ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE MATRIZ A ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO, A TRAVÉS DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL DERIVE.

JENNY PATRICIA JIMÉNEZ ALBA

Director

HUMBERTO SARRIA ZAPATA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

BOGOTÁ D.C.

2013

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios primordialmente. por haberme acompañado y guiado a lo largo de este proceso, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes.

Un agradecimiento especial al profesor Humberto Sarria Zapata, quien con su profesionalismo y gran calidad humana me apoyó incondicionalmente; por su tiempo y motivación para la construcción y culminación de este trabajo de grado. De igual forma agradezco al profesor Iván Castro Chadid, quien hizo aportes con el fin de complementar la unidad didáctica, dando mayor sentido a la práctica del trabajo con Derive.

Resumen

Este trabajo propone una unidad didáctica, que desarrolla el concepto de matriz, el álgebra de matrices y su aplicación a las transformaciones en el plano. Está dirigido a estudiantes de grado noveno de educación basica secundaria. Para su diseño se han considerado las distintas fases del aprendizaje según Van Hiele. Está compuesta por ocho actividades secuenciales, que introducen de manera progresiva el concepto de matriz como eje central para el estudio de los movimientos rígidos en el plano, a través del programa computacional Derive y GeoGebra. En la parte disciplinar se estudian las transformaciones lineales que preservan simetría y antisimetría.

Palabras clave: Matriz, transformaciones lineales del plano, operador de transposición, matrices simétricas y antisimétricas, propuesta didáctica, pensamiento espacial, programa computacional "Derive", modelos de Van Hiele y movimientos rígidos del plano.

TEACHING THE CONCEPT OF MATRIX A NINTH GRADE STUDENTS THROUGH THE SOFTWARE DERIVE.

Abstract

This piece of work proposes a didactic unit that develops the concept of Matrix, the Matrix Algebra, and their application to transformations of the Plane. It is aimed at students of the Ninth Grade of Basic Secondary Education. Its design is based on the different phases of learning according to Van Hiele.

It is composed by eight sequential activities, which intruduce in a progressive manner the concept of Matrix as the main axis in order to study rigid movements on the plane, by using the computer programs Derive, and GeoGebra. On the disciplinar part the Linear Transformations that preserve Symmetry, and Antisymmetry are studied.

Keywords: Matrix, linear transformations of the plane, operator of transposition, symmetric and antisymmetric matrices, didactic proposition, spatial thinking, computer program "Derive", Van Hiele models and rigid movements on the plane.

Índice general

INTRODUCCIÓN

Las matrices son imprescindibles para comprender las amplias aplicaciones de tipo teórico y práctico y fundamentales en la tecnología digital . La Teoría de matrices es un tema cuyo contenido puede ser impartido en varios niveles de complejidad, los cuales dependen de las necesidades particulares de los estudiantes que cursan la asignatura en cuestión. Esta área, se ha tomado como un medio de cálculo; es importante reconocer no sólo el buen dominio que hay que tener para calcular matrices sino adaptar razonamientos o extender conclusiones a problemas particulares que estén en estudio. En este trabajo encontramos las matrices como medio para transformar puntos sobre el plano (la traslación y las simetrías). Teniendo presente los principios básicos que ayudan a organizar el currículo de matemáticas, en ellos se resalta la importancia de procesos que contribuyan al aprendizaje de los alumnos, tales como el razonamiento, el planteamiento y la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración y comparación de procedimientos, además de resaltar la importancia de los contextos como ambientes que dan sentido al aprendizaje. Se reconoce el papel fundamental de las nuevas tecnologías para dinamizar y propiciar esos cambios en el currículo de matemáticas. (Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares(1998)) [3]. La resolución de problemas podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, pues las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones estén ligadas a la cotidianidad. (Ministerio de Educación Nacional. Estándares curriculares (1998)). En este sentido y en lo que concierne específicamente al concepto de matriz, es evidente partir de un problema de aplicación, por lo tanto para *modelar las situaciones, se toma como medio las matrices, entendiéndose como un sistema figurativo gráfico, el cual reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible.* Ello con miras a que el estudiante logre tener una adquisición del concepto. El presente trabajo pretende de alguna manera aportar una propuesta que junto a la implementación de las Tics (tecnologías de la información y la comunicación), logre evidenciar mejor las aplicaciones de las matrices, de tal manera que el estudiante logre familiarizarse con una gran cantidad de aplicaciones. Ahora bien, el programa computacional que se utilizará como medio es Derive, apoyados en un segundo plano del programa Geogebra, con el fin de visualizar los movimientos en el plano; esta herramienta computacional busca introducir al estudiante de grado noveno en el aprendizaje significativo en lo que concierne a la generación de procedimientos que permiten construir diferentes tipos de matrices y se muestre didácticamente los cambios que se producen en ellas al efectuar operaciones algebraicas para que así puedan entenderse de una manera novedosa, que muchos de los procedimientos que se aprenden mecánicamente no son sino consecuencias de efectuar operaciones algebraicas con una matriz, lo cual permite establecer un enlace que facilita entender los movimientos internos que se pueden producir en las matrices.

