UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

CONTEO DE SIMETRÍAS EN OBJETOS DISCRETOS

ANDRÉS RICARDO MORENO GARZÓN

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Enero de 2023

CONTEO DE SIMETRÍAS EN OBJETOS DISCRETOS

ANDRÉS RICARDO MORENO GARZÓN

Trabajo final de maestría presentado como requisito para optar al título de:

MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Director:
Doctor José Luis Ramirez

Línea de Investigación: Matemáticas Discretas
Grupo de Investigación: DISCREMATH

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
Enero de 2023

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia, y especialmente a mi madre, de quienes tuve apoyo constante, más aún en tiempos de pandemia, a quienes debo en gran parte el poder continuar y concluir mis estudios de maestría.

A la Universidad Nacional, donde crecí y me formé como un profesional integro y crítico, además de vivir allí una etapa de mi vida llena de aprendizajes, luchas y experiencias enriquecedoras.

A la Facultad de Ciencias, al Departamento de Matemáticas y a sus docentes, de quienes pude aprender y obtener enseñanzas valiosas para mi formación profesional y como persona.

Al director de tesis de maestría, José Luis Ramírez, por su continuo, dedicado y empeñado acompañamiento, su paciencia y su guía que fue fundamental para realizar a cabalidad este trabajo y culminar mis estudios.

Finalmente, agradezco a mis compañeros y compañeras, amigos y amigas de todos estos años, quienes han sido una compañía y soporte fundamental en esta etapa de mi vida.

Resumen

Conteo de Simetrías en Objetos Discretos

En este trabajo se estudia la ocurrencia en palabras, particiones de conjuntos y composiciones de enteros de las estadísticas pico simétrico, asociada a la ocurrencia del patrón **121**, y pico asimétrico, asociada a la ocurrencia de los patrones **132** y **231**, utilizando métodos combinatorios y analíticos como conteo directo, funciones generatrices, fórmulas recursivas y el método simbólico. En palabras, con base en las ideas y resultados obtenidos por Asakly en [1] se obtiene una nueva demostración por conteo para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en palabras. Posteriormente se extienden estas ideas, métodos y resultados para el estudio de la ocurrencia de picos simétricos y asimétricos en particiones de conjuntos y composiciones donde no se tienen resultados previos asociados, obteniendo fórmulas cerradas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos y extendiendo estos resultados a composiciones restringidas y composiciones palíndromas.

Palabras clave: Picos, simetrías, composiciones, conteo, método simbólico.

Abstract

Counting Symmetries in Discrete Objects

This paper studies the occurrence in words, set partitions, and compositions of integers of the symmetric peak statistics, associated with the occurrence of pattern **121**, and asymmetric peak, associated with the occurrence of patterns **132** and **231**, using combinatorial and analytical methods as direct counting, generating functions, recursive formulas and the symbolic method. In words, based on the ideas and results obtained by Asakly in [1], a new proof is obtained by counting for the number of symmetric and asymmetric peaks in words. Subsequently, these ideas, methods and results are extended for the study of the occurrence of symmetric and asymmetric peaks in partitions of sets and compositions where there are no previous associated results, obtaining closed formulas for the number of symmetric and asymmetric peaks and extending these results to restricted compositions and palindromic compositions.

Keywords: Peaks, symmetries, compositions, counting, symbolic method.

Índice general

Agradecimientos III

Resumen IV

Abstract V

Introducción VIII

1. Simetrías en Palabras **1**

1.1. Nota histórica 1

1.2. Definiciones y resultados básicos 2

1.3. Número de picos simétricos en palabras k-arias 3

1.3.1. Demostración combinatoria para la cantidad de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n. 11

1.4. Número de picos asimétricos en palabras k-arias 12

1.4.1. Demostración combinatoria para la cantidad de picos asimétricos en palabras k-arias de longitud n. 14

1.5. l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias 15

2. Simetrías en Particiones de Conjuntos **18**

2.1. Nota histórica. 18

2.2. Particiones de un conjunto. 19

2.2.1. Resultados preliminares. 19

2.2.2. Representación canónica de una partición. 21

2.3. l-picos en palabras y particiones de conjuntos. 21

2.3.1. Función generatriz de las palabras k-arias de acuerdo a su número de l-picos. 21

2.3.2. Función generatriz de particiones de conjuntos de acuerdo a su número de l-picos. 23

2.3.3. Número de l-picos en palabras k-arias y particiones de conjuntos. . . . 27

2.3.4. Número de l-picos simétricos en particiones de conjuntos. 31

3. Simetrías en Composiciones **34**

3.1. Nota histórica. 34

3.2. Preliminares. 35

3.2.1. Definiciones y resultados básicos. 35

3.2.2. Funciones generatriz para las sucesiones $C(n)$ y $C(n,k)$. 37

3.2.3. Composiciones con partes restringidas. 38

3.3. Picos en composiciones. 39

3.3.1. Cantidad de picos en composiciones de n. 43

3.3.2. Función generatriz respecto al número de picos simétricos. 47

3.3.3. Función generatriz respecto al número de picos asimétricos. 50

3.3.4. l-picos en composiciones. 56

3.4. Picos en composiciones restringidas. 57

3.4.1. Función generatriz respecto al número de picos en composiciones restringidas. 61

3.4.2. Picos en composiciones palíndromas. 62

3.5. Análisis asintótico. 66

Conclusiones **68**

Bibliografía **70**

Introducción

La enumeración y estudio de parámetros o estadísticas en diferentes objetos combinatorios (árboles, palabras, particiones, composiciones, caminos de Dyck, palabras de Catalan, etc.) es actualmente una parte relevante de la investigación y estudio en combinatoria enumerativa. Si bien, el estudio de objetos combinatorios data de siglos atrás, la investigación y estudio de estadísticas distintas a la cantidad de objetos es relativamente reciente. Algunos de los primeros resultados los obtuvo Leonard Euler en 1749. Por ejemplo, Euler introdujo el polinomio euleriano que facilita evaluar la función η de Dirichlet, resultó ser la función generatriz para el número de descensos en permutaciones, sin embargo, no se tuvo un interés en estudiarlo desde un punto de vista combinatorio (lo harían posteriormente Foata y Schützenberger en 1970). Posteriormente, Mac Mahon inició en 1880 su estudio sobre objetos combinatorios, obteniendo la función generatriz de la ocurrencia del patrón 21 en permutaciones [10]. A partir de 1960, matemáticos y científicos de la computación como Carlitz, Knuth, Rotem, Royers, Simon, Smith, entre otros, publicaron diversos artículos y resultados que pueden considerarse como el inicio del estudio moderno de patrones en palabras y diferentes tipos de palabras restringidas [10]. En las últimas décadas el número de investigadores interesados en el estudio de estadísticas sobre distintos objetos combinatorios, así como la cantidad de artículos publicados y resultados obtenidos es bastante robusto, considerándose la combinatoria enumerativa como un importante campo de investigación de la matemática discreta y la combinatoria. Entre los matemáticos que destacan por sus investigaciones en esta área en los años recientes se encuentran Mansour, Kitaev, Burstein, Heubach, Shattuck, Munagi, entre otros [7, 12].

Un patrón $\mathbf{p}$ es una sucesión de enteros positivos consecutivos que incluyen el 1, por ejemplo, los patrones de longitud 2 son **11** (nivel), **12** (ascenso), **21** (descenso). La ocurrencia de un patrón $\mathbf{p}$ en un objeto combinatorio es la ocurrencia no necesariamente consecutiva de una subsucesión de elementos que al ser reducida (asignar a cada elemento su posición de menor a mayor en la subsucesión) coincide con el patrón $\mathbf{p}$. Por ejemplo, en la palabra $w = 3\ 4\ 3\ 4\ 2\ 5$, se puede observar la ocurrencia del patrón **213**, asociado a las subsucesiones 325, 435 y 425; también se puede observar que la palabra w evita el patrón 111, dado que w no contiene tres elementos iguales. Diferentes técnicas y métodos se han adecuado, creado o implementado

para abordar este tipo de problemas, entre los que se encuentran el manejo de funciones generatrices, análisis combinatorio, el método simbólico, etc. De igual forma se han generado diferentes representaciones que permiten visualizar objetos combinatorios y los lugares donde se da la ocurrencia de patrones. Una representación clásica, que permite identificar diferentes características y patrones, es la representación por un gráfico de barras. En esta representación la altura de la barra en la posición i corresponde al valor del elemento en la posición i del objeto combinatorio. En la Figura 1 se tiene la representación como gráfico de barras de la palabra $w = 3\ 4\ 3\ 4\ 2\ 5$, y de color rojo se pueden observar las columnas que forman el patrón **213** asociados a las subpalabras 325, 435 y 425, respectivamente.

$$w\ =\ 3\ 4\ 3\ 4\ 2\ 5$$

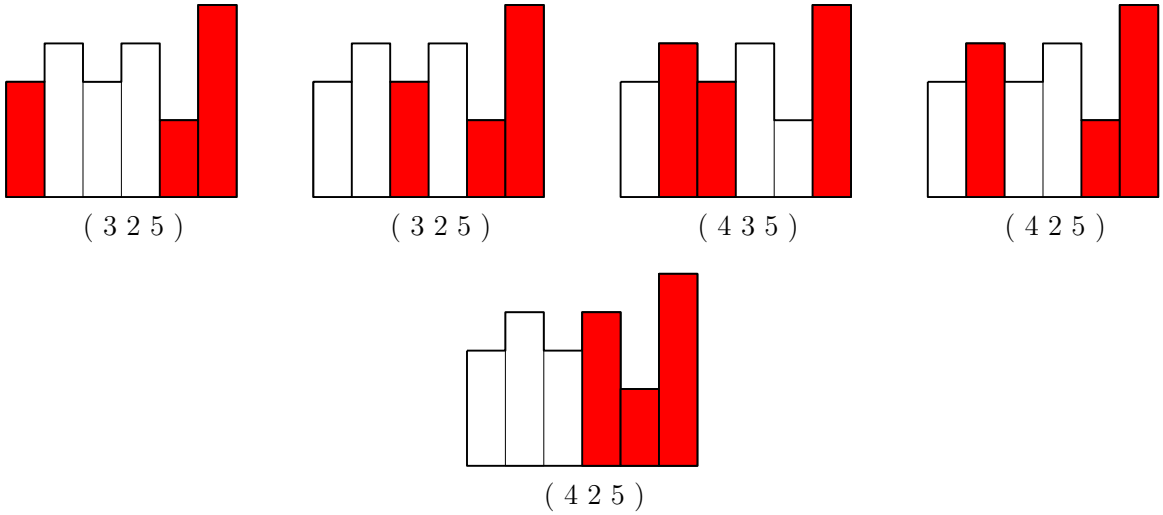


Figura 1: Diagramas de barras de la palabra 343425 con el patrón **213** (en rojo).

La ocurrencia de patrones en diferentes objetos combinatorios ha sido bastante estudiada en las últimas décadas, aún así el caso general es un problema difícil y se tienen pocos resultados al respecto. Entre una gran cantidad de trabajos sobre patrones en objetos combinatorios podemos mencionar algunos libros donde se recopilan y obtienen resultados al respecto. Por ejemplo, en [10] podemos encontrar distintas estadísticas y resultados sobre patrones en permutaciones, en [7] se recopilan y muestran diferentes resultados sobre estadísticas y funciones generatrices de palabras y composiciones, mientras que en [12] Mansour realiza un trabajo análogo para particiones de conjuntos.

Una clase particular de patrones son los patrones consecutivos, consisten en patrones cuya ocurrencia se da en símbolos consecutivos del objeto combinatorio. Por ejemplo, en la palabra $w = 3\ 4\ 3\ 4\ 2\ 5$ se tiene el patrón consecutivo **<u>212</u>** correspondiente a la subpalabra 434, pero

no se tiene la ocurrencia del patrón consecutivo **221**, aunque se tiene la ocurrencia del patrón **221** (no necesariamente consecutivo) asociado a las subsecuencias 442 y 332. Estadísticas importantes asociadas a patrones consecutivos como ascensos, descensos, niveles, picos, valles, patrones tipo $\vee$ y $\wedge$, entre otros, han sido de bastante interés y estudiadas en distintos objetos combinatorios. En la Figura 2 se tiene una representación en gráficos de barras de algunas estadísticas con sus respectivos patrones consecutivos asociados.

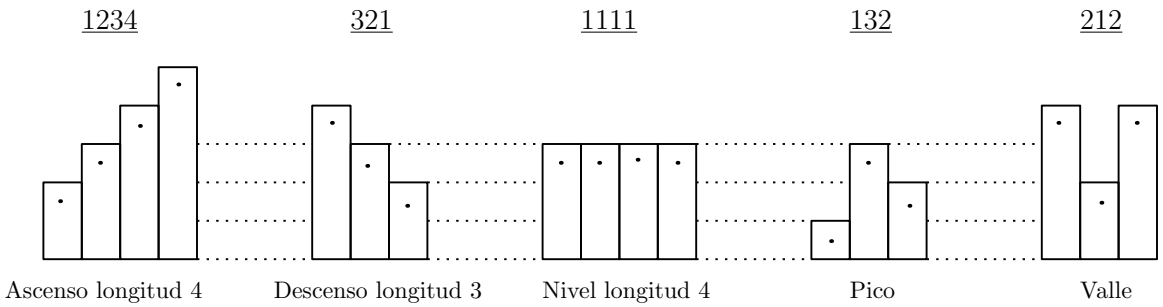


Figura 2: Representación en diagramas de barras para las estadísticas ascensos, descensos, niveles, picos y valles asociadas a la ocurrencia de su respectivo patrón consecutivo.

En el presente trabajo nos centraremos en el estudio y conteo en objetos combinatorios de los patrones consecutivos conocidos como picos, clasificándolos en dos tipos, simétricos, asociados a la ocurrencia del patrón consecutivo **121**, y asimétricos asociados a la ocurrencia de los patrones consecutivos **132** o **231**. En el caso del estudio general de picos se tienen resultados previos en varios objetos combinatorios, por ejemplo, en permutaciones [10], composiciones [8], palabras [12], caminos de Dyck [3], particiones de conjuntos [2] y caminos de Dyck no decrecientes [4]. Sin embargo, haciendo la diferenciación entre picos simétricos y asimétricos solo se tienen dos resultados previos, Asakly en [1] estudia los picos simétricos y asimétricos en palabras, y Florez y Ramírez en [6] estudian la ocurrencia de picos simétricos y asimétricos en caminos de Dyck, sin embargo, vale aclarar que en caminos de Dyck la noción de pico no está directamente asociada a la ocurrencia de un patrón en alguna representación por sucesiones de enteros positivos del objeto combinatorio.

Para el estudio y conteo de picos simétricos y asimétricos en distintos objetos discretos, en el presente trabajo se hace uso de resultados conocidos como identidades y fórmulas recursivas. Se útilizan métodos de la combinatoria analítica para abordar este tipo de problemas, que en parte pueden consultarse en [5]. Principalmente se hace uso del cálculo de funciones generatrices mediante el método simbólico, con el fin de determinar un coeficiente que coincida con el $n-$ésimo término de la sucesión de conteo de interés, esto haciendo uso de propiedades de sumatorias, productorias y otras herramientas del análisis combinatorio. Otro método importante es la obtención de aproximaciones asintóticas con base en teoría y resultados del

análisis complejo sobre los polos de funciones generatrices.

Este trabajo final de maestría consta de 3 capítulos. En el Capítulo 1 se estudian las definiciones y resultados previos respecto a la ocurrencia de picos simétricos y asimétricos en palabras, principalmente los resultados y métodos usados por Asakly en [1]. Adicionalmente, se da una demostración alternativa por métodos combinatorios para obtener los mismos resultados.

En el Capítulo 2 se estudian las definiciones y resultados previos respecto a la ocurrencia de picos en particiones de conjuntos. En este caso se estudian los picos en la representación canónica, principalmente los métodos y resultados obtenidos por Asakly en [2] para la cantidad de l-picos en palabras y particiones de conjuntos a partir la función generatriz. Usando métodos análogos se obtienen fórmulas cerradas de la cantidad de picos simétricos y asimétricos en particiones de conjuntos.

En el Capítulo 3 se estudian las definiciones y resultados previos respecto a la ocurrencia de picos en composiciones de enteros. Se encuentran resultados y fórmulas cerradas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos, y se extienden estos resultados y métodos para obtener resultados análogos en composiciones restringidas a un conjunto dado, composiciones palíndromas, entre otros tipos de variaciones o composiciones restringidas. Finalmente, por medio de herramientas de análisis y aproximaciones asintóticas se dan las equivalencias asintóticas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones y se calcula su proporción respecto a la cantidad de picos en general. Este Capítulo 3 contituye un aporte novedoso de este trabajo final.

Otros resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo son:

- Artículo de investigación *Symmetric and asymmetric peaks in compositions* [13] (sometido).
- Conferencia *Conteo de simetrías en objetos discretos* en el seminario DISCREMATH 2022-II, del departamento de matemáticas de la Univerisdad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

Capítulo 1

Simetrías en Palabras

En el presente capítulo se introduce la noción de simetría sobre palabras k-arias. Posteriormente presentamos algunos resultados sobre la función generatriz de las palabras k-arias de longitud n respecto a la cantidad de picos simétricos y asimétricos. Adicinalmente se presentan dos demostraciones de una fórmula cerrada para calcular el total de picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias de longitud n. En la primera demostración se utiliza la función generatriz y en la segunda se utilizan únicamente argumentos combinatorios. Posteriormente, se extienden los resultados para calcular la cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias de longitud n. Estos resultados se basan en el artículo de Asakly [1], aunque la demostración combinatoria dada en los Teoremas 6 y 9 es nueva.

1.1. Nota histórica

Silvia Heubach y Toufic Mansour [7] recopilaron parte de la historia sobre el trabajo e investigación con palabras en la literatura y cultura matemática, aquí dejaremos algunos apuntes. Las palabras surgen naturalmente en entornos diferentes y se han abordado desde diferentes áreas y perspectivas, por ejemplo, en la teoría de grupos para describir álgebras, en la teoría de probabilidades para describir experimentos y en ciencias de la computación en el contexto de autómatas y lenguajes formales. Los resultados básicos, como el número total de palabras, formaban parte del folclore matemático mucho antes de que se emprendiera un estudio sistemático de sus propiedades.

Lo que parece ser el primer estudio sistemático de palabras se encuentra en tres artículos de Axel Thue de los años 1906, 1912 y 1914; y en un artículo de MacMahon de 1913. El trabajo de Thue es sobre palabras infinitas (sucesiones de símbolos) desde la teoría de números, mientras que MacMahon se acercó a las palabras, a las que llamó ensamblaje de objetos, en el contexto de particiones de enteros y permutaciones.

Durante algún tiempo se conocían pocos resultados y artículos. Schensted en 1961 obtuvo resultados sobre el número de subsucesiones crecientes y decrecientes maximales en palabras. Carlitz y sus colaboradores enumeraron diferentes estadísticas o parámetros sobre palabras en varios artículos de la década de los 70. En 1983, un grupo de autores franceses alumnos de M.P. Schützenberger, bajo el seudónimo de M. Lothaire, el *nom du plume*, escriben el primero de dos volúmenes sobre la combinatoria de palabras desde un punto de vista algebraico y de teoría de grupos.

Finalmente, para la última década del siglo XX y lo corrido del siglo XXI se ha avanzado en la investigación y publicación de artículos con diversos resultados, estadísticas, restricciones y variaciones de palabras. Algunos nombres de matemáticos que resaltan en estas investigaciones son Burstein, Foata, Kitaev, Mansour, entre otros.

1.2. Definiciones y resultados básicos

Definición 1. Un **alfabeto** es un conjunto finito cuyos elementos se llaman símbolos. Una **palabra** es una sucesión o arreglo finito de símbolos sobre un alfabeto. Dado K un entero positivo, $[k]$ denotará el alfabeto totalmente ordenado $\{1, 2, 3, ..., k\}$. Las palabras sobre el alfabeto $[k]$ son llamadas **palabras k-arias** y corresponden a todos los posibles arreglos de una longitud dada n que pueden formarse con elementos de $[k]$ (se pueden tener repeticiones).

Es claro que el total de palabras de longitud n con k símbolos es k^n. Esto corresponde a la cantidad de posibles formas de organizar k elementos en n espacios.

Definición 2. Dada una palabra $w = w_1 w_2 \cdots w_{i-1} w_i w_{i+1} \cdots w_{n-1} w_n$. Decimos que w tiene un **pico simétrico** en la posición i, con $2 \leq i \leq n-1$, si $w_{i-1} = w_{i+1} \leq w_i$. Decimos que w tiene un **pico asimétrico** en la posición i, con $2 \leq i \leq n-1$, si $w_{i-1} \leq w_i$, $w_{i+1} \leq w_i$ y $w_{i-1} \neq w_{i+1}$.

De la Definición 2 es claro que una palabra k-aria de longitud n no puede tener picos en las posiciones 1 y n, puesto que no tienen elemento anterior ni posterior, respectivamente.

Algunos ejemplos de palabras k-arias son:

$w = 23211132$ es una palabra 3-aria de longitud 8.

$v = 143114$ es una palabra 4-aria de longitud 6.

En los ejemplos anteriores se tiene para la palabra w un pico simétrico en la posición 2, dado por la subpalabra 232, y un pico asimétrico en la posición 7, dado por la subpalabra 132, mientras que para la palabra v se tiene únicamente un pico asimétrico en la posición 2, dado por la subpalabra 143.

Las palabras k-arias tienen una representación simbólica en **gráficos de barras**, tal que a cada símbolo de la palabra se le asocia una barra de la longitud correspondiente al símbolo. Las barras se organizan de manera consecutiva según la posición de cada elemento. En la Figura 1.2 podemos observar la representación gráfica de las palabras w y v del último ejemplo, además de los respectivos picos simétricos (rojo) y asimétricos (azul).

$w = 2\,3\,2\,1\,1\,1\,3\,2$ $\qquad$ $v = 1\,4\,3\,1\,1\,4$

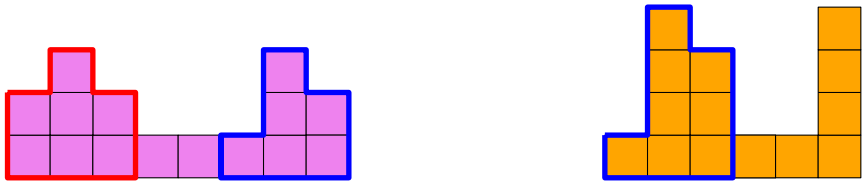


Figura 1.1: Picos simétricos (rojo) y asimétricos (azul).

1.3. Número de picos simétricos en palabras k-arias

Asakly [1] da una fórmula exacta para el número de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n. A continuación se darán dos demostraciones de esta fórmula, la primera demostración se toma de [1]. Esta demostración utiliza el método simbólico (ver [5]) para encontrar la función generatriz respecto a la longitud de la palabra y su número de picos simétricos. La segunda demostración se realiza por conteo y es uno de los primeros aportes propios de este documento. Para la primera demostración se darán algunos resultados y dos lemas previos.

Notación: Dada una palabra w, la cantidad de picos simétricos de w se denota por $u(w)$.

Sea $W_k(x,q)$ la función generatriz para el número de palabras k-arias de longitud n según el número de picos simétricos $u(w)$, explícitamente se tiene que

$$W_k(x,q) = \sum_{n\geq 0}\left(x^n \sum_{w\in[k]^n} q^{u(w)}\right), \tag{1.1}$$

con el valor inicial $W_0(x,q) = 1$.

A continuación se calculan las funciones generatrices de 5 tipos de palabras k-arias que se utilizan posteriormente para dar una expresión para $W_k(x,q)$.

(i) La palabra que consiste únicamente de la letra k. Esta palabra es de longitud 1 y no tiene picos simétricos, entonces su función generatriz es $x^1q^0 = x$.

