_- = \bigcup_{K \in B} \overleftarrow{R}_+(B)$ por (III). Caso 2, si $B \subseteq T$ pero B no es consistente entonces $\overleftarrow{R}_+(B) = M_- = \bigcup_{K \in B} \overleftarrow{R}_+(B)$ por (V). Caso 3, si $B \subseteq T$ y B es consistente entonces veamos cada una de las contenencias:
 (\subseteq) Si $t \in \overleftarrow{R}_+(B)$ entonces por la definición de función polar (ver sec. 3.3) se tienen que para todo $C \in \overleftarrow{R}_+(B)$ existe $K_C \in C$ tal que $t \in \overrightarrow{R}_+(\{K_C\})$. Por (VI) podemos hacer $C = B$ y por (IX) se tiene que $t \in \overrightarrow{R}_+(K_B) \subseteq \bigcup_{K \in B} \overleftarrow{R}_+(B)$.
 (\supseteq) Por (VI) se tiene que $\{K\} \subseteq \overleftarrow{R}_+(K)$, y por (3.20) se tienen que $\overrightarrow{R}_+(\{K\}) \supseteq \overleftarrow{R}_+(K)$.
- Prueba de (XI). Por (X) tenemos que \mathcal{R}_- es un contexto aproximable. Además por (II) vemos que $\{T\}$ es una prohibición.
- Prueba de (XII). Sea $C \subseteq M_-$. Supongamos primero que C es un elemento del Sistema de Información. Hay que probar que C es una comprensión y que además es una comprensión permitida. Para probar que C es una comprensión basta con probar que $C = \overleftarrow{R}_+(C)$. Que $C \subseteq \overleftarrow{R}_+(C)$ se tiene debido a (3.22). A continuación probamos $C \supseteq \overleftarrow{R}_+(C)$.

$$\begin{aligned}
t \in \overleftarrow{R}_+(C) &\Rightarrow (\exists K \in Con)[K \in C \text{ y } t \in \overleftarrow{R}_+(K)] && \text{por (X),} \\
&\Rightarrow (\exists K \in Con)[K \in C \text{ y } t \in \overrightarrow{R}_+(\{K\})] && \text{por (IX),} \\
&\Rightarrow (\exists K \in Con)[K \in C \text{ y } K \vdash t] && \text{por (I),} \\
&\Rightarrow t \in C && \text{porque } C \text{ es } \vdash\text{-cerrado.}
\end{aligned}$$

Por (VII) se tiene que es una comprensión permitida.

Segundo supongamos que C es una comprensión permitida. Hay que probar que es consistente y \vdash -cerrada. Para probar que es consistente usamos la contra-recíproca es decir vamos a mostrar que si C no es consistente entonces no es una comprensión permitida y esto se debe a (III) y a (V). Para probar que es \vdash -cerrada se sigue de las propiedades (X), (IX) y (I). \square

7.3.4. Construcción de Sistemas de Información de Scott a partir de Contextos con prohibición. A partir de un Contexto con prohibición $\mathcal{R} = \langle G, M, R \rangle$ podemos construir el SIS $\langle T_R, Con_R \vdash_R \rangle$, en donde

$$T_R := M \setminus Forb_{\mathcal{R}}, \tag{7.12}$$

$$Con_R := \{K \in T_R \mid \overrightarrow{R}(K) \neq M\}, \quad (7.13)$$

$$\vdash_R := \{\langle K, t \rangle \in T_R \times Con \mid t \in \overrightarrow{R}(K)\}. \quad (7.14)$$

7.3.5 Ejemplo. A continuación se aplica esta construcción al Contexto con prohibición $\mathcal{R}_{\dot{\Sigma}}$ que se presentó en la Sección 7.1.3.

- $T_R := \Sigma^*$,
- $Con_R := \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in \Sigma^* \mid (\forall i, j = 1, \dots, n) \sigma_i \leq \sigma_j \text{ o } \sigma_j \leq \sigma_i\}$,
- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \vdash_R \tau \Leftrightarrow (\exists i = 1, \dots, n) \tau < \sigma_i$.

7.3.6 Proposición. *El Sistema de Información $\langle T_R, Con_R, \vdash_R \rangle$ está bien definido, además sus elementos están en correspondencia biunívoca con las comprensiones permitidas del Contexto \mathcal{R} .*

Demostración. Para demostrar que está bien definido debemos mostrar que cumple con los axiomas (SIS1) al (SIS5).

- Prueba de (SIS1). Se debe a que \overrightarrow{R} preserva el orden (3.21).
- Prueba de (SIS2). Se debe a la definición de T_R .
- Prueba de (SIS3). Si $K \vdash_R t$ entonces por la definición de \vdash_R y de Con_R se tiene que $t \in \overrightarrow{R}(K) \neq M$, esto implica que $K \subseteq K \cup \{t\} \subseteq \overrightarrow{R}(K)$. Aplicando el hecho que \overrightarrow{R} preserva el orden (3.21) se tiene que $\overrightarrow{R}(K) \subseteq \overrightarrow{R}(K \cup \{t\}) \subseteq \overrightarrow{R}(K)$. Como $\overrightarrow{R} = \overleftarrow{R}$ (3.18) entonces se tiene que $\overrightarrow{R}(K) = \overrightarrow{R}(K \cup \{t\}) \neq M$ y por lo tanto $K \cup \{t\} \in Con$.
- Prueba de (SIS4). Se debe a que \overrightarrow{R} es expansiva (3.22).
- Prueba de (SIS5). Esta prueba es similar a la de IS3. Por hipótesis se tiene que $K' \subseteq \overrightarrow{R}(K)$ y que $t \in \overrightarrow{R}(K')$. Aplicando el hecho que \overrightarrow{R} preserva el orden (3.21) y que doble gana (3.18), se tiene que $t \in \overrightarrow{R}(K') \subseteq \overrightarrow{R}(K) \subseteq \overrightarrow{R}(K)$. Lo cual implica que $K \vdash t$.

Para mostrar ahora la correspondencia entre las comprensiones permitidas del Contexto \mathcal{R} con los elementos del Sistema de Información $\langle T_R, Con_R, \vdash_R \rangle$, primero se asumirá que C es una comprensión permitida, es decir que $\overrightarrow{R}(C) = C \neq M$ y vamos a mostrar que C es consistente y \vdash -cerrado.

Para ver que C es consistente necesitamos probar que cada subconjunto finito $K \Subset C$ está en Con . Esto se debe a que \overleftrightarrow{R} es expansiva (3.22), ya que $\overleftrightarrow{R}(K) \subseteq \overleftrightarrow{R}(C) \neq M$. Para ver que C es \vdash -cerrado supongamos que $K \vdash_R t$, entonces $t \in \overleftrightarrow{R}(K) \subseteq \overleftrightarrow{R}(C) = C$.

En la otra dirección, se asume que C es un elemento y hay que ver que C cumple que $\overleftrightarrow{R}(C) = C \neq M$. Para lo cual primero se prueba cada una de las contencencias de $\overleftrightarrow{R}(C) = C$. Para probar que $\overleftrightarrow{R}(C) \subseteq C$ hay que suponer que $t \in \overleftrightarrow{R}(C)$, entonces por el inciso (x) de la proposición 7.3.3, existe $K \Subset C$ tal que $t \in \overleftrightarrow{R}(K)$. Entonces $K \vdash_R t$ y como C es \vdash -cerrado se tiene que $t \in C$. La otra contendencia, $\overleftrightarrow{R}(C) \supseteq C$, es inmediata debido a que \overleftrightarrow{R} es expansiva (3.22). Para terminar la prueba en esta dirección, tan solo falta probar que para cada elemento C se tiene que $\overleftrightarrow{R}(C) \neq M$, o lo que es lo mismo, si $\overleftrightarrow{R}(C) = M$ entonces C no es un elemento. Como \mathcal{R} es un contexto con prohibición, entonces llamemos p una prohibición de \mathcal{R} . Usando el inciso (x) de la Proposición 7.3.3 se puede afirmar que existe $K \subseteq C$ tal que $p \in \overleftrightarrow{R}(K) = M$ y por lo tanto $K \notin Con_R$. Lo cual permite concluir que C no es consistente y por lo tanto no es un elemento. \square

Se han construido dos correspondencias, una correspondencia entre los SIS y los Contextos con prohibición y otra en la dirección opuesta. A continuación se aprecia la relación que hay entre estas correspondencias.