La presente propuesta, pretende generar razonamiento geométrico a partir del concepto de transformaciones geométricas, potenciando el pensamiento espacial, además, por ser el concepto de matriz el eje central para el desarrollo de la propuesta, es evidente referirnos al pensamiento variacional. Ello de acuerdo con los lineamientos curriculares fijados por el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas [3]. De igual forma, se profundiza en la historia de los conceptos matemáticos en cuestión, así como en la necesidad de retomar los conceptos básicos desde diferentes perspectivas teóricas. Lo cual permite hacer la transposición didáctica de los objetos matemáticas de una manera sencilla.

Esta propuesta la componen tres capítulos: En el primero, se encuentra el marco histórico. Se da a conocer el origen de las matrices desde los babilonios, los aportes de los chinos, así como la regla para resolver sistemas de ecuaciones, llamada Regla de Cramer. Además, la aparición de los conceptos de Determinante y Matriz. [7, 8, 6].

El segundo capítulo, trata sobre el álgebra de las transformaciones lineales y las matrices,y, así los operadores lineales que preservan simetría y antisimetría. [5, 15].

El tercer capítulo, inicia con el sustento teórico, didáctico y metodológico bajo el cual se construyó la propuesta didáctica [17],[3][4][16] y finaliza con una cartilla titulada: "*Enseñanza de las Matrices a través de Derive*", la cartilla se encuentra como un anexo del trabajo.

Las actividades propuestas en la cartilla se construyeron en forma secuencial, teniendo en cuenta cómo evoluciona en los estudiantes el razonamiento geométrico y variacional, las distintas fases del aprendizaje según el modelo de Van Hiele. Además, buscando acceder a distintas representaciones de las transformaciones en el plano a través de las matrices, se hizo uso de las Tics, enfatizando el programa computacional *Derive* [2] y con apoyo visual del software matemático *Geogebra* [11].

Capítulo 1

Historia de la Teoría de Matrices

1.1. Babilonios

El surgimiento de las matrices datan del siglo II AC, aunque hay indicios desde el siglo IV AC. Fue hasta finales del siglo XVII que las ideas reaparecieron y se desarrollaron con fuerza. Las matrices surgen del estudio de sistemas de ecuaciones lineales. En Babilonia, trás diversas excavaciones arqueológicas, se hallaron tablillas de arcilla, en las que se plantean y solucionan ecuaciones lineales. Por ejemplo, una tablilla que data alrededor de 300 años AC contiene el siguiente problema:

"Hay dos terrenos cuya área total es de 1800 metros cuadrados (yardas). Uno produce granos en una proporción de $\frac{2}{3}$ de una medida por yarda cuadrada mientras el otro produce granos en una proporción de $\frac{1}{2}$ de una medida por metro cuadrado. Si la producción total es 1100 medidas, £Cuál es el tamaño de cada terreno?"

