Uso de situaciones problema en diferentes contextos para la enseñanza de las ecuaciones lineales a estudiantes de grado quinto

Luis Daniel Flórez González

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2020

Uso de situaciones problema en diferentes contextos para la enseñanza de las ecuaciones lineales a estudiantes de grado quinto

Luis Daniel Flórez González

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

Matemático, PhD. Claudio Rodríguez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2020

Dedicatoria

A mis padres, por su apoyo desde siempre, a mis estudiantes, que son mi motivación y el sentido de mi trabajo.

Agradecimientos

Al profesor Claudio Rodríguez por asesorarme y acompañarme en el proceso de realización del presente trabajo

A la profesora Myriam Acevedo por su gran dedicación y ayuda a realizar la propuesta del presente trabajo.

A mi compañero Rubén Torres por acompañarme en este proceso y brindarme consejos para mejorar el documento.

Resumen

La presente investigación muestra la implementación de una secuencia de actividades para enseñar a estudiantes de grado quinto de primaria (entre 10 y 11 años) a resolver problemas en diferentes contextos, modelando y resolviendo ecuaciones. También se plantean diferentes métodos para resolver dichos problemas, como el método de ensayo y error y el modelo de barras, y se tienen en cuenta los pasos de resolución de problemas de Polya (1965).

La secuencia comienza con una introducción sobre el uso de las letras, su interpretación y forma de operarlas. Posteriormente, se trabaja con el método de ensayo y error para resolver ecuaciones y problemas relacionados con ecuaciones; luego, con el modelo de barras se resuelven problemas (como una transición hacia la modelación de los problemas con el lenguaje algebraico). Por último, se trabajan problemas relacionados con encontrar números consecutivos y encontrar los ángulos en un triángulo, realizando su respectiva modelación y solución de la ecuación.

Por último, se analizaron los resultados de la prueba diagnóstica y final, en donde se evidencia que los estudiantes avanzaron en la resolución de problemas, en la modelación y resolución de ecuaciones lineales y en reconocer los tipos de soluciones en las ecuaciones.

Palabras clave: Ecuaciones lineales, modelación, resolución de problemas, modelo de barras, ensayo y error.

Abstract

This investigation shows the implementation of a sequence of activities to teach fifth-grade students (between 10 and 11 years old) to solve equations in different contexts by modeling and solving equations. It also shows different methods to solve problems, as trial and error, bar models, and take into account the steps to solve problems of (Polya, 1965).

The sequence starts with an introduction about the use of letters, their interpretation, and the way to do operations with them. Later in the text, the trial and error method is used to solve equations and problems related to it, then Bar model method is presented to solve problems and after that modeling and solving equations. The last activity shows problems related to consecutive numbers and about finding the angles of a triangle by modelling equations and solving them.

The data resulting from the diagnostic test and final test is then analyzed, it shows an advance in problem-solving, modeling, and solving linear equations. It also shows a meaningful advance in recognizing types of equations in the solution of the equations.

Keywords: Linear equations, modelling, problem solving, Bar model, trial and error.

Tabla de contenido

1. PRELIMINARES 5

1.1 PREGUNTA PROBLEMA 5

- *Objetivo general 5*
- *Objetivos específicos 6*
- *Antecedentes 6*

2. ASPECTOS HISTÓRICOS Y EPISTEMOLÓGICOS 9

2.1 APROXIMACIONES AL CONCEPTO DE ECUACIÓN 9

- *Egipcios (2000 a. C. – 1800 a. C) 9*
- *Babilonios (2000 a.C – 600 a.C) 9*
- *Griegos (300 a. C – 300 d.C) 10*
- *Chinos (100 a. C – 0) 11*

2.2 OTROS TIPOS DE ECUACIONES 11

- *Ecuaciones cuadráticas 11*

2.3 ALGUNAS ECUACIONES IMPORTANTES EN LA HISTORIA 13

- *Teorema de Pitágoras. 13*
- *Formula de Euler para los poliedros 14*
- *Ecuación de Einstein 14*

3. ASPECTOS DISCIPLINARES 16

3.1 IGUALDAD 16

Igualdad en la geometría de Euclides 17

3.2 AXIOMAS DE CAMPO 18

3.3 POLINOMIOS 21

- *Igualdad de polinomios 21*
- *Ecuaciones algebraicas 21*

3.4 ECUACIÓN LINEAL 22

- *Ecuaciones equivalentes 23*

3.5 ECUACIONES Y SUS TIPOS DE SOLUCIÓN 25

- *Tipos de soluciones 25*

4. ASPECTOS DIDÁCTICOS Y METODOLÓGICOS 27

4.1 SISTEMA DE EVALUACIÓN DEL COLEGIO 27

- *Proyecto educativo institucional 27*
- *Criterios de evaluación 27*

4.2 APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS 28

4.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE POLYA 29

4.4 MODELO DE BARRAS 30

4.5 DIFERENTES CONTEXTOS EN PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS 32

4.6 USO DE TIC'S EN LA EDUCACIÓN 32

- *Kahoot 33*
- *Google Forms 34*
- *Quizizz 34*

4.7 INVESTIGACIÓN/ACCIÓN 35

5. PROPUESTA DIDÁCTICA 37

5.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA 39

- *Análisis de resultados 44*

5.2 ACTIVIDAD 1 – ¿LETRAS EN MATEMÁTICAS? 45

- *Análisis de resultados 49*

5.3 ACTIVIDAD 2 – EVALUANDO Y SUMANDO EXPRESIONES ALGEBRAICAS 49

- *Análisis de Resultados 53*

5.4 ACTIVIDAD 3 – SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR ENSAYO Y ERROR 54

- *Análisis de resultados. 57*

5.5 ACTIVIDAD 4 – SOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ENSAYO Y ERROR 58

- *Análisis de resultados 60*

5.6 ACTIVIDAD 5 – RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR MODELO DE BARRAS Y TRANSICIÓN A LAS ECUACIONES 61

- *Análisis de resultados 67*

5.7 ACTIVIDAD 6 – TIPOS DE SOLUCIONES DE ECUACIONES LINEALES 68

- *Análisis de resultados. 72*

5.8 ACTIVIDAD 7 – MODELACIÓN 73

- *Análisis de resultados 77*

5.9 OTROS PROBLEMAS: 78

- *Hallar los ángulos internos de un triángulo 78*
- *Números consecutivos 79*
- *Análisis de resultados 80*

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS FINALES 81

6.1 PRUEBA FINAL 81

- *Análisis prueba final 86*

6.2 PRUEBA DIAGNÓSTICA VS PRUEBA FINAL 87

6.3 EXPERIENCIAS CON LAS CLASES REMOTAS Y SINCRÓNICAS 89

6.4 REFLEXIONES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE PROBLEMAS Y ECUACIONES 90

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 91

7.1 CONCLUSIONES 91

7.2 RECOMENDACIONES 93

8. BIBLIOGRAFÍA 101

Lista de figuras

Ilustración 4-1: Comparativo resultados prueba PISA 2012, 2015 y 2018..... 31
Ilustración 5-1: Prueba Diagnóstica - Ejercicio 4 42
Ilustración 5-2: Actividad 1 - Pregunta. Extraída el 17 de noviembre de 2019 de http://www.ucarecdn.com/43bec3b7-b177-442c-b772-0ca44291db98/-/preview/..... 46
Ilustración 5-3: Actividad 1 – Ejercicio 3..... 48
Ilustración 5-4: Actividad 3 – Acertijo. Extraída el 16 de febrero de 2020 de https://www.solvemoji.com/Puzzle/Puzzle/7618 54
Ilustración 5-5: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto parte 1 55
Ilustración 5-6: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto parte 2 56
Ilustración 5-7: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto 57
Ilustración 5-8: Actividad 4 - Problema introductorio 58
Ilustración 5-9: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 1, parte 1 61
Ilustración 5-10: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 2 61
Ilustración 5-11: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, formulación..... 62
Ilustración 5-12: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 1 62
Ilustración 5-13: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 2 63
Ilustración 5-14: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 3 63
Ilustración 5-15: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, formulación..... 64
Ilustración 5-16: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, transición del modelo de barras a las ecuaciones (parte 1) 64
Ilustración 5-17: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, transición del modelo de barras a las ecuaciones (parte 2) 65
Ilustración 5-18: Actividad 7 – Resultados..... 78
Ilustración 5-19: Otros problemas – Ángulos internos de un triángulo..... 78
Ilustración 5-20: Otros problemas – Dificultad presentada..... 80
Ilustración 6-1: Prueba final – Ejercicio 5..... 84
Ilustración 6-2: Prueba diagnóstica vs Prueba final..... 87
Ilustración 6-3: Diagramas de caja y bigotes - Pretest vs Postest 88

Lista de tablas

Tabla 3-1: Demostración unicidad del opuesto 19
Tabla 3-2: Solución de una ecuación lineas en los Reales 24
Tabla 4-1: Comparativo resultados prueba PISA 2012, 2015 y 2018 31
Tabla 5-1: Prueba diagnóstica – Ejercicio 5 42
Tabla 5-2: Prueba diagnóstica - Resultados 44
Tabla 5-3: Actividad 1 – Ejercicio 4 48
Tabla 5-4: Actividad 4 - Problema introductorio 59
Tabla 5-5: Actividad 4 - Punto 1 59
Tabla 5-6: Actividad 4 - Punto 2 60
Tabla 5-7: Actividad 6 – Ejemplo 69
Tabla 5-8: Otros problemas – Números consecutivos 79
Tabla 6-1: Prueba final – Resultados 87

Introducción

Las ecuaciones constituyen un tema esencial para los estudiantes a lo largo de su vida escolar y universitaria, es un concepto matemático muy utilizado en las ciencias. Existen muchos modelos que se expresan mediante funciones o ecuaciones lineales. Un ejemplo, en física, es la ecuación que sintetiza la segunda ley de Newton, $F = ma$, donde se relaciona la fuerza (F), la masa (m) y la aceleración (a); mientras que en química (y en física), por ejemplo, se utiliza la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$, encargada de relacionar los grados Celsius y Fahrenheit. Además, las ecuaciones y funciones lineales se utilizan en situaciones geométricas y cotidianas, como la medición de ángulos, el pago de productos y servicios para una familia, entre otras cosas.

Los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), que se presentan en MEN (2000), hablan acerca de la importancia del planteamiento y la resolución de problemas, debido a que, a través de ellos se desarrollan habilidades para comunicar y razonar matemáticamente; comprender los procesos matemáticos a través del análisis de ejemplos y contraejemplos; usar diversidad de modelos, diagramas, símbolos, hacer traducciones entre distintas formas de representación, entre otras habilidades. Por otra parte, los lineamientos MEN (2000, pág. 77) citan a Treffers y Gofree, quienes describen la modelación como “una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas”. Se resalta, además, en el documento, la conexión entre la resolución de problemas, las aplicaciones y la modelación.

A pesar de la importancia que tiene el planteamiento y resolución de problemas en el desarrollo curricular de matemáticas se ha observado, en la práctica docente, que los estudiantes presentan dificultades relacionadas con este proceso y en especial con el proceso de modelar situaciones problema con ecuaciones lineales. Muchas veces se

encuentra que los estudiantes se quedan en el ensayo y error para intentar encontrar la solución de estos problemas, pero no plantean ni resuelven formalmente las ecuaciones.

Durante mi experiencia como docente he encontrado que los estudiantes están desconectados de las numerosas aplicaciones que tienen las ecuaciones, solamente conocen y manipulan los aspectos procedimentales, posiblemente porque se plantean pocos problemas en donde intervienen las ecuaciones como una herramienta práctica y sólo aprenden los pasos para resolver ecuaciones, sin profundizar en la modelación y en la resolución de problemas. Este tipo de problemas permite encontrar aplicaciones útiles para comprender el proceso y significado de la solución de una ecuación en un contexto determinado.

Además, algunas dificultades que pueden estar relacionadas con la modelación y resolución de problemas tienen que ver con la forma en que el estudiante le da significado a la incógnita, las interpretaciones que da a las letras y el lenguaje algebraico. Respecto a lo anterior, Muñoz y Ríos (2008) plantean que la transición de la aritmética al álgebra genera dificultades de aprendizaje en la mayoría de los estudiantes, las cuales son más evidentes cuando deben resolver problemas que se modelen con ecuaciones lineales, puesto que lleva al alumno a realizar un análisis más estructurado que el proceso mecánico de resolver una ecuación lineal.

Debido a lo anterior, y por la importancia que tienen las ecuaciones lineales y las dificultades que se presentan, decidí indagar sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes en esta temática y sus aplicaciones a la resolución de problemas haciendo uso de la modelación, es decir, partiendo del problema, proponiendo alguna estrategia de solución (ensayo y error, tablas, representaciones gráficas y/o modelo de barras), para llegar al planteamiento y solución de una ecuación lineal. El presente documento es el resultado de una propuesta en la que se desarrolló una secuencia de actividades que incluye sesiones, guías, estrategias didácticas para las clases y una evaluación, para la enseñanza de ecuaciones lineales a estudiantes de grado quinto de un colegio bilingüe (español, inglés). Es poco usual enseñar ecuaciones lineales a estudiantes de grado quinto (es normal enseñarlo en los primeros años del bachillerato), por lo cual, hacer una introducción de esta temática es una oportunidad para observar como asimilan este concepto por primera vez y es una buena forma de evaluar la secuencia, debido a que son

estudiantes que no han estado inmersos en el trabajo y resolución de problemas con el uso de ecuaciones (en particular, lineales).

El documento está organizado de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se presentan los objetivos de la investigación y antecedentes. El Capítulo 2 comienza con algunos aspectos históricos importantes sobre las ecuaciones lineales en distintas culturas, también se presenta otro tipo de ecuaciones como las cuadráticas y las ecuaciones más importantes en la historia. En el Capítulo 3 se presentan los aspectos disciplinares, conceptos importantes como lo son la igualdad, los polinomios, ecuación algebraica y diferentes definiciones de ecuación lineal, y, por último, se presentan los tipos de solución en ecuaciones. En el Capítulo 4 se presentan los aspectos didácticos de la propuesta, en donde se muestran aspectos importantes del sistema de evaluación del colegio, se explica el aprendizaje basado en problemas, el método de resolución de problemas de Polya, el modelo de barras y los diferentes contextos en problemas de matemáticas.

El principal aporte que hago a este trabajo está en el Capítulo 5, en el cual se describe la secuencia que propongo para la enseñanza de las ecuaciones lineales a través de problemas; cada sección está con el respectivo análisis de las actividades o resultados, comienza con la prueba diagnóstica y prosigue con cada una de las actividades planteadas. En el Capítulo 6, se muestra un comparativo entre la prueba diagnóstica y la final, para analizar el avance durante el tiempo que se aplicó la propuesta que fue para el tercer trimestre del año escolar (sólo hay tres trimestres o periodos en el año escolar), luego se habla de las experiencias en las clases remotas de manera sincrónica debido a la pandemia del Covid-19, y, por último, algunas reflexiones acerca de la resolución de problemas y ecuaciones. En el último Capítulo se encuentran las conclusiones.

1. Preliminares

En este capítulo se pretende establecer el punto de partida para el desarrollo de la propuesta. Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, dados en la introducción, surge la siguiente pregunta:

1.1 Pregunta problema

¿Cómo utilizar la resolución de problemas de diferentes contextos con los estudiantes de grado quinto, del Colegio Mayor de los Andes, para que planteen y resuelvan ecuaciones lineales con una incógnita?

Para responder a esta pregunta se propone diseñar y aplicar, en el grado quinto, una secuencia de actividades para la enseñanza de ecuaciones lineales a partir de la resolución de problemas de diferentes contextos, haciendo uso del ensayo – error y del modelo de barras (característico de la metodología de Singapur). Lo anterior, porque las ecuaciones permiten la solución de problemas en diversos campos como la medicina, ingeniería, economía, administración, entre otras; y, se requiere, en consecuencia, buscar estrategias didácticas centradas en el planteamiento y resolución de problemas, que lleven a los estudiantes a modelar situaciones a partir del reconocimiento de las incógnitas involucradas y las ecuaciones que las relacionan.

- **Objetivo general**

Desarrollar con los estudiantes de grado quinto una secuencia de situaciones problema que modelen ecuaciones lineales en una variable en diferentes contextos.

- **Objetivos específicos**

1) Determinar conocimientos previos de los estudiantes respecto a la solución de ecuaciones lineales y sus aplicaciones en la resolución de problemas.

2) Seleccionar aspectos disciplinares y didácticos relacionados con el planteamiento de ecuaciones lineales y su uso en la resolución de problemas.

3) Diseñar situaciones en diferentes contextos que puedan ser modeladas con ecuaciones lineales.

4) Diseñar una secuencia de actividades para enseñar a resolver ecuaciones lineales.

5) Implementar la secuencia con los estudiantes de grado quinto del colegio Mayor de los Andes.

6) Evaluar la secuencia.

- **Antecedentes**

Algunos antecedentes relacionados con la propuesta se citan a continuación:

- En la investigación titulada “Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: el caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia”, de Arroyo (2014), el investigador, con 6 estudiantes de grado octavo de un colegio privado de Costa Rica (que presentan un desempeño bajo en matemáticas), implementa su propuesta. El estudio muestra conclusiones acerca de las dificultades que los estudiantes presentan al resolver problemas de ecuaciones lineales; encontró que algunas de las dificultades de los estudiantes con la resolución de problemas de ecuaciones lineales se originan en: el abordaje de problemas ajenos al contexto del estudiante, la falta de conocimientos previos, la costumbre de memorizar y mecanizar procesos. Según el autor, las dificultades

en la resolución de problemas son temporales y se pueden superar mediante una mediación pedagógica; los estudiantes se distraen porque no entienden, tienen deficiencias para leer y capturar los datos relevantes de un problema. Una recomendación que se da frente a las dificultades es: plantear problemas contextualizados que motiven a los estudiantes y les permitan aprender del error. Además, se requiere fomentar conexiones entre la aritmética y el álgebra, a través de actividades aritméticas que incluyan ideas como la generalización, la representación y la variabilidad desde la primaria.

- En la propuesta titulada “El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales” de García, Díaz y Vargas (2016), se propone usar la balanza como un recurso didáctico manipulable para la enseñanza de ecuaciones lineales a estudiantes de primer año de secundaria en un colegio de México. Díaz y Vargas, en su propuesta, tienen en cuenta el enfoque cognitivo de Raymond Duval, el cual se basa en las representaciones semióticas y registros semióticos, buscando promover el cambio entre los diferentes sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y algebraico), que corresponde con el término “registros semióticos” acuñado por Raymond Duval. Concluyen en este trabajo que el uso del manipulable de la balanza contribuyó significativamente a la comprensión de la noción de ecuación lineal y ayudó a que los estudiantes pasarán de una manera más fácil del lenguaje natural al simbólico e hicieran conversiones entre los registros de representación algebraica y gráfica. El uso de la balanza contribuyó, además, a despertar el interés y motivación de los estudiantes, pues realizaron acciones de exploración, reflexión y análisis.

2. Aspectos históricos y epistemológicos

En este capítulo se realizará una revisión histórica de algunos elementos relevantes en el desarrollo del concepto de ecuación. Se hace un recorrido por algunas civilizaciones antiguas y diversos matemáticos, que hicieron aportes a la teoría de las ecuaciones.

2.1 Aproximaciones al concepto de ecuación

- **Egipcios (2000 a. C. – 1800 a. C)**

La matemática utilizada por los egipcios se dio a conocer gracias al Papiro de Rhind, en este se puede identificar que los egipcios resolvían ecuaciones lineales de los tipos $ax = b$ y $ax + bx = c$, siendo a, b y c números conocidos y x desconocido, al que llamaban "aha" o montón (Boyer, 1986). El método de solución que utilizaban para resolver ecuaciones lineales se conoce hoy como "*el método de la falsa posición"*, este consistía en partir de un valor falso para la incógnita y llegar, por aproximaciones sucesivas, al valor correcto.

Otro método para resolver ecuaciones desarrollado por los egipcios, que en Olave y Dalcín (2007) se llama "*desandar lo andado"*, fue aplicado en algunos problemas que figuran en el Papiro de Moscú, que se encuentra en el museo de Bellas artes. El método consistía en realizar las operaciones inversas hasta llegar a la operación original.

- **Babilonios (2000 a.C – 600 a.C)**

Según los historiadores, los Babilonios resolvían ecuaciones, no sólo lineales sino cuadráticas, como se aprecia en las tablillas de arcilla que utilizaban para anotar sus actividades (Olave & Dalcín, 2007). Se han encontrado cerca de 180 tablillas que incluyen problemas relacionados con el comercio, las herencias, la división de propiedades, y cerca

de la mitad de ellas contienen problemas de tipo aritmético, algebraico o geométrico, que para solucionarse requerían plantear y resolver ecuaciones.

- **Griegos (300 a. C – 300 d.C)**

Dos precursores importantes en el manejo de las ecuaciones fueron Euclides y Diofanto, veamos, a continuación, algunos de sus aportes:

Los Elementos de Euclides (300 a. C):

Euclides, famoso por su libro Elementos de geometría, incluye problemas que se resuelven con ecuaciones lineales. Un ejemplo aparece en la proposición 44 del libro I, "*Aplicar a una recta dada en un ángulo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado"* (Dalcín & Olave, 2007, pág. 159), en el lenguaje actual se interpreta: *aplicar* como construir, *recta* como segmento e *igual* como igual área. Haciendo estas observaciones el problema quedaría: Dado un triángulo, y un segmento, construir un paralelogramo de igual área al triángulo dado. Si utilizamos la notación $T = área\ del\ triángulo$, $AB = a$, $x = dimensión\ desconocida$, el problema se reduce a resolver la ecuación: $ax = T$; Euclides la resolvía realizando construcciones geométricas.

Diofanto de Alejandría:

Diofanto tuvo un papel importante en el desarrollo de las ecuaciones, su obra "*La Aritmética"* es una de las primeras que se aleja del planteamiento geométrico, a pesar de haber sido escrita en un tiempo donde los geómetras habían dominado la producción matemática durante un largo periodo. Diofanto, en su obra, utilizaba incógnitas para representar cantidades desconocidas (aritmo), sin importar el número de variables. Su mérito consiste en expresar todas las cantidades en términos del aritmo, y así dar solución al problema planteado. En algunas ocasiones necesitaba resolver un sub-problema y para esto planteaba un aritmo diferente al inicial, dándole solución al sub-problema y retomando el problema original (Medina & Albarracín, 2012).

- **Chinos (100 a. C – 0)**

En la antigüedad (Siglo I a. C.), los chinos, trabajaron métodos equivalentes al que hoy se conoce como "eliminación Gaussiana", el cual se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales; el nombre del método se otorgó en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), lo que hace pensar que él fue el primero en descubrirlo, sin embargo, los chinos trabajaron este método con mucha antelación, como se evidencia en el libro chino "*The nine Chapters on the Mathematical Art"* (Flagg, 2017), que fue recopilado en el primer siglo antes de Cristo y tiene un capítulo llamado *Fangcheng,* que traducido al español significa "*arreglos rectangulares"* y introduce un método general para resolver sistemas de ecuaciones lineales realizando arreglos rectangulares.