7.3.7 Proposición. *Si $\langle T, Con, \vdash \rangle$ es un SIS, entonces*

$$\langle T, Con, \vdash \rangle = \langle T_{R_+}, Con_{R_+}, \vdash_{R_+} \rangle.$$

Demostración. Veamos que $T = T_{R_+}$, $Con = Con_{R_+}$ y que $\vdash = \vdash_{R_+}$.

$T = T_{R_+}$ por las definiciones de T_R y R_+ .

$Con = Con_{R_+}$ se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} K \in Con_{R_+} &\Leftrightarrow \overleftrightarrow{R}(K) \neq K \in M && \text{por la Def. de } Con_R \text{ (7.13),} \\ &\Leftrightarrow K \in Con && \text{por (IV) y (VII).} \end{aligned}$$

$\vdash = \vdash_{R_+}$ se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} K \vdash_{R_+} t &\Leftrightarrow t \in \overleftrightarrow{R}_+(K) && \text{Por la Def. de } R_+ \text{ (7.14),} \\ &\Leftrightarrow t \in \overleftrightarrow{R}_+(\{K\}) && \text{por (IX),} \\ &\Leftrightarrow K \vdash t && \text{por (I).} \end{aligned} \quad \square$$

El siguiente ejemplo es un caso en el que

$$\langle G, M, R \rangle \neq \langle G_{\vdash_R}, M_{\vdash_R}, R_{\vdash_R} \rangle.$$

7.3.8 Ejemplo. Recordemos que en el Ejemplo 7.3.5 se partió del Contexto con prohibición \mathcal{R}_{Σ} y se creó el Sistema de Información

- $T_R := \Sigma^*$,
- $Con_R := \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in \Sigma^* \mid (\forall i, j = 1, \dots, n) \sigma_i \leq \sigma_j \text{ o } \sigma_j \leq \sigma_i\}$,
- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \vdash_R \tau \Leftrightarrow (\exists i = 1, \dots, n) \tau < \sigma_i$.

Ahora, a partir de este Sistema de Información se crea el siguiente Contexto con prohibición

- $G_{\vdash} := \{\Lambda \subseteq \Sigma^* \mid (\exists \tau \in \Sigma^{**})(\forall \sigma \in \Lambda) \sigma \leq \tau\}$,
- $M_{\vdash} := \Sigma^* \cup \{\Sigma^*\}$,
- $\Lambda R_{\vdash} \tau \Leftrightarrow (\exists \sigma \in \Lambda) \tau \leq \sigma$.

Este último Contexto es diferente al Contexto \mathcal{R}_{Σ} que dio origen al SIS.

8 Las Categorías CONSIG y CORD

Se concluyó el capítulo anterior en que hay una correspondencia biyectiva entre los SIS y los Contextos con prohibición. Sin embargo, los enlaces con prohibición no corresponden con las funciones aproximables descritas en la Sección 1.2.8, debido a que una preserva intersecciones y la otra no. En este capítulo presentamos las categorías CONSIG y CORD de Contextos. Se muestra que la categoríaCORD sí resulta equivalente a la categoría SISINF.

8.1. La categoría CONSIG

Esta categoría busca capturar, en los Contextos, la idea de consistencia de los sistemas de información. Con el fin de transformar algunas propiedades de las intersecciones no vacías de los Contextos en propiedades de las uniones finitas de los sistemas de información, se van a usar de manera implícita las leyes de De Morgan.

8.1.1. Los objetos de la categoría CONSIG. Un **Contexto con consistencia** $\langle \mathcal{F}, M, R \rangle$ es un Contexto donde se distingue un atributo $\mu_R \in M$ llamado la **consistencia**. A los demás atributos se les conoce como *tokens*, denotados por

$$T_R := M \setminus \{\mu_R\}. \quad (8.1)$$

Los sujetos son los subconjuntos finitos de atributos.

$$\mathcal{F} := \text{Fin}(M). \quad (8.2)$$

La relación binaria R es la unión disyunta de dos relaciones,

$$R = R^T \cup R^\mu, \quad (8.3)$$

donde $R^T \subseteq \mathcal{F} \times T_R$ se define como

$$R^T := \{\langle K, t \rangle \in \mathcal{F} \times T_R \mid (K \not\ni t) \text{ y } (\mu_R \notin K)\}. \quad (8.4)$$

Con $R^\mu \subseteq \mathcal{F} \times \{\mu_R\}$ se marcan los conjuntos consistentes. Además, $R = R^T \cup R^\mu$ debe satisfacer:

$$(\forall t \in T_R)[\mu_R \in \overrightarrow{R}(\{\{t\}\})] \quad (\text{singletons son consistentes}) \quad (8.5)$$

$$(\forall K \in T_R)[\mu_R \in \overrightarrow{R}(\{K\}) \Leftrightarrow \mu_R \in \overleftarrow{R}(T_R \setminus K)] \quad (8.6)$$

(cantonear preserva consistencia)

Se dice que un conjunto de sujetos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{R_1}$ es **consistente** si $\mu_R \in \overrightarrow{R}(\mathcal{A})$. También se dice que un conjunto de atributos $B \subseteq M$ es consistente si $\overleftarrow{R}(B)$ es consistente. Si la relación tiene un subíndice como R_1 , se puede hacer referencia a T_1 y μ_1 en vez de T_{R_1} y μ_{R_1} , respectivamente. Se usará el abuso de notación $K \in \mu_R$, que hace referencia al hecho de que $K \in \overleftarrow{R}(\{\mu_R\})$ (8.16).

8.1.2. Los morfismos de la categoría CONSIG. Un **morfismo con consistencia** $S = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ es un enlace donde \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son Contextos con consistencia, tales que para todo $K \in \mathcal{F}_{R_1}$

$$\mu_1 \in \overrightarrow{R}_1(\{K\}) \Rightarrow \mu_2 \in \overrightarrow{S}(\{K\}) \quad (S \text{ preserva consistentes}), \quad (8.7)$$

$$\mu_1 \notin \overrightarrow{R}_1(\{K\}) \Rightarrow \overrightarrow{S}(\{K\}) = \emptyset \quad (\text{p. d. inconsistentes vacía}). \quad (8.8)$$

Si recordamos la definición de las funciones polares derechas (3.3), para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{R_1}$

$$\mu_{R_1} \in \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (\forall K \in \mathcal{A}) \mu_{R_1} \in \overrightarrow{R}_1(\{K\})$$

entonces es fácil ver que (8.7) y (8.8) son equivalentes, respectivamente, a las siguientes sentencias:

$$\mu_1 \in \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) \Rightarrow \mu_2 \in \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) \quad (S \text{ preserva consistentes}), \quad (8.9)$$

$$\mu_1 \notin \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) \Rightarrow \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) = \emptyset \quad (\text{p. d. de inconsistentes es vacía}), \quad (8.10)$$

las cuales son equivalentes al siguiente par de equivalencias:

$$\mu_1 \in \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mu_2 \in \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) \neq \emptyset. \quad (8.11)$$

Una propiedad inmediata que se sigue de la definición es que si $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3, Q \rangle$ es otro morfismo con consistencia, con el Contexto \mathcal{R}_1 en común, entonces S y Q tienen los mismos ‘vacíos’, como se muestra a continuación

$$[\overrightarrow{S}_1(\{K\}) = \emptyset] \Leftrightarrow [\mu_1 \notin \overrightarrow{R}_1(\{K\})] \Leftrightarrow [\overrightarrow{Q}(\{K\}) = \emptyset]. \quad (8.12)$$