1.2. Aportes de los chinos

Los chinos, entre los años 200 AC y 100 AC, estuvieron mucho más cerca de las matrices que los babilonios. Según Boyer [17] el texto "**Nueve Capítulos de Arte Matemático**", ejerció una gran influencia sobre los posteriores libros de matemáticas de los chinos. Esta obra incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, compañía, ingeniería, impuestos, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. Específicamente en el capítulo ocho, se muestra un gran interés por la resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales,que usan números positivos y negativos. Éste tema quedará como uno de los favoritos dentro de los pueblos orientales.

En éste libro, se encuentra el siguiente ejemplo relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales:

> *"Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero, dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y 1 del tercero hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. £Cuántas medidas de cereal están contenidas en un fardo de cada tipo?"[16]*

Para resolver el problema, el autor coloca los coeficientes del sistema de tres ecuaciones lineales, ordenados por columnas en una especie de "tablero contador". Actualmente, se escriben las ecuaciones lineales por medio de filas más que por columnas, sin embargo, el método es el mismo. Es sorprendente observar que, hace 2200 años, el autor escribió instrucciones al lector. A continuación mostramos la tabla y una adaptación moderna de dichas instrucciones.

1	**2**	**3**
2	**3**	**2**
3	**1**	**1**
26	**34**	**39**

1. *Multiplicar la columna dos por tres y la columna tres por dos, restar la nueva columna tres a la columna dos, generando una nueva columna dos. Luego, multiplicar la columna uno por tres y restarle la columna tres generando una nueva columna uno. El tablero contador queda* así:

0	*0*	*3*
4	*5*	*2*
8	*1*	*1*
39	*24*	*39*

2. *Multiplicar la columna uno por cinco y la columna dos por cuatro, restar la nueva columna dos a la columna uno, generando una nueva columna uno. El tablero contador queda así:*

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Con esto, tenemos la solución para el tercer tipo de cereal. De este modo, se puede encontrar la solución para el segundo y por último para el primero por medio de una sustitución hacia atrás. Este método, conocido ahora como **Eliminación Gaussiana**, se volvería a redescubrir hasta inicios del siglo XIX.

En gran medida, se ha tomado como base para el desarrollo de esta sección, el documento hallado en la página de internet *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_ and_ determinants.html*, por considerarse un texto completo en cuanto al proceso histórico de este tema.

1.3. Regla de Cramer

El médico y matemático Girolano Cardano, en su libro "Ars Magna" (1545), dá una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llama *Regla de Modo*. Esta regla, es en esencia la conocida

Regla de Cramer para la resolución de un sistema (2×2). El método de Cardano conduciría hacía la definición de determinante. La noción de determinante aparece en Japón y Europa casi simultaneamente; aunque Seki, en Japón lo publicó primero. En el año 1693 Seki escribió *"Métodos de Resolución de Problemas Disimulados*" que contienen métodos matriciales escritos exactamente como en las tablas del método chino. Seki aún no tenía una palabra referente a "determinante". [6].

Alrededor del año 1730, Maclaurin escribió "Treatise of Algebra" publicado en 1748, dos años después de su muerte. Este tratado contiene los primeros resultados publicados sobre determinantes que prueban la regla de Cramer para sistemas 2×2 y 3×3 e indican cómo trabajar con sistemas de 4×4.

Cramer da la regla general para sistemas de $(n \times n)$ en "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" (1750). Su motivación fue el deseo de encontrar la ecuación de una curva plana que pasa a través de un número dado de puntos. La regla aparece en un apéndice del documento, aunque su prueba no aparece:

"Se encuentra el valor de cada incógnita formando n *fracciones de las cuales el común denominador tiene tantos términos como permutaciones de n cosas."*

Cramer explica precisamente el cálculo de estos términos como el producto de ciertos coeficientes en las ecuaciones, y haciendo algunas consideraciones sobre los signos. Él también explica cómo los n numeradores de las fracciones pueden ser encontrados reemplazando ciertos coeficientes en este cálculo por términos constantes del sistema.

Bezout también hizo contribuciones en este campo: por ejemplo, en 1764, mostró que en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, existen soluciones no nulas, si el determinante asociado al sistema se anula.