(ii) Palabras de la forma $w'k$, donde w' es una palabra $(k-1)$-aria no vacía. Dado que w' es no vacía, la longitud mínima de $w'k$ es 2 y en la última posición, donde se encuentra la letra k, no se pueden tener picos simétricos y tampoco en la posición $n-1$ ya que la letra que le sigue en la posición n es k. Por lo tanto, en las palabras de la forma $w'k$ los únicos picos simétricos que se pueden tener son los que se encuentren en w'. Luego, la función generatriz de las palabras de la forma $w'k$ está dada por:

$$\sum_{n\geq 2}\left(x^n \sum_{w\in[k-1]^{n-1}} q^{u(w)}\right) = x\sum_{n\geq 2}\left(x^{n-1} \sum_{w\in[k-1]^{n-1}} q^{u(w)}\right).$$

Realizando la sustitución $m = n-1$, se obtiene la siguiente igualdad

$$x\sum_{m\geq 1}\left(x^m \sum_{w\in[k-1]^{m}} q^{u(w)}\right) = x\left[\sum_{m\geq 0}\left(x^m \sum_{w\in[k-1]^{m}} q^{u(w)}\right) - 1\right] = x(W_{k-1}(x,q)-1).$$

Otra forma de encontrar esta función generatriz es analizando el gráfico de barras de $w'k$, que se muestra en la Figura 1.2, donde podemos observar que la parte en rojo representa la letra k, su función generatriz es x ya que su longitud es 1 y no aporta ningún pico simétrico, mientras que la parte en azul corresponde a w', su función generatriz es la de las palabras $(k-1)$-arias quitando la palabra vacía, por lo que se le resta 1.

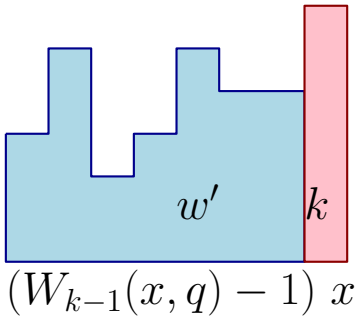


Figura 1.2: Gráfico de barras de $w'k$.

Para simplificar nuestro análisis continuaremos únicamente haciendo el acercamiento a partir de los gráficos de barras. Esto se conoce como el método simbólico, ver el libro de Flayolet y

Sedgewick [5].

(*iii*) Palabras de la forma kw'', donde w'' es una palabra k-aria no vacía. En la Figura 1.3 podemos observar el grafico de barras correspondiente.

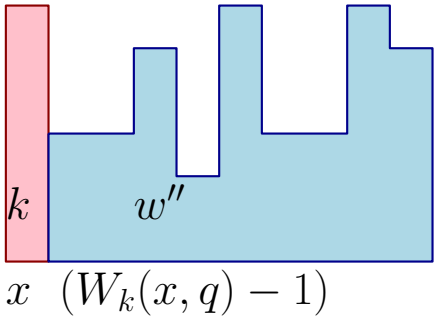


Figura 1.3: Gráfico de barras de kw''.

En la Figura 1.3 la parte en rojo representa la letra k y su función generatriz es x ya que no aporta ningún pico simétrico y su longitud es 1, mientras que, la parte en azul, que corresponde a w'', su función generatriz es la de las palabras k-arias quitando la palabra vacía, por lo que se le resta 1. Por lo tanto, se obtiene la función generatriz $x(W_k(x,q)-1)$.

(*iv*) Palabras de la forma $w'kw'''$, donde w''' es una palabra k-aria no vacía cuya primera letra es igual a la última letra de w'. Veamos el gráfico simbólico en la Figura 1.4

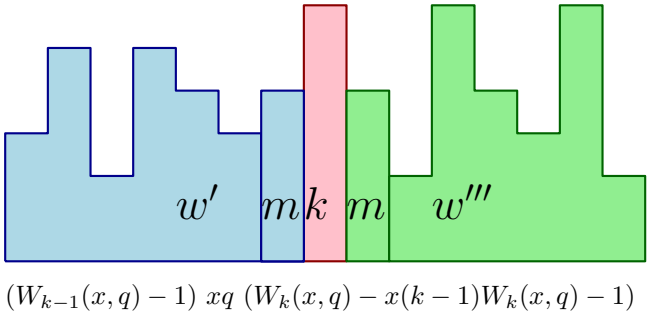


Figura 1.4: Gráfico de barras de $w'kw'''$.

En la Figura 1.4 la parte en rojo representa la letra k, que aporta un pico simétrico para cualquier palabra, por lo tanto, su función generatriz es xq. La parte en azul, corresponde a w', su función generatriz es la de las palabras $(k-1)$-arias quitando la palabra vacía, por lo tanto, su función generatriz es $(W_{k-1}(x,q)-1)$. Para la parte verde, que representa w''', esto es las palabras k-arias quitando la palabra vacía por lo que se resta 1, y además teniendo en cuenta que el primer símbolo de w''' debe ser igual al último de w'. Si se fija el último

símbolo de w', por ejemplo m, se deben restar las demás opciones de w''', que corresponden a las palabras w''' que inician con un símbolo distinto a m, en total para este primer símbolo se tienen $(k-1)$ opciones y para los demás símbolos de w''' no se tienen restricciones, entonces serán las palabras k-arias de longitud $n-1$ ya que no se tiene en cuenta el primer símbolo. Teniendo en cuenta este análisis se concluye que la función generatriz de las palabras de la forma $w'kw'''$ está dado por:

$$(W_{k-1}(x,q)-1)xq(W_k(x,q)-(k-1)xW_k(x,q)-1).$$

(v) Palabras de la forma $w'kbw''''$, donde w'''' es una palabra k-aria (puede ser vacía) y b una letra diferente a la última letra de w' con $1 \leq b \leq k$. En la Figura 1.5 podemos observar el gráfico de barras de $w'kbw''''$. La parte en rojo representa la letra k, su función generatriz es x, ya que no aporta ningún pico simétrico pues la letra que le antecede y la que le sigue son distintas, además es de longitud 1. La parte en morado representa la letra b que es de longitud 1 y dada w' fija, tiene la condición de ser distinta a la última letra de w', por lo que se tienen $(k-1)$ opciones para b y no aporta ningún pico simétrico, ya que le antecede la letra k. Entonces, la función generatriz de esta parte es $x(k-1)$. La parte en azul corresponde a w' distinta de vacía, su función generatriz es $W_{k-1}(x,q)-1$, que corresponde a las palabras $(k-1)$-arias quitando la palabra vacía, por lo que se le resta 1. La parte verde representa a w'''' que es una palabra k-aria sin restricción, entonces su función generatriz es $W_k(x,q)$. Por lo tanto, la función generatriz de las palabras k-arias de la forma $w'kbw''''$ es $(W_{k-1}(x,q)-1)x^2(k-1)W_k(x,q)$.

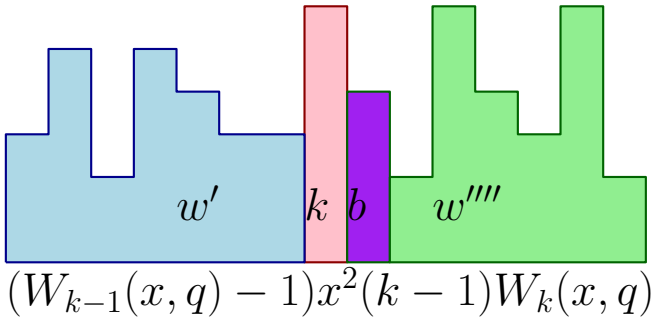


Figura 1.5: Gráfico de barras de $w'kbw''''$.

Utilizando los resultados anteriores probaremos una fórmula recursiva para la función generatriz (1.1).

Lema 3. *La función generatriz $W_k(x,q)$ satisface la relación de recurrencia*

$$W_k(x,q)=\frac{x(q-1)+(1-x(q-1))W_{k-1}(x,q)}{1-x(1-q)(1-(k-1)x)-xW_{k-1}(x,q)(x(k-1)+q(1-x(k-1)))}, \quad (1.2)$$

con el valor inicial $W_0(x,q) = 1$.

Demostración. El conjunto de las palabras k-arias de longitud n es la unión de las palabras k-arias de longitud n que contienen la letra k y las que no contienen la letra k, entonces

$$W_k(x,q) = W_{k-1}(x,q) + W_k^*(x,q), \tag{1.3}$$

donde $W_k^*(x,q)$ es la función generatriz de las palabras k-arias de longitud n que contienen la letra k.

Las palabras k-arias que contienen la letra k se pueden clasificar en: k, $w'k$, donde w' es una palabra $(k-1)$-aria no vacía, kw'', donde w'' es una palabra k-aria no vacía, $w'kw'''$, donde w''' es una palabra k-aria no vacía cuya primer letra es igual a la última letra de w', $w'kbw''''$, donde w'''' es una palabra k-aria (puede ser vacía) y b es una letra diferente a la última letra de w'. Utilizando las funciones generatrices (i), (ii), (iii), (iv) y (v) obtenidas previamente se obtiene que:

$$\begin{aligned} W_k^*(x,q) = x + x(W_{k-1}(x,q)-1) + x(W_k(x,q)-1) + x^2(W_{k-1}(x,q)-1)(k-1)W_k(x,q) \\ + xq(W_{k-1}(x,q)-1)(W_k(x,q)-1-(k-1)xW_k(x,q)). \end{aligned}$$

Al remplazar la igualdad anterior en la ecuación (1.3), agrupando y despejando adecuadamente se obtiene:

$$W_k(x,q) = \frac{x(q-1) + W_{k-1}(x,q)(1-x(q-1))}{1-x(1-q)(1-x(k-1)) - xW_{k-1}(x,q)(x(k-1)+q(1-x(k-1)))}.$$

□

Ejemplo 4. Utilizando la recursión mostrada en el teorema anterior, calculamos $W_k(x,q)$ para $k = 1, 2, 3$.

- Para $k = 1$

$$W_1(x,q) = \frac{x(q-1) + W_0(x,q)(1-x(q-1))}{1-x(1-q)-xqW_0(x,q)} = \frac{1}{1-x}.$$

- Para $k = 2$

$$W_2(x,q) = \frac{x(q-1) + W_1(x,q)(1-x(q-1))}{1-x(1-q)(1-x)-xW_1(x,q)(x+q(1-x))} = \frac{1-(q-1)x^2}{1-x(2+x(q-1)(1-x))}.$$

- Para $k = 3$

$$W_3(x,q) = \frac{x(q-1) + W_2(x,q)(1-x(q-1))}{1-x(1-q)(1-2x) - xW_2(x,q)(2x+q(1-2x))}$$
$$= \frac{(q-1)x^2\left(3-(q-1)x^2\right)-1}{x\left((q-1)x(2x-1)\left((q-1)x^2-3\right)+3\right)-1}.$$

En el siguiente lema probamos un resultado adicional.

Lema 5. *Para todo $k \geq 0$ se tiene que:*

$$W_k(x,1) = \frac{1}{1-kx}. \tag{1.4}$$

Demostración. Primero evaluemos en $q = 1$ la fórmula recursiva (1.2):

$$W_k(x,1) = \frac{W_{k-1}(x,1)}{1-xW_{k-1}(x,1)}.$$

Utilizando esta igualdad procedemos a realizar la demostración por inducción sobre k. Para $k = 0$, por definición $W_0(x,1) = 1$. Para $k = 1$, $W_1(x,1) = \frac{W_0(x,1)}{1-xW_0(x,1)} = \frac{1}{1-x}$.

Supongamos que para $k = n$, se tiene $W_n(x,1) = \frac{1}{1-nx}$. Probemos entonces que se cumple para $k = n+1$. En efecto tenemos que:

$$W_{n+1}(x,1) = \frac{W_n(x,1)}{1-xW_n(x,1)} = \frac{\frac{1}{1-nx}}{1-x\frac{1}{1-nx}} = \frac{1}{1-nx-x} = \frac{1}{1-(n+1)x}.$$

Quedando demostrado por el principio de inducción matemática. □

Teorema 6. *El número total de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n es*

$$psw(n,k) = (n-2)\binom{k}{2}k^{n-3}. \tag{1.5}$$

Demostración. Se define la función $V_k(x) = \frac{d}{dq}W_k(x,1)$. Para encontrar $V_k(x)$ realizaremos una prueba de la siguiente fórmula recursiva procediendo por inducción sobre n

$$V_n(x) = \frac{x^3\binom{n}{2}}{(1-nx)^2}.$$

Para $n = 0$, por definición $W_0(x,1) = 1$, entonces

$$V_0(x) = \frac{d}{dq}W_0(x,1) = \frac{d}{dq}1 = 0 = \frac{x^3\binom{0}{2}}{(1-(0)x)^2}.$$

Para $n = 1$ se sabe que $W_1(x,q) = \frac{1}{1-x}$. Entonces

$$V_1(x) = \frac{d}{dq}W_1(x,1) = 0 = \frac{x^3\binom{1}{2}}{(1-x)^2}.$$

Supongamos que se cumple para $n = k-1$, es decir

$$V_{k-1}(x) = \frac{x^3\binom{k-1}{2}}{(1-(k-1)x)^2}.$$

Probemos que se cumple para $n = k$. Para esto se deriva la fórmula recursiva (1.2) respecto a q y posteriormente se evalúa en $q = 1$. Debido a la cantidad de términos que tiene la fórmula recursiva (1.2), por facilidad en los cálculos evaluamos primero el numerador y el denominador en $q = 1$, posteriormente derivamos y evaluamos ambas derivadas en $q = 1$.

Para el numerador de la fórmula recursiva (1.2) al evaluarlo en $q = 1$ y utilizando la igualdad (1.4) se tiene que:

$$x((1)-1) + (1 - x((1)-1))W_{k-1}(x,1) = \frac{1}{1-x(k-1)}. \tag{1.6}$$

Además, su derivada respecto a q es

$$\frac{d}{dq}(x(q-1) + (1-x(q-1))W_{k-1}(x,q)) = x + (1-x(q-1))\frac{d}{dq}W_{k-1}(x,q) - xW_{k-1}(x,q).$$

Evaluando en $q = 1$ y utilizando la igualdad (1.4) se obtiene

$$x + V_{k-1}(x) - \frac{x}{1-x(k-1)}. \tag{1.7}$$

Para el denominador de la fórmula recursiva (1.2) al evaluarlo en $q = 1$ y utilizando la igualdad (1.4) se obtiene que:

$$1-x(1-(1))(1-(k-1)x)-xW_{k-1}(x,1)(x(k-1)+(1)(1-x(k-1))) = 1-\frac{x}{1-x(k-1)}. \tag{1.8}$$

Su derivada respecto a q es

$\frac{d}{dq}(1 - x(1-q)(1-(k-1)x) - xW_{k-1}(x,q)(x(k-1) + q(1-x(k-1))))$

$= x(1-(k-1)x) - x\frac{d}{dq}W_{k-1}(x,q)(x(k-1) + q(1-x(k-1))) - xW_{k-1}(x,q)(1-x(k-1)).$

Evaluando en $q = 1$ y utilizando la igualdad (1.4) se obtiene que:

$$x(1-(k-1)x) - xV_{k-1}(x) - x = -(k-1)x^2 - xV_{k-1}(x). \tag{1.9}$$

Luego, utilizando los resultados (1.6), (1.7), (1.8) y (1.9) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} V_k(x) &= \frac{d}{dq}W_k(x,1) \\ &= \frac{\left(x + V_{k-1}(x) - \frac{x}{1-x(k-1)}\right)\left(1 - \frac{x}{1-x(k-1)}\right) - \left(\frac{1}{1-x(k-1)}\right)(-(k-1)x^2 - xV_{k-1}(x))}{\left(1 - \frac{x}{1-x(k-1)}\right)^2}. \end{aligned}$$

Simplificando y reemplazando $V_{k-1}(x)$ por la hipótesis de inducción se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_k(x) &= \frac{V_{k-1}(x)(1-xk+x) + x(k-1)V_{k-1}(x)(xk-1-x) + x^3(k-1)(k-(k-1))}{(1-kx)^2} \\ &= \frac{V_{k-1}(x)(1-x(k-1))^2 + x^3(k-1)}{(1-kx)^2} \\ &= \frac{\frac{x^3\binom{k-1}{2}}{(1-(k-1)x)^2}(1-x(k-1))^2 + x^3(k-1)}{(1-kx)^2} \\ &= \frac{x^3(k-1)(k-2) + 2x^3(k-1)}{2(1-kx)^2} \\ &= \frac{(k-1)x^3(k-2+2)}{2(1-kx)^2} \\ &= \frac{k(k-1)x^3}{2(1-kx)^2} \\ &= \frac{\binom{k}{2}x^3}{(1-kx)^2}. \end{aligned}$$

Entonces, se tienen los siguientes resultados

$$W_k(x,q) = \sum_{n\geq 0}\left(x^n \sum_{w\in[k]^n} q^{u(w)}\right).$$

$$\frac{d}{dq}W_k(x,q) = \sum_{n\geq 0}\left(x^n \sum_{w\in[k]^n} u(w)q^{u(w)-1}\right).$$

$$V_k(x) = \frac{d}{dq}W_k(x,q)|_{q=1} = \sum_{n\geq 0}\left(x^n \sum_{w\in[k]^n} u(w)\right).$$

Si se fija n, el coeficiente de x^n corresponde a la suma de los picos simétricos de todas las palabras k-arias de longitud n, entonces podemos encontrar la cantidad de estos picos simétricos hallando el coeficiente de x^n para $V_k(x)$.

Expandiendo la función generatriz se obtiene que:

$$V_k(x) = \frac{\binom{k}{2}x^3}{(1-kx)^2} = \binom{k}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2+m-1}{m}k^m x^{m+3}.$$

Como se busca el coeficiente de x^n, entonces se debe fijar $m = n-3$, luego el término de la sumatoria donde $m = n-3$ es

$$\binom{k}{2}\binom{n-3+1}{n-3}k^{n-3}x^{n-3+3},$$

donde

$$\binom{n-2}{n-3} = \frac{(n-2)!}{(n-3)!(n-2-n+3)!} = n-2.$$

Entonces, el coeficiente de x^n y por lo tanto la cantidad de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n, está dado por la expresión

$$\binom{k}{2}(n-2)k^{n-3}.$$

□

1.3.1. Demostración combinatoria para la cantidad de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n.

A continuación se presenta una demostración alternativa del resultado obtenido en el Teorema 6 usando argumentos combinatorios.

Demostración combinatoria del Teorema 6. Sea $w = w_1 \cdots w_{i-1}w_iw_{i+1}\cdots w_n$ una palabra k-aria de longitud n. Teniendo en cuenta que no se pueden tener picos en las posiciones 1 y n, se pueden tener picos simétricos únicamente en la posición i, que satisface la desigualdad $2 \leq i \leq n-1$. En primer lugar, calculemos la cantidad de picos simétricos que se pueden tener en una posición arbitraria i y después generalizamos el resultado para encontrar la cantidad de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n.

Si $w_i = m$, con $1 \leq m \leq k$, es claro que la cantidad de posibles picos simétricos en la posición i es $m-1$, entonces, como $1 \leq m \leq k$, los picos simétricos totales en la posición i, sin tener en cuenta por ahora los símbolos en las demás posiciones, está dado por:

$$\sum_{m=1}^{k}(m-1) = \frac{k(k+1)}{2} - k = \frac{k^2+k-2k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k!}{2(k-2)!} = \binom{k}{2}.$$

Ahora, cada pico simétrico $w_{i-1}w_iw_{i+1}$ en la posición i, será un pico simétrico distinto para cada posible organización de las $n-3$ letras restantes de la palabra k-aria, y dado que cada letra está entre 1 y k, el total de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n en la posición i es

$$k^{n-3}\binom{k}{2}. \tag{1.10}$$

Finalmente, como se pueden tener picos simétricos en todas las posiciones de la palabra k-aria de longitud n, distintas a las posiciones 1 y n, y el resultado (1.10) fue obtenido para una posición arbitraria i en la palabra k-aria con $2 \leq i \leq n-1$, entonces el total de picos simétricos en palabras k-arias de longitud n es

$$(n-2)k^{n-3}\binom{k}{2}.$$

1.4. Número de picos asimétricos en palabras k-arias

Los procedimientos y resultados que se darán en la presente sección son análogos a los de la sección anterior, por esto mismo se omitirán las demostraciones de algunos de ellos.

Notación: Dada una palabra w, la cantidad de picos asimétricos de w se notará por $\tilde{u}(w)$.

Sea $\tilde{W}_k(x,q)$ la función generatriz para el número de palabras k-arias de longitud n según el número de picos asimétricos $\tilde{u}(w)$:

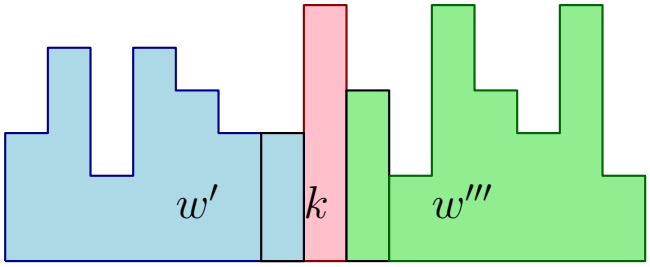
$$\tilde{W}_k(x,q) = \sum_{n\geq 0}\left(x^n \sum_{w\in[k]^n} q^{\tilde{u}(w)}\right). \tag{1.11}$$

A continuación, se calculan las funciones generatrices de 5 tipos de palabras k-arias que serán utilizadas posteriormente. Los primeros tres tipos de palabras de la forma k, $w'k$ y kw'' se definen igual que en la sección anterior en los literales (i), (ii) y (iii), su función generatriz y el proceso para calcularlas es el mismo, luego, sus funciones generatrices son x, $x(\tilde{W}_{k-1}(x,q)-1)$ y $x(\tilde{W}_k(x,q)-1)$, respectivamente. Los dos tipos de palabras restantes son:

(iv) Palabras de la forma $w'kw'''$, donde w''' es una palabra k-aria no vacía cuya primera letra es diferente a la última letra de w' y de k. En la Figura 1.6 podemos observar el gráfico de barras para las palabras de la forma $w'kw'''$. La parte en rojo representa la letra k, y aporta un pico asimétrico para cualquier palabra, por lo tanto, su función generatriz es xq. La parte en azul corresponde a w' distinta de vacío, su función generatriz es la de las palabras $(k-1)$-arias quitando la palabra vacía, que es $\tilde{W}_{k-1}(x,q)-1$. La parte verde representa w''',

son las palabras k-arias quitando la palabra vacía y teniendo en cuenta que el primer símbolo de w''' debe ser diferente al último de w' y a k, se debe restar también esta opción, entonces su función generatriz es $\tilde{W}_k(x,q) - 1 - 2x\tilde{W}_k(x,q)$. Por lo tanto, la función generatriz para las palabras de la forma $w'kw'''$ es

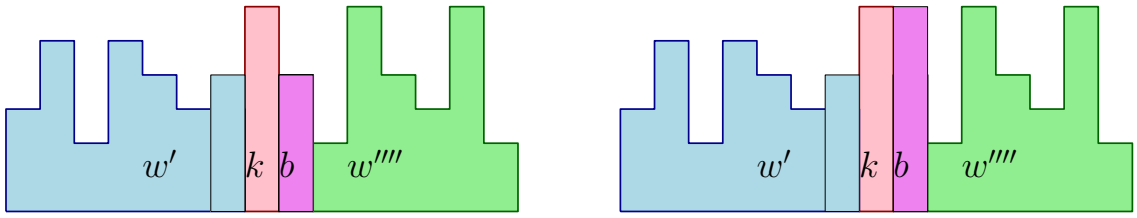
$$(\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1)xq(\tilde{W}_k(x,q) - 1 - 2x\tilde{W}_k(x,q)).$$



$$(\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1)qx(\tilde{W}_k(x,q) - 2x\tilde{W}_k(x,q) - 1)$$

Figura 1.6: Gráfico de barras de las palabras de la forman $w'kw'''$.

