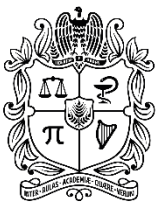


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

GeoGebra como herramienta para el desarrollo del pensamiento variacional

Oscar Orlando Garcia Melo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2021

GeoGebra como herramienta para el desarrollo del pensamiento variacional

Oscar Orlando Garcia Melo

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Doctor Omar Duque Gómez

Línea de Investigación:

TIC y otros recursos para la Enseñanza

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2021

(Dedicatoria o lema)

A mi esposa y a mis padres por su apoyo incondicional.

Declaración de obra original

Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

_____

Nombre: Oscar Orlando Garcia

Fecha: 25/11/2021

Agradecimientos

A los docentes del área de matemáticas de la Universidad Manuela Beltrán por sacar tiempo donde el tiempo es escaso.

A un buen amigo que siempre estuvo dispuesto a ayudar.

Al profe Omar por su paciencia y colaboración.

Resumen

GeoGebra como herramienta para el desarrollo del pensamiento variacional

Esta propuesta se enmarca en identificar las ventajas y desventajas de actividades de enseñanza aplicadas en lápiz y papel en comparación a las aplicadas utilizando un mediador tecnológico, para este caso GeoGebra; basando los análisis desde las consideraciones que tienen docentes de nivel universitario.

Para este fin, se presenta un marco teórico que aborda tres constructos que dan sustento a la propuesta. El primer constructo, es el marco disciplinar que describe el desarrollo histórico que dio surgimiento a las sumas de Riemann y a la integral definida. El segundo, es el marco didáctico que detalla elementos propios del pensamiento variacional y, el último, se refiere al uso de las TIC como recurso mediador en el aula de matemáticas.

Basado en una propuesta de enseñanza sobre aproximaciones al área de regiones construidas para su aplicación en formato de lápiz y papel, ésta es adaptada en un formato digital en la herramienta GeoGebra. Estos dos formatos son presentados a los docentes del área de matemáticas de la Universidad Manuela Beltrán para que los comparen y desde su experiencia y conocimiento realicen reflexiones frente a los beneficios y limitaciones que tienen ambos recursos desde el enfoque del desarrollo del pensamiento variacional.

Luego de la aplicación de las actividades a los docentes, se realiza el análisis de las reflexiones dadas por los docentes y las respectivas conclusiones derivadas de éstas.

Palabras clave: Sumas de Riemann, área, pensamiento variacional, GeoGebra

Abstract

GeoGebra as a tool to develop variational thinking

The next proposal has the aim to make a comparison between the pencil-and-paper activities and the ones which use the technological tools, concretely GeoGebra program. The above seeks to identify what are the advantages and disadvantages in both. To accomplish the objective, the project is based on university teachers' analysis and considerations.

Hence, the proposal is supported by three constructs which are going to be exposed in the following theoretical framework: the disciplinary frame, which describes the emergence of Riemann sums and the definite integral; the didactic frame, which details the elements of the variational thinking; and finally, the use of ICT tools as a mediation resource in math classrooms.

The project's methodology will start with the adaptation of a teaching proposal about approximating areas of constructed regions using pencil and paper into a digital form in GeoGebra. Then, the two form will be presented to teachers at Manuela Beltran University in order to compare them, and from their experience and knowledge, they will reflect on both benefits and limitations regarding to the resources from the developmental approach of variational thinking.

One time made the application of the activities to the teachers, it will expose the analysis of their reflections, as well as the respective conclusions derived from these.

.

Keywords: Riemann sums, area, variational thinking, GeoGebra

Contenido

Pág.

Resumen ..... **VII**

Lista de figuras ..... **XI**

Lista de tablas ..... **XII**

Introducción **1**

1. Planteamiento del problema **4**
1.1 Justificación 4
1.2 Objetivos 5
1.2.1 Objetivos específicos 5

2. Marco Referencial **7**
2.1 Marco disciplinar 7
2.1.1 Área de una región: prólogo de la integral 7
2.1.2 Siglo XVII, el nacimiento de la integral 22
2.1.3 La formalización de la Integral 24
2.1.4 Integración de Riemann 27
2.1.5 Área por aproximaciones - Sumas de Riemann 34
2.2 Pensamiento variacional 37
2.2.1 Procesos involucrados en el pensamiento variacional 41
2.3 Las TIC en la educación matemática 44
2.3.1 GeoGebra en la educación matemática. 47

3. Diseño Metodológico **51**
3.1 Revisión de la documentación 52
3.2 Construcción de aplicativos. 54
3.2.1 Descripción de los aplicativos construidos 54
3.3 Contextualización de la población 62
3.3.1 Delimitación de la población 64
3.4 Construcción del instrumento de Indagación 66
3.4.1 Instrumento de Indagación 68

4. Análisis de la información **77**

5. Conclusiones y recomendaciones **87**
5.1 Conclusiones 87

5.2 Recomendaciones..... 91

A. Anexo: Revisión de documentación 92

B. Anexo: Recurso en lápiz y papel.....97

C. Anexo: Evidencias de los instrumentos de indagación aplicados. 99

Bibliografía 100

Lista de figuras

Pág.

Figura 2-1: Áreas poligonales....8
Figura 2-2: Áreas poligonales con subdivisión....8
Figura 2-3: Segmento parabólico 1....9
Figura 2-4: Segmento parabólico 2....10
Figura 2-5: Segmento parabólico 3....10
Figura 2-6: Espiral de Arquímedes....13
Figura 2-7: Espiral – Regiones inscritas....14
Figura 2-8: Espiral – Regiones circunscritas....15
Figura 2-9: Indivisibles de Cavallieri....17
Figura 2-10: Hipérbola de Fermat....19
Figura 2-11: Aritmetización de los indivisibles....20
Figura 2-12: Aproximación de cuadraturas de Wallis....22
Figura 2-13: Aproximación de una cuadratura Leibniz....23
Figura 2-14: Función escalonada....28
Figura 2-15: Área función escalonada....28
Figura 2-16: Aditividad de integrales para funciones escalonadas....29
Figura 2-17: Homogeneidad de integrales para funciones escalonadas....29
Figura 2-18: Teorema de comparación para integrales de funciones escalonadas....30
Figura 2-19: Aditividad respecto al intervalo de integración para funciones escalonadas....30
Figura 2-20: Encajonamiento de una función....31
Figura 2-21: Sumas de Riemann....34
Figura 2-22: Refinamiento de la partición para Sumas de Riemann....35
Figura 2-23: Conexiones entre las características del pensamiento variacional....42
Figura 3-1: Aplicativo 1. Área #1....56
Figura 3-2: Aplicativo 2. Área #2....56
Figura 3-3: Aplicativo 3. Datos Área....57
Figura 3-4: Aplicativo 4. Área del círculo....58
Figura 3-5: Aplicativo 5. Datos círculo....59
Figura 3-6: Aplicativo 6. Generalización Sumas de Riemann....60
Figura 3-7: Aplicativo 7. Ejemplo Sumas de Riemann....61
Figura 4-1: Resultados de uso de recursos para la enseñanza....77
Figura 4-2: Resultados de recursos usados por los estudiantes....78

Lista de tablas

Pág.

Tabla 3-1: Asignaturas de matemáticas 62
Tabla 3-2: Cronograma temático de la asignatura de Cálculo Integral..... 63
Tabla 3-3: Docentes – Asignatura de Cálculo Integral..... 65
Tabla 4-1: Relación indicador - docente 80
Tabla 4-2: Porcentaje de elección para los indicadores..... 81
Tabla 4-3: Ventajas y desventajas según los docentes 83

Introducción

En los últimos años han sido múltiples los intentos por fomentar ambientes o estrategias de enseñanza que contribuyan al aprendizaje de las matemáticas. En Colombia, en busca de mejorar los aprendizajes significativos en el aula, se ha pretendido que las competencias matemáticas estén basadas en el desarrollo de pensamiento matemático. En específico, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) vincula lo que es ser competente en matemáticas con el desarrollo de los pensamientos *numérico, métrico, aleatorio, espacial* y *variacional* (MEN, 1998).

En particular, en el pensamiento variacional se contemplan procesos de ***cambio***, ***correspondencia*** y ***dependencia*** entre dos variables, donde una se define como la variable dependiente y otra como la variable independiente; también estudia la obtención y generalización de ***patrones***. Es decir, las relaciones matemáticas, sus propiedades y diferentes representaciones están inmersas en este pensamiento. Es por esto, que potenciar el pensamiento variacional sugiere la comprensión de elementos propios de las relaciones, funciones y sus distintas representaciones. El desarrollo de ciertas habilidades en matemáticas no es inmediato, es un proceso que debe considerarse con amplitud en tiempo y en complejidad. Por ello, el entorno de enseñanza debe propiciar actividades y utilizar recursos didácticos que estimulen el desarrollo de las competencias en matemáticas.

Actualmente, el auge que la tecnología tiene en muchos entornos de la sociedad en particular en el ámbito educativo, hace necesario que las actividades de aula también utilicen el recurso de las herramientas tecnológicas en pro del mejoramiento de los procesos que se dan en ésta y optimizar el potencial que tienen los computadores y otros dispositivos electrónicos junto con el vasto número de aplicaciones al servicio de cualquier

persona, especialmente aquellas que están diseñadas para apoyar a docentes y estudiantes en procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este trabajo de grado usa un recurso tecnológico disponible en la red, específicamente el software de geometría dinámica GeoGebra (programa que tiene una licencia gratuita), para adaptar actividades de modelación implementadas en lápiz y papel que involucran relaciones matemáticas entre dos variables y así, analizar desde la perspectiva de profesores de la Universidad Manuela Beltrán, las ventajas y desventajas de las actividades en estos dos recursos (Geogebra - lápiz y papel) como medios facilitadores para el desarrollo de las características involucradas en el pensamiento variacional, las cuales son: Visualizar, describir, representar y generalizar la relación entre dos variables cuantitativas.

En el contexto de la Universidad Manuela Beltrán, en el tercer semestre de las carreras de ingeniería se imparte la asignatura de cálculo integral involucrando en ésta los primeros conceptos y procedimientos que implican la comprensión de aproximar áreas de regiones limitadas por curvas a partir de particiones; estableciendo una relación de covariación entre las variables *longitud de los subintervalos definidos en la partición*, *número de polígonos inscritos o circunscritos en la región* y la *estimación del área*. Por esta razón las actividades adaptadas proponen situaciones de modelación que usan diferentes representaciones (tabulares, gráficas y algebraicas) y en las que intervienen las variables mencionadas anteriormente. El estudio de estas variables se relaciona con el proceso de Sumas de Riemann y por tanto se vinculan con conceptos abordados en el cálculo integral.

Para la consecución de esta propuesta, el presente escrito se desarrolla en cinco capítulos discriminados por planteamiento del problema, marco referencial, marco metodológico, análisis de los resultados y, por último, conclusiones.

El primer capítulo plantea la justificación y los objetivos que enmarcan esta propuesta. El segundo capítulo, estructura el marco teórico que fundamenta este documento. Este apartado, se divide en tres títulos que enmarcan y sustentan las acciones llevadas a cabo para la realización de la propuesta. El primer título hace referencia al marco disciplinar, el cual inicia con una descripción histórica contada desde los griegos y su enfoque

geométrico para el cálculo de cuadraturas hasta llegar a Riemann y su teoría de integración. Luego, se consideran algunos hechos matemáticos que cimentan la teoría de la integración de Riemann, en específico, los elementos propios para definir un área acotada por una función. El segundo título, describe los fundamentos teóricos relacionados con el pensamiento variacional. Por último, el tercer título, expone referentes a las TIC como herramientas mediadoras para la enseñanza, en específico, para el software de GeoGebra.

El tercer capítulo, describe la ruta metodológica utilizada para dar alcance a los objetivos propuestos en este trabajo. En primera instancia, se muestra el alcance logrado con la revisión y caracterización de los trabajos de grado que mantenían una relación con los objetos disciplinares o didácticos que enmarcan esta propuesta (relación entre dos variables y las características del pensamiento variacional). Luego, se describen los aplicativos que fueron construidos en GeoGebra al adaptar dos actividades en lápiz y papel. En adelante, este apartado ilustra la población que fue elegida para la implementación del instrumento de indagación que recogerá los insumos para el análisis y conclusiones.

En el cuarto capítulo, con la aplicación del instrumento de indagación se analizaron las consideraciones que tienen los docentes respecto al tipo de propuesta que favorece el desarrollo de las características del pensamiento variacional, así como, las ventajas y desventajas de la actividad propuesta en lápiz y papel en contraposición a las presentadas con la herramienta tecnológica. A la luz de estos resultados se contrastaron las distintas respuestas y se lograron evidenciar convergencias y divergencias en el ámbito del recurso utilizado, igualmente en los procesos inmersos en el pensamiento variacional.

En el último capítulo, se presentan las conclusiones que dejó este trabajo.

1. Planteamiento del problema

1.1 Justificación

Han sido múltiples las dificultades que han presentado los estudiantes en el entendimiento conceptual y procedimental alrededor de los objetos matemáticos que sugieren el estudio de la variación, también han sido variadas las investigaciones, tesis, trabajos de grado y unidades didácticas que han propuesto actividades para solventar dichas dificultades y mejorar el aprendizaje y, por ende, desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes.

Por ejemplo, hay estudios como "*Estrategias para potenciar el pensamiento variacional"* (Alfonso et al, 2009) y "*Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno"* (Martínez y Gualdrón 2018), así mismo, la tesis de maestría "*Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Secundaria, mediado por Geogebra"* (Dávila, 2018). En estos trabajos se citan investigaciones que han mostrado la necesidad de incluir en las propuestas de enseñanza sobre la variación, la resolución de problemas y uso de la tecnología como estrategias que favorecen el aprendizaje de aspectos fundamentales del pensamiento variacional. Específicamente Martínez y Gualdrón (2018) y Dávila (2018), establecen como resultado de sus investigaciones que hay avances en el desarrollo de habilidades de argumentación, visualización, razonamiento y comunicación matemática cuando los estudiantes se ven inmersos en ambientes de aprendizaje mediados por tecnología en relación a actividades que potencien el pensamiento variacional.

Considerando que la tecnología no es en sí misma la solución a los problemas que enfrenta la educación, sino que sigue siendo el profesor con sus planeaciones, disposiciones y enfoque, quien puede hacer que el uso de una herramienta tecnológica genere aportes en

la práctica de aula, se pretende que esta propuesta titulada "*GeoGebra como herramienta para incentivar el pensamiento variacional"*, responda la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las ventajas y desventajas de adaptar tecnológicamente propuestas desarrolladas en papel y lápiz, que se relacionan con el pensamiento variacional?

1.2 Objetivos

Explorar las posibilidades de desarrollo del pensamiento variacional, usando el software dinámico GeoGebra, a partir de las perspectivas de profesores de nivel universitario.

1.2.1 Objetivos específicos

- Adaptar actividades que involucran el pensamiento variacional usando tecnología, específicamente el software GeoGebra.
- Presentar a los profesores de matemáticas de la Universidad Manuela Beltrán las actividades adaptadas en GeoGebra y las actividades en lápiz y papel, para que las analicen a partir de las características involucradas en el pensamiento variacional.
- Identificar ventajas y desventajas del desarrollo del pensamiento variacional, que describen los profesores de matemáticas de la Universidad Manuela Beltrán.

2. Marco Referencial

2.1 Marco disciplinar

2.1.1 Área de una región: prólogo de la integral

Es el cálculo de áreas la primera huella que dejó la historia para referirse a la integral (Suarez, 2008), los problemas de las cuadraturas estudiados por los griegos en la época de Euclides, Aristóteles, entre otros, forjaron los cimientos del cálculo integral que hoy estudiamos. Fueron Cavallieri y Keppler con sus ideas quienes abrieron las puertas para solucionar de un modo más general los problemas de las cuadraturas, pasando por la aritmetización de Wallis y por la invención de Newton y Leibniz que transformó la integral en más que un asunto de cuadraturas o áreas bajo la curva. Y por último, a Cauchy y Riemann bajo sus consideraciones analíticas que describen a la Integral definida como un límite de sumas.

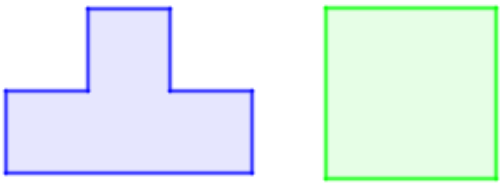
A continuación, se hace una descripción en el tiempo sobre algunos de los problemas que dieron origen a la noción de integral y como ésta se consolida a partir de los aportes de grandes matemáticos.

- **En la época de los griegos**

Históricamente es necesario remontarse al libro de *Los Elementos de Euclides* para plantear los primeros análisis en torno al área como la medida de una figura plana. Sin abocar a una definición de medida en sí misma, la obra deja entrever al proceso de *comparar* como el método idóneo para considerar la medida de un objeto, siempre y cuando los objetos a comparar mantengan atributos en la misma dimensión.

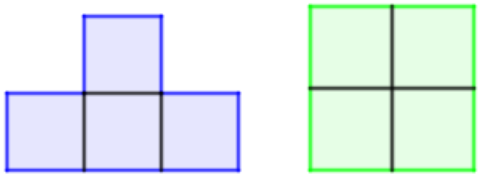
Es así, como el proceso de comparar objetos unidimensionales, segmentos, presentaba en esencia dos situaciones, la comparación con un segmento llamado unidad y la comparación entre dos elementos arbitrarios. Desafortunadamente, este proceso no se podía replicar tan sencillamente para el caso de objetos bidimensionales, la longitud de una superficie por simple comparación de forma, podía llevar a conclusiones erróneas ya que la disposición de cada una de ellas puede ser absolutamente distinta y, sin embargo, albergar la misma medida. Así, por ejemplo, las dos figuras siguientes en el análisis por simple inspección al compararlos no debería concluir en igualdad de sus áreas.

Figura 2-1: Áreas poligonales



Pero, la descomposición de cada una de cada una de las figuras en, por ejemplo, cuadrados congruentes ilustrará la posibilidad para compararlas.

Figura 2-2: Áreas poligonales con subdivisión



Y de este modo, se hace posible afirmar que las dos tienen la misma área. (Bobadilla, 2012)

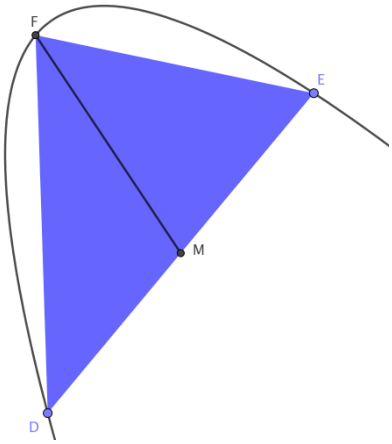
Pero los problemas geométricos de la época no solo abarcaban procesos de comparación también procesos de construcción. Los problemas de las *cuadraturas* también eran fuente de análisis por los griegos, es así, que dentro de *Los Elementos de Euclides* se planteaba la forma en que a partir de una figura poligonal se pudiese construir un cuadrado que tuviera la misma área del polígono mencionado. Construcciones con regla y compás fueron las herramientas que se utilizaron para demostrar la posibilidad de generar dichos cuadrados.

En los problemas de las cuadraturas destaca el resuelto por Aristóteles (287-212 a.C.), hacia el siglo III, sobre el área de una región limitada por una curva parabólica. El problema de la *cuadratura de un segmento parabólico* incluía elementos distintos a lo planteado en el libro de *Los Elementos* ya que la región involucra segmentos curvos en la región acotada. Aristóteles valiéndose del método de exhaución y del razonamiento al absurdo logra demostrar que el área de la región parabólica es de cuatro tercios del área de un triángulo inscrito en la región.

Este método de exhaución utilizado para la demostración de la cuadratura de Aristóteles implicaba disponer de polígonos sucesivos para ir "rellenando" la región, de tal forma que se ubicaban triángulos sucesivos para ir fragmentando la región de tal manera que los polígonos quedarán inscritos en el segmento parabólico.

A continuación, a modo de descripción se realizarán algunos análisis que llevan a la conclusión presentada por Aristóteles:

Figura 2-3: Segmento parabólico 1

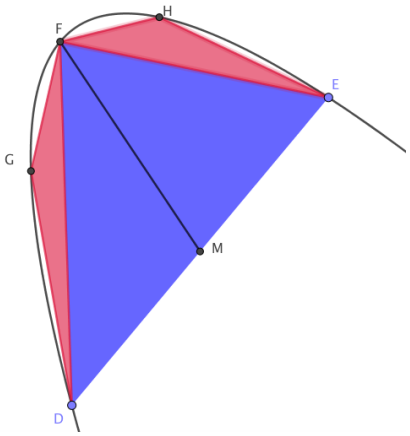


Sea $\overline{DE}$ un segmento que une dos puntos de una parábola y F es el vértice[1].

Entre los puntos D, F y E se construye el ΔDFE, además, se genera el $\overline{FM}$ de tal forma que M es el punto medio de $\overline{DE}$.

[1] Entiéndase vértice como el punto de intersección entre la parábola y la recta tangente a la parábola que es paralela al segmento entre los puntos D y E. En este sentido y contexto, no debe interpretarse al vértice como el punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría.

Figura 2-4: Segmento parabólico 2



Si se repite el proceso anterior, considerando los segmentos definidos por $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$, se ubican los puntos G y H como vértices (como se mencionó en el paso anterior) para los sectores parabólicos en que se divide la región por el $\overline{FM}$.

Se construyen los triángulos ΔDGF y ΔEHF.