En 1772, Laplace afirma que los métodos introducidos por Cramer y Bezout eran impracticables, y en un escrito donde estudiaba las órbitas de los planetas, discutía la solución de sistemas de ecuaciones lineales sin calcularlos pero, usando determinantes.

El término **'determinante'** fue introducido por primera vez por Gauss en "Disquisitiones Arithmeticae" (1801) en la discusión sobre formas cuadráticas. Gauss usó el término porque 'determinante' determina las propiedades de la forma cuadrática. [8].

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

La Eliminación Gaussiana, que primero aparece en el texto " Nueve Capítulos de Arte Matemático" escrito 200 años AC, era usada por Gauss en sus estudios de la órbita del asteroide Pallas. Usando las observaciones de Pallas tomadas entre 1803 y 1809, Gauss obtuvo un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas, ideó un método sistemático para resolver tales ecuaciones, que se conoce actualmente como "Eliminación Gaussiana".

Cauchy en 1812 usó el término 'determinante' en el sentido moderno. El trabajo de Cauchy es el más completo de los primeros trabajos sobre determinantes.

En 1826 Cauchy, en el contexto de formas cuadráticas en n variables, usó el término 'tableau' para la matriz de coeficientes. Él encuentra los autovalores de las matrices y dió algunos resultados sobre diagonalización de una matriz en el contexto de convertir una forma cuadrática a la suma de cuadrados. Cauchy también introdujo la idea de matrices similares y mostró que si dos matrices son similares, ellas tienen la misma ecuación característica. Probó el teorema de la multiplicación para matrices, dio los autovalores, ofreció resultados en la diagonalización de matrices (para convertir formas a la suma de cuadrados) y probó que una matriz simétrica real es diagonalizable.

Jacques Sturm dió una generalización del problema de los autovalores en el contexto de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, el concepto de autovalores apareció 80 años antes en trabajos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, hechos por D'Alembert acerca de la generalización del movimiento de una cuerda con masas pegadas en diversos puntos a la cuerda.

Desafortunadamente, ni Cauchy ni Jacques Sturm realizaron la generalización de las ideas que ellos estaban introduciendo, las mostraron sólo en los contextos específicos en que ellos se encontraban trabajando. Jacobi, alrededor 1830 y luego, Kronecker y Weierstrass en los años 1850 y 1860 también miraron resultados matriciales pero otra vez en un contexto especial, esta vez relativo a la idea de una transformación lineal.

Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en 1841. Esto fue de gran importancia, ya que por primera vez la definición de determinante fue hecha en forma algorítmica y las entradas en los determinantes no fueron especificadas. Así, sus resultados fueron aplicados igualmente bien a casos donde las entradas eran números o funciones. Estos tres escritos de Jacobi difundieron ampliamente la idea de determinante.

Cayley, también publicó en 1841, la primera contribución inglesa a la Teoría de determinantes. En este escrito, usó dos líneas verticales en ambos lados del arreglo para denotar el determinante, una notación que ahora es común.

Eisenstein en 1844 denotó las transformaciones lineales con una letra y mostró como sumarlas y multiplicarlas como números ordinarios excepto porque no hay conmutatividad. Es pertinente decir que Eisenstein fue el primero en pensar las sustituciones lineales como la formación de un álgebra. Esta acotación se evidencia en la siguiente cita de su escrito de 1844:

> *"Un algoritmo para cálculo puede ser basado en esto, consiste en aplicar las reglas normales para las operaciones de multiplicación, división y exponenciación a ecuaciones simbólicas. Entre sistemas lineales, ecuaciones simbólicas correctas son obtenidas siempre, teniendo en consideración que el orden de los factores no puede ser alterado."*

1.4. El Término "matriz"

El primero en usar el término "matriz" fue Sylvester en 1850. Sylvester definió matriz como un arreglo rectangular de términos y mostró como algunas matrices contenían dentro de ellas varios determinantes representados como arreglos cuadrados. Después de dejar América, Sylvester volvió a Inglaterra en 1851, y se formó como abogado. Más tarde compartió con Cayley sus intereses matemáticos. Cayley rápidamente vio el significado del concepto de matriz y en 1853 publicó una nota dande, por primera vez da la definición de la inversa de una matriz.