(v) Palabras de la forma $w'kbw''''$, donde w'''' es una palabra k-aria (puede ser vacía) y b una letra que debe ser k o igual a la última letra de w'. En la Figura 1.7 podemos observar el gráfico de barras de las palabras de la forma $w'kbw''''$. La parte en rojo representa la letra k, de longitud 1 y no aporta picos asimétricos, su función generatriz es x. La parte en morado representa la letra b, de longitud 1 y no aporta picos asimétricos, y se tienen dos opciones para b, su función generatriz es $2x$. La parte en azul corresponde a w' distinta de vacío, su función generatriz es la de las palabras $(k-1)$-arias quitando la palabra vacía, que es $\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1$. La parte verde representa w'''', su función generatriz es la de las palabras k-arias $\tilde{W}_k(x,q)$. Entonces la función generatriz de las palabras k-arias de la forma $w'kbw''''$ es $(\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1)2x^2\tilde{W}_k(x,q)$.



$(\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1)x^2\tilde{W}_k(x,q)$ $\quad$ $(\tilde{W}_{k-1}(x,q) - 1)x^2\tilde{W}_k(x,q)$

Figura 1.7: Gráfico de barras de las palabras de la forma $w'kbw''''$.

A partir de los resultados anteriores se puede demostrar la fórmula recursiva del Lema 7 para la función generatriz (1.11) y a partir de este resultado se obtienen las fórmulas cerradas del Lema 8 y el teorema 9. Las demostraciones son análogas a las del Lema 3, el Lema 8 y el

Teorema 9, por esta razón se omite su demostración.

Lema 7. *La función generatriz $\tilde{W}_k(x,q)$ satisface la relación de recurrencia*

$$\tilde{W}_k(x,q) = \frac{x(q-1) + (1-x(q-1))\tilde{W}_{k-1}(x,q)}{1 - x(1-q)(1-2x) - x\tilde{W}_{k-1}(x,q)(2x + q(1-2x))}, \tag{1.12}$$

con en valor inicial $\tilde{W}_0(x,q) = 1$.

Lema 8. *Para la función generatriz $\tilde{W}_k(x,q)$ se tiene que*

$$\tilde{W}_k(x,1) = \frac{1}{1-kx}.$$

Teorema 9. *El número total de picos asimétricos en palabras k-arias de longitud n es*

$$paw(n,k) = 2(n-2)\binom{k}{3}k^{n-3}. \tag{1.13}$$

1.4.1. Demostración combinatoria para la cantidad de picos asimétricos en palabras k-arias de longitud n.

A continuación se presenta una demostración del Teorema 9 usando argumentos combinatorios.

Demostración combinatoria del Teorema 9. En primer lugar, si $w_i = m$, con $1 \leq m \leq k$, la cantidad de posibles picos asimétricos en la posición i es la cantidad de posibles organizaciones de los $m-1$ símbolos menores a m en las posiciones $i-1$ e $i+1$, quitando las posibles organizaciones donde $w_{i-1} = w_{i+1}$, entonces la cantidad de posibles picos asimétricos en la posición i es $(m-1)^2 - (m-1)$. Como $1 \leq m \leq k$, los picos asimétricos totales en la posición i, sin tener en cuenta por ahora los símbolos en las demás posiciones, está dada por:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{k}((m-1)^2 - (m-1)) = \sum_{m=1}^{k}(m^2 - 3m + 2) &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 3\frac{k(k+1)}{2} + 2k \\ &= \frac{2k(k-1)(k-2)}{6} = 2\binom{k}{3}.\end{aligned}$$

Ahora, cada pico asimétrico $w_{i-1}w_iw_{i+1}$ en la posición i, será un pico asimétrico distinto para cada posible organización de las $n-3$ letras restantes de la palabra k-aria, y dado que cada letra está entre 1 y k, el total de picos asimétricos en palabras k-arias de longitud n en la posición i es

$$2k^{n-3}\binom{k}{3}. \tag{1.14}$$

Finalmente, como se pueden tener picos asimétricos en todas las posiciones de la palabra k-aria de longitud n, distintas a las posiciones 1 y n, y el resultado (1.14) fue obtenido para una posición arbitraria i en la palabra k-aria con $2 \leq i \leq n-1$, el total de picos asimétricos en palabras k-arias de longitud n es

$$2(n-2)k^{n-3}\binom{k}{3}.$$

Ejemplo 10. Calculamos la cantidad de picos simétricos asimétricos en palabras 3-arias de longitud 4 a partir de las ecuaciones (1.5) y (1.13). Remplazando los valores $k = 3$ y $n = 4$ se tiene que:

$$psw(4,3) = (4-2)3^{4-3}\binom{3}{2} = 18 \qquad y \qquad paw(4,3) = 2(4-2)3^{4-3}\binom{3}{3} = 12.$$

Para comprobar este resultado podemos observar en las palabras 3-arias de longitud 4 los picos simétricos resaltados en azul y los picos asimétricos resaltados en rojo, comprobando la veracidad del resultado obtenido anteriormente.

$(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),(1,1,2,1),(1,1,2,2),(1,1,2,3),(1,1,3,1),(1,1,3,2),(1,1,3,3),$
$(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,2,1,3),(1,2,2,1),(1,2,2,2),(1,2,2,3),(1,2,3,1),(1,2,3,2),(1,2,3,3),$
$(1,3,1,1),(1,3,1,2),(1,3,1,3),(1,3,2,1),(1,3,2,2),(1,3,2,3),(1,3,3,1),(1,3,3,2),(1,3,3,3),$
$(2,1,1,1),(2,1,1,2),(2,1,1,3),(2,1,2,1),(2,1,2,2),(2,1,2,3),(2,1,3,1),(2,1,3,2),(2,1,3,3),$
$(2,2,1,1),(2,2,1,2),(2,2,1,3),(2,2,2,1),(2,2,2,2),(2,2,2,3),(2,2,3,1),(2,2,3,2),(2,2,3,3),$
$(2,3,1,1),(2,3,1,2),(2,3,1,3),(2,3,2,1),(2,3,2,2),(2,3,2,3),(2,3,3,1),(2,3,3,2),(2,3,3,3),$
$(3,1,1,1),(3,1,1,2),(3,1,1,3),(3,1,2,1),(3,1,2,2),(3,1,2,3),(3,1,3,1),(3,1,3,2),(3,1,3,3),$
$(3,2,1,1),(3,2,1,2),(3,2,1,3),(3,2,2,1),(3,2,2,2),(3,2,2,3),(3,2,3,1),(3,2,3,2),(3,2,3,3),$
$(3,3,1,1),(3,3,1,2),(3,3,1,3),(3,3,2,1),(3,3,2,2),(3,3,2,3),(3,3,3,1),(3,3,3,2),(3,3,3,3).$

1.5. l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias

Asakly en [2] define los l-picos para palabras k-arias y calcula la cantidad de l-picos en palabras k-arias de longitud n. A continuación, se definen los l-picos simétricos y asimétricos. Posteriormente, se utilizan los resultados de las Secciones 1.3 y 1.4 para calcular la cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias de longitud n.

Definición 11. Dada $w = w_1w_2\cdots w_n$ una palabra k-aria de longitud n, un **l-pico simétrico** de w se define como la subpalabra $w_{i-1}w_iw_{i+1}w_{i+2}\cdots w_{i+l}w_{i+l+1}$, donde $w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = \cdots = w_{i+l}$ y $w_{i-1} = w_{i+l+1} \leq w_i$, con $2 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq l \leq n-2$. De manera análoga, un **l-pico asimétrico** de w se define como la subpalabra $w_{i-1}w_iw_{i+1}w_{i+2}\cdots w_{i+l}w_{i+l+1}$ donde $w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = \cdots = w_{i+l}$, $w_{i-1} \neq w_{i+l+1}$ y $w_{i-1} \leq w_i$ y $w_{i+l+1} \leq w_i$, con $2 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq l \leq n-2$.

En la Figura 1.8 podemos observar un ejemplo de un 4-pico simétrico y un 3-pico asimétrico.

$$w = 2\,1\,2\,3\,3\,3\,3\,2 \qquad\qquad v = 1\,2\,3\,3\,3\,1$$

Figura 1.8: Gráfico de barras de un 4-pico simétrico en w (izquierda en rojo) y un 3-pico asimétrico (derecha en azul) en v.

De la Definición 11 se puede observar que los picos simétricos y asimétricos tratados en las Secciones 1.3 y 1.4 son casos particulares de l-picos simétricos y asimétricos, para $l = 1$. De igual manera, si consideramos las l posiciones consecutivas iguales en una palabra que tiene un l-pico (simétrico o asimétrico) como una sóla posición, la cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias de longitud n resulta ser equivalente a la cantidad de picos simétricos y asimétricos calculados en las Secciones 1.3 y 1.4, con la diferencia de que la palabra tendría longitud $n - l - 1$. Con el análisis anterior se concluye el siguiente teorema.

Teorema 12. *La cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en palabras k-arias de longitud n es respectivamente*

$$(n-l-1)\binom{k}{2}k^{n-l-2} \quad y \quad 2(n-l-1)\binom{k}{3}k^{n-l-2}.$$

Al sumar ambos resultados se obtiene la cantidad de l-picos en palabras k-arias de longitud n.

Ejemplo 13. Calculemos los 2-picos simétricos y asimétricos en palabras 3-arias de longitud 4.

La cantidad de 2-picos simétricos es: $(4-2-1)\binom{3}{2}3^{4-2-2} = 3$.

La cantidad de 2-picos asimétricos es: $2(4-2-1)\binom{3}{3}k^{4-2-2} = 2$.

Para comprobar estos resultados podemos observar resaltados en las palabras 3-arias de longitud 4 los 2-picos simétricos en rojo y los 2-picos asimétricos en azul, al contar los mismos comprobamos la veracidad de los resultados obtenidos anteriormente.

$(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),(1,1,2,1),(1,1,2,2),(1,1,2,3),(1,1,3,1),(1,1,3,2),(1,1,3,3),$
$(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,2,1,3),(1,2,2,1),(1,2,2,2),(1,2,2,3),(1,2,3,1),(1,2,3,2),(1,2,3,3),$
$(1,3,1,1),(1,3,1,2),(1,3,1,3),(1,3,2,1),(1,3,2,2),(1,3,2,3),(1,3,3,1),(1,3,3,2),(1,3,3,3),$
$(2,1,1,1),(2,1,1,2),(2,1,1,3),(2,1,2,1),(2,1,2,2),(2,1,2,3),(2,1,3,1),(2,1,3,2),(2,1,3,3),$
$(2,2,1,1),(2,2,1,2),(2,2,1,3),(2,2,2,1),(2,2,2,2),(2,2,2,3),(2,2,3,1),(2,2,3,2),(2,2,3,3),$
$(2,3,1,1),(2,3,1,2),(2,3,1,3),(2,3,2,1),(2,3,2,2),(2,3,2,3),(2,3,3,1),(2,3,3,2),(2,3,3,3),$
$(3,1,1,1),(3,1,1,2),(3,1,1,3),(3,1,2,1),(3,1,2,2),(3,1,2,3),(3,1,3,1),(3,1,3,2),(3,1,3,3),$
$(3,2,1,1),(3,2,1,2),(3,2,1,3),(3,2,2,1),(3,2,2,2),(3,2,2,3),(3,2,3,1),(3,2,3,2),(3,2,3,3),$
$(3,3,1,1),(3,3,1,2),(3,3,1,3),(3,3,2,1),(3,3,2,2),(3,3,2,3),(3,3,3,1),(3,3,3,2),(3,3,3,3).$

Capítulo 2

Simetrías en Particiones de Conjuntos

En el presente capítulo se da la definición y notación de partición de un conjunto, así como algunos resultados básicos sobre la cardinalidad de conjuntos de particiones, los números de Bell, los números de Stirling de segundo tipo y su función generatriz. Posteriormente, se define la representación canónica de particiones de conjuntos y se presentan los resultados mostrados por Asakly [2] sobre la cantidad de l-picos en palabras y particiones. Finalmente, usando las mismás técnicas que Asakly se encuentran y demuestran fórmulas cerradas para la cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en particiones de conjuntos.

2.1. Nota histórica.

Toufic Mansour en [12] recopila un recuento histórico acerca del trabajo e investigación sobre particiones en la literatura y cultura matemática, aquí dejamos algunos apuntes. La primera aplicación conocida de particiones surgió en el contexto de las ceremonias de té y los juegos de incienso en la sociedad de clase alta japonesa alrededor del año 1500 d.C. Una investigación sistemática de la cuestión matemática, es decir, encontrar el número de particiones de $[n]$ la emprendieron por primera vez a principios del siglo XVIII Takakazu Seki y sus estudiantes. Takakazu Seki era un niño prodigio en matemáticas y fue autodidacta, era conocido como "El Sabio Aritmético" y pronto tuvo muchos alumnos. Uno de sus alumnos, Yoshisuke Matsunaga, encontró una relación de recurrencia básica para el número de particiones de conjuntos de $[n]$, así como una fórmula para el número de particiones de conjuntos de $[n]$ con exactamente k bloques. Saka estableció una recurrencia para el número de particiones de conjuntos de $[n]$ en k subconjuntos usando esta recurrencia.

James Stirling en Inglaterra, llego a los mismos resultados en un contexto puramente algebraico. El interés de Stirling era acelerar la convergencia de series y los valores $\left\{ {n \atop k} \right\}$ surgen como coeficientes cuando se expresan monomios en términos de polinomios descendentes. A

pesar del descubrimiento de Stirling, Saka recibe el crédito por ser el primero en asociar un significado combinatorio a estos valores, que ahora llevan el nombre de números de Stirling de segundo tipo.

Es cierto que Saka inició el estudio de las particiones de conjuntos en 1782, pero fue casi 100 años después cuando la atención empezó a centrarse en este objeto combinatorio. Desde 1877 hasta 1974, la investigación se centró en encontrar fórmulas explícitas para los números de Bell y Stirling, propiedades aritméticas de estos números, relaciones de recurrencia, fórmulas explícitas y funciones generadoras. Luego, las investigaciones se interesaron en las propiedades los números de Bell y Stirling, y en las extensiones, generalizaciones y comportamiento de estos números. En las dos últimas décadas del siglo XX y lo corrido del siglo XXI la investigación ha sido muy activa y ha profundizado y abordado desde otras perspectivas el estudio de las particiones.

2.2. Particiones de un conjunto.

2.2.1. Resultados preliminares.

Definición 14. Una partición Π del conjunto $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ es una colección de subconjuntos $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k\}$ no vacíos y disyuntos de $[n]$ cuya unión es igual a $[n]$. En este caso se dice que Π es una partición de $[n]$ en k bloques.

El conjunto de particiones de $[n]$ con exactamente k bloques se notará por $P_{n,k}$ y su cardinal se notará por $\left\{ {n \atop k} \right\}$. La sucesión $\left\{ {n \atop k} \right\}$ se conoce como los números de Stirling de segundo tipo. El conjunto de particiones de $[n]$ se denota por $P_n = \bigcup_{k=1}^{n} P_{n,k}$ y su cardinal se denota por $B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$. El número B_n se conoce como el número de Bell. A continuación se prueban dos relaciones de recurrencia para los números de Bell y Stirling de segundo tipo.

Teorema 15. *El n-esimo número de Bell satisface la relación de recurrencia*

$$B_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B_j.$$

Demostración. Sea $\Pi = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ una partición de $[n]$ con k bloques, cada bloque puede tener mínimo 1 y máximo n elementos. Sea j un entero positivo arbitrario, tal que $0 \leq j \leq n-1$, entonces supongamos que el bloque C_1 tiene $j+1$ elementos, por definición debe tener el símbolo 1, quedan entonces $n-1$ símbolos posibles que se pueden tener en las j posiciones restantes, hay $\binom{n-1}{j}$ opciones. Entonces, el total de particiones de $[n]$, con k bloques, tal que el primer bloque tiene $j+1$ elementos es $\binom{n-1}{j} B_{n-(j+1)}$, donde $B_{n-(j+1)}$ es la cantidad de particiones de $[n]$ con $n-(j+1)$ bloques. Finalmente, sumando todas las opciones que se tienen para j y utilizando propiedades del coeficiente binomial obtenemos:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B_{n-(j+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-j} B_{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B_j.$$

□

Teorema 16. *Los números de Stirling de segundo tipo satisfacen la relación de recurrencia*

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}, \qquad n, k \geq 1.$$

Demostración. Sea $\Pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ una partición de $[n+1]$ con k bloques. Para Π se tienen dos opciones, el elemento $n+1$ se encuentra en un bloque de un solo elemento, que sería el mismo, o se encuentra en un bloque con más de un elemento. Para el primer caso, $\Pi = \{B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, \{n+1\}\}$, entonces el número de posibles particiones de $[n+1]$ con k bloques bajo esta condición es $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$. Para el segundo caso, el elemento $n+1$ puede estar en cualquiera de los k bloques, el número de posibles particiones de $[n+1]$ con k bloques bajo esta condición es $k\left\{ {n \atop k} \right\}$. Entonces $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k\left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}$. □

A continuación se define la función generatriz para los números de Stirling de segundo tipo y se demuestra una fórmula cerrada. Para $k \geq 1$ considere la expresión

$$S_k(x) = \sum_{n \geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n, \tag{2.1}$$

con el valor inicial $S_0(x) = 1$.

Teorema 17. *Para todo $k \geq 0$ se tiene que*

$$S_k(x) = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^{k}(1-ix)}.$$

Demostración. Usando la igualdad mostrada en el Teorema 16 se tiene que

$$\sum_{n \geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = k \sum_{n \geq k} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^n + \sum_{n \geq k} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^n.$$

Luego, $S_k(x) = kxS_k(x) + xS_{k-1}(x)$. Despejando se obtiene que:

$$S_k(x) = \frac{xS_{k-1}(x)}{1-kx}.$$

Iterando esta última igualdad se obtiene la expresión del teorema

$$S_k(x) = \frac{xS_{k-1}(x)}{1-kx} = \frac{x\left(\frac{x^{k-1}}{\prod_{j=1}^{k-1}(1-jx)}\right)}{1-kx} = \frac{x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1-jx)}.$$

□

2.2.2. Representación canónica de una partición.

Una partición de $[n]$ con k bloques $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k\}$ se suele ordenar de menor a mayor según su elemento mínimo. Su representación canónica consiste en asignar en orden a cada elemento de $[n]$ el subíndice del bloque en el cual se encuentra.

Ejemplo 18. A la partición $\{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \{\{1, 4, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{10\}\}$ de $[10]$ con 4 bloques, se le asocia la representación canónica 1231322134 asociando a cada elemento de $[10]$ en orden el subíndice k del bloque B_k al cual pertenece.

De forma análoga a las palabras k-arias estudiadas en el Capítulo 1, a la representación canónica de particiones de conjuntos se les puede asociar un gráfico de barras como se muestra en la Figura 2.1.

$$\Pi = 1\ 2\ 3\ 1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 3\ 4$$

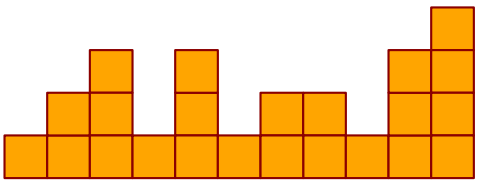


Figura 2.1: Gráfico de barras asociado a la representación canónica 1231322134.

2.3. l-picos en palabras y particiones de conjuntos.

Para estudiar las simetrías en particiones de conjuntos, estudiamos previamente los l-picos en palabras k-arias, que utilizamos para encontrar la cantidad de l-picos en particiones de conjuntos, con base a los resultados de Asakly en [2].

2.3.1. Función generatriz de las palabras k-arias de acuerdo a su número de l-picos.

Iniciamos definiendo la función generatriz $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ para el número de palabras de longitud n sobre el alfabeto $[k]$ de acuerdo a su número de i-picos:

$$W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{w \in [k]^n} \prod_{i=1}^{l} q_i^{i-pico(w)}, \tag{2.2}$$

con el valor inicial $W_0(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = 1$.

Teorema 19. *La función generatriz $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ satisface la fórmula recursiva*

$$W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \frac{A_l - xB_l + (B_{l+1} - A_l)W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)}{(1-x)(1+A_l) + x^{l+1} - ((1-x)A_l + x^{l+1})W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)},$$

donde $A_l = \sum_{i=1}^{l} x^i q_i$ *y* $B_l = \frac{1-x^l}{1-x}$.

Demostración. Es claro que

$$W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) + W_k^{\dagger}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l), \tag{2.3}$$

donde $W_k^{\dagger}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ es la función generatriz para el número de palabras k-arias de longitud n de acuerdo al número de l-picos, tal que las palabras w contienen al menos una letra k. Las palabras que contienen la letra k pueden clasificarse en las siguientes opciones:

1. k; cuya función generatriz es x.

2. kw', donde w' es una palabra k-aria no vacía y su función generatriz es $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1$, mientras que la función generatriz de k es x. Entonces, la función generatriz de las palabras de la forma kw' es $x(W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)$. En la Figura 1.3 podemos observar el gráfico de barras para las palabras de la forma kw'.

3. $w''k^i w'''$, con $1 \leq i \leq l$", donde, w'' es una palabra $(k-1)$-aria no vacía y su función generatriz es $W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1$; w''' es una palabra k-aria no vacía cuya primer letra es distinta de k, su función generatriz es la de las palabras k-arias quitando la función generatriz de las palabras k-arias que inician con la letra k y la palabra vacía, que es $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - xW_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1$. Mientras que la función generatriz de k^i es $x^i q_i$, pues la palabra w'' que le antecede es $(k-1)$-aria y la palabra w''' que le sigue inicia con una letra distinta de k, entonces siempre se tiene un i-pico en esta posición. Así que la función generatriz de las palabras de la forma $w''k^i w'''$ es $(W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)(q_i x^i)(W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - xW_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)$. En la Figura 2.2 se tiene el gráfico de barras para palabras de la forma $w''k^i w'''$.

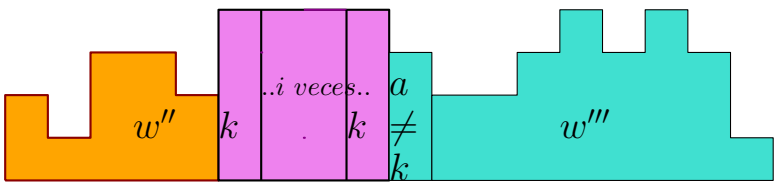


Figura 2.2: Gráfico de barras asociado a las palabras de la forma $w''k^i w'''$.

4. $w''k^i$, con $1 \leq i \leq l$, donde w'' está definida igual que en el item 3. Entonces, la función generatriz para las palabras de la forma $w''k^i$ es $(W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)x^i$. El gráfico de barras para palabras de la forma $w''k^i$ se puede obtener en la Figura 2.2 quitando la parte azul.

5. $w''k^{l+1}w''''$, donde w'' está definida igual que en el item 3; w'''' es una palabra k-aria, por lo tanto su función generatriz es $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$; mientras que la función generatriz de k^{l+1} es x^{l+1}, es posible tener $(l+1)$-picos en esta posición, pero como estamos contando hasta l-picos no los tenemos en cuenta. Entonces, la función generatriz para las palabras de la forma $w''k^{l+1}w''''$ es $(W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)(x^{l+1})W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$. En la Figura 2.3 tenemos el gráfico de barras para palabras de la forma $w''k^{l+1}w''''$.

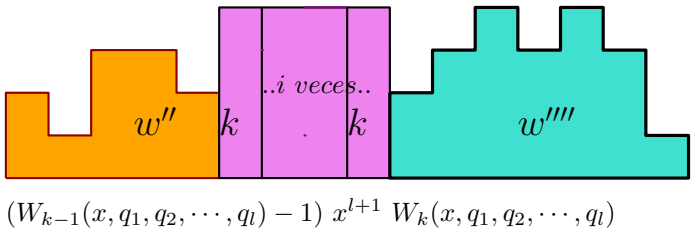


Figura 2.3: Gráfico de barras para palabras de la forma $w''k^{l+1}w''''$.