2.2 Otros tipos de ecuaciones

- **Ecuaciones cuadráticas**

Los Babilonios (2000 a.C. -600 a. C) resolvían ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$, con b, c positivos (Dalcín & Olave, 2007), en la tabla BM 13901 se encuentran 21 problemas relacionados con ecuaciones cuadráticas. En cada problema figura el enunciado y los pasos para su solución; utilizaban el método de completar cuadrados y demostraciones geométricas a los problemas particulares.

En India, un matemático y astrónomo importante fue Brahmagupta (598- 660), quién utilizó métodos algebraicos para resolver problemas astronómicos. Desarrolló un método para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = c$ (Dalcín & Olave, 2007), donde da unos pasos para hallar la solución: multiplicar ac, luego dividir por 2 el coeficiente de x y lo eleva al cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, luego saca la raíz cuadrada a la suma de los resultados anteriores $\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ y a esto le resta la mitad del coeficiente de la incógnita quedando,

$$x = -\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Por otro lado, los árabes tuvieron gran influencia en el desarrollo del álgebra. Al Khwarizmi (vivió aproximadamente entre los años 780 y 850) escribió dos libros importantes en la historia de las matemáticas, en el primero "De numero indorum" (sobre el arte de calcular Hindú) explicaba por completo el sistema de numeración Hindú y en su segundo libro trataba la solución de problemas por *al-jabr*, que es donde surgió el nombre de álgebra y su significado, el cual es: añadir términos iguales a ambos lados de la ecuación para eliminar términos negativos (Moreno & Weingast, 2005); este libro tuvo gran influencia en Europa para el aprendizaje de esta rama de las matemáticas.

En su tratado (segundo libro) escribió sobre métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, en éste, distinguía tres elementos importantes, que son, número, raíz y cuadrado, que en el lenguaje actual es, número, x, x^2. En su tratado, mostró métodos muy similares a los actuales, por ejemplo, para resolver el problema, que en su terminología dice: "*un cuadrado y diez raíces de la misma cantidad a treinta y nueve"* (Moreno & Weingast, 2005, pág. 24), que en el lenguaje actual se traduce como la ecuación: $x^2 + 10x = 39$, utilizó las siguientes instrucciones: *tú divides a la mitad el número de raíces* $\left(\frac{10x}{2} = 5x\right)$, *lo que en primera instancia da* $5x$*, de lo cual utilizamos el coeficiente de la expresión, es decir* 5*. Esto lo multiplicas por sí mismo, el producto es 25. Suma esto a 39, la suma es 64. Ahora extrae la raíz de esto, que es ocho, y substrae de éstel el número de raíces, la cual es 5, el resto es 3. Esta es la raíz del cuadrado que buscabas; el cuadrado en sí es 9.* (Moreno & Weingast, 2005, pág. 24) En la notación actual, sería como las instrucciones para completar un trinomio cuadrado perfecto, así:

$$x^2 + 10x = 39$$

Sumamos 25, a ambos lados de la igualdad; 25 se obtiene de dividir por dos el coeficiente de x y elevándolo al cuadrado $5^2 = 25$, quedaría así:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto, obteniendo:

$$(x + 5)^2 = 64$$

Cómo $8^2 = 64$, $x + 5 = 8$, lo que se concluye que $x = 3$.

Al Khwarizmi, además de brindar los pasos para resolver la ecuación cuadrática, realizaba una demostración geométrica. Cabe resaltar que, en la solución de ecuaciones cuadráticas, encontraba sólo las soluciones positivas.

2.3 Algunas ecuaciones importantes en la historia

- **Teorema de Pitágoras.**

Una de las ecuaciones más famosas y conocidas es el teorema de Pitágoras, formulado en el año 530 antes de Cristo. Esta dice que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (lado más largo del triángulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los otros dos lados), en términos de ecuación es: $h^2 = a^2 + b^2$, donde, h es la hipotenusa y a y b son los catetos. Es uno de los teoremas que tiene más demostraciones, González (2008) cita a Loomis (1927), quién realizó una recopilación exhaustiva de las demostraciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia y plasmó en su obra "*The Pithagorean proposition"* 370 pruebas y demostraciones. Las demostraciones más famosas son las de los matemáticos, como Pappus (aproximadamente 300 años a.C), que hizo una demostración parecida a la de Euclides, utilizando áreas de figuras de la misma base situadas entre paralelas; Thâbir Ibn Qurra (826-901), quién da dos pruebas utilizando el método de congruencia por sustracción; Bhaskara (1114 - 1185), lo realiza mediante una construcción geométrica; Leonardo Da Vinci (1452-1519), también hizo una demostración mediante una construcción geométrica. Muchos otros matemáticos y no matemáticos se interesaron por esta ecuación.

El teorema de Pitágoras se le atribuye a los griegos, pero diferentes civilizaciones trabajaron en éste, por ejemplo: en Babilonia, se evidencia en tablillas de arcilla, en especial la tablilla Yale (González, 2008), se observa un cuadrado con los dos triángulos resultantes al trazar la diagonal y varios números escritos en el sistema de numeración sexagesimal babilónico, basados en potencias de 60, que al transcribirlos al sistema decimal muestran la relación con el teorema; los egipcios, con el triángulo de Isis, un triángulo rectángulo de lados 3,4,5 y en donde el número 3 representaba a Osiris, el 4 a Isis y el 5 a Horus, porque tenía cierto carácter sagrado, también el lado vertical representaba al macho, el lado horizontal a la hembra y la hipotenusa representaba al primogénito de los dos; en India, como resultado de la construcción de templos y altares,

y la utilización de cuerdas, los hindúes utilizaban ternas pitagóricas que armaban con las cuerdas para construir líneas perpendiculares.

Recordemos que el teorema de Pitágoras es de especial relevancia, ya que relaciona la geometría y el álgebra, permitiendo, entre otras cosas, calcular distancias; además, es un punto de partida para la trigonometría, la cual está basada, inicialmente, en el estudio de triángulos rectángulos. Por otro lado, contribuyó con la topografía, en la elaboración de mapas más precisos; sin contar la navegación, la geometría analítica, relatividad general y especial, teorías del espacio y gravedad.

- **Formula de Euler para los poliedros**

Los poliedros son figuras tridimensionales de caras planas y que encierran un volumen finito. Euler estableció una relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo, mediante la siguiente ecuación:

$$C - A + V = 2$$ [1]

En donde, C es el número de caras, A es el número de aristas y V el número de vértices, lo cual, claramente dice que estos elementos no son independientes.

Esta ecuación es importante, puesto que se debió establecer en qué sólidos se cumplía, lo cual fue el principio de una nueva rama de las matemáticas, la topología, según lo explica Stewart (2012) en su libro: "*17 ecuaciones que cambiaron el mundo".*

- **Ecuación de Einstein**

Albert Einstein (1879-1955), físico alemán, quién desarrolló la teoría de la relatividad (Especial y general), famoso por su ecuación $E = mc^2$, que significa que la materia contiene energía igual a su masa multiplicada por el cuadrado de la velocidad de la luz, E representa la energía remanente en la masa, m es la masa, y c es una constante, igual a

[1] Puede revisar [Página 9, (Coxeter, 1993)] para consultar sobre las caracteristicas que tienen los poliedros que satisfacen la fórmula de Euler.

la velocidad de la luz. Lo importante de esta ecuación es que la velocidad de la luz es muy alta y su cuadrado enorme, lo que quiere decir que, con muy poca masa, se puede crear una energía enorme, principio usado para crear bombas atómicas o armas nucleares, además, esta ecuación hace parte de un paquete de ecuaciones que cambiaron nuestra visión del espacio, tiempo, materia y gravedad (Stewart, 2012).

Esta ecuación impulsó la creación de una nueva rama de la física, que ayudó en el entendimiento de los agujeros negros, la teoría del big bang, la creación de los GPS y la navegación vía satélite. Respecto al sistema de posicionamiento global (GPS), que es utilizado para la navegación vía satélite por los automóviles, funciona gracias a las correcciones que se le hicieron basadas en la teoría de la relatividad.

3. Aspectos disciplinares

3.1 Igualdad

"El concepto de igualdad tiene un papel preponderante en todas las construcciones intelectuales y en muchas circunstancias de la vida cotidiana, pero su significado en cada contexto puede ser muy variado (…)" (Luque Arias, Mora Mendieta & Torres, 2014, pág. 23). Uno de los contextos donde aparece el término igual es el físico, en donde, por ejemplo, comparamos y decimos que dos platos son iguales, sí están hechos del mismo material y tienen la misma forma, pero en el sentido estricto no podemos decir que son iguales, debido a la disposición molecular y distribución espacial (si los comparamos teniendo en cuenta todas las propiedades), no serían iguales; de esta manera, podemos decir que dos objetos no son iguales en el mundo físico, ni siquiera un ser vivo es igual a sí mismo en tiempos distintos, ya que él mismo cambia a medida que pasa el tiempo, por su alimentación, se envejece a cada instante, se forman nuevas células y mueren otras.

La igualdad en el contexto filosófico se representa por el signo "=", nos dice que una cosa es igual a sí misma, que simbólicamente se escribe $a = a$. Respecto a lo anterior, Luque, Mora y Torres (2014, pág. 24) citan a Frege (1972), diciendo que "*esta es una verdad evidente, ya que una cosa no es más igual que a sí misma*". En matemáticas, una relación binaria R es reflexiva en un conjunto A si todo elemento de A está relacionado con sí mismo, aRa para todo a en A, la igualdad es reflexiva para el conjunto en donde se define. Adicionalmente, Wilhem Leibniz opina: *"dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sustituida por otra"* (Frege, 1972, pág. 172), trabajando con esta consideración, y teniendo que $a = b$, si sustituimos a por b y b por a obtenemos que $b = a$, sí y sólo sí a tiene todas las propiedades que tiene b y b tiene todas las propiedades que tiene a, en el lado izquierdo y derecho; es decir, que si partimos de $b = a$, podemos concluir que $a = b$. Una relación binaria R es simétrica en un conjunto A, si para todo par de elementos a, b en A, si aRb,

implica que bRa. La igualdad es simétrica en los conjuntos donde se define. Y si queremos comparar dos cosas iguales con una tercera, podemos utilizar la propiedad *Euclidea* que dice que si suponemos que $a = b$ y $a = c$, concluimos que $b = c$, o en palabras, si dos cosas son iguales a una tercera, son iguales entre sí. En matemáticas una relación binaria R es transitiva en el conjunto A si para todo a, b, c en A, siempre que $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. la igualdad es transitiva en los conjuntos donde se define.

Teniendo en cuenta lo anterior, una igualdad es una relación de equivalencia, y su símbolo es "$=$". Recordemos que una relación binaria R es de equivalencia en un conjunto A no vacío si reflexiva, simétrica y transitiva.

Una igualdad entre dos elementos determina una afirmación, por lo tanto tiene un valor de verdad. Por ejemplo, en $(\mathbb{N}, =)$, $1 = 2$ es una igualdad que afirma que "1 es igual a 2", sin embargo, es falsa. Mientas que la igualdad $3 = 3$ es verdadera.

$1 = 2$ y $3 = 3$ son igualdades, están bien escritas, pero tienen valores de verdad distintos, es común decir que "la igualdad no se tiene" cuando es falso y que "la igualdad se tiene" cuando es verdadera.

Cuando introducimos más relaciones en el lenguaje se pueden plantear afirmaciones más complejas utilizando la igualdad, por ejemplo, en $(\mathbb{Q}, +, \cdot, =)$, la afirmación (la igualdad) $1 + \frac{2}{3} = 2 - \frac{1}{3}$ es verdadera.

Igualdad en la geometría de Euclides

En la obra *Los Elementos,* de geometría, escrita por Euclides, se evidencian las primeras ideas de igualdad que se expresan en las siguientes nociones comunes (Luque, Mora & Torres, 2014)

1. *E1*: Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí
2. *E2*: Si cosas iguales se adicionan a iguales, los totales son iguales.
3. *E3*: Si cosas iguales se sustraen a iguales, los restos son iguales.
4. *E4*: Cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí.

Se resalta que las tres primeras nociones son más generales y se aplican a todos los objetos matemáticos que se estudian en los elementos.

Para este trabajo, en la enseñanza de ecuaciones, se tomarán en cuenta estos principios para resolver las ecuaciones lineales.

3.2 Axiomas de campo

Sea G un conjunto no vacío, en el cual se denota una operación binaria como "+", llamada suma, es decir, una función del producto cartesiano de G con G en G. Si $g, h \in G$, se tiene:

$$+: G \times G \to G$$

$$(g, h) \to +(g, h)$$

Por simplicidad se denota la imagen de esta función $+(g, h)$ como $g + h$ para todo g, h en G.

La estructura $(G, +)$ se llama **monoide** si satisface las siguientes dos propiedades G1 y G2:

G1. Dados cualesquiera tres elementos f, g, h en G, se tiene que:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

***G2*.** Existe un elemento m en G tal que para todo g en G, $g + m = m + g = g$. Si un elemento m satisface esta condición se llama módulo.

Si G tiene un módulo, entonces este es único, porque si hubiese otro, digamos n, se tendría que $m = n + m$ por ser n un módulo y también $n = m + n$ porque m es un módulo, luego, por *E1* (la primera propiedad de Euclides mencionada anterior sección) "transitividad", se tiene que $m = n$.

La propiedad *G1* se conoce como propiedad asociativa y *G2* como propiedad modulativa, entonces la estructura $(G, +)$ es un **monoide** si la suma es asociativa y modulativa. Si adicionalmente $(G, +)$ satisface la propiedad G3 que se presenta a continuación, se dice que la estructura es un grupo; si, además de lo anterior, satisface G4 se llama **grupo abeliano o conmutativo**.

G3. Para todo g en G existe h en G tal que $g + h = h + g = m$, donde m es el módulo.

G4. Para todo g, h en G, $g + h = h + g$.

La propiedad *G3*, se conoce como la **propiedad de los opuestos o inversos** y *G4* como **propiedad conmutativa**.

Si $(G, +)$ es un grupo entonces los opuestos son únicos. Sea g un elemento de G y m el módulo de G, si h y f son opuestos de g, entonces,

Afirmación	**Razón**
$f = f + m$	*G2* (propiedad modulativa)
$f = f + (g + h)$	Por *G3* (propiedad de los opuestos) y sustitución
$f = (f + g) + h$	Por *G1* (Propiedad Asociativa)
$f = m + h$	Por *G3* (propiedad de los opuestos)
$f = h$	Por *G2* (propiedad modulativa)

Tabla 3-1: Demostración unicidad del opuesto

Ejemplos

a) Los números naturales (tomando a cero como un número natural) con la suma forman un monoide, ya que la suma es asociativa y 0 actúa como módulo. Sin embargo, los naturales con la suma no forman un grupo.

b) Los números enteros forman un grupo Abeliano con la suma, puesto que es asociativa, tiene el 0 como módulo, todos los elementos tienen inversos aditivos y cumple la propiedad conmutativa.

Consideremos una estructura con dos operaciones, sea K un conjunto no vacío, y dos operaciones binarias sobre K que llamamos suma y producto, que denotamos por "+" y "·" respectivamente.

La estructura $(K, +, \cdot)$ se llama anillo si $(K, +)$ es un grupo abeliano y $(K, \cdot)$ cumple la propiedad asociativa y satisface la siguiente propiedad G5

G5. Para todo a, b, c en K, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (b \cdot c)$ y $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

La propiedad *G5* se conoce como propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, observe que la primera parte muestra que el producto se distribuye sobre la suma por izquierda y la parte derecha que el producto se distribuye sobre la suma por derecha. Si adicionalmente el anillo $(K,+,\cdot)$ satisface la propiedad *G6,* que se enuncia a continuación, se llama **anillo con identidad**.

G6. Existe I en K tal que para todo k en K, $I \cdot k = k \cdot I = k$. Un elemento que satisface esta propiedad se llama identidad para el producto, o simplemente **identidad**.

Al igual que el módulo, si $(K,+,\cdot)$ tiene identidad esta es única.

Si un anillo $(K,+,\cdot)$ satisface la propiedad *G7*, se llama **anillo conmutativo**.

G7. Para todo k, r en K se tiene que, $k \cdot r = r \cdot k$.

Un anillo que satisface *G6* y *G7* se llama anillo conmutativo con identidad. Un anillo conmutativo con identidad $(K,+,\cdot)$ en el cual todo elemento de $K\backslash\{\mathrm{m}\}$ (donde m es el módulo de K) tiene inverso multiplicativo se llama campo, más precisamente si $(K,+,\cdot)$ satisface la siguiente propiedad:

G8. Para todo k en $K\backslash\{\mathrm{m}\}$, existe r tal que $k \cdot r = r \cdot k = I$, donde I es el elemento identidad de K. El elemento r se conoce como el **inverso multiplicativo** de k.

En un campo $(K,+,\cdot)$ el inverso multiplicativo de un elemento $k \neq m$ es único.

Ejemplos

a) Los enteros $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ forman un anillo conmutativo con unidad, con módulo 0 e identidad 1.
b) Los números Racionales forman un campo, con módulo 0 e identidad 1.
c) Los números Reales y Complejos también forman un campo.
d) Los polinomios con coeficientes en un campo forman un anillo conmutativo con identidad, particularmente, los polinomios con coeficientes en los números racionales o reales forman un anillo conmutativo con identidad con las operaciones de suma y producto de polinomios, pero este tema no se abordará en el trabajo de grado.

3.3 Polinomios

Según Uspensky (1995), un polinomio real en la variable x es una expresión de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales, estos reciben el nombre de coeficientes; También se pueden definir polinomios con coeficientes enteros, racionales, complejos o en otros sistemas numéricos. Usualmente, se utiliza la notación $p(x)$ para simbolizar un polinomio. Cuando a_0 es diferente de cero este es el coeficiente principal y n es el grado del polinomio.

Según Sullivan (2006), un monomio en una variable, es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa; tiene la forma ax^k, donde a es una constante, x es una variable y k un entero no negativo, la constante a es el coeficiente del monomio y si a no es cero, el grado del monomio es igual a k. Los monomios de un polinomio se llaman términos y si todos los coeficientes del polinomio son cero, se llama polinomio cero.

- **Igualdad de polinomios**

Sean

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ y

$q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$,

dos polinomios en la variable x, se dice que son iguales, es decir $p(x) = q(x)$, sí $m = n$ y para todo $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ se tiene que $a_i = b_i$, en palabras, dos polinomios en una variable x, son iguales si tienen el mismo grado y sí todos sus coeficientes de igual grado son iguales.

- **Ecuaciones algebraicas**

En el presente trabajo se requiere hablar del concepto de ecuación lineal, sin embargo, las ecuaciones lineales hacen parte de un tipo, más amplio, de ecuaciones que se conocen

como algebraicas de una variable: En (Uspensky, 1995, pág. 57) se define las ecuaciones algebraicas de la siguiente manera:

> *Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales o complejos y grado ≥ 1. Igualándolo a cero tenemos la ecuación: $f(x) = 0$, que se llama ecuación algebraica. En esta ecuación x representa un número desconocido que la satisface, es decir, que sustituido en $f(x)$ da cero como resultado. Cualquier número que satisfaga la ecuación propuesta se llama raíz; el problema de resolver una ecuación consiste en encontrar todas sus raíces. Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ a menudo se llaman raíces del polinomio $f(x)$. Si el grado del polinomio es n se dice que la ecuación correspondiente es de grado n. Según los valores que tome $n = 1,2,3,4, \dots, etc$, tenemos ecuaciones de la forma:*
>
> $$a_0x + a_1 = 0$$
> $$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$
> $$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$
> *etc.*
>
> *La ecuación de grado 1 se llama lineal, la de grado 2, cuadrática, la de grado 3 cúbica y así sucesivamente. Recuerde que el coeficiente principal a_0 es distinto de cero, aun cuando ninguna condición se impone a los otros coeficientes*.

3.4 Ecuación lineal

Teniendo en cuenta la definición que Uspensky (1995) da sobre ecuaciones algebraicas, se observa que una ecuación lineal es aquella en la que el polinomio $f(x)$ es de grado 1, esto es, que se pueda expresar de la forma $a_0x + a_1 = 0$, donde $a_0 \neq 0$. En esta definición, se considera que una ecuación algebraica es una igualdad entre un polinomio y el número cero, además no consideran ecuaciones lineales en varias variables o con más de una incógnita, de esta forma, cuando trabajamos sobre el conjunto de los números reales la solución de una ecuación lineal es única.

Por otro lado, Zabala (2013) plantea que:

"Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b sean números reales y $a \neq 0$, o cualquier ecuación equivalente a una de esta forma, se llama ecuación lineal."
Nótese que tanto la definición de Zabala como la de Uspensky son equivalentes, la diferencia entre estas dos definiciones radica en que el primero define directamente una ecuación lineal y el segundo parte de los polinomios.

En Kolman & Hill (2006, pág. 1), se define como ecuación lineal a una expresión que tiene la siguiente forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \ (1)$$

que expresa b en términos de las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y las constantes conocidas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Una solución de una ecuación lineal de esta forma es una sucesión de n números $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ que tienen la propiedad de satisfacer la ecuación cuando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$ y se sustituyen en (1). En esta última definición, a diferencia de las anteriores, no hay restricción para los coeficientes, es decir que, a_1 puede ser igual a cero, lo que nos permitiría infinitas soluciones; por ejemplo, la ecuación $0x = 0$ tiene infinitas soluciones en el conjunto de los números naturales, racionales o reales, mientras que en las otras definiciones esta ecuación no está definida, puesto que se restringe a que $a_1 \neq 0$.

- **Ecuaciones equivalentes**

Cárdenas (2015) plantea que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones, y que, las ecuaciones se pueden clasificar como:

i. Ecuaciones condicionales: son aquellas que son verdaderas para algunos valores de la variable y falsas para otros.
ii. Ecuaciones contradictorias o con solución vacía: son aquellas que no tienen solución, porque al tratar de resolverlas se llega a un enunciado contradictorio o falso.
iii. Ecuaciones identidad: son aquellas que son verídicas para todos los valores de la variable en el conjunto solución. En un conjunto de cardinal finito, su solución sería un conjunto finito.

Nótese que la solución de una ecuación lineal en el conjunto de los Reales $ax + b = 0$ es (teniendo en cuenta que $a \neq 0$ y los axiomas de campo):

Afirmación	**Razón**
$ax + b = 0 \rightarrow ax + b - b = 0 - b$	Sumando el inverso aditivo de b a ambos lados de la igualdad
$ax = -b$	*G3* (inverso de la suma) y propiedad *G2* (propiedad modulativa)
$ax \cdot \frac{1}{a} = -b \cdot \frac{1}{a}$	Multiplicamos el inverso multiplicativo de a a ambos lados de la igualdad
$x = -\frac{b}{a}$	Por *G7* y *G6*

Tabla 3-2: Solución de una ecuación lineas en los Reales

Por lo cual, la ecuación lineal es una ecuación condicional, ya que sólo se cumple para un valor de la variable, es decir, tiene una única solución; sin embargo, en el presente trabajo de grado podemos observar que hay ecuaciones que no tendrán solución (ecuaciones contradictorias), ya que trabajaremos en el conjunto de los números naturales, o racionales positivos.