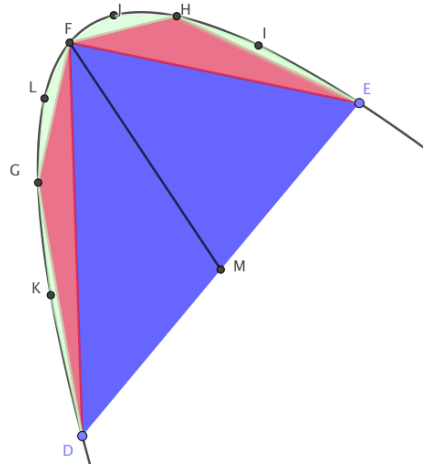
Aristóteles ya tenía dentro sus hallazgos la existencia de una relación aritmética entre los triángulos construidos por este tipo de iteraciones, en específico, para los triángulos definidos en la descripción anterior se tiene la siguiente igualdad entre las áreas para los triángulos ΔDGF y ΔEHF:

$$A_{\Delta DGF} = \frac{1}{4}A_{\Delta DFM}, \text{ y a su vez que, } A_{\Delta FHE} = \frac{1}{4}A_{\Delta EFM}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} A_{\Delta DGF} + A_{\Delta FHE} &= \frac{1}{4}A_{\Delta DFM} + \frac{1}{4}A_{\Delta EFM} \\ &= \frac{1}{4}[A_{\Delta DFM} + A_{\Delta EFM}] \\ &= \frac{1}{4}A_{\Delta DFE} \end{aligned}$$

Figura 2-5: Segmento parabólico 3



Si se repite el proceso, pero ahora, con los segmentos parabólicos definido por $\overline{DG}, \overline{GF}, \overline{FH}$ y $\overline{HE}$, se tendrían conclusiones semejantes a la anterior:

$$A_{\Delta DKG} + A_{\Delta GLF} = \frac{1}{4}A_{\Delta DGF}$$

$$A_{\Delta FJH} + A_{\Delta HIE} = \frac{1}{4}A_{\Delta FHE}$$

Se sigue que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}A_{\Delta DGF}+\frac{1}{4}A_{\Delta FHE} &= \frac{1}{4}[A_{\Delta DGF}+A_{\Delta FHE}]\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}A_{\Delta DFE}\right]\\ &= \frac{1}{4^2}A_{\Delta DFE}\end{aligned}$$

Al continuar con el recubrimiento por triángulos bajo el proceso iterativo, se tendría la siguiente suma:

$$\begin{aligned}\text{Área del segmento parabólico} &= A_{\Delta DFE}+\frac{1}{4}A_{\Delta DFE}+\frac{1}{4^2}A_{\Delta DFE}+\frac{1}{4^3}A_{\Delta DFE}+\cdots\\ &= A_{\Delta DFE}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)\end{aligned}$$

Actualmente, a este momento del proceso ya sería posible definir a partir de series que el área del sector parabólico es igual a cuatro tercios del área de un triángulo inscrito, sin embargo, en esa época no se contaba con este desarrollo matemático, entonces Arquímedes recurre al siguiente proceso y define:

$$\begin{aligned}A_0 &= A_{\Delta DFE}\\ A_1 &= A_0+\frac{1}{4}A_0\\ A_2 &= A_0+\frac{1}{4}A_0+\frac{1}{4^2}A_0\\ &\vdots\\ A_n &= A_0+\frac{1}{4}A_0+\frac{1}{4^2}A_0+\cdots+\frac{1}{4^n}A_0\end{aligned}$$

Basado en sus propios hallazgos, apela a la siguiente afirmación:

Proposición 23[2]

> Dada una serie de áreas $A, B, C, D, \ldots, Z$, de las cuales A es la mayor, y cada una es igual a cuatro veces la siguiente en orden, entonces

[2] Proposición descrita en la obra *De la cuadratura de la parábola*

$$A + B + C + D + \cdots + Z = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}Z$$

en donde,

$$A_n = A_0 + \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4^2}A_0 + \cdots + \frac{1}{4^n}A_0$$
$$A_n = \frac{4}{3}A_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}A_0\right)$$

Intuitivamente, Arquímedes se da cuenta que al generar una mayor cantidad de iteraciones el valor de A_n se aproxima a $\frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$. En otras palabras, tiene como hipótesis que el área del segmento parabólico es igual a $\frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$. Para poder mostrar la veracidad de esta afirmación, acude al método de la reducción al absurdo y plantea:

Sea P el área del segmento parabólico tal que $P > \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$, es decir, $P - \frac{4}{3}A_{\Delta DFE} > 0$. Además, la siguiente sucesión

$$P, P - A_0, P - A_1, P - A_3, \ldots, P - A_n, \ldots$$

que permite la aplicación del principio de convergencia establecida en los *Elementos*:

Proposición X.1: *Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*

entonces

$$P > P - \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$$
$$P - \frac{4}{3}A_{\Delta DFE} > P - A_n \quad \text{para algún } n.$$
$$A_n > \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$$

lo cual es una contradicción ya que se tenía que $A_n = \frac{4}{3}A_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n}A_0\right)$, por ende, no se cumple que $P > \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$.

Siguiendo un razonamiento análogo, Arquímedes demuestra que $P < \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$ también lleva a una contradicción. En conclusión, solo es posible $P = \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}$, es decir que,

$$\text{Área del segmento parabólico } = \frac{4}{3}A_{\Delta DFE}.$$

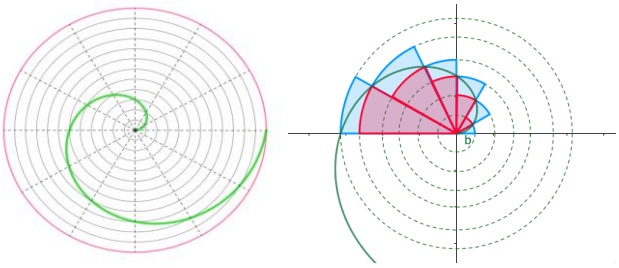
Otro problema de cuadraturas solucionado por Arquímedes, publicado en su obra *De Las Espirales*, logra un significativo resultado al encontrar el área de una sección definida por una espiral a partir de la relación existente entre el primer ciclo de la espiral y una circunferencia circunscrita a la espiral. Nuevamente, el método de realizar particiones de la región, esta vez en sectores circulares, resultó provechoso para alcanzar un resultado importante:

Proposición

El área del primer ciclo de una espiral es igual a la tercera parte del área del círculo circunscrito.

Para demostrar esta afirmación Arquímedes divide el circulo en n sectores circulares congruentes. Para cada sector, el arco de la espiral que queda definido, es posible acotarlo por dos áreas circulares, en específico, por el sector circular más grande inscrito y el sector circular más pequeño circunscrito a cada arco.

Figura 2-6: Espiral de Arquímedes



Si a la suma de los sectores circulares inscritos se denota como P_n y de manera similar, a la suma de los sectores circulares circunscritos Q_n. Al área de la región definida por la espiral se denotará como $a(E)$ y al área de circunferencia C de radio r que define el primer

ciclo de la espiral. En términos de esta notación, la región definida por el espiral cumple que,

$$P_n \leq a(E) \leq Q_n \quad (1)$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \leq a(E) \leq B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n \quad (2)$$

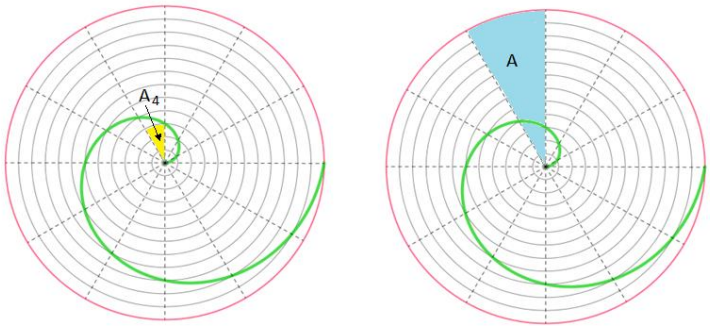
con los A_i áreas de los sectores circulares inscritos y los B_i áreas de los sectores circulares circunscritos.

Por tanto, los radios para cada sector circular de P_n serían $0\frac{r}{n}, 1\frac{r}{n}, 2\frac{r}{n}, \ldots, (n-1)\frac{r}{n}$ y los radios para cada sector circular de Q_n serán $1\frac{r}{n}, 2\frac{r}{n}, 3\frac{r}{n}, \ldots, n\frac{r}{n}$. Ahora, a partir la proposición XII.2[3] de los *Elementos,* es posible definir el área para cada una de las regiones inscritas o circunscritas. Para esto:

Regiones Inscritas

$\frac{A_1}{A} = \frac{\left(0\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{\left(1\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{\left(2\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	…	$\frac{A_n}{A} = \frac{\left((n-1)\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$
$\frac{A_1}{A} = \frac{0}{n^2}$	$\frac{A_2}{A} = \frac{1}{n^2}$	$\frac{A_3}{A} = \frac{4}{n^2}$		$\frac{A_n}{A} = \frac{(n-1)^2}{n^2}$
$A_1 = \frac{0}{n^2} \cdot \frac{C}{n}$	$A_2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{C}{n}$	$A_3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{C}{n}$		$A_n = \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{C}{n}$
$A_1 = \frac{0}{n^3} C$	$A_2 = \frac{1}{n^3} C$	$A_3 = \frac{4}{n^3} C$		$A_n = \frac{(n-1)^2}{n^3} C$

Figura 2-7: Espiral – Regiones inscritas



[3] ***Proposición XII.2:*** *Las áreas de dos sectores circulares con el mismo ángulo, son entre si como los cuadrados de sus radios. Es decir,* $\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{(r_1)^2}{(r_2)^2}$

como, $P_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$

$$P_n = \frac{0}{n^3}C + \frac{1}{n^3}C + \frac{4}{n^3}C + .. + \frac{(n-1)^2}{n^3}C$$

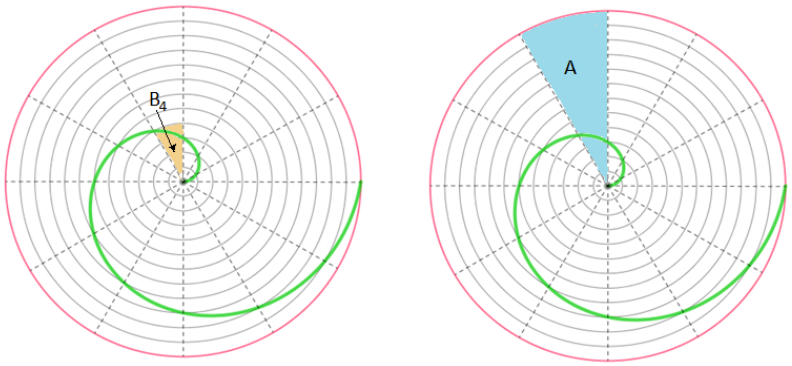
$$P_n = \frac{[0+1+4+\cdots+(n-1)^2]}{n^3}C$$

De la misma manera, para las regiones circunscritas:

$\frac{B_1}{A} = \frac{\left(1\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	$\frac{B_2}{A} = \frac{\left(2\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	$\frac{B_3}{A} = \frac{\left(3\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$	…
$\frac{B_1}{A} = \frac{1}{n^2}$	$\frac{B_2}{A} = \frac{4}{n^2}$	$\frac{B_3}{A} = \frac{9}{n^2}$	
$B_1 = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{C}{n}$	$B_2 = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{C}{n}$	$B_3 = \frac{9}{n^2}\cdot\frac{C}{n}$	
$B_1 = \frac{1}{n^3}C$	$B_2 = \frac{4}{n^3}C$	$B_3 = \frac{9}{n^3}C$	

$\frac{B_n}{A} = \frac{\left(n\frac{r}{n}\right)^2}{r^2}$
$\frac{B_n}{A} = \frac{n^2}{n^2}$
$B_n = \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{C}{n}$
$B_n = \frac{n^2}{n^3}C$

Figura 2-8: Espiral – Regiones circunscritas



es decir, $Q_n = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n$

$$Q_n = \frac{1}{n^3}C + \frac{4}{n^3}C + \frac{9}{n^3}C + .. + \frac{n^2}{n^3}C$$

$$Q_n = \frac{[1+4+9+\cdots+n^2]}{n^3}C$$

De (2) entonces

$$\frac{[0+1+4+\cdots+(n-1)^2]}{n^3}C \leq a(E) \leq \frac{[1+4+9+\cdots+n^2]}{n^3}C$$

$$\frac{0+1+4+\cdots+(n-1)^2}{n^3} \leq \frac{a(E)}{C} \leq \frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$$

Pero Arquímedes ya había estudiado la validez de las relaciones $\frac{[1+4+9+\cdots+n^2]}{n^3} > \frac{1}{3}$ y $\frac{[0+1+4+\cdots+(n-1)^2]}{n^3} < \frac{1}{3}$, que hacían intuir que la relación entre la espiral y el círculo circunscrito se definía como $\frac{a(E)}{C} = \frac{1}{3}$, o en equivalencia que $a(E) = \frac{1}{3}C$. Sin embargo, para poder concluir que esta igual es legítima, Arquímedes tuvo que recurrir nuevamente a la reducción al absurdo para dar conclusión a la proposición.

Supongamos que $a(E) > \frac{1}{3}C$.

$$a(E) - \frac{1}{3}C > 0$$

es posible elegir un n suficientemente grande tal que $a(E) - \frac{1}{3}C > Q_n - P_n$. (3)

Además, como $\frac{P_n}{C} = \frac{0+1+4+\cdots+(n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$

$$P_n < \frac{1}{3}C \quad (4)$$

De (3) y (4), se puede concluir que $a(E) - \frac{1}{3}C > Q_n - \frac{1}{3}C$

$$a(E) > Q_n$$

Pero esta última afirmación es una contradicción ya que en (1) se definió que $a(E) < Q_n$. De manera análoga, al suponer que $a(E) < \frac{1}{3}C$ se llega a una contradicción. Por ende,

$$a(E) = \frac{1}{3}C$$

La cual concluye con el análisis de Arquímedes para la espiral que lleva su nombre.

Es quizás la forma en que se demuestra esta proposición la que más nos conduce a lo que hoy conocemos como las sumas de Riemann pero Aristóteles dejaba como idea intuitiva la noción límite basando todo su análisis en aspectos geométricos y analíticos en carencia de los constructos de los infinitesimales que se desarrollarían en siglos posteriores.

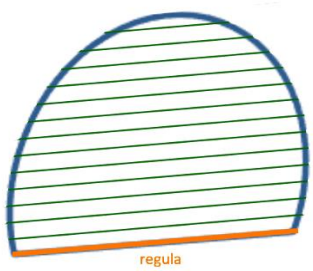
Es así como el método de exhaución y de los hallazgos sobre áreas de regiones no poligonales se empezaban a cultivar los primeros elementos de lo que hoy conocemos como integración.

· Los Indivisibles

Los problemas de cuadraturas no resaltaron nuevas técnicas por varios siglos, el método de exhaución se asentó como el mecanismo para resolver este tipo de situaciones. Hasta que en el siglo XVII, el método de *los indivisibles* postulado por Bonaventura Cavallieri (1598-1647) para calcular áreas y volúmenes fue presentado en una de sus más conocidas obras *La Geometría de los indivisibles*.

Sin definir a cabalidad lo que eran los *indivisibles*, Cavallieri aplicaba el término para referirse a una colección de objetos, tal que "*todos*" ellos constituyen la medida de la figura dada. Así, para referirse al área de una región era necesario considerar a los *indivisibles* como la colección de infinitos segmentos contenidos en la región, de tal forma que fueran paralelos a un primero, llamado Regula. De la misma manera, para el volumen utiliza la colección de todas las regiones planas contenidas en el sólido.

Figura 2-9: Indivisibles de Cavallieri



Las producciones de Cavalleri suscitaron reacias objeciones dentro de la comunidad académica de la época, ya que presentaban vacíos argumentales, el rigor matemático era ineficiente y los procesos presentados carecían, en algunos casos, de mayor generalidad. Sin embargo, sus trabajos colocaban un grano más para la construcción de la noción del Cálculo ya que, aunque la *idea* de considerar la medida de superficies (elementos de dimensión 2) a partir de *todas* las líneas (elementos de dimensión 1) resultaba objetable, no sería del mismo modo si consideraban a esas líneas como rectángulos que tuvieran una base tan pequeña como se quisiera, bases infinitesimales, como siglos después se iban a construir (Moran, 2014).

- **Las hipérbolas de Fermat**

Con el desarrollo de la geometría analítica, los problemas de cuadraturas encontraron un nuevo ingrediente como desafío, encontrar el área bajo la curva de aquellas representaciones que estuvieran definidas de forma algebraica. Peirre Fermat (1601-1665) fue uno de los pensadores de la época que mostró un desarrollo en problemas cuadraturas en este contexto. Fermat mantuvo el método de exhaución como recurso para analizar el área bajo las curvas definidas por $x^n y = 1$ considerandos rectángulos infinitesimales inscritos y circunscritos a partir de sucesiones geométricas.

Igual que para la espiral de Arquímedes, el método de encajonar el área resulta un mecanismo eficaz para estimar el área de la región. Así, por ejemplo, si se considera el área acotada por la gráfica de $x^2 y = 1$ para $x \geq a > 0$ y el eje x, con $r > 1$ para la sucesión ar^n, entonces la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos está definido por:

$$S_c = (ar - a)\left(\frac{1}{a^2}\right) + (ar^2 - ar)\left(\frac{1}{(ar)^2}\right) + (ar^3 - ar^2)\left(\frac{1}{(ar^2)^2}\right) + \cdots$$
$$= a(r-1)\left(\frac{1}{a^2}\right) + ar(\mathrm{r}-1)\left(\frac{1}{a^2 r^2}\right) + ar^2(r-1)\left(\frac{1}{a^2 r^4}\right) + \cdots$$
$$= \frac{a(r-1)}{a^2}\left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots\right]$$

en donde, por la convergencia de la suma infinita

$$S_c = \frac{a(r-1)}{a^2}\left(\frac{r}{r-1}\right)$$

$$S_c = \frac{r}{a}$$

y la suma de los rectángulos inscritos

$$S_i = (ar - a)\left(\frac{1}{(ar)^2}\right) + (ar^2 - ar)\left(\frac{1}{(ar^2)^2}\right) + (ar^3 - ar^2)\left(\frac{1}{(ar^3)^2}\right) + \cdots$$
$$= a(r-1)\left(\frac{1}{a^2 r^2}\right) + ar(\mathrm{r}-1)\left(\frac{1}{a^2 r^4}\right) + ar^2(r-1)\left(\frac{1}{a^2 r^6}\right) + \cdots$$
$$= \frac{a(r-1)}{a^2 r^2}\left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots\right]$$
$$= \frac{a(r-1)}{a^2 r^2}\left(\frac{r}{r-1}\right)$$

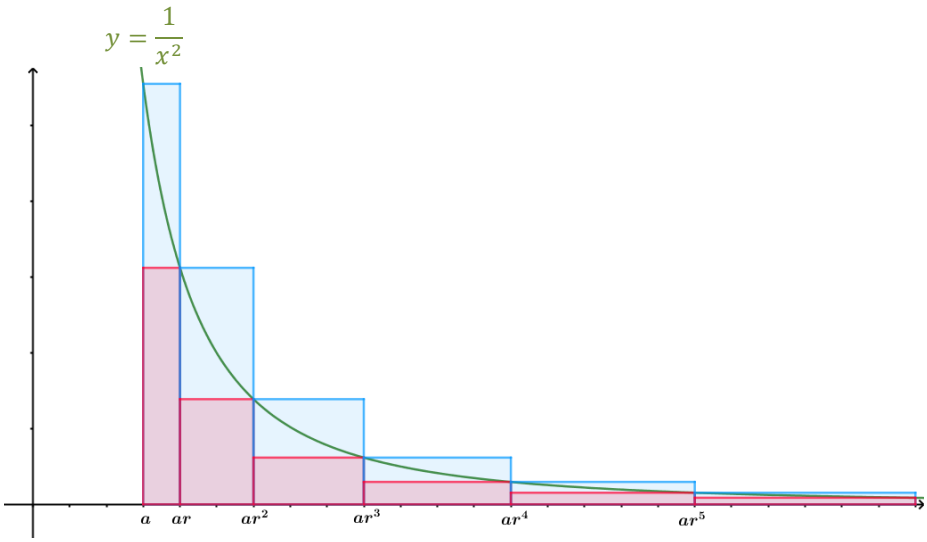
$$= \frac{1}{ar}$$

con estas condiciones, se tiene que el área de la región limitada, A, cumple que

$$S_i < A < S_C$$
$$\frac{1}{ar} < A < \frac{r}{a}$$

teniendo en cuenta que $r > 1$, se concluye que $A = \frac{1}{a}$.

Figura 2-10: Hipérbola de Fermat



▪ La aritmética de los infinitesimales

John Wallis (1616-1703) enfocado el tema de las cuadraturas, en el año de 1655, publica su obra *Arithmetica infinitorum* desarrollando importantes análisis respecto al cálculo de áreas. Basado en *los indivisibles* presentados por Cavalieri, Wallis presenta entre sus análisis:

> *"Supongo, como un punto de partida (de acuerdo a la geometría de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri) que cualquier plano está constituido, por así decirlo, de un número infinito de líneas paralelas. O más bien (lo cual yo prefiero) de un número infinito de paralelogramos de igual altura, la altura de cada uno de ellos de hecho puede $\frac{1}{\infty}$ de la altura total, o una parte infinitamente pequeña (∞ denota un número infinito) y por tanto, la altura de*

todos en conjunto igual a la altura de la figura." (Stedall 2004, citado por Bobadilla, 2012).

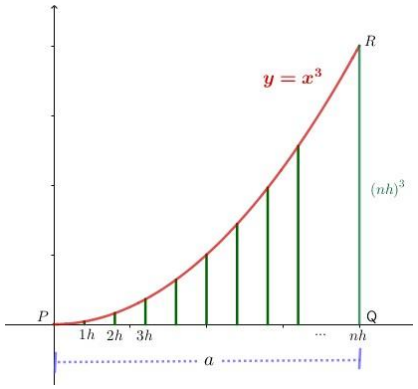
Quizás esta afirmación lleva a considerar nuevamente que Wallis mantenía la idea de cubrir con polígonos en la región para poder estimar el área y, al mismo tiempo, agrega la de noción del infinitesimales para realizar un recubrimiento de la región como se hizo con las hipérbolas de Fermat. Sin embargo, su construcción matemática se enfocaba en la idea del cálculo de cuadraturas, pero aritmetizando las líneas de Cavalieri, es decir, considerando que el área de una región puede ser cubierta por infinitas líneas paralelas.

Bajo esta idea, Wallis logra una serie de resultados sobre las cuadraturas de las regiones acotada por la curva de ecuación $y = x^k$, con $k = 1, 2, 3, \ldots$ en $[0, a]$, realizando la comparación entre las áreas de región limitada por la curva $y = x^k$ y un rectángulo con base igual a a unidades. Sí a modo de ejemplo, se considera la gráfica de la curva definida por $y = x^3$ donde $|PQ| = a$ (como se ilustra en la figura 2-9) y se divide el intervalo en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$.

Figura 2-11: Aritmetización de los indivisibles

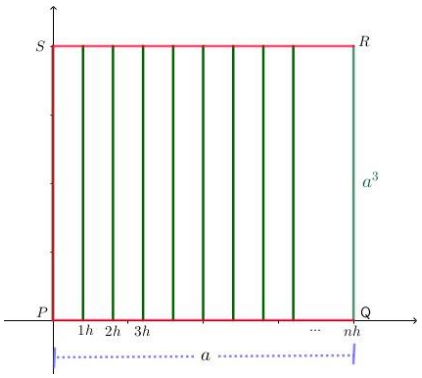
Se tiene que la suma de las longitudes de los segmentos en la región acotada por $y = x^3$ y el eje x en $[0, a]$, región que se denotará como PQR, sería:

$$(0h)^3 + (1h)^3 + (2h)^3 + (3h)^3 + \cdots + (nh)^3$$



De la misma manera, la suma de los segmentos definidas en el rectángulo $PQRS$, sería:

$$a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \cdots + a^3$$
$$= (nh)^3 + (nh)^3 + (nh)^3 + (nh)^3 + \cdots + (nh)^3$$



Wallis considera el cociente de las áreas de PQR y $PQRS$ cuando se ha cubierto la región con infinitos segmentos:

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ PQRS} = \frac{(0h)^3 + (1h)^3 + (2h)^3 + (3h)^3 + \cdots + (nh)^3}{(nh)^3 + (nh)^3 + (nh)^3 + (nh)^3 + \cdots + (nh)^3}$$

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ PQRS} = \frac{0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+\cdots+n^3}$$

Wallis se ve abocado al estudio de razones donde el numerador se establece como la suma de los términos de una sucesión con exponente fijo y el denominador es la suma de términos de la sucesión definidos por el último término del numerador.

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

Wallis alcanza conclusiones de estas razones al considerar distintos casos para $k = 1, 2, 3, \ldots$ y analizar cada caso con distinta cantidad de términos para alcanzar una regularidad. Para $k = 3$, por ejemplo, se tiene que:

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3}{3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

En general, se tendría:

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + \cdots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$ [4]

[4] Wallis no demuestra la igualdad, recurre a la generalización a partir del comportamiento que se presenta para cada potencia.