Método Dialéctico de Sylvester para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones

Cayley, en 1858, publicó "Memorias sobre la teoría de matrices" que contiene la primera definición abstracta de matriz. Él muestra que los arreglos de coeficiente estudiados para formas cuadráticas y para transformaciones lineales son casos especiales de su concepto general. Cayley daba una definición algebraica sobre adición de matrices, multiplicación, multiplicación por un escalar y matriz inversa.

Proporcionando además, una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante. Cayley también probó que, en el caso de matrices de orden (2×2), la matriz satisface su ecuación característica propia. Él declaraba que había comprobado el resultado para matrices de orden (3×3), diciendo:

"*Yo no tengo la condición necesaria para llevar adelante el trabajo de probar formalmente el teorema para el caso general de una matriz de cualquier grado.*"

Que una matriz satisfaga su ecuación característica propia es lo que se conoce como el "Teorema de Cayley-Hamilton". Es razonable preguntarse qué tiene que ver el teorema con Hamilton. En efecto, él también probó un caso especial del teorema, para matrices de orden (4×4), en el curso de sus investigaciones sobre cuaterniones.

Un importante texto que abre un espacio a las matrices dentro de las matemáticas fue "Introduccion al álgebra lineal" escrito por Bôcher en 1907. Turnbull y Aitken escribieron textos influyentes en los años 1930 y Mirsky con "Una introducción al álgebra lineal", en 1955, introdujo laTeoría de Matrices estableciéndola como uno de los más importantes temas matemáticos para estudiantes de pregrado.[16]

Capítulo 2

EL ÁLGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES Y LAS MATRICES

2.1. Introducción

En el presente capítulo se introducirá la noción de transformación lineal, así como ciertas nociones básicas relacionadas a estas funciones y además, se presenta una caracterización de los operadores lineales que preserva simetría y antisimetría.

Gran parte de este capítulo, se ha tomado de *Las Notas de Clase: Teoría Avanzada de Matrices, del profesor Humberto Sarria Zapata*, quien ha basado el documento en textos tales como *Matrix Analysis* [13] y de la tesis de maestría de la estudiante Alvarez, Y [15].

Las transformaciones lineales se consideran una de las funciones más importantes, que intervienen en variadas situaciones en matemáticas. Por ejemplo, en Geometría modelan las simetrías de un objeto; en Álgebra, se pueden utilizar para representar ecuaciones; en análisis, sirven para aproximar localmente funciones. [14]

Es oportuno indicar que el álgebra de las transformaciones lineales es la misma que el álgebra de las matrices, hecho que descubrió Cayley en 1858; siendo las matrices un modelamiento de funciones especiales, llamadas *transformaciones lineales*. Las cuales serán el eje central a abordar [5].

Definición 1*: Diremos que un par de espacios vectoriales U y V sobre un cuerpo K son isomorfos, si existe una transformación lineal biyectiva $T : U \longrightarrow V$, tal que para todo u_1,u_2, $\in U$* y *todo $\alpha \epsilon K$.*

$$T(\alpha u_1 + u_2) = \alpha T(u_1) + T(u_2)$$

En este caso escribiremos $U \simeq V$ que se lee "U es isomorfo a V".

Lema 1*: Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y B =$\{v_1, ..., v_n\}$, es una base para V, entonces para cada $v \in V$ existe una única colección de escalares $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq K$, tales*

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Demostración: Sea $v\in V$ cualquiera.

Entonces, como B es una base, existe una colección $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}\subseteq K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \tag{2.1}$$

Supongamos que existe una colección $\left\{\alpha_1^{'}, ..., \alpha_n^{'}\right\}\subseteq K$, tal que

$$v = \alpha_1^{'} v_1 + ... + \alpha_n^{'} v_n \tag{2.2}$$

Entonces, de (2.1) y (2.2)

$$(\alpha_1 - \alpha_1^{'})v_1 + ... + (\alpha_n - \alpha_n^{'})v_n = 0 \tag{2.3}$$

Ahora, como B es una colección de vectores linealmente independiente, entonces (2.3), implica que $\alpha_i = \alpha_i'$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Definición 2: Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V y $v \in V$. Entonces, el vector $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n]^T \in K^n$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

se denomina el vector de componentes de v respecto a la base B. Este vector lo notaremos mediante $[v]_B$.