Para que una ecuación lineal tenga solución en el conjunto de los números naturales es necesario que:

i. b sea divisible entre a
ii. b tenga signo contrario a a

Nótese que la solución pertenece al conjunto de los racionales positivos si satisface, por lo menos, la segunda condición.

En el presente trabajo se escoge la definición de Kolman y Hill (2006, pág. 1) puesto que se trabaja con ecuaciones de una y dos variables, lo cual nos permite encontrar ecuaciones de diferentes tipos que se explicarán en la siguiente sección. Con esta definición podemos tener ecuaciones del tipo $x + y = 5$, en donde podremos tener un número infinito de soluciones si la definimos en el conjunto de los números racionales o un número finito de soluciones si la definimos en los naturales, con esta definición nos permitirá también

encontrar soluciones infinitas en la siguiente ecuación $0x = 0$ en el conjunto de los números naturales ya que no tiene restricciones en los coeficientes.

3.5 Ecuaciones y sus tipos de solución

Resolver una ecuación implica encontrar el valor (o los valores), que satisface(n) la igualdad. El que haya o no haya solución para una ecuación va a depender del conjunto numérico en donde se esté trabajando. Si hablamos de números naturales, la ecuación $x + 3 = 1$ no tendría solución, puesto que no hay un número natural que sumado con 3 dé como resultado 1, pero si x representa un número del conjunto de los enteros, tendremos que la solución a esta ecuación es $x = -2$. El conjunto solución de una ecuación $ax + b = 0$ donde x representa un número del conjunto U es la solución, es $\{p \in U: ap + b = 0\}$.

Dos ecuaciones algebraicas son equivalentes si tienen las misma(s) solución(es), por ejemplo, $3x + 1 = 22$, es equivalente a $6x + 2 = 44$ o a $x + 4 = 11$, puesto que tienen las misma solución $x = 7$; en el conjunto de los números reales podemos encontrar que la ecuación $x + a = b$, siendo x la incógnita y a, b constantes reales, se tiene que esta es equivalente a $x = b - a$, o la ecuación $ax = b$, es equivalente a $x = b \div a$, con $a \neq 0$; en sí, lo que hacemos para resolver una ecuación es transformar la ecuación dada, en ecuaciones equivalentes más sencillas hasta terminar en la forma $x = d$, donde d es la solución de la ecuación.

- **Tipos de soluciones**

Solución vacía: Decimos que una ecuación no tiene solución o la solución es vacía cuando no existe número alguno, en el conjunto numérico en donde se define la ecuación, que cumpla la igualdad; por ejemplo, en los números naturales la ecuación $x + 5 = 3$ no tiene solución, pero si tiene solución en el conjunto de los números enteros, que es $x = -2$.

Solución única: Una ecuación tiene solución única cuando existe un solo número, en el conjunto en el cual está definida, que satisface la igualdad. En el caso de una ecuación lineal, la solución es un solo número, que pertenece al conjunto donde esté definida la

ecuación; por ejemplo, $x + 2 = 5$, el único número natural que cumple es 3, no hay más números.

Solución infinita o varias soluciones: Decimos que una ecuación tiene infinitas o varias soluciones cuando (1) hay infinitos elementos que son solución en el conjunto donde esté definida la ecuación, o (2) la ecuación tiene más de una solución, pero la cantidad de soluciones es finita, respectivamente; por ejemplo, en el caso de una ecuación lineal, si tomamos la definición de Kolman y Hill (2006), explicada en la sección 3.3, donde la ecuación sea de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, y no se tengan restricciones para los a_i, podemos tener la siguiente ecuación $0x = 0$, lo cual tendría infinitas soluciones para cualquier conjunto numérico (naturales, enteros, racionales o reales) donde se defina la ecuación; o ecuaciones no escritas en la forma anterior, como $4x + 1 = 4x + 1$, donde la solución corresponde con todos los números reales, si la ecuación está definida en ese conjunto. Por otro lado, si tomamos la ecuación lineal con dos incógnitas, $x + y = 5$, en los números naturales, las soluciones son finitas, son: $x = 1$ y $y = 4$, $x = 2$ y $y = 3$, $x = 3$ y $y = 2$ o $x = 4$ y $y = 1$ (en caso de no tener en cuenta al 0 como un número natural), en total 4 soluciones, por lo que no es única; a las ecuaciones que presenten este tipo de soluciones, las llamaremos ecuaciones *varias soluciones*. Si trabajamos en el conjunto de los naturales, significará que hay más de una solución a la ecuación, es decir que no es única; esta misma ecuación en los números racionales o reales tiene infinitas soluciones.

En un conjunto U, una ecuación $ax + b = 0$ la solución es $\{p \in U: ap + b = 0\}$, por eso cuando $a = 0$, el conjunto solución es $\{p \in U: b = 0\}$, y eso implica que o bien hay infinitas soluciones si $b = 0$ o ninguna (solución vacía) si $a \neq 0$.

Los problemas que se trabajan en el presente trabajo tienen, en su mayoría, solución en los conjuntos de los números naturales y racionales, y su escogencia dependerá del contexto del problema; por ejemplo, si en el problema se habla de números pares o impares, se entenderá que se está hablando del conjunto de los números naturales, lo cual se presenta, de manera general, si el contexto es de conteo; en caso contrario se entenderá que el contexto se modela con números racionales.

4. Aspectos didácticos y metodológicos

En esta sección se realiza una descripción de la institución y la población a la cual se aplica el proyecto, para contextualizar al lector. De acuerdo a la metodología investigación-acción[2] se utilizaron diversas estrategias para resolver las dificultades que se presentaron en las clases.

4.1 Sistema de evaluación del colegio

- **Proyecto educativo institucional**

El colegio Mayor de los Andes es una institución educativa afiliada a la Asociación Andina de Colegios de Bachillerato Internacional A.A.C.B.I., y pertenece a la Organización del Bachillerato Internacional (IBO), con autorización para desarrollar el programa de Diploma. En el currículo de matemáticas del bachillerato internacional, el grado Quinto se encuentra en el Programa de Escuela Primaria (PEP) y promueve tanto la indagación como la aplicación, además, ayuda a los estudiantes a desarrollar técnicas de resolución de problemas que van más allá de la disciplina y son de utilidad fuera del aula.

- **Criterios de evaluación**

El colegio aplica el programa de bachillerato internacional, no obstante, para el PEP se realizan algunas modificaciones en su implementación. Por ejemplo, en primaria en el bachillerato internacional un sólo profesor da todas las materias, pero en el colegio se utilizan profesores especialistas para cada materia, es decir, un profesor de matemáticas,

---

[2] Según Munarriz (s.f) esta metodología de tipo cualitativo, consiste en observar la realidad social en una población determinada, para intervenir y mejorar la acción.

otro de inglés, etc. Existen algunas diferencias en los criterios de evaluación que presento a continuación:

El colegio usa 4 criterios evaluación para la asignatura de matemáticas, que los llama A, B, C y D. El criterio A, evalúa el Conocimiento y Comprensión (*knowledge and understanding)*, en este los estudiantes deben demostrar la comprensión del concepto matemático; en el caso de resolver un problema, usando una ecuación, el estudiante deberá demostrar que sabe plantear la ecuación para modelar una situación dada. El criterio B evalúa procedimientos matemáticos (*mathematical proccesses)*, en este se mide la habilidad de los estudiantes para desarrollar algoritmos matemáticos, operaciones o procedimientos; en el caso de ecuaciones se medirá si sabe resolver una ecuación que surge de un problema determinado. El criterio C evalúa Comunicación (*communication)*, que es la habilidad que tiene el estudiante para comunicar ideas matemáticas; en este trabajo se evaluará que las respuestas de los problemas correspondan y sean coherentes con la pregunta y el contexto del problema. El criterio D, reflexión (*reflection),* evalúa si el estudiante es capaz de analizar y justificar su respuesta frente a un ejercicio o un problema, debe dar cuenta de por qué un procedimiento o un problema no tiene sentido o verificar que algo esté correcto; en el trabajo se evaluará que el estudiante verifique si la solución que encontró es correcta, es decir, revisar que la respuesta cumpla las condiciones iniciales del problema.

4.2 Aprendizaje basado en problemas

En el aprendizaje basado en problemas (ABP), según Restrepo (2005), el protagonista en el aula es el estudiante y el rol del profesor es ser un facilitador, de esta manera los estudiantes son los que buscan la información, la seleccionan, organizan e intentan resolver los problemas. Esta metodología está encasillada en los modelos constructivistas (el estudiante construye su propio conocimiento con las herramientas dadas por el docente), y activistas (el rol del estudiante no es pasivo, es decir, no es quien está sentado en un puesto esperando la explicación, al contrario, está experimentando, manipulando, explorando y haciendo, y el rol del profesor es ser facilitador de experiencias que permitan el aprendizaje) de tal manera que el problema es el que dirige el aprendizaje, lo que quiere decir que se escoge un problema para solucionar con los estudiantes y a través de este se

construye el aprendizaje necesario para resolver el problema; puede ser que, para resolver el problema, se necesite reconocer algunas herramientas de Excel o requerir del uso de otra aplicación computacional, o reconocer algunas operaciones entre fracciones, multiplicar números decimales. En el presente trabajo se requiere que el estudiante modele un problema a partir del planteamiento de una ecuación. Los estudiantes deben profundizar en los temas relacionados o convenientes para resolver dicho problema. Normalmente, los problemas toman bastante tiempo en ser resueltos, por lo que, en el ABP se deben escoger problemas que logren mantener la motivación de los estudiantes y que el tiempo de resolución sea prudente para esto. Para plantear un buen problema se deben tener en cuenta tres variables: la primera es la *Relevancia*, en donde los estudiantes rápidamente identifiquen la importancia del problema y de los aportes a su aprendizaje; la segunda es la *Cobertura,* la cual busca que el problema permita aprender o utilizar conceptos de acuerdo al nivel matriculado, es decir, que si está en quinto grado deben permitirles utilizar temas y conceptos acordes al grado; la tercera es *la Complejidad*, que busca que el problema tenga diferentes formas o estrategias para llegar a la misma solución y que involucre varios conocimientos previos que debe haber adquirido el estudiante.

4.3 Resolución de problemas de Polya

Con respecto al planteamiento y resolución de problemas, que será el eje de la propuesta, Polya (1965), en su libro "*how to solve it",* plantea 4 fases que la persona requiere para resolver un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva (verificación). Para orientar cada una de las fases se requiere que el profesor proponga preguntas orientadoras, que ayuden al estudiante a avanzar en la resolución del problema y sugiere usar métodos heurísticos para avanzar en problemas desconocidos, como, por ejemplo, resolver un problema más pequeño, reformular el problema, entre otros.

En las clases se utiliza de la siguiente manera:

Comprender el problema: Se pide a los estudiantes que lean varias veces el problema, hasta entenderlo; se hagan preguntas sobre cada parte del problema, se les pide que se hagan las preguntas ¿cuáles son los datos y cómo puedo relacionarlos? ¿Cuáles son las condiciones del problema? ¿Puedo dar ejemplos? ¿Qué información debo hallar?

Concebir un plan: Se les pide a los estudiantes que modelen los problemas mediante una ecuación y se les presentan tres tipos de problemas (numéricos, geométricos y cotidianos), para que apliquen la propuesta de Polya de identificar los problemas relacionados, utilizando constantemente las preguntas: *¿Conoces algún problema relacionado con este? ¿has empleado toda la condición?*, ya que muchas veces no toman en cuenta las dos condiciones del problema, sino una sola (recuérdese que la mayoría de problemas tienen dos condiciones para su solución).

Ejecución de un plan: En esta parte los estudiantes utilizan los métodos aprendidos para resolver el problema (ensayo y error, modelo de barras y ecuaciones)

Visión retrospectiva (examinar la solución obtenida)*:* Los estudiantes deben verificar y comprobar numéricamente si la solución es correcta. Aunque el estudiante tiende a pensar que al encontrar una solución, al resolver una ecuación, ya terminó el problema, sin embargo, en la práctica se notó que los estudiantes no conectaban la solución que encontraban mediante la ecuación con el contexto del problema.

4.4 Modelo de barras

Para muchos es sabido que Singapur es pionero en la educación matemática, comprobable por sus resultados en las pruebas estandarizadas PISA (Programme for International Student Assessment), organizadas por la OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development). En la página web[3] se pueden encontrar los resultados de las pruebas, de los cuales se extrajeron los siguientes:

Referencia/Año	**2012**	**2015**	**2018**
Resultado mínimo	368	328	325
Colombia	376	390	391

[3] Los resultados fueron encontrados en:
https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf (OCDE, 2014, pág. 5)
https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf (OCDE, 2016, pág. 5)
https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-results-volume-i_5f07c754-en;jsessionid=REEGtp0u4_RvKrzl_sMR-FvL.ip-10-240-5-134 (OECD, 2019, pág. 17.18)

Promedio	494	490	489
Singapur	573	564	569
Resultado máximo	613	564	591

Tabla 4-1: Comparativo resultados prueba PISA 2012, 2015 y 2018

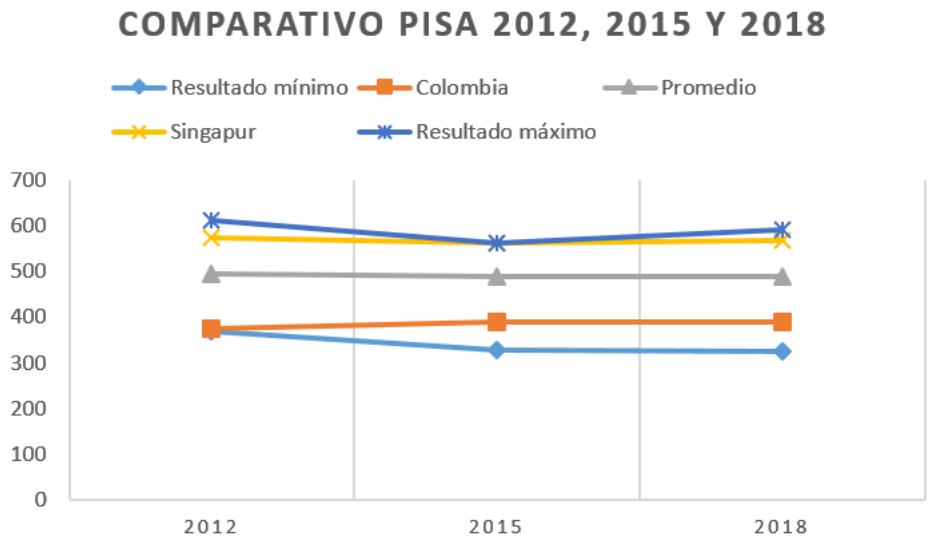


Ilustración 4-1: Comparativo resultados prueba PISA 2012, 2015 y 2018

Sin embargo, ¿qué hace posible dichos resultados? La educación matemática en Singapur se basa en varios principios, de los cuales se observarán dos: la resolución de problemas y el modelo de barras.

La resolución de problemas es el centro y fin de la enseñanza de las matemáticas, según la metodología Singapur, como lo afirma Zúñiga (2013, pág. 23), lo cual se debe conseguir a partir de ciertos conceptos, procesos, habilidades, actitudes y metacognición. Es bien sabido que, uno de los objetivos principales del presente trabajo de grado es la resolución de problemas, aunque, en este caso, será un medio para la enseñanza de ecuaciones, pero, ¿cómo es posible conseguirlo?

Es importante reconocer el modelo de barras como un medio para responder la pregunta anterior, ya que es la transición entre el método de ensayo-error y el uso de ecuaciones; para reforzar la idea anterior, recordemos lo que planteó Zúñiga (2013, pág. 36) es conveniente mencionar que en el último tiempo, en el desarrollo del currículum de Singapur, se ha estado integrando el *Método del Modelo* con el *Método Algebraico*, para

así generar un tránsito entre la primaria y la secundaria", lo que da un sustento fuerte para que se empiece a aplicar en los grados quinto y sexto de escolaridad en Colombia. Este modelo se verá planteado en la secuencia didáctica.

4.5 Diferentes contextos en problemas de matemáticas

Según el MEN (2006) en su libro de "Estandares Básicos de Competencias en matemáticas" en la página 70, existen 3 contextos en matemáticas: el primero es el *contexto inmediato* o de aula, que está relacionado con la delimitación en el salón, las normas de clase que el profesor establece; el segundo es el *contexto escolar,* que está relacionado con el PEI, el currículo, las normas de convivencia, el currículo explícito; el tercero es el *contexto extraescolar o contexto sociocultural,* conformado por todo lo que pasa fuera del colegio, en la comunidad local, en la región, en el país o fuera de él. A la hora de escogencia de un problema es necesario tomar en cuenta estos contextos, para mantener el interés de los estudiantes; el contexto no sólo se refiere a la localidad, sino a otros países o, inclusive, nuestro sistema solar y sistemas solares de otras galaxias. Se hace muy necesario que el docente modifique el contexto que presenta a los estudiantes, ya que esto hace que el estudiante enriquezca su aprendizaje.

En el documento de la prueba saber 11 (ICFES, 2019) se muestran las *situaciones o contextos* de la prueba, en este aparecen *familiares o personales*, en donde incluyen problemas relacionados con finanzas, gestión del hogar, transporte, salud y recreación; otro contexto es *laborales y ocupacionales*, en este se muestran problemas relacionados con trabajo, en donde no se requieren habilidades técnicas específicas propias de la labor; el siguiente es *comunitarios o sociales,* en donde se involucra el medio ambiente, la política y la economía; y, por último, *matemáticos o científicos,* son situaciones propias de la matemáticas o de las ciencias, en donde no se involucran situaciones de la vida cotidiana.

4.6 Uso de TIC's en la educación

Las tecnologías de la información y comunicación (TIC´s) están inundando nuestro mundo y cada vez son más necesarias en nuestra vida diaria. Podemos encontrar información de todo tipo en la web, podemos hacer transacciones bancarias y así evitarnos hacer filas, entre muchas cosas más. Por esto, las TIC´s son una herramienta muy importante en el

aula, que nos pueden ayudar a mejorar nuestras prácticas y realizar clases diferentes a las tradicionales, en donde los estudiantes estén motivados, se reten y reciban retroalimentación instantánea. Según Hernandez (2017), la transformación de las TIC´s ha ayudado a que se encuentre en ellas un instrumento educativo, capaz de mejorar la calidad en la educación, revolucionando la forma como se obtiene la información, como se maneja y la forma como se interpreta.

- **Kahoot**

Como apoyo durante las clases se utilizará la página web https://kahoot.com/, con el fin de realizar pruebas. Se utiliza para realizar preguntas de selección múltiple con única respuesta, se presentan cuatro opciones donde cada estudiante escoge una de las opciones. Los estudiantes se conectan a la prueba simultáneamente, mediante IPads (porque es la dotación del colegio, sin embargo, también funciona desde muchos otros dispositivos electrónicos y sistemas operativos), y las preguntas se proyectan mediante un video beam, disponible en el aula de clase, en el caso de la pandemia cada estudiante entraba desde su computador. La página muestra, mediante una gráfica, la cantidad de estudiantes que escogieron cada una de las opciones y la opción correcta, además asigna un puntaje por respuesta correcta, se da un máximo puntaje de 1000 pero disminuye hasta 1, según el tiempo y orden de respuesta; también se observan los primeros 5 puestos. Cada estudiante, en su IPad, puede ver su puntaje, su puesto y si la respuesta fue correcta o no. Para crear un quiz el profesor debe suscribirse a la página, tiene una *interface* muy amigable con el usuario; luego de hacer un quiz, se guarda el archivo en la cuenta que el usuario abrió. Para aplicar el quiz a los estudiantes, se elige el quiz y se hace clic sobre la opción *play*, el programa genera un código. Para jugarlo, los estudiantes ingresan a la página https://kahoot.it/ y digitan el código, y eso es todo.

Utilizando este recurso se crearon dos quices para trabajar con los estudiantes. El primero relacionado con ecuaciones lineales (se puede visualizar y responder en el siguiente link: https://play.kahoot.it/#/k/f153a6aa-6c23-48c2-8f96-60e8cbae5570), en el cual, la intención es reforzar, mediante el juego, los temas vistos en clase. Las preguntas 1 y 2 se realizan para afianzar que la letra con un número al lado izquierdo significa multiplicación; en las preguntas 3, 4, 5 y 6 se fortalece la idea de la letra como representación de un número específico (evaluar expresiones por valores numéricos); las preguntas 8 y 9 refuerzan

cómo se opera o se simplifica una expresión cuando hay términos semejantes[4]; de la pregunta 10 a la 15, se trabaja la idea de ecuación, y se incentiva a utilizar el método de ensayo y error para resolverlas. El segundo quiz está relacionado con la modelación de problemas (se puede visualizar y jugar en este link: https://create.kahoot.it/share/8f88cf4c-2993-4e7d-8fd7-728fdc07efe8). Hay 13 preguntas en diferentes contextos donde los estudiantes interpretan y escogen la ecuación que modela la situación dada.

- **Google Forms**

Google Forms es una herramienta del paquete de Google, que está enlazada con el entorno de Google y permite crear Formularios o Evaluaciones en línea. Google Forms permite asignar un puntaje a cada punto de la prueba, pero el docente puede revisarlo y asignar el puntaje de acuerdo a los criterios que establezca.

Google Forms fue utilizado, en el presente trabajo de grado, para el pretest y para el postest, con el fin de establecer un comparativo entre ambos; además, también se utilizó en un quiz de resolución de problemas, en donde se busca que los estudiantes modelen diferentes problemas por medio de ecuaciones.

- **Quizizz**

Quizizz es una herramienta online diseñada para crear evaluaciones o quices, permite al docente crear preguntas de selección múltiple o realizar preguntas abiertas donde los estudiantes pueden escribir la respuesta a un problema dado; lo especial de esta página web es que los estudiantes compiten entre ellos, en donde pueden ver en qué puesto va cada uno y las preguntas que van acertando o fallando. Para entrar, el profesor crea su cuenta en https://quizizz.com/ y crea su evaluación, los estudiantes entran a https://quizizz.com/join, donde deben ingresar un código generado por el profesor al entrar al quiz creado; también el profesor puede crear evaluaciones de práctica, como por ejemplo la que está alojada en el siguiente link:

[4] En la explicación no se va a hablar de términos semejantes, sino de analogías con objetos, en donde se intuya que letras distintas no se pueden simplificar.

https://quizizz.com/join/quiz/5e9e5f6e66b3b1001b093057/start?from=soloLinkShare&referrer=5e8df59c0d2b8a001be84fc8, donde se encuentra una evaluación de números consecutivos, a la que cualquier persona puede entrar y practicar teniendo el link.

4.7 Investigación/Acción

La investigación acción, según Bausela (2004), es entender la enseñanza como un proceso de investigación, en donde el docente hace mejoras progresivas a partir de las reflexiones que realiza constantemente, examina e interpreta lo que ocurre en la interacción de los que participan en el problema, por ejemplo, profesor-estudiantes, o interacción y aprendizaje entre estudiantes. La investigación acción es un proceso cíclico de exploración, actuación y valoración de los resultados, en otras palabras, la intervención del docente es constante, donde toma acción de acuerdo a los resultados que vaya observando de acuerdo a su plan.

Las características de la investigación-acción en la educación, según Kemmis y McTaggart (1988), se basan en la construcción desde la práctica y para la práctica, se procura entender esa práctica para mejorarla y transformarla; demanda la participación de todos los sujetos y de mejorar sus propias prácticas.