Definimos la **anti-imagen (AI)** de S de la siguiente forma,

$$\tilde{S} := \{\langle K, m \rangle \in \mathcal{F}_1 \times M_2 \mid \langle K, m \rangle \notin S\}. \quad (8.13)$$

En otras palabras, para todo $K \in T_1$

$$\overrightarrow{\tilde{S}}(\{K\}) = M_2 \setminus \overrightarrow{S}(\{K\}). \quad (8.14)$$

8.1.3. Analogía entre Contextos con consistencia y los sistemas de información de Scott. Con el propósito de ilustrar los Contextos con consistencia se va a partir de un SIS $\Vdash = \langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$ y se construye el Contexto con consistencia $\mathcal{R}_{\Vdash} = \langle \mathcal{F}_{\Vdash}, M_{\Vdash}, R_{\Vdash} \rangle$ donde $M_{\Vdash} := T \cup \{\mathcal{C}on\}$. Es sencillo ver que el conjunto $\mathcal{C}on$ es un atributo consistente $\mu_R = \mathcal{C}on$ y que T es el conjunto T_R . \mathcal{F}_{\Vdash} y R_{\Vdash}^T son dados por la definición de Contexto con consistencia (ver Sección 8.1.1). R_{\Vdash}^μ se define como la relación de los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{C}on$.

$$\langle K, \mu_R \rangle \in R_{\Vdash}^\mu \Leftrightarrow K \in \mathcal{C}on. \quad (8.15)$$

El atributo μ_R del Contexto con consistencia es originado por la colección de conjuntos con consistencia $\mathcal{C}on$ del SIS $\Vdash = \langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$, entonces se puede referir μ_R como esta colección ($\mu_R = \mathcal{C}on$).

$$\mu_R = \overleftarrow{R}(\mu_R). \quad (8.16)$$

Usando (8.29) se puede relacionar el axioma (8.6) de los Contexto con consistencia con el axioma (SIS1) de los SIS.

La inferencia \vdash del SIS $\Vdash = \langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$ permite construir el morfismo con consistencia $\mathcal{S}_{\Vdash} = \langle \mathcal{R}_{\Vdash}, \mathcal{R}_{\Vdash}, S_{\Vdash} \rangle$, donde S_{\Vdash} corresponde al complemento de la relaciones de inferencia \vdash de la siguiente forma.

$$S_{\Vdash} := [(\mathcal{C}on \times T) \setminus \vdash] \cup R_{\Vdash}^\mu \quad (8.17)$$

Si la inferencia \vdash es la trivial (i. e. $K \vdash t \Leftrightarrow t \in K$) entonces el correspondiente morfismo con consistencia es la identidad, definida en 8.1.11.

8.1.4 Ejemplo. Si $\Vdash = \langle T, \mathcal{C}on, \vdash \rangle$ es el SIS del Ejemplo 1.2.2, entonces $M = \{a, b, \mathcal{C}on\}$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. \mathcal{S} se define como se muestra en la siguiente tabla

	a	b	μ		a	b	μ
\emptyset	X	X	X	\emptyset	X	X	X
$\{a\}$		X	X	$\{a\}$		X	X
$\{b\}$	X		X	$\{b\}$	X		X
$\{a, b\}$				$\{a, b\}$			
\vdots				\vdots			
M				M			
\mathcal{R}	a	b	μ	\mathcal{S}	a	b	μ
				\emptyset	X	X	X
				$\{a\}$		X	X
				$\{b\}$	X		X
				$\{a, b\}$			
				\vdots			
				M			
				\mathcal{R}	a	b	μ

8.1.5 Ejemplo. Si $\models = \langle T, \text{Con}, \vdash \rangle$ es el SIS del Ejemplo 1.2.3 entonces $M = \{a, b, c, \text{Con}\}$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. \mathcal{S} se define como se muestra en la siguiente tabla.

	a	b	c	μ		a	b	c	μ
\emptyset	X	X	X	X	\emptyset	X	X	X	X
$\{a\}$		X	X	X	$\{a\}$			X	X
$\{b\}$	X		X	X	$\{b\}$			X	X
$\{a, b\}$			X	X	$\{a, b\}$			X	X
$\{c\}$	X	X		X	$\{c\}$	X	X		X
$\{a, c\}$		X			$\{a, c\}$				
$\{b, c\}$	X				$\{b, c\}$				
$\{a, b, c\}$					$\{a, b, c\}$				
\vdots					\vdots				
M					M				
\mathcal{R}	a	b	c	μ	\mathcal{S}	a	b	c	μ
					\emptyset	X	X	X	X
					$\{a\}$		X	X	X
					$\{b\}$	X		X	X
					$\{a, b\}$			X	X
					$\{c\}$	X	X		X
					$\{a, c\}$		X		
					$\{b, c\}$	X			
					$\{a, b, c\}$				
					\vdots				
					M				
					\mathcal{R}	a	b	c	μ

8.1.6. Ejemplos. A continuación se presentan los Contextos con consistencia $\langle \mathcal{F}, M, R \rangle$ generados por los SIS del Ejemplo 1.2.4 y siguientes. Al definir M quedan definidos inmediatamente $\mathcal{F}_{\bar{f}}$ y $R_{\bar{f}}^T$ debido a (8.2) y a (8.4), respectivamente. Por lo tanto, para cada ejemplo hay que definir M , R^μ y S . R queda definido por (8.3). S se puede dividir en S^μ y S^T al igual que se dividió R . Como S^μ queda definida por (8.11) entonces sólo falta definir S^T .

8.1.7. Ejemplo con funciones parciales.

$\mathcal{R}_{\bar{f}} = \langle \mathcal{F}_{\bar{f}}, M_{\bar{f}}, R_{\bar{f}} \rangle$ y $\mathcal{S}_{\bar{f}} = \langle \mathcal{R}_{\bar{f}}, \mathcal{R}_{\bar{f}}, S_{\bar{f}} \rangle$.

- $M_{\bar{f}} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\mu\}$.

- $\{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\} \in \overleftarrow{R}_f^\mu(\mu) \Leftrightarrow (a_i = a_j \rightarrow b_i = b_j)$.
- $S_{\overline{f}}$ es la identidad (8.19).

8.1.8. Ejemplo con cadenas binarias.

$\mathcal{R}_{\overline{\Sigma}} = \langle \mathcal{F}_{\overline{\Sigma}}, M_{\overline{\Sigma}}, R_{\overline{\Sigma}} \rangle$ y $\mathcal{S}_{\overline{\Sigma}} = \langle \mathcal{R}_{\overline{\Sigma}}, \mathcal{R}_{\overline{\Sigma}}, S_{\overline{\Sigma}} \rangle$.

- $M_{\overline{\Sigma}} := \Sigma^* \cup \{\mu\}$.
- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \in \overleftarrow{R}_{\overline{\Sigma}}^\mu(\mu) \Leftrightarrow (\sigma_i \leq \sigma_j \text{ o } \sigma_j \leq \sigma_i)$ para todo $i, j \leq k$.
- $\langle Y, \sigma \rangle \notin S_{\overline{\Sigma}}^T$ si y sólo si $(\sigma \leq \tau$ para algún $\tau \in Y$ o $\mu \notin Y)$.

8.1.9. Composición e identidad. La composición de los morfismos con consistencia es la misma que la de los enlaces. Pero la identidad es diferente, como veremos en la Definición 8.1.11. Es curioso ver que todos los objetos y los morfismos de CONSIG están en BOND y además ambas categorías tienen la misma composición. Sin embargo, ¡las identidades son diferentes! (Un automorfismo f que puede llegar a ser identidad debe cumplir al menos que $f \circ f = f$. El conjunto de estos automorfismos de un objeto se pueden ordenar con la siguiente relación $(f \leq h) \Leftrightarrow [(f \circ h = f) \text{ y } (h \circ f = f)]$).

8.1.10 Proposición. Si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$, $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ son morfismos con consistencia entonces $\mathcal{S}_2 \square \mathcal{S}_1$ es un morfismo con consistencia.