Lema 2: La función

$$[\cdot]_B \colon V \longrightarrow K^n$$

$$v \longrightarrow [v]_B$$

es una transformación lineal biyectiva, y en consecuencia $V \simeq K^n$.

***Demostración*:** Por el **lema 2** sabemos que $[\cdot]_B$ es uno a uno y es claro que esta función es también sobreyectiva.

Veamos que $[\cdot]_B$ es una transformación lineal. Sean $v, u \in V$ y $\alpha\in K$. Supongamos además que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

$$u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$

$$\alpha u + v = \alpha\beta_1 v_1 + ... + \alpha\beta_n v_n + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

$$= (\alpha\beta_1 + \alpha_1)v_1 + ... + (\alpha\beta_n + \alpha_n)v_n.$$

Por lo tanto

$$[\alpha u + v]_B = \begin{bmatrix} \alpha\beta_1 + \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha\beta_n + \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha\,[u]_B + [v]_B$$

Concluimos de lo anterior que $V \simeq K^n$.

Probaremos a continuación que a toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, sobre un mismo cuerpo se le puede asociar una colección de matrices, dichas matrices se denominan *las matrices de representación de la transformación lineal.* [5].

Se consideran dos K-espacios vectoriales V y W de dimensiones finitas n y m respectivamente, tomando dos bases para estos espacios, $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$y $B_2 = \{w_1, ..., w_m\}$, bases para V y W respectivamente. Observemos el siguiente gráfico:

$$\begin{array}{ccccc} & V & \overset{T}{\longrightarrow} & W & \\ [\cdot]_{B_1} & \downarrow & & \downarrow & [\cdot]_{B_2} \\ & K^n & \underset{\widehat{T}}{\longrightarrow} & K^m & \end{array}$$

A continuación se da una explicación de los términos utilizados en el gráfico anterior, se toma $v \in V$ y $w \in W$. Por el Álgebra lineal, se sabe que existen colecciones de conjuntos $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\} \subset K$, únicas tales que $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ y $w = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$. Se define la representación de v en la base B_1.

$$[v]_{B1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

El operador $[\cdot]_{B_1}$, se denomina *operador de representación* respecto a la base B_1. La representación de w respecto a la base B_2 es:

$$[w]_{B_2}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ .\\ .\\ .\\ \beta_m\end{bmatrix}.$$

Proposición 1: *Para cualquier K-espacio vectorial V de dimensión finita, y para cualquier base B de V, el operador de representación en la base B, $[\cdot]_B$ es una transformación lineal biyectiva entre los espacios vectoriales V y K^n.*

La proposición anterior muestra que $V \simeq K^n$ y $W\simeq K^m$ (isomorfismos entre espacios vectoriales). El problema que ahora se propone, consiste en encontrar una transformación lineal $\widehat{T}$, tal que $T(v) = \left[\widehat{T}\,[v]_{B_1}\right]^{-1}{}_{B_2}$. Se sabe que T queda definida por $T(v_1),\ T(v_2),\ ..., T(v_n)$, además, existe para cada $i = 1, 2, ..., n$ una colección $\{t_{1i,}, t_{2i}, ..., t_{mi}\}\subseteq K$ tal que

$$[Tv_i]_{B_2}=\begin{bmatrix}t_{1i}\\ t_{2i}\\ .\\ .\\ t_{mi}\end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$[Tv]_{B_2}=\left[T\left(\sum_{i=1}^{n}\right)\alpha_i v_i\right]_{B_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i[Tv_i]_{B_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\begin{bmatrix}t_{1i}\\ t_{2i}\\ .\\ .\\ .\\ t_{mi}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t_{11} & . & . & . & t_{1n}\\ . & . & & & .\\ . & & . & & .\\ . & & & . & .\\ t_{n1} & . & . & . & t_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ .\\ .\\ .\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