5. Propuesta didáctica

En este capítulo se presenta la prueba diagnóstica, la secuencia de actividades y su respectivo análisis de resultados. Las sesiones de clase se realizaron por medio de Google Meet y las explicaciones del profesor se establecieron por medio de Word, utilizando la opción dibujar y con un lápiz óptico. Cada sesión de clase duró 45 minutos.

Respecto a la aplicación del método de resolución de problemas de Polya (1965), se aplicó en cada una de las actividades de la siguiente manera:

Comprender el problema: Se aplicó el método de la Mayéutica, el cual consiste en realizar preguntas que conlleven al entendimiento del problema, por ejemplo, en el siguiente problema: "*Las edades de Juan y Pedro suman 45 y Pedro es 3 años mayor que Juan*" se pregunta, ¿cuántas personas hay en el problema? ¿Cuánto suman las edades? ¿Quién es mayor?

A continuación, se muestra un dialogó entre el profesor y un estudiante para comprender el problema:

Profesor: Deme un ejemplo de las edades de Pedro y Juan.

Estudiante: Pedro 20 y Juan 17.

Profesor: pero la suma de las edades no da 45.

Estudiante: Pedro 20, Juan 25.

Profesor: pero Pedro es 3 años mayor que Juan.

Estudiante: Ah, ósea que debo buscar números que cumplan las dos condiciones.

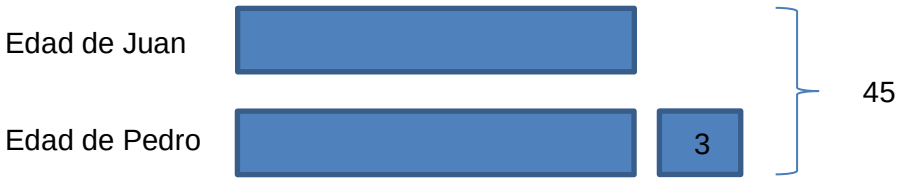
Las preguntas y los diálogos varían dependiendo del problema, y no se puede establecer la misma secuencia de preguntas, en el caso de un problema relacionado con encontrar

tres números consecutivos se realizarán otras preguntas como, si tengo un número cualquiera ¿cómo hago para saber su consecutivo? ¿Qué operación debo hacer? O, en el caso de un problema que esté relacionado con ahorrar cierta cantidad de dinero para alcanzar una meta de ahorro, se preguntaría, si ahorro 5,000 pesos diarios, ¿cuánto tendré en los dos días? ¿Cuánto tendré en 3 días? ¿En 20 días? ¿En x días?

Otra estrategia para comprender el problema es hacer una tabla, como por ejemplo la siguiente:

Juan	**Pedro**	**¿Cumple las condiciones?**
5	40	No, Pedro no es mayor 3 años
21	24	No, la suma no da 45
20	25	No, la suma es 45 pero Pedro no es mayor 3 años.

O hacer un dibujo o una representación como la del modelo de barras:



O modelar el problema con una ecuación:

$$x: Edad\ de\ Juan$$

$$x + 3: Edad\ de\ Pedro$$

$$x + x + 3 = 45\ suma\ de\ las\ edades\ de\ Juan\ y\ Pedro$$

Concebir un plan:

El plan en este trabajo está relacionado con realizar "*un modelo de barras",* de tal manera que el estudiante interprete el problema; o resolver el problema por "*ensayo y error*", haciendo uso de la tabla; o "*plantear una ecuación"* .

Ejecución de un plan:

La ejecución del plan se basa en la realización de diferentes análisis, dependiendo el método escogido, ya sea por modelo de barras, ensayo y error o la resolución de la ecuación planteada.

Visión retrospectiva:

Conlleva la revisión del método escogido, de tal manera que realmente lleve a la solución del problema; por ejemplo, en el problema de las edades de Juan y Pedro, las soluciones son 21 y 24, en este caso se debe verificar que la suma de 45 y que Pedro sea 3 años mayor que Juan.

Cada problema es distinto, pero siempre se aplica con los estudiantes los pasos de resolución de problemas de Polya.

5.1 Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica se aplicó a 64 estudiantes de grado quinto, de 3 cursos: 5A, 5B, 5C que se conectaron en Google Meet, encendieron sus cámaras y por medio de la herramienta de Google Forms se realizó la prueba que duró 45 minutos.

La prueba se aplicó haciendo uso de diferentes contextos, según la propuesta del ICFES, que se explicaron en la sección 4.4 (Diferentes contextos en matemáticas). Las preguntas 1, 4 y 5 corresponden a un contexto matemático; las preguntas 2, 4 y 5 a un contexto personal; las 3 y 6 a un contexto laboral; y la 7 a un contexto comunitario o social. Se realizaron 7 preguntas, en donde, en cada pregunta, hay una situación problema en la que se le pide a los estudiantes escribir la solución del problema, sin ningún tipo de opciones para medir la capacidad de resolverlo; escoger el tipo de solución, para medir si identifican solo una, ninguna o muchas soluciones a un problema; y, por último, se mide la capacidad de asociar e interpretar una situación y modelarla con una ecuación.

A continuación, se presenta la prueba diagnóstica.

Objetivo: Identificar en los estudiantes las habilidades para resolver problemas en diferentes contextos; identificar el tipo de solución y modelar un problema por medio de una ecuación.

For each problem m, n and r are natural numbers

1) Find two consecutive even numbers whose sum is 19

Write down the solution for the problem: _____

1.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (more than two pairs of numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

1.2) The equation that models the problem is:

A) $n + n + 1 = 19$
B) $m + n = 19$
C) $2n + 2n + 1 = 19$
D) $2n + 2n + 2 = 19$

2) Carlos is saving daily $5,000 to buy a tablet that cost $800,000 pesos. How many days will Carlos take to collect the money?

Write down the solution for the problem: _____

2.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

2.2) The equation that models the problem is:

A) $5{,}000 + n = 800{,}000$
B) $5{,}000n = 800{,}000$
C) $5{,}000n + n = 800{,}000$
D) $n = 800{,}000$

3) Marcela, Julieth, Maria and Michael gather apples on a tree. Every day, Marcela picks 3, Julieth 5, Mary 2 and Michael 6. If Marcela and Julieth put togeher their daily apples and Maria and Michael do the same. What day or days will they have the same amount? Day 1? Day2? Or what day or days?

Write down the solution for the problem: _____

3.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

3.2) The equation that models the problem is:

A) $3n + 5n = 2n + 6n$
B) $3m + 5n = 2m + 6n$
C) $3m + 5m = 2n + 6n$
D) $8m = 8n$

4) Pablo has a triangular land and measures its angles. He realizes that the second angle is as triple as the first, and the third is as five times as the first angle. As it is shown in the picture. What is the value of the first angle? (Remember that the sum of the inner angles on a triangle is equal to 180)

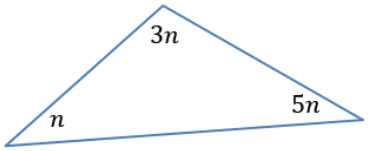


Ilustración 5-1: Prueba Diagnóstica - Ejercicio 4

Write down the solution for the problem: _____

4.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

4.2) The equation that models the problem is:

A) $n + 3n + 5n = 180$
B) $m + n + r = 180$
C) $3n = 180$
D) $n = 3n + 5n$

5) Cristian is making trapezoidal figures with marbles. He makes rows, each row has one marble more than the previous one. On the picture below, it is shown some examples of trapezoids made by him. Cristian has 123 marbles to make a trapezoid of 3 rows. How many marbles will he put in each row?

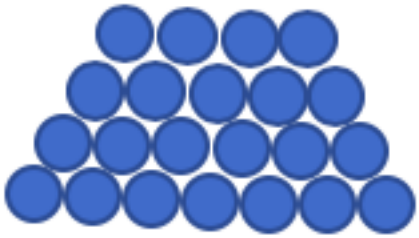
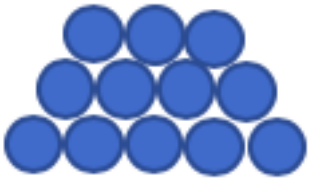
		
Example 1	Example 2	Example 3

Tabla 5-1: Prueba diagnóstica – Ejercicio 5

Write down the solution for the problem: _____

5.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (there are many three numbers that are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

5.2) The equation that models the problem is:

A) $3n = 123$
B) $m + n + r = 123$
C) $n + n + 1 + n + 2 = 123$
D) $1n + 2n + 3n = 123$

6) A cellphone seller must sell 2’000,000 (Colombian pesos) daily to complete the goal of the day. He has sold 320,000. The only cellphone he has in the store cost 280,000. How many units of this cellphone does he have to sell to complete the goal?

Write down the solution for the problem: _____

6.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (one number is the solution)

6.2) The equation that models the problem if n is the number of units is:

A) $320{,}000n + 280{,}000 = 2'000{,}000$

B) $280{,}000n + 320{,}000 = 2'000{,}000$

C) $280{,}000n + 320000n = 2'000{,}000$

D) $280{,}000n = 2'000{,}000$

7) In 2020, the numbers of Venezuelan immigrants will be twice as the before year. If the estimated amount in 2020 is 2'800,000. How many Venezuelans were in 2019?

Write down the solution for the problem: _____

7.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)

B) Empty (no solution)

C) Unique (one number is the solution)

7.2) The equation that models the problem if n is the number of Venezuelans in 2019 is:

A) $2 + n = 2'800{,}000$

B) $\frac{n}{2} = 2'800{,}000$

C) $2n = 2'800{,}000$

D) $2 \div n = 2'800{,}000$

- **Análisis de resultados**

Los resultados de los estudiantes fueron registrados en las siguientes tablas:

Preguntas	1.1.	1.2	2	2.1	2.2	3.1	3.2	4	4.1	4.2	5	5.1	5.2	6	6.1	6.2	7	7.1	7.2
Correctas	20	11	26	37	24	18	27	10	38	40	6	37	10	7	38	25	16	41	18
incorrectas	44	53	38	27	40	46	37	54	26	24	58	27	54	57	26	39	48	23	46
Correctas (%)	31	17	41	58	38	28	42	16	59	63	9	58	16	11	59	39	25	64	28

Tabla 5-2: Prueba diagnóstica - Resultados

Porcentaje de respuestas correctas		
Problemas (Amarillo: 2, 4, 5, 6 y 7)		20%
Tipos de solución (Azul: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.**1)**		51%
Modelación (Verde: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7.2)		35%

Las columnas que están en amarillo miden la habilidad de los estudiantes para resolver un problema, en total se evaluaron, en el formulario, 5 problemas, donde los estudiantes escribían la respuesta. La pregunta 1 y la pregunta 3 no se pidieron en el formulario de Google, ya que la respuesta se encontraba en las opciones 1.1 y 3.1, respectivamente. Los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades en interpretar y dar solución a un problema, ya que solo el 20% de los estudiantes lograron dar respuestas correctas a los problemas de este tipo.

En la columna azul se mide la capacidad que tienen los estudiantes para identificar el tipo de solución de un problema dado; se evidencia que el 51% de los estudiantes identifican el tipo de solución a un problema dado, lo cual es bueno, siendo la primera vez que responden este tipo de preguntas.

La columna verde muestra los resultados referentes a la modelación de un problema con una ecuación. En las tablas podemos ver que el 35% de los estudiantes resolvieron de manera correcta las preguntas acerca de modelación, lo cual muestra la dificultad que presentan los estudiantes para realizar la modelación, a partir de una ecuación, de un problema.

En la última fila de la tabla muestra el porcentaje de respuestas correctas en cada pregunta.

5.2 Actividad 1 – ¿Letras en Matemáticas?

Para el desarrollo de esta actividad se utilizaron dos sesiones, en la primera se trabajaron los puntos 1, 2 y 3 de la actividad y en 20 minutos de la siguiente sesión se terminó la sopa de letras; en el resto de la sesión se reforzó el tema, en la página web que utiliza el colegio en https://www.ixl.com/

A continuación, se presenta la actividad.

Usualmente lo que has trabajado en matemáticas tiene solamente números, sin embargo, ¿será que tiene importancia utilizar letras en matemáticas?

Ilustración 5-2: Actividad 1 - Pregunta. Extraída el 17 de noviembre de 2019 de http://www.ucarecdn.com/43bec3b7-b177-442c-b772-0ca44291db98/-/preview/

Para responder esta pregunta, pensaremos en la siguiente, ¿conoces la edad del profesor Daniel?

En caso de que la conozcas dirás: la edad del profesor Daniel es la siguiente…

Sin embargo, en caso de no conocerla, podrías decir: la edad del profesor Daniel es x; nótese que la x hace referencia a un valor que no conocemos, pero que podemos averiguar.

Las letras en matemáticas hacen referencia a un valor que desconocemos, una **incógnita**. Observemos la siguiente situación:

Felipe ahorra $3000 el día lunes, $2500 el día martes y $2800 el día miércoles, si su mamá deposita cierta cantidad de dinero en su alcancía y en total tiene $10000, ¿cuánta plata le dio su mamá?

Como no conocemos la cantidad de dinero que le depositó su mamá, decimos que dicha cantidad es una incógnita y le asignamos una letra (generalmente se asigna la letra x, pero podría ser otra letra). El dinero que le depositó su mamá fue x; para responder la pregunta, se debe averiguar el valor numérico de la incógnita x.

Del lenguaje verbal al lenguaje algebraico

La importancia del uso de letras no se limita a la asignación de incógnitas ligadas a un problema de un contexto definido, también nos sirve para hacer una transformación del lenguaje usual a un lenguaje exclusivamente matemático (con números e incógnitas). Por ejemplo, la suma de las edades de Juan y María da 21 años, como no conocemos la edad de Juan ni la de María les asignamos una letra a cada una de las edades, teniendo en cuenta que no debe ser la misma letra porque no conocemos si las edades son o no iguales, por lo cual, el enunciado se puede denotar como $x + y = 21$, donde x representa la edad de Juan y y representa la edad de María.

Ejemplos:

- Twice a number → $2 \cdot x$
- A number is decreased by 7 → $y - 7$
- The half of the sum of two numbers → $\frac{a+b}{2}$

Activity 1:

1. Write an algebraic expression for the following sentences:
   a) A number increased by 10
   b) The difference between 14 and other number.
   c) Six times a number.
   d) The fifth part of the difference between two numbers
   e) Three times the sum of two numbers.

2. Write sentences with the following expressions:
   a) $21 + h$
   b) $d - 13$
   c) $4x + 3$
   d) $\frac{t-9}{10}$
   e) $7 \cdot (12 - c)$

3. Match the expressions with the corresponding words as in the examples.
Use the words in the second column to do the soup of letters.

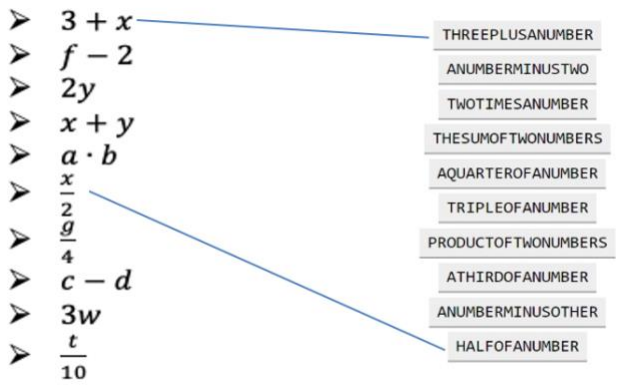


Ilustración 5-3: Actividad 1 – Ejercicio 3

4. Find the words from the second column above to do the soup of letters.

- $3 + x$
- $f - 2$
- $2y$
- $x + y$
- $a \cdot b$
- $\frac{x}{2}$
- $\frac{g}{4}$
- $c - d$
- $3w$
- $\frac{t}{10}$

N	T	H	E	S	U	M	O	F	T	W	O	N	U	M	B	E	R	S
E	R	A	F	B	A	P	R	U	A	G	L	R	S	A	A	U	R	I
U	R	A	O	M	O	A	E	O	C	W	B	E	E	N	R	E	S	T
U	E	R	E	T	O	N	V	T	E	E	U	B	R	U	B	S	B	O
S	B	N	E	R	E	L	C	N	D	I	R	M	N	M	N	A	R	W
D	M	S	I	B	U	S	R	A	M	I	E	U	U	B	R	E	E	T
A	U	B	A	R	M	A	R	M	L	N	B	N	Q	E	P	W	B	S
C	N	D	H	P	U	U	R	U	A	O	O	A	O	R	P	U	M	U
P	A	M	N	E	T	M	N	E	I	W	T	F	E	M	E	U	U	N
O	S	S	M	O	Q	E	C	A	T	A	L	O	S	I	S	E	N	I
E	E	Q	D	U	L	T	M	F	F	E	E	R	E	N	U	R	A	M
N	M	N	H	E	H	W	O	I	H	O	I	E	A	U	I	E	F	R
E	I	N	I	R	D	T	T	S	N	U	D	T	D	S	B	I	O	E
E	T	O	R	N	C	N	E	M	D	E	T	R	B	O	H	S	E	B
C	O	C	M	U	D	E	A	L	D	N	E	A	I	T	I	F	L	M
L	W	Y	D	S	E	L	I	C	F	M	L	U	E	H	R	I	P	U
M	T	O	R	D	E	E	N	I	E	S	O	Q	O	E	T	I	I	N
B	R	E	B	M	U	N	A	F	O	F	L	A	H	R	A	A	R	A
P	R	E	B	M	U	N	A	S	U	L	P	E	E	R	H	T	T	T

Tabla 5-3: Actividad 1 – Ejercicio 4

Los estudiantes continuaron trabajando este tipo de ejercicios en la siguiente página web https://www.ixl.com/math/grade-5/write-variable-expressions que se utiliza en el colegio para seguir reforzando esta habilidad.

- **Análisis de resultados**

A los estudiantes les gusta mucho este tipo de actividades, como la sopa de letras, ya que son distintas y no usuales en matemáticas, lo que los motiva a trabajar. Se evidenció, en esta actividad, dificultad al comienzo, para pasar de un lenguaje al otro, pero con una pequeña práctica al inicio de las sesiones de clase mejoraron; también se utilizó la página web ixl.com, en donde los estudiantes siguieron fortaleciendo el cambio entre sistemas de representación.

Dificultades más relevantes

- Los estudiantes no reconocen palabras claves para realizar el paso del lenguaje natural al algebraico, por ejemplo, no reconocen, en esta frase: *"what is the difference*?" o "*¿cuál es la diferencia?"* No identifican que esta frase siempre sugiere una resta.

- Otra dificultad que presentan para realizar la traducción al lenguaje algebraico es el vocabulario de los estudiantes en el idioma inglés, por ejemplo, palabras como fewer, bigger, more than, less than, increased, decreased o del propio lenguaje en matemáticas como product, quotient, fifth part, half, times.

- En la expresión "*n fewer than 200"* que traduce *"n menos que 200"* los estudiantes tienden a escribirlo de esta forma $n - 200$, pero la forma correcta es $200 - n$.

5.3 Actividad 2 – Evaluando y sumando expresiones algebraicas

Para la aplicación de la presente actividad se utilizaron 2 sesiones de clase, en donde, en la primera sesión se trabajó el *significado de las letras* y *significado de la multiplicación con letras* y se realizó el punto 1 y 2 de la actividad; en la segunda sesión se trabajó el

significado de la suma o resta de letras (simplificación de expresiones algebraicas) y se realizó el punto 3, y en los últimos 20 minutos de la clase se trabajó un quiz en Kahoot.

Significado de las letras

La primera idea que se da a los estudiantes es que las letras representan números, para mostrar esto se da el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. $a = 5; \quad a + 8 = 13.$
Los estudiantes pueden pensar que el valor de a siempre es 5. Para evitar esto se presentan ejemplos en donde la misma letra tiene un valor diferente.

Ejemplo 2. $a = 13; \quad a - 4 = 9.$
En este segundo ejemplo se aclara que el valor de la letra a es igual a 13, con lo cual a va a tomar un valor distinto al del ejemplo anterior.
Según la experiencia, los estudiantes tienden a realizar preguntas como: *¿Cada letra tiene un valor especifico?* y *¿tenemos que memorizar el valor de cada letra?*, también se tiende a pensar que el valor de la letra a es 1, que el de la b es 2 y así sucesivamente, lo cual se aclara mediante ejemplos, utilizando otras letras y diferentes valores para cada una de ellas.

Ejemplo 3. $x = 8; \; y = 6; \; x + y = 14.$
En este ejemplo se muestra que las letras se pueden sumar para dar un resultado numérico, dependiendo el valor de cada letra; también, se muestra que se puede utilizar cualquier número para cada letra.

Significado de la multiplicación con letras

Se explica a los estudiantes que a partir de ese momento se va a utilizar el símbolo "·" para indicar multiplicación, en lugar de "×", puesto que la x es la letra más utilizada en matemáticas y se puede confundir con el símbolo de multiplicación. De esta manera se explica, por ejemplo, que $5 \cdot x = 5x$, y que usualmente se colocan los números

(coeficientes) en la parte izquierda y las letras a la derecha, a continuación, se dan ejemplos:

Ejemplo 4. Si $x = 4$, entonces $8x = 32$**,** este tipo de enunciado se presenta con el objetivo de que los estudiantes empiecen a ver la multiplicación con las letras y que no hay necesidad del uso del punto para saber que se plantea el producto entre una constante y una letra.

Ejemplo 5. Si $x = 4$ y $y = 3$, entonces $xy = 12$. Este ejemplo se realiza para mostrar que el significado de xy es la multiplicación entre dos cantidades.
En este punto, algunos estudiantes se pueden preguntar: *¿el valor de las letras siempre está dado*? o *¿en algún momento se debe hallar su valor?*, para aclarar esa pregunta se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. $x + 7 =$15, en este caso se debe hallar el valor de la letra $x = 8$, se enseña también cómo se escribe la solución a esta ecuación. Este tipo de ejemplo se muestra puesto que, según la experiencia, los estudiantes se preguntan si el valor numérico de la letra siempre está dado o si en algún momento se debe hallar.