Ahora, $W_k^{\dagger}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ es igual a la suma de los resultados obtenidos. Al reemplazar en la Ecuación (2.9), agrupar adecuadamente y despejar $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ se obtiene que:

$$W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \frac{W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)(B_{l+1} + A_l) - xB_l + A_l}{(1-x)(1+A_l) + x^{l+1} - W_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)(A_l(1-x) + x^{l+1})},$$

donde $A_l = \sum_{i=1}^{l} x^i q_i$ y $B_l = \frac{1-x^l}{1-x}$.

□

2.3.2. Función generatriz de particiones de conjuntos de acuerdo a su número de l-picos.

Definimos la función generatriz $P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ para el número de particiones de $[n]$ con exactamente k bloques, de acuerdo a su número de l-picos:

$$P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{\pi \in P_{n,k}} \prod_{i=1}^{l} q_i^{i-pico(\pi)},$$

con el valor inicial $P_0(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = 1$.

A continuación se prueba una fórmula explícita para esta función generatriz.

Teorema 20. *Para todo $k \geq 1$ se tiene que*

$$P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} x^i (q_i (W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)(1-x) - 1) + 1) + x^{l+1} W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) \right).$$

Demostración. Toda partición de $[n]$ con k bloques se puede clasificar en las siguientes 3 opciones.

1. πk^i, con $1 \leq i \leq l$, donde π es una partición con $(k-1)$ bloques, su función generatriz es $P_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$; mientras que la función generatriz para k^i es x^i. Entonces, la función generatriz de las particiones de la forma πk^i es $P_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)x^i$. En la Figura 2.4 se tiene el gráfico de barras para las particiones de la forma πk^i.

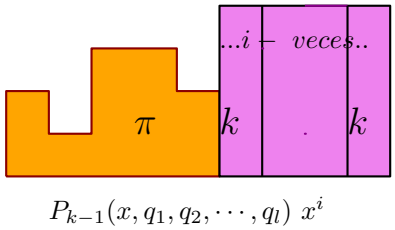
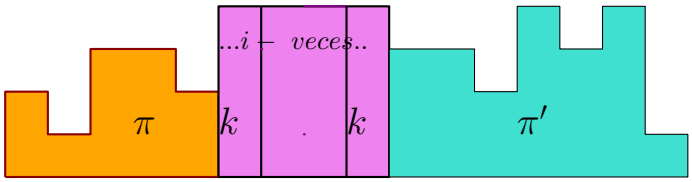


Figura 2.4: Gráfico de barras asociado a las particiones de la forma πk^i.

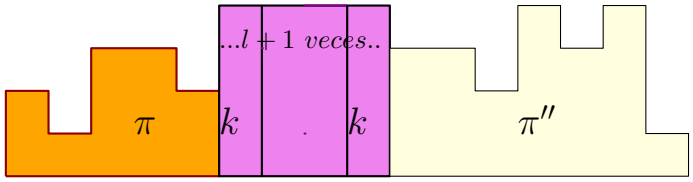
2. $\pi k^i \pi'$, con $1 \leq i \leq l$, donde π está definida como en el ítem 1 al igual que su función generatriz; π' es una palabra k-aria no vacía que inicia con una letra diferente de k, su función generatriz es la de las palabras k-arias restando la función generatriz de las palabras k-arias que comienzan con la letra k y 1 que corresponde a la palabra vacía, que es $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - xW_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1$. Para k^i su función generatriz es $x^i q_i$, dado que en esta posición se tendrá siempre un i-pico. Entonces la función generatriz para las particiones de la forma $\pi k^i \pi'$ es $P_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) q_i x^i (W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - xW_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1)$. En la Figura 2.5 se tiene el gráfico de barras para las palabras de la forma $\pi k^i \pi'$.

3. $\pi k^{l+1} \pi''$, donde π está definida como en el ítem 1 y su función generatriz es la misma; π'' es una palabra k-aria, su función generatriz es la de las palabras k-arias $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$; y la función generatriz de k^{l+1} es x^{l+1}. Entonces, la función generatriz para las particiones de la forma $\pi k^{l+1} \pi''$ es $P_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) x^{l+1} W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$. En la Figura 2.6 se tiene el gráfico de barras para las palabras de la forma $\pi k^{l+1} \pi''$.



$P_{k-1}(x, q_1, q_2, \cdots, q_l)\ q_i x^i\ (W_k(x, q_1, q_2, \cdots, q_l) - xW_k(x, q_1, q_2, \cdots, q_l) - 1)$

Figura 2.5: Gráfico de barras para particiones de la forma $\pi k^i \pi'$.



$P_{k-1}(x, q_1, q_2, \cdots, q_l)\ x^{l+1}\ W_k(x, q_1, q_2, \cdots, q_l)$

Figura 2.6: Gráfico de barras para particiones de la forma $\pi k^{l+1} \pi''$.

Entonces, la función generatriz $P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ está dada por la suma de los resultados anteriores. Factorizando de forma adecuada se obtiene que:

$$P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = P_{k-1}(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)(x^{l+1} W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) + \sum_{i=1}^{l} x^i (1 + q_i (W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - x(W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1))).$$

Para simplificar los cálculos usamos la siguiente notación: $P_j = P_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$ y

$$\sum j = x^{l+1} W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) + \sum_{i=1}^{l} x^i (1 + q_i (W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - x(W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) - 1))).$$

Luego, procedemos por inducción sobre k,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \sum 1 \\ P_2 &= P_1 \sum 2 = P_0 \sum 1 \sum 2 \\ P_3 &= P_2 \sum 3 = P_0 \sum 1 \sum 2 \sum 3 \\ &\vdots \\ P_k &= P_{k-1} \sum k = P_0 \sum 1 \sum 2 \sum 3 \cdots \sum k. \end{aligned}$$

Y como se tiene el valor inicial $P_0(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = 1$, concluimos que:

$$P_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) = \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} x^i (q_i (W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)(1-x) - 1) + 1) + x^{l+1} W_j(x, q_1, q_2, \ldots, q_l) \right).$$

□

Corolario 21. *Si $q_i = 1$ para $1 \leq i \leq l$, entonces*

$$P_k(x, 1, 1, \ldots, 1) = \frac{x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1 - jx)}.$$

Demostración. Del Teorema 20 se tiene que

$$P_k(x, 1, 1, \ldots, 1) = \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} x^i W_j(x, 1, 1, \ldots, 1)(1-x) + x^{l+1} W_j(x, 1, 1, \ldots, 1) \right).$$

Reemplazando $q_i = 1$ en la función generatriz (2.2) se obtiene que:

$$W_j(x, 1, 1, \ldots, 1) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{w \in [j]^n} \prod_{i=1}^{l} 1^{i - pico(w)} = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{w \in [j]^n} 1 = \sum_{n \geq 0} x^n j^n = \frac{1}{1 - jx}.$$

Luego,

$$P_k(x, 1, 1, \ldots, 1) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{x}{1 - jx} \frac{1 - x^l}{1 - x}(1 - x) + x^{l+1} \frac{1}{1 - xj} \right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1 - xj} = \frac{x^k}{\prod_{j=1}^{k}(1 - xj)}.$$

□

El resultado anterior corresponde a la función generatriz para el número de particiones de $[n]$ con exactamente k bloques, el número de Stirling de segundo tipo $\left\{ {n \atop k} \right\}$, y el resultado obtenido coincide con el del Teorema 17. Este y otros resultados importantes que coinciden con resultados ya conocidos (ver [14]), se pueden obtener como casos particulares de los Teoremas 19 y 20. Por ejemplo, al considerar $l = 1$ y $q_1 = q$, en el Teorema 19, se obtiene la siguiente fórmula recursiva para el número de picos en palabras k-arias de longitud n.

$$W_k(x, q) = \frac{x(q-1) + (1 - x(q-1))W_{k-1}(x, q)}{1 - x(1-x)(1-q)x(x + q(1-x))W_{k-1}(x, q)}.$$

Y realizando la misma sustitución en el Teorema 20, se obtiene la siguiente fórmula recursiva para las particiones de $[n]$ con k bloques de acuerdo al número de picos (1-picos)

$$P_k(x,q) = x^k \prod_{j=1}^{k} (1 + q(W_j(x,q) - 1) + x(1-q))W_j(x,q)). \tag{2.4}$$

2.3.3. Número de l-picos en palabras k-arias y particiones de conjuntos.

A partir de la función generatriz $W_k(x, q_1, q_2, \ldots, q_l)$, tenemos como caso particular la función generatriz para el número de palabras k-arias de longitud n con exactamente k bloques de acuerdo al número de l-picos, donde $q_i = 1$ para $1 \leq i \leq (l-1)$ y $q_l = q$:

$$W_k(x, 1, 1, \ldots, q) = W_k(x, q) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{w \in [k]^n} q^{l-pico(w)},$$

con el valor inicial $W_0(x, q) = 1$.

A partir del Teorema 19 se obtiene el siguiente colorario con una fórmula recursiva para la función generatriz de la cantidad de palabras k-arias de longitud $[n]$ con l-picos.

Corolario 22. *Para todo $k \geq 1$ se tiene que*

$$W_k(x,q) = \frac{x^l(q-1) + (1 - (x^l(q-1)))W_{k-1}(x,q)}{1 + x^l(q-1)(1-x) - x(1 + x^{l-1}(q-1)(1-x))W_{k-1}(x,q)}. \tag{2.5}$$

Corolario 23. *Para todo $k \geq 0$ se tiene que*

$$W_k(x,1) = \frac{1}{1-kx}.$$

Lema 24. *Para todo $k \geq 2$ se tiene que*

$$\frac{d}{dq} W_k(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{l+2}}{(1-kx)^2} \left(2\binom{k}{3} + \binom{k}{2} \right). \tag{2.6}$$

Demostración. Para $k = 2$, remplazando en la fórmula recursiva (2.5), teniendo en cuenta que $W_1(x,q) = \frac{1}{1-x}$, se tiene que:

$$W_2(x,q) = \frac{1 - (q-1)x^{l+1}}{1 - (q-1)x^{l+1} + (q-1)x^{l+2} - 2x}.$$

Derivando y evaluando en $q = 1$ se tiene que:

$$\frac{d}{dq} W_2(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{l+2}}{1-2x},$$

que satisface la igualdad (2.6) para $k = 2$. Procediendo por inducción, asumiendo que para $k-1$ se tiene

$$\frac{d}{dq}W_{k-1}(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{l+2}}{(1-(k-1)x)^2}\left(2\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}\right). \tag{2.7}$$

Reemplazamos y probamos que el resultado se cumple para k, se deriva la fórmula recursiva obtenida en el Corolario 22 respecto a q y se remplaza $q=1$, usando la hipótesis de inducción (2.7) y agrupando adecuadamente se obtiene que

$$\frac{d}{dq}W(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{l+2}}{(1-kx)^2}\left(2\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}+(k-1)^2\right),$$

donde

$$2\binom{k-1}{3}+\binom{k-1}{2}+(k-1)^2 = \frac{2k(k-1)(k-2)}{6}+\frac{k(k-1)}{2} = 2\binom{k}{3}+\binom{k}{2}.$$

Entonces, por el principio de inducción matemática se concluye:

$$\frac{d}{dq}W_k(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{l+2}}{(1-kx)^2}\left(2\binom{k}{3}+\binom{k}{2}\right).$$

□

A partir de la función generatriz $P_k(x,q_1,q_2,\ldots,q_l)$ se define la función generatriz para el número de particiones de $[n]$ con exactamente k bloques de acuerdo al número de l-picos, donde $q_i=1$ para $1\leq i\leq (l-1)$ y $q_l=q$, entonces

$$P_k(x,1,1,\ldots,q) = P_k(x,q) = \sum_{n\geq 0}x^n \sum_{\pi\in P_{n,k}} q^{l-pico(\pi)}, \tag{2.8}$$

con el valor inicial $P_0(x,q)=1$.

En el siguiente colorario probamos una fórmula recursiva para la función generatriz $P_k(x,q)$.

Corolario 25. *Para todo $k\geq 1$ se tiene que*

$$P_k(x,q) = x^k\prod_{j=1}^{k}\Big(W_j(x,q)(1+x^{l-1}(x-1))+x^l+x^{l-1}q((1-x)W_j(x,q)-1)\Big).$$

Demostración. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P(x,q) &= \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{l} x^i(q_i(W_j(x,q)(1-x)-1)+1)+x^{l+1}W_j(x,q)\right)\\
&= \prod_{j=1}^{k}\left(W_j(x,q)(1-x)\sum_{i=1}^{l-1}x^i + x^l q(1-x)W_j(x,q) - qx^l + x^l + x^{l+1}W_j(x,q)\right)\\
&= x^k\prod_{j=1}^{k}\Big(W_j(x,q)(1-x^{l-1}) + x^{l-1}q(1-x)W_j(x,q) - qx^{l-1} + x^{l-1} + x^l W_j(x,q)\Big)\\
&= x^k\prod_{j=1}^{k}\Big(W_j(x,q)(1+x^{l-1}(x-1)) + x^{l-1} + x^{l-1}q((1-x)W_j(x,q)-1)\Big).
\end{aligned}
$$

□

Lema 26. *Para todo $k \geq 1$ se tiene que*

$$
\frac{d}{dq}P_k(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{k+l}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}\left(x^2\frac{2\sum_{j=3}^{k}\binom{j}{3}+\sum_{j=2}^{k}\binom{j}{2}}{1-jx}+\binom{k}{2}\right).
$$

Demostración. En el Corolario 21 se encontró una fórmula cerrada para $P_k(x,1)$, y en el Corolario 23 y el Lema 24 se encontraron fórmulas cerradas para $W_k(x,1)$ y $\frac{d}{dq}W_k(x,1)$, entonces derivando la ecuación obtenida en el Corolario 25 para $P_k(x,q)$, evaluando en $q=1$ y utilizando los resultados mencionados anteriormente se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dq}P_k(x,1) &= \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{x^{l+2}}{(1-jx)^2}\left(2\binom{j}{3}+\binom{j}{2}\right)+\frac{(j-1)x^l}{1-jx}\right)\\
&= \frac{x^{k+l}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}\left(x^2\frac{2\sum_{j=3}^{k}\binom{j}{3}+\sum_{j=2}^{k}\binom{j}{2}}{1-jx}+\binom{k}{2}\right).
\end{aligned}
$$

□

Del lema anterior podemos encontrar una fórmula cerrada para la cantidad de l-picos en particiones de $[n]$ con k bloques, teniendo en cuenta que si la función generatriz (2.8) se deriva respecto a q y se evalúa en $q=1$, se obtiene que:

$$
\frac{d}{dq}P_k(x,q)|_{q=1} = \sum_{n\geq 0}x^n\sum_{\pi\in P_{n,k}} l-pico(\pi).
$$

Entonces, la cantidad de l-picos en particiones de $[n]$ con k bloques, resulta ser el coeficiente del término n-esimo de $\frac{d}{dq}P_k(x,q)|_{q=1}$, pero esto equivale a encontrar el coeficiente n-esimo del resultado mostrado en el Lema 26, este cálculo se realizara en el siguiente corolario.

Corolario 27. *El total de l-picos en particiones de $[n]$ con k-bloques está dado por*

$$\binom{k}{2}\left\{ {n-l \atop k} \right\} + \sum_{i=l+2}^{n-k} \left\{ {n-i \atop k} \right\} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^{i-l-2} + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^{i-l-2} \right). \tag{2.9}$$

Demostración. Calculamos el coeficiente del término n-esimo del resultado obtenido en el Lema 26, que implica calcular el coeficiente del término n-esimo a cada término de la suma. Entonces, para el primer término, usando la función generatriz de los números de Stirling de segundo tipo y el resultado obtenido en el Teorema 17 se tiene que:

$$\frac{x^{k+l}\binom{k}{2}}{(1-x)\cdots(1-kx)} = \frac{x^k x^l \binom{k}{2}}{(1-x)\cdots(1-kx)} = \binom{k}{2} \sum_{m\geq k} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{m+l}.$$

El coeficiente del término n-esimo es el coeficiente de x^{m+l}, cuando $n = m + l$, entonces $m = n - l$ y el coeficiente del término n-esimo resulta ser $\binom{k}{2}\left\{ {n-l \atop k} \right\}$.

Para el segundo término de la suma se procede de manera análoga.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{k+l+2}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \left(\frac{2\sum_{j=3}^{k}\binom{j}{3} + \sum_{j=2}^{k}\binom{j}{2}}{1-jx} \right) \\
&\qquad = \sum_{m\geq k} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{m+l+2} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} \sum_{t\geq 0} (jx)^t + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} \sum_{t\geq 0} (jx)^t \right) \\
&\qquad = \sum_{t\geq 0} \left\{ {t+k \atop k} \right\} x^{t+k+l+2} \sum_{t\geq 0} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^t + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^t \right) x^t \\
&\qquad = \sum_{t\geq 0} \sum_{i=0}^{t} \left\{ {t-i+k \atop k} \right\} x^{t+k+l+2} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^i + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^i \right).
\end{aligned}$$

Si $n = t + k + l + 2$, entonces $t = n - k - l - 2$. Por lo tanto, esta última igualdad es

$$\begin{aligned}
&\sum_{n-k-l-2\geq 0} x^n \sum_{i=0}^{n-k-l-2} \left\{ {n-i-l-2 \atop k} \right\} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^i + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^i \right) \\
&\qquad = \sum_{n\geq k+l+2} x^n \sum_{i=l+2}^{n-k} \left\{ {n-i \atop k} \right\} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^{i-l-2} + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^{i-l-2} \right).
\end{aligned}$$

El coeficiente n-esimo de este término es

$$\sum_{i=l+2}^{n-k} \left\{ {n-i \atop k} \right\} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^{i-l-2} + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^{i-l-2} \right).$$

Entonces, el coeficiente n-esimo del resultado obtenido en el Lema 22 está dado por:

$$\binom{k}{2}\left\{ {n-l \atop k} \right\} + \sum_{i=l+2}^{n-k} \left\{ {n-i \atop k} \right\} \left(2\sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^{i-l-2} + \sum_{j=2}^{k} \binom{j}{2} j^{i-l-2} \right).$$

□

Como caso particular podemos obtener la cantidad de picos (1-picos) en particiones de $[n]$ con k bloques, reemplazando en la Ecuacion (2.9) por $l = 1$. En la Tabla 2.1 ordenamos la cantidad de picos en particiones de $[n]$ con k bloques, esto con la ayuda del software *Mathematica*.

Picos en particiones de $[n]$ con k bloques.										
$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	3	3	0	0	0	0	0	0	0	6
5	8	18	6	0	0	0	0	0	0	32
6	20	81	60	10	0	0	0	0	0	171
7	48	323	410	150	15	0	0	0	0	946
8	112	1204	2373	1450	315	21	0	0	0	5475
9	256	4300	12509	11473	4095	588	28	0	0	33249
10	576	14915	62134	80878	42448	9898	1008	36	0	211893
11	1280	50661	296340	529104	384951	130158	21336	1620	45	1415495

Tabla 2.1: Cantidad de picos en particiones de $[n]$ de longitud k.

2.3.4. Número de l-picos simétricos en particiones de conjuntos.

Procediendo de manera análoga a la sección anterior se puede obtener una fórmula cerrada para la cantidad de l-picos simétricos en particiones de conjuntos. Por esto mismo sus demostraciones no se presentan.

Definimos la función generatriz $PS_k(x, q)$ para el número de particiones de $[n]$ con exactamente k bloques, de acuerdo al número de l-picos simétricos:

$$PS_k(x, q) = \sum_{n \geq 0} x^n \sum_{\pi \in P_{n,k}} q^{l-picosimetico(\pi)},$$

con el valor inicial $PS_0(x, q) = 1$.

$WS(x, q)$ representa la función generatriz de las palabras k-arias de longitud n de acuerdo a la cantidad de l-picos simétricos, ya que tenemos una fórmula para la cantidad de picos

simétricos en palabras k-arias de longitud n, por ahora soló se tendrá en cuenta la notación usada para su función generatriz.

Teorema 28. *Para todo $k \geq 1$,*

$$PS_k(x,q) = \prod_{j=1}^{k}(x^l(1-q) + WS_j(x,q)(1 + x^l(q(1-x(j-1)) + x(j-1) - 1))).$$

Lema 29. *Para todo $k \geq 1$ se tiene que*

$$\frac{d}{dq}PS_k(x,q)|_{q=1} = \frac{x^{k+l}}{\prod_{j=1}^{k}(1-jx)}\left((k-1) + \sum_{j=2}^{k}\frac{\binom{j}{2}x^2}{1-jx}\right).$$

Corolario 30. *El total de l-picos simétricos en particiones de $[n]$ con k-bloques está dado por*

$$(k-1)\left\{{n-l \atop k}\right\} + \sum_{i=l+2}^{n-k}\left\{{n-i \atop k}\right\}\sum_{j=2}^{k}\binom{j}{2}j^{i-l-2}. \tag{2.10}$$

Ejemplo 31. A continuación, se muestran resaltados los 1-picos simétricos en rojo y los 2-picos simétricos en azul de las particiones de [6] con 4 bloques y posteriormente se comprueba el resultado con la Ecuación (2.10).

$(1,2,3,4,4,4)$, $(1,2,3,3,4,4)$, $(1,2,3,4,3,3)$, $(1,2,3,3,3,4)$, $(1,2,3,4,4,3)$, $(1,2,3,3,4,3)$, $(1,2,3,4,3,4)$,
$(1,2,2,3,4,4)$, $(1,2,3,2,4,4)$, $(1,2,3,4,2,2)$, $(1,2,2,3,3,4)$, $(1,2,3,2,2,4)$, $(1,2,3,4,4,2)$, $(1,2,2,3,4,3)$,
$(1,2,3,2,4,2)$, $(1,2,3,4,2,4)$, $(1,2,2,2,3,4)$, $(1,2,3,3,2,4)$, $(1,2,3,3,4,2)$, $(1,2,2,3,2,4)$, $(1,2,3,2,3,4)$,
$(1,2,3,4,3,2)$, $(1,2,2,3,4,2)$, $(1,2,3,2,4,3)$, $(1,2,3,4,2,3)$, $(1,1,2,3,4,4)$, $(1,2,1,3,4,4)$, $(1,2,3,1,4,4)$,
$(1,2,3,4,1,1)$, $(1,1,2,3,3,4)$, $(1,2,1,3,3,4)$, $(1,2,3,1,1,4)$, $(1,2,3,4,4,1)$, $(1,1,2,3,4,3)$, $(1,2,1,3,4,3)$,
$(1,2,3,1,4,1)$, $(1,2,3,4,1,4)$, $(1,1,2,2,3,4)$, $(1,2,1,1,3,4)$, $(1,2,3,3,1,4)$, $(1,2,3,3,4,1)$, $(1,1,2,3,2,4)$,
$(1,2,1,3,1,4)$, $(1,2,3,1,3,4)$, $(1,2,3,4,3,1)$, $(1,1,2,3,4,2)$, $(1,2,1,3,4,1)$, $(1,2,3,1,4,3)$, $(1,2,3,4,1,3)$,
$(1,1,1,2,3,4)$, $(1,2,2,1,3,4)$, $(1,2,2,3,1,4)$, $(1,2,2,3,4,1)$, $(1,1,2,1,3,4)$, $(1,2,1,2,3,4)$, $(1,2,3,2,1,4)$,
$(1,2,3,2,4,1)$, $(1,1,2,3,1,4)$, $(1,2,1,3,2,4)$, $(1,2,3,1,2,4)$, $(1,2,3,4,2,1)$, $(1,1,2,3,4,1)$, $(1,2,1,3,4,2)$,
$(1,2,3,1,4,2)$, $(1,2,3,4,1,2)$.

Como se puede observar, para las particiones de [6] con 4 bloques se tienen treinta 1-picos simétricos y tres 2-picos simétricos. Finalmente, veamos que al remplazar por $n = 6$ y $k = 4$ en la Ecuación (2.10) se obtiene para $l = 1$, $(3)\left\{{5 \atop 4}\right\} = 30$ y para $l = 2$, $(3)\left\{{4 \atop 4}\right\} = 3$.

Como caso particular podemos obtener la cantidad de picos simétricos (1-picos simétricos) en particiones de $[n]$ con k bloques, reemplazando en la Ecuación (2.10) por $l = 1$. En la Tabla 2.2 ordenamos la cantidad de picos simétricos en particiones de $[n]$ con k bloques, esto con la ayuda del software *Mathematica*.