La anterior igualdad la podemos escribir en forma compacta de la siguiente manera

$$[Tv]_{B_2} = {}_{B_2}[T]_{B_1}[v]_{B_1},$$

donde ${}_{B_2}[T]_{B_1} = [t_{ij}]_{m\times n}$ *se denomina la matriz de representación T en las bases B_1 y B_2*. Si $V = W$ y $B_1 = B_2$, entonces ${}_{B_2}[T]_{B_{1,}}$, se denomina la *matriz de representación de T en la base B_1*.

Consideremos ahora la transformación idéntica $Id : V \longrightarrow V$ definida por $Id\, v = v$, para todo $v \in V$. Entonces, por lo expuesto anteriormente,

$$\begin{aligned}[v]_{B_2} &= [Id\, v]_{B_2} \\ &= {}_{B_2}[Id]_{B_1}[v]_{B1.}\end{aligned}$$

Esta última igualdad permite relacionar la representación de un vector v, en las bases B_1 y B_2, si se conoce la matriz ${}_{B_2}[Id]_{B_1}$, es por esta razón que ésta se denomina *matriz cambio de base, deB_1a B_2*.

2.2. Cómo caracterizar operadores lineales que preservan simetría y antisimetría vía matrices

Esta sección del capítulo 2, tiene como eje central una importante área del Algebra lineal, llamada "Problemas de preservación lineal". Cabe decir que la información aquí suministrada ha sido tomada de forma textual de la tesis cuyo título es *"Operadores Lineales que Preservan Simetría y Antisimetría"* [15] . El capítulo a abordar lleva el título de esta sección, el cual se fundamenta en tres teoremas, que caracterizan a los operadores lineales, los cuales preservan matrices simétricas y antisimétricas.

Definición 3: Sean, $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) :\longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ un operador lineal, y, $S_n(\mathbb{C})$ y $AS_n(\mathbb{C})$, los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente. Se dice que φ preserva simetría y antisimetría, si y solamente si,

$$\varphi(S_n(\mathbb{C})) \subseteq S_n(\mathbb{C})$$

y

$$\varphi(AS_n(\mathbb{C})) \subseteq AS_n(\mathbb{C})$$

Para simplificar la sintaxis en la escritura de las ecuaciones, se denotará de la misma manera al operador lineal $\varphi : \mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$ y a la matriz de representación de φ en la base canónica de $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$. La matriz de representación descrita por bloques tiene el aspecto siguiente:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & & & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $\varphi_{ij} = (\varphi_{kl}^{ij})_{n\times n}$, los subíndices indican la posición en el bloque y los superíndices se refieren al bloque correspondiente.

Para hallar $\phi(A)$, la matriz A se vectoriza mediante

$$vec(A) = [A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n)}]^T,$$

donde $A^{(j)}$ denota la j- ésima columna de A. De aquí, se tiene que

$$\varphi\left(A\right)=\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & . & . & . & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & . & . & . & \varphi_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & & & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \\ \\ ... \\ A^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{11}A^{(1)} & +\varphi_{12}A^{(2)}+ & ...+ & \varphi_{1n}A^{(n)} \\ \varphi_{21}A^{(1)} & +\varphi_{22}A^{(2)}+ & ...+ & \varphi_{2n}A^{(n)} \\ & \vdots & & \\ \varphi_{n1}A^{(1)}+ & \varphi_{n2}A^{(2)}+ & \ldots+ & \varphi_{nn}A^{(n)} \end{pmatrix}$$

2.2.1. Tres Teoremas Generales sobre Caracterización

Teorema 1. Sea $\varphi = \left(p_{kl}^{ij}\right)$ un operador lineal definido sobre $\mathfrak{M}_n\left(\mathbb{C}\right)$, φ preserva simetría y antisimetría, si y sólo si, $\varphi_{kl}^{ij} = \varphi_{ij}^{kl}$ para $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$.

Prueba $\Rightarrow$) Sea φ un operador lineal que preserva matrices simétricas y antisimétricas.