Enseñanza de suma entre letras o simplificación de expresiones algebraicas

Se realiza la pregunta de cuánto da $x + x$, dejando que los estudiantes piensen un momento y se escucha las posibles respuestas a esta pregunta. Para que los estudiantes por sí mismos lleguen a la respuesta se muestran los siguientes ejemplos en el tablero:

$$1 + 1 = 2 \cdot 1$$
$$2 + 2 = 2 \cdot 2$$
$$5 + 5 = 2 \cdot 5$$
$$11 + 11 = 2 \cdot 11$$
$$x + x = 2 \cdot x = 2x$$

Se hace énfasis en convertir una suma reiterada en una multiplicación y de esta manera se concluye que $x + x$ es dos veces x o igual a $2x$, después de esto se presentan ejemplos como:

$$x + x + x = 3x$$

$$5x + 2x + x = 8x$$
$$8x - 6x = 2x$$

Para la enseñanza se utilizó la diapositiva de PowerPoint, que se encuentra en este link:

https://www.dropbox.com/s/ag552larjz06gzn/Evaluating%20expressions.pptx?dl=0

Los estudiantes deberán resolver los siguientes ejercicios:

Activity

1) Evaluate the following expressions if $x = 3,\ y = 2,\ \ z = 12$
   a) $x + y + z =$
   b) $11x + y - z =$
   c) $z - y =$
   d) $3x + 4y + 5z =$
   e) $11z - 2x - 3y =$
   f) $8x - 3y =$
   g) $14 + 3x - z =$
   h) $15y - 3x + 2z =$

2) Find the value of x
   a) $x + 8 = 10.$ $\quad x = ?$
   b) $2x = 30$ $\quad x = ?$
   c) $x - 1 = 20$ $\quad x = ?$
   d) $4x = 40.$ $\quad x = ?$
   e) $x + x = 50.$ $\quad x = ?$

3) Simplify the following expressions

   a) $2x + 3x =$
   b) $5x - 2x + 9x - x =$
   c) $11x + 6x + 45x =$
   d) $15x + 2x + 2y + 3y =$

e) $x + x + x =$

f) $2x + 4 + 5x + 6 - x =$

g) $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 =$

h) $3x + 4x + 4 + 5 + 6y + 9y =$

Los estudiantes realizaron un quiz de práctica en la página web de Kahoot, que se puede visualizar y aplicar en: https://create.kahoot.it/share/introduction-to-letters/db9e1f1c-b5e8-450c-b20b-94bf99dedc9b. Para realizarlo, cualquier profesor le da click en este link, luego escoge la opción "*play as guest"* (jugar como invitado), luego *classic,* lo cual le generará una clave para que los estudiantes puedan iniciar desde otros dispositivos, esta clave la debe ingresar en https://kahoot.it/, y por último el profesor le da "start" (empezar).

• Análisis de Resultados

Los estudiantes, en general, tienen la noción de que la letra representa un número, que ese número puede ser desconocido (una incógnita) o se tiene que hallar (en una ecuación), o que ese número puede ser dado en el caso en el que se les pida evaluar una expresión y que ese número cambia de acuerdo al contexto del problema, es decir, $a = 3$ en esta ecuación $a + 1 = 4$, pero en esta otra $5a = 10$, el valor de a ya no es 3, sino 2 ($a = 2$).

Dificultades más relevantes

- Los estudiantes, en expresiones como $15x + 2x + 2y + 3y =$ tienden a sumar todos los coeficientes indistintamente, es decir, sin tomar en cuenta términos semejantes, para esta pregunta era común respuestas cómo $22x$ o $22xy$.

- Se debe recordar constantemente a los estudiantes que una letra junto a un número significa multiplicación, lo cual toma algunas sesiones más, al comienzo de las clases, para afianzar.

- Se les dificulta distinguir que el coeficiente de una letra es 1, ejemplo, para simplificar o sumar las expresiones $x + 4x$ pueden dar este tipo de respuestas $4x$, pensando que el coeficiente de x es cero.

5.4 Actividad 3 – Solución de ecuaciones por ensayo y error

Esta actividad se tomó una sesión completa y 20 minutos de la siguiente sesión. Se empezó la actividad con el siguiente acertijo, en donde se pidió hallar el valor numérico de cada animal para que la ecuación sea correcta.

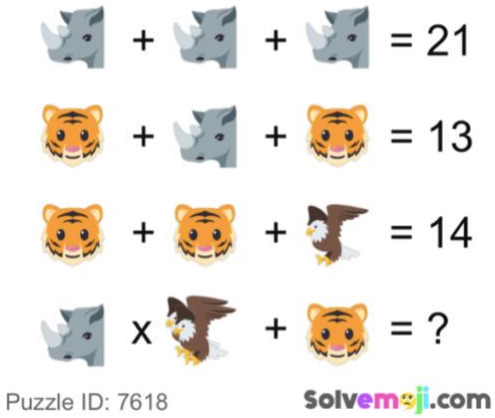


Ilustración 5-4: Actividad 3 – Acertijo. Extraída el 16 de febrero de 2020 de https://www.solvemoji.com/Puzzle/Puzzle/7618

La clase empezó con el siguiente problema: "*Halle un número que multiplicado por 8 y sumado con 6, el resultado sea 62"*. La instrucción en inglés es: *"Multiply a number by 8 and then add 6. The answer is 62. What is the number?".*

Para ayudar a interpretar este problema, se pide al estudiante que halle el número por ensayo y error, después se analiza frase por frase la interpretación o modelación en términos de ecuaciones:

x: *Unknown number*

$8x$: *Multiply a number by 8*

$8x + 6$: *add 6*.

$8x + 6 = 62$. *The answer is 62*

$x = 7$: The solution must be written as $x = 7$, and not just 7.

A continuación, se dan los siguientes ejemplos de ecuaciones:

$$9x + 8 = 80$$

Se muestra esta ecuación con el objetivo de que los estudiantes inmediatamente interpreten que se debe buscar un número multiplicado por 9 y que sumado con 8 dé como respuesta 80 y que la solución se escribe $x = 8$.

Se muestran los siguientes ejemplos para reforzar lo aprendido:

$8x - 4 = 52;\ 9x = 99.$

Los estudiantes resuelven por ensayo y error las siguientes ecuaciones:

1) Find the value of x in the following equations.
   a) $6x + 12 = 84$
   b) $13x + 12 = 77$
   c) $18x = 270$
   d) $9x + 12 = 129$
   e) $14\mathrm{x} = 196$
   f) $7x - 9 = 89$

2) Solve the following labyrinth by solving the equations inside each box.

   Instructions
   First, you have to solve the equation.

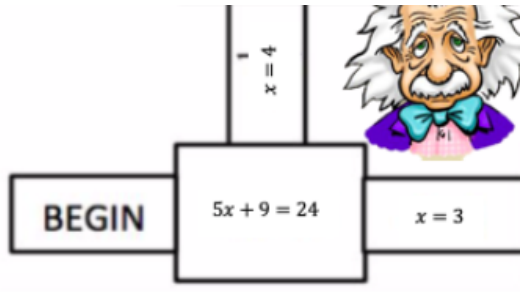


Ilustración 5-5: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto parte 1

And according to your answer. You follow the path

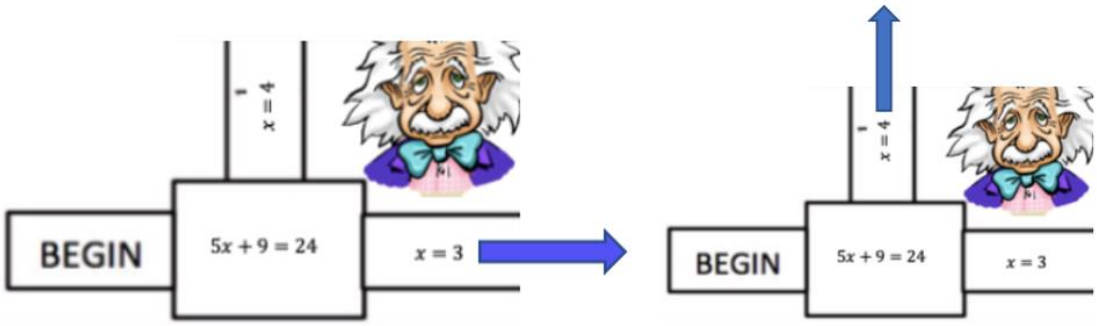


Ilustración 5-6: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto parte 2

Until you get to the end box.

Labyrinth

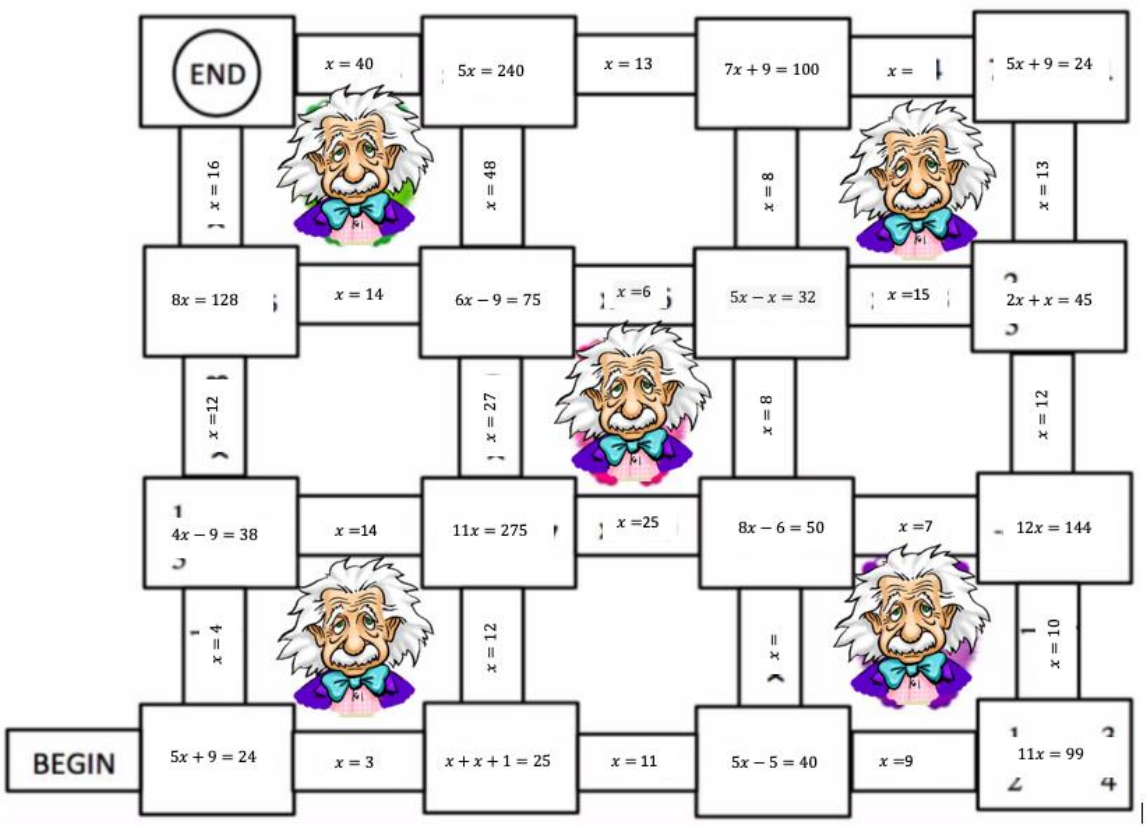


Ilustración 5-7: Actividad 3 – Punto 2, Laberinto

- ## Análisis de resultados.

Esta actividad ayudó a los estudiantes en el afianzamiento del significado de las letras, y dio las primeras ideas de cómo resolver una ecuación, que consiste en hallar el valor de la letra x o la incógnita, entendiendo que cuando hay una letra y un número indica que se debe hacer una multiplicación.

En esta actividad el 90% de los estudiantes tuvieron un buen resultado, sin ninguna dificultad; algunos laberintos hecho por los estudiantes se pueden ver en los anexos.

La idea de esta actividad es que, por ejemplo, los estudiantes, al ver esta ecuación $6x + 4 = 22$ inmediatamente piensen que deben encontrar un número que multiplicado por 6 y sumado con 4 dé como resultado 22.

Dificultades más relevantes

- Algunos estudiantes tuvieron confusiones al realizar las operaciones, como multiplicación, suma o resta, que los hizo cometer errores en la búsqueda del valor de la incógnita.

5.5 Actividad 4 – Solución de problemas por ensayo y error

Duración: 1 sesión

Se presenta el siguiente problema a los estudiantes:

A carpenter cut a piece of wood in a triangular way and when he measures its angles he realizes that the second angle is as twice as the first and the third is as triple as the first angle as the picture shows. How much is the first angle?

Note: Remember that the sum of the inner angles is equal to 180.

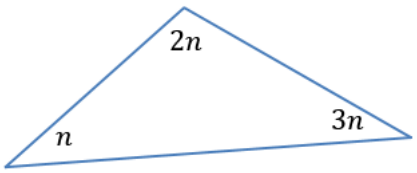


Ilustración 5-8: Actividad 4 - Problema introductorio

Solución por ensayo y error.

Creamos una tabla y empezamos a dar valores que cumplan con una de las condiciones del problema, por ejemplo, escribimos tres números que sumen 180, que son: $50, 50, 80$, pero nos percatamos que el segundo no es el doble que el primer ángulo, ensayamos ahora, suponiendo que el primer ángulo es 20º, el doble es 40º, y si la suma es 180, el último ángulo debe ser 120º, pero nos damos cuenta que el tercer ángulo no es el triple del primero, y así sucesivamente; hasta que encontramos el valor correcto que es 30º, 60º

y 90º, que corresponden al primer, segundo y tercer ángulo, y concluimos que el primer ángulo mide 30º como se muestra en la tabla.

Primero	**Segundo (Doble)**	**Tercer ángulo (triple)**	**Suma**	**¿Son los números?**
50	50	80	180	No, el segundo no es el doble
20	40	120	180	No, el tercero no es el triple
10	20	30	60	No, la suma no es 180
15	30	45	90	No, la suma no es 180
35	70	105	210	No, la suma no es 180
30	60	90	180	Sí, ya que la suma da 180, el segundo es el doble del primero y el tercero es el triple del primero

Tabla 5-4: Actividad 4 - Problema introductorio

Activity

Solve the following problems by trial and error and using the table.

1) The sum of the number of Markers of Ruben and Daniel is equal to 84. If Ruben has as triple of markers as Daniel. How many Markers does each one have?

Daniel' markers	Ruben's Markers	Sum	Are they the numbers?

Tabla 5-5: Actividad 4 - Punto 1

2) Mauricio is saving daily 2,000 pesos to buy a bike that cost 80,000. His grandmother gives him 38000 pesos. How long will it take to buy the bike?

Days	Granmother + money saved	Money collected	Are they the numbers?
1	38000+2000	40000	

Tabla 5-6: Actividad 4 - Punto 2

- ## Análisis de resultados

La tabla ayuda a los estudiantes a organizar mejor la información, a entender mejor el problema y usar el método de ensayo y error, por la mayoría de estudiantes. La principal dificultad es comprender el problema, una parte por el idioma y otra parte porque en sí la comprensión se dificulta en cualquier idioma, para esto se utilizan los consejos de Polya (1965), de leer el problema varias veces, revisar cuáles son los datos, revisar las condiciones del problema, para pasar a las otras fases de la solución de problemas.

Dificultades más relevantes

- A los estudiantes se les dificulta reconocer las dos condiciones que presenta el primer problema, que son: que la suma sea 84 y que el uno de los números debe ser el triple del otro.
- Sienten dudas al colocar el primer número, piensan que debe ser uno en específico y no uno que ellos están suponiendo, es decir, consideran que deben encontrar la respuesta correcta en su primer ensayo.
- Dificultades en el vocabulario; no comprenden que "*save*" aparte de guardar significa ahorrar, en el idioma inglés.

5.6 Actividad 5 – Resolución de problemas por modelo de Barras y transición a las ecuaciones

La siguiente actividad se aplicó en dos sesiones de clase, empezando por mostrar los siguientes ejemplos.

Example 1: in 2020, the number of immigrants from Venezuela will be as twice as the year before in Colombia. If it is estimated that in 2020 the number of Venezuelans is 2’800,000. How many venezuelans were there in 2019 in Colombia?

Solución: Como no sabemos cuántos venezolanos había en el 2019, lo representamos con una barra; como en el 2020 habrá el doble, lo representamos con dos barras, así:

Ilustración 5-9: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 1, parte 1

Ahora, sabemos que se estima que habrá 2’800,000 venezolanos en 2020, escribiéndolo tenemos:

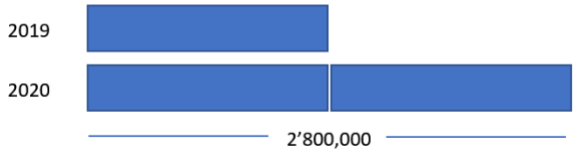


Ilustración 5-10: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 2

Ahora, como evidenciamos en el gráfico, sabemos que en el año 2019 hay la mitad de venezolanos que habrá en el año 2020, por lo cual, dividimos entre 2 a 2’800,000 y con eso obtenemos el dato que necesitamos:

$$2'800{,}000 \div 2 = 1'400{,}000$$

Respuesta: En 2019 había 1’400,000 venezolanos inmigrantes en Colombia.

Example 2: Felipe must build a triangle where the second angle is as twice as the first angle and the third angle is 20 more than the first. What are the angles?

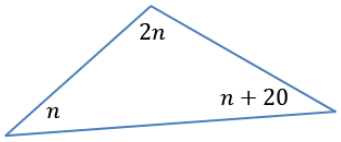


Ilustración 5-11: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, formulación

Solución: Como no sabemos cuánto mide cada ángulo, vamos a tomar como referencia al primero, a dicho ángulo le asignaremos una barra. Como el segundo ángulo mide el doble, le asignaremos dos barras, cada una de la medida de la barra del primer ángulo. Como el tercer ángulo mide 20º más que el primero, le asignaremos la barra del primero, más una barra que mida 20º. Además, recordemos que la suma debe dar 180º.

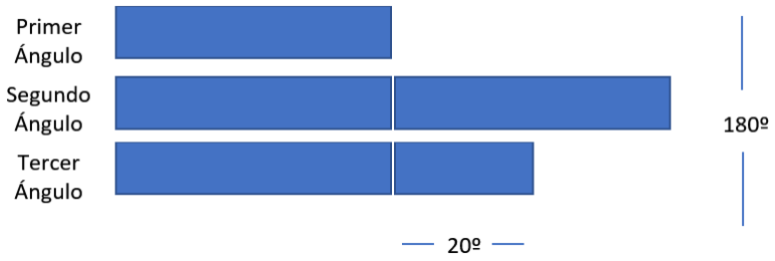


Ilustración 5-12: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 1

Ahora, como sabemos el valor de uno de los rectángulos, sabemos que lo desconocido debe valer 160º, para que sumado con 20º dé 180º; podemos expresar todo de la siguiente manera:

Ilustración 5-13: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 2

Como hay cuatro rectángulos de la misma medida, cada uno mide la cuarta parte de 160º, es decir, $160º \div 4 = 40º$.

Ilustración 5-14: Actividad 5 – Modelo de Barras, ejemplo 2, parte 3

Por lo cual, el primer ángulo mide 40º. El segundo ángulo mide 40º+40º=80º. El tercer ángulo mide 40º+20º=60º.

Activity

1) Find the angles of a triangle if the first angle is 30º, the second is 15º more than the first. How much is the first angle?

2) Juan is 12 years older than her sister Andrea, and Andrea is 4 years older than her sister Camila. If the sum of their ages is equal to 38. How old is Andrea?

3) Carlos tiene una venta de computadores; para que el negocio sea rentable, él debe vender $30’000,000 al mes. Faltando 10 días para terminar el mes de mayo ha vendido 20’000,000, y tiene para entrega inmediata equipos de $1’250,000. ¿Cuántos equipos debe vender para alcanzar la meta de venta?

Solución por medio de ecuaciones.

Vamos a resolver el ejemplo 2 del módulo de barras por ecuaciones, utilizando el modelo de barras como un medio para ello.

Ejemplo 1: Felipe debe construir un triángulo en clase de geometría; dicho triángulo debe cumplir las condiciones del docente, dentro de ellas están las siguientes: un ángulo debe medir el doble del primero y el otro debe medir 20º más que el primero; como lo muestra en la siguiente figura:

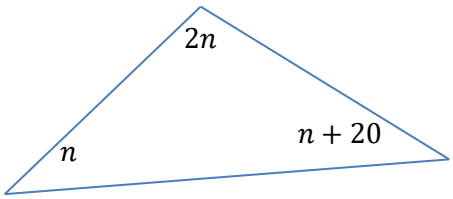


Ilustración 5-15: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, formulación

¿Cuál es el valor de cada ángulo?

Solución: Como no sabemos cuánto mide cada ángulo, vamos a tomar como referencia al primero, a dicho ángulo le asignaremos una barra. Como el segundo ángulo mide el doble, le asignaremos dos barras, cada una de la medida de la barra del primer ángulo. Como el tercer ángulo mide 20º más que el primero, le asignaremos la barra del primero, más una barra que mida 20º. Además, recordemos que la suma debe dar 180º.

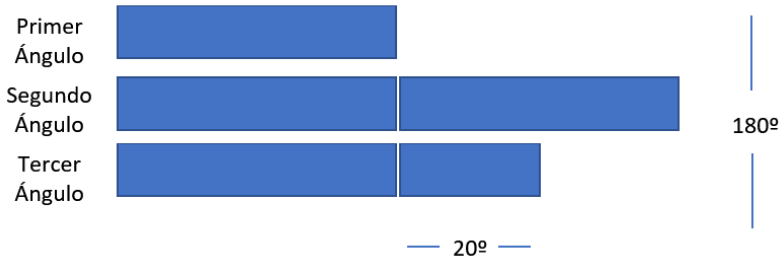


Ilustración 5-16: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, transición del modelo de barras a las ecuaciones (parte 1)

Hasta ahora, es lo mismo que en el modelo de barras, pero a la barra del primer ángulo vamos a asignarle la letra n (nuestra incógnita), y vamos a replicarla en aquellas barras que tengan el mismo valor, así:

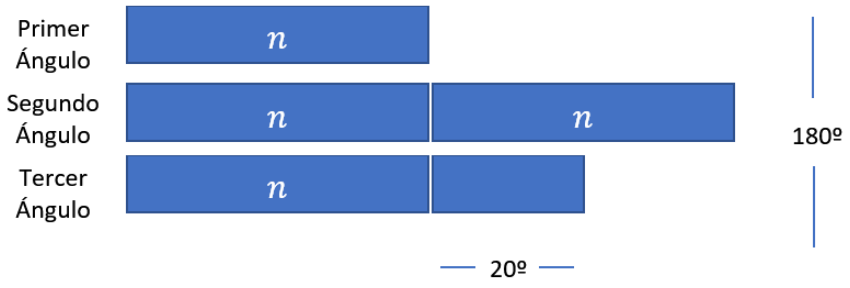


Ilustración 5-17: Actividad 5 – Ecuaciones, ejemplo 1, transición del modelo de barras a las ecuaciones (parte 2)

Ahora, dejando la representación pictórica de las barras, tenemos:

$$n + n + n + n + 20º = 180º$$

Operando términos semejantes se tiene:

$$4n + 20º = 180º$$

Ahora la idea es dejar sola a la incógnita (despejarla), siguiendo los pasos que se enumeran a continuación:

1. Debemos quitar las sumas o restas, utilizando el opuesto aditivo del número que está sumando o restando.

$$4n + 20º - 20º = 180º - 20º$$

$$4n = 160º$$

2. Debemos quitar multiplicaciones o divisiones, utilizando el recíproco del número que acompaña a la incógnita.

$$\frac{4n}{4} = \frac{160º}{4}$$

$$n = 40º$$

Por lo cual, el primer ángulo mide $n = 40º$. El segundo ángulo mide $n + n = 40º + 40º = 80º$. El tercer ángulo mide $n + 20º = 40º + 20º = 60º$.

Ejemplo 2: Adrián is 5 years older than Sofia and half old than Felipe. If the sum of their ages is equal to 39. How old is Sofía?