Retomando el estudio de cuadraturas, esta última conclusión contribuye para la estimación del área de la región acotada por la gráfica de $y = x^3$, en donde

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ PQRS} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

Pero, PQ fue dividido en n partes (con n tendiendo a infinito), entonces

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ PQRS} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{Área\ PQR}{a^4} = \frac{1}{4}$$

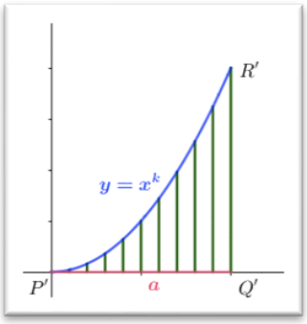
En donde,

$$Área\ PQR = \frac{a^4}{4}$$

Wallis logra no solo definir un proceso para el cálculo de las cuadraturas de la forma $y = x^k$ para valores de k enteros positivos, sino que amplía el rango de expresiones a aquellas donde k es un valor racional positivo, en donde concluye que,

$$Área\ P'Q'R' = \frac{a^k}{k+1} \quad con\ k = p/q$$

Figura 2-12: Aproximación de cuadraturas de Wallis



2.1.2 Siglo XVII, el nacimiento de la integral

Alrededor de diez años después de la publicación de Wallis y con distintos desarrollos aplicados a los métodos de los infinitesimales, Isaac Newton (1647 - 1727) alcanza resultados en el estudio de cálculo de series infinitas, el cálculo de fluxiones (las que hoy

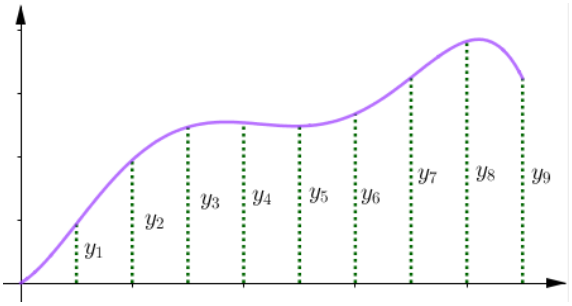
conocemos como derivadas) y el vínculo existente de éstas últimas con las cuadraturas. Newton enfocó su interés a problemas relacionados con la física: el movimiento de los cuerpos, sus velocidades y aceleraciones. No obstante, entre sus métodos para dar solución a problemas de orden físico involucraba procesos inherentes al estudio de rectas tangentes a una curva en un punto y área de regiones.

En su obra *Principia Mathematica (1687),* como lo menciona Bobadilla (2012), Newton postula que el *área es el espacio recorrido por un objeto que se desplaza a una velocidad constante* notando que existe una relación proporcional entre la variación del área con el tiempo transcurrido ($dA = k\ dt$) considerando pequeñas variaciones (infinitesimales) que se suceden con las magnitudes de tiempo y área,

Leibniz[5] (1646 - 1716), de forma independiente y con un enfoque diferente, alcanza logros similares a los descritos por Newton en relación a la derivada, pero con un tratamiento determinado por cálculo de diferencias, a los que denominó como *diferenciales.*

En torno al cálculo del área bajo la curva, Leibniz manteniendo su principio de los *diferenciales*, definía que el área estaba dada por la suma de las ordenadas y a medida que se considere una unidad cada más pequeña (infinitamente pequeña) la aproximación del área sería exacta. (Suarez, 2008).

Figura 2-13: Aproximación de una cuadratura Leibniz



[5] A Leibniz se le reconoce por haber introducido la notación de la “S” alargada que hoy se utiliza como notación para la integral, $\int$.

Ambos pensadores, independientemente e inmersos en sus técnicas, lograron establecer el vínculo inverso que relacionaba los problemas de áreas y rectas tangentes, entre otras valiosas generalizaciones de los métodos que hasta ese momento se habían constituido en torno al estudio de las cuadraturas y de la tangencia, además de facilitar mecanismos que aportaron a la solución de nuevos problemas que surgían alrededor de estos elementos.

Los hermanos Bernoulli, Jacob (1654 - 1705) y Johann (1667 - 1748), siguiendo el tratamiento propuesto por Leibniz sobre el cálculo de diferencias proponen por primera vez el término de ***integral*** en su obra *Lectiones mathematicae de método integralium allisque* (1692) para referirse al vínculo inverso ya encontrado por Leibniz.

2.1.3 La formalización de la Integral

Para el siglo XVIII, la evolución de la integral como proceso no trascendió en demasía, enfocándose como la herramienta que ayudaba a encontrar solución de ecuaciones diferenciales. Para la evolución de la integral era necesario que se formalizarán algunos conceptos y procedimientos, este era el camino hacia la matemática moderna, el análisis matemático.

La noción de **función matemática** colocó cimientos para la construcción de la teoría moderna. Leonard Euler (1707 - 1783) entre sus publicaciones postulaba la importancia de este objeto para la consolidación de una teoría consistente. Entre sus definiciones[6] destaca la presentada en *Institutiones calculi differentialis* en donde se considera la relación de correspondencia y dependencia para referirse a una función como:

> *"algunas cantidades en verdad **dependen** de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también **sufren cambio**, entonces las primeras se llaman funciones de las últimas" (Euler, 1755, citado por Sánchez, 2015).*

Así mismo, Euler enfoca al cálculo de integrales como:

[6] Es posible encontrar una variada gama de definiciones de función dadas por Euler en sus distintos trabajos, esto se debe a la búsqueda del "*perfeccionamiento*" de la definición.

> *"el método para hallar, desde una dada relación de los diferenciales, la relación entre estas mismas cantidades; y la operación que permite de hacer esto es habitualmente llamada "integración" x." (Euler, 1768, citado por Recalde, 2007).*

En particular, Euler en el estudio del problema de la integración, encontró un vínculo entre ésta y el desarrollo en series de potencias de las funciones trascendentes, pero en ese momento parecía que la integral hacía que se retomará el enfoque geométrico del cuál se había estado desligando desde la propuesta de Wallis.

- **La Integral de Cauchy**

Agustin Cauchy (1789 – 1857) consolida un constructo teórico basado en el rigor. Logra definir un análisis de los infinitesimales consolidando al *límite* para definir las cantidades infinitamente pequeñas considerando la variación que aproxima a esas cantidades a cero. A partir de la teorización del límite, Cauchy caracteriza las nociones de convergencia y de continuidad que complementan sus conclusiones en el análisis de sucesiones, de series, de la derivada y la integral.

Chauchy, confeccionó la noción de integral definida como el *límite de una suma,* en otras palabras, del límite de infinitos sumandos infinitamente pequeños. En específico, logra construir una definición de la integral definida para funciones continuas, empezando con:

Sea una función $y = f(x)$ continua, definida en el intervalo $[x_o, X]$. Se elige una partición $\{x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n = X\}$ donde la longitud de cada subintervalo es,

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, X - x_{n-1}.$$

Se construye la suma,

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Al considerar que n es infinitamente grande y que $x_i - x_{i-1}$ define valores inmensamente pequeños, supone una convergencia que solo dependería de f y de $[x_o, X]$; y no de la partición en sí misma, en palabras de Cauchy (1994, citado por Bobadilla, 2012):

> *"Cuando los elementos de la diferencia $x_i - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división tiene sobre el valor de S tan sólo una influencia sensible; y, si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de esos elementos, al aumentar su número, el valor de S terminará por ser sensiblemente constante o, en otras palabras, terminará por alcanzar un cierto límite que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0 y X de la variable x. Este límite es lo que llamamos una* ***integral definida"****.*

Esta conclusión conlleva al planteamiento de la integral definida bajo la notación:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

Con esto Cauchy condensaba la forma en que se debía considerar a la integral para funciones continuas pero quedaba abierto el tratamiento para funciones discontinuas. El mismo Cauchy, Dirichlet y Riemann entre otros matemáticos emprendieron la búsqueda de la generalización de la integral con la contribución ya dada por Cauchy y por los nuevos problemas que nacían del estudio propio de la integral.

- **La Integral de Riemann**

En 1854, Bernand Riemann, en su pretensión de ampliar el rango de funciones definido por Cauchy, lo lleva a considerar que continuidad no era una condición limitante para que una función sea integrable. Riemann propone que:

Una función f, definida y acotada, es integrable en $[a,b]$ si para cada partición $\{x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n\}$ donde $a = x_0, < x_1 < x_2 < \ \dots < x_{n-1} < x_n = b$, la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad t_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

converge a un único valor cuando los $x_i - x_{i-1}$ tienden a cero. El límite que se plantea es entonces,

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

De esta manera, Riemann logra mostrar que su método es aplicable para funciones acotadas y discontinuas, aunque no logra una generalización completa.

En años posteriores, fue necesaria la construcción de teoría de la medida, para que Henri Lebesgue (1875-1941) complemente el trabajo de Riemann (iniciado con Cauchy) para una definición de integral que considere aquellos casos que la integral de Riemann no sea posible aplicarse.

Con lo anteriormente expuesto, se ha trazado una línea en el tiempo pasando por hechos y personajes que aportaron para la concepción de la integral como hoy la reconocemos. Del método de exhaución de los griegos, a la aritmética de Wallis, y luego, a la construcción del análisis matemático con Cauchy, y sin embargo, ninguna de las formulaciones se desprendió de los aspectos geométricos con los que iniciaron los problemas de las cuadraturas. Ni Riemann, ni Lebesgue, desconocieron el hecho geométrico que acompañaba el tratamiento de la integral (aunque las matemáticas modernas intentaron desprenderse lo más posible). En este sentido, Recalde (2007):

> "…*a pesar del esfuerzo por hacer desaparecer del* ***análisis*** *de los vínculos geométricos, tácitamente toman como referente áreas rectangulares. La diferencia con los antiguos reposa en el concepto de límite, el cual permite formalizar los procesos infinitos implícitos en el* ***método exhaustivo***."

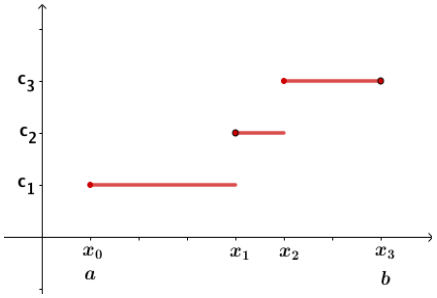
En el abordaje que sigue se plantearan de manera formal algunos de los alcances que tiene la teoría expuesta por Riemann para la concebir la integral definida para una función f.

2.1.4 Integración de Riemann

- **Funciones escalonadas**

Se dice que una función f es escalonada en el intervalo $[a, b]$ si existe una partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que $f(x) = c_i$ con c_i constante en cada intervalo (x_{i-1}, x_i).

Figura 2-14: Función escalonada



La **integral sobre el intervalo** $[a, b]$ **de una función** f **escalonada en** $[a, b]$ se define como:

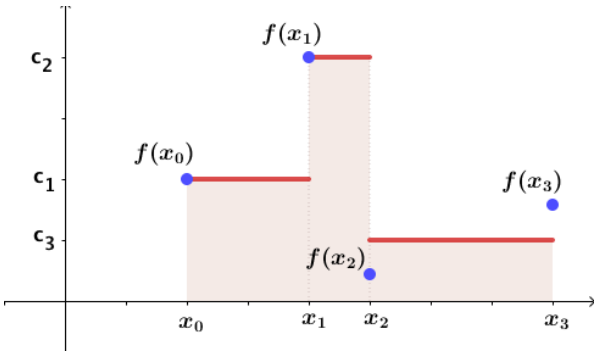
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})$$

Es de notar que, con cada par de elementos consecutivos en la partición, el valor de $x_i - x_{i-1}$ corresponde a la longitud de la base un rectángulo y, debido a que $f(x_k) = c_i$ para todo $x_k \in (x_{i-1}, x_i)$, c_i es la altura del mismo polígono. En consecuencia,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = c_i(x_i - x_{i-1})$$

Este resultado sugiere que la integral de f, con f no negativa, de a hasta b representaría la suma de las áreas de los finitos rectángulos que define cada intervalo (x_{i-1}, x_i) y esta suma es independiente de los valores que tome la función en cada punto de la partición.

Figura 2-15: Área función escalonada



Propiedades de la integral de una función escalonada

Las siguientes tres propiedades se encuentran en Apóstol (1984).

Sean f y g funciones escalonadas definidas en $[a, b]$; c_1 y $c_2 \in R$, entonces se cumple:

- *Propiedad de la linealidad*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\ dx = c_1 \int_a^b f(x)\ dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

Esta propiedad contiene las propiedades de aditividad y homogeneidad.

Figura 2-16: Aditividad de integrales para funciones escalonadas

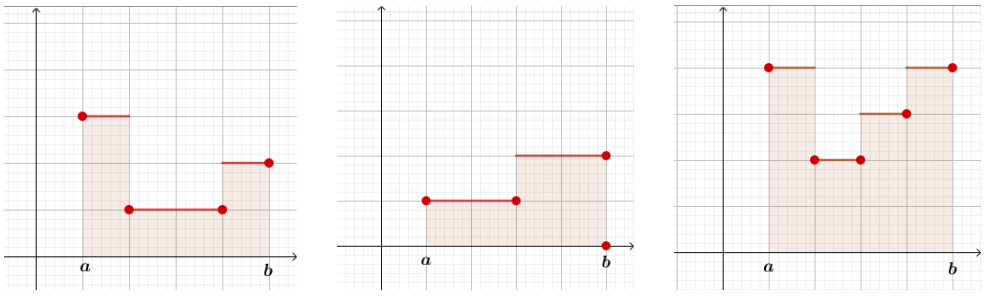
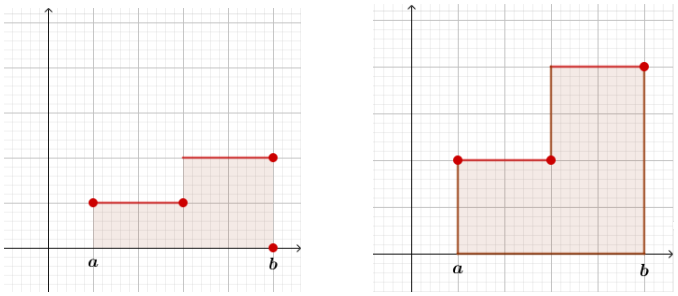


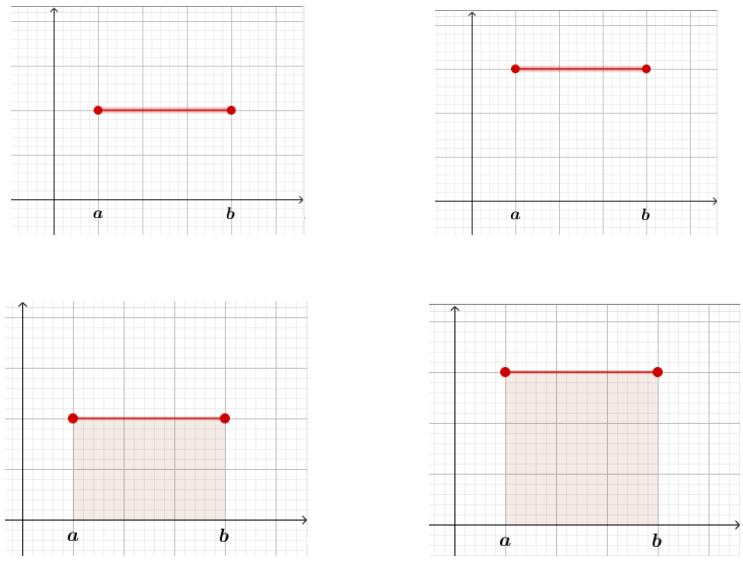
Figura 2-17: Homogeneidad de integrales para funciones escalonadas



- *Teorema de comparación*

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x de $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

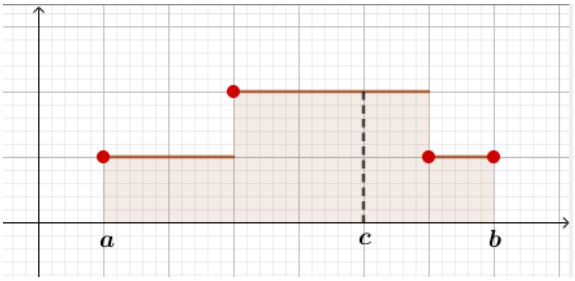
Figura 2-18: Teorema de comparación para integrales de funciones escalonadas



- Teorema de Aditividad respecto al intervalo de integración

$$\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad si \quad a < c < b$$

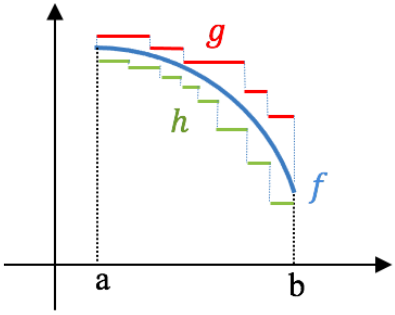
Figura 2-19: Aditividad respecto al intervalo de integración para funciones escalonadas



· Funciones más generales

En el proceso de definir la integral de funciones más generales se parte del "*encajonamiento*" por exceso y por defecto de una función, a partir de funciones escalonadas arbitrarias en un intervalo definido.

Figura 2-20: Encajonamiento de una función



De aquí en adelante se presentarán definiciones, teoremas y corolarios que dan sustento a la teoría de la integral definida para funciones generales. Las proposiciones que siguen se basan en el documento del profesor Joaquín Ortega (s,f) vinculado al CIMAT[7] quién expone cada una de las demostraciones en su publicación.

Definición

Una partición del intervalo $[a,b]$, es un subconjunto $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

con n algún entero positivo.

Además, la familia de las particiones de $[a,b]$, se denotará como $\mathbb{P}[a,b]$.

Definición

La norma de una partición P del intervalo $[a,b]$, denotada por $\|P\|$, se define como $\|P\|=\max_{k=1,\dots,n}\{x_k-x_{k-1}\}$.

Definición

Sea una función $f:[a,b]\to R$ acotada y P una partición del intervalo $[a,b]$. Se definen

$$M_i(f)=M_i=sup\,\{f(x):x_{i-1}\le x<x_i\}$$

[7] El Centro de Investigaciones en Matemáticas A.C. (CIMAT), localizado en la Ciudad de México, es un centro de investigación que busca contribuir con el desarrollo científico tecnológico a partir de la generación y divulgación de conocimiento en matemáticas de alto nivel. Página web: https://www.cimat.mx/es.

$$m_i(f) = m_i = inf\ \{f(x): x_{i-1} \leq x < x_i\}$$

para $i = 1,2,3, \dots, n$; y las sumas superiores $S(P,f) = \sum_{j=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$ e inferiores $I(P,f) = \sum_{j=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$ para la partición P.

Como se mencionó en el apartado de la integral de una función escalonada, las expresiones

$$S(P,f) = \sum_{j=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad I(P,f) = \sum_{j=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

es posible considerarlas como la suma de áreas de los rectángulos cuando f es no negativa.

Es claro, que $m_i \leq f(x) \leq M_i$ para cada $x_{i-1} < x < x_i$. Sin embargo, es necesario realizar un proceso de *refinamiento* de las particiones generadas en $[a,b]$ para lograr un encajonamiento más fino de f. Con los tres enunciados que siguen se da explicación al proceso de refinamiento.

Definición

Si P_1 y P_2 son particiones de $[a,b]$ decimos que P_2 es un *refinamiento* de P_1 si $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ y todos los puntos de P_1 también están en P_2.

Teorema

Sea $f: [a,b] \to R$ una función, con $f(x) \geq 0\ y$ acotada en $[a,b]$, P_1 y P_2 particiones del intervalo tales que P_2 es un *refinamiento* de P_1, entonces

$$S(P_2,f) \leq S(P_1,f) \qquad \text{y} \qquad I(P_2,f) \geq I(P_1,f).$$

Demostración en Ortega, J. (s.f, p. 129)

Corolario

Sea una función $f:[a,b]\to R$, con $f(x)\geq 0\, y$ acotada $[a,b]$, P_1 y P_2 dos particiones cualesquiera del intervalo, entonces

$$I(P_1,f)\leq S(P_2,f).$$

Demostración en Ortega, J. (s.f, p. 130)

- **Integral superior e inferior de Riemann**

Definición

Sea una función $f:[a,b]\to R$, con $f(x)\geq 0$, y los conjuntos $\{S(P,f):P\in \mathbb{P}[a,b]\}$ y $\{I(P,f):P\in \mathbb{P}[a,b]\}$.

La integral superior de Riemann de f se define como

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = inf\ \{S(P,f):P\in \mathbb{P}[a,b]\}$$

y la integral inferior *de Riemann de* f se define como

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = sup\ \{I(P,f):P\in \mathbb{P}[a,b]\}.$$

Teorema

Sea una función $f:[a,b]\to R$, con $f(x)\geq 0$, acotada entonces $\overline{\int_a^b} f(x)\ dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\ dx.$

Demostración en Ortega, J. (s.f, p. 130)

Definición

Sea una función $f:[a,b]\to R$, con $f(x)\geq 0$, acotada. Si $\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ dx = I.$

El número I se llama integral definida de f desde a hasta b. Y se simboliza como

$$I=\int_a^b f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ \ dx = \overline{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

La teoría de la **integral de Riemann** define la integral definida agrupando un conjunto amplio de funciones (como se había mencionado), sin embargo este constructo no logró generalizarse para funciones con algunos tipos de discontinuidades.

En el apartado que sigue se tratarán los elementos propios para dar aproximaciones a partir de rectángulos de áreas de regiones definidas por curvas.

2.1.5 Área por aproximaciones - Sumas de Riemann

Definición

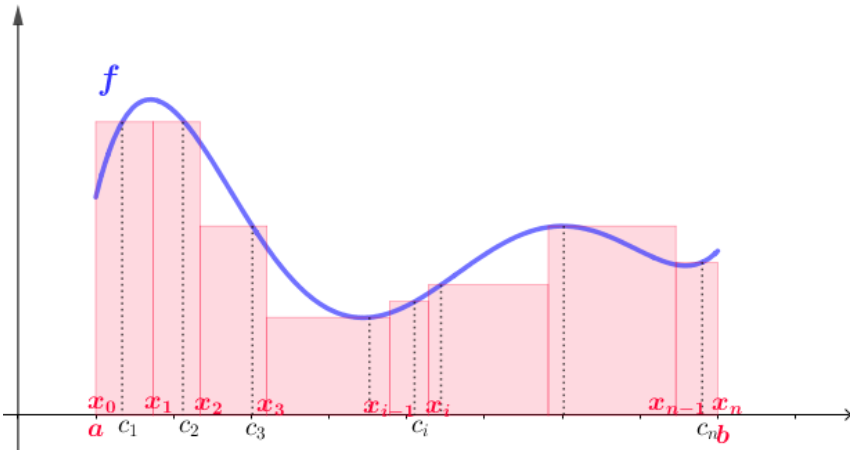
Sea una función $f:[a,b]\to R$, con $f(x)\geq 0$ y acotada, se llama suma de Riemann de f relativa a la partición P de $[a,b]$ a cualquier suma del tipo

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y los c_i son un elemento en cada intervalo $[x_i - x_{i-1}]$.