Demostración. Primero se probará que $\mathcal{S}_2 \square \mathcal{S}_1$ preserva consistente (8.7). Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_1$

$$\begin{aligned}
\mu_1 \in \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) &\Rightarrow \mu_2 \in \overrightarrow{S}_1(\mathcal{A}) && S_1 \text{ preserva consistente (8.7),} \\
&\Rightarrow \mu_2 \in \overrightarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\mathcal{A}) && \overrightarrow{S}_1 \text{ ignora cantonear (4.1),} \\
&\Rightarrow \mu_3 \in \overrightarrow{S}_2 \overleftarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\mathcal{A}) && S_1 \text{ preserva consistente (8.7),} \\
&\Rightarrow \mu_3 \in \overrightarrow{S}_2 \square \overrightarrow{S}_1(\mathcal{A}) && \text{por la composición de enlaces (4.8).}
\end{aligned}$$

Ahora se probará para $\mathcal{S}_2 \square \mathcal{S}_1$ que la ‘polar derecha de inconsistentes es vacía’ (8.8), Suponga que $K \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\mu_1 \notin \overrightarrow{R}_1(\{K\}) &\Rightarrow \overrightarrow{S}_1(\{K\}) = \emptyset && \text{inconsistentes están vacíos (8.8),} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\{K\}) = \emptyset && \text{ignora cantonear (4.1),} \\
&\Rightarrow \mu_2 \notin \overrightarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\{K\}) && \text{inmediato,} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{S}_2 \overleftarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\{K\}) = \emptyset && \text{inconsistentes están vacíos (8.8),} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{S}_2 \square \overrightarrow{S}_1(\{K\}) = \emptyset && \text{por la composición de enlaces (4.8).}
\end{aligned}$$

□

8.1.11 Definición. Como el enlace identidad no satisface la propiedad de que ‘polar derecha de inconsistentes es vacía’ (8.8) entonces se requiere definir una nueva **identidad de Contexto con consistencia** de la siguiente forma

$$\widehat{\mathcal{R}} := \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, \widehat{R} \rangle \quad (8.18)$$

donde

$$\widehat{R} := \{ \langle K, m \rangle \in R \mid \langle K, \mu_R \rangle \in R \} \quad \left(\begin{array}{l} \text{identidad de Contexto} \\ \text{con consistencia} \end{array} \right). \quad (8.19)$$

Las siguientes implicaciones se siguen de la Definición (8.19) y de la Definición de Función Polar (3.3). Si $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, M, R \rangle$ es un Contexto con consistencia entonces para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ se tiene:

$$\mu_R \in \overrightarrow{R}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mu_R \in \overrightarrow{\widehat{R}}(\mathcal{A}), \quad (8.20)$$

$$\mu_R \in \overrightarrow{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow \overrightarrow{\widehat{R}}(\mathcal{A}) = \overrightarrow{R}(\mathcal{A}) \quad \text{(identidad de consistente)}, \quad (8.21)$$

$$\mu_R \notin \overrightarrow{R}(\mathcal{A}) \Rightarrow \overrightarrow{\widehat{R}}(\mathcal{A}) = \emptyset \quad \text{(identidad de inconsistente)}. \quad (8.22)$$

Esto permite ver que \widehat{R} es un morfismo con consistencia (8.7) y (8.8). Veamos ahora que también cumple los axiomas de una identidad categórica (1.3).

8.1.12 Proposición. Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ es un morfismo con consistencia entonces

$$S \square \widehat{R}_1 = S, \quad (8.23)$$

$$\widehat{R}_2 \square S = S. \quad (8.24)$$

Demostración. Usando la equivalencia (3.7) y (3.8) es suficiente mostrar que

$$\overrightarrow{S \square \widehat{R}_1} = \overrightarrow{S},$$

$$\overrightarrow{\widehat{R}_2 \square S} = \overrightarrow{S}.$$

Sea \mathcal{A} un conjunto de sujetos de R_1 (i. e. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_1$). Primero suponga que $\mu_{R_1} \in \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S \square \widehat{R}_1}(\mathcal{A}) &= \overrightarrow{S} \overleftarrow{R}_1 \overrightarrow{\widehat{R}_1}(\mathcal{A}) && \text{por la composición de enlaces (4.8),} \\ &= \overrightarrow{S} \overleftarrow{R}_1 \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A}) && \text{identidad de consistentes (8.21),} \\ &= \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) && \overrightarrow{S} \text{ ignora contonear (4.2).} \end{aligned}$$

Similarmente con (8.24). Ahora suponga que $\mu_{R_1} \notin \overrightarrow{R}_1(\mathcal{A})$ entonces

$$\emptyset = \overrightarrow{S}(\mathcal{A}) = \overrightarrow{S \square \widehat{R}_1}(\mathcal{A}) = \overrightarrow{\widehat{R}_2 \square S}(\mathcal{A}),$$

porque todos son morfismos con consistencia que comparten \mathcal{R}_1 (8.12). \square

Entonces se puede concluir lo siguiente.

8.1.13 Proposición. *CONSIG es una categoría.*

8.1.14 Teorema. *Sea $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, M, R \rangle$ un Contexto con consistencia, entonces para todo $B \subseteq M$ y para todo $K \in M$ se tiene*

$$\overleftarrow{R}((T_R \setminus B) \cup \{\mu_R\}) = \{K \subseteq B \mid K \in \mu_R\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{familia de} \\ \text{consistentes de } B \end{array} \right), \quad (8.25)$$

$$\overleftarrow{R}(T_R \setminus B) = \{K \subseteq B \mid K \in \mathcal{F}in(T_R)\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{familia de} \\ \text{conjuntos} \\ \text{finitos de } B \end{array} \right), \quad (8.26)$$

$$\overrightarrow{R}(\{K\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mu_R \in K \\ M \setminus K & \text{si } K \in \mu_R \\ T_R \setminus K & \text{en otros casos} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{complemento} \\ \text{de finitos} \end{array} \right), \quad (8.27)$$

$$\overleftrightarrow{R}(\{K\}) = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{si } \mu_R \in K \text{ y si no} \\ \{K' \subseteq K \mid K' \in \mathcal{F}in(T_R)\} & \end{cases} \quad (\text{contonear de } K), \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \mu_R \in \overleftrightarrow{R}(T_R \setminus B) \\ \Leftrightarrow (\forall K' \in B)[\mu_R \in \overrightarrow{R}(\{K'\})] \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{cantonear de} \\ \text{consistentes} \end{array} \right), \quad (8.29)$$

y si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ es un morfismo con consistencia entonces para cualquier sujeto ($K_1 \in T_{R_1}$) de \mathcal{R}_1 y cualquier sujeto ($K_2 \in T_{R_2}$) de \mathcal{R}_2 se tiene

$$\overrightarrow{S}_1(\{K_1\}) = \begin{cases} \overrightarrow{S}_1(\{K' \mid K' \subseteq K_1\}) & \text{si } K \in \mu_R \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{p. d. de} \\ \text{subconjuntos} \end{array} \right), \quad (8.30)$$

$$K_2 \in \overleftarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\{K_1\}) \Leftrightarrow K_2 \subseteq \overrightarrow{S}(\{K_1\}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{anti-imagen de} \\ \text{unitarios} \end{array} \right), \quad (8.31)$$

y por lo tanto

$$\overleftrightarrow{S}_1(\{K_1\}) = \bigcup \overleftarrow{R}_2 \overrightarrow{S}_1(\{K_1\}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{la AI es } \cup \\ \text{de contares} \end{array} \right). \quad (8.32)$$

Demostración. De las siguientes demostraciones sobresale la prueba de (8.31).