Solución: Es recomendable entender de la mejor manera el problema, y observar quién es sujeto que más aparece en el problema; el sujeto que más datos tiene dentro del problema es Adrián, ya que su edad se compara con la de Sofía y con la de Felipe; por lo anterior, asignaremos la incógnita a Adrián, asignaremos la letra x (por ejemplo).

$$Edad\ de\ Adrián = x$$

Ahora, como Adrián tiene 5 años más que Sofía, también lo podemos interpretar de la siguiente manera: Sofía tiene 5 años menos que Adrián; por lo cual, podemos expresar:

$$Edad\ de\ Sofía = Edad\ de\ Adrián - 5 = x - 5$$

Además, la edad de Adrián es la mitad de la edad de Felipe, lo cual lo podemos interpretar, también, así: Felipe tiene el doble de edad de Adrián; es decir:

$$Edad\ de\ Felipe = 2 \cdot Edad\ de\ Adrián = 2x$$

Por último, la suma de las edades es 39:

$$Edad\ de\ Adrián + Edad\ de\ Sofía + Edad\ de\ Felipe = 39$$

Es decir:

$$x + x - 5 + 2x = 39$$

Operando términos semejantes se tiene:

$$4x - 5 = 39$$

Sumando a ambos lados el opuesto aditivo de -5, tenemos:

$$4x - 5 + 5 = 39 + 5$$

$$4x = 44$$

Multiplicando por el recíproco de 4, tenemos:

$$\frac{4x}{4} = \frac{44}{4}$$

$$x = 11$$

Con lo que hallamos el valor de la incógnita, que corresponde con la edad de Adrián, sin embargo, nos pidieron la edad de Sofía. Sabemos que:

$$Edad\ de\ Sofía = x - 5$$

Por lo anterior tenemos:

$$Edad\ de\ Sofía = 11 - 5$$

$$Edad\ de\ Sofía = 6$$

Respuesta: La edad de Sofía es 6 años.

Problemas: Resolver por medio de ecuaciones.

Solve the following problems by using equations:

1. The sum of three consecutive even numbers is 42. What are the numbers?
2. Juan is 12 years older than his sister Andrea, and Andrea is 4 years older than her sister Camila. If the sum of the three ages is 38. How old is Andrea.
3. Carlos sells computers, in order to be profitable, he must sell 30’000,000 of pesos monthly. There are 10 days left to finish the month of May and he has sold 20’000,000. He has computers of 1’250 ,000 pesos each one. How many computers does Carlos need to sell to complete the goal of the month?

• Análisis de resultados

El modelo de barras ayuda a los estudiantes a comprender, de una manera más rápida, los problemas, y a establecer las relaciones que se necesita para hacer la modelación mediante una ecuación. El modelo de barras ayudó a los estudiantes para establecer una

relación entre la resolución de problemas y el planteamiento de ecuaciones, permitiendo un primer acercamiento a la utilización del álgebra en la solución de un problema, independiente del contexto en el que esté enmarcado.

Dificultades más relevantes

- El vocabulario de los estudiantes en inglés hace que les sea difícil comprender, de manera correcta, los problemas y empezar a resolverlos; en este caso, la expresión *"12 years older",* que significa, en el contexto, *"tiene 12 años más",* para algunos estudiantes fue difícil interpretarla.
- Contextos con números grandes como 30'000,000 confunden a los estudiantes, ya que no están acostumbrados a resolver problemas con cantidades de tantas cifras.
- Para los estudiantes de grado quinto es difícil reconocer que $2n$ representa un número par y que $2n + 2$ es su consecutivo.

5.7 Actividad 6 – Tipos de soluciones de ecuaciones lineales

La siguiente actividad se desarrolló en dos sesiones de clase; en la primera se desarrollaron los problemas 1, 2 y 3, y se enseñaron los tipos de solución de una ecuación, de la siguiente manera:

Unique: Only one solution for the problem

Example: Juan needs 20 lemons to prepare 10 lemonades. If he has 12 lemons. How many lemons are left?

En este problema la solución es única puesto que la ecuación que modela el problema es: $12 + x = 20$ siendo x el número de limones que le faltan, en esta caso la única solución es 8 ya que no hay otro número natural que sumado con 12 de 20.

Infinite or many solutions: *Infinite* when there are infinite solutions for the equation, and *many solutions* when two or more natural numbers are the solution

Example: Juan throw 2 dice and add the outcomes. If the sum is 5. What are the possible numbers?

En este problema el contexto está relacionado con los números naturales, y la ecuación es $m + n = 5$, que tiene dos incógnitas. Las soluciones se pueden visualizar en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{n}$
1	4
2	3
3	2
4	1

Tabla 5-7: Actividad 6 – Ejemplo

m representa el primer dado y n el segundo dado y en este caso hay 4 soluciones, por lo que la solución es *varias soluciones (many solutions)*

Example: Find two odd numbers that added is equal to an even number.

En este problema encontramos que cualquier par de números pares da un número par, 3 y 5, 3 y 7, etc. Por lo tanto, la solución es *infinita* puesto que cualquier número impar más otro número impar da un número par.

Empty: When there is not solution for the equation that models the problem.

Carlos collects clovers of three leaves. He wants to complete 562 leaves without breaking the clovers. How may clovers does he need to achieve it?

En este caso, el contexto se da en los números naturales y la ecuación es $3p = 562$, encontramos que 562 no es múltiplo de 3, puesto que no es divisible (la suma de los dígitos no es un múltiplo de 3), con lo cual, concluimos que el conjunto solución es *vacío (empty).*

Activity

1) Peter gathers roses. If he gathers 9 roses every day. How many days will he spend to gather 243 roses?

Write an Equation for the problem: _____

Solve the equation:

Type of equation: _____

2) For winning a prize, Mary has to complete exactly 250 marbles but she has this condition: She has to collect the same amount every day and the amount must be less than 6. She decided to collect 4 marbles every day. How many days will it takes to collect the marbles?

Write an Equation for the problem: _____

Solve the equation:

Type of equation: _____

3) Alberto is doing 6 push-ups every day. The goal is to complete 360. How many days will it takes?

Write an Equation for the problem: _____

Solve the equation:

Type of equation: _____

Los estudiantes practicarán en la página web https://quizizz.com/ van a realizar la actividad que se puede visualizar en el siguiente link: https://quizizz.com/join/quiz/5e9e5f6e66b3b1001b093057/start?from=soloLinkShare&referrer=5e8df59c0d2b8a001be84fc8

Las preguntas que aparecen en el quiz son las siguientes:

1) Find two consecutive numbers that added is 85.
   Write the two numbers: ___ and ____ or the kind of solution:

2) the sum of two consecutive numbers is 85. The equation which model the problem is:
   a) $2x = 85$
   b) $x + 1 = 85$
   c) $x + y = 85$
   d) $x + x + 1 = 85$

3) Find two consecutive numbers that added is 85. the solution for this problem is:
   a) Unique (only two numbers are the solution)
   b) Infinite or many solutions (more than two numbers are the solution)
   c) No solution (no two numbers are the solution)
   d) None of above

4) Find two consecutive numbers that added is 80.
   Answer_____

5) Find two consecutive numbers that added is 80. the solution is:
   a) Unique (only two numbers are the solution)
   b) Infinite or many solutions (more than two numbers are the solution)
   c) No solution (no two numbers are the solution)
   d) None of above

6) Find two numbers that the sum is equal to 50. the equation that model the problem is:
   a) $2x = 50$
   b) $x + x = 50$
   c) $x + x + 1 = 50$

d) $x + y = 50$

7) Find two consecutive numbers that added is 85. the equation that model the problem is:
   a) $x + y + 1 = 85$
   b) $2x = 85$
   c) $x + x + 1 = 85$
   d) $x + y = 85$

8) Find 4 consecutive numbers that the sum is equal to 106. the equation that model the problem is:
   a) $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 106$
   b) $x + x + 4 = 106$
   c) $4x = 106$
   d) $x + 4 = 106$

9) Find 4 consecutive numbers that the sum is equal to 106
   Write your answer: _____

10) Find 4 consecutive numbers that the sum is equal to 106. the solution is:
   a) Unique (only 4 numbers are the solution)
   b) Infinite of many solutions (more than 4 numbers are the solution)
   c) Empty
   d) All above

- **Análisis de resultados.**

Respecto a escoger el tipo de solución en una ecuación, los estudiantes tienen facilidad para distinguir si en un problema la solución es única, infinita o varias soluciones, o vacía, pero, mostraron algunas dificultades establecer la ecuación que modela un problema.

La prueba realizada en quizzis tuvo un 48% de respuestas correctas, y los problemas que más fallaron fueron las preguntas 5 y 6, lo que mostró que a los estudiantes se les dificulta reconocer que no existen dos números consecutivos tales que su suma dé 80, o llegar a

una conclusión más general, que es, que la suma de dos números consecutivos nunca es par.

5.8 Actividad 7 – Modelación

La modelación se trabajó todo el tiempo, en donde, en cada problema, se le preguntaba al estudiante cuál era la ecuación que modelaba el problema, sin embargo, se dedicó una actividad específica para trabajar la modelación, y se muestra a continuación.

La actividad se puede encontrar en el siguiente link: https://create.kahoot.it/share/mean-median-mode-range/e16c9f4a-c791-4727-be9a-fdb490913f5a. Para ingresar, se debe ir al link, entrar a la opción *play as guest*, luego se va a la opción *classic*, en donde aparecerá un código; los estudiantes deben entrar con sus celulares, o desde sus computadores o algún otro dispositivo al siguiente link: https://kahoot.it/, e insertan el código y escribir su nombre; posteriormente, el profesor le da play y empieza el quiz o juego.

Las preguntas utilizadas fueron las siguientes (en todas se pidió modelar la situación planteada, trabajando preguntas de selección múltiple con única respuesta):

1) A set of 8 dessert dishes cost $20. What is the cost for one dessert dish? The equation is:
   a) $8x = 20$
   b) $\frac{1}{8}x = 1000$
   c) $x - 8 = 20$
   d) $\frac{x}{8} = 20$

2) The product of a number and 9, increased by 4 is 58. The equation is:
   a) $9x + 4 = 58$
   b) $9(4) + x = 58$
   c) $\frac{x}{9} + 4 = 58$
   d) $4x + 9 = 58$

3) Ben and Jerry together own 24 comic books. If Ben owns 6 comic books. The equation is:
   a) $6x = 24$
   b) $x + 24 = 6$
   c) $x + 6 = 24$
   d) $\frac{x}{6} = 24$

4) 13 is five more than twice a number. The equation is:
   a) $2x - 5 = 13$
   b) $x + 5 = 13$
   c) $13 + 5 = 2x$
   d) $2x + 5 = 13$

5) A table and 8 chairs together weigh 97 lbs. The table weighs 25 lbs. How many lbs is a chair? the equation is:
   a) $x + 8 + 25 = 97$
   b) $25x + 8 = 97$
   c) $8x + 25 = 97$
   d) $8x - 25 = 97$

6) The plumber charges $98 plus $45 per hour. The bill was $458. How many hours did he work? the equation is:
   a) $45x + 98 = 458$
   b) $45x = 458$
   c) $98x + 45 = 458$
   d) $45x - 98 = 458$

7) Tim wants to buy skates for $115. He has $40. He earns $7.50 per hour. How many hours must he work? The equation is:
   a) $40x + 7.5 = 115$
   b) $40 + 7.5x = 115$
   c) $7.5x - 4 = 150$
   d) $40x - 7.5 = 115$

8) An 8 floodlight together use 1000 watts of power. How much power is used by each bulb? the equation is:
   a) $\frac{1}{x} = 1000$
   b) $8 + x = 1000$
   c) $8x = 1000$
   d) $\frac{x}{8} = 1000$

9) Byrd is 63 years old. He is 2 years less than 5 times Lesley's age. How old is Lesley? the equation is:
   a) $2 - 5x = 63$
   b) $5x + 2 = 63$
   c) $2x - 5 = 63$
   d) $5x - 2 = 63$

10) 3 desks and a bookcase weigh 157 lb. The bookcase weighs 34 lb. How much does a desk weigh? The equation is:
   a) $\frac{x}{3} + 34 = 157$
   b) $3x + 34 = 157$
   c) $3x - 34 = 157$
   d) $34x + 3 = 157$

11) A pie is divided into 6 equal slices (240 calories per slice) How many calories are in the pie? The equation is:
   a) $\frac{240}{x} = 6$
   b) $\frac{x}{6} = 240$
   c) $6x = 240$
   d) $\frac{240}{6} = x$

12) Ren's burger has 375 Cal, and each chip has 12 cal. How many chips were eaten to total 639 Cal? The equation is:
    a) $12x - 375 = 639$
    b) $12x = 369$
    c) $12x + 375 = 639$
    d) $375 - 12x = 639$

13) Basketball players was split into teams of 20. There are 8 teams. How many Basketball players are there? The equation is:
    a) $8x = 20$
    b) $\frac{x+20}{20} = 8$
    c) $\frac{20}{x} = 8$
    d) $\frac{x}{20} = 8$

Activity 2

La siguiente actividad fue realizada por los estudiantes en Google Forms, y se encuentra alojada en el siguiente link: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSetcJCIOZiadMOQLTGWncu7mkJJREp2Bb582otKV7OKRcI8Mg/viewform?usp=sf_link

Answer the following questions by choosing the option that models the problem

1) Which expression represent an odd number?
    a) $2n$
    b) $2n + 1$
    c) n
    d) $n + 1$

2) Which expression represents even numbers?
    a) $2n$
    b) $2n + 1$
    c) n
    d) $n + 1$

3) Which expression represent two consecutive even numbers.
   a) $2n + 2n$
   b) $2n + 2n + 2$
   c) $n + n + 2$
   d) $n + 2$

4) An odd number plus its consecutive even number. The expression is:
   a) $2n + 1 + 2n + 1$
   b) $2n + 2n + 1$
   c) $2n + 1 + 2n + 1 + 1$
   d) $2n + 1 + 2$

5) An even number plus its consecutive odd number that is 61. Write down the numbers.
   Write your answer _____

6) An even number plus its consecutive odd number that is 61. Write down the equation:
   a) $2n + 1 + 2n + 1 = 61$
   b) $2n + 2n + 1 = 61$
   c) $2n + 1 + 2n + 1 + 1 = 61$
   d) $2n + 1 + 2 = 61$

7) Find two consecutive even numbers that the sum is 18.
   Write down the numbers _____ and _____

- **Análisis de resultados**

En la primera actividad, o evaluación, que se le aplicó a los estudiantes en la página web de kahoot, se observa que el 43% de las respuestas fueron correctas y que las preguntas más difíciles fueron: 3, 9, 11 y 13 con 22%, 33%, 22% y 36% de respuestas correctas, respectivamente; los resultados indican que la modelación de problemas por medio de ecuaciones no es una tarea fácil para los estudiantes.

En la segunda actividad, aplicada en Google Forms, se puede observar un gráfico que muestra cómo están distribuidos los datos, según la respuesta de los estudiantes después de varios intentos; tuvieron el 49% de las respuestas correctas (la media es 3,43 y la mediana 3), lo cual indica que todavía se debe trabajar más en la modelación.

Ilustración 5-18: Actividad 7 – Resultados

5.9 Otros problemas:

- **Hallar los ángulos internos de un triángulo**

A los estudiantes se les pidió resolver el siguiente problema: "*Find the value of x in the following triangle and the value of each angle. Write an equation. (remember that the sum of the inner angle of a triangle is equal to 180º)*" y se les presenta la siguiente figura:

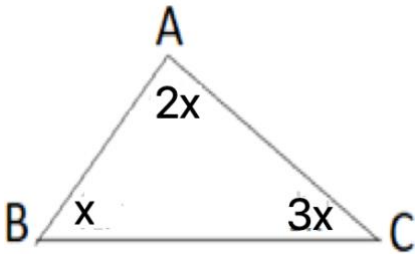


Ilustración 5-19: Otros problemas – Ángulos internos de un triángulo

Como la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180, se deben sumar las medidas de los ángulos, así: $x + 2x + 3x = 180$; luego, al reducir términos semejantes, tenemos $6x = 180$, al dividir por 6, encontramos que $x = 30$;, luego el valor de cada ángulo es: $30, 60$ y 90.

- **Números consecutivos**

Se presentó el siguiente problema a los estudiantes: "*Find 3 consecutive numbers that added is 42*"

Para resolverlo, primero se hizo énfasis en encontrar las palabras claves, mediante preguntas orientadoras, como, por ejemplo: ¿Cuántos números tienen que hallar? ¿Qué son números consecutivos? ¿Cuánto tiene que dar la suma? Algunos estudiantes no entendían la palabra consecutivo; mediante ejemplos se aclaró el concepto. En un comienzo, se resolvió el problema mediante ensayo y error, como se muestra en la figura, hasta que se hallaron los números, que son 13, 14 y 15. Después se realizó la siguiente tabla:

número	**consecutivo**
1	$1+1$
2	$2+1$
3	$3+1$
4	$4+1$
7	$7+1$
30	$30+1$
x	$x+1$

Tabla 5-8: Otros problemas – Números consecutivos

Al realizar este esquema, realizando preguntas a los estudiantes, se concluye que si el primer número es x el segundo número es $x+1$ y el tercero es $x+2$, y así sucesivamente; se preguntó ¿qué se debe hacer con los números?, a lo cual respondieron que debían sumarse, y después se preguntó ¿cuánto da la suma?, que generó la respuesta "da 42", de esta manera se planteó la ecuación: $x+x+1+x+2=42$, que se resuelve reduciendo términos semejantes (en clase se habló de una operación con letras), así: $3x+3=42$ y, resolviendo la ecuación, $x=13$. Hallando el primer número, sumamos 1 para encontrar el segundo y sumamos 2 (también al primer número) para calcular el tercero.

- ## Análisis de resultados

Este tipo de problemas fue muy claro para los estudiantes y los comprendieron con facilidad en la explicación de la clase. Se trabajaron problemas en donde se hablaba de dos, tres o cuatro números consecutivos y se realizó al comienzo de las clases (10 minutos aproximadamente con la retroalimentación); los estudiantes lo desarrollaban de manera exitosa, lo mismo con los problemas de encontrar los ángulos internos de un triángulo.

Dificultades más relevantes

- Los estudiantes logran entender que son números consecutivos, entender que x, $x+1$ y $x+2$ son números consecutivos, pero siempre tienden a buscar los números por ensayo y error, pocos lo hacen utilizando un proceso por ecuaciones.
- Los estudiantes, al mecanizar el proceso de números consecutivos, cometen el error que se presenta en la imagen, en donde modelan 3 números consecutivos que sumados dan 43 como $x + x1 + x2 = 43$, en lugar de $x + x + 1 + x + 2 = 43$

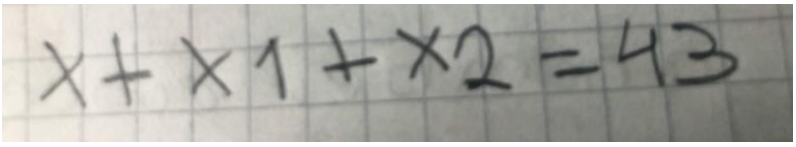


Ilustración 5-20: Otros problemas – Dificultad presentada

6. Análisis de resultados finales

En este capítulo se va a analizar la prueba final y se va a contrastar con la prueba diagnóstica para sacar las conclusiones finales.

6.1 Prueba final

La prueba final la presentaron 58 estudiantes, no la presentaron todos debido a la conexión del internet o su ausencia en la sesión; se aplicó a los 3 cursos (5A, 5B y 5C) de manera remota y sincrónica, se conectaron a Google Meet, encendieron las cámaras y por medio de la herramienta de Google Forms se realizó la prueba que duró 45 minutos.

En la prueba se utilizaron diferentes contextos, reconocidos por el ICFES y que se explicaron en la sección 4.4 (Diferentes contextos en matemáticas). La pregunta 1 corresponde a un contexto matemático, las preguntas 2, 4 y 5 a un contexto personal, las 3 y 6 a un contexto laboral y la 7 a un contexto comunitario o social. Se realizaron 7 preguntas, en donde, en cada pregunta, hay situaciones problema en las que se le pide a los estudiantes escribir la solución del problema, sin ningún tipo de opciones para medir la capacidad de resolverlo; escoger el tipo de solución, para medir si identifican sólo una, ninguna o muchas soluciones a un problema, y, por último, se mide la capacidad de asociar e interpretar una situación y modelarla con una ecuación.

La prueba final que se aplicó fue la siguiente:

Final test

For each problem m, n and r are natural numbers

1) Find two numbers, an odd number and its consecutive even number. The sum must be equal to 30.

Write down the solution for the problem: _____

1.3) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (two numbers are the solution)

1.4) The equation that models the problem is:

A) $2n + 1 + 2n + 1 + 1 = 30$
B) $n + n + 1 = 30$
C) $2n + 2n + 1 = 30$
D) $2n + 2n + 2 = 19$

2) The first season of “la casa de papel” in Netflix last 598 minutes. If there are 13 chapters and each one last the same time. How much is each chapter?

Write down the solution for the problem: _____

2.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (only one natural number is the solution)

2.2) The equation that models the problem is:

A) $13n = 598$
B) $13 = 598n$
C) $13n + 13 = 598$
D) $598 \div n = 13$

3) Michael Phels and Alexander Popov are professional swimmers. Both swimmers train on Mondays, Wednesdays and Fridays. Michael trains on Monday 3 hours, on Wednesday 2 horas and on Fridays 5 hours. Alexander trains on Monday 4 hours, on Wednesday 4 hours and on Friday 2 hours. If n is the payment for the number of hours work in the week. What weeks do they have the same salary? Week 1? Week 2? What week?

Write down the solution for the problem: _____

3.1) The solution of the problem is:

A) Infinite (Two or more natural numbers are the solution)
B) Empty (No solution)
C) Unique (Only one number is the solution)

3.2) The equation that models the problem is:

A) $10n = 4n + 4n + 2r$
B) $3m + 2n + 5r = 4m + 4n + 2r$
C) $3n + 2n + 5n = 4n + 4n + 2n$
D) $10m = 10n$

4) Pedro, in a raffle, took 3 papers from a bag. He got three consecutives numbers from the paper. The sum of the three numbers is 117. What are the numbers?

Write down the solution for the problem: _____

4.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solution (More than three natural numbers are the solution)
B) Empty (no solution)
C) Unique (many three numbers are the solution)

4.2) The equation that models the problem is:

A) $3n = 117$

B) $m + n + r = 117$

C) $n + n + 1 + n + 2 = 117$

D) $1n + 2n + 3n = 117$

5) Andrea wants to put a fence on a triangular land where the vertexes of the triangle are trees (how it is shown in the picture below), the first angle of the triangle is 35 degrees, the second is 20 degrees more than the first. How much is the third angle?