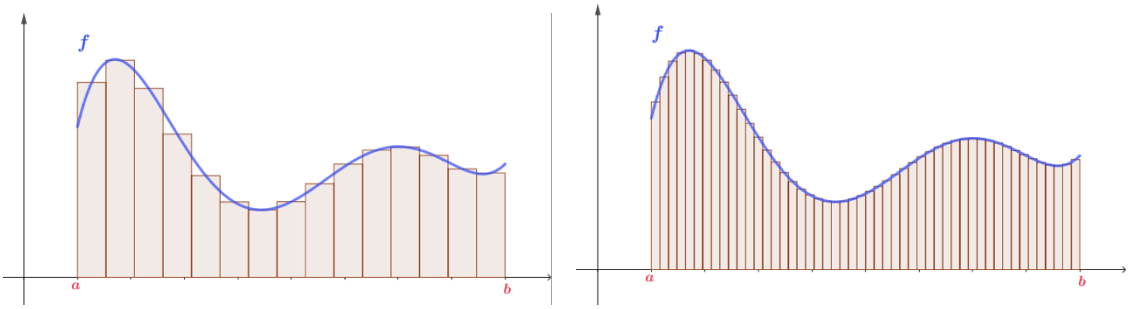
Manteniendo la visión geométrica en paralelo al enfoque analítico que se ha venido realizado. Nuevamente se considerará a cada término de la *suma de Riemann* como el área de un rectángulo con base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $f(c_i)$. Cualquier partición elegida define rectángulos que aproximan el área de región limitada por f en $[a,b]$ y el $eje\ de\ las\ abscisas$.

Figura 2-21: Sumas de Riemann



Si se plantean particiones cada vez más finas, se posibilita la construcción de una mayor cantidad de rectángulos cuyas bases tienen longitudes más pequeñas, lo que conlleva a un mayor recubrimiento de la región limitada y el cálculo de la suma de Riemann genera una mejor aproximación del área.

Figura 2-22: Refinamiento de la partición para Sumas de Riemann



15 rectángulos 50 rectángulos

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad \|P\| \; tiende \; a \; cero$$

Resulta notorio que por más de 25 siglos la estrategia de recubrimiento fuese el método principal para solucionar el problema del área en regiones no poligonales y aunque la evolución misma de las matemáticas se dio a través del tiempo, el análisis geométrico no pudo ser abandonado (aunque algunos pensadores lo intentaron) y, más bien, sirvió de complemento para la construcción teórica del análisis de cuadraturas y, finalmente de la integral.

Anticipando el capítulo que sigue, sobre pensamiento variacional, es de notar que el estudio de la suma de Riemann involucra elementos propios en este pensamiento, considerando una dependencia relacional entre las siguientes variables:

- *Norma de la partición* (con tendencia al cero).
- Cantidad de subintervalos que implica la *cantidad de polígonos que recubren la región* (con tendencia al infinito).

- La suma de las áreas de dichos polígonos genera una *aproximación al área de la región limitada.*

2.2 Pensamiento variacional

En el pensamiento variacional se estudia la relación entre variables y sus diferentes representaciones, por lo cual es importante generar procesos de modelación, indagar sobre patrones y establecer modelos de aproximación, entre otros. Es por esto que diferentes posturas se han tratado de indagar sobre los alcances que debería tener el estudio de este objeto y sus múltiples representaciones dentro del aula.

En el proyecto "*Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*" desarrollado por el Ministerio de Educación Nacional, MEN (Castiblanco, A., Rodriguez, F., Acosta, E., y Urquina, H., 2004), se exponen perspectivas históricas del pensamiento variacional, su conceptualización en el currículo de matemáticas colombiano y la importancia del uso de las TIC para su desarrollo. Desde una perspectiva histórica, hay que destacar que sólo después de mediados del siglo XV se dan las condiciones para el estudio formal de las funciones con la creación del álgebra simbólica y la extensión del concepto de número. Es el matemático Descartes quien trabaja la idea de dependencia en las ecuaciones que tiene dos variables (expresadas con letras), pero este concepto de variación está restringido a expresiones algebraicas (Castiblanco, A., Rodriguez, F., Acosta, E., y Urquina, H., 2004).

Son Bernoulli y Euler quienes conceptualizan por primera vez el término función como una expresión analítica formada por cantidades variables y cantidades constantes, de hecho Euler también establece la noción de variación al definir la función en 1755 como: "*Si unas cantidades dependen de otras de tal manera que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas*" (Detzel, 2006, p. 46), además de inventar la notación de función actual $f(x)$.

En el siglo XIX, la definición de función se relaciona con la correspondencia entre dos variables que se da por una ley o fórmula que asigna un único valor a la variable y cuando se da un valor a la variable x. Siguiendo a Detzel (2006), en un estudio realizado en la educación básica secundaria, se evidencia que la noción de función como correspondencia

entre elementos de dos conjuntos (principalmente numéricos) es la que ha prevalecido en la enseñanza de este concepto, privilegiando la condición de univalencia en las actividades escolares y como consecuencia la función es abordada desde un punto de vista estático al destacar la correspondencia y no la variación; en esa misma línea, García, G., Serrano, C., y Salamanca (2000), expresan que la noción de variación al estudiar el concepto de función ha quedado excluido de la mayoría de los currículos.

En Colombia como referente en la educación matemática, se tienen los Lineamientos en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos en Matemáticas (2006) dispuestos por el MEN, que considera al razonamiento variacional como uno de los pensamientos a desarrollar en un ambiente de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. Desde las directrices del MEN, el pensamiento variacional debe hacerse bajo caracterización de fenómenos de variación y la razón de cambio (en contextos matemáticos y no matemáticos) que involucren una dependencia funcional entre distintas cantidades. Es preciso que en el estudio de las funciones se aprenda a reconocer lo que cambia o lo que se mantiene fijo, las variables que pueden estar involucradas y la dependencia relacional entre estas. Además, proponen que en el desarrollo de este pensamiento, se usen y conecten diferentes representaciones (tablas, gráficas, expresiones verbales y algebraicas) desde las cuales se exploren, comprendan, analicen y modelen los procesos de variación en situaciones de cambio.

Sin embargo, aunque parámetros gubernamentales han definido una línea a considerar para la enseñanza de las matemáticas desde el desarrollo de competencias enmarcadas en los 5 pensamientos, los resultados siguen evidenciando fallas sobre las competencias que adquieren los estudiantes en el aula de clase, así lo demuestran los puntajes obtenidos en pruebas internacionales, por ejemplo, PISA 2015 (OECD, 2017), en donde Colombia obtuvo un puntaje promedio de 390 en matemáticas y la media de los países de la OECD fue de 490 puntos.

Las pruebas PISA para evaluar la competencia matemática se organizan en lo que denominan *las cuatro ideas claves,* dentro de las cuales se pondera al ítem del *Cambio y relaciones.* Este ítem fundamenta preguntas que están relacionadas con la variación entre sistemas de objetos que involucran algún tipo de relación de dependencia. Es decir, la

prueba PISA concibe la importancia que sugiere el desarrollo del pensamiento variacional en la competencia matemática.

Así mismo, en lo que concierne al pensamiento variacional son múltiples los estudios que revelan la falta de comprensión de los conceptos que involucran las relaciones entre dos variables. Dentro de los planteamientos que han sugerido alguna reflexión para la enseñanza de la variación o el cambio, se destaca lo descrito por Carlos Vasco, que menciona que las funciones deben dejar de enseñarse como se ha realizado tradicionalmente. En consideración a esta afirmación establece que la enseñanza de relaciones de covarianza debe dejar de utilizar sólo fórmulas donde se reemplazan valores que convierten las variables de interacción en elementos estáticos y gráficas cartesianas a partir de estos valores, porque esta representación paraliza los objetos que interactúan (énfasis en conocimientos procedimentales). En procura de mejorar, considera que el razonamiento variacional debe involucrar un pensamiento dinámico, donde el sujeto debe adquirir la capacidad mental para percibir lo que cambia o lo que se mantiene constante, de tal forma que lo lleve a reconocer el vínculo que sujeta a las variables y la covarianza existente en una situación al relacionar diferentes representaciones (Vasco, 2002).

En esta misma línea, Carlson et al (2003) define que "el *razonamiento covariacional sugiere procesos cognitivos donde se deben coordinar dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia respecto a la otra"*. Así mismo manifiesta la importancia del desarrollo de este pensamiento para una mejor apropiación de conceptos y objetos que involucran al cálculo infinitesimal (límites, derivadas, integrales y sus propiedades). La acción mental de coordinar expuesta por Carlson et al (2003), expone diferentes niveles de razonamiento acompañados por comportamiento (escritos y verbales) cuando los estudiantes analizan situaciones de covariación entre variables que cambian simultáneamente. La clasificación es estos niveles de razonamiento son:

- **Coordinación de la variación,** en donde los estudiantes identifican que hay dos variables que cambian (la variable independiente y dependiente). Como evidencia de este nivel los estudiantes pueden identificar la variable x e y en un plano cartesiano, en una situación o una tabla.

- **Coordinación de dirección**, se presenta cuando los estudiantes son capaces de identificar la relación creciente o decreciente cuando covarian las variables; en este nivel los estudiantes pueden crear imágenes mentales en donde los valores de la variable dependiente aumentan o disminuyen a medida que la variable independiente aumenta (crea una imagen de una gráfica aproximada que representa la relación entre las variables) o verbalizar esa relación decreciente o creciente entre las variables.

- **Coordinación cuantitativa**, implica razonar sobre la cantidad de cambio de la variable dependiente cuando la variable independiente toma valores en intervalos fijos (cuantificar cuánto cambiará la variable dependiente al cambiar la variable independiente en intervalos iguales). Los comportamientos de estudiantes que alcanzan este nivel se pueden caracterizar por ubicar puntos en el plano cartesiano analizando si la variable dependiente crece (o decrece) constantemente, o crece cada vez más o cada vez menos, cuando la variable independiente aumenta (también se acepta en este nivel que describa en palabras la cuantificación de la covariación entre las variables).

- **Coordinación de la razón de cambio promedio**, se caracteriza por la construcción de gráficas continuas pero segmentadas al cuantificar la variable independiente en intervalos iguales. Estos comportamientos muestran que los estudiantes tienen la noción de pendiente como la razón de cambio de la variable dependiente al variar la variable independiente en intervalos iguales y ajustan la pendiente de los segmentos continuos de acuerdo con el crecimiento (decrecimiento) rápido o lento de la variable dependiente.

- **Coordinación de la razón instantánea**, es el nivel de razonamiento más alto y se evidencia cuando los estudiantes construyen gráficas con curvas suaves que muestran una interpretación de la covariación de las variables cuando la variable independiente aumenta en cantidades cada vez más pequeñas. Además, los estudiantes son capaces de justificar o interpretar características de las gráficas como concavidades o puntos de inflexión en el contexto de la situación analizada.

El análisis de estos niveles de razonamiento se enmarca en situaciones de variación donde los estudiantes (que han visto por lo menos el curso de cálculo diferencial) analizan y representan desde gráficas las variaciones simultáneas entre dos variables en situaciones de cambio. Carlson et al (2003), justifica que la investigación se realizó haciendo énfasis en el análisis de la representación gráfica, porque hay numerosos estudios que evidencian que estudiantes que han visto cursos de cálculo, tienen dificultades para interpretar y transferir los conceptos claves como razón de cambio promedio e instantánea, concavidad y puntos de inflexión, cuando trabajan en situaciones contextualizadas como: La variación de altura de un recipiente (de forma irregular) dependiendo del volumen de llenado y forma del recipiente.

2.2.1 Procesos involucrados en el pensamiento variacional

La modelación es esencial en el desarrollo del pensamiento variacional, dado que al estudiar situaciones de cambio se favorece un enfoque dinámico en el cual hay que identificar las variables que cambian, describir e interpretar la relación entre estas (análisis cualitativo) para hacer predicciones estableciendo conjeturas sobre el cambio, cuantificar la variación a través de tablas y gráficas y generalizar el modelo (análisis analítico) (Castiblanco, A., Rodriguez, F., Acosta, E., y Urquina, H., 2004).

En los Lineamientos en Matemáticas (1998, p. 78) y en Castiblanco, Rodriguez, Acosta, y Urquina (2004, pp. 31-32), se establecen las actividades o niveles de logro referentes al desarrollo del pensamiento variacional cuando se trabajan con situaciones de modelación. Estas son:

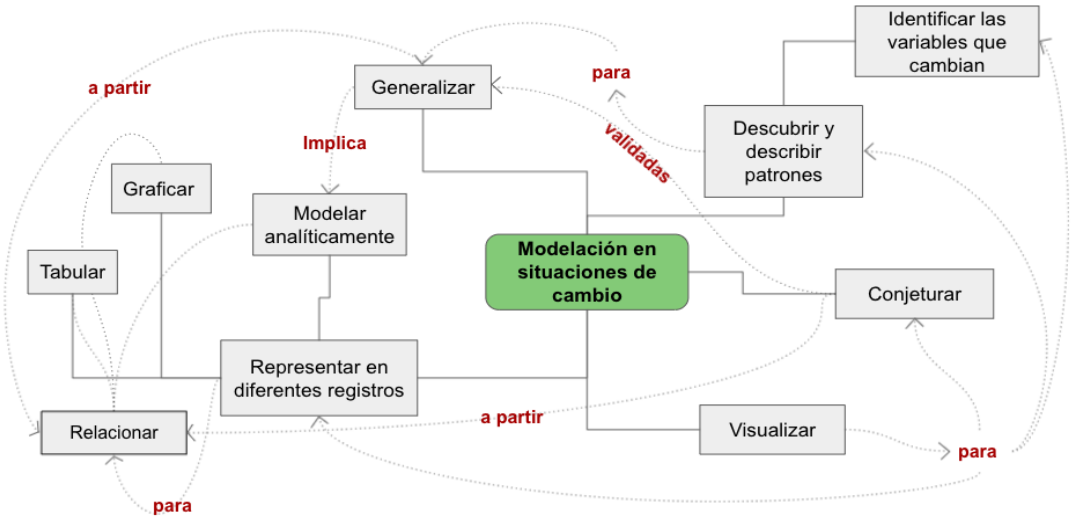
- Visualizar y describir patrones reconociendo las variables involucradas. Por ejemplo, identificando qué elementos varían y cuáles no, o analizando cómo cambia una variable al cambiar la otra (covariación).
- Formular o predecir conjeturas sobre la relación entre las variables, desde un análisis de diferentes representaciones como lo son las gráficas y las tablas, o visualizando las variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente se acerca a cero o aumenta.

- Organizar, representar y analizar la relación de dependencia entre las variables estudiadas, usando diferentes registros matemáticos como tablas, gráficas y modelos algebraicos.
- Relacionar la información desde diferentes registros, que muestran las relaciones entre las variables involucradas.
- Generalizar (cuando sea posible) a través de modelos matemáticos la relación entre las variables involucradas. Analizar la precisión y restricciones de este modelo (definir - analizar el rango razonable de valores para cada variable).

Todas las actividades anteriores y que de aquí en adelante se llamarán **características involucradas en el pensamiento variacional**, están mediadas por la capacidad de visualización y de relación que se establezcan entre estas. Estas características, no se dan necesariamente de forma secuencial y por el contrario pueden estar relacionadas o emerger de manera simultánea. Por ejemplo, un estudiante a través de analizar diferentes registros puede describir o conjeturar la relación de cambio de la situación. O por el contrario, primero realiza una conjetura de la situación de cambio, tratando de predecir cualitativamente cómo será la gráfica y después de realizar la tabla y gráfica, valida su conjetura o la modifica.

En el siguiente esquema se muestran posibles conexiones entre estas actividades que emergen en el desarrollo del pensamiento variacional cuando se trabaja en modelación.

Figura 2-23: Conexiones entre las características del pensamiento variacional



En Vasco (2002), se establece que cuando se aborda el pensamiento variacional el principal propósito es la modelación y los procesos involucrados en este concepto son dinámicos. En este sentido el usar programas gráficos permite analizar diferentes representaciones de un fenómeno y visualizar sus relaciones puede ayudar a la comprensión de los modelos que los representan (Vasco, 2002); sin embargo este mismo autor pone de manifiesto la importancia de no dejar de la lado la conceptualización de los objetos estudiados y expone algunas dificultades de implementar las TIC en las clases:

- Razones académicas, cuando los maestros no están preparados para usar la tecnología.
- Usar los computadores para repetir las actividades que se pueden realizar de forma más eficaz en lápiz y papel.

A continuación, se profundiza en el asunto de implementar las TIC en la educación matemática.

2.3 Las TIC en la educación matemática

La inmersión de las TIC desde hace unos años ha sido evidente en todos los niveles educativos, han surgido como instrumentos o herramientas de apoyo para el ejercicio de la enseñanza y el proceso de aprendizaje de objetos y conceptos propios de cualquier disciplina. Vivimos en una época inmersa en la tecnología, en la que internet, simuladores, tutoriales en línea, juegos virtuales, aplicaciones para móviles, son algunos de los recursos que han tomado auge para la implementación en el aula y fuera de ella, en pro de apoyar la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Sobre los aportes que genera la inclusión de herramientas tecnológicas en la educación, investigaciones realizadas por Klik (2003) y Cox y Abbot (2004), citados por la UNESCO (2009), identificaron un efecto positivo en el aprendizaje de elementos de las matemáticas, las ciencias e inglés. Castillo (2008), afirma que no se cuestiona la importancia del uso de las TIC en la educación matemática, y que actualmente se investigan las ventajas e implicaciones de su uso en la educación, tanto en la generación de conocimiento como en la reestructuración del currículo y prácticas pedagógicas. Cuando la implementación de las TIC se realiza con una planificación, constituye un ambiente de aprendizaje diferente al tradicional, que se caracteriza por pensar que es el profesor (especialista en una materia) quien debe transmitir su saber a partir de sus conocimientos didácticos (Marcelo 2001, citado en castillo 2008); Por otro lado, un ambiente de aprendizaje diferente al tradicional se concibe como un espacio de orientación por parte del profesor quien usa todos los medios (incluye claramente los recursos tecnológicos) disponibles, para promover y orientar el proceso de aprendizaje (Yábar, 2000, citado en Castillo 2008).

Un ambiente de clase tradicional privilegia un enfoque algorítmico al resolver ejercicios que tienen única solución y promueven la aprehensión de procedimientos algebraicos. Pero investigaciones específicas sobre la relación entre enseñanza de las matemáticas y tecnología revelan consideraciones como la realizada por Gómez (1997) sobre las posibilidades de dinamismo que ofrece la herramienta tecnológica sobre los objetos matemáticos, además, de las vinculaciones de múltiples representaciones de un elemento

matemático en una interfaz interactiva que aportan a la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes. Gómez (1997) expone que:

> "la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración" (Gómez, 1997)

En esta misma línea, Azinian (2009) destaca las herramientas que contribuyen a la visualización, al cambio que sufre una variable, a la manipulación dinámica de datos, a la exploración como atributos que contribuyen al desarrollo de pensamiento. Con lo que se concibe que las TIC deberían contribuir a la construcción y no a la memorización o la ejercitación. Araya (2007) opina que la implementación de las TIC en la clase de matemáticas promueve a través de la visualización y la exploración la producción de conjeturas (al cuestionar, validar, analizar, refutar las conclusiones obtenidas de la información dada), también permite establecer las relaciones entre diferentes representaciones de un mismo concepto, facilita el proceso para realizar generalizaciones y justificaciones a partir de los casos particulares y así encontrar la solución de una situación problema, de igual forma favorece la interacción entre pares y la construcción del conocimiento de forma colectiva. Este mismo autor señala que introducir herramientas tecnológicas demanda que los profesores revisen cuidadosamente el diseño de las actividades y anticipen que pueden surgir resultados no esperados o incorrectos, por lo cual tiene un papel importante al mediar la interacción del estudiante con los recursos tecnológicos y entre los estudiantes, con el propósito de orientarlos hacia exploraciones correctas y significativas, al crear un ambiente de clase de indagación en el cual se realizan reflexiones.

Con lo descrito anteriormente se sugiere que las TIC pueden percibirse como una metodología que promueve una transformación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al exponer nuevas estrategias pedagógicas (con respecto a las tradicionales) que han mostrado la posibilidad de ser más efectivas cuando el profesor las planifica e implementa adecuadamente (Castillo, 2008). En Villareal (2012) esta idea es validada al considerar que los medios usados (incluye los recursos tecnológicos) condicionan las formas de acceder y generar conocimientos, lo que implica un cambio en

las prácticas y los contenidos, además es el profesor quien tiene el desafío de pensar cómo y en qué momentos usar esas nuevas tecnologías para acceder a nuevos conocimientos y prácticas matemáticas. Sin embargo, hay evidencia de la resistencia al uso de nuevas tecnologías en el campo educativo tanto en las escuelas como en los programas de formación de profesores y *las causas son variadas: Temor a lo desconocido, temor a la pérdida de poder en el aula, desconocimiento de softwares educativos y sus posibilidades para el aula* (Villareal, 2012, pp. 83). A lo antepuesto, se suma que en las prácticas de la educación matemática se ha favorecido el uso de lápiz y papel valorando los procesos algebraicos en donde el profesor tiene toda la autoridad y conocimiento para validar lo correcto; cambiar este paradigma puede generar resistencias porque es posible salir de la zona de confort con lo cual debe asumir retos tanto en la planificación como en la implementación (Villareal, 2012).

Al respecto, Araya (2007) considera que es importante percibir que las prácticas con lápiz y papel en la educación matemática son reforzadas a través de la tecnología al ampliar las posibilidades para explorar ideas y conceptos matemáticos. También advierte que para que el estudiante sea exitoso en la clase de matemáticas, depende en gran medida, de las decisiones que tome el profesor en relación a cuándo y cómo usar las herramientas tecnológicas porque es posible que si estas decisiones son erróneas, no se logren o disminuyan habilidades que de otro modo habrían sido alcanzadas por los estudiantes.

Con lo descrito hasta este punto, es fundamental entender que la introducción de las TIC's en las clases de matemáticas, debe regularse por unos objetivos claros y metodología bien definida. En Rojano (2003), se establecen algunos principios al introducir las Tic's en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias y las matemáticas:

- Principio Didáctico: Los conceptos a enseñar deben ser tratados desde el campo fenomenológico (tener presente el componente histórico y de aplicación del contenido) para el diseño de actividades.
- Principio de Especialización: La selección de recursos y software se basan en el estudio didáctico específico de cada materia y concretamente de cada objeto matemático a enseñar.

- Principio Cognitivo: Escoger herramientas que promuevan la manipulación y comprensión de los objetos y/o modelos matemáticos estudiados y que favorezcan las relaciones entre diferentes representaciones.
- Principio Empírico: Selección de herramientas que han sido ensayadas y analizadas en algún sistema educativo.
- Principio Pedagógico: Se favorece un ambiente de aprendizaje colaborativo en el cual se da la interacción entre estudiantes y estudiantes con el profesor, a partir de las actividades diseñadas.
- Principio de Equidad: Se seleccionan herramientas en momentos oportunos, que ayudan a los estudiantes a acceder a ideas importantes en las matemáticas.

Con base en los primeros cuatro principios, se seleccionó para responder la pregunta de este trabajo un programa de matemáticas que ha sido usado en la educación matemática desde hace algunos años, para adaptar dos actividades propuestas inicialmente en lápiz y papel. En el apartado 2.3.1, se presenta el programa GeoGebra y algunas referencias de su implementación en la educación matemática.