Picos simétricos en particiones de $[n]$ con k bloques.										
$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	3	2	0	0	0	0	0	0	0	5
5	8	12	3	0	0	0	0	0	0	23
6	20	54	30	4	0	0	0	0	0	108
7	48	215	205	60	5	0	0	0	0	533
8	112	799	1185	580	105	6	0	0	0	2787
9	256	2842	6230	4585	1365	168	7	0	0	15453
10	576	9812	30828	32256	14140	2828	252	8	0	90700
11	1280	33165	146355	210378	128037	37170	5334	360	9	562088

Tabla 2.2: Cantidad de picos simétricos en particiones de $[n]$ de longitud k.

Finalmente, una fórmula cerrada para la cantidad de $l-$picos asimétricos en particiones de $[n]$, con k bloques, puede obtenerse restando las Ecuaciones (2.3) y (2.7), de donde se obtiene el resultado dado en el siguiente Corolario.

Corolario 32. *El total de $l-$picos asimétricos en particiones de $[n]$ con k bloques está dado por:*

$$\binom{k-1}{2}\left\{ {n-l \atop k} \right\} + 2\sum_{i=l+2}^{n-k} \left\{ {n-i \atop k} \right\} \sum_{j=3}^{k} \binom{j}{3} j^{i-l-2}. \tag{2.11}$$

Capítulo 3

Simetrías en Composiciones

En el presente capítulo se inicia dando la definición y notación de composiciones de n y de composiciones de n con k partes, así como algunos resultados básicos sobre su cardinalidad, su función generatriz y algunos resultados para composiciones con partes restringidas a un conjunto dado. Posteriormente, se estudia la cantidad de picos simétricos y asímetricos y sus funciones generatrices en composiciones y en composiciones con restricciones. Parte de este capítulo hace parte de los resultados originales de esta tesis publicados en el preprint [13].

3.1. Nota histórica.

La teoría de las composiciones de enteros es un área fundamental de la combinatoria enumerativa y la teoría de números que estudia de manera general representaciones de un entero positivo como suma de enteros positivos menores o iguales que él. Sus orígenes datan del siglo dieciocho a partir de las primeras contribuciones de Euler. Desde entonces, varios matemáticos han participado en su desarrollo [15]. La primera publicación conocida en teoría de composiciones es de Percy Alexander MacMahon (1854 – 1929), titulada *Memoir on the Theory of Compositions of a Number*, la cual apareció publicada en la Philosophical Transactions de la Royal Society of London en 1893. MacMahon derivó una serie de propiedades, relaciones y tipos de composiciones. Por ejemplo, mediante funciones generatrices encontró el número total de composiciones con una cantidad de partes dada; asoció un grafo lineal a cada composición, estudió las composiciones palíndromas, inversas, conjugadas, entre otras. En los años posteriores, hasta la década de 1960 aparecieron algunos artículos en composiciones, pero de poco interés investigativo en la comunidad matemática, la mayoría de artículos escritos en combinatoria enumerativa se centran en particiones y permutaciones [7]. Posteriormente, distintos grupos de autores centran su atención en el estudio de composiciones, principalmente en la última década del siglo XX y lo corrido del siglo XXI. Se publica una gran cantidad de artículos principalmente en composiciones restringidas, ciertas características y estadísti-

cas en composiciones (ascensos, descensos, niveles), generalizaciones y conexiones con otras áreas, por ejemplo la obtención de resultados asintóticos en composiciones aleatorias usando métodos del análisis complejo y teoría de la probabilidad [7].

3.2. Preliminares.

3.2.1. Definiciones y resultados básicos.

Definición 33. Una composición de un entero positivo n es una sucesión de enteros positivos $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ tal que $\sum_{i=1}^{k} c_i = n$. Los c_i se denominan partes de la composición.

En la Tabla 3.1 encontramos las composiciones para los enteros $n = 1, 2, 3$ y 4.

n	**Composiciones de** n
1	(1)
2	(2) (1,1)
3	(3) (2,1) (1,2) (1,1,1)
4	(4) (3,1) (1,3) (2,2) (2,1,1) (1,2,1) (1,1,2) (1,1,1,1)

Tabla 3.1: Composiciones para $n = 1, 2, 3$ y 4.

Se denota por $\mathcal{C}(n)$ al total de composiciones para un entero positivo n. Por ejemplo, a partir de la Tabla 3.1 se puede observar que $\mathcal{C}(3) = 4$ y $\mathcal{C}(4) = 8$. Se denota por $\mathcal{C}(n, k)$ el total de composiciones del entero positivo n con k partes. Es claro que $\mathcal{C}(n)$ es la suma de todas las posibles composiciones de k partes, con $1 \leq k \leq n$, es decir:

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}(n, k). \tag{3.1}$$

Denotamos por $\mathcal{C}(n, \leq k)$ el total de composiciones del entero n con un número de partes menor o igual que k, luego $\mathcal{C}(n, \leq k) = \sum_{l=1}^{k} \mathcal{C}(n, l)$. Por ejemplo, del Cuadro 3.1 observamos que $\mathcal{C}(4, 3) = 3$ y $\mathcal{C}(4, \leq 3) = 7$.

Ilustremos las notaciones anteriores en el Tabla 3.2 para $n = 6$.

Composiciones para $n = 6$, $\mathcal{C}(6) = 32$

k	Composiciones de 6 con k partes	$\mathcal{C}(6,k)$	$\mathcal{C}(6,\leq k)$
1	(6)	1	1
2	(5,1) (1,5) (2,4) (4,2) (3,3)	5	6
3	(4,1,1) (1,4,1) (1,1,4) (3,2,1) (3,1,2) (2,3,1) (2,1,3) (1,3,2) (1,2,3) (2,2,2)	10	16
4	(3,1,1,1) (1,3,1,1) (1,1,3,1) (1,1,1,3) (2,2,1,1) (2,1,2,1) (2,1,1,2) (1,2,2,1) (1,2,1,2) (1,1,2,2)	10	26
5	(2,1,1,1,1) (1,2,1,1,1) (1,1,2,1,1) (1,1,1,2,1) (1,1,1,1,2)	5	31
6	(1,1,1,1,1,1)	1	32

Tabla 3.2: Composiciones para $n = 6$.

Teorema 34. *(MacMahon [11], 1893). El número de composiciones de un entero positivo n con k partes es $\mathcal{C}(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$. Además, el total de composiciones de n es $\mathcal{C}(n) = 2^{n-1}$.*

Demostración. Dada una composición para un entero positivo n con k partes $(c_1, c_2, \cdots, c_k)$, se tiene una representación de esta por medio de un grafo lineal definido de la siguiente forma: se divide un segmento de recta en n partes iguales, obteniendo $n-1$ divisiones internas, luego se comienza a avanzar desde el inicio del segmento de recta hasta la c_1-ésima división, la cual se marca; arrancando desde esta división se cuentan c_2 divisiones más y se hace una nueva marca, es decir en la $(c_1 + c_2)$-ésima división. Se continua de la misma manera hasta que se avanza el último término de la composición c_k, llegando al final del segmento el cual no se marca, esto dado que $\sum_{i=1}^{c} c_i = n$ (ver Figura 3.1 para un ejemplo).

De esta manera, si se desea encontrar el número de las posibles composiciones de un entero positivo n con m partes, basta considerar las distintas formas en que se pueden realizar $c-1$ marcas en $n-1$ divisiones o espacios, esta cantidad es el coeficiente binomial $\binom{n-1}{k-1}$.

Ahora, para probar que el total de composiciones de un entero positivo n es 2^{n-1}, notemos que el total de composiciones del entero positivo n está dado por todas las posibles formas en que se pueden colocar marcas sobre las $n-1$ divisiones y como en cada división puede ir o no una marca, el número posible de composiciones para el entero positivo n es 2^{n-1}. □

La idea de asociar un grafo lineal como el definido en la demostración del Teorema 34 es de MacMahon [11, pág 836]. Como ejemplo de estos grafos lineales en la Figura 3.1 se muestra el grafo lineal asociado a la composición $(4,3,1,3,2)$, donde $n = 13$ y $k = 5$.

Teorema 35. *Para $C(n,k)$ se tiene la siguiente recursión:*

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k), \qquad (n,k \geq 1). \tag{3.2}$$

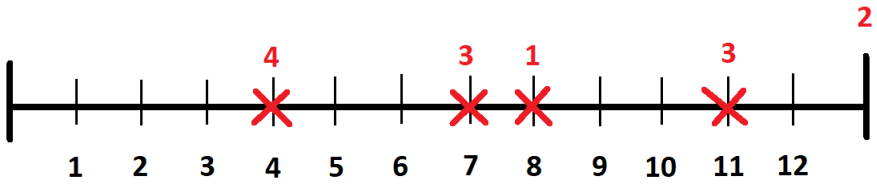


Figura 3.1: Grafo lineal asociado a la composición (4,3,1,3,2).

La prueba del Teorema 35 es inmediata, al restar 1 al último dígito de cada composición de n con k partes, se obtienen todas las composiciones de $n-1$ con $k-1$ partes para los casos en que la composición termina en 1 y todas las composiciones de $n-1$ con k partes para los demás casos.

3.2.2. Funciones generatriz para las sucesiones $C(n)$ y $C(n,k)$.

Usando la igualdad $C(n) = 2^{n-1}$ obtenida en el Teorema 34 y la identidad conocida para la serie geométrica, se obtiene de forma sencilla una fórmula cerrada para la función generatriz de la sucesión $C(n)$:

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} C(n)x^n = C(0) + \sum_{n\geq 1} 2^{n-1}x^n = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(2x)^n = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1-2x}\right) = \frac{1-x}{1-2x}. \quad (3.3)$$

Para el caso de la función generatriz de la sucesión en dos variables $C(n,k)$ usando la fórmula recursiva (3.2) y propiedades de la sumatoria se tiene que

$$\begin{aligned} C(x,y) &= \sum_{n,k\geq 0} C(n,k)x^n y^k \\ &= \sum_{n,k\geq 1} (C(n-1,k-1) + C(n-1,k))x^n y^k + \sum_{k\geq 0} C(0,k)y^k \\ &= xy \sum_{n,k\geq 1} C(n-1,k-1)x^{n-1}y^{k-1} + x \sum_{n,k\geq 1} C(n-1,k))x^{n-1}y^k + 1 \\ &= 1 + xyC(x,y) + xC(x,y). \end{aligned}$$

Despejando $C(x,y)$ se obtiene la siguiente expresión:

$$C(x,y) = \frac{1}{1-x-xy}. \quad (3.4)$$

3.2.3. Composiciones con partes restringidas.

Janjíc en [9] demuestra una fórmula cerrada para calcular la cantidad de composiciones de n con k partes restringidas a un subconjunto arbitrario de $\mathbb{N}$ y encuentra fórmulas cerradas para algunos conjuntos particulares. Enunciaremos algunos de estos resultados que utilizaremos posteriormente. En adelante $G(n,k;A)$ denota la cantidad de composiciones de n con k partes restringidas a un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$.

A continuación, se enuncian un lema y corolario con fórmulas cerradas para la cantidad de composiciones de n con k partes restringidas a un conjunto finito de enteros arbitrario finito y a un conjunto de enteros menores o iguales a algún $r \in \mathbb{N}$, respectivamente.

Lema 36. *[9, Pág. 4]. Dados $r \geq 1$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ con $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r$, se tiene que*

$$G(n,k;A) = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{r-1})} \binom{k}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{r-2}}{j_{r-1}}, \tag{3.5}$$

donde la suma es sobre todas las secesiones no crecientes $(j_1, j_2, \ldots, j_{r-1})$ de enteros no negativos, tales que:

$$n = ka_1 + j_1(a_2 - a_1) + \cdots + j_{r-2}(a_{r-1} - a_{r-2}) + j_{r-1}(a_r - a_{r-1}).$$

Si la ecuación anterior no tiene solución, se tiene que $G(n,k;A) = 0$.

Ejemplo 37. Como ejemplo particular del Lema 36 veamos que efectivamente la Ecuación (3.5) permite calcular la cantidad de composiciones de 8 con 2 partes restringidas al conjunto $A = \{2,4,6\}$. Es sencillo deducir que las composiciones que cumplen las condiciones dadas son $(2,6), (4,4)$ y $(6,2)$, ahora, remplazando n y k en la Ecuación (3.5) por 8 y 2, respectivamente, comprobemos que el resultado es 3. Primero, encontramos las sucesiones (j_1, j_2) que cumplen las condiciones dadas en el Lema 36, en particular $8 = 4 + 2j_1 + 2j_2$, en este caso es claro que las sucesiones no crecientes de enteros no negativos que satisfacen la ecuación anterior son $(2,0)$ y $(1,1)$. Reemplazando en la Ecuación (3.5) tenemos:

$$G(8,2;A) = \sum_{(j_1,j_2)} \binom{2}{j_1}\binom{j_1}{j_2} = \sum_{(2,0)} \binom{2}{2}\binom{2}{0} + \sum_{(1,1)} \binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 2 = 3.$$

Corolario 38. *[9, Pág. 6] Dado $A = \{1,2,3,\ldots,r\}$, si $n = k$, $G(n,k;A) = 1$, y si $n > k$ entonces se tiene*

$$G(n,k;A) = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{r-1})} \binom{k}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots\binom{j_{r-2}}{j_{r-1}}, \tag{3.6}$$

donde la suma es sobre todas las particiones $(j_1, j_2, \ldots, j_{r-1})$ *de* $n-k$ *con a lo más* $r-1$ *partes, cada parte tiene valor a lo más* k*.*

Ejemplo 39. Como ejemplo particular del Corolario 38 veamos que efectivamente la Ecuación (3.6) permite calcular el número de composiciones de 8 con 2 partes restringidas al conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Es fácil deducir que estas composiciones son: $(3, 5)$, $(5, 3)$ y $(4, 4)$. Veamos que al reemplazar en la Ecuación (3.6) estos valores obtenemos 3 como resultado. Primero, las particiones (j_1, j_2, j_3, j_4) de 6, donde cada parte vale a lo más 2 son $\{2, 2, 2\}$ y $\{2, 2, 1, 1\}$. Reemplazando en la Ecuación (3.6) se obtiene:

$$G(8, 2; \{1, 2, 3, 4, 5\}) = \binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2} + \binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1 + 2 = 3.$$

Finalmente, dejaremos enunciados algunos corolarios que corresponden a casos particulares del Lema 36 y que utilizaremos posteriormente.

Corolario 40. *[9, Pág. 6] Si* $A = \{1, p\}$*, con* $p > 1$*, entonces*

$$G(n, n - ip + i; A) = \binom{n - ip + i}{i},$$

para $i = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$*.*

Corolario 41. *[9, Pág. 7] Dado el conjunto* $A = \{1, 3, 5\}$*, si* $n - k \equiv 0 \pmod 2$*, entonces*

$$G(n, k; A) = \sum_{i=0}^{\min\{k, \frac{n-k}{2}\}} \binom{k}{i}\binom{i}{\frac{n-k}{2} - i},$$

en otro caso $G(n, k; A) = 0$*.*

3.3. Picos en composiciones.

A continuación se realizan pruebas combinatorias de fórmulas cerradas que permiten calcular la cantidad de picos y l-picos simétricos y asimétricos en composiciones de n con k partes. También se considera el caso cuando las partes de la composición están restringidas a un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$. Para algunos casos se obtienen las funciones generatrices correspondientes.

Teorema 42. *La cantidad de picos simétricos en composiciones de* n *con* k *partes* $psc(n, k)$ *está dada por la fórmula cerrada:*

$$ps(n, k) = (k-2) \sum_{m=2}^{n-k+1} \left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1, \lfloor \frac{n-m-k+3}{2} \rfloor\}} \binom{n-m-2b-1}{k-4} \right). \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k)$ una composición arbitraria de n con k partes. Un pico simétrico se puede tener en cualquier posición j entre 2 y $k-1$. Fijando arbitrariamente una posición donde se puede tener un pico simétrico, notamos por bmb a un pico simétrico en las posiciones $j-1$, j y $j+1$

$$(c_1 \cdots c_{j-2}\ b\ m\ b\ c_{j+2} \cdots c_k).$$

El valor mínimo que puede tomar m para que se tenga un pico simétrico en la posición j es 2, el valor máximo está acotado por la propiedad de la composición tal que la suma de sus elementos debe ser n, luego, el valor máximo para m se tendrá cuando los demás elementos de la composición tengan su valor mínimo que es 1 (incluyendo a b), entonces, si $c_i = 1$ para todo $i \neq j$

$$(\cdots 1 \cdots\ m\ \cdots 1 \cdots).$$

En este caso la suma de los valores de la composición es $n = m + k - 1$, de donde podemos concluir que el valor máximo que puede tomar m es $n - k + 1$.

Para b, claramente su valor mínimo puede ser 1, mientras que su valor máximo tendrá dos posibles criterios de acotamiento. El primero $b < m$, en este caso la cota del valor máximo de b es $m - 1$, mientras que el segundo criterio está dado por la propiedad de la composición donde la suma de sus elementos debe ser n, entonces el valor máximo de b se tendrá cuando los elementos de la composición distintos de b y m tomen su valor mínimo que es 1

$$(\cdots 1 \cdots\ b\ m\ b\ \cdots 1 \cdots).$$

En este caso se tiene que $n = m + 2b + k - 3$, de donde concluimos que el valor máximo para b por este criterio es $\lfloor \frac{n-m-k+3}{2} \rfloor$. Entonces, el valor máximo que puede tomar b está dado por mín$\{m-1, \lfloor \frac{n-m-k+3}{2} \rfloor\}$.

Dado el pico bmb con las condiciones anteriores para m y b en la posición arbitraria j fijada, para los elementos restantes de la composición, cada posible valor que puedan tomar contará un pico simétrico distinto. Consideremos entonces la composición sin el pico simétrico

$$(c_1 \cdots c_{j-2}\ c_{j+2} \cdots c_k).$$

Se tiene que la suma de sus $k-3$ elementos debe ser $n - m - 2b$, entonces por el Teorema 34 todos los posibles valores de los elementos restantes de la composición están dados por la cantidad de composiciones de $n - m - 2b$ con $k - 3$ partes, dada por el coeficiente binomial

$$\binom{n-m-2b-1}{k-4}.$$

Así, la cantidad de picos simétricos para las composiciones n con k partes está dada por la fórmula anterior sumando sobre m y b para sus posibles valores y multiplicando por $k-2$, dado que j varía entre 2 y $k-1$, obtenemos la fórmula cerrada:

$$ps(n,k) = (k-2)\sum_{m=2}^{n-k+1}\left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1,\lfloor\frac{n-m-k+3}{2}\rfloor\}}\binom{n-m-2b-1}{k-4}\right).$$

□

Teorema 43. *La cantidad de picos asimétricos en composiciones de n con k partes $pac(n,k)$ está dada por la fórmula cerrada:*

$$pa(n,k) = 2(k-2)\sum_{m=3}^{n-k}\left(\sum_{b=2}^{\min\{m-1,n-m-k+2\}}\left(\sum_{c=1}^{\min\{b-1,n-m-b-k+3\}}\binom{n-m-b-c-1}{k-4}\right)\right). \tag{3.8}$$

Demostración. Sea $(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k)$ una composición arbitraria de n con k partes, un pico asimétrico se puede tener en cualquier posición j entre 2 y $k-1$. Fijando arbitrariamente esta posición notamos por bmc a un pico asimétrico en las posiciones $j-1$, j y $j+1$ con $b > c$

$$(c_1 \cdots c_{j-2}\ b\ m\ c\ c_{j+2} \cdots c_k).$$

Si bien, para este caso cmb también es un pico asimétrico, para contar este tipo de picos asimétricos se multiplica cada pico de la forma bmc por 2.

El valor mínimo que puede tomar m para que se tenga un pico asimétrico en la posición j es 3, el valor máximo está acotado por la propiedad de la composición tal que la suma de sus elementos debe ser n, luego, el valor máximo para m se tendrá cuando los demás elementos de la composición tengan su valor mínimo que es 1 excepto $b = 2$, entonces

$$(\cdots 1 \cdots 2\ m\ 1 \cdots 1 \cdots).$$

En este caso la suma de los valores de la composición es $n = m+k$, de donde podemos concluir que el máximo valor que puede tomar m es $n-k$.

Para b, claramente su valor mínimo puede ser 2, mientras que su valor máximo tiene dos posibles criterios de acotamiento. El primero $b < m$, en este caso la cota del valor máximo de b es $m-1$, mientras que el segundo criterio está dado por la propiedad de la composición

donde la suma de sus elementos debe ser n, entonces el valor máximo de b se tendrá cuando los elementos de la composición distintos de b y m tomen su valor mínimo que es 1

$$(\cdots 1 \cdots \ b \ m \ 1 \ \cdots 1 \cdots).$$

En este caso se tiene que $n = m + b + k - 2$, de donde concluimos que el valor máximo para b por este criterio es $n - m - k + 2$, luego el valor máximo que puede tomar b está dado por $\text{mín}\{m - 1, n - m - k + 2\}$.

Para c, claramente su valor mínimo puede ser 1, mientras que su valor máximo tiene dos posibles criterios de acotamiento. El primero $c < b$, en este caso la cota del valor máximo de c es $b - 1$, mientras que el segundo criterio está dado por la propiedad de la composición donde la suma de sus elementos debe ser n, entonces el valor máximo de c se tendrá cuando los elementos de la composición distintos de c, b y m tomen su valor mínimo que es 1

$$(\cdots 1 \cdots \ b \ m \ c \ \cdots 1 \cdots).$$

En este caso se tiene que $n = m + b + c + k - 3$, de donde concluimos que el valor máximo para c por este criterio es $n - m - b - k + 3$. Entonces, el valor máximo que puede tomar c está dado por $\text{mín}\{m - 1, n - m - b - k + 3\}$.

Dado el pico bmc con las condiciones anteriores para m, b y c en la posición arbitraria j fijada, para los elementos restantes de la composición, cada posible valor que puedan tomar contará un pico asimétrico distinto. Consideremos entonces la composición sin el pico asimétrico:

$$(c_1 \cdots c_{j-2} \ c_{j+2} \cdots c_k).$$

Se tiene que la suma de sus $k - 3$ elementos debe ser $n - m - b - c$, entonces por el Teorema 34 todos los posibles valores de los elementos restantes de la composición estarán dados por la cantidad de composiciones de $n - m - b - c$ con $k - 3$ partes, dada por la fórmula cerrada

$$\binom{n - m - b - c - 1}{k - 4}.$$

Así, la cantidad de picos asimétricos para las composiciones de n con k partes está dada por la expresión anterior, sumando sobre m, b y c para sus posibles valores y multiplicando por 2 y $k - 2$, dado que j varía entre 2 y $k - 1$, obtenemos la fórmula cerrada:

$$pa(n,k) = 2(k-2) \sum_{m=3}^{n-k} \left(\sum_{b=2}^{\text{mín}\{m-1, n-m-k+2\}} \left(\sum_{c=1}^{\text{mín}\{b-1, n-m-b-k+3\}} \binom{n - m - b - c - 1}{k - 4} \right) \right).$$

□

Una fórmula cerrada para la cantidad de picos en composiciones de n con k partes se puede obtener sumando las fórmulas cerradas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos.

Ejemplo 44. A continuación enlistamos las composiciones de 7 con 4 partes. De rojo resaltamos los picos simétricos y de azul los picos asimétricos. Además, comprobamos con las fórmulas cerradas obtenidas anteriormente que los resultados coinciden.

$(1,\ 1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 3,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 4,\ 1)$, $(1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3,\ 1)$,
$(1,\ 3,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 4,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 1,\ 2)$,
$(2,\ 2,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 3,\ 1,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 2,\ 1)$, $(3,\ 2,\ 1,\ 1)$, $(4,\ 1,\ 1,\ 1)$.

Podemos observar que se tienen 6 picos simétricos y 4 picos asimétricos. Remplazando $n = 7$ y $k = 4$ en las Ecuaciones (3.7) y (3.8) comprobamos que se obtiene el resultado.