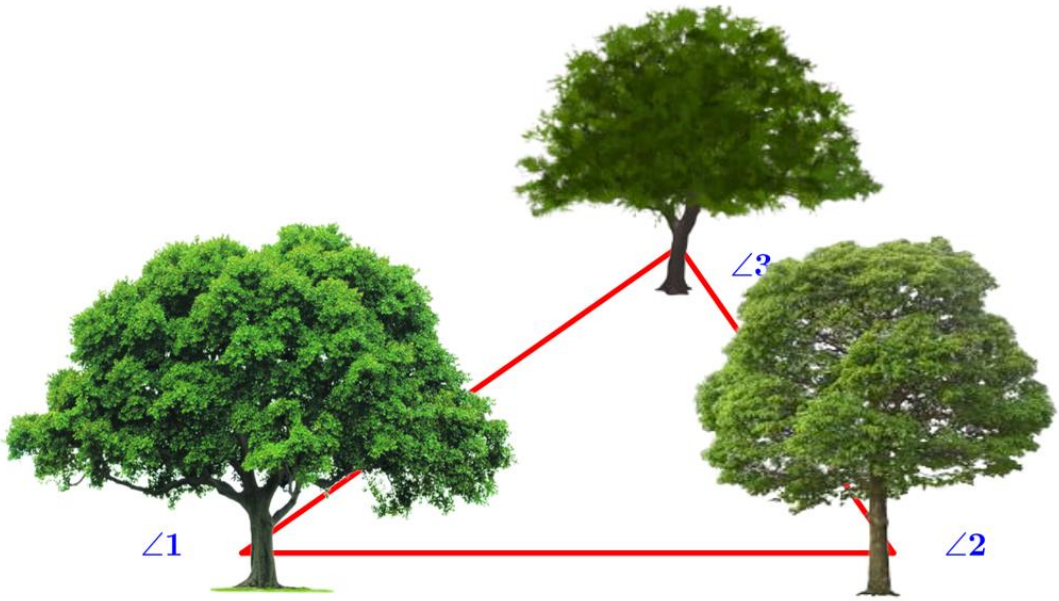


Ilustración 6-1: Prueba final – Ejercicio 5

Write down the solution for the problem: _____

5.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more natural numbers are the solution)

B) Empty (no solution)

C) Unique (only one natural number is the solution)

5.2) The equation that models the problem is:

A) $25 + 55 + x = 180$

B) $35 + 20 + x = 180$

C) $x = 35 + 55$

D) $35 + 20 = x$

6) Camilo works in a bank, where additional to his salary he receives an extra money for each 20’000 000 loan, he processes. If during the month he has processed 15’000,000 and it is pending 4 credits for the same value. How much must be the minimum value for each pending credit?

Write down the solution for the problem: _____

6.1) The solution of the problem is:

A) Infinite or many solutions (two or more numbers are the solution)

B) Empty (no solution)

C) Unique (Only one natural number is the solution)

6.2) The equation that models the problem is:

A) $4x = 15{,}000{,}000$

B) $15{,}000{,}000 + 20{,}000{,}000 = 4x$

C) $15{,}000{,}000 + 4x = 20{,}000{,}000$

D) $4x = 20{,}000{,}000$

7) En Bogotá aumentó el índice de despidos, debido a la situación que atraviesa la ciudad, desde que empezó el aislamiento obligatorio. Asumiendo que el porcentaje se incrementa en un 6% día a día, durante los primeros 5 días de la medida tomada en la ciudad, (es decir, el primer día, es 6% de despidos), ¿cuántos días,

exactamente, debieron transcurrir para que el porcentaje de desempleo fuera del 20%?

Escriba la solución al problema: _____

7.1) La solución al problema es:

A) Infinita o varias soluciones (dos o más números naturales son solución)
B) Vacía (no tiene solución)
C) Única (sólo una solución)

7.2) La ecuación que modela el problema es:

A) $x + 6 = 20$

B) $6x = 20$

C) $x = 20$

D) $0x + 6 = 20$

- **Análisis prueba final**

En la tabla, las columnas que están en amarillo miden la habilidad de los estudiantes para resolver un problema, en total se evaluaron, en el formulario, 4 problemas donde los estudiantes escribían la respuesta al problema (no escogían una opción), en la pregunta 1, 3 y 7 no se pidió que escribieran la respuesta del problema, puesto que la respuesta se encontraba en las opciones 1.1, 2.1 y 7.1, respectivamente. Los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades en interpretar y dar solución a un problema, ya que sólo el 28% de los estudiantes lograron dar respuestas correctas a los problemas de este tipo.

preguntas	1.1.	1.2	2	2.1	2.2	3.1	3.2	4	4.1	4.2	5	5.1	5.2	6	6.1	6.2	7.1	7.2
correctas	31	17	46	47	26	21	6	37	42	27	21	43	28	9	37	32	23	30
incorrectas	27	41	12	11	32	37	52	21	16	31	37	15	30	49	21	26	35	28
% de correctas	53	29	79	81	45	36	10	64	72	47	36	74	48	16	64	55	40	52

Tabla 6-1: Prueba final – Resultados

Postest

Porcentajes de respuestas correctas	
Problemas (Amarillo: 2, 4, 5 y 6)	28%
Tipos de solución (Azul: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1)	60%
Modelación (Verde: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7.2)	41%

En la columna azul se mide la capacidad de los estudiantes en identificar el tipo de solución de un problema dado, en esto se evidencia que el 60% de los estudiantes identifican el tipo de solución a un problema dado.

En la columna verde se muestran los resultados referentes a modelar un problema con una ecuación. En la tabla podemos ver que el 41% de los estudiantes resolvieron de manera correcta las preguntas acerca de modelación, lo cual muestra la dificultad que los estudiantes presentan para realizar dicho proceso.

6.2 Prueba diagnóstica vs Prueba final

La prueba diagnóstica, en la tabla, recibió el nombre de pretest; la presentaron 64 estudiantes. La prueba final, llamada en la tabla postest, la presentaron 58 personas. Al comparar los resultados se observa que aumentó el resultado en todos los componentes evaluados.

Pretest

% de respuestas correctas	
Problemas	20
Tipos de solución	51
Modelación	35

Postest

% de respuestas correctas	
Problemas	28
Tipos de solución	60
Modelación	41

Ilustración 6-2: Prueba diagnóstica vs Prueba final

A continuación, vamos a tener en cuenta, exclusivamente, 49 estudiantes para el análisis, ya que estos estudiantes fueron los que presentaron ambas pruebas, la diagnóstica y la final.

Vamos a observar los resultados en el siguiente gráfico de caja y bigotes, donde se puede observar que los estudiantes, en general, mejoraron su desempeño después de aplicar la secuencia de actividades.

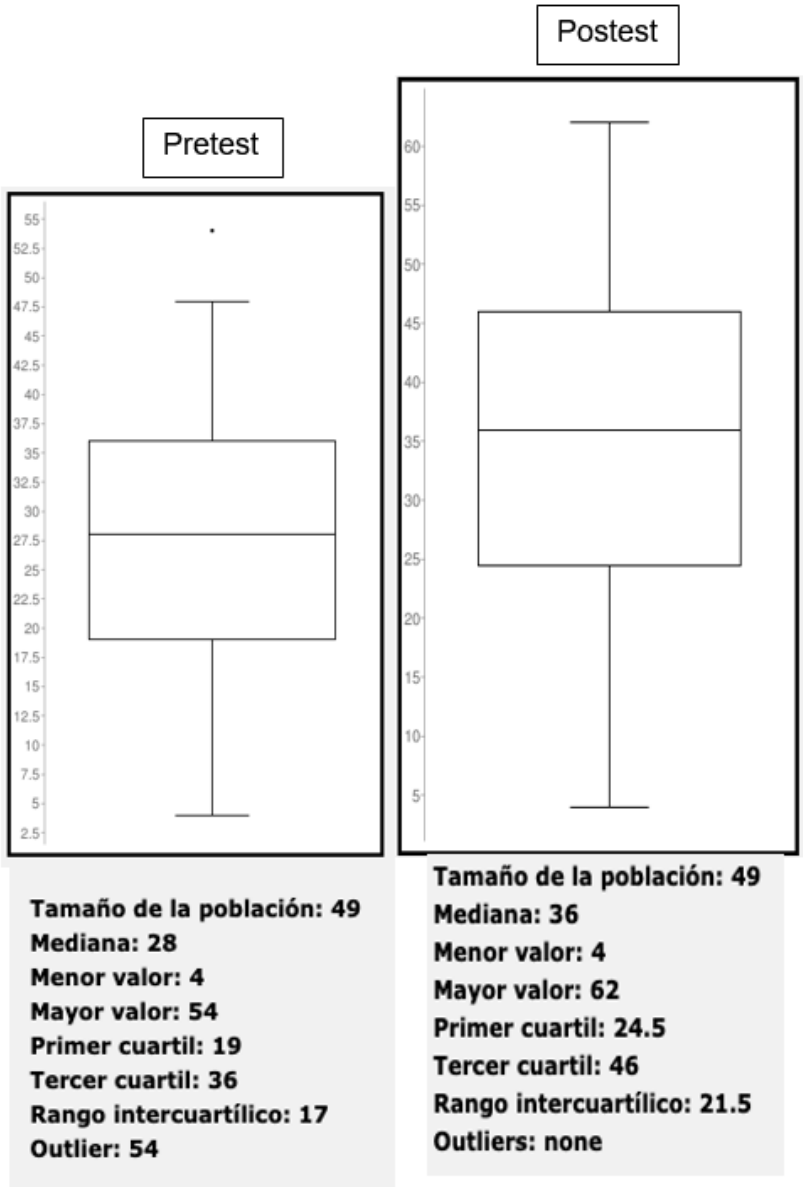


Ilustración 6-3: Diagramas de caja y bigotes - Pretest vs Postest

Los resultados de los estudiantes mostraron que el 65% obtuvo un mejor rendimiento después de aplicar la secuencia de actividades, es decir que para el 35% de los estudiantes la secuencia no tuvo un resultado positivo, en parte, porque las clases fueron dadas de manera remota sincrónica y la secuencia didáctica se aplicó de esta manera debido a la pandemia ocasionada por el COVID-19, lo cual impidió un control estricto del trabajo de los estudiantes en cada sesión.

6.3 Experiencias con las clases remotas y sincrónicas

Como se había mencionado anteriormente, las clases se realizaron de manera "*remota y sincrónica"*, es decir, los estudiantes interactuaron "en vivo" con el profesor y sus compañeros, realizando preguntas y resolviendo sus dudas de manera inmediata, para ello se utilizó Google Meet; los estudiantes tenían la opción de imprimir las actividades trabajadas en físico o utilizar herramientas tecnológicas, por ejemplo, por medio de Word editaban el archivo y enviaban las respuestas de sus actividades, otros utilizaban el programa Paint o herramientas para escribir en Ipads o tablets; por esta razón, en las primeras clases se debía enseñar a subir la actividad en una carpeta de Drive, adjuntar un archivo al correo, editar un archivo de Word, entre otras cosas; además, se debía enseñar a manejar Google Meet y sus funciones, por ejemplo, la de compartir pantalla. El reto fue dado en ambas direcciones, el docente aprendiendo nuevas herramientas tecnológicas y nuevas formas de enseñar, y los estudiantes en un proceso similar.

Algunas dificultades en el proceso de enseñanza fueron: controlar y supervisar lo que los estudiantes estaban haciendo; saber qué dificultades estaban presentado, ya que muchos estudiantes apagaban la cámara, y no se podían observar señales o gestos que indiquen si entendían o si se están distrayendo. Aunque el profesor podía supervisar lo que estaban presentando en Google Drive; muchas veces el tiempo de la clase se implementaba en la solución de dudas y explicación de la secuencia de actividades. Una de las ventajas de la clase remota sincrónica, es que, al resolver una duda de un estudiante, los demás alumnos prestaban atención e iban resolviendo sus propias dudas, evitando así, explicar muchas veces el mismo tema y dar la misma explicación al mismo ejercicio, como muchas veces ocurre en clases presenciales.

Hay muchas variaciones en las clases remotas sincrónicas, respecto a las presenciales, por ejemplo, estudiantes que eran muy participativos en lo presencial, se mostraban muy

callados en lo remoto sincrónico y estudiantes que eran muy callados y no trabajaban en lo presencial, eran muy participativos y daban un mejor rendimiento en la clase remota sincrónica; respecto a lo anterior, una estudiante que no terminaba las actividades y decía que no entendía en lo presencial, demostró avances en la clase remota sincrónica, ya que buscaba resolver sus dudas constantemente y fueron observables sus avances.

6.4 Reflexiones acerca de la enseñanza de problemas y ecuaciones

Considero que enseñar las temáticas de la clase a partir de problemas es una buena estrategia, ya que reta a los estudiantes y el aprendizaje se hace de una manera más significativa, es un reto en muchas ocasiones puesto que los alumnos no comprenden muy bien los problemas y a esto se añade otra dificultad que es el idioma inglés, pero los consejos dados por Polya (1965), en sus pasos para resolver problemas, como *comprender el problema* y todo lo que implica (leer varias veces el problema, dar un ejemplo pequeño, mirar bien las condiciones del problema); *concebir una plan*, en donde los estudiantes aplicaron todos los métodos aprendidos, como el modelo de barras, hallar la solución por ensayo y error, por “lógica”, donde los estudiantes crean sus propios métodos de resolución, por medio de una ecuación, por medio de la construcción de una tabla o un dibujo; *ejecución y visión retrospectiva,* que es donde los estudiantes ejecutaron sus métodos y verificaron si realmente solucionaba el problema. Todos estos pasos ayudaron a los alumnos y les dieron herramientas para la comprensión de los mismos.

7. Conclusiones y recomendaciones

7.1 Conclusiones

Se presenta una secuencia de actividades para enseñar a resolver y modelar ecuaciones lineales a estudiantes de grado quinto, a partir de la resolución de diversos problemas en diferentes contextos, buscando alternativas de solución, como lo fueron los métodos de ensayo y error, modelo de barras, planteamiento y resolución de ecuaciones, creación de tablas, dibujos y todos los métodos que en el momento se le ocurriera al estudiante, siguiendo los pasos de Polya (1965).

Se aplicó una prueba diagnóstica a los estudiantes, para medir su habilidad en la resolución de problemas, modelarlos y saber el tipo de solución del problema, en donde se evidenció que dificultades para modelar y resolver un problema, sin embargo, ~~se~~ presentaron menos inconvenientes al momento de identificar el tipo de solución.

Se observaron diferentes definiciones de ecuaciones dadas por diversos autores, se analizó el concepto de igualdad, polinomios, ecuaciones algebraicas y los diferentes tipos de soluciones en las ecuaciones. Se hizo una revisión histórica en donde se resaltaron ecuaciones importantes en la historia. En la parte didáctica se utilizó el aprendizaje basado en problemas de Restrepo (2005), los pasos para resolver un problema de Polya (1965), el modelo de barras y los contextos planteados por el ICFES (2019).

Se tuvo en cuenta diferentes contextos, donde los estudiantes pudieran modelar ecuaciones, aparecieron problemas de tipo matemático, problemas de tipo laboral, problemáticas del país, entre otros.

Se implementó la secuencia a los grados quinto, con un tema que en general se ve, en Colombia, en grado séptimo u octavo; es el primer contacto formal de los estudiantes con las letras y con la modelación de un problema a través de ecuaciones. En general, se ven avances en los estudiantes en la comprensión y significado de las letras, cómo usarlas y

cómo aparecen en diferentes contextos, las primeras nociones de cómo las letras pueden representar, por ejemplo, todos los números pares o impares, de cómo, en una ecuación lineal con dos incógnitas, las letras pueden representar varios valores. La mayoría de estudiantes avanzaron en los procesos de modelación y resolución de problemas.

Se diseñó una prueba final, que sirvió para evidenciar que los estudiantes tuvieron avances en los procesos de modelación, resolución de problemas y tipos de ecuaciones lineales. Tanto la prueba diagnóstica como la prueba final mostraron que a los estudiantes se les dificulta la resolución de problemas o dar una respuesta a un problema, y tienen dificultades a la hora de modelar un problema o escribirlo en el lenguaje algebraico y ser metódicos en la resolución del problema.

Los estudiantes manifestaron estar motivados con todos los recursos que se utilizaron para el aprendizaje, tanto con las páginas de internet para realizar quices, como las diversas formas en las que se les enseñó a resolver un problema.

Se realizó un registro de las dificultades que presentaron los estudiantes en cada ejercicio, taller o actividad, lo cual sirve para reflexionar sobre la práctica pedagógica y es el punto de partida para nuevas versiones de la propuesta.

Para la elaboración y aplicación de esta secuencia didáctica se tomó como referente la primera propuesta, aplicada el año escolar anterior, teniendo en cuenta los aspectos positivos y negativos de la misma. Una de las grandes dificultades que se observó en los estudiantes, en la propuesta anterior, fue la modelación de problemas mediante ecuaciones; en esta nueva propuesta se plantearon actividades que involucran el modelo de barras, buscando una transición entre el método de solución por ensayo y error y la modelación por medio de ecuaciones.

En el presente trabajo se utiliza la metodología basada en la resolución de problemas, en donde se parte de problemas y, a través de ellos o paralelamente, se enseñan los conceptos matemáticos con la idea de resolver los problemas dados; esta metodología es muy recomendable para enseñar conceptos matemáticos, ya que reta a los estudiantes y hace que lo aprendido sea más significativo y duradero en el tiempo.

7.2 Recomendaciones

La secuencia de actividades presentadas en este trabajo deben ser abordadas con tiempo suficiente, en el presente trabajo se aplicó durante un periodo escolar que corresponde a un trimestre, pero una recomendación es hacerla más extensa, es decir, trabajarla durante dos periodos o inclusive durante todo el año escolar alternándolo con temas obligatorios del currículo; los problemas presentados aquí son un ejemplo, lo que recomiendo es plantear problemas muy cercanos a sus contextos y no olvidar hacer constante reflexión, ya que cada grupo es diferente, así como sus necesidades de aprendizaje.

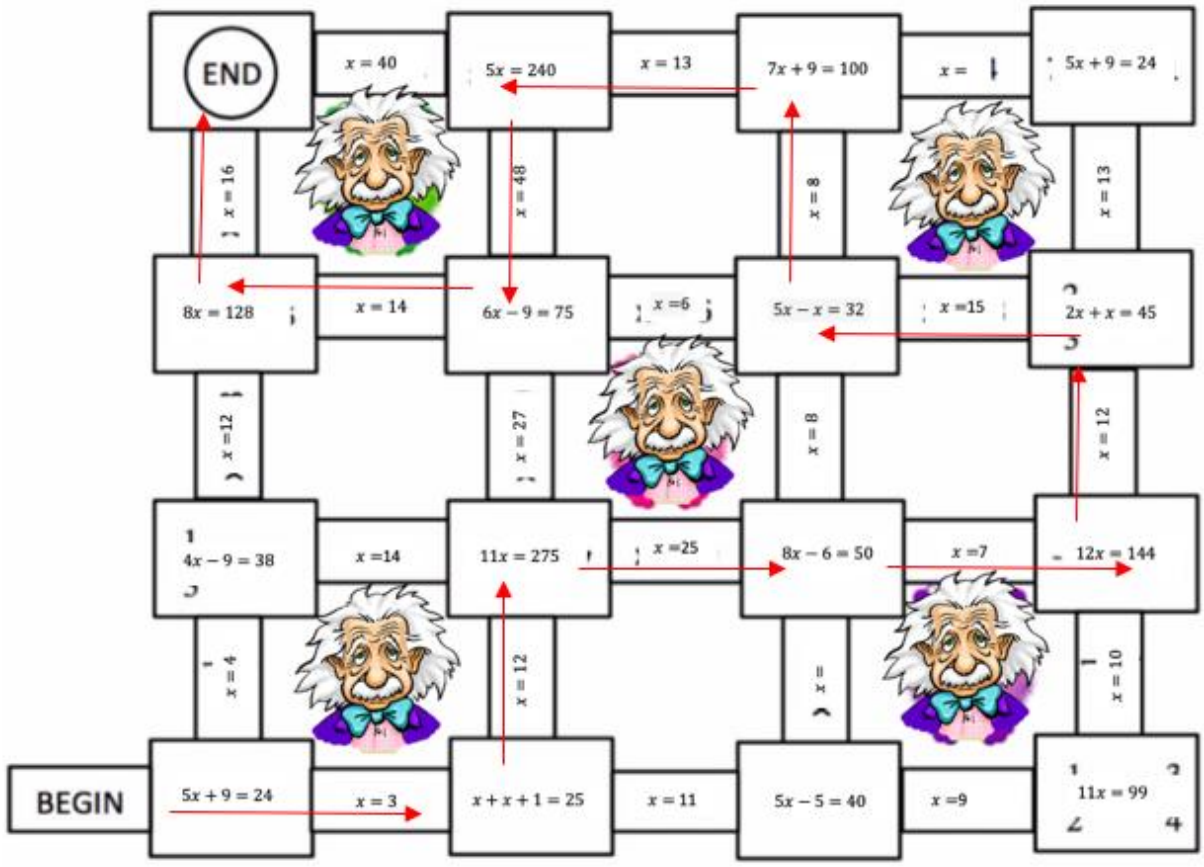
Se recomienda trabajar con el modelo de barras en diferentes problemas, por ejemplo, los relacionados con fracciones para que cuando se aborde el tema de ecuaciones sea más fácil pasar del modelo de barras a plantear y modelar problemas haciendo uso de ecuaciones.

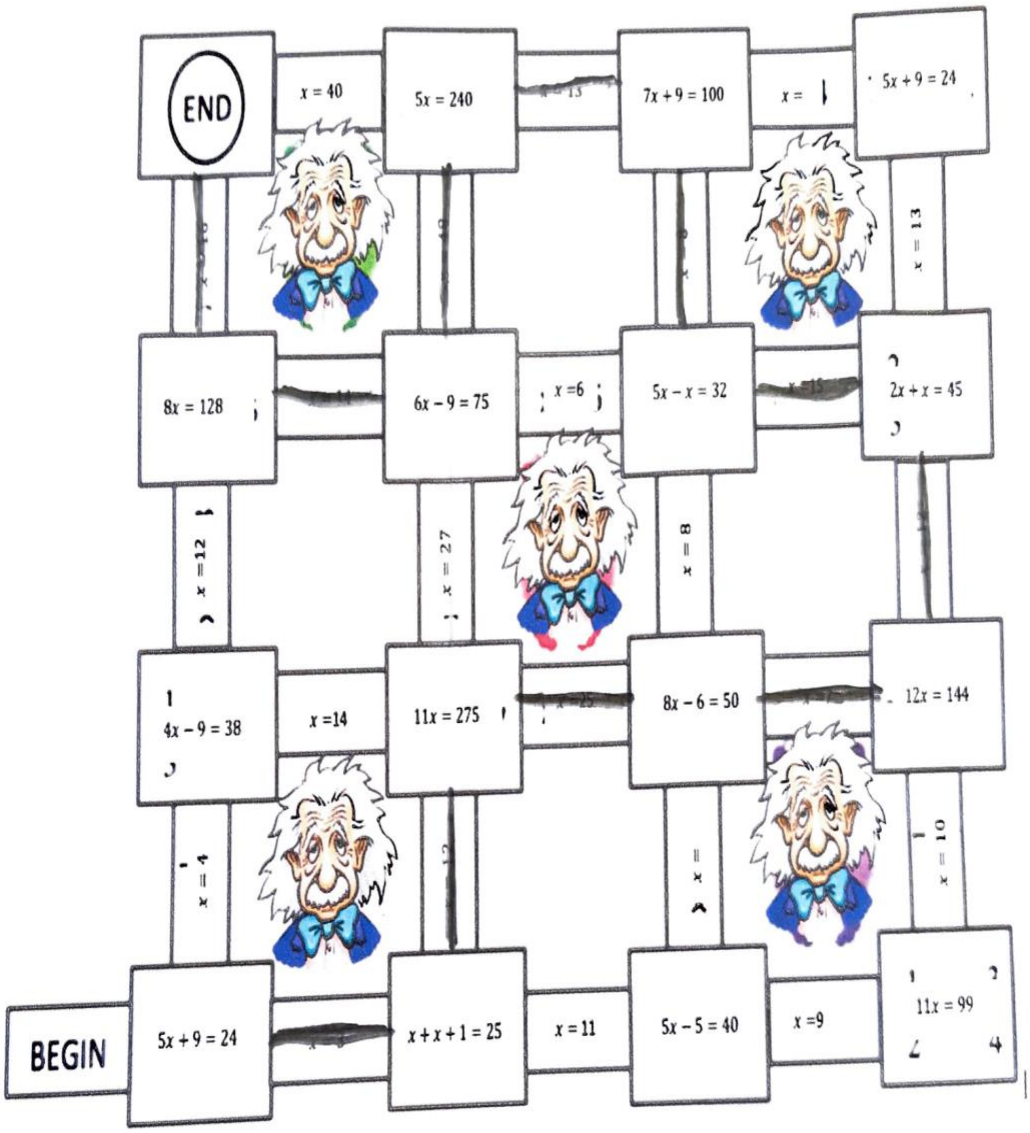
Se recomienda, también, trabajar con diferentes recursos tecnológicos, en este trabajo se utilizó Quizzis, formularios de Google, Kahoot, lo cuál hace que los estudiantes no pierdan la motivación y no sientan que las clases son monótonas; además es recomendable buscar páginas de internet en donde los estudiantes refuercen los conceptos y estrategias vistas en clase, como, por ejemplo, IXL, Math Games, Khan academy, entre otras.