2.3.1 GeoGebra en la educación matemática.

GeoGebra se creó en el 2001 por Markus Hohenwarter, como un programa de Geometría Dinámica con una licencia libre y gratuita. En la actualidad en la página oficial "www.geogebra.org" se ha consolidado una comunidad de educadores matemáticos que investigan, crean materiales y comparten propuestas de enseñanza basadas en las herramientas de este programa; además existen Institutos de GeoGebra en diferentes países y ciudades, que básicamente son un grupo de educadores que se reúnen para usar esta herramienta y crear propuestas que abordan diferentes conceptos matemáticos; también, proponen cursos que tienen como objetivo formar y capacitar a profesores en las herramientas que ofrece este programa. Así, GeoGebra se ha convertido en un referente en la didáctica de las matemáticas en todos los niveles educativos y en materias afines a las matemáticas como la física. El programa permite explorar conceptos relacionados con distintas áreas de las matemáticas: geometría, cálculo, álgebra, estadística, probabilidad, entre otras; además, es accesible en cualquier dispositivo y tiene un lenguaje de

programación que posibilita la creación de aplicativos con los cuales los estudiantes pueden explorar conceptos de forma autónoma, es decir ofrece una interfaz que tiene muchas posibilidades para crear un ambiente de clase diferente al tradicional orientada por el profesor.

En Cotic (2014), se señala que una de las características principales de GeoGebra es que es un programa fácil de usar y modificar, además, los applets creados se pueden compartir en la web. La ventaja de esto es que los estudiantes tienen la posibilidad de interactuar con este recurso usando los deslizadores, botones de control y operadores booleanos a través de la programación en java (Cotic, 2014 y Barrena, Falcón, Ramírez, & Collantes, 2011), así, los estudiantes manipulan, visualizan y exploran los objetos a estudiar y pueden profundizar en conceptos usando sus conocimientos previos o a través de las explicaciones que ofrece el programa (también pueden hacer construcciones para solucionar un problema). En cuanto al profesor, ofrece la oportunidad de crear material que presente un tema de acuerdo a sus objetivos, usando variedad de representaciones, mostrando la información de forma organizada para orientar las interpretaciones de los estudiantes (Cotic, 2014 y Barrena, Falcón, Ramírez, & Collantes, 2011).

Cotic (2014), expone que GeoGebra es un programa con el cual se pueden realizar secuencias didácticas que ayudan a descubrir regularidades, establecer relaciones y/o propiedades, en ese sentido en los estudiantes es posible desarrollar algunas competencias para resolver problemas o producir conocimiento; teniendo momentos de interés y tensión que con una metodología apropiada estarán retados a buscar resultados, a través de la manipulación y visualización de aplicativos o herramientas del programa (Ruiz, Ávila & Villa-Ochoa, 2013). Para lograr lo antepuesto, es fundamental desarrollar una práctica o ambiente de clase en el cual se elaboren conjeturas, se realice una exploración dinámica, se formulen cuestionamientos de los conceptos, y se den argumentos para validar lo estudiado, mejorando sus habilidades comunicativas al presentar sus explicaciones.

Respecto al profesor, es importante que conozca el programa y las opciones que ofrece para generar actividades creativas y retadoras, además tener una actitud reflexiva, detectando posibles aciertos y errores en las interpretaciones de sus estudiantes, detectando las competencias que ellos van desarrollando, al fomentar un trabajo

colaborativo a través de discusiones, para finalmente institucionalizar el nuevo conocimiento (Cotic 2014) ofreciendo una oportunidad diferente de presentar y apropiarse del conocimiento, dado que los medios hacen parte de cómo se genera el conocimiento.

Al poner el énfasis en el desarrollo del pensamiento variacional usando este programa autores como Ruiz, Ávila & Villa, (2013) y Villa & Ruiz (2010) manifiestan que GeoGebra al ser un programa dinámico promueve las relaciones de covariación, a través de la visualización y las conexiones entre diferentes representaciones. Entonces el hincapié no se hace sobre lo algebraico sino desde un análisis entre las representaciones privilegiando el dinamismo en las gráficas.

En el artículo de Villa, & Ruiz (2010) se presupone una relación entre la generación de conocimiento de forma colaborativa y la influencia de los medios (recursos) con los que se aprende, dado que intervienen en la forma en la cual accedemos al conocimiento. Los autores muestran dos ejemplos en los que se usa GeoGebra para explorar el pensamiento variacional como un aspecto dinámico del conocimiento matemático que está ligado a conceptos de cálculo, en el que se estudian nociones dinámicas de covariación entre magnitudes asociadas a funciones y sus propiedades.

El primer ejemplo es una actividad con la cual se tiene el objetivo de aproximarse al concepto de derivada a partir de la comprensión de tasa de variación; usan diferentes construcciones y herramientas de GeoGebra para analizar la tasa de variación entre los puntos de una función y justificar desde la gráfica de la función derivada por qué estos dos conceptos están relacionados. En el segundo ejemplo se estudian las cónicas como lugares geométricos; el episodio que se explica, muestra cómo al analizar las propiedades de la elipse los estudiantes se interesaron en propiedades inusuales de este objeto matemático (estudiaron la relación y propiedades de las gráficas que surgen al relacionar la covariación entre la longitud del $segmento\ central$ y el ángulo entre este segmento y el eje positivo del $eje\ y$). Es decir, en la interacción con el programa surgió la posibilidad de reformular el contenido a aprender.

Entre las conclusiones del estudio se presenta el software GeoGebra como un programa al que llaman *unidad* en donde sus diferentes representaciones están en armonía, en otras

palabras, con el programa se promueve la comprensión de conceptos porque las herramientas algebraicas, numéricas, gráficas y geométricas están dinámicamente relacionadas. También indican que es posible desarrollar el pensamiento variacional por medio de la visualización realizada desde GeoGebra, porque emergen procesos como: describir relaciones, sugerir conjeturas, crear estrategias, construcciones gráficas y algebraicas para justificar sus exploraciones. Finalmente llaman la atención sobre cómo usar la tecnología para profundizar en los objetos o conceptos estudiados (y las herramientas del software) y en la posibilidad de crear actividades flexibles en las que es posible explorar nuevos conocimientos y es el profesor quién debe decidir cómo orientarlos y su pertinencia (Villa & Ruiz, 2010).

3. Diseño Metodológico

Enmarcado como una investigación de tipo cualitativa bajo el paradigma interpretativo, en la línea de TIC y otros recursos para la Enseñanza, el diseño metodológico se divide en cuatro fases:

- *Revisión de recursos*: Revisión de trabajos de grado del repositorio virtual y repositorio de la biblioteca principal de la Universidad Pedagógica Nacional. Se analizan y sistematizan trabajos de grado construidos en torno al pensamiento variacional elaborados en las últimas tres décadas.

- *Construcción de aplicativos:* Elegidas las actividades sin mediación tecnológica (es decir, actividades en lápiz y papel), se describen las actividades para adaptarlas y virtualizarlas usando el software GeoGebra.

- *Contextualización de la población:* Caracterizar el contexto de la Universidad Manuela Beltrán y contexto de los docentes que realizaron sus aportes para el análisis final de este trabajo.

- *Construcción y aplicación del instrumento de indagación:* Construir el instrumento de indagación para aplicar a los docentes definidos en la fase anterior y que se usa como insumo para alcanzar los objetivos propuestos en este documento.

3.1 Revisión de la documentación

En la primera fase, se realizó una revisión de las tesis de grado que la Universidad Pedagógica Nacional dispone en el repositorio virtual y en el repositorio de la biblioteca principal. De la revisión, se encontraron un total de 30 trabajos de grado[8] relacionadas con el pensamiento variacional los cuales se discriminaron entre trabajos de pregrado de la licenciatura en matemáticas, la *Especialización en Educación Matemática* y la *Maestría en Educación Matemática.*

En el anexo A. se encuentra la relación de documentos que fueron explorados para la elección de las actividades que sirvieron como insumo para cumplir con el propósito de esta propuesta. En los documentos analizados se agruparon bajo la siguiente discriminación:

- Las actividades contienen propuestas con aplicación de algún software.
- La propuesta conlleva actividades con material tangible o con exploración en campo abierto.
- Propuestas sin actividades (Análisis histórico o de las actuaciones de los sujetos)
- Actividades propuestas para su realización en lápiz y papel.

Los documentos de los tres primeros grupos son descartados por el objetivo de este trabajo. Para el último grupo, el tratamiento de las actividades se enfoca dos subgrupos que son:

- Búsqueda de patrones: Todas las actividades presentadas en estos documentos se enmarcan en contextos de nivel de escolaridad básica.

[8] En el mes de marzo del 2020, en Colombia se declara una alerta sanitaria como consecuencia del virus SARS-Cov-2 o Coronavirus. En la ciudad de Bogotá, por orden gubernamental se ordena a toda la ciudadanía entrar a cuarentena preventivas debido a la propagación de virus y los efectos perjudiciales a la salud. Los constantes confinamientos mantuvieron cerradas empresas, comercios e instituciones educativas, entre otras. Para el momento en que se ordenan los cierres de las instituciones, este documento se encontraba en proceso de desarrollo, específicamente en la primera fase de la metodología propuesta. Ante la imposibilidad de poder ingresar a la Biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional solo se alcanzan a hacer revisiones de dos trabajos de grado en la Biblioteca y los demás hacen parte de los documentos encontrados por el repositorio virtual de la Universidad.

- Propuestas en temas de Cálculo: Se encuentran actividades enfocadas a temas de enseñanza en educación media o para curso de primeros semestres de nivel universitario.

Dado el contexto en el que se enmarcan los objetivos de este trabajo se considera que las actividades del último grupo resultan más idóneas para su elección, entre ellas se destacan:

- *Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio.*
- *Introducción a la noción de derivada como pendiente de la recta tangente desde la variación y el cambio: descripción de procesos de conjeturación, argumentación y explicación.*
- *Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once.*

Teniendo en cuenta que dentro de la revisión se encontraron 10 documentos enfocados al tratamiento de la derivada y tan solo 2 propuestas estaban relacionadas con elementos del Cálculo Integral, se considera pertinente realizar un estudio sobre los elementos propios de la Integral y algunas consideraciones didácticas involucradas en el tratamiento de este concepto y su enseñanza teniendo en cuenta la covariación existente entre variables que se relacionan en situaciones de aproximaciones de áreas por recubrimientos.

Por último y por las consideraciones antes descritas se elige el trabajo de grado de la docente Francy Gómez (2004) titulado: ***"Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once"*** para su adaptación en el software de GeoGebra.

3.2 Construcción de aplicativos.

Elegidas las actividades del trabajo de grado **Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once,** se inicia con la construcción digital de las actividades seleccionadas.

Considerando la propuesta originalmente construida por la docente Francy Gómez, se mantiene la concepción sobre la cual las actividades no son ellas en sí mismas quienes pretender enseñar a los estudiantes un objeto o un procedimiento, sino que es necesario el acompañamiento continuo del docente para guiar el desarrollo de las actividades y enfocar las pretensiones de enseñanza a partir de las actividades.

En este sentido, se crearon siete aplicativos en el software de GeoGebra que dieran cuenta de las dos actividades elegidas. Estas actividades fueron cargadas a la plataforma de GeoGebra en línea (geogebra.org) en el perfil del autor de este documento para su aplicación a los docentes que permitirá responder a la pregunta y objetivos planteados en este trabajo de grado.

3.2.1 Descripción de los aplicativos construidos

Los recursos creados fueron cargados en la modalidad "*Libro de GeoGebra*[9]" de tal manera que las siete actividades están distribuidas en tres módulos distintos que ayudarán a organizar las actividades, mostrando el cambio simultáneo que se da entre dos variables (usando diferentes registros) permitiendo al estudiante visualizar y conjeturar sobre la tendencia de las áreas de regiones limitadas por curvas, al disminuir las dimensiones de los polígonos que se usan para recubrirlas. A continuación, se presenta la forma en que fueron distribuidas las actividades.

[9] Enlace al libro construido: https://www.geogebra.org/m/rnmhjvj9

- **Módulo 1.** *Aproximación al área de una región*

La actividad pretende que los estudiantes establezcan una posible forma para encontrar una "medición aproximada" del área de una región irregular a partir de figuras poligonales, en específico con cuadrados. En este sentido, se genera la idea de recubrimientos para poder aproximar el área, además se vincula la relación existente entre las medidas de las figuras poligonales y el cambio del área aproximada de la región irregular, puntualmente, cómo a partir de la variación de la longitud del lado del cuadrado (variable independiente) se puede realizar una aproximación del área de la región (variable dependiente) en cuestión.

En este sentido, se pretende que los estudiantes establezcan la relación de covariación entre las variables:

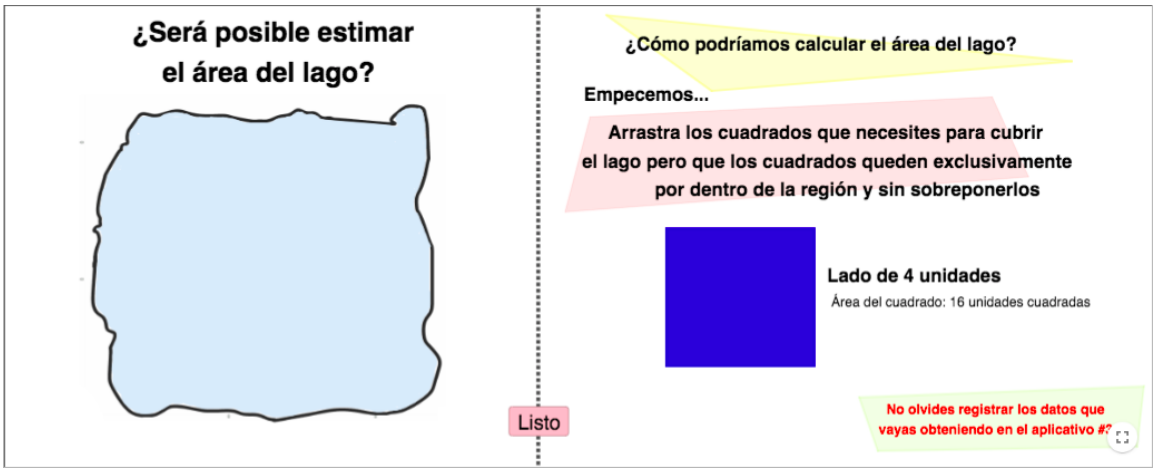
- *Longitud del lado del cuadrado*
- *Cantidad de cuadrados que recubren la región*
- *Aproximación del área del "Lago"*

La información es organizada en tablas para que los estudiantes puedan visualizar y conjeturar sobre la tendencia de la aproximación del área del "Lago" al disminuir las dimensiones de los cuadrados; con esto se privilegia la covariación, porque los estudiantes pueden identificar como las variables involucradas cambian simultáneamente y así encontrar una mejor aproximación para el área del lago.

Actividad 1. Aproximación al área de un lago

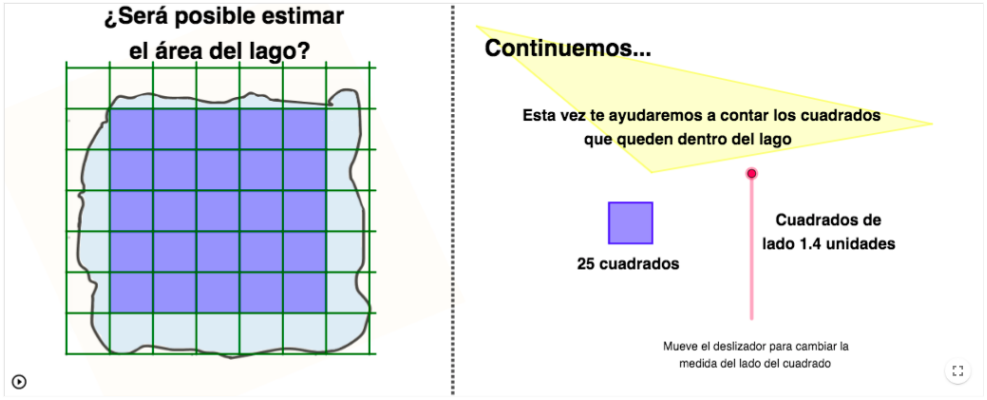
En este aplicativo los estudiantes pueden arrastrar y ubicar cuadrados de un mismo tamaño hacia la región definida por el "***Lago"*** de tal manera que se realice el recubrimiento de la región y así encontrar una aproximación para el área del "***Lago"***. El aplicativo contiene instrucciones para que se realice el recubrimiento con las figuras que queden exclusivamente dentro de la región (por defecto), sin embargo, en la dinámica con los estudiantes, también se tiene la posibilidad de dar la instrucción para que se realice el proceso por exceso (en correspondencia a la guía originalmente creada).

Figura 3-1: Aplicativo 1. Área #1



El aplicativo cuenta con la posibilidad de cambiar el tamaño de los cuadrados cada vez que se quiera hacer un nuevo recubrimiento con tamaños cada vez más pequeños. En específico el aplicativo cuenta con cinco medidas distintas para el lado de cuadrado, como lo son 4, 3, 2.5, 2 y 1.7 unidades.

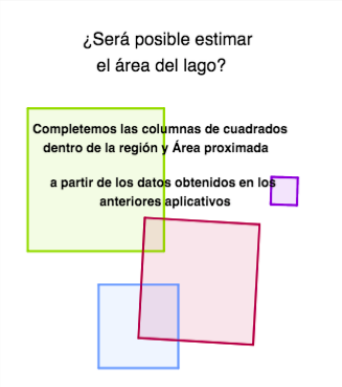
Figura 3-2: Aplicativo 2. Área #2



En complemento con el aplicativo anterior y en aras de ayudar con el proceso de recubrimiento y de conteo de las figuras que “caben” por defecto o por exceso en la región, se genera una cuadrícula que ayuda a establecer la cantidad de cuadrados en el recubrimiento. En este caso, el estudiante interactúa con el aplicativo mediante un *deslizador* que hace que cambie el tamaño de los cuadrados. En este caso, se consideran las medidas de 1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6, 0.4 y 0.2 unidades del lado del cuadrado. Así mismo,

dependiendo de la medida seleccionada, el aplicativo calcula la cantidad de cuadrados que se pueden ubicar por defecto y dejando la posibilidad de agregar en el conteo los que faltarían para realizar el recubrimiento por exceso.

Figura 3-3: Aplicativo 3. Datos Área



A	B	C	D
Lado del cuadrado	Área del cuadrado	Cantidad de cuadrados dentro de la región	Área APROXIMADA del lago
4	16		
3	9		
2.5	6.25		
2	4		
1.7	2.89		
1.4	1.96		
1.2	1.44		
1	1		
0.8	0.64		
0.6	0.36		
0.4	0.16		
0.2	0.04		

El tercer aplicativo del módulo sirve como instrumento de registro de los dos primeros aplicativos. En específico, en éste se debe registrar la información sobre la cantidad de cuadrados necesarios para realizar el recubrimiento, y a su vez, poder calcular la aproximación del área del "***Lago***" al usar cuadrados con una longitud cada vez más pequeña.

Al finalizar el módulo 1 e identificar las variables que mantienen una relación de covariación (longitud del lado del cuadrado y la aproximación del área), los estudiantes reflexionan sobre las variables involucradas en esta situación y cómo se consigue una mejor aproximación para el área del lago, lo que puede propiciar conjeturas sobre el comportamiento o tendencia de las variables relacionadas.

- **Módulo 2.** *Aproximación del área del círculo*

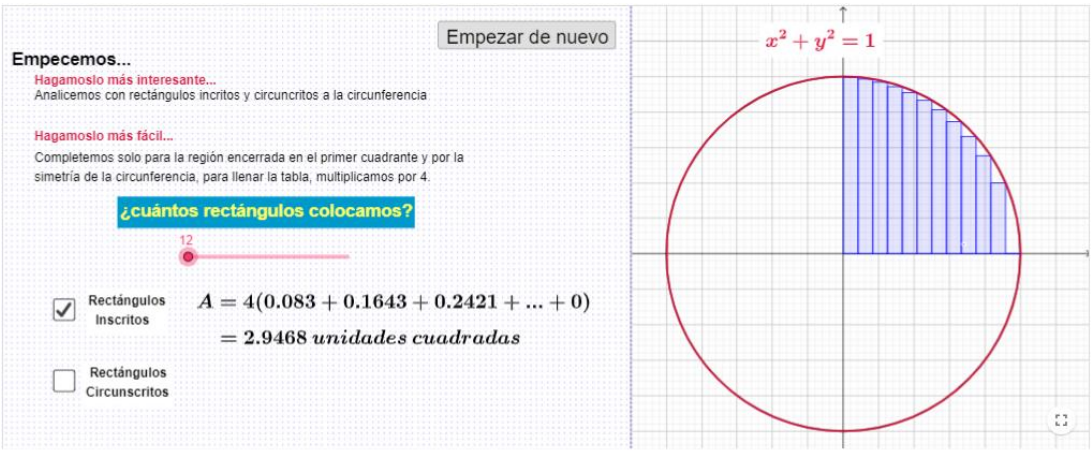
Ahora, se busca encontrar el área de la región encerrada por una circunferencia, esta vez el recubrimiento se realiza a partir de rectángulos, acercándose más a la construcción generalizada en las sumas de Riemann. De la misma manera que en la actividad 1, *la dependencia de la aproximación del área de la región por recubrimientos está sujeta a la*

variación de las medidas de los polígonos, en específico de la medida de la base de cada rectángulo, comúnmente llamada Δx o h. Es decir, para este módulo, la relación de covariancia vincula las variables:

- *Longitud de la base de los rectángulos.*
- *Número de rectángulos (inscritos o circunscritos).*
- *Aproximación del área del círculo.*

Actividad 2. Área de un círculo

Figura 3-4: Aplicativo 4. Área del círculo

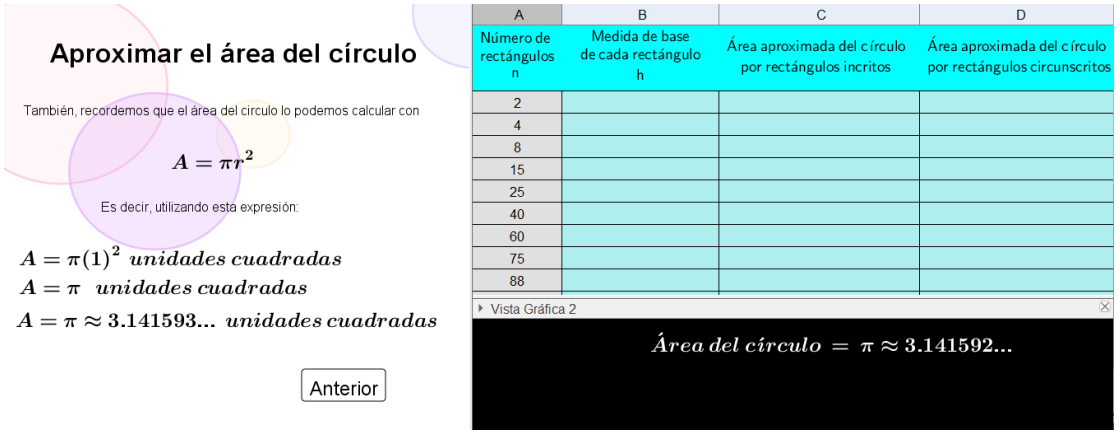


El aplicativo abre la posibilidad de elegir el tipo de rectángulos (inscritos o circunscritos) que quiere ubicar en la región. Además, en la interacción con el aplicativo el estudiante puede seleccionar la cantidad de rectángulos que se mostrarán en primer cuadrante. En el aplicativo el estudiante tiene la posibilidad de visualizar cómo al disminuir la medida en la base de los rectángulos (variable independiente) la cantidad de estos aumenta y por tanto se encuentran mejores aproximaciones para el área del círculo (variable dependiente).