Prueba de (8.25).

$$\begin{aligned} K \in \overleftarrow{R}(M \setminus B) \\ \Leftrightarrow (\forall b \in M \setminus B)[(b, K) \in R] \end{aligned} \quad \text{por def. de polares (3.3),}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\forall b \in T_R \setminus B)[b \notin K] \text{ y } \mu_R \ni K & \quad \{\mu_R\} = M \setminus T_R \text{ (8.1),} \\ \Leftrightarrow K \subseteq B \text{ y } K \in \mu_R & \quad \text{inmediato.} \end{aligned}$$

Prueba de (8.26).

$$\begin{aligned} K \in \overleftarrow{R}(T_R \setminus B) & \\ \Leftrightarrow (\forall b \in T_R \setminus B)[(b, K) \in R] & \quad \text{por def. de polares (3.3),} \\ \Leftrightarrow (\forall b \in T_R \setminus B)[b \notin K \text{ y } K \in \mathcal{F}_R] & \quad \text{por def. de } R \text{ (8.3),} \\ \Leftrightarrow K \subseteq B \text{ y } K \in \mathcal{F}in(T_R) & \quad \text{por hyp. y def. de } \mathcal{F} \text{ (8.2).} \end{aligned}$$

Prueba de (8.27). Si K es consistente entonces

$$\begin{aligned} b \in \overrightarrow{R}(\{K\}) \Leftrightarrow \langle K, b \rangle \in R & \quad \text{por def. de polares (3.3),} \\ \Leftrightarrow K \not\ni b \in T_R \text{ or } K \in \mu_R = b & \quad \text{por def. de } R \text{ (8.3) y (8.16),} \\ \Leftrightarrow b \in M \setminus K & \quad \text{por def. de } M \text{ (8.1).} \end{aligned}$$

Si K no es consistente la prueba es similar, pero $\mu_R \neq b$.

Prueba de (8.28). Se debe a (8.6) y a los incisos anteriores.

Prueba de (8.29). Se debe a (8.26) y a (8.6).

Prueba de (8.30). Debido a (8.6) ambos lados son iguales a $\bigcap_{K' \subseteq K_1} S_1(\{K'\})$ unido con $\{\mu_R\}$ si es consistente.

Prueba de (8.31). Si K_1 es consistente entonces

$$\begin{aligned} K_2 \in \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) \Leftrightarrow \overrightarrow{R_2}(\{K_2\}) \supseteq \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) & \quad \overrightarrow{R_2} \text{ es CG (3.5),} \\ \Leftrightarrow M_2 \setminus K_2 \supseteq \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) & \quad \text{por complemento (8.27),} \\ \Leftrightarrow K_2 \subseteq M_2 \setminus \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) & \quad \text{inmediato,} \\ \Leftrightarrow K_2 \subseteq \overrightarrow{\tilde{S}_1}(\{K_1\}) & \quad \text{por def. de } \tilde{S}_1 \text{ (8.13).} \end{aligned}$$

Si K_1 no es consistente entonces $\overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) = \mathcal{F}_2$ y $\overrightarrow{\tilde{S}_1}(\{K_1\}) = M_2$, entonces en ambos lados de (8.31), K_2 puede ser cualquier conjunto unitario de \mathcal{F}_2 .

Prueba de (8.32). Por la AI de unitarios (8.31). \square

8.1.15. Definición de la función completar $C_S()$. Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S \rangle$ un morfismo con consistencia, se va a definir la función **completar** de $\wp(M_1)$ a $\wp(M_2)$. Para todo $B \subseteq M_1$ se define

$$C_S(B) := \begin{cases} M_2 & \text{si } \mu_1 \in B, \\ M_2 \setminus (\overrightarrow{\tilde{S}} \overleftarrow{R_1}(T_1 \setminus B)) & \text{si } \mu_1 \notin B. \end{cases} \quad \text{(completar).} \quad (8.33)$$

8.1.16 Ejemplo. La función completar $C_{\overline{\Sigma}}$ del ejemplo 8.1.8 corresponde a

$$C_{\overline{\Sigma}}(B) := \begin{cases} \Sigma^* \cup \{\mu\} & \text{si } B \text{ no es consistente, de lo contrario,} \\ \{\sigma \in \Sigma^* \mid (\exists \tau \in B)\sigma \leq \tau\}. & \end{cases}$$

La función completar tiene las siguientes propiedades.

8.1.17 Teorema. Sea $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, S_1 \rangle$ un morfismo con consistencia donde, como es usual, $\mathcal{R}_1 = \langle \mathcal{F}_1, M_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{R}_2 = \langle \mathcal{F}_2, M_2, R_2 \rangle$. Las siguientes propiedades se cumplen para cualquier $K \in M_1$, $B \subseteq M_1$, cualquier conjunto dirigido $\mathcal{D} \subseteq \wp(M_1)$ y cualquier familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_1$

$$C_{S_1}(B) = \bigcup \{ \overrightarrow{\widetilde{S}_1}(\{K\}) \mid K \in B \} \quad \left(\begin{array}{l} \text{unión de AIs} \\ \text{de conjuntos finitos} \end{array} \right), \quad (8.34)$$

$$B \subseteq B' \Rightarrow C_{S_1}(B) \subseteq C_{S_1}(B') \quad (C_{S_1} \text{ es monótona}), \quad (8.35)$$

$$C_{S_1}(K) = \overrightarrow{\widetilde{S}_1}(\{K\}) \quad \left(\begin{array}{l} C_{S_1} \text{ de conjuntos} \\ \text{finitos es su AI} \end{array} \right), \quad (8.36)$$

$$C_{S_1}(K) = \bigcup \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{K_1\}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{completar es } \cup \\ \text{de contares} \end{array} \right). \quad (8.37)$$

$$C_{S_1}(B) = \bigcup_{K \in B} C_{S_1}(K) \quad \left(\begin{array}{l} \text{completar es } \cup \\ \text{de conjuntos finitos} \end{array} \right), \quad (8.38)$$

$$C_{S_1}\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C_{S_1}(D) \quad (C_{S_1} \text{ preserva } \sqcup). \quad (8.39)$$

Si $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, S_2 \rangle$ es otro morfismo con consistencia entonces

$$\overrightarrow{\widetilde{S_2 \square S_1}}(\{K\}) = C_{S_2}(C_{S_1}(K)) \quad (\text{AIs de composición}), \quad (8.40)$$

$$C_{S_2 \square S_1} = C_{S_2} \circ C_{S_1} \quad \left(\begin{array}{l} C_S \text{ preserva} \\ \text{composiciones} \end{array} \right). \quad (8.41)$$

Demostración. Prueba de (8.34).

$$\begin{aligned} m \in M_2 \setminus \overleftarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(T_1 \setminus B) & \\ \Leftrightarrow m \in M_2 \text{ y } m \notin \overleftarrow{S_1} \overleftarrow{R_1}(T_1 \setminus B) & \quad \text{inmediato,} \\ \Leftrightarrow m \in M_2, (\exists K \in \overleftarrow{R_1}(T_1 \setminus B))(K, m) \notin S_1 & \quad \text{por def. de polares (3.3),} \\ \Leftrightarrow (\exists K \in B \cap T_1) m \in \widetilde{S}_1(\{K\}) & \quad \text{conjuntos finitos de } B \text{ (8.26),} \\ \Leftrightarrow m \in \bigcup (\{ \overrightarrow{\widetilde{S}_1}(\{K\}) \mid K \in B \cap T_1, \}) & \quad \text{inmediato.} \end{aligned}$$

Prueba de (8.35). Suponga que $B \subseteq B'$

$$\begin{aligned}
 m \in C_{S_1}(B) &\Leftrightarrow (\exists K \in B \cap T_1) m \in \overrightarrow{S}(\{K\}) && \text{por } \cup \text{ de AIs (8.34),} \\
 &\Rightarrow (\exists K \in B' \cap T_1) m \in \overrightarrow{S}(\{K\}) && \text{porque } B \subseteq B', \\
 &\Leftrightarrow m \in C_{S_1}(B') && \text{por } \cup \text{ de AIs (8.34).}
 \end{aligned}$$

Prueba de (8.36). Usando la \cup de AIs (8.34).

Prueba de (8.37). Inmediato de 8.32 y de 8.36.