- Para calcular la cantidad de picos simétricos remplazamos en la Ecuación (3.7):

$$ps(n,4) = 2\sum_{m=2}^{4}\left(\sum_{b=1}^{\text{mín}\{m-1,\lfloor\frac{6-m}{2}\rfloor\}}\binom{6-m-2b}{0}\right) = 2\,(1+1+1) = 6.$$

- Para calcular la cantidad de picos asimétricos remplazamos en la Ecuación (3.8) se obtiene de inmediato $m = 3$, $b = 2$ y $c = 1$, luego:

$$pa(7,4) = 4\binom{6-m-b-c}{0} = 4\binom{0}{0} = 4.$$

Entonces la cantidad total de picos en composiciones de 7 con 4 partes es 10, que como se puede observar corresponde a la cantidad de picos resaltados en rojo y azul.

3.3.1. Cantidad de picos en composiciones de n.

Para calcular la cantidad de picos en composiciones de n, sin tener en cuenta la cantidad de partes, basta con realizar la suma de las fórmulas ya obtenidas sobre los posibles valores para k. En este caso podemos considerar $k \geq 3$ ya que desde este valor se pueden tener picos y $k \leq n$.

En las Tablas 3.3 y 3.4 se organizan la cantidad de picos simétricos y asimétricos para algunos valores de n y k que se calculan con *Mathematica* utilizando las fórmulas cerradas mostradas en los Teoremas 42 y 43. Igualmente se da el total de picos simétricos y asimétricos para los valores de n considerados.

Picos simétricos en composiciones.

$n \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
6	1	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
7	2	6	9	4	0	0	0	0	0	0	0	0	21
8	2	10	18	16	5	0	0	0	0	0	0	0	51
9	2	14	33	40	25	6	0	0	0	0	0	0	120
10	3	18	54	84	75	36	7	0	0	0	0	0	277
11	3	24	81	156	180	126	49	8	0	0	0	0	627
12	3	30	117	264	375	342	196	64	9	0	0	0	1400
13	4	36	162	420	705	792	595	288	81	10	0	0	3093
14	4	44	216	636	1230	1638	1519	968	405	100	11	0	6771
15	4	52	282	924	2025	3114	3430	2704	1494	550	121	12	14712

Tabla 3.3: Cantidad de picos simétricos en composiciones.

De la tabla anterior es claro que para $k \leq 3$ y $n \leq 3$ no se tienen picos simétricos, igualmente para $k \geq n$. En la siguiente tabla encontramos la cantidad de picos asimétricos, para este caso no se tienen picos asimétricos para $k \leq 5$ y $n \leq 3$, igualmente para $k \geq n$.

Picos asimétricos en composiciones.

$n \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
8	4	8	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
9	6	16	18	8	0	0	0	0	0	0	0	0	48
10	8	28	42	32	10	0	0	0	0	0	0	0	120
11	10	44	84	88	50	12	0	0	0	0	0	0	288
12	14	64	150	200	160	72	14	0	0	0	0	0	674
13	16	92	246	400	410	264	98	16	0	0	0	0	1542
14	20	124	384	728	910	756	406	128	18	0	0	0	3474
15	24	164	570	1240	1820	1848	1288	592	162	20	0	0	7728
16	28	212	816	2000	3370	4032	3444	2064	828	200	22	0	17016
17	32	268	1134	3088	5870	8076	8148	6000	3150	1120	242	24	37152

Tabla 3.4: Cantidad de picos asimétricos en composiciones.

Por último, en la Tabla 3.5 se da el total de picos para algunos valores de n.

Picos en composiciones.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Total	1	3	10	27	69	168	397	915	2074	4635	10245	22440

Tabla 3.5: Cantidad de picos en composiciones.

Una forma alternativa para obtener otra fórmula cerrada para la cantidad de picos simétricos de las composiciones de n es considerar las composiciones de n de la forma

$$(c_1\ c_2\ c_3\ \cdots\ c_{k-2}\ c_{k-1}\ c_k).$$

Se puede afirmar que la cantidad picos simétricos en estas composiciones está dado por la cantidad de picos simétricos de las partes (sub-palabras o sub-composiciones)

$$(c_1\ c_2\ c_3\ \cdots\ c_{k-2}\ c_{k-1}),$$

que corresponden a composiciones de $n - c_k$, más la cantidad de picos simétricos que forman los símbolos o partes c_{k-2}, c_{k-1}, c_k. Si notamos por $ps(n)$ la cantidad de picos simétricos en composiciones de n, particularmente para $n = 4$, se tiene que $ps(4) = 1$, pues el único pico simétrico en composiciones de 4 se encuentra en la composición (1 2 1). De acuerdo a lo expuesto anteriormente, para $n \geq 4$, se tiene que

$$ps(n) = \sum_{m=4}^{n-1} ps(m) + N(n),$$

donde $N(n)$ es la cantidad de picos simétricos que forman los símbolos o partes c_{k-2}, c_{k-1}, c_k. Luego

$$\begin{aligned}
ps(n) = \sum_{m=4}^{n-1} ps(m) + N(n) &= ps(n-1) + \sum_{m=4}^{n-2} ps(m) + N(n) \\
&= 2\sum_{m=4}^{n-2} ps(m) + N(n) + N(n-1) \\
&= 2ps(n-2) + 2\sum_{m=4}^{n-3} ps(m) + N(n) + N(n-1) \\
&= 4\sum_{m=4}^{n-3} ps(m) + N(n) + N(n-1) + 2N(n-2) \\
&\vdots \\
&= 2^{n-5} + \sum_{m=-1}^{n-6} \lceil 2^m \rceil N(n-1-m).
\end{aligned}$$

Ahora, nos concentramos en el valor de $N(n)$, que corresponde a la cantidad de picos simétricos $b\ c\ b$ en composiciones de n de la forma $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_{k-3}\ b\ c\ b)$. Para tener un pico simétrico $c \geq 2$, y el valor máximo de c es $n-2$ que alcanza cuando se tiene la composición (1 c 1). Por otro lado, para las dos partes notadas con la letra b, se tiene que $1 \leq b \leq c-1$ y también puede

estar acotado por la suma de los valores de la composición. En este caso, su máximo valor estará dado en una composición de la forma $(b\ c\ b)$, con c dado y $c+2b=n$, es decir $b=\lfloor\frac{n-c}{2}\rfloor$, entonces $1\leq b\leq \text{mín}\{c-1,\lfloor\frac{n-c}{2}\rfloor\}$. Finalmente, se tendrá un pico simétrico distinto para cada posible composición $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_{k-3})$ de $n-c-2b$ y el total de composiciones de esta forma es un resultado ya conocido, corresponde a $2^{n-c-2b-1}$. Así que:

$$N(n)=\sum_{c=2}^{n-2}\ \sum_{b=1}^{\text{mín}\{c-1,\lfloor\frac{n-c}{2}\rfloor\}}\lceil 2^{n-c-2b-1}\rceil.$$

Entonces, se obtiene la siguiente fórmula cerrada alternativa en términos de potencias de 2 para la cantidad de picos simétricos en composiciones de $n\geq 5$.

Teorema 45. *Para $n\geq 5$ se tiene que*

$$ps(n)=2^{n-5}+\sum_{m=-1}^{n-6}\lceil 2^m\rceil\sum_{c=2}^{n-m-3}\ \sum_{b=1}^{\text{mín}\{c-1,\lfloor\frac{n-m-c-1}{2}\rfloor\}}\lceil 2^{n-m-c-2b-2}\rceil.$$

(NOTA: En ambos casos se utiliza la función techo dado que se tienen valores donde los exponentes dan -1. Al comprobar los resultados coinciden con los valores ya obtenidos).

Para el caso de picos asimétricos se realiza un procedimiento análogo teniendo en cuenta que los primeros picos asimétricos en composiciones se tienen para $n=6$ con $(1,3,2)$ y $(2,3,1)$, luego, si $pa(n)$ denota la cantidad de picos asimétricos en composiciones de n, se tiene que

$$pa(n)=\sum_{m=6}^{n-1}pa(m)+A(n)=2^{n-6}+\sum_{m=-1}^{n-8}\lceil 2^m\rceil A(n-1-m),$$

donde $A(n)$ corresponde a la cantidad de picos asimétricos bca en composiciones de n de la forma $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_{k-3}\ b\ c\ a)$. Para tener un pico asimétrico $c\geq 3$, y el valor máximo de c es $n-3$ que toma cuando se tiene la composición $(1\ c\ 2)$ o la composición $(2\ c\ 1)$. Por otro lado, para las dos partes notadas con las letras b y a, se tiene que $b\neq a$. Consideramos particularmente $b>a$, y para contar los casos donde $b<a$ el resultado obtenido se multiplica por 2, luego, $2\leq b\leq c-1$ y $1\leq a\leq b-1$, además, también pueden estar acotados por la suma de los valores de la composición. En este caso, el valor máximo de b estará dado en una composición de la forma $(b\ c\ 1)$ con c dado y $c+b+1=n$, es decir $b=n-c-1$, entonces $2\leq b\leq \text{mín}\{c-1,n-c-1\}$, mientras que para a con c,b fijos se tiene que su valor máximo acotado por la composición se tiene en una composición de la forma $(b\ c\ a)$ donde $b+c+a=n$, es decir $a=n-c-b$, entonces $1\leq a\leq \text{mín}\{b-1,n-c-b\}$. Finalmente, se tendrá un pico simétrico distinto para cada posible composición $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_{k-3})$ de $n-c-b-a$, y el total de composiciones de esta forma es un resultado ya conocido, corresponde a $2^{n-c-b-a-1}$. Así

que:

$$A(n) = 2\sum_{c=2}^{n-3}\sum_{b=2}^{\min\{c-1,n-c-1\}}\sum_{a=1}^{min\{b-1,n-c-b\}}\lceil 2^{n-c-b-a-1}\rceil.$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente fórmula cerrada alternativa en términos de potencias de 2 para la cantidad de picos asimétricos en composiciones de $n \geq 7$.

Teorema 46. *Para $n \geq 7$ se tiene que*

$$pa(n) = 2^{n-6} + \sum_{m=-1}^{n-8}\lceil 2^m\rceil 2\sum_{c=3}^{n-m-4}\sum_{b=2}^{\min\{c-1,n-m-c-2\}}\sum_{a=1}^{min\{b-1,n-m-c-b-1\}}\lceil 2^{n-m-c-b-a-2}\rceil.$$

3.3.2. Función generatriz respecto al número de picos simétricos.

Definimos la función generatriz $F(x, y, q)$ para las composiciones de n respecto al número de partes y la cantidad de picos simétricos. Con el fin de encontrar una fórmula explícita para esta función generatriz, se define $F(x, y, q|a_1a_2\cdots a_s)$ como la función generatriz para las composiciones de n de la forma $(c_1\ c_2\ \cdots\ c_m)$ con $m \geq s$, respecto al número de partes y la cantidad de picos simétricos tales que $c_i = a_i$ para $1 \leq i \leq s$. Luego, tenemos que

$$F(x, y, q) = 1 + \sum_{a\geq 1} F(x, y, q|a). \tag{3.9}$$

Se fija a y considerando la segunda parte de la composición se tiene que:

$$\begin{aligned} F(x, y, q|a) &= x^a y + \sum_{j=1}^{a} F(x, y, q|aj) + \sum_{j\geq a+1} F(x, y, q|aj) \\ &= x^a y + x^a y\sum_{j=1}^{a} F(x, y, q|j) + \sum_{j\geq a+1} F(x, y, q|aj). \end{aligned} \tag{3.10}$$

De donde

$$\sum_{j\geq a+1} F(x, y, q|aj) = F(x, y, q|a) - x^a y - x^a y\sum_{j=1}^{a} F(x, y, q|j). \tag{3.11}$$

Por otra parte, para $b > a$ y considerando la tercera parte de la composición se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,q|ab) &= x^{a+b}y^2 + F(x,y,q|aba) + \sum_{j=1,j\neq a}^{b} F(x,y,q|abj) + \sum_{j\geq b+1} F(x,y,q|abj) \\
&= x^{a+b}y^2 + x^a y \sum_{j\geq b+1} F(x,y,q|bj) + x^{a+b}y^2 q F(x,y,q|a) \\
&+ x^{a+b}y^2 \sum_{j=1}^{b} F(x,y,q|j) - x^{a+b}y^2 F(x,y,q|a) \\
&= x^{a+b}y^2 + x^a y \sum_{j\geq b+1} F(x,y,q|bj) + x^{a+b}y^2 \sum_{j=1}^{b} F(x,y,q|j) \\
&+ (q-1)x^{a+b}y^2 F(x,y,q|a). \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Aplicando el resultado (3.11) a $\sum_{j\geq b+1} F(x,y,q|bj)$ y reemplazando en (3.12) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,q|ab) &= x^{a+b}y^2 + x^{a+b}y^2 \sum_{j=1}^{b} F(x,y,q|j) + (q-1)x^{a+b}y^2 F(x,y,q|a) \\
&+ x^a y F(x,y,q|b) - x^{a+b}y^2 - x^{a+b}y^2 \sum_{j=1}^{b} F(x,y,q|j) \\
&= x^a y F(x,y,q|b) + (q-1)x^{a+b}y^2 F(x,y,q|a).
\end{aligned}
$$

Y aplicando este último resultado en (3.10) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,q|a) &= x^a y + x^a y \sum_{j=1}^{a} F(x,y,q|j) + \sum_{j\geq a+1} (x^a y F(x,y,q|j) \\
&+ (q-1)x^{a+j}y^2 F(x,y,q|a)) \\
&= x^a y + x^a y \sum_{j\geq 1} F(x,y,q|j) + (q-1)y^2 F(x,y,q|a) \sum_{j\geq a+1} x^{a+j} \\
&= x^a y F(x,y,q) + (q-1)y^2 F(x,y,q|a) \sum_{j+a\geq 2a+1} x^{a+j} \\
&= x^a y F(x,y,q) + \frac{(q-1)F(x,y,q|a)x^{2a+1}y^2}{1-x}.
\end{aligned}
$$

De donde

$$
F(x,y,q|a) = \frac{x^a y F(x,y,q)}{1 - \dfrac{(q-1)x^{2a+1}y^2}{1-x}}.
$$

Finalmente, remplazando el resultado anterior en (3.9) y despejando $F(x,y,q)$ se obtiene el

siguiente resultado.

Teorema 47. *La función generatriz para el número de composiciones de n de acuerdo al número de partes y picos simétricos está dada por*

$$F(x,y,q)=\frac{1}{1-\sum_{a\geq 1}\left(\frac{x^a y}{1-\frac{(q-1)x^{2a+1}y^2}{1-x}}\right)}. \tag{3.13}$$

Realizando la expansión en series de la función generatriz (3.13) se tienen como primeros términos

$$\begin{aligned}F(x,y,q)=1+yx+(y+y^2)x^2+(y+2y^2+y^3)x^3+(y+3y^2+2y^3+qy^3+y^4)x^4\\ +(y+4y^2+5y^3+\underline{qy^3}+\underline{2y^4}+\underline{2qy^4}+y^5)x^5+\cdots\end{aligned}$$

Las composiciones asociadas a los términos subrayados son respectivamente

$$\underbrace{(1\ 3\ 1)}_{qy^3x^5}\qquad\underbrace{(1\ 1\ 1\ 2)}_{y^4x^5}\qquad\underbrace{(2\ 1\ 1\ 1)}_{y^4x^5}\qquad\underbrace{(1\ 1\ 2\ 1)}_{qy^4x^5}\qquad\underbrace{(1\ 2\ 1\ 1)}_{qy^4x^5}.$$

Al reemplazar $q=1$ en la función generatriz (3.13), es decir sin tener en cuenta los picos simétricos, podemos verificar que se obtiene la función generatriz (3.4), y al remplazar simultáneamente $q=1$ y $y=1$ se obtiene la función generatriz (3.3). De manera análoga, al considerar $y=1$ se obtiene la función generatriz para las composiciones de n respecto a la cantidad de picos simétricos (sin tener en cuenta la cantidad de partes de la composición). Si denotamos por $ps(n)$ la sucesión de la cantidad picos simétricos en composiciones de n y $ps(n,k)$ la de la cantidad de picos simétricos en composiciones de n con k partes, al derivar la función generatriz respecto a q y evaluando en $q=1$ se obtienen las funciones generatrices para las respectivas sucesiones.

Teorema 48. *Se tienen las fórmulas cerradas para las funciones generatrices de las sucesiones $ps(n,k)$ y $ps(n)$, respectivamente*

$$\frac{\partial}{\partial q}F(x,y,q)|_{q=1}=\sum_{n,k\geq 0}ps(n,k)x^n y^k=\frac{x^4y^3}{(1-x-xy)^2(1+x+x^2)}. \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}F(x,1,q)|_{q=1}=\sum_{n\geq 0}ps(n)x^n=\frac{x^4}{(1-2x)^2(1+x+x^2)}. \tag{3.15}$$

Demostración. Primero calculamos $\frac{\partial}{\partial q}F(x,y,q)$, para facilidad en los calculos notamos la sumatoria en el denominador de $F(x,y,q)$ simplemente por $\sum$. Luego

$$\frac{\partial}{\partial q}F(x,y,q)=\frac{\frac{\partial}{\partial q}\sum}{(1-\sum)^2},$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial q}\sum = \frac{xy^3}{1-x}\sum_{a\geq 1}\frac{x^{3a}}{\left[1-\frac{(q-1)x^{2a+1}y^2}{1-x}\right]^2}.$$

Al evaluar $\frac{\partial}{\partial q}F(x,y,q)$ en $q=1$ se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial q}F(x,y,q)|_{q=1} = \frac{\frac{xy^3}{1-x}\sum_{a\geq 1}(x^3)^a}{\left(1-y\sum_{a\geq 1}x^a\right)^2} = \frac{\frac{x^4y^3}{(1-x)(1-x^3)}}{1-\frac{2yx}{1-x}+\frac{y^2x^2}{(1-x)^2}} = \frac{x^4y^3}{(1-x-xy)^2(1+x+x^2)},$$

obteniendo la formula cerrada (3.14). Finalmente, al remplazar $y=1$ en la fórmula cerrada obtenida anteriormente se obtiene la igualdad (3.15).

□

Los primeros términos de la expansión en serie de potencias de la función generatriz (3.14) son

$$\begin{aligned} x^4y^3 + x^5\left(2y^4+y^3\right) + x^6\left(3y^5+4y^4+y^3\right) + x^7\left(4y^6+9y^5+6y^4+2y^3\right) \\ + x^8\left(5y^7+16y^6+18y^5+10y^4+2y^3\right) + x^9\left(6y^8+25y^7+40y^6+33y^5+14y^4+2y^3\right) \\ + x^{10}\left(7y^9+36y^8+75y^7+84y^6+54y^5+18y^4+3y^3\right) + \cdots \end{aligned}$$

Mientras que para la función generatriz (3.15) se tienen los siguientes primeros términos para su expansión en serie de potencias

$$\begin{aligned} x^4+3x^5+8x^6+21x^7+51x^8+120x^9+277x^{10}+627x^{11}+1400x^{12}+3093x^{13}+6771x^{14}+14712x^{15} \\ + 31765x^{16} + 68211x^{17} + 145784x^{18} + 310293x^{19} + 658035x^{20} + \cdots \end{aligned}$$

En ambos casos puede observarse que los coeficientes coinciden con los resultados obtenidos en la Tabla 3.3.

3.3.3. Función generatriz respecto al número de picos asimétricos.

Para el caso de la función generatriz de composiciones de n respecto al número de partes y la cantidad de picos asimétricos se puede realizar un proceso análogo al realizado para los picos simétricos.

Definimos $H(x,y,p,q)$ como la función generatriz de las composiciones de n respecto al número de partes, de picos simétricos y asimétricos. De manera análoga a lo realizado para la función

generatriz $F(x,y,q)$ se tiene que:

$$H(x,y,p) = 1 + \sum_{a\geq 1} H(x,y,p|a). \tag{3.16}$$

$$H(x,y,p|a) = x^a y + x^a y \sum_{j=1}^{a} H(x,y,p|j) + \sum_{j\geq a+1} H(x,y,p|aj). \tag{3.17}$$

Por otra parte, para $b \geq a+1$ y considerando la tercera parte de la composición se tiene que:

$$\begin{aligned}
H(x,y,p|ab) &= x^{a+b}y^2 + H(x,y,p|aba) + \sum_{j=1,j\neq a}^{b-1} H(x,y,p|abj) + \sum_{j\geq b+1} H(x,y,p|abj) \\
&\quad + H(x,y,p|abb) \\
&= x^{a+b}y^2 + x^a y \sum_{j\geq b+1} H(x,y,p|bj) + x^{a+b}y^2 H(x,y,p|a) \\
&\quad + x^{a+b}y^2 H(x,y,p|b) + x^{a+b}y^2 p \sum_{j=1}^{b-1} H(x,y,p|j) - x^{a+b}y^2 p H(x,y,p|a) \\
&= x^{a+b}y^2 + x^a y \sum_{j\geq b+1} H(x,y,p|bj) + (1-p)x^{a+b}y^2 H(x,y,p|a) \\
&\quad + x^{a+b}y^2 H(x,y,p|b) + x^{a+b}y^2 p \sum_{j=1}^{b-1} H(x,y,p|j).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Despejando $\sum_{j\geq a+1} H(x,y,p|aj)$ de (3.17), aplicando a $\sum_{j\geq b+1} H(x,y,p|bj)$ y reemplazando en (3.18) se tiene que:

$$\begin{aligned}
H(x,y,p|ab) &= x^{a+b}y^2 + x^a y \left(H(x,y,p|b) - x^b y - x^b y \sum_{j=1}^{b} H(x,y,p|j) \right) \\
&\quad + (1-p)x^{a+b}y^2 H(x,y,p|a) + x^{a+b}y^2 H(x,y,p|b) + x^{a+b}y^2 p \sum_{j=1}^{b-1} H(x,y,p|j) \\
&= x^a y H(x,y,p|b) + (p-1)x^{a+b}y^2 \sum_{j=1}^{b-1} H(x,y,p|j) + (1-p)x^{a+b}y^2 H(x,y,p|a).
\end{aligned}$$

Aplicando este último resultado en (3.17) se tiene que:

$$H(x,y,q|a) = x^a y + x^a y \sum_{i=1}^{a} H(x,y,p|i)$$
$$+ \sum_{i\geq a+1} \left(x^a y H(x,y,p|i) + (p-1)x^{a+i}y^2 \sum_{j=1}^{i-1} H(x,y,p|j) + (1-p)x^{a+i}y^2 H(x,y,p|a). \right)$$
$$= x^a y H(x,y,p) + \frac{(1-p)y^2 x^{2a+1} H(x,y,p|a)}{1-x} + (p-1)y^2 \sum_{i\geq a+1} x^{i+a} \sum_{j=1}^{i-1} H(x,y,p|j).$$

Definimos una nueva función generatriz considerando una nueva variable t, $H(x,y,p,t) = 1 + \sum_{a\geq 1} H(x,y,p|a)t^a$. Luego:

$$H(x,y,p,t) = 1 + \sum_{a\geq 1} (xt)^a y H(x,y,p) + \sum_{a\geq 1} \frac{(1-p)y^2 x H(x,y,p|a)(tx^2)^a}{1-x}$$
$$+ (p-1)y^2 \sum_{a\geq 1} \sum_{i\geq a+1} \sum_{j=1}^{i-1} H(x,y,p|j)(x^i t)^a.$$

Para el tercer término se puede realizar un primer cambio en el orden de las sumatorias, intercambiando en principio las dos primeras sumas. Si denotamos por $h(a,i) = \sum_{j=1}^{i-1} H(x,y,p|j)(x^i t)^a$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{a\geq 1} \sum_{i\geq a+1} h(a,i) =& h(1,2) + h(1,3) + h(1,4) + h(1,5) + h(1,6) + h(1,7) + \cdots \\
&+ h(2,3) + h(2,4) + h(2,5) + h(2,6) + h(2,7) + \cdots \\
&+ h(3,4) + h(3,5) + h(3,6) + h(3,7) + \cdots \\
&+ \quad \vdots \\
=& \sum_{i\geq 2} \sum_{a=1}^{i-1} h(a,i) \\
=& \sum_{i\geq 2} \sum_{a=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} H(x,y,p|j)(x^i t)^a.
\end{aligned}$$