El aplicativo 5 en un primer momento, muestra el cálculo del área del círculo a partir de la expresión $A = \pi r^2$, fórmula que es normalmente conocida por los estudiantes y que determinaría el valor exacto del área. Luego, y ya como instrumento para registrar la información del aplicativo anterior, se genera una tabla donde se organizan los datos que

se obtienen al variar la cantidad de rectángulos, para este caso se utiliza una hoja de cálculo en GeoGebra que solicita la medida de la base del rectángulo y el área aproximada que depende de la cantidad de rectángulos elegidos. Es de este modo, que el estudiante debería *conjeturar que al aumentar (variar) el número rectángulos disminuyendo la medida de la base se genera una mejor aproximación al valor teórico que resulta al utilizar la fórmula del área del círculo*.

Figura 3-5: Aplicativo 5. Datos círculo



Los dos primeros módulos han pretendido que los estudiantes reconozcan la esencia del *método exahustivo*, reconociendo que el área de una región no poligonal (el lago y círculo) se pueden aproximar a partir de realizar recubrimientos de la región a partir de polígonos (cuadrados, rectángulos, etc.) con la posibilidad de variar una longitud de estos polígonos se tienen que las aproximaciones del área sean mucho más cercanas al área real de la región.

De la misma forma, se ha abordado la aproximación de áreas sin vincular la gráfica de una función que limite la región a estudiar y se pretende que los estudiantes encuentren la relación funcional entre las variables que se exponen, al registrar los datos en los aplicativos 3 y 5.

- **Módulo 3.** *Sumas de Riemann*

Para que el estudiante *generalice* el proceso de aproximación para encontrar el área de una región y que, desde la experiencia de interacción con los aplicativos en los módulos

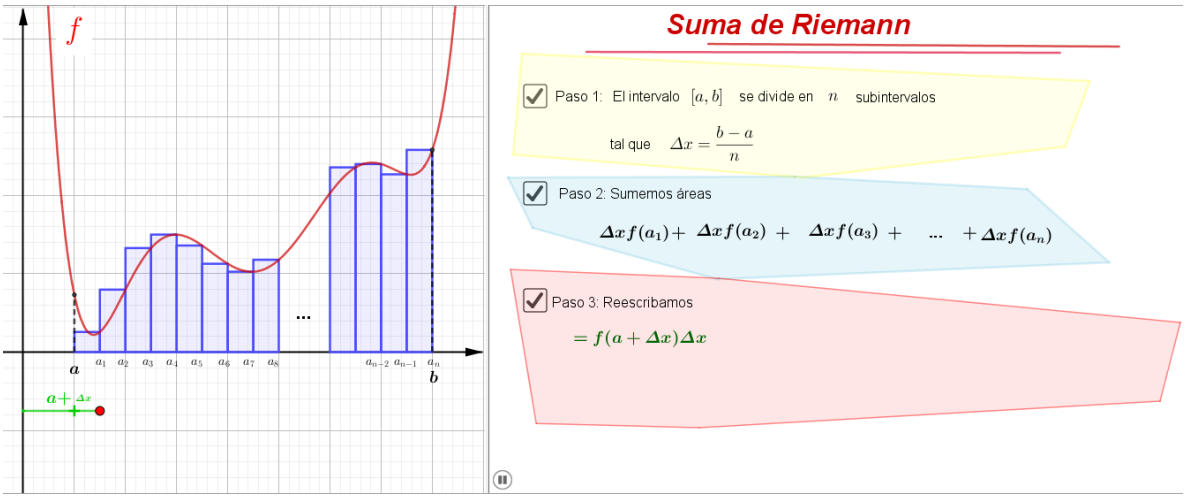
anteriores, los recursos en este módulo intentan ayudar a desarrollar el proceso por el cual se generan las Sumas de Riemann y se usan para encontrar el área de una región acotada por la gráfica de una función y el $eje\ x$, en un intervalo.

Con los dos aplicativos construidos en este módulo se intenta mostrar para una función particular, la relación de dependencia entre las variables:

- *Longitud de la base de los rectángulos.*
- Cantidad *de rectángulos*.
- La suma de las áreas de dichos rectángulos que genera una *aproximación al área de la región.*

Actividad 3. Generalización y ejemplo

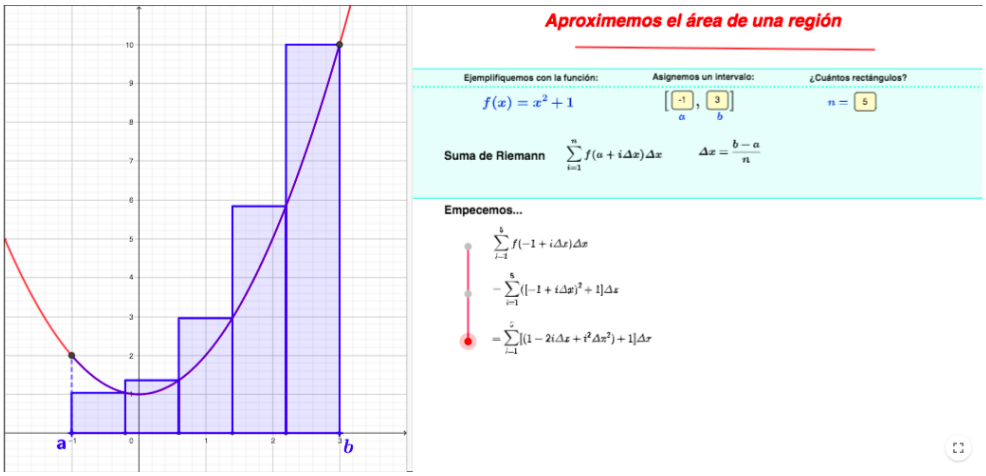
Figura 3-6: Aplicativo 6. Generalización Sumas de Riemann



El aplicativo presenta la gráfica de una función f en un intervalo $[a, b]$. El estudiante interactúa con el aplicativo seleccionado *casillas de control* que irán guiando en los pasos que llevan a la generalización de las sumas de Riemann. En el paso 1 se establecen las variables a tratar durante todo el proceso, a y b que definen al intervalo a considerar en la generalización, y con estos, la longitud de cada uno de los subintervalos de la partición, Δx. En este caso se eligen subintervalos de longitud uniforme para favorecer la comprensión del desarrollo de la generalización.

En el paso 2, el estudiante debe escoger entre varias opciones las expresiones correctas que definen el área de los tres primeros rectángulos y el último rectángulo en el intervalo. Por último, en el paso 3, el estudiante al hacer *clic* sobre algunos puntos que se visualizarán en la parte inferior de la gráfica para ayudar a reconocer la reescritura de cada uno de los términos encontrados en el paso 2 para concluir en la fórmula de la suma de Riemann a partir de su notación en una sumatoria.

Figura 3-7: Aplicativo 7. Ejemplo Sumas de Riemann



En el aplicativo final, se ha fijado una función y se hacen visibles su representación gráfica y algebraica. En casillas de entrada, se deja a elección del estudiante los valores que definen el intervalo y la cantidad de rectángulos a usar en el desarrollo de la expresión de las sumas de Riemann. El aplicativo da la posibilidad de visualizar cada uno de los pasos que dan como resultado la aproximación del área de una región acotada por la gráfica de una función, el $eje\ x$, en el intervalo $[a, b]$.

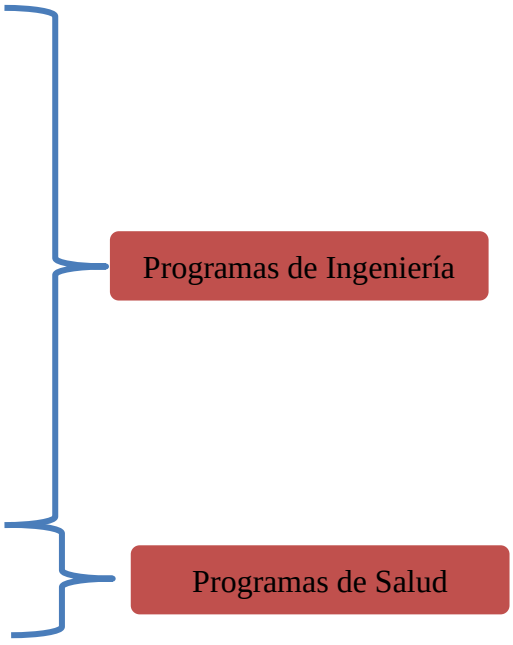
3.3 Contextualización de la población

La Universidad Manuela Beltrán es una institución de formación de profesionales en programas de ingeniería, salud y derecho, entre otros. Desde sus inicios, la institución ha crecido en la oferta de programas y en su defecto en las facultades o departamentos de la Universidad. Una de ellas, es la unidad de Ciencias Básicas, departamento a la cual se encuentran vinculados los docentes de las áreas de Matemáticas, Biología, Química y Física.

El departamento de Ciencias Básicas se constituye como una dependencia que aporta transversalmente a los distintos programas de la Universidad, es así como los docentes del departamento tienen participación en la mayoría de las carreras ofertadas por la universidad a nivel de pregrado[10]. Puntualmente el área de matemáticas aporta desde las distintas asignaturas a los programas de pregrado, como se ilustra a continuación,

Tabla 3-1: Asignaturas de matemáticas

Álgebra lineal
Matemáticas Básicas
Cálculo Diferencial
Cálculo Integral
Cálculo Vectorial
Ecuaciones Diferenciales
Probabilidad y Estadística
Métodos Numéricos
Matemáticas Discretas
Matemáticas Especiales
Lógica Matemática
Estadística



[10] Exceptuando el programa de derecho.

Se resalta que, la asignatura de Cálculo Integral hace parte de los programas de ingeniería y se ofrece a los estudiantes en tercer semestre para todos los programas en la Universidad Manuela Beltrán.

El programa para el curso de Cálculo Integral que se ofrece en la Universidad considera las siguientes temáticas:

Tabla 3-2: Programa temático de la asignatura de Cálculo Integral

Temática	Sesión
Antiderivadas (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Método de integración por sustitución simple. Integración de funciones exponenciales e integrales de funciones que generan un logaritmo natural. Método de integración por sustitución compuesta	**1**
Sumas de Riemann	**2**
Sumas de Riemann	**3**
Teorema Fundamental del cálculo. Integral definida. Métodos de Integración directa. Área acotadas por una curva y entre curvas	**4**
Método de integración por partes. Incluir casos cíclicos. Método de tabulación	**5**
Integrales de potencias pares e impares de funciones Trigonométricas.	**6**
Integrales de potencias pares e impares de funciones Trigonométricas.	**7**
Integración de funciones hiperbólicas. Método de Integración por sustitución trigonométrica.	**8**
Método de Integración por sustitución trigonométrica.	**9**
Método de Integración por fracciones parciales.	**10**
Método de Integración por fracciones parciales.	**11**
Formas indeterminadas y técnicas de solución. Regla de L'Hopital	**12**
Integrales impropias de primera especie y segunda especie.	**13**
Integrales impropias de primera especie y segunda especie.	**14**
Volúmenes de sólidos de revolución. Método de Discos - Método de arandelas o anillo	**15**
PRIMER PARCIAL	**16**
Volúmenes de sólidos de revolución. Método de Discos - Método de arandelas o anillo	**17**
Volumen de sólidos: casquetes cilíndricos o cortezas cilíndricas	**18**
Centro de masa. Teorema Pappus	**19**
Centro de masa. Teorema Pappus	**20**
Longitud de curva, área de superficie de revolución	**21**
Longitud de curva, área de superficie de revolución	**22**
Sucesiones -convergencias y sumas parciales	**23**
Sucesiones -convergencias y sumas parciales	**24**
Series - convergencia. Serie telescópica y armónica	**25**
Series geométrica. Con adición o eliminación de términos y re numeración.	**26**
Criterios de convergencia de una serie : Integral, razón y raíz	**27**
Criterios de convergencia de una serie : Integral, razón y raíz	**28**

Series alternantes, convergencia absoluta y condicional	**29**
Series de potencias	**30**
Series de Maclaurin y series de Taylor	**31**
Series de Maclaurin y series de Taylor	**32**
PARCIAL FINAL	**33**

Teniendo en cuenta el objeto matemático elegido para la construcción de los recursos, se destaca que desde el programa del curso se tienen dos sesiones para el desarrollo de la temática Sumas de Riemann.

3.3.1 Delimitación de la población

El autor de este documento se encuentra vinculado a la dependencia de Ciencias Básicas de la Universidad Manuela Beltrán como docente de planta. En este contexto e interesado por conocer las perspectivas que los docentes del área de matemáticas de la institución tienen respecto a la ventajas y desventajas de utilizar recursos enfocados al trabajo en lápiz y papel en contraste con el uso de una herramienta tecnológica, se considera que este grupo de docentes, bajo su experiencia y conocimiento, pueden dar apreciaciones respecto a las características de pensamiento variacional desde actividades de aproximación de áreas por recubrimientos.

En consecuencia, se ha recopilado información de los antecedentes de la asignatura de Cálculo Integral y los docentes que han orientado la asignatura desde el primer semestre del año 2016 hasta el primer semestre del año en curso. El histórico muestra que de los docentes que actualmente se encuentran vinculados a la Universidad han orientado la asignatura objeto de estudio de este trabajo en 31 oportunidades en los últimos 11 semestres. En resumen, a continuación se relacionan los 13 docentes de matemáticas denotados por D*"número"* con la cantidad de veces que cada uno de ellos han tenido a cargo la asignatura y en específico los períodos en que la han orientado.

Tabla 3-3: Docentes – Asignatura de Cálculo Integral

Docente	Cantidad de veces docente a cargo de la asignatura	2016_I	2016_II	2017_I	2017_II	2018_I	2018_II	2019_I	2019_II	2020_I	2020_II	2021_I
D1	0											
D2	0											
D3	4			X					X		X	X
D4	3	X				X		X				
D5	0											
D6	2			X							X	
D7	6	X	X	X	X	X	X					
D8	3	X				X		X				
D9	0											
D10	1						X					
D11	5		X		X		X	X		X		
D12	1									X		
Oscar Orlando García	6	X		X	X	X				X		X

	Docente vinculado a la institución
	Docente no vinculado a la institución

De los 13 docentes, se descarta para la aplicación del instrumento:

- D1 debido a que el docente solo tiene asignación para tutorías en las asignaturas del primer semestre y no tiene experiencia con los temas de Cálculo.
- El autor de este documento

En el siguiente apartado, hace referencia al instrumento de indagación que fue aplicado a los docentes para dar alcance a los objetivos propuestos.

3.4 Construcción del instrumento de Indagación

Desde las bases teóricas del pensamiento variacional y TIC en aula, descritas en el capítulo 2, se construye un instrumento que permite recolectar las distintas consideraciones que tienen los docentes de la Universidad Manuela Beltrán sobre los recursos elegidos (en lápiz y papel) y construidos (en GeoGebra) para identificar las posibilidades y limitaciones que conlleva la puesta en el aula los dos recursos.

Para el cumplimiento de este objetivo, se elabora un instrumento con tres ítems en donde se indaga sobre:

I. La frecuencia con que los docentes utilizan y proponen actividades en el aula con el uso de alguna herramienta tecnológica que sirva de mediadora para el proceso de enseñanza.

II. Cuál de los dos recursos posibilita un mejor desarrollo del pensamiento variacional, a partir de las características de este pensamiento definidas en los Lineamientos en Matemáticas (1998, p. 78) y en Castiblanco, Rodriguez, Acosta, y Urquina (2004, pp. 31-32) que fueron mencionados en el capítulo 2.2.1 en este documento. En consecuencia, se establecen diez indicadores que estén relacionados con las características de representar, generalizar, visualizar y describir, de la siguiente manera:

Indicadores para la característica de Representar

1. ¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo gráfico-geométrico para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?

2. ¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo algebraico para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?

3. ¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo tabular para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?

4. ¿Cuál de los dos recursos ofrece una mayor posibilidad de establecer relaciones entre las distintas representaciones (gráfico-geométrico, algebraico y tabular) para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?

Indicadores para la característica de Generalizar

5. ¿Cuál de los dos recursos permite una mayor posibilidad de detectar patrones en la situación de cambio que se da entre las magnitudes involucradas?

6. ¿Cuál de los dos recursos permite mayor posibilidad de predecir o conjeturar la variación que se da entre las magnitudes involucradas?

7. ¿Cuál de los dos recursos brinda una mayor posibilidad de crear modelos generales para la variación que se da entre las magnitudes involucradas?

Indicadores para la característica de Visualizar – Describir

8. ¿Cuál de los dos recursos permite una mejor visualización de los distintos registros para la identificación de las magnitudes que se relacionan?
9. ¿Cuál de los dos recursos permite identificar de mejor manera las magnitudes que se encuentran relacionadas en cada actividad?
10. ¿Cuál de los dos recursos permite identificar de mejor manera la relación de dependencia entre las magnitudes?

III. Las ventajas y desventajas que ofrece cada uno de los recursos que han sido expuestos en este instrumento, a la luz de las características del pensamiento variacional y desde las posibilidades que ofrece cada uno de los recursos.

A continuación, se relaciona el instrumento de indagación aplicado a los docentes.

3.4.1 Instrumento de Indagación

Instrumento de indagación

El presente instrumento hace parte del trabajo de grado "*GeoGebra como herramienta para el desarrollo del pensamiento variacional*" que pretende indagar sobre las percepciones que se tienen sobre actividades que han sido propuestas para su resolución con lápiz y papel en comparación a aquellas que utilizan o se pueden adaptar para usar un recurso tecnológico como herramienta para su solución o comprensión.

Con este fin, se presentan dos grupos de actividades con temáticas que se estudian en la asignatura de Cálculo Integral enmarcadas en situaciones de variación y cambio. Es por esto, que el análisis se realiza con base en las características que están involucradas en el pensamiento variacional como son los procesos de describir, visualizar y generalizar; y el estudio entre las representaciones que involucran la situación presentada.

Antes del inicio de la revisión de las actividades propuestas, se hace claridad en que no se pretende que las actividades por sí solas generen desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes, sino que también lo son las actuaciones y acciones que tome usted como docente para que con estas herramientas se diera el aprendizaje de las temáticas y un progreso en el pensamiento que se enmarca en este trabajo.

Secuencia de revisión de las actividades:

1. **Recurso 1. Actividades en lápiz y papel**.

Revise y resuelva las actividades

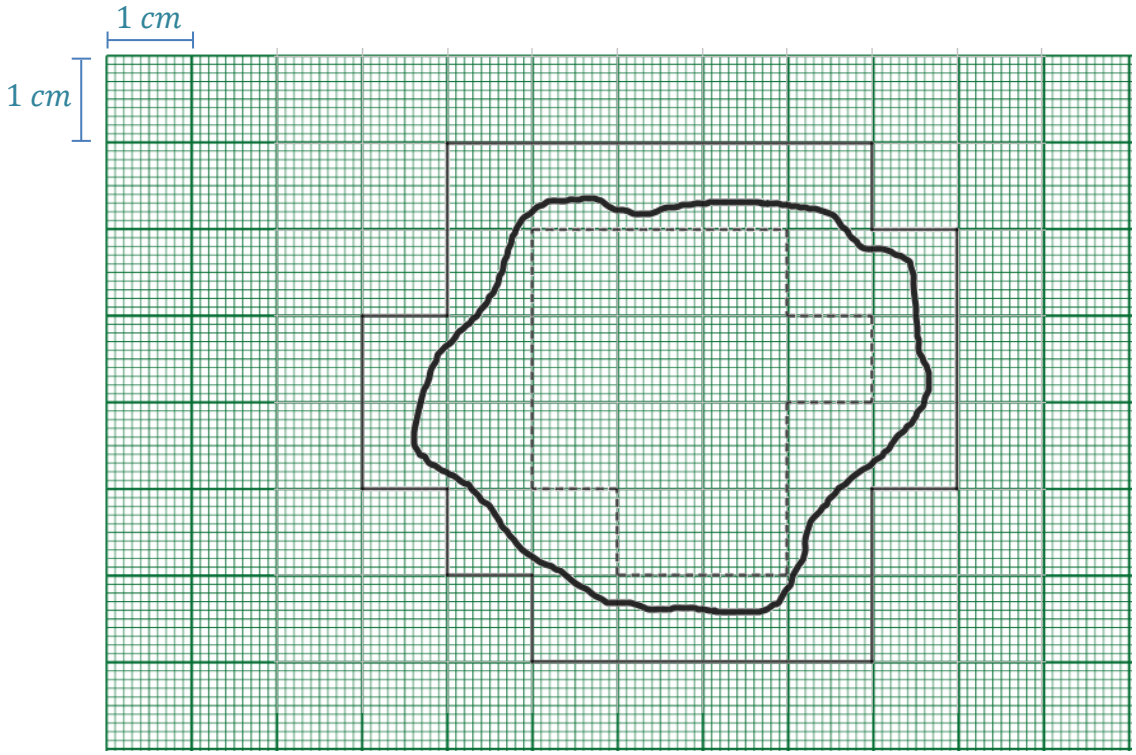
- Actividad 1
- Actividad 2

Recurso 1[11]. Actividades en lápiz y papel

Actividad 1.

Área del lago

A partir de la gráfica que se muestra, dé aproximaciones del área limitada por la curva. Realice la actividad por defecto y por exceso con las unidades de medida que se solicita.



[11] Las actividades de este recurso fueron tomadas y adaptadas de: Gomez, F. (2004). Trabajo de grado: "**Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once".** Licenciatura en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Ver en el Anexo B la originalmente planteada.

- Cuadrados de 1 cm^2
- Cuadrados de $\frac{1}{2}$ cm^2
- Cuadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2

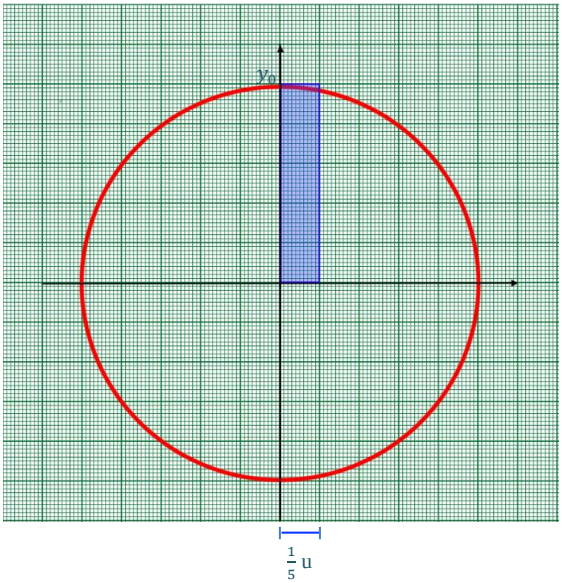
Actividad 2

Resuelva cada una de las siguientes preguntas, utilizando la gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 1$ que se muestra en el papel milimetrado adjunto a esta guía.