Prueba de (8.38). Por \cup de AIs (8.34).

Prueba de (8.39). Esta prueba es algo familiar

$$\begin{aligned}
 C_{S_1}\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} (D)\right) &= \bigcup_{K \in \bigcup \mathcal{D}} C_{S_1}(K) && \text{completar es } \cup \text{ de finitos (8.38),} \\
 &= \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup_{K \in D} C_{S_1}(K) && \left\{ \begin{array}{l} (\supseteq) \text{ inmediato,} \\ (\subseteq) \text{ como } \mathcal{D} \text{ es dirigido existe} \\ \quad D \in \mathcal{D} \text{ tal que } K \in D, \end{array} \right. \\
 &= \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C_{S_1}(D) && \text{completar es } \cup \text{ de finitos (8.38).}
 \end{aligned}$$

Prueba de (8.40).

$$\begin{aligned}
 m \in \overrightarrow{\overrightarrow{S_2 \square S_1}}(\{K\}) &&& \\
 \Leftrightarrow (K, m) \notin S_2 \square S_1 &&& \text{por def. de polares (3.3),} \\
 \Leftrightarrow m \notin \overrightarrow{S_1} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{S_1}(\{K\}) &&& \text{composición de enlaces (4.8),} \\
 \Leftrightarrow (\exists J \in \mathcal{M}_2) m \notin \overrightarrow{S_2}(\{J\}), J \in \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{S_1}(\{K\}) &&& \text{por def. de polares (3.3),} \\
 \Leftrightarrow (\exists J \in \mathcal{M}_2) m \in \overrightarrow{S_2}(\{J\}), J \in \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{S_1}(\{K\}) &&& \text{por def. de } \widetilde{S_1} \text{ 8.1.1,} \\
 \Leftrightarrow m \in \bigcup_{J \in \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{S_1}(\{K\})} (\overrightarrow{S_2}(\{J\})) &&& \text{inmediato,} \\
 \Leftrightarrow m \in \bigcup_{J \in \overrightarrow{\overrightarrow{S_1}}(\{K\})} (\overrightarrow{S_2}(\{J\})) &&& \text{AI de unitarios (8.31),} \\
 \Leftrightarrow m \in C_{S_2}(C_{S_1}(K)) &&& \text{por } \cup \text{ de AIs (8.34).}
 \end{aligned}$$

Prueba de (8.41).

$$C_{S_2 \square S_1}(B) = \bigcup_{K \in B} (C_{S_2 \square S_1}(K)) \quad \text{completar es } \cup \text{ de finitos (8.38),}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{K \in B} (C_{S_1}(C_{S_1}(K))) && \text{composición de finitos (8.36) y (8.40),} \\
&= C_{S_1}\left(\bigcup_{K \in B} (C_{S_1}(K))\right) && \left\{ \begin{array}{l} \text{usando (8.39), porque la familia} \\ \{C_{S_1}(K) \mid K \in B\} \text{ es dirigida,} \end{array} \right. \\
&= C_{S_1}(C_{S_1}(B)) && \text{completar es } \cup \text{ de finitos (8.38).}
\end{aligned}$$

□

8.1.18. Automorfismo inferencia. Un **automorfismo inferencia** $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, S \rangle$ es un morfismo con consistencia (definido en la Sección 8.1.2) tal que para todo $K \in \mathcal{F}$

$$K \subseteq \bigcup \overleftarrow{R} \overrightarrow{S}(\{K\}) \quad (\text{inferencia es expansiva}), \quad (8.42)$$

$$\overrightarrow{S}(\{K\}) = \overrightarrow{S} \overleftarrow{R} \overrightarrow{S}(\{K\}) \quad (\text{doble inferencia gana}). \quad (8.43)$$

8.1.19 Proposición. Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, S \rangle$ es un automorfismo inferencia de un Contexto con consistencia $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, M, R \rangle$, entonces C_S es expansivo e idempotente. Esto es, para cualquier conjunto $B \subseteq M$

$$B \subseteq C_S(B) \quad (C_S \text{ es expansivo}), \quad (8.44)$$

$$C_S(B) = C_S(C_S(B)) \quad (C_S \text{ es idempotente}), \quad (8.45)$$

y entonces es un operador clausura algebraico (vea Sección 2.2.5). Más aún, satisface que

$$C_S(\{\mu_R\}) = M \quad (\mu_R \text{ esta cerca de todos}). \quad (8.46)$$

Demostración. ■ Si $\mu \in B$, C_S es expansivo por (8.33). Si $\mu \notin B$ y $b \in B$ se tiene que

$$\begin{aligned}
b &\in \bigcup \overleftarrow{R} \overrightarrow{S}(\{\{b\}\}) && \text{inferencia es expansiva (8.42),} \\
\Rightarrow b &\in \overrightarrow{S}(\{\{b\}\}) && \overrightarrow{S} \text{ es } \cup \text{ de contares (8.32),} \\
\Rightarrow b &\in C_S(\{b\}) && C_S \text{ de unitarios es AI (8.36),} \\
\Rightarrow B &\subseteq C_S(B) && C_S \text{ es } \cup \text{ de finitos (8.38).}
\end{aligned}$$

■ C_S es idempotente porque

$$\begin{aligned}
&C_S(C_S(B)) \\
&= M \setminus (\overrightarrow{S} \overleftarrow{R} (T \setminus (M \setminus (\overrightarrow{S} \overleftarrow{R} (T \setminus B)))))) && \text{función completar (8.33),} \\
&= M \setminus (\overrightarrow{S} \overleftarrow{R} \overrightarrow{S} \overleftarrow{R} (T \setminus B)) && \text{inmediato porque } T \subset M, \\
&= M \setminus (\overrightarrow{S} \overleftarrow{R} (T \setminus B)) && \text{doble inferencia gana (8.43),} \\
&= C_S(B) && \text{función completar (8.33).}
\end{aligned}$$

■ C_S es un operador clausura algebraico porque también satisface que es monótono (8.35) y que es algebraico (8.38).

■ Es directo de la Definición (8.33). □

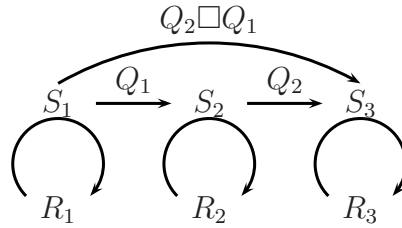
8.2. La categoría CORD

8.2.1. Definición de la categoría CORD . La categoría CORD está definida de la siguiente manera.

- Los **objetos de CORD** son automorfismos inferencia $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$.
- Los **morfismos de CORD** son triplas $Q_1 = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q_1 \rangle$ donde $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_2 \rangle$ son automorfismos inferencia y $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, Q_1 \rangle$ es un morfismo con consistencia que satisface

$$\overrightarrow{Q_1} = \overrightarrow{S_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{Q_1} \quad (Q_1 \text{ ignora cantar}) \quad (8.47)$$

$$\overrightarrow{Q_1} = \overrightarrow{Q_1} \overleftarrow{R_1} \overrightarrow{S_1} \quad (Q_1 \text{ ignora contar}) \quad (8.48)$$



- Si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1 \rangle$, $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_2 \rangle$, $\mathcal{S}_3 = \langle \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_3, \mathcal{S}_3 \rangle$ son objetos de CORD y $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q_1 \rangle$, $\langle \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, Q_2 \rangle$ son morfismos de CORD entonces la **composición de dos morfismos de CORD** es definida como la composición de los enlaces $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, Q_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, Q_2 \rangle$,

$$\langle \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, Q_2 \rangle \square \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q_1 \rangle := \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_3, Q_2 \overset{R_2}{\square} Q_1 \rangle, \quad (8.49)$$

donde $Q_2 \overset{R_2}{\square} Q_1$ es una **composición de relaciones binarias** Q_1 y Q_2 a través de R_2 , definida en (4.4) como

$$Q_2 \overset{R_2}{\square} Q_1 := \{ \langle g, m \rangle \in G_1 \times M_3 \mid m \in \overrightarrow{Q_2} \overleftarrow{R_2} \overrightarrow{Q_1}(\{g\}) \},$$

Al ser composición de enlaces se puede aplicar el resultado 4.1.5, en el que la función polar de la composición de enlaces corresponde a la composición de las funciones polares.