La segunda y tercera suma no tienen problema para ser intercambiadas. Ahora, procedemos a realizar el intercambio de la primer y segunda suma de la sumatoria resultante del procedimiento anterior. Si denotamos por $l(i,j) = \sum_{a=1}^{i-1} H(x,y,p|j)(x^i t)^a$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 2}\sum_{j=1}^{i-1} l(i,j) =& l(2,1)\\ &+ l(3,1) + l(3,2)\\ &+ l(4,1) + l(4,2) + l(4,3)\\ &+ \quad \vdots\\ =& \sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq j+1} l(i,j) = \sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq j+1}\sum_{a=1}^{i-1} H(x,y,p|j)(x^i t)^a.\end{aligned}$$

Sacando un factor de la última suma, para iniciar la suma desde cero, y aplicando la fórmula de la serie geométrica finita se tiene que:

$$\begin{aligned}H(x,y,p,t) &= 1 + \frac{yxtH(x,y,p)}{1-xt} + \frac{(1-p)y^2x}{1-x}(H(x,y,p,tx^2)-1)\\ &+ (p-1)y^2\sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq j+1} H(x,y,p|j)\frac{x^{i+1}t - x^{2i}t^i}{1-xt}.\\ &= 1 + \frac{yxH(x,y,p)}{1-xt} + \frac{(1-p)y^2x}{1-x}(H(x,y,p,tx^2)-1)\\ &+ \frac{(p-1)xy^2t}{1-xt}\sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq j+1} H(x,y,p|j)x^i - \frac{(p-1)y^2}{1-xt}\sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq j+1}(x^2t)^i.\\ &= 1 + \frac{yxH(x,y,p)}{1-xt} + \frac{(1-p)y^2x}{1-x}(H(x,y,p,tx^2)-1)\\ &+ \frac{(p-1)x^2y^2t}{(1-xt)(1-x)}(H(x,y,p,x)-1) - \frac{(p-1)y^2x^2t}{(1-xt)(1-x^2t)}(H(x,y,p,x^2t)-1).\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$H(x,y,p,t) - 1 = \alpha(t) + \beta(t)(H(x,y,p,x^2t) - 1),$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{xyt}{1-xt}H(x,y,p,t) + \frac{(p-1)x^2y^2t}{(1-xt)(1-x)}(H(x,y,p,x)-1),\\ \beta(t) &= \frac{(1-p)y^2x}{1-x} - \frac{(p-1)y^2x^2t}{(1-xt)(1-x^2t)}.\end{aligned}$$

Iterando la ecuación obtenida infinitas veces se obtiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
H(x,y,p,t) &= 1+\sum_{j\geq 0}\alpha(x^{2j}t)\prod_{i=0}^{j-1}\beta(2^i t)\\
&= 1+H(x,y,p,t)\sum_{j\geq 0}\frac{x^{2j+1}yt}{1-x^{2j+1}t}\prod_{i=0}^{j-1}\beta(2^i t)\\
&\quad +(H(x,y,p,x)-1)\sum_{j\geq 0}\frac{(p-1)x^{2j+2}y^2t}{(1-xt)(1-x)}.
\end{aligned}
$$

De donde, tomando $t=1$ y $t=x$, resolviendo la ecuación obtenida para $H(x,y,p)$ se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 49. *Se tiene que*

$$
H(x,y,p)=\frac{1-B(x)}{1-A(1)-B(x)-A(x)B(1)+A(1)B(x)}, \tag{3.19}
$$

donde

$$
A(t)=xyt\sum_{j\geq 0}\frac{x^{3j}y^{2j}(1-p)^j}{1-x^{2j+1}t}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2i+1}t}{(1-x^{2i+1}t)(1-x^{2i+2}t)}\right). \tag{3.20}
$$

$$
B(t)=\frac{-x^2y^2t}{1-x}\sum_{j\geq 0}\frac{x^{3j}y^{2j}(1-p)^{j+1}}{1-x^{2j+1}t}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2i+1}t}{(1-x^{2i+1}t)(1-x^{2i+2}t)}\right). \tag{3.21}
$$

Los primeros términos de la expansión en series de potencia de la función generatriz (3.19) son

$$
\begin{aligned}
&1+xy+x^2\left(y^2+y\right)+x^3\left(y^3+2y^2+y\right)+x^4\left(y^4+3y^3+3y^2+y\right)\\
&\quad +x^5\left(y^5+4y^4+6y^3+4y^2+y\right)+x^6\left(2py^3+y^6+5y^5+10y^4+8y^3+5y^2+y\right)\\
&\quad +\underline{x^7}\left(4py^4+\underline{2py^3}+y^7+6y^6+15y^5+16y^4+13y^3+6y^2+y\right)\\
&\quad +x^8\left(6py^5+8py^4+4py^3+y^8+7y^7+21y^6+29y^5+27y^4+17y^3+7y^2+y\right)+\cdots
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, el término subrayado $2x^7y^3p$ corresponde a las dos composiciones de 7 con 3 partes que tienen un pico asimétrico, estas son $(1,4,2)$ y $(2,4,1)$.

Si denotamos por $pa(n)$ el número de picos asimétricos en composiciones de n y $pa(n,k)$ el número de picos asimétricos en composiciones de n con k partes, derivando el resultado obtenido para la función generatriz $H(x,y,p)$ en el Teorema 49 respecto a p y evaluando en $p=1$ y $k=1$, respectivamente, se obtienen las siguientes fórmulas cerradas para las funciones generatrices de las sucesiones $pa(n,k)$ y $pa(n)$.

Teorema 50. *Las funciones generatrices para las sucesiones $pa(n,k)$ y $pa(n)$ son respectivamente*

$$\frac{\partial}{\partial p}H(x,y,p)|_{p=1} = \sum_{n,k\geq 0} pa(n,k)x^n y^k = \frac{2x^6y^3}{(1-x-xy)^2(1+x-x^3-x^4)}. \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}H(x,1,p)|_{p=1} = \sum_{n\geq 0} pa(n)x^n = \frac{2x^6}{(1-2x)^2(1+x-x^3-x^4)}. \tag{3.23}$$

Demostración. Para las ecuaciones (3.20) y (3.21) se tiene que sus derivadas parciales respecto a p son, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial p}A(t) = xyt\sum_{j\geq 0}\frac{(-j)x^{3j}y^{2j}(1-p)^{j-1}}{1-x^{2j+1}t}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2i+1}t}{(1-x^{2i+1}t)(1-x^{2i+2}t)}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial p}B(t) = \frac{x^2y^2t}{1-x}\sum_{j\geq 0}\frac{(j+1)x^{3j}y^{2j}(1-p)^{j}}{1-x^{2j+1}t}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x^{2i+1}t}{(1-x^{2i+1}t)(1-x^{2i+2}t)}\right).$$

Luego, es inmediato que $B(t)|_{p=1}=0$, para $A(t)$ y $\frac{\partial}{\partial p}B(t)$ al evaluar en $p=1$ el único coeficiente de la sumatoria que no se anula es cuando $j=0$, mientras que para $\frac{\partial}{\partial p}A(t)$ al evaluar en $p=1$ el único coeficiente de la sumatoria que no se anula es en $j=1$.

Por otro lado, para facilidad en los cálculos denotemos por D al denominador de la ecuación (3.19). Al derivar esta ecuación respecto a p se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial p}H(x,y,p) = \frac{-\frac{\partial}{\partial p}B(x)D-(1-B(x))\frac{\partial}{\partial p}D}{D^2}.$$

Al evaluar en $p=1$, cancelando todos los factores con $B(x)$ o $B(1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}H(x,y,p)|_{p=1} &= \frac{\frac{\partial}{\partial p}A(1)|_{p=1}+A(x)|_{p=1}\frac{\partial}{\partial p}B(1)|_{p=1}}{(1-A(1)|_{p=0})^2}\\ &= \frac{\frac{-x^4y^3}{1-x^3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}\right)+\left(\frac{x^2y}{1-x^2}\right)\left(\frac{xy}{1-x}\right)^2}{\left(1-\frac{xy}{1-x}\right)^2}\\ &= \frac{2x^6y^3}{(1-x-xy)^2(1+x-x^3-x^4)}.\end{aligned}$$

Finalmente, remplazando $y=1$ en el resultado anterior se obtiene la ecuación (3.23). □

Para $n\geq 6$ y $k\geq 3$, se tienen los primeros términos de la expansión en series de potencias de

la función generatriz (3.22).

$$2x^6y^3 + x^7\left(4y^4 + 2y^3\right) + x^8\left(6y^5 + 8y^4 + 4y^3\right) + x^9\left(8y^6 + 18y^5 + 16y^4 + 6y^3\right) \\ + x^{10}\left(10y^7 + 32y^6 + 42y^5 + 28y^4 + 8y^3\right) + \cdots$$

Mientras que para la función generatriz (3.23) se obtienen los siguientes términos para su expansión en series de potencias:

$$2x^6 + 6x^7 + 18x^8 + 48x^9 + 120x^{10} + 288x^{11} + 674x^{12} + 1542x^{13} + 3474x^{14} + 7728x^{15} \\ + 17016x^{16} + 37152x^{17} + 80546x^{18} + 173574x^{19} + 372114x^{20} + \cdots$$

En ambos casos puede observarse que los coeficientes coinciden con los resultados obtenidos en la Tabla 3.4.

3.3.4. l-picos en composiciones.

La cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en composiciones de n con k partes puede obtenerse de manera sencilla como una generalización de los Teoremas 42 y 43, por ejemplo, realizando la sustitución $m' = lm$ en ambas demostraciones, procediendo de manera análoga con m' en lugar de m y reemplazando y despejando al final, teniendo en cuenta que la longitud del l-pico es $l + 2$. A continuación, presentamos únicamente los resultados correspondientes.

Teorema 51. *La cantidad de l-picos simétricos y asimétricos en composiciones de n con k partes está dada, respectivamente, por las fórmulas cerradas*

$$(k-l-1)\sum_{m=2}^{\lfloor\frac{n-k+l}{l}\rfloor}\left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1,\lfloor\frac{n-lm-k+l+2}{2}\rfloor\}}\binom{n-lm-2b-1}{k-l-3}\right)$$

y

$$2(k-l-1)\sum_{m=2}^{\lfloor\frac{n-k+l}{l}\rfloor}\left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1,n-lm-k+l+1\}}\left(\sum_{c=1}^{\min\{b-1,n-lm-b-k+l+2\}}\binom{n-lm-b-c-1}{k-l-3}\right)\right).$$

Ejemplo 52. En las composiciones de 10 con 5 partes dadas a continuación se resaltan los 2-picos simétricos (rojo) y asimétricos (azul).

$(1,1,1,1,6)$, $(1,1,1,2,5)$, $(1,1,1,3,4)$, $(1,1,1,4,3)$, $(1,1,1,5,2)$, $(1,1,1,6,1)$, $(1,1,2,1,5)$, $(1,1,2,2,4)$, $(1,1,2,3,3)$, $(1,1,2,4,2)$, $(1,1,2,5,1)$, $(1,1,3,1,4)$, $(1,1,3,2,3)$, $(1,1,3,3,2)$, $(1,1,3,4,1)$, $(1,1,4,1,3)$, $(1,1,4,2,2)$, $(1,1,4,3,1)$, $(1,1,5,1,2)$, $(1,1,5,2,1)$, $(1,1,6,1,1)$, $(1,2,1,1,5)$, $(1,2,1,2,4)$, $(1,2,1,3,3)$, $(1,2,1,4,2)$, $(1,2,1,5,1)$, $(1,2,2,1,4)$,

$(1,2,2,2,3)$, $(1,2,2,3,2)$, $(1,2,2,4,1)$, $(1,2,3,1,3)$, $(1,2,3,2,2)$, $(1,2,3,3,1)$, $(1,2,4,1,2)$, $(1,2,4,2,1)$, $(1,2,5,1,1)$,
$(1,3,1,1,4)$, $(1,3,1,2,3)$, $(1,3,1,3,2)$, $(1,3,1,4,1)$, $(1,3,2,1,3)$, $(1,3,2,2,2)$, $(1,3,2,3,1)$, $(1,3,3,1,2)$, $(1,3,3,2,1)$,
$(1,3,4,1,1)$, $(1,4,1,1,3)$, $(1,4,1,2,2)$, $(1,4,1,3,1)$, $(1,4,2,1,2)$, $(1,4,2,2,1)$, $(1,4,3,1,1)$, $(1,5,1,1,2)$, $(1,5,1,2,1)$,
$(1,5,2,1,1)$, $(1,6,1,1,1)$, $(2,1,1,1,5)$, $(2,1,1,2,4)$, $(2,1,1,3,3)$, $(2,1,1,4,2)$, $(2,1,1,5,1)$, $(2,1,2,1,4)$, $(2,1,2,2,3)$,
$(2,1,2,3,2)$, $(2,1,2,4,1)$, $(2,1,3,1,3)$, $(2,1,3,2,2)$, $(2,1,3,3,1)$, $(2,1,4,1,2)$, $(2,1,4,2,1)$, $(2,1,5,1,1)$, $(2,2,1,1,4)$,
$(2,2,1,2,3)$, $(2,2,1,3,2)$, $(2,2,1,4,1)$, $(2,2,2,1,3)$, $(2,2,2,2,2)$, $(2,2,2,3,1)$, $(2,2,3,1,2)$, $(2,2,3,2,1)$, $(2,2,4,1,1)$,
$(2,3,1,1,3)$, $(2,3,1,2,2)$, $(2,3,1,3,1)$, $(2,3,2,1,2)$, $(2,3,2,2,1)$, $(2,3,3,1,1)$, $(2,4,1,1,2)$, $(2,4,1,2,1)$, $(2,4,2,1,1)$,
$(2,5,1,1,1)$, $(3,1,1,1,4)$, $(3,1,1,2,3)$, $(3,1,1,3,2)$, $(3,1,1,4,1)$, $(3,1,2,1,3)$, $(3,1,2,2,2)$, $(3,1,2,3,1)$, $(3,1,3,1,2)$,
$(3,1,3,2,1)$, $(3,1,4,1,1)$, $(3,2,1,1,3)$, $(3,2,1,2,2)$, $(3,2,1,3,1)$, $(3,2,2,1,2)$, $(3,2,2,2,1)$, $(3,2,3,1,1)$, $(3,3,1,1,2)$,
$(3,3,1,2,1)$, $(3,3,2,1,1)$, $(3,4,1,1,1)$, $(4,1,1,1,3)$, $(4,1,1,2,2)$, $(4,1,1,3,1)$, $(4,1,2,1,2)$, $(4,1,2,2,1)$, $(4,1,3,1,1)$,
$(4,2,1,1,2)$, $(4,2,1,2,1)$, $(4,2,2,1,1)$, $(4,3,1,1,1)$, $(5,1,1,1,2)$, $(5,1,1,2,1)$, $(5,1,2,1,1)$, $(5,2,1,1,1)$, $(6,1,1,1,1)$.

Comprobamos con las fórmulas cerradas dadas en el Teorema 51 que los resultados coinciden para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones de 10 con 5 partes.

(i) $2\sum_{m=2}^{3}\left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1,\lfloor\frac{9-2m}{2}\rfloor\}}1\right)=2(1+1)=4$ y

(ii) $2(2)\sum_{m=2}^{3}\left(\sum_{b=1}^{\min\{m-1,8-2m\}}\left(\sum_{c=1}^{\min\{b-1,9-2m-b\}}1\right)\right)=4(0+1)=4.$

3.4. Picos en composiciones restringidas.

A partir de los resultados mostrados por Janjíc en [9] (ver Teoremas 42 y 43), se pueden obtener como casos particulares fórmulas cerradas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones de n con k partes restringidas a un conjunto dado. Las pruebas de estos resultados son en esencia las mismas pruebas realizadas en los Teoremas 42 y 43, teniendo en cuenta una nueva restricción para los valores de m, b y c en cada caso. Esta restricción dada por los valores que pueden tomar dado el conjunto al cual se estan restringiendo las composiciones, luego la suma se realiza en cada caso para los resultados mostrados por Janjíc en [9], sobre un conjunto que corresponde a la intersección entre el conjunto de posibles valores dados en los Teoremas 42 y 43, y el conjunto al cual se restringen las composiciones. En el siguiente Lema se da el resultado más general a partir del Lema 36, y algunos resultados y ejemplos particulares.

Lema 53. *Dado un conjunto de enteros positivos* $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$, *con* $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_r$. *La cantidad de picos simétricos* $PS_{n,k}(A)$ *y picos asimétricos* $PA_{n,k}(A)$ *en composiciones de* n *con* k *partes restringidas al conjunto* A, *se tienen las siguientes fórmulas, donde* $M=\{2,3,\cdots,n-k+1\}$.

$$PS_{n,k}(A) = (k-2)\sum_{m\in M\cap A}\left(\sum_{b\in B_s\cap A} G(n-m-2b, k-3; A)\right), \tag{3.24}$$

con $B_s = \{1, 2, \cdots, \text{mín}\{m-1, \lfloor\frac{n-m-k+3}{2}\rfloor\}\}$; *y*

$$PA_{n,k}(A) = 2(k-2)\sum_{m\in M\cap A}\left(\sum_{b\in B_a\cap A}\left(\sum_{c\in C_a\cap A} G(n-m-b-c, k-3; A)\right)\right), \tag{3.25}$$

con $B_a = \{1, 2, \cdots, \text{mín}\{m-1, n-m-k+2\}\}$ *y* $C_a = \{1, 2, \cdots, \text{mín}\{b-1, n-m-b-k+3\}\}$.

Ejemplo 54. Comprobemos las Ecuaciones (3.24) y (3.25) para el caso particular de las composiciones de 18 con 6 partes restringidas al conjunto $A = \{2, 4, 6\}$. Primero, veamos el listado de estas composiciones restringidas donde se resaltan los picos simétricos en rojo y los picos asimétricos en azul.

$(2,2,2,2,4,6)$, $(2,2,2,2,6,4)$, $(2,2,2,4,2,6)$, $(2,2,2,4,4,4)$, $(2,2,2,4,6,2)$, $(2,2,2,6,2,4)$, $(2,2,2,6,4,2)$,
$(2,2,4,2,2,6)$, $(2,2,4,2,4,4)$, $(2,2,4,2,6,2)$, $(2,2,4,4,2,4)$, $(2,2,4,4,4,2)$, $(2,2,4,6,2,2)$, $(2,2,6,2,2,4)$,
$(2,2,6,2,4,2)$, $(2,2,6,4,2,2)$, $(2,4,2,2,2,6)$, $(2,4,2,2,4,4)$, $(2,4,2,2,6,2)$, $(2,4,2,4,2,4)$, $(2,4,2,4,4,2)$,
$(2,4,2,6,2,2)$, $(2,4,4,2,2,4)$, $(2,4,4,2,4,2)$, $(2,4,4,4,2,2)$, $(2,4,6,2,2,2)$, $(2,6,2,2,2,4)$, $(2,6,2,2,4,2)$,
$(2,6,2,4,2,2)$, $(2,6,4,2,2,2)$, $(4,2,2,2,2,6)$, $(4,2,2,2,4,4)$, $(4,2,2,2,6,2)$, $(4,2,2,4,2,4)$, $(4,2,2,4,4,2)$,
$(4,2,2,6,2,2)$, $(4,2,4,2,2,4)$, $(4,2,4,2,4,2)$, $(4,2,4,4,2,2)$, $(4,2,6,2,2,2)$, $(4,4,2,2,2,4)$, $(4,4,2,2,4,2)$,
$(4,4,2,4,2,2)$, $(4,4,4,2,2,2)$, $(4,6,2,2,2,2)$, $(6,2,2,2,2,4)$, $(6,2,2,2,4,2)$, $(6,2,2,4,2,2)$, $(6,2,4,2,2,2)$,
$(6,4,2,2,2,2)$.

Podemos observar que se tienen 36 picos simétricos y 8 picos asimétricos. Iniciemos comprobando que la Ecuación (3.24) efectivamente nos da la cantidad de picos simétricos. Para este caso $M = \{2, 3, \cdots, 13\}$, así que:

$$\begin{aligned} PS_{18,6}(A) &= 4\sum_{m\in\{2,4,6\}}\left(\sum_{b\in B_s\cap A} G(18-m-2b, 3; A)\right) \\ &= 4\left(G(10,3;A) + \sum_{b\in\{2,4\}} G(12-2b, 3; A)\right) \\ &= 4(G(10,3;A) + G(8,3;A) + G(4,3;A)). \end{aligned}$$

Luego, usando la Ecuación (3.5) calculamos el valor de cada uno de los sumandos por aparte:

- $G(4, 3, A) = 0$ ya que no existen secuencias de enteros no negativos (j_1, j_2) y no crecientes, tal que $4 = 6 + 2j_1 + 2j_2$.

- Para $G(8,3,A)$ se tiene que la única secuencia de enteros no negativos (j_1, j_2) no creciente, tal que $8 = 6 + 2j_1 + 2j_2$, es $(1,0)$, luego

$$G(8,3,A) = \binom{3}{1}\binom{1}{0} = 3.$$

- Para $G(10,3,A)$ se tiene que las secuencias de enteros no negativos (j_1, j_2) no crecientes, tales que $10 = 6 + 2j_1 + 2j_2$ son $(2,0)$ y $(1,1)$, luego

$$G(10,3,A) = \binom{3}{2}\binom{2}{0} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} = 3 + 3 = 6.$$

Así que $PS_{18,6}(A) = 36$, que coincide efectivamente con el número de picos simétricos observados en las composiciones de 18 con 6 partes restringidas a A.

Por último, comprobemos que la Ecuación (3.25) efectivamente nos da la cantidad de picos asimétricos. Para este caso $M = \{2, 3, \cdots, 13\}$, así

$$\begin{aligned} PA_{18,6}(A) &= 8 \sum_{m\in\{2,4,6\}} \left(\sum_{b\in B_a\cap A} \left(\sum_{c\in C_a\cap A} G(18-m-b-c,3;A) \right) \right) \\ &= 8 \left(\sum_{b\in\{2,4\}} \left(\sum_{c\in C_a\cap A} G(12-b-c,3;A) \right) \right) = 8(G(6,3;A)). \end{aligned}$$

Y dado que la única sucesión de enteros no negativos (j_1, j_2) no creciente tal que $6 = 6 + 2j_1 + 2j_2$ es $(0,0)$, $G(6,3;A) = 1$, y por lo tanto $PA_{18,6}(A) = 8$, que coincide con la cantidad de picos asimétricos observados en las composiciones de 18 con 6 partes restringidas al conjunto A.

Ejemplo 55. Comprobemos ahora las Ecuaciones (3.24) y (3.25) para el caso particular de las composiciones de 9 con 5 partes restringidas al conjunto $A = \{1,2,3\}$. Procedemos de manera similar al ejemplo anterior, pero aplicando el Corolario 38 para mayor facilidad. Veamos en las composiciones los picos simétricos y asimétricos resaltados de rojo y azul, respectivamente.