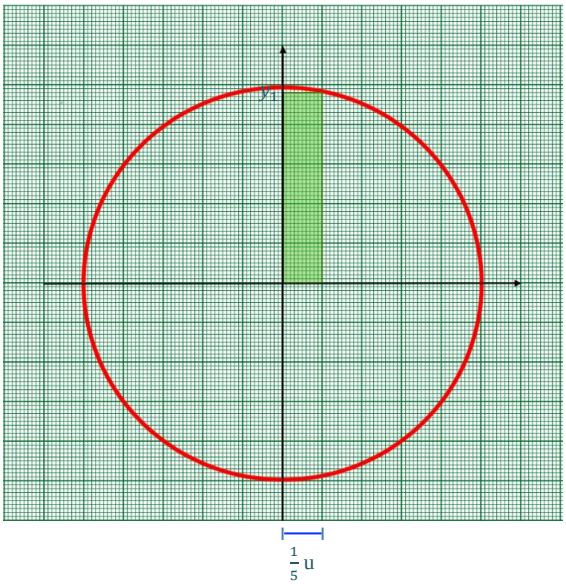
A. Halle el área de la región encerrada por la curva con la expresión que define el área de un círculo. $A = \pi r^2$

B. Halle el área de la región encerrada por la curva por aproximaciones, siguiendo los pasos:

- Dibuje los rectángulos exteriores (circunscritos) de igual anchura en el intervalo $[0,1]$ solo para la región limitada en el $I\ cuadrante$. Como el radio del círculo es una unidad de longitud, la anchura de cada rectángulo es $\frac{1}{5}$ y tome las alturas como $y_0, y_1, \dots, y_4$ respectivamente. Así, para el primer rectángulo:



- Realice el mismo proceso que en el ejercicio anterior pero con los rectángulos interiores (inscritos). Los valores de $y_1, y_2, \ldots, y_4$ se pueden calcular con la ayuda del Teorema de Pitágoras.



- Dé aproximaciones para el área del círculo sumando las áreas de los rectángulos circunscritos y para la suma de las áreas de los rectángulos inscritos.
- Dé aproximaciones para el área del círculo, pero ahora dibuje 10 rectángulos dentro de la región utilizando figuras inscritas y circunscritas.
- Considere el proceso anterior, para $15, 20, 100$ rectángulos y aproxime el área del círculo.
- A medida que se aumenta la cantidad de rectángulos, ¿qué puede identificar entre las aproximaciones del área del círculo?
- Compare los resultados obtenidos del ítem A y del análisis realizado en B.

C. Trate de encontrar el término general para el área de n rectángulos inscritos y otro para el área de n rectángulos circunscritos que aproxime el área del círculo.

2. **Recurso 2. Actividades en GeoGebra**.

Revise y resuelva las actividades que se encuentran cargadas en línea como *Libro de GeoGebra* **"Integral definida como aproximaciones numéricas"** ubicado en GeoGebra.org

- Área del lago.
- Área del círculo.
- Suma de Riemann

3. De respuesta a las preguntas planteadas en este instrumento.

Formato para recolección de información

Nombre_____

Experiencia como docente_____

Experiencia en la Universidad Manuela Beltrán_____

1. Para cada uno de los siguientes indicadores, establezca los porcentajes de acuerdo con su propuesta de enseñanza habitual.

Indicador	**Tablero - presentaciones**	**Herramienta tecnológica (software)**	
Para presentar a sus estudiantes algún tema o proceso en matemáticas, ¿con qué porcentaje utiliza estas herramientas?	%	%	100%
	Comentarios _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____		

Escriba el porcentaje correspondiente a las herramientas que utilizan sus estudiantes para llevar a cabo las actividades que propone en el aula.	**En lápiz y papel**	**Usando tecnología**	
	%	%	100%
	Comentarios _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____		

2. Desde su percepción, marque con una X la opción que corresponda para cada caso.

Indicador	**Actividades en lápiz y papel**	**Actividades en GeoGebra**	**Por igual**
¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo gráfico-geométrico para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo algebraico para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?			

¿Cuál de los dos recursos permite o incentiva el uso de registros de tipo tabular para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos ofrece una mayor posibilidad de establecer relaciones entre las distintas representaciones (gráfico-geométrico, algebraico y tabular) para una mejor comprensión de la noción de variación que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos permite una mayor posibilidad de detectar patrones en la situación de cambio que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos permite mayor posibilidad de predecir o conjeturar la variación que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos brinda una mayor posibilidad de crear modelos generales para la variación que se da entre las magnitudes involucradas?			
¿Cuál de los dos recursos permite una mejor visualización de los distintos registros para la identificación de las magnitudes que se relacionan?			
¿Cuál de los dos recursos permite identificar de mejor manera las magnitudes que se encuentran relacionadas en cada actividad?			
¿Cuál de los dos recursos permite identificar de mejor manera la relación de dependencia entre las magnitudes?			

3. En consideración a los recursos utilizados en el instrumento y bajo las características que involucra el pensamiento variacional (visualizar, describir, generalizar y representar), complete la siguiente tabla con las ventajas y desventajas de las actividades propuestas.

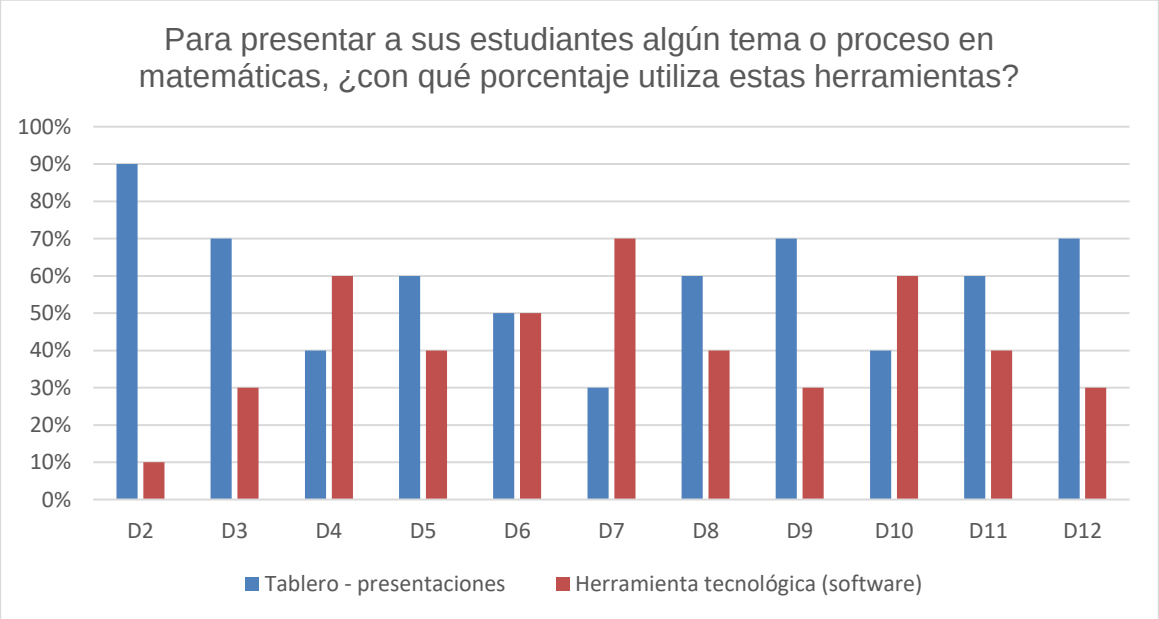
	Actividades en lápiz y papel	**Actividades en GeoGebra**
Ventajas		
Desventajas		

4. Análisis de la información

A partir de las respuestas dadas por los docentes en el instrumento, bajo los tres ítems en los que se divide el formato, se realiza un análisis de cada uno de estos agregando reflexiones sobre los resultados obtenidos.

El primer ítem indaga sobre la frecuencia con que se utiliza y se les proponen a los estudiantes actividades con uso de alguna herramienta tecnológica en comparación a las propuestas sin ningún tipo de software. Los resultados obtenidos se exponen en la figura 4-1.

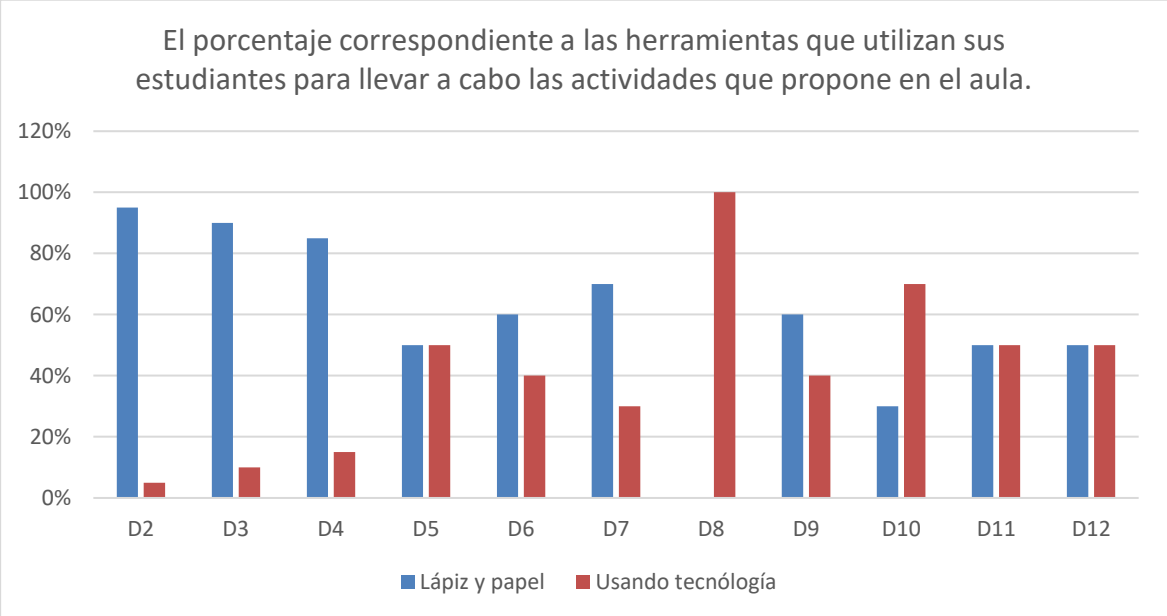
Figura 4-1: Resultados de uso de recursos para la enseñanza



Esta figura, muestra los resultados de los recursos que privilegian los docentes para presentar los temas a los estudiantes, se evidencia que siete de ellos (63.6%) usan con

mayor frecuencia el tablero y presentaciones. Entre los comentarios expuestos por estos profesores, argumentan que los recursos tecnológicos los usan para mostrar diversidad de ejemplos y conceptos matemáticos complejos (D5 y D2), además que estos recursos son dependientes de la asignatura a dictar (D8 y D12). Los D3 y D2, son los únicos en exponer limitaciones frente al uso de tecnología al considerar dificultades en acceso a herramientas tecnológicas y desconocimiento en el manejo de estas por parte de estudiantes y profesores. Cuatro docentes (36.4%), consideran que usan en mayor o igual medida herramientas tecnológicas y destacan que estas promueven comprensiones en los conceptos a través de la visualización y la versatilidad para exponer los temas (D4, D10 y D11); solo el D7, justifica el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza por la situación de la pandemia y como consecuencia ha profundizado su práctica en ambientes virtuales en los que los recursos tecnológicos son necesarios.

Figura 4-2: Resultados de recursos usados por los estudiantes



Se resaltan los docentes D2, D3, D4 y D7 que tienen una marcada diferencia al proponer actividades que prioricen el uso del registro escrito. Es importante aclarar que estos docentes sólo tienen asignación de materias para los programas de ingeniería, en particular, tienen a cargo asignaturas como Cálculo Integral. En esta misma línea, las

asignaturas de las que son los docentes titulares son de tipo teóricas y en sus mallas curriculares tienen amplio componente matemático.

Exceptuando al D8, D10 y los mencionados en el párrafo anterior, los demás docentes tienen una tendencia equitativa en sus propuestas de actividades. Es importante mencionar que estos docentes tienen asignación combinada entre asignaturas teóricas y asignaturas teórico-prácticas, esta última modalidad de asignaturas disponen de un espacio de laboratorio en donde se trabaja con software específicos en las sesiones de clase. En concreto, todos los docentes aquí relacionados, tienen asignación de Estadística, la cual tiene como elemento integrador entre los elementos teóricos y prácticos la herramienta informática Excel.

Sobre el docente D8, en el momento de la aplicación del instrumento de indagación se le consultó sobre el porcentaje de 100% como herramienta que usan sus estudiantes en clase y mencionaba que, dado que las sesiones de clase se estaban realizado de forma remota, había generado solo propuestas que llevarán al estudioso a utilizar algún software como herramienta para solucionar los distintos talleres y cuestionarios. El docente menciona que para Estadística los estudiantes realizan los trabajos en Excel y para otras asignaturas ha logrado conseguir applets, calculadoras u otros recursos como moodle en los cuales verifica la compresión de los temas abordados.

Los comentarios de los docentes en relación al tipo de recursos con los cuales los estudiantes trabajan en las propuestas de clase, muestran que seis de ellos (54.5%) favorecen el trabajo en actividades de lápiz y papel porque hay limitaciones en el acceso de recursos tecnológicos (D4 y D7) y limitaciones en las habilidades de los estudiantes al no conocer el manejo de las herramientas, dado que en la clase de matemáticas hay una cultura de trabajo práctico en lápiz y papel (D3 y D6) y los recursos tecnológicos ayudan a verificar resultados realizados analiticamente (D2). Los docentes que promueven el uso de tecnología en mayor o igual medida comparado con actividades de lápiz y papel, en el trabajo de los estudiantes son cinco (45.5%) y exponen que el uso de de tecnologia en clases tiene beneficios porque estos recursos permiten que los estudiantes realicen el trabajo de forma más eficiente, por ejemplo al analizar datos y obtener cálculos exactos (D11), esto también implica que los tiempos en el desarrollo de ejercicios se optimicen (D8

y D10) y ha generado que sean los mismos estudiantes quienes busquen recursos iguales o diferentes a los expuestos por el docente para comprobar y visualizar sus procesos, lo que ayuda a que ellos detecten posibles errores (D5 y D12).

Para el segundo ítem en el instrumento, se compila y organiza las marcaciones elegidas por los docentes para cada uno de los indicadores. Se utilizan las convenciones L, G y I para referirse a Actividades en lápiz y papel, Actividades en GeoGebra y Por Igual, respectivamente. Para precisar la elección de cada docente se resume la información en la tabla que sigue:

Tabla 4-1: Relación indicador - docente

Número del Indicador	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12
1	G	G	I	G	I	G	I	G	G	I	G
2	L	G	I	I	G	G	I	I	I	G	I
3	I	G	G	G	G	G	G	G	G	I	G
4	G	G	G	I	G	G	G	G	G	G	I
5	G	I	I	G	G	G	G	I	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G	I	G	G	G	I
7	I	I	L	I	G	G	G	G	G	I	G
8	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
9	I	G	I	G	G	G	I	I	I	I	I
10	I	G	I	G	G	G	G	I	G	I	I

De la tabla 4-2 se realiza una valoración porcentual para cada indicador:

Tabla 4-2: Porcentaje de elección para los indicadores

		PORCENTAJE DE ELECCIÓN		
Características del pensamiento variacional	**Número de la Pregunta**	**Lápiz y papel**	**GeoGebra**	**Por igual**
Representar	1	0,0%	63,6%	36,4%
	2	9,1%	36,4%	54,5%
	3	0,0%	81,8%	18,2%
	4	0,0%	81,8%	18,2%
	Promedio	2,3%	65,9%	31,85%
Generalizar	5	0,0%	72,7%	27,3%
	6	0,0%	81,8%	18,2%
	7	9,1%	54,5%	36,4%
	Promedio	3,0%	69,7%	37,3%
Visualizar - Describir	8	0,0%	100,0%	0,0%
	9	0,0%	36,4%	63,6%
	10	0,0%	54,5%	45,5%
	Promedio	0.0%	63,6%	36,7%

Teniendo en cuenta que los indicadores están agrupados por características del pensamiento variacional (como se mencionó en el apartado 3.4), se realizan algunas reflexiones al respecto de las valoraciones dadas por los docentes.

De los cuatro primeros indicadores, relacionados con la característica de **representar**, desde las apreciaciones de los docentes y con una importante diferencia en los porcentajes, las actividades con mediación tecnológica permiten o incentivan el uso de registros de tipo gráfico-geométrico (63.3%) y tabular (81.8%) para una mejor distinción de la variación que se da entre las magnitudes involucradas en los recursos en comparación con las de lápiz y papel. Así mismo, este recurso posibilita una mejor manera de relacionar los distintos registros (81.8%).

Sin embargo, para el indicador que hace referencia a la representación de tipo algebraica, el 54.5% de las respuestas considera que desde cualquiera de los dos recursos se fomenta el uso de registros algebraicos.

El valor porcentual obtenido en cada uno de los indicadores 5, 6 y 7 es mayor para el recurso de GeoGebra que cualquiera de las otras dos opciones, esto apunta a que el proceso de **generalizar** se logra de una manera más eficaz con el recurso presentado en el software. Desde las consideraciones de los docentes, este hecho enmarca a la herramienta tecnológica como un medio facilitador para el desarrollo de los procesos de identificación, conjeturación y formulación de patrones por encima de las posibilidades que ofrece la actividad en un formato sin mediación tecnológica.

Los resultados obtenidos en el indicador 8 sobresalen entre los demás ya que todos los docentes responden a esta pregunta valorando al recurso tecnológico como el idóneo para facilitar la **visualización** de distintos registros en los que se logre identificar las magnitudes en cada una de las actividades.

En los dos últimos indicadores, la relación de dependencia entre las magnitudes es un criterio diferenciador para elegir el recurso en donde se logra una mejor identificación y **descripción** de las magnitudes. Por los resultados obtenidos si solo se necesita considerar las magnitudes que están involucradas en la actividad, resulta indiferente el tipo de recurso que se utilice, pero para la identificación de la covariación entre las magnitudes es mejor contar con el recurso tecnológico.

De otro lado, al analizar el ítem tres del instrumento de indagación, que tenía el propósito de precisar las ventajas y desventajas de los recursos utilizados y las características del pensamiento variacional, se encuentra que sólo cinco docentes mencionan de manera explícita las características del pensamiento en comparación con los recursos (D5, D6, D7, D10 y D11). Los otros seis docentes centran las ventajas y desventajas solo al comparar los recursos (lápiz-papel y GeoGebra).

En la tabla 4-3, se realiza una sistematización para clasificar las afirmaciones escritas por los docentes diferenciando ventajas y desventajas en relación al desarrollo de las características del pensamiento variacional y en relación a los dos recursos.

Tabla 4-3: Ventajas y desventajas según los docentes

	Comparar características del pensamiento variacional	**Comparar los recursos en lápiz-papel y aplicativos de GeoGebra.**
Ventajas	• *Aplicativos de GeoGebra*. Los D6 y D7, explican en detalle como la característica de visualizar se desarrolla en los aplicativos, relacionando esta característica con la posibilidad de generalizar o encontrar regularidades al afinar la partición o aumentar la cantidad de figuras para encontrar la estimación del área. En específico el D6, afirma que organizar y representar la información en tablas es importante para relacionar las dimensiones de las figuras y la tendencia de las áreas. El D11, centra las ventajas en que en los aplicativos es claro una relación de dependencia entre dimensiones y áreas [las variables] y, que esto, es la base para deducir las sumas de Riemann (lo mismo considera el D8), además que esa dependencia representada en gráficas y tablas favorece el surgimiento de conjeturas y regularidades. Los D5 y D10, solo mencionan que hay una mejor visualización y dinamismo, sin aclarar cómo es esto posible.	• *Aplicativos de GeoGebra.* Optimizan el tiempo de solución de la actividad (D4 y D10), observando diferentes cambios sin tener que realizar procesos repetitivos, largos y tediosos, mostrando cálculos exactos (D3). Los D2 y D5, escriben de forma explícita que los aplicativos permiten modificar con facilidad los tamaños de las figuras y por tanto se pueden tener gran cantidad de valores [no exponen la utilidad de esto]. Dos docentes (D3 y D10) coinciden en afirmar que la actividad desarrollada en los aplicativos puede generar motivación por la facilidad de generar cambios y ver cálculos exactos (tener conteos automáticos, D2).

	• *Lápiz y papel* El D6, escribe ventajas al considerar las posibilidades que presenta la actividad para que el estudiante visualice y represente las áreas usando estrategias propias que el profesor puede orientar (D10); el D8 también está de acuerdo con lo expuesto por el D6, y agrega que las conclusiones se dan a partir de los aciertos y desaciertos al resolver la actividad. Por su parte los D5, D9 y D12, exponen que en lápiz y papel se puede promover un lenguaje y uso de procesos algebraicos tradicionales (representación algebraica), importantes en la deducción.	• *Lápiz y papel* Los D2, D9 y D12, están de acuerdo en que las actividades de lápiz y papel son de fácil acceso y fáciles de manejar por parte de los estudiantes porque son las actividades que tradicionalmente se usan en clase. Los D2 y D10, coinciden en afirmar que se pueden variar las funciones y las curvas. Los D9 y D4 consideran que es importante desarrollar la actividad primero en lápiz y papel porque la escritura, la notación e interpretación son importantes para que los estudiantes adquieran el conocimiento.
Desventajas	• *Aplicativos de GeoGebra.* Respecto de las características del pensamiento variacional, ninguno de los docentes expone alguna desventaja.	• *Aplicativos de GeoGebra.* Los estudiantes pueden tener problemas de acceso al aplicativo por falta de internet o computador (en ciertos contextos sociales) y si no tiene una interacción directa con la herramienta se pierden las posibilidades de explorar (D7, D9, D5, D10, D12). El D8 incluye que además del acceso, es necesario que los docentes se capaciten en el uso de aplicativos y que además los

		estudiantes no se esfuerzan tanto (D9), porque se limita a seguir las indicaciones de los aplicativos (se limita la creatividad, D4). Otros profesores consideraron que la herramienta limita las funciones o curvas a estudiar (D2 y D10).
	• *Lápiz y papel* Dificultad al considerar grandes valores para n (dibujar muchos rectángulos) y a partir de esto pedir deducciones/generalizaciones porque puede ser complicado estimar con precisión las áreas (D5, D11). La propuesta no implica que el estudiante como estrategia de solución organice la información en tablas, y a partir de estas identificar relaciones de dependencia que le ayuden a plantear regularidades (D6).	• *Lápiz y papel* Se necesita de mayor tiempo en la elaboración de gráficas (D10, D4) y al tener que hacer cálculos largos en los cuales no se garantizan valores exactos (D3, D7, D12) y construir numerosas particiones cuyo conteo también es complicado, puede generar desmotivación (D10).

Con el objetivo de precisar la información dada por algunos docentes que establecieron ventajas y desventajas de las características del pensamiento variacional al usar recursos en lápiz y papel y el software GeoGebra, se realizó una entrevista informal al D5 y D10 para aclarar cómo estaban considerado ciertos términos. Las respuestas se registraron en un block de notas, que desde el principio ha sido el diario de campo del autor de este documento.