Como es usual, si R_2 es implícito, la composición $Q_2 \overset{R_2}{\square} Q_1$ será denotada por $Q_2 \square Q_1$. Si no hay confusión, la composición $\langle \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, Q_2 \rangle \square \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q_1 \rangle$ será también denotada como $Q_2 \square Q_1$.

- La **identidad de un objeto de CORD** $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$ es

$$id_{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}, \mathcal{S} \rangle \quad (8.50)$$

Como la definición de CORD (sec. 8.2.1) es análoga a la definición de BOND (sec. 4.1.3), resulta que la prueba que CORD esta bien definida es análoga a la prueba que BOND está bien definida (Sección 4.1.6).

8.3. El functor RL de CORD en CLO

8.3.1. Definición del functor RL. Este functor transforma un automorfismo inferencia $\mathcal{S} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{R}, S \rangle$ en la función completar (8.37)

$$C_{S_1}(K) = \bigcup \overleftarrow{R_2 S_1}(\{K_1\})$$

que es un operador clausura algebraico sobre el conjunto M (Sección 8.1.19). Donde μ_R es el elemento cercano.

$$C_S(\{\mu_R\}) = M \quad (\mu_R \text{ es cercano a todos}). \quad (8.51)$$

También transforma un morfismo de CORD $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q \rangle$ (donde $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, S_1 \rangle$ y $\mathcal{S}_2 = \langle \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2, S_2 \rangle$) en el morfismo de CLO $C_{1,2} := C_Q$ dado por la función completar (8.33) de $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, Q \rangle$.

8.3.2. El functor está bien definido. Para ver que el functor está bien definido hay que verificar que la imagen cumple los axiomas de CLO (el morfismo es compatible (2.47), (2.48) y (2.49)) y los axiomas del functor de preservar la composición y la identidad.

Como Q ignora cantar (8.47) e ignora contar (8.48) entonces es compatible con C_2 (2.47) y con C_1 (2.48). $C_{1,2}$ es compatible con inconsistentes (2.49) porque tienen los mismos vacíos (8.12). El functor preserva la composición (8.41) y también preserva las identidades debido a que Q ignora cantar (8.47) e ignora contar (8.48).

8.4. El functor LR de CLO en CORD

Este functor transforma un operador clausura algebraico C sobre X con un elemento cercano c en un automorfismo inferencia $\mathcal{S}_C = \langle \mathcal{R}_C, \mathcal{R}_C, S_C \rangle$ (definido en la sección 8.1.18) donde \mathcal{R}_C es un Contexto con consistencia c definida como

$$\mathcal{R}_C = \langle \mathcal{F}, X, R_C \rangle, \quad (8.52)$$

$$(\forall K \in T_C)[c \in \overrightarrow{R_C}(\{K\}) \Leftrightarrow C(K) = X], \quad (8.53)$$

$$(\forall K \in T_C)[\overrightarrow{S_C}(\{K\}) = C(K)]. \quad (8.54)$$

El funtor **LR** también transforma un morfismo de **CLO** $C_{1,2}$ desde C_1 en X_1 hasta C_2 en X_2 en el morfismo de **CORD** $\mathcal{Q}_{C_{1,2}} = \langle \mathcal{S}_{C_1}, \mathcal{S}_{C_2}, \mathcal{Q}_{C_{1,2}} \rangle$ donde $\mathcal{Q}_{C_{1,2}}$ se define de la siguiente forma

$$(\forall K \in T_{C_{1,2}}) [\overrightarrow{\mathcal{Q}_{C_{1,2}}}(\{K\}) = C_{1,2}(K)]. \quad (8.55)$$

8.4.1. El funtor está bien definido. Veamos ahora que el funtor está bien definido, para lo cual es necesario mostrar que \mathcal{R} es un Contexto con consistencia, que \mathcal{S}_C es un automorfismo inferencia y que $\mathcal{Q}_{C_{1,2}}$ es un morfismo de **CORD**. Además de los axiomas propios del funtor de preservar composición e identidad.

Para probar que \mathcal{R} es un Contexto con consistencia hay que probar que los singletons son consistentes (8.5) y que cantonear preserva consistencia (8.6). Los singletons son consistentes (8.5) porque el elemento cercano es único (ver Sección 8.1.1). Cantonear preserva consistencia (8.6) debido al siguiente razonamiento, el cual utiliza la notación anterior. Sea $K \in T_{C_1}$

$$\begin{aligned} c \in \overrightarrow{R_{C_1}}(\{K\}) &\Leftrightarrow C_1(\{K\}) \neq X_1 && \text{por (8.53),} \\ &\Leftrightarrow (\forall K' \subseteq K) [C_1(K') \neq X_1] && \text{por (8.35),} \\ &\Leftrightarrow (\forall K' \subseteq K) [c \in \overrightarrow{R_{C_1}}(\{K'\})] && \text{por (8.53),} \\ &\Leftrightarrow c \in \overleftarrow{R_{C_1}}(T_{C_1} \setminus K) && \text{por (8.29).} \end{aligned}$$

Para probar que \mathcal{S}_C es un automorfismo inferencia es necesario probar los axiomas de enlace (4.1) y (4.2); los axiomas de morfismo con consistencia (8.7) y (8.8); y los axiomas de automorfismo inferencia (8.42) y (8.43). \mathcal{S}_C ignora cantonear (4.1) por lo siguiente. Supongamos $K \in M_{C_1}$ consistente (ya que si es inconsistente la prueba es inmediata).

$$\begin{aligned} &\overleftarrow{R_{C_1}} \overrightarrow{S_{C_1}}(\{K\}) \\ &= \overleftarrow{R_{C_1}}(M_1 \setminus C_1(K)) && \text{por (8.54),} \\ &= \overrightarrow{R_{C_1}}(\{K' \in C_1(K) \mid K' \in c\}) && \text{por (8.25),} \\ &= \bigcap \{\overrightarrow{R_{C_1}}(\{K'\}) \mid K' \in c, K' \in C_1(K)\} && \text{por (3.19),} \\ &= \bigcap \{M \setminus K' \mid K' \in c, K' \in C_1(K)\} && \text{por (8.27),} \\ &= M \setminus \bigcup \{K' \mid K' \in c, K' \in C_1(K)\} && \text{por leyes de De Morgan,} \\ &= M \setminus C_1(K) && \text{por (2.5),} \\ &= S_{C_1}(\{K\}) && \text{por (8.54).} \end{aligned}$$

\mathcal{S}_C ignora cantonear (4.2) debido al cantonear de K y de consistentes (8.28) y (8.30). Los axiomas de un morfismo con consistencia (8.7) y (8.8) se cumplen por la definición del funtor **LR** (8.53) y (8.54). La inferencia es expansiva (8.42) debido a la Definición (8.54) y a la

anti-imagen de unitarios (8.31). Finalmente la doble inferencia gana (8.43) por la Definición (8.54), la familia de consistentes (8.25) y por la polar derecha de subconjuntos (8.30).

Para probar que Q_C es un morfismo con consistencia se procede de manera similar que con S_C . Queda pendiente probar que ignora cantar (8.47) e ignora contar (8.48), lo cual se debe a que C es compatible con los operadores clausura (2.47) y (2.48).

8.5. Isomorfismo de las categorías CLO y CORD

8.5.1. La composición RL-LR. Sea C en X , un objeto de CLO y sea $B \subseteq X$, entonces

$$\begin{aligned} C_{S_C}(B) &= \bigcup \{\overrightarrow{S_C}(\{K\}) \mid K \in B\} && \text{por (8.34),} \\ &= \bigcup \{C(K) \mid K \in B\} && \text{por (8.36),} \\ &= C(B) && \text{por (8.38).} \end{aligned}$$

Para el caso de los morfismos de CLO el procedimiento es exactamente el mismo.