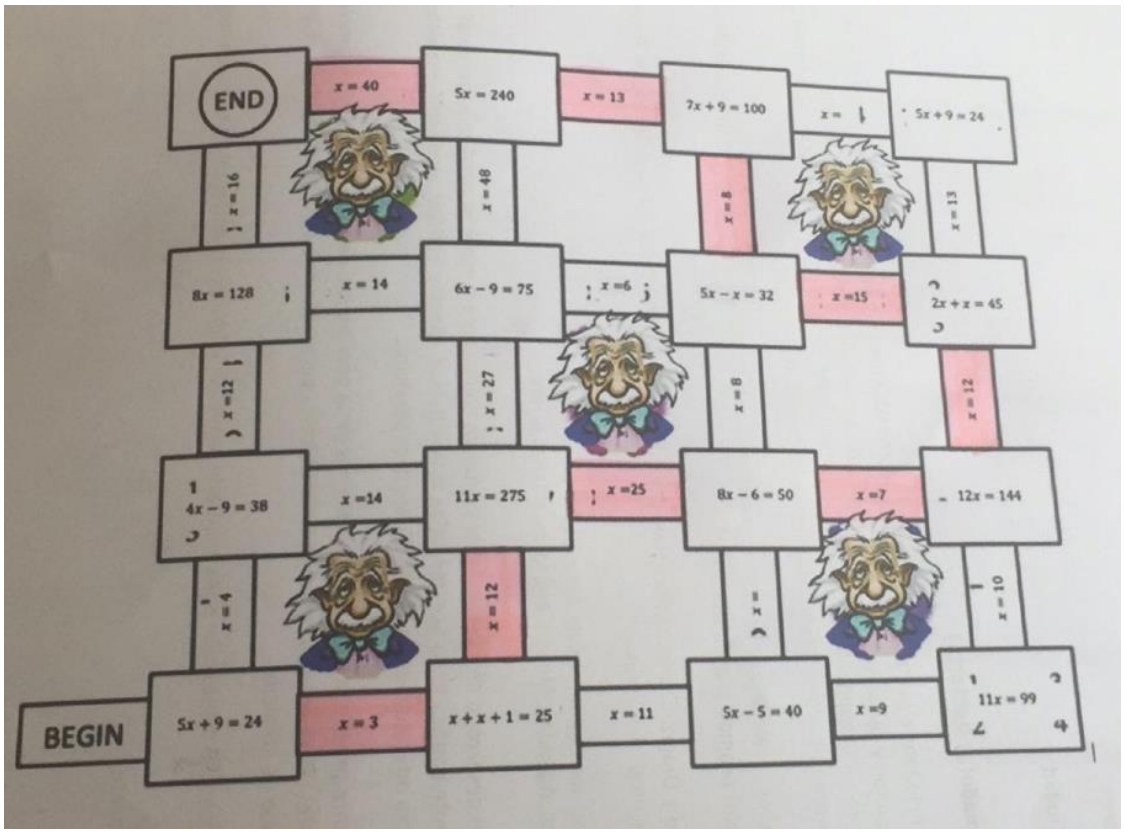
En una tercera propuesta se debe fortalecer la modelación de problemas; una sugerencia es realizar ejemplos sencillos desde el comienzo del año escolar, y a lo largo del mismo. Se debe recordar que cada grupo es diferente, por lo cual, al aplicar la secuencia didáctica se pueden hacer mejoras, dependiendo del grupo con el que se abordará.

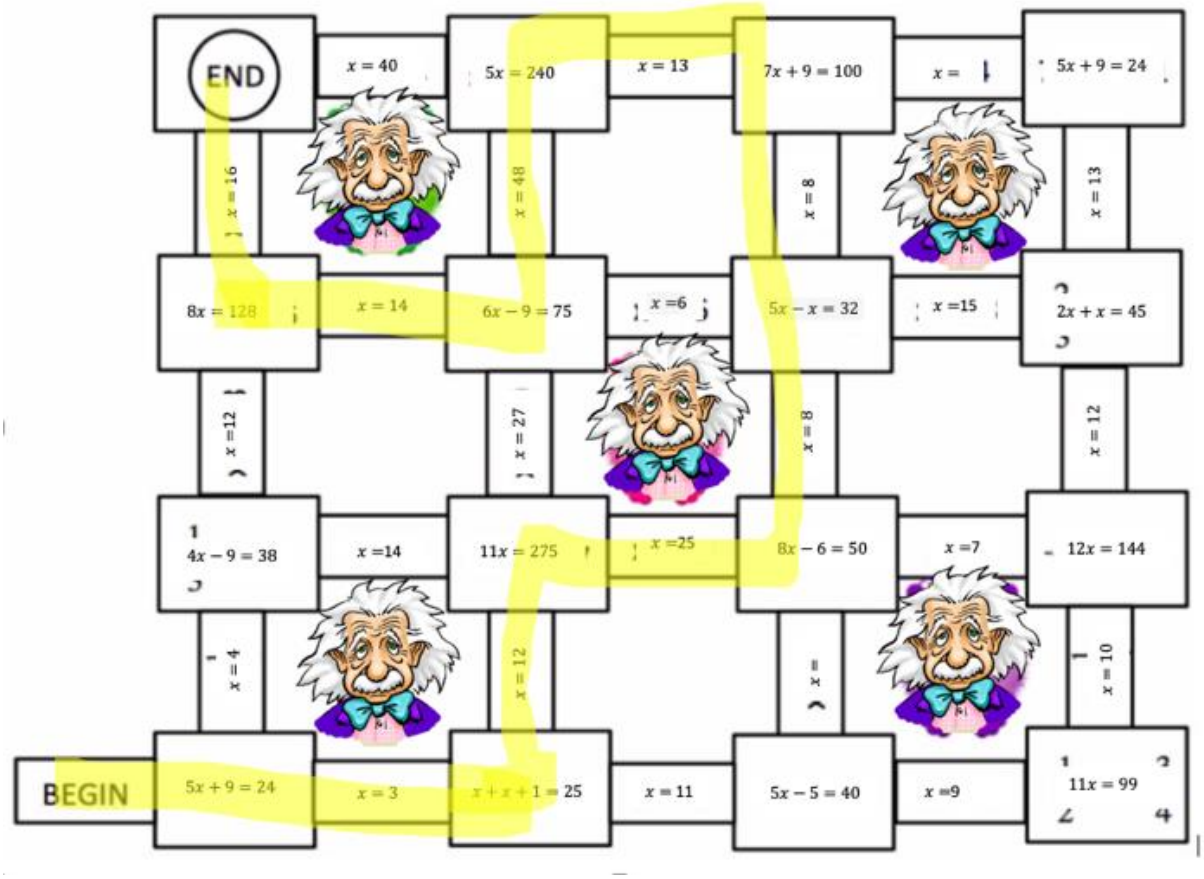
Por último, es importante que los estudiantes reconozcan el lenguaje algebraico que utilizarán, así como las definiciones o conceptos matemáticas que necesitarán. Para esto, una posibilidad es que realicen un diccionario matemático, en el que vayan consignando los términos nuevos para ellos y su significado.

A. Anexo: Labyrinth of equations




BEGIN
5x + 9 = 24
x = 4
4x − 9 = 38
8x = 128
x = 12
END
x = 40
x + x + 1 = 25
x = 11
5x − 5 = 40
x = 9
11x = 99
x = 10
11x = 275
x = 27
6x − 9 = 75
x = 6
5x − x = 32
x = 8
8x − 6 = 50
x = 7
x = 14
5x = 240
7x + 9 = 100
x = 13
2x + x = 45
12x = 144
5x + 9 = 24


END
x = 40
5x = 240
x = 13
7x + 9 = 100
5x + 9 = 24
x = 16
x = 48
x = 8
x = 13
8x = 128
x = 14
6x − 9 = 75
x = 6
5x − x = 32
x = 15
2x + x = 45
x = 12
x = 27
x = 8
x = 12
4x − 9 = 38
x = 14
11x = 275
x = 25
8x − 6 = 50
x = 7
12x = 144
x = 4
x = 12
x = 10
BEGIN
5x + 9 = 24
x = 3
x + x + 1 = 25
x = 11
5x − 5 = 40
x = 9
11x = 99


BEGIN
5x + 9 = 24
x = 3
x + x + 1 = 25
x = 11
5x − 5 = 40
x =9
11x = 99
x = 4
4x − 9 = 38
x =14
11x = 275
x = 12
x =25
8x − 6 = 50
x =7
12x = 144
x = 10
8x = 128
x = 14
6x − 9 = 75
x =6
5x − x = 32
x =15
2x + x = 45
x =12
x = 27
x = 8
x = 12
x = 16
x = 40
5x = 240
x = 13
7x + 9 = 100
x =
5x + 9 = 24
x = 48
x = 8
x = 13
END

B. Anexo: Trial and error problems

Solve the following problems by trial and error

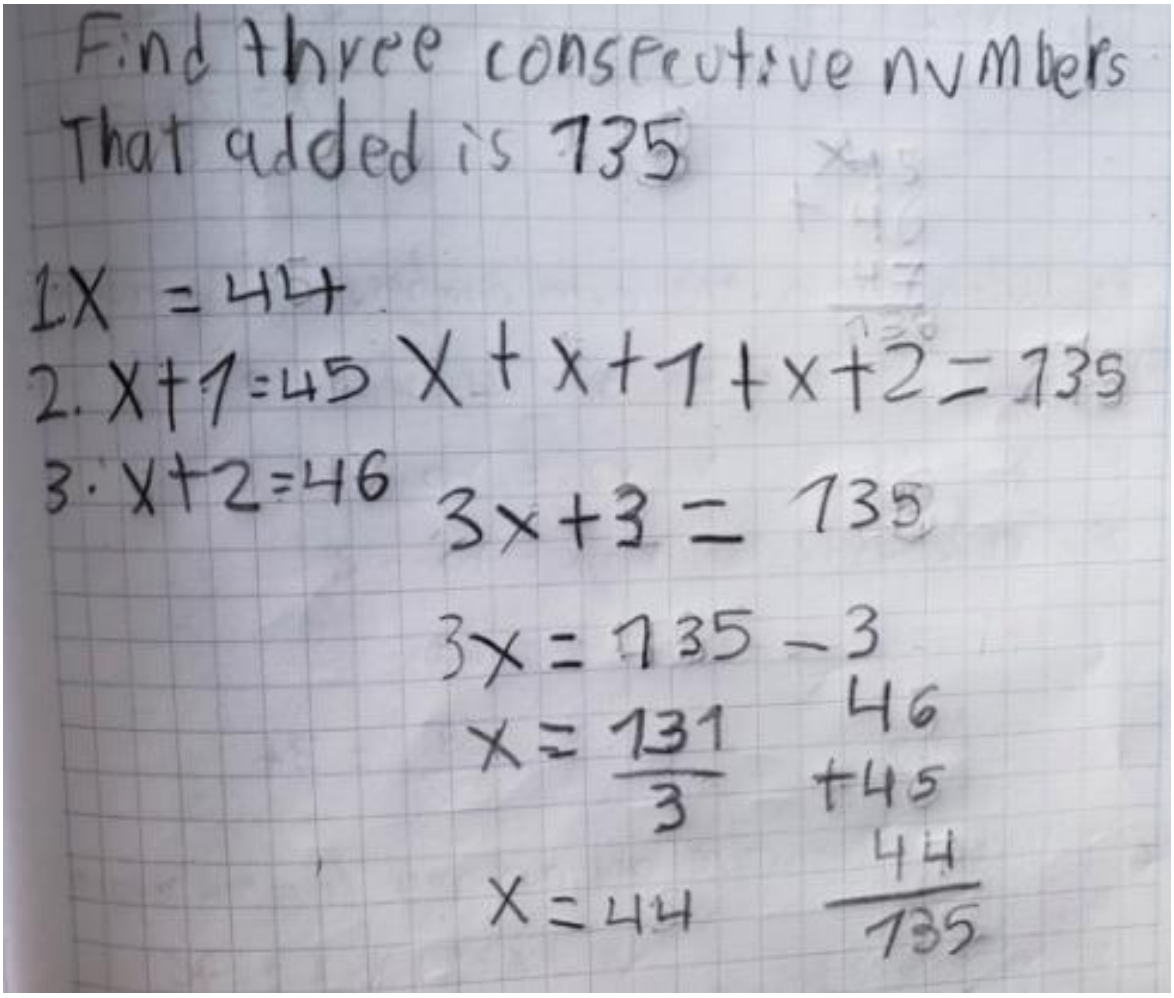
1) The sum of the number of Markers of Ruben and Daniel is equal to 84. If Ruben has as triple of markers as Daniel. How many Markers does each one have?

Daniel' markers	Ruben's Markers	Sum	Are they the numbers?
15	45	60	no
17	51	68	no
22	66	88	no
21	63	84	yes

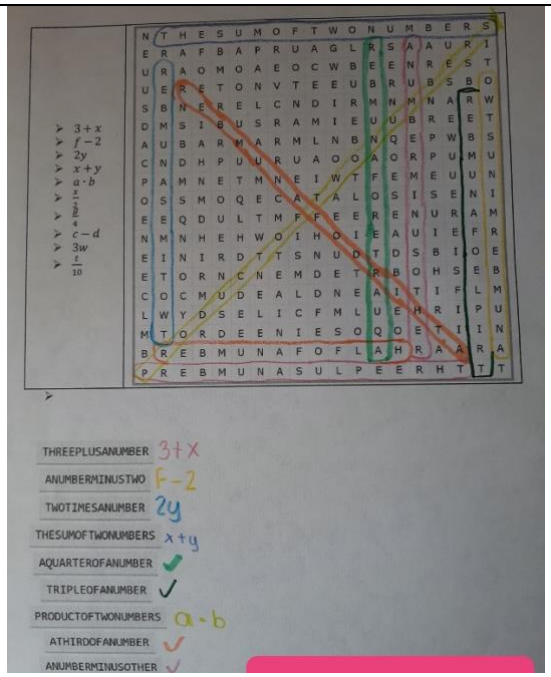
2) Mauricio is saving daily 2,000 pesos to buy a bike that cost 80,000. His grandmother gives him 38000 pesos. How long will it take to buy the bike?

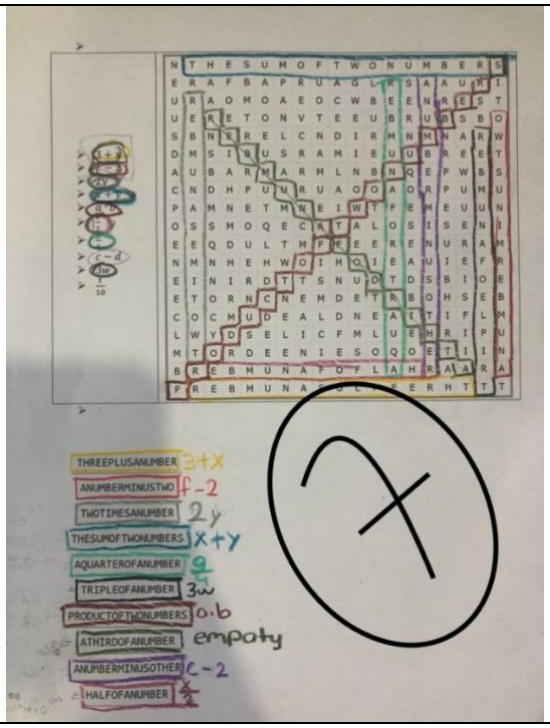
Days	Granmother + money saved	Money collected	Are they the numbers?
1	38000+2000	40000	no
5	38000+10000	48000	no
21	38000+40000	80000	Yes

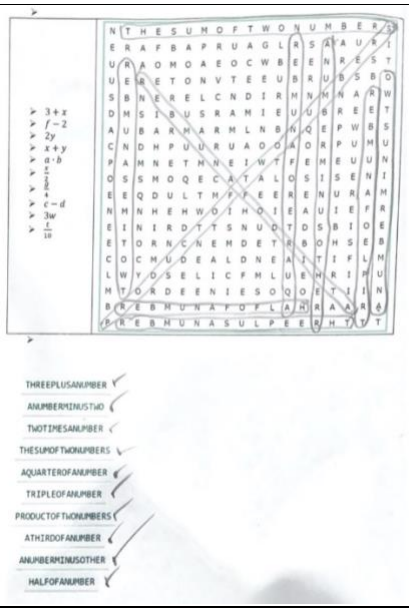
C. Anexo: Consecutive numbers

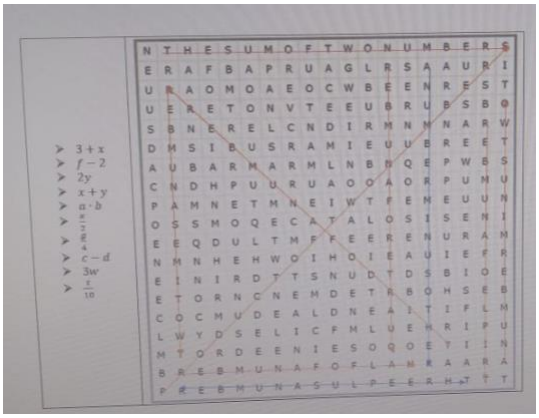


D. Anexo: Soup of letters









8. Bibliografía

Arroyo, G. C. (Julio de 2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un Colegio de Heredia. *Uniciencia, 28*(2), 15-44.

Bausela, E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación, 35*, 1-9.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Cárdenas, Ó. I. (2015). *IMPLEMENTAR UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA GENERAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA USANDO LAS TIC, EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA SANTA ELENA DEL MUNICIPIO DE MEDELLÍN.* Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Coxeter. H.S.M. (1993). Regular polytopes (Third edition). Dover publication.

Dalcín, M. & Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia. En C. R. Crespo, *Acta latinoamericana de matemática Educativa* (Vol. 20, págs. 150-155). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matematica Educativa.

De la Fuente Morales, E. (2017). Enseñanza de la Matemática por la Mayéutica. *PRAXIS INVESTIGATIVA REDIE, 9*(17), 53-60.

Flagg, M. (2017). Solving a System of Linear Equations Using Ancient Chinese methods. Linear Algebra.1. Retomado de: https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs_linear/1/ en febrero 17 de 2021.

Frege, G. (1972). *Los fundamentos de la aritmética.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Garcia M , P. T., Díaz, J. L. & Vargas, J. R. (2016). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *Epistemus, 20*, 55-61.

González Urbaneja, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. *Sigma: Revista de matemáticas*, 103-130.

Hernandez, R. M. (2017). Impacto de las TIC en la educación: Retos y Perspectivas. *Propositos y representaciones*, 325-347.

ICFES. (Abril de 2019). *ICFES.* Obtenido de ICFES: https://www2.icfes.gov.co

Kemmis , S. & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Kieran, C. & Yagüe, E. (1989). EL aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7*(3), 229-240.

Kolman, B. & Hill, D. (2006). *Algebra lineal Octava edición.* México: Pearson Educación.

Luque, C., Mora, L. & Torres, J. (2014). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Clasificar, medir e invertir.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Medina, I. & Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Alejandría: la aritmética.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

MEN. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. En M. d. educación, *Serie de lineamientos.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (2000). Lineamientos curriculares en matemáticas. En M. d. Educación, *Serie de lineamientos* (págs. 50-51). Bogotá: Magisterio.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. En M. d. Educación, *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (págs. 46-95). Bogotá: Magisterio.

Moreno, J. & Weingast, L. (2005). Historia de la Matemática - Parte 1 Ecuaciones Algebraicas. *Revista de educación matemática, 20*, 24-38.

Muñoz, M. & Ríos, C. (2008). Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra. *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ASOCOLME.* Bogotà: Colombia.

OCDE. (2014). *RESULTADOS DE PISA 2012 EN FOCO.* Obtenido de: LO QUE LOS ALUMNOS SABEN A LOS 15 AÑOS DE EDAD Y LO QUE PUEDEN HACER CON LO QUE SABEN: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

OCDE. (2016). *PISA 2015 RESULTADOS CLAVE.* Obtenido de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

OECD. (2019). *PISA 2018 RESULTS (VOLUME I).* Obtenido de What Students Can Know and Can Do: https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-results-volume-i_5f07c754-en

Olave, M. & Dalcín, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: su historia. En C. R. Crespo, *Acta latinoamericana de Matemática educativa* (págs. 156-161). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Perkins, K. (12 de 05 de 2014). *Betterlesson*. Recuperado el 18 de enero de 2018, de https://betterlesson.com/community/document/2891309/algebrasolvingoneandtwostepequationsmazesfree-pdf

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas .* México: Trillas.

Restrepo, B. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores, 8*, 9-19.

Stewart, I. (2012). *In Pursuit of the Unkown: 17 Equations That Change the World.* Basic Books.

Sullivan, M. (2006). *Àlgebra y trigonometría* (Vol. Séptima Edición). México: Pearson Educación.

Uspensky, J. V. (1995). *Teoría de Ecuaciones.* Balderas: Limusa S.A.

Zabala, F. A. (2013). *Estrategia de enseñanza en el planteamiento y solución de problemas con ecuaciones lineales mediada por un ambiente virtual en el grado octavo de la Institución Educativa San José de Itagüí-Antioquia (Trabajo final de Maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Zúñiga, G. (2013). Metodología Singapur: el caso del Método Singapur del Modelo de Barras. Una mirada Sociepistemológica. 35-36. Chile.