A ambos docentes se les pidió aclarar porqué la actividad en GeoGebra favorece el dinamismo; el D5, dijo que la interacción es dinámica porque hay facilidad para arrastrar/manipular cuadrados y cambiar la cantidad de rectángulos, por ejemplo en el aplicativo del área del lago se pueden mover los cuadrados o construir cuadrados fácilmente y así completar la tarea de estimar el área. Por el contrario, el D10, explicó que dinamismo se refiere a la posibilidad para ver los cambios en las estimaciones del área al modificar las dimensiones de los cuadrados y de los rectángulos. Las ideas del D10, se corresponden con las ventajas que autores como Carlos Vasco (2002) y Villa & Ruiz (2010), han expuesto sobre el dinamismo en el pensamiento variacional al desarrollarse bajo un enfoque de modelación mediado por TIC, en donde es posible establecer relaciones de covariación entre variables al realizar conexiones entre diferentes registros de representaciones y bajo actividades que permitan identificar las variaciones y sus relaciones, en otras palabras, el dinamismo entre representaciones posibilita la visualización de la relación de dependencia entre variables.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

El primer objetivo específico de este trabajo estuvo enfocado en adaptar actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes. Este objetivo se alcanzó con la búsqueda de propuestas de trabajos de grado que reposan en los repositorios de la Biblioteca principal y virtual de la Universidad Pedagógica Nacional y la adaptación de las actividades en formato digital que sirvieron como insumo para el cumplimiento de los otros objetivos planteados en este documento. Se resaltan tres escenarios en la construcción de los recursos:

El primero, en relación con la búsqueda y elección de la actividad en lápiz se resalta la multiplicidad de propuestas encontradas que involucran o están relacionadas con el pensamiento variacional en los trabajos de grado que fueron revisados. Diferentes temáticas y enfoques dispuestos para distintos niveles de escolaridad, con uso de herramientas tangibles o virtuales para alcanzar objetivos de enseñanza. En particular, las actividades planteadas por Gómez (2004) resultaron idóneas para el desarrollo de esta propuesta partiendo de la pregunta ¿cómo encontrar una aproximación del área definida por una región irregular? la cual involucra situaciones de cambio que implica una relación de dependencia entre distintas magnitudes, premisas que sugiere el MEN en los lineamientos curriculares y autores como Vasco (2002), Villa & Ruiz (2010) para actividades relacionadas con el pensamiento variacional.

En este mismo escenario, se resalta la importante cantidad de escritos que se encontraron en el repositorio virtual enfocados o relacionados a procesos del pensamiento variacional. Sin embargo, para el cumplimiento de los objetivos de este documento, se tuvo la dificultad de que muchos de los trabajos encontrados ya contaban

con propuestas que utilizaban herramientas tecnológicas para la aplicación de actividades. Es de aclarar, que el repositorio virtual solo cuenta con documentos publicados en los últimos años y son numerosos los documentos que se localizan en el repositorio físico que desafortunadamente no son de fácil accesibilidad por la comunidad educativa interesada.

El segundo, era indispensable que los recursos (lápiz y papel – tecnológico) que se le presentaban a los docentes mantuvieran la misma fundamentación, intencionalidad y concepción de las actividades construidas en papel, para que el proceso comparativo que hicieran los docentes no se viera afectado por variables que se salieran del marco del pensamiento variacional, de la herramienta utilizada y del contenido matemático en el que se plantea la propuesta original. Este proceso no fue sencillo de llevar a cabo debido a que el proceso de enseñanza siempre lleva adherida un nivel de subjetividad de la persona que construye las actividades. Es por esto, que las actividades presentadas en los dos recursos sufrieron algunas modificaciones de la originalmente planteada por Gómez en su trabajo, considerando algunas posibles mejoras que se podrían dar a las actividades.

El último, se enfoca en la dificultad generada por la pandemia que obstaculizó una búsqueda más amplia de documentos que hubiera contribuido a tener un consolidado más completo de los trabajos de grado enmarcados en el pensamiento variacional que se encuentran en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional.

Sobre el segundo y tercer objetivos específicos propuestos, orientado a la identificación de ventajas y desventajas de los recursos utilizados para el desarrollo del pensamiento variacional, a partir del instrumento de indagación y con las consideraciones de los 11 docentes a los que les fue aplicado este formato, se encuentran como conclusiones:

Ninguno de los once docentes encontró una desventaja para el desarrollo del pensamiento variacional en las actividades propuestas en el recurso GeoGebra; entre las desventajas de las actividades en lápiz y papel manifestaron que por la mínima cantidad de ejemplos que los estudiantes deben realizar es posible que no generalicen cómo estimar el área más aproximada para las regiones presentadas. Respecto de las

ventajas de estos recursos para desarrollar las características del pensamiento variacional, los docentes identificaron que las propuestas adaptadas en GeoGebra son más efectivas en relación a la visualización de las variables que covarían al dinamizar el arrastre y recubrimiento de las regiones, así como de las posibilidades de organizar la información en tablas para relacionar diferentes registros que conlleven a conjeturar la relación de dependencia entre las variables involucradas. Es posible inferir que los aplicativos al no tener un énfasis en la parte algorítmica para introducir el proceso de la suma de Riemann (porque se muestran los resultados), favorecieron el desarrollo de características propias a desarrollar en el pensamiento variacional, al hacer hincapié en el análisis de las variaciones simultáneas entre las dimensiones de polígonos que recubren las regiones y la aproximación para el área de la región.

Como se mencionó antes, no todos los docentes enfocaron sus respuestas a las características del pensamiento variacional (aunque la pregunta del ítem 3 hacía mención del enfoque de la pregunta), este hecho destaca que los docentes se enfocaron más en comparar los recursos, sus propiedades, el contenido matemático y/o la estructura de estos, desviando el análisis sobre las características. En este sentido, algunos docentes manifiestan que una desventaja de los recursos construidos desde GeoGebra es que se necesita una capacitación para el uso, manipulación y creación de aplicativos.

Respecto del objetivo general (explorar las posibilidades de desarrollar el pensamiento variacional adaptando actividades al uso de tecnología) el ítem 2 del instrumento de indagación presentaba diferentes indicadores para las características de *representar, generalizar y visualizar-describir* la relación entre dos variables cuantitativas y con base en las respuestas de los once docentes, se puede concluir:

Las actividades adaptadas en GeoGebra son un recurso diferenciador que promueve las características involucradas en el pensamiento variacional. En la tabla 4-2, para todos los indicadores relacionados con estas características, la propuesta desde los aplicativos tienen el mayor porcentaje, además los porcentajes son evidentemente más altos que los de las actividades desde el recurso de lápiz y papel; solo el indicador sobre

los registros de tipo algebraico tiene mayor porcentaje en la modalidad de que ambos recursos incentivan en igual medida este tipo de registro.

Al analizar los datos de los indicadores de cada característica que están en la tabla 4-2, se evidencia que para los docentes de la Universidad Manuela Beltrán, la característica de generalizar que está relacionada con la identificación de patrones, conjeturación y elaboración de modelos generales sobre las variables que covarían, es la que más se incentiva desde los aplicativos en GeoGebra (con un promedio del 69,7%).

La segunda característica con mayor promedio porcentual entre sus indicadores, es la de representar (promedio del 65,9%), que se vincula con los procesos de usar y establecer conexiones entre diferentes registros (gráficos, tabulares y algebraicos) para comprender la relación de covariación entre las variables involucradas.

Finalmente, el promedio de los indicadores relacionados con la característica de visualizar-describir las variables involucradas y cómo es la relación de dependencia entre estas, es de 63,6%. Aunque los porcentajes entre las características mencionadas no son significativamente diferentes, es curioso evidenciar que los indicadores asociados a la visualización tengan menor promedio porcentual que los vinculados a las otras dos características, dado que entre las ventajas mencionadas por los docentes varios destacaron la visualización como la característica que permite encontrar la relación entre las variables de cada situación y vincular distintos registros que muestran la covariación entre esas variables, como si esta característica fuera necesaria para alcanzar las otras. Una posible razón para privilegiar los criterios asociados a la característica de generalizar, es que en la adaptación de las actividades de lápiz y papel, se adicionaron dos aplicativos (módulo 3) que muestran cómo los estudiantes pueden generalizar la aproximación del área de una región irregular usando recubrimiento con polígonos en donde se hacía variar la longitud de sus bases y esto no se explora en las actividades en lápiz y papel.

Estas conclusiones son coherentes con lo expuesto por autores como Araya (2007) y Villa & Ruiz (2010), que en sus investigaciones también han encontrado al igual que en este

trabajo, que las posibilidades que brindan los entornos tecnológicos permiten una mejor visualización de la relación que se da entre magnitudes, mucho más considerando la multiplicidad de registros que se tendrían para representar la información y, en este sentido, el vínculo que se pudiera establecer entre las distintas representaciones es clave para el desarrollo del pensamiento variacional ya que facilitan la formulación de conjeturas y deducciones generales.

5.2 Recomendaciones

Extensiones de este trabajo podían investigar y ejemplificar cómo se manifiestan las características del pensamiento variacional en estudiantes que analicen situaciones de modelación que involucran la variación simultanea entre dos variables; analizando si hay cambios significativos entre utilizar el recurso de lápiz y papel o medios tecnológicos. Para llevar este estudio, los profesores pueden verse en la necesidad de modificar las actividades y las guías de trabajo que recogerán la información por parte de los estudiantes, incluyendo preguntas para que los estudiantes reconozcan las variables asociadas a cada módulo y preguntas que indaguen sobre cómo los estudiantes visualizan y/o conjeturan la covariación (comportamiento - tendencia) entre esas variables. Así mismo se puede hacer énfasis en los registros o vínculos entre registros que posibilitan la visualización y descripciones sobre la covariación.

También puede resultar interesante indagar sobre las actuaciones del profesor al implementar las actividades de forma tradicional y usando la tecnología (sus aciertos, tensiones, decisiones, interacciones con los estudiantes) y que desde esa implementación compare las ventajas y desventajas de los recursos para el desarrollo del pensamiento variacional relacionados con los objetivos de las asignaturas de cálculo que generalmente se evalúan en situaciones que promueven procesos algebraicos.

Anexo: Revisión de documentación

Se presentan los títulos de los trabajos de grados revisados en el repositorio virtual y de la Biblioteca principal de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

Nombre del trabajo de grado	**Consideraciones**
Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra *Tamayo Cárdenas, Julieth Marcela, 2016*	Conjunto de actividades para iniciar en el proceso de generalización. (búsqueda de patrones)
Actividad para desarrollar el pensamiento variacional en primaria *Acosta Hernández, Diego Humberto; Jiménez Moreno, Irene Johanna; Villar Ospina, Blanca Liliana , 2015*	Actividades con uso de tecnología
Introducción a la noción de variación en estudiantes de grado sexto *Gómez Niño, Julián Ricardo; Torres Díaz, Diego Alejandro, 2011*	Actividades con material concreto y uso de tecnología
Razonamiento en la solución de situaciones de tipo variacional *Palencia Arciniegas, Rolando Miguel; Gaviria Fuentes, Yenny Rocío , 2015*	Actividades con material concreto y uso de tecnología
Adaptación tecnológica de algunas actividades tomadas de dos libros de texto para desarrollar el pensamiento variacional *Díaz Amezquita, Dora Inés; Manrique Pérez, Viviana; Huertas Guerrero, Yohany, 2015*	Actividades que usan tecnología. Actividades en torno al concepto de la derivada

Estudio de las variaciones y covariaciones proporcionales de las funciones polinómicas hasta cuarto grado, como estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada a partir de razones de cambio correlacionadas *Barreto Pulido, Héctor Eduard; Caro Quintero, Juan Pablo , 2012*	Actividades con uso de tecnología
Una aproximación a la derivada desde la variación y el cambio *Gómez Morales, John Jairo; Martínez Gómez, César Augusto, 2015*	Actividad factible
Relación entre la solución de problemas de optimización y la variación en la pendiente de la recta tangente a una función a partir de la visualización en geometría dinámica *Rojas Tovar, Alejandro Humberto; García Cortés, German Arturo, 2012*	Actividades con uso de tecnología
Introducción a la noción de derivada como pendiente de la recta tangente desde la variación y el cambio: descripción de procesos de conjeturación, argumentación y explicación. *Romero Santiago, Ángel Leandro; Ramírez Varga, Oscar Javier , 2015*	Actividad factible
Propuesta de actividades para abordar algunas características de la derivada direccional en un curso de cálculo vectorial a través del uso de la estación total como mediador *Romero Castro, Luis Carlos; Rodríguez Mayorga, Héctor Fabián, 2013*	Actividad generada en campo abierto con instrumento tangible.
La Enseñanza De La Derivada En Educación Media “Una Experiencia Para Pensar En El Aula” *Jara Avalos, Olga Francisca, 2018)*	Algunas actividades con uso de tecnología. Actividades no fueron puestas en escena para valorar sus implicaciones.

Un estudio descriptivo sobre las estrategias de solución que emplean algunos estudiantes de grado décimo, usando geogebra: caso área bajo la curva *Ángel Ruiz, Magda Pilar; Feo Mayor, Iris, 2012*	Actividades con uso de tecnología
Una actividad relacionada con representaciones de la función cuadrática como medio para evidenciar algunas habilidades de visualización y procesos de generalización *Contreras Vargas, Nicol Jenniffer; Martínez Torres, Julián David, 2016*	Actividades con uso de tecnología
De la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea *Bautista Albornoz, Sandra Yamile, 2013*	Actividades con uso de tecnología
Una perspectiva de las funciones trigonométricas, sus derivadas e integrales en la métrica del taxista *Cepeda Carvajal, Yenifer Paola; Arévalo Rojas, Sindy Natalia, 2019*	Actividades con uso de tecnología
Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once *Gómez, Francy, 2004*	Actividad factible
Actividades abductivas para el desarrollo de la capacidad de análisis variacional en estudiantes de grado décimo jornada tarde del Colegio IED Isabel II *González Aguirre, Asdrúbal, 2018*	Conjunto de actividades para iniciar en el proceso de generalización (búsqueda de patrones)
Una reflexión en torno al diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para el tránsito de la aritmética al álgebra. *Cuadrado Hernández, Adriana Rocío, 2019*	Conjunto de actividades para iniciar en el proceso de generalización (búsqueda de patrones)

Problemas de optimización a la luz de la historia de las matemáticas en el currículo escolar *Ramos Beltrán, María Fernanda; Rodríguez Pardo, Nury Andrea, 2018*	Actividades con uso de tecnología
Una aproximación al concepto de razón de cambio con estudiantes de grado sexto a partir de la mediación con geometría dinámica. *Forero Toro, Carlos Alberto; López Vélez, Daniel, 2012*	Actividades con uso de tecnología Conjunto de actividades de generalización (búsqueda de patrones)
Ambiente Virtual para el Aprendizaje de la Solución de Problemas de las Razones de Cambio Relacionadas Mediado por Andamiajes Conceptuales e implícitos *Díaz Fernández, Lina Marcela; Montoya Forero, Sandra Milena, 2018*	Ambiente virtual para la enseñanza de la derivada. Cuestionarios pre test y post test
Los actos de habla que prevalecen entre estudiantes de grado once cuando resuelven problemas de variación *González Monroy, Ángel Ramiro, 2016*	Análisis sobre actuaciones de los estudiosos
Estructuración de una propuesta a estudiantes de grado noveno del Colegio Distrital Kennedy J.T., para el desarrollo del razonamiento inductivo matemático *Vargas Ortiz, Fabio, 2018*	Actividades con uso de tecnología Conjunto de actividades de generalización (búsqueda de patrones)
¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada? *Rojas Celis, Carolina, 2013*	No hay actividades
Formulación de una estrategia para la enseñanza del concepto de la derivada a partir de los conocimientos previos de estudiantes de primer semestre de ingeniería *Castañeda Barbosa, Rubén Darío, 2016*	Derivada Cuestionario preconceptos. Taller (pag 157). Aunque menciona recursos tecnológicos no los usa. Exhibe

	tutoriales de un recurso sin una aplicación directa al concepto a desarrollar. Realiza análisis sobre los resultados obtenidos en el cuestionario preconceptos. Pero no sobre los resultados obtenidos en el taller.
La demostración geométrica de la Ley de Merton: un pretexto para el estudio de área bajo la curva *Castañeda Cortes, Maureen Eliana; Sáenz Bravo, Seúl, 2012*	Actividades con uso de tecnología
Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de matemáticas *Rendón Mayorga, César Guillermo, 2017*	Análisis histórico No hay actividades
Representaciones del sistema conceptual del cálculo, un asunto del profesor de matemáticas en programas de ciencias empresariales *Rojas Hernández, Jennifer Paola, 2018*	Análisis histórico. Análisis comparativo entre las concepciones que tienen los docentes de matemáticas y economistas No hay actividades
Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica: historia y conocimiento didáctico de contenido *Castañeda Cortés, Maureen Eliana; Novoa Olaya, José Eduardo, 2015*	No hay actividades
Didáctica de la física y las matemáticas: enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática *Piñeros Castañeda, Bibiana, 2018*	Análisis histórico No hay actividades

A. Anexo: Recurso en lápiz y papel

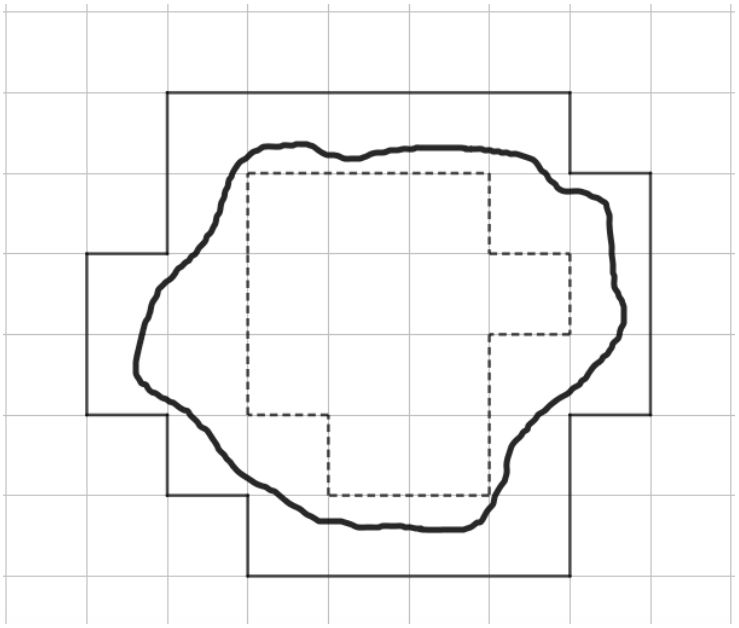
El documento que sigue corresponde a las actividades propuestas por Gómez, F. (2004). Trabajo de grado: "**Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once".** Licenciatura en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Actividad 1.
Área del lago

De una aproximación del área limitada por la curva. Hágalo por defecto y por exceso con las siguientes unidades de medida.

- Cuadrado de 1 cm^2
- Cuadrados de $\frac{1}{2}$ cm^2
- Cuadrados de $\frac{1}{4}$ cm^2

EJEMPLO



Actividad 2

A. Trace la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Tome la unidad de medida igual a $5\ cm$ en el papel milimetrado.
B. Halle el área de la región encerrada por la curva que acaba de trazar con fórmula
C. Halle el área de la región encerrada por la curva que acaba de trazar sin fórmula. Pasos a seguir para el punto C.

- Dibuje los rectángulos exteriores (circunscritos) de igual anchura en el intervalo $[0,1]$ con $f(x) \geq 0$. Como el radio del circulo es una unidad de longitud, la anchura de cada rectángulo es $\frac{1}{5}$ y tome las alturas como $y_0, y_1, \dots, y_4$ respectivamente, esto con el fin de hallar el área de todos los rectángulos exteriores que hay en el circulo completo.

- Realice el mismo proceso que en el ejercicio anterior pero con los rectángulos interiores (inscritos). Los valores de $y_1, y_2, \dots, y_4$ se pueden calcular con la ayuda del Teorema de Pitágoras.

- Halle el término general para el área de los rectángulos inferiores y otro para el área de los rectángulos exteriores.

- Dé aproximaciones por defecto y por exceso para $n = 5, 10, 15, 100$ y 1000 en dobles desigualdades

- Compare los resultados obtenidos en los ejercicios B y C.

B. Anexo: Evidencias de los instrumentos de indagación aplicados.

Debido al volumen de archivos, las evidencias de las reflexiones realizadas por los docentes se dejan en la carpeta EVIDENCIAS.

Bibliografía

Alfonso, E. (2009). *Estrategias para potenciar el pensamiento variacional. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 22 (pp.739-746). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Apostol, T. (1984). CALCULUS. *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal*. Volumen I. Barcelona: Reverte. Segunda edición.

Araya, R. G. (2007). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas*. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

Azinian, H. (2009). *Las tecnologías de la información y la comunicación en las prácticas educativas*. Ediciones Novedades Educativas. pp 54-114. México.

Barrena, E., Falcón, R. M., Ramírez, R., & Collantes, R. (2011). *Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra*. Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, *25*, 161-174.

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* Doctorado tesis, Universidad del Valle.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*, EMA, 8(2), pp. 121-156.

Castiblanco, A., Rodriguez, F., Acosta, E., y Urquina, H. (2004). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.* Proyecto del Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, Colombia. Recuperado de: https://redaprende.colombiaaprende.edu.co/metadatos/recurso/pensamiento-variacional-y-tecnologias-computaciona/

Castillo, S. (2008). *Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, *11*(2), 171-194.

Cotic, N. S. (2014). GeoGebra como puente para aprender matemática. In *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (Vol. 3, No. 10).

Dávila W. (2018). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Secundaria, mediado por Geogebra* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado de: http://bdigital.unal.edu.co/63814/1/72141944.2018.pdf

Detzel, P. (2006). *La enseñanza de las funciones y la condición de univalencia*. En Memorías, I REPEM. Argentina, La Pampa. Recuperado de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI3.pdf

García, G., Serrano, C., & Salamanca, J. (2000). *Estudio del pensamiento variacional en la educación básica primaria.* En Rojas, Pedro Javier (Ed.), Memorias del 2° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 36-38). Valledupar: Gaia.

Gómez, P. (1997). *Tecnología y Educación Matemática.* Informática Educativa, 10(1), pp. 93-111.

Gómez, E., Hernández, H., Chaucanés, A. (2015). *Dificultades en el aprendizaje y el trabajo inicial con funciones en estudiantes de Educación media*. Scientia Et Technica, 20 (3), pp. 278-285.

Gómez, F. (2004). *Una propuesta didáctica para la construcción de integral definida mediante aproximaciones numéricas para grado once.* [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Biblioteca Central Universidad Pedagogica Nacional.

López, J. y Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 308-318). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Martínez L. y Gualdrón E. (2018). *Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno*. Rev.investig.desarrollo.Innov, 9(1), pp. 91-102.

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles339975_recurso_6.pdf

Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moran, D. (2014). De la integral como herramienta a la integral como noción formal: de las cuadraturas a la integral de Cauchy. *Trabajo de pregrado*, Universidad del Valle.

OECD (2015), The PISA 2015 Assessment Framework: Science, Reading, Mathematics, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving. pp. 65-80. OECD, París. Recuperado de: https://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-5-en

Ortega, J. (s,f). *Integral de Riemann*. Capitulo 7. Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Recuperado de: https://www.cimat.mx/~jortega/MaterialDidactico/Analisis/Cap7v2.pdf

Recalde, L. (2007). *Las raices históricas de la integral de Lebesgue*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria , XV (2), 103-127.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Revista iberoamericana de Educación, *33*(3), 135-165.

Ruiz, M., Ávila, P., & Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas.

Sánchez, C. (2015). *Funciones: historia y enseñanza*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), Actas del 5° Congreso Uruguayo de Educación Matemática (pp. 98-104). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Sastre, P., Rey, G. y Boubeé, C. (2008). *El concepto de función a través de la historia. Unión: Revista iberoamericana de educación matemática*. Nº 16. pp. 141 – 155. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Suarez, M. (2008). *Orígenes del Cálculo diferencial e Integral. Historia del Análisis matemático*. Granada. Recuperado de: https://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf

UNESCO (2009). “Medición de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en Educación”. Manual Del Usuario ISBN 978-92-9189-092-7, Recuperado de:

http://uis.unesco.org/sites/default/files/documents/guide-to-measuring-information-and-communication-technologies-ict-in-education-sp.pdf

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas. Proyecto Zero, Universidad de Harvard*., (2), 77, 68-78.

Villa Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales.*

Villarreal, M. E. (2012). *Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza*. Virtualidad, Educación y Ciencia, *3*(5), pp-73