8.5.2. La composición LR-RL. Si $\langle \mathcal{F}, M, R \rangle$ es un Contexto con consistencia entonces $R_{C_R} = R$ debido a las definiciones. Si $\mathcal{S}_1 = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, S_1 \rangle$ es un objeto de CORD entonces $S_{C_S} = S$ debido a (8.36) al igual que si $\mathcal{Q}_{1,2} = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, Q_{1,2} \rangle$ es un morfismo de CORD entonces $Q_{C_Q} = Q$.

Con este último resultado podemos finalmente alcanzar el objetivo principal de este capítulo enunciado en el siguiente teorema.

8.5.3 Teorema. *Las categorías CLO y CORD son isomorfas.*

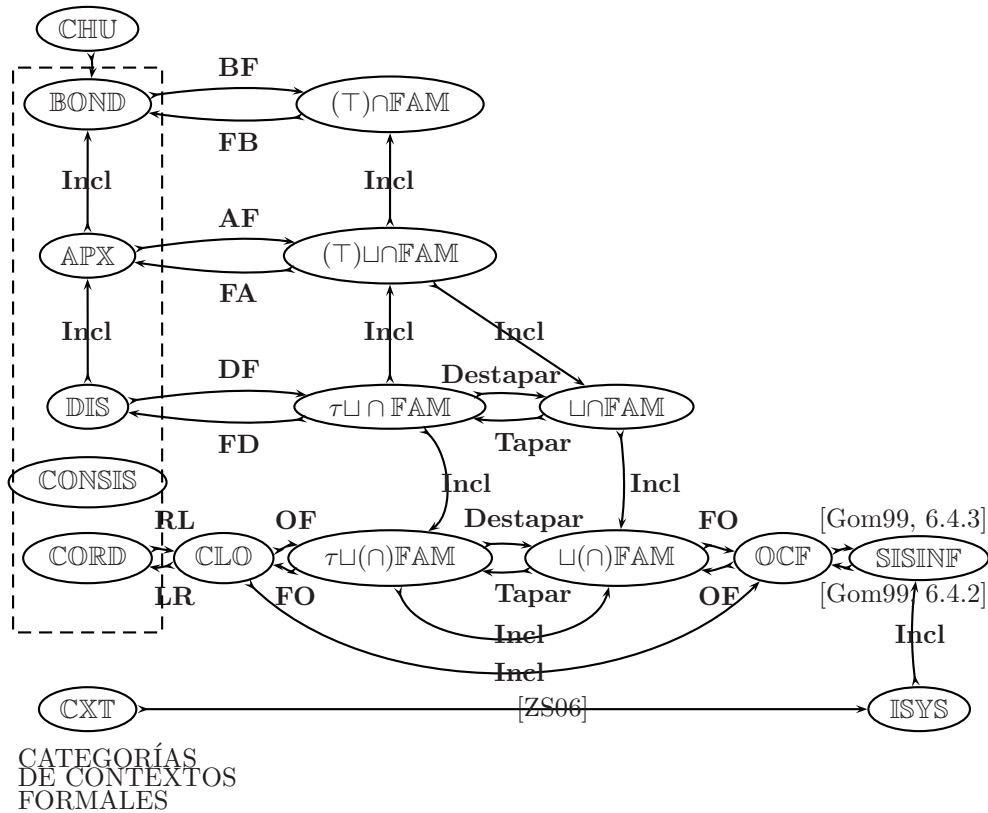
Teniendo en cuenta los resultados de la Sección 2.7.2 se concluye lo siguiente.

8.5.4 Proposición. *Las categorías CORD, CLO, $\tau\sqcup(\cap)\text{FAM}$, $\sqcup(\cap)\text{FAM OCF}$ y SISINF son equivalentes.*

8.5.5. Las categorías CXT, ISYS y CORDT. La categoría CORDT es la subcategoría plena de CORD donde todos los objetos tienen consistencia trivial, es decir todos los subconjuntos finitos de atributos son consistentes. Esta categoría resulta ser equivalente a la categoría ISYS que es la subcategoría plena de SISINF donde todos los conjuntos finitos son consistentes. En [ZS06] se muestra que SISINF es equivalente a la categoría de Contextos CXT.

Es decir que la categoría CORD generaliza la categoría de Contextos CXT y además los morfismos están basados en funciones polares.

8.5.6. Resumen de categorías. En el siguiente diagrama aparecen las categorías consideradas en el presente trabajo, las flechas indican los funtores. Los renglones representan las equivalencias de los Capítulos 5,6,7 y 8.



Bibliografía

- [AJ94] S. Abramsky, A. Jung *Domain Theory*, 1994. Obtenido vía electrónica.
- [AM75] M.A. Arbib, E.G. Manes *Arrows, Structures and Functors*, Academic Press, INC., 1975.
- [Bar79] M. Barr, **-Autonomous categories*, LNM 752, Springer-Verlag, 1979.
- [Bri67] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, XXV, 1940; tercera edición, 1967.
- [DEW04] K. Denecke, M. Ern , S.L. Wismath *Galois Connections and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [DP02] B.A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Second Edition, Cambridge University Press, 2002.
- [Gan07] B. Ganter, *Relational Galois Connections*, ICFCA 2007, Springer Verlag, 2007.
- [GEL] *Gran Enciclopedia Larousse*, tercera edici n, Librairie Larousse, Par s, 1970.
- [Gom99] J. G mez, *Sem ntica Denotacional Mediante Operadores Clausura*, Tesis de Maestr a, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matem ticas y Estad stica, 1999.
- [Gun92] C. A. Gunter, *Semantics of Programming Languages*, The MIT Press, 1992.
- [Gup94] V. Gupta, *CHU Spaces: A Model of Concurrency*, Ph.D. Thesis, Stanford University, 1994.
- [GW99] B. Ganter, R. Wille, *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations*, Springer Verlag, 1999.
- [HZ04] P. Hitzler, G.-Q Zhang, *A Cartesian Closed Category of Approximable Concept Structures*, Proceedings of the International Conference On Conceptual Structures, Huntsville, Alabama, USA, Lectures Notes in Computer Science, Springer, 2004, pages 170-185.

-
- [Kro05] M. Krötzsch, *Morphisms in Logic, Topology, and Formal Concept Analysis*, Master's Thesis, Dresden University of Technology, 2005.
- [Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1971.
- [Pie91] B. C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991.
- [RAE01] Diccionario de la lengua española, Real Academia Española, Vigésima segunda edición, 2001, www.rae.es.
- [Sco82] D. S. Scott, *Domains for denotational semantics*, Lecture Notes in Computer Science 140, M. Nielsen and E. M. Schmidt, editors, Springer-Verlag, 1982, pp. 577-613.
- [Urq01] A. Urquhart, *Basic Many-valued Logic*, Handbook of Philosophical Logic, Kluwer Academic Publishers, 2nd Edition, 2001.
- [Wil05] R. Wille, *Formal Concept Analysis as Mathematical Theory of Concepts and Concept Hierarchies*, Formal Concept Analysis, LNAI 3626, pp. 1-33, 2005. Springer-Verlag, 2005.
- [Wil84] R. Wille, *Sur la Fusion des Contextes Individuels*, Math. Sci. Hum. 85, 1984, pp 57-71.
- [Win93] G. Winskel, *The Formal Semantics of Programming Languages*, The MIT Press, 1993.
- [Zal08] F. Zalamea, *Teoría de Categorías 2008-I (Notas de clase)*, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, 2008.
- [Zha04] G. Zhang, *Chu spaces, concept lattices and domains*, Electronics Notes in Theoretical Computer Science 83, Elsevier Science B.V., 2004.
- [ZS06] G. Zhang y G. Shen, *Aproximable Concepts, Chu Spaces, and Information Systems*, Theory and Applications of Categories, Vol. 17, No. 5, 2006, pp. 80 - 102.