$(1,1,1,3,3)$, $(1,1,2,2,3)$, $(1,1,2,3,2)$, $(1,1,3,1,3)$, $(1,1,3,2,2)$, $(1,1,3,3,1)$, $(1,2,1,2,3)$, $(1,2,1,3,2)$, $(1,2,2,1,3)$, $(1,2,2,1,3)$, $(1,2,2,2,2)$, $(1,2,2,3,1)$, $(1,2,3,1,2)$, $(1,2,3,2,1)$, $(1,3,1,1,3)$, $(1,3,1,2,2)$, $(1,3,1,3,1)$, $(1,3,2,1,2)$, $(1,3,2,2,1)$, $(1,3,3,1,1)$, $(2,1,1,2,3)$, $(2,1,1,3,2)$, $(2,1,2,1,3)$, $(2,1,2,2,2)$, $(2,1,2,3,1)$, $(2,1,3,1,2)$, $(2,1,3,2,1)$, $(2,2,1,1,3)$, $(2,2,1,2,2)$, $(2,2,1,3,1)$, $(2,2,2,1,2)$, $(2,2,2,2,1)$, $(2,2,3,1,1)$, $(2,3,1,1,2)$, $(2,3,1,2,1)$, $(2,3,2,1,1)$, $(3,1,1,1,3)$, $(3,1,1,2,2)$, $(3,1,1,3,1)$, $(3,1,2,1,2)$, $(3,1,2,2,1)$, $(3,1,3,1,1)$, $(3,2,1,1,2)$, $(3,2,1,2,1)$, $(3,2,2,1,1)$, $(3,3,1,1,1)$.

Podemos observar que se tienen 18 picos simétricos y 12 asimétricos. Iniciemos comprobando que la Ecuación (3.24) efectivamente nos da la cantidad de picos simétricos. Para este caso $M = \{2, 3, 4, 5\}$, así que:

$$\begin{aligned} PS_{9,5}(A) &= 3 \sum_{m \in \{2,3\}} \left(\sum_{b \in B_s \cap A} G(9 - m - 2b, 2; A) \right) \\ &= 3 \left(G(5, 2; A) + \sum_{b \in \{1,2\}} G(6 - 2b, 2; A) \right) \\ &= 3 \left(G(5, 2; A) + G(4, 2; A) + G(2, 2; A) \right). \end{aligned}$$

Ahora, dado que el conjunto A es de la forma $\{1, 2, \cdots, r\}$, podemos usar la Ecuación (3.6) para calcular los diferentes sumandos, este resultado realiza la suma sobre particiones de un número, que son objetos combinatorios bastante conocidos. De aquí resulta más sencillo realizar los cálculos.

- $G(2, 2, A) = 1$, por definición.
- Para $G(4, 2, A)$ las particiones de 2 con a lo más 2 partes, donde cada parte es a lo más 2 son (2) y (1, 1). Entonces

$$G(4, 2, A) = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}\binom{1}{1} = 3.$$

- Para $G(5, 2, A)$ la única partición de 3 con a lo más 2 partes, donde cada parte es a lo más 2 es (2, 1). Entonces

$$G(5, 2, A) = \binom{2}{2}\binom{2}{1} = 2.$$

Así que $PS_{9,5}(A) = 18$, que coincide efectivamente con el número de picos simétricos observados en las composiciones de 9 con 5 partes restringidas a A.

Por último, comprobemos que la Ecuación (3.25) efectivamente nos da la cantidad de picos asimétricos. Para este caso $M = \{2, 3, 4, 5\}$, así que

$$PA_{9,5}(A) = 6 \sum_{m \in \{2,3\}} \left(\sum_{b \in B_a \cap A} \left(\sum_{c \in C_a \cap A} G(9 - m - b - c, 2; A) \right) \right) = 6(G(3, 2; A)).$$

Y dado que la única partición de 1 es (1), $G(3, 2; A) = 2$, por lo tanto $PA_{9,5}(A) = 12$, que coincide con la cantidad de picos asimétricos observados en las composiciones de 9 con 5 partes restringidas al conjunto A.

Al igual que en el Ejemplo 55, para calcular la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones de n con k partes restringidas a un conjunto particular A, se pueden utilizar resultados particulares como los Corolarios 30, 31, 32 y otros resultados como los que Janjíc demuestra en [9], para calcular con mayor facilidad el valor $G(n,k;A)$ en cada caso particular.

3.4.1. Función generatriz respecto al número de picos en composiciones restringidas.

Plantear la función generatriz respecto al número de picos simétricos o asimétricos con partes restringidas a un conjunto A depende del conjunto seleccionado. En particular, para un conjunto de elementos consecutivos $A = \{1,2,3,4,\ldots,r\}$, con $r \geq 2$, usando los mismos procedimientos usados para obtener las funciones generatrices (3.13) y (3.19) es inmediato obtener la siguiente expresión

$$F_{\{1,2,\ldots,r\}}(x,y,q) = \frac{1}{1-\sum_{a=1}^{r}\left(\frac{x^a y}{1-\frac{(q-1)y^2(x^{2a+1}-x^{a+r+1})}{1-x}}\right)}. \tag{3.26}$$

En particular, para $r = 2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} F_{\{1,2\}}(x,y,q) &= \frac{1}{1-\sum_{a=1}^{2}\left(\frac{x^a y}{1-\frac{(q-1)y^2(x^{2a+1}-x^{a+r+1})}{1-x}}\right)} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{xy}{1-\frac{(q-1)y^2(x^3-x^4)}{1-x}}+\frac{x^2y}{1-\frac{(q-1)y^2(x^5-x^5)}{1-x}}\right)} \\ &= \frac{1+x^3y^2-x^3y^2q}{1-xy-x^2y+x^3y^2-x^3y^2q-x^5y^3+x^5y^3q}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir de la función generatriz (3.27) es posible encontrar la función generatriz para las sucesiones $ps_{\{1,2\}}(n)$ y $ps_{\{1,2\}}(n,k)$, correspondientes a la cantidad de picos simétricos en composiciones de n con partes restringidas al conjunto {1,2} y con k partes, respectivamente. De manera análoga a lo realizado para obtener las generatrices (3.14) y (3.15).

$$\frac{\partial}{\partial q}F_{\{1,2\}}(x,1,q)|_{q=1} = \sum_{n\geq 0} ps_{\{1,2\}}(n)x^n = \frac{x^4}{(1-x-x^2)^2}. \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}F_{\{1,2\}}(x,y,q)|_{q=1} = \sum_{n,k\geq 0} ps(n,k)_{\{1,2\}}x^n y^k = \frac{x^4y^3}{(1-(x+x^2)y)^2}. \tag{3.29}$$

Con la ayuda del software *Mathematica* podemos obtener los primeros coeficientes para estas funciones generatrices que corresponden a los primeros valores de las sucesiones $ps_{\{1,2\}}(n)$ y

$ps_{\{1,2\}}(n,k)$. Para $n \geq 4$ se tiene que

$$ps_{\{1,2\}}(n) = \{1, 2, 5, 10, 20, 38, 71, 130, 235, 420, 744, 1308, 2285,\ 3970, 6865, 11822, 20284, \cdots\}$$

Mientras que para $4 \leq n \leq 10$ y $3 \leq k \leq 9$ se tiene que:

$$ps_{\{1,2\}}(n,k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 30 & 30 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.4.2. Picos en composiciones palíndromas.

Una composición palíndroma es un caso particular de composición restringida, tal que la composición se puede leer de igual forma de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Por ejemplo, (2 3 1 3 4 3 1 3 2) es una composición palíndroma de 22 con 9 partes.

Para calcular la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones palíndromas de n con k partes se consideran dos casos, el caso k par cuyo resultado es casi inmediato y el caso k impar. En los siguientes resultados denotamos por $ps(n,k)$ y $pa(n,k)$ a la cantidad de picos simétricos y asimétricos, respectivamente, de composiciones de n con k partes. Las fórmulas cerradas se dan en las ecuaciones (3.7) y (3.8) de los Teoremas 42 y 43, respectivamente.

Teorema 56. *La cantidad de picos simétricos $psp(n,k)$ y asimétricos $pap(n,k)$ en composiciones palíndromas de n con k partes, cuando k es par, está dada, respectivamente, por las fórmulas cerradas:*

$$psp(n,k) = 2ps\left(\frac{n}{2}, \frac{k}{2}\right) \qquad y \qquad pap(n,k) = 2pa\left(\frac{n}{2}, \frac{k}{2}\right). \tag{3.30}$$

Para el caso k impar se puede obtener por métodos combinatorios resultados para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones palíndromas de n con k partes.

Teorema 57. *La cantidad de picos simétricos en composiciones palíndromas de n con k partes, cuando $k \geq 5$ es impar, está dada por la fórmula cerrada:*

$$psp(n,k) = \sum_{b=2}^{n-k+1} \phi(n-b) \sum_{a=1}^{\min\{b-1,\lfloor\frac{n-b-k+3}{2}\rfloor\}} \binom{\frac{n-2a-b}{2}-1}{\frac{k-3}{2}-1}$$
$$+ 2 \sum_{a=2}^{\lfloor\frac{n-k+2}{2}\rfloor} \sum_{b=1}^{\min\{a-1,\lfloor\frac{(n-2a-k+5)}{3}\rfloor\}} \phi(n-b)\binom{\frac{n-2a-3b}{2}-1}{\frac{k-5}{2}-1}$$
$$+ 2 \sum_{b=1}^{n-k+1} \phi(n-b) ps\left(\frac{n-b}{2}, \frac{k-1}{2}\right), \quad (3.31)$$

$$\text{donde } \phi(n) = \begin{cases} 1, & \textit{si n es par} \\ 0, & \textit{si n es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Dada una composición palíndroma de n con un número de partes impar k, podemos considerar en principio que es de la forma $(C\ b\ \widetilde{C})$, donde b está ubicado en el medio de todas las partes de la composición, en la posición $\frac{k-1}{2}+1$ y C es una composición con $\frac{k-1}{2}$ partes, mientras que $\widetilde{C}$ una composición de la misma cantidad de partes "transpuesta" respecto a C, esto por la condición de la composición de ser palíndroma. Al considerar la composición de la forma planteada se tiene que la parte central de un pico simétrico en una composición de esta forma se puede ubicar en las partes interiores (no extremos) de la composición C ($\widetilde{C}$, respectivamente) en la posición $\frac{k-1}{2}$, parte del extremo derecho de C, antes de la parte b (posición $\frac{k+1}{2}$, respectivamente para $\widetilde{C}$) o en la parte b ubicada en la mitad de la composición. En este sentido se estudia la cantidad de posibles picos simétricos distintos en cada una de estas opciones y se suman los resultados.

Caso 1) Si el pico simétrico se encuentra en una de las partes interiores de la composición C ($\widetilde{C}$ respectivamente), entonces basta con calcular la cantidad de picos en estas composiciones para todos los posibles valores de b y multiplicar este resultado por 2 ya que se tendrá respectivamente, la misma cantidad de picos simétricos en la composición $\widetilde{C}$. Estas resultan ser composiciones de $\frac{n-b}{2}$ con $\frac{k-1}{2}$ partes. Para este caso y para los demás se define la función

$$\phi(n) = \begin{cases} 1, & \text{si n es par} \\ 0, & \text{si n es impar} \end{cases},$$

para evitar problemas con resultados no enteros.

Caso 2) Si el pico simétrico se encuentra en la posición $\frac{k-1}{2}$ parte extrema derecha de la composición C ($\frac{k+1}{2}$ parte extrema izquierda de la composición $\widetilde{C}$, respectivamente). Enton-

ces, podemos considerar la composición de la forma $(C'\ b\ a\ b\ a\ b\ \widetilde{C}')$, donde basta sumar los diferentes posibles valores que puede tomar a, los diferentes valores que puede tomar $b < a$ restringidos sus valores a los parámetros de la composición. En cada caso se suma la cantidad de posibles composiciones C' ($\widetilde{C}'$, respectivamente), que resulta ser una composición de $\frac{n-3b-2a}{2}$ con $\frac{k-5}{2}$ partes, multiplicado el resultado por 2 dada la composición $\widetilde{C}'$ asociada.

Caso 3) Si el pico simétrico se encuentra en la posición $\frac{k-1}{2}+1$ correspondiente a la parte b, entonces podemos considerar la composición de la forma $(C''\ a\ b\ a\ \widetilde{C}'')$, donde basta sumar los diferentes posibles valores que pueden tomar b y $a < b$, restringidos sus valores a los parámetros de la composición. En cada caso se suma la cantidad de posibles composiciones C'' ($\widetilde{C}''$, respectivamente), que resulta ser una composición de $\frac{n-b-2a}{2}$ con $\frac{k-3}{2}$ partes. Note que para $k=3$ este es el único caso donde k puede tomar ese valor, entonces este caso no se tiene en cuenta para un resultado general, a pesar de que existen picos simétricos en composiciones con 3 partes.

Finalmente, realizando la suma de los 3 casos se obtiene la igualdad (3.31). □

Con base a la demostración anterior, para calcular la cantidad de picos asimétricos, se puede realizar un análisis análogo. El **Caso 1)** será el mismo realizando para la suma sobre el número de picos asimétricos *pa*. Para el **Caso 2)** se pueden considerar composiciones de la forma $(C'\ c\ a\ b\ a\ c\ \widetilde{C})$, entonces se deben considerar los casos $c < b < a$ y $b < c < a$. Finalmente, dado que se consideran composiciones palíndromas, en el **Caso 3)** no se tendrán picos asimétricos. Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 58. *La cantidad de picos asimétricos en composiciones palíndromas de n con k partes, para $k \geq 5$ impar y $n \geq 10$, está dada por la fórmula cerrada:*

$$\begin{aligned} pap(n,k) := 2 \sum_{a=3}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \sum_{c=2}^{\min\{a-1, \lfloor \frac{n+4-2a-k}{2} \rfloor\}} \sum_{b=1}^{\min\{c-1, \lfloor n+5-2a-2c-k \rfloor\}} \Phi(n-b) \binom{\frac{n-2a-b-2c}{2}-1}{\frac{k-5}{2}-1} \\ + 2 \sum_{a=3}^{\lfloor \frac{n+2-k}{2} \rfloor} \sum_{b=2}^{\min\{a-1, \lfloor n+4-2a-k \rfloor\}} \sum_{c=1}^{\min\{b-1, \lfloor \frac{n+5-2a-b-k}{2} \rfloor\}} \Phi(n-b) \binom{\frac{n-2a-b-2c}{2}-1}{\frac{k-5}{2}-1} \\ + 2 \sum_{b=1}^{n-k+1} \Phi(n-b) pa\left(\frac{n-b}{2}, \frac{k-1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$\phi(n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } n \textit{ es par} \\ 1, & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}.$$

Para las sucesiones $psp(n,k)$ y $pap(n,k)$ combinando los resultados obtenidos se tienen los

primeros términos de cada sucesión, en principio para $psp(n,k)$ con $4 \leq n \leq 22$ y $3 \leq k \leq 20$, se obtienen los valores

$$psp(n,k) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 2 & 2 & 4 & 8 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 12 & 0 & 18 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 4 & 8 & 12 & 12 & 18 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 18 & 0 & 36 & 0 & 32 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 2 & 4 & 14 & 20 & 26 & 36 & 24 & 32 & 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 4 & 0 & 24 & 0 & 64 & 0 & 80 & 0 & 50 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 2 & 4 & 20 & 28 & 50 & 66 & 62 & 80 & 40 & 50 & 10 & 12 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 4 & 0 & 32 & 0 & 102 & 0 & 166 & 0 & 150 & 0 & 72 & 0 & 14 & 0 \\
6 & 0 & 2 & 6 & 26 & 36 & 84 & 108 & 134 & 168 & 122 & 150 & 60 & 72 & 12 & 14
\end{pmatrix}$$

Mientras que, para la sucesión $pap(n,k)$ con $10 \leq n \leq 26$ y $5 \leq k \leq 20$, se obtienen los valores

$$pap(n,k) = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 8 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 14 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 8 & 14 & 16 & 14 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 30 & 0 & 32 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 12 & 28 & 32 & 36 & 36 & 20 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 0 & 50 & 0 & 78 & 0 & 58 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 16 & 48 & 56 & 80 & 84 & 68 & 64 & 26 & 20 & 2 & 0 & 0 \\
16 & 0 & 78 & 0 & 156 & 0 & 164 & 0 & 92 & 0 & 22 & 0 & 0 \\
14 & 20 & 76 & 88 & 156 & 168 & 176 & 176 & 110 & 100 & 32 & 24 & 2 \\
20 & 0 & 114 & 0 & 278 & 0 & 376 & 0 & 300 & 0 & 134 & 0 & 26
\end{pmatrix}$$

Finalmente, si definimos las sucesiones $psp(n)$ y $pap(n)$ como los picos simétricos y asimétricos en composiciones de n, respectivamente, se tienen los primeros valores para las sucesiones respectivas:

$psp(n) = \{1, 1, 1, 4, 4, 8, 11, 19, 29, 44, 74, 102, 181, 239, 429, 546, 1000,\ 1232 \cdots\}$ con $n \geq 4$,

$pap(n) = \{2, 2, 8, 10, 24, 32, 72, 84, 190, 216, 476, 528, 1142, 1248, 2672,\ 2886, 6118, \cdots\}$ con $n \geq 10$.

3.5. Análisis asintótico.

Al estudiar parámetros en objetos combinatorios se tiene como objetivo encontrar fórmulas exactas que permitan calcular de forma directa un término deseado de una sucesión de conteo, sin embargo, esto no siempre es un procedimiento sencillo o posible con las herramientas matemáticas actuales. Una herramienta útil y que ha tomado relevancia, consiste en estudiar una aproximación asintótica por medio de herramientas provenientes del análisis complejo. En [5] y [16], Flajolet y Sedgewick exponen ampliamente la teoría y técnicas de manipulación para expansiones asintóticas, y diferentes casos y formas en las que se puede obtener una aproximación o equivalencia asintótica según el caso.

Particularmente, para el estudio y conteo de picos simétricos y asimétricos en composiciones, en el presente trabajo se obtuvieron fórmulas cerradas para los términos de las sucesiones de conteo, sin embargo, realizar un análisis asintótico sobre las funciones generatrices asociadas permite obtener información adicional de estas sucesiones de conteo, particularmente interesa la distribución de la cantidad de picos simétricos y asimétricos en general en composiciones, esto con el fin de dar una idea sobre qué tan simétricas o no resultan ser las composiciones de acuerdo a la ocurrencia del patrón picos. Las funciones generatrices (3.15) y (3.23) obtenidas para las sucesiones de conteo de los picos simétricos $ps(n)$ y asimétricos $pa(n)$ de composiciones de n resultan ser racionales, por la forma de su función generatriz se puede concluir que para las sucesiones de conteo asociadas se tienen fórmulas recursivas y son adecuadas para obtener equivalencias asintóticas. Para comparar respecto al total de picos en composiciones de n, la función generatriz correspondiente es posible calcularla sumado las generatrices (3.15) y (3.23), de donde se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 59. *La función generatriz para la sucesión de conteo $p(n)$ de los picos en composiciones de n es*

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{x^4\left(1+x^2\right)}{(1-x)(1+x)(1-2x)^2\left(1+x+x^2\right)}. \tag{3.33}$$

El siguiente resultado tomado de [16] es de importancia para obtener equivalencias asintóticas de las funciones generatrices obtenidas.

Teorema 60. *Asuma que una función generatriz racional $f(z)/g(z)$, con $f(z)$ y $g(z)$ primos relativos, y $g(0) \neq 0$, tiene un único polo $1/\beta$ de menor módulo respecto a los otros polos. Entonces, si la multiplicidad of $1/\beta$ es ν, se tiene que*

$$[z^n]\,\frac{f(z)}{g(z)} \sim C\beta^n n^{\nu-1} \quad , \text{ donde } \quad C = \nu\frac{(-\beta)^\nu f(1/\beta)}{g^{(\nu)}(1/\beta)}.$$

Es fácil verificar que las funciones generatrices (3.15), (3.23) y (3.33) son funciones generatrices racionales que cumplen las condiciones del teorema para un polo igual a $\frac{1}{2}$ de multiplicidad 2, luego se tienen las equivalencias asintóticas

$$ps(n) \sim \frac{1}{28}2^n n, \qquad pa(n) \sim \frac{1}{42}2^n n, \qquad p(n) \sim \frac{5}{84}2^n n.$$

De donde podemos obtener una aproximación del porcentaje que representan en composiciones los picos simétricos y los picos asimétricos respecto a la cantidad de picos en general.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{psc(n)}{pc(n)} = \frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{pac(n)}{pc(n)} = \frac{2}{5}.$$

Conclusiones

En el estudio de la ocurrencia de picos simétricos y asimétricos en palabras, particiones de conjuntos y composiciones, los diferentes métodos usados usualmente para abordar problemas enumerativos como conteo directo, el método simbólico, funciones generatrices, análisis asintótico y algunas otras herramientas, permitieron obtener los diferentes resultados que se esperaban como producto de este trabajo.

Para el caso de palabras, además de revisar los resultados obtenidos previamente por Asakly en [1], se realizó una prueba alternativa, mediante conteo directo para una fórmula de la cantidad de picos simétricos y asimétricos. Para particiones de conjuntos se obtuvo una fórmula cerrada para la cantidad de picos simétricos y asimétricos a partir de su función generatriz. Para composiciones y diferentes variaciones o restricciones de las mismas también se lograron obtener fórmulas cerradas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos, esto por medio de conteo directo. Además, se obtuvo su función generatriz y a partir de esta se obtuvo su aproximación asintótica.

Los resultados obtenidos para particiones de conjuntos y composiciones son nuevos, al igual que sus respectivas sucesiones de conteo. Esto se verificó haciendo la busqueda en bases de datos de sucesiones de enteros (https://oeis.org). Por lo tanto, estos resultados aportan al estudio de picos simétricos y asimétricos en objetos combinatorios discretos, tema de reciente estudio e interés.

Adicionalmente, del análisis asintótico realizado a las funciones generatrices obtenidas para la cantidad de picos simétricos y asimétricos en composiciones, con el fin de determinar una aproximación del porcentaje que representan respecto a la cantidad total de picos, se obtiene una noción de que tan simétrico o no resulta ser el objeto combinatorio respecto a la ocurrencia de picos, una noción de simetría que podría estudiarse en diferentes objetos.

Lo estudiado y realizado en el presente trabajo permite proyectar la continuación, profundización y un trabajo posterior que complemente o genere nuevas hipótesis y resultados en

otros objetos combinatorios o encuentre conexiones o biyecciones con diferentes objetos geométricos o combinatorios de interés respecto a los resultados obtenidos para picos simétricos y asimétricos.

Bibliografía

[1] W. Asakly. Enumerating symmetric and non-symmetric peaks in words. Online Journal of Analytic Combinatorics. 13, (2018).

[2] W. Asakly. Statistics in words and partitions of a set. Annales Mathematicae et Informaticae. 46 (2016), 3-12.

[3] A. Bacher, A. Bernini, L. Ferrari, B. Gunby, R. Pinzani y J. West. The Dyck pattern poset. Discrete Mathematics, 321, 12-23. (2014).

[4] E. Czabarka, R. Flórez, L. Junes y J. Ramirez. Enumerations of peaks and valleys on non-decreasing Dyck paths. Discrete Mathematics, 341(10), 2789-2807. (2018).

[5] P. Flajolet y R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Princeton, 2005.

[6] R. Florez y J Ramírez. Enumerating symmetric and asymmetric peaks in Dyck paths. Discrete Mathematics 343.(12), 112118. (2020).

[7] S. Heubach y T. Mansour. *Combinatorics of Compositions and Words. Taylor & Francis Group*. CRC Press, 2010.

[8] S. Heubach y T. Mansour. Enumeration of 3-letter patterns in compositions. Combinatorial Number Theory, 243-264.(2007).

[9] M. Janjíc. Binomial coefficients and enumeration of restricted words. Journal Integer Sequences, 19 (2016), Art.16.7.3.

[10] S. Kitaev. *Patterns in Permutations and Words. Springer*, 2011.

[11] P.A. MacMahon. Memoir on the theory of the compositions of numbers. *Philosophical Transactions. Royal Society* **184** (1893), 835–901.

[12] T. Mansour. *Combinatorics of Set Partitions. Taylor & Francis Group, CRC Press*, 2013.

[13] T. Mansour, A. Moreno y J. Ramírez. Symmetric and asymmetric peaks in compositions. Preprint (2022).

[14] T. Mansour y M. Shattuck. Counting peaks and valleys in a partition of a set. Journal Integer Sequences, 10:2 (2010), Art.10.6.8.

[15] J. L. Ramírez. Introducción a la teoría de composiciones. Notas de Clase. Marzo, (2019).

[16] R. Sedgewick y P. Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms.* Pearson, 2013.