Considere la base canónica de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, y de allí, las matrices simétricas $E_{jl} + E_{lj}$ y las matrices antisimétricas $E_{jl} - E_{lj}$. Por hipótesis, $\varphi(E_{jl} + E_{lj})$ es una matriz simétrica y $\varphi(E_{jl} - E_{lj})$ es una matriz antisimétrica. Nótese que

$$\varphi(E_{jl} + E_{lj}) = \begin{pmatrix} \varphi_{1l}^{1j} + \varphi_{1j}^{1l} & \varphi_{1l}^{2j} + \varphi_{1j}^{2l} & \cdots & \varphi_{1l}^{nj} + \varphi_{lj}^{nl} \\ \varphi_{2l}^{1j} + \varphi_{2j}^{1l} & \varphi_{2l}^{2j} + \varphi_{2j}^{2l} & \cdots & \varphi_{2l}^{nj} + \varphi_{2j}^{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{nl}^{1j} + \varphi_{nj}^{1l} & \varphi_{nl}^{2j} + \varphi_{nj}^{2l} & \cdots & \varphi_{nl}^{nj} + \varphi_{nj}^{nl} \end{pmatrix}$$

y

$$\varphi(E_{jl} - E_{lj}) = \begin{pmatrix} \varphi_{1l}^{1j} - \varphi_{1j}^{1l} & \varphi_{1l}^{2j} - \varphi_{1j}^{2l} & \cdots & \varphi_{1l}^{nj} - \varphi_{lj}^{nl} \\ \varphi_{2l}^{1j} - \varphi_{2j}^{1l} & \varphi_{2l}^{2j} - \varphi_{2j}^{2l} & \cdots & \varphi_{2l}^{nj} - \varphi_{2j}^{nl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{nl}^{1j} - \varphi_{nj}^{1l} & \varphi_{nl}^{2j} - \varphi_{nj}^{2l} & \cdots & \varphi_{nl}^{nj} - \varphi_{nj}^{nl} \end{pmatrix}$$

De donde se concluye que

$$\varphi_{kl}^{ij} + \varphi_{kj}^{il} = \varphi_{il}^{kj} + \varphi_{ij}^{kl} \tag{2.4}$$

y

$$\varphi_{kl}^{ij} - \varphi_{kj}^{il} = -\left(\varphi_{il}^{kj} - \varphi_{ij}^{kl}\right) \tag{2.5}$$

De (2.4) y (2.5) se deduce que

$$\varphi_{kl}^{ij} = \varphi_{ij}^{kl}$$

$\Leftarrow$) Como $\varphi_{kl}^{ij}{=}\varphi_{ij}^{kl}$ para $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$. Por (3,4) φ $(E_{jl} + E_{lj})$ es una matriz simétrica y por (2.5) $\varphi(E_{jl} - E_{lj})$ es una matriz antisimétrica. Esto prueba la afirmación para los conjuntos de matrices $\{E_{ij} + E_{ji}\}_{i<j}$, $\{E_{ij} - E_{ji}\}_{i<j}$, $\{E_{jj}\}$ donde $i, j =$ 1,2, ..., n que conforman las bases para las matrices simétricas y antisimétricas. En consecuencia, φ preserva matrices simétricas y antisimétricas.

Corolario 1. Sea φ un operador lineal simétrico sobre $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$, φ preserva simetría y antisimetría, si y sólo si, $\varphi_{ij}^{kl}{=}\varphi_{kl}^{ij}{=}$ $\varphi_{ji}^{lk}{=}\varphi_{lk}^{ji}$, para $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$.

Prueba: La prueba se sigue del $Teorema\,(1)$

Corolorio 2. Sea φ un operador lineal antisimétrico sobre $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$. φ preserva matrices simétricas y antisimétricas, si y sólo si, $\varphi_{ij}^{kl} = \varphi_{kl}^{ij} = -\varphi_{ji}^{lk} = -\varphi_{lk}^{ji}$, para $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$.

Teorema 2. Sea φ un operador lineal sobre $\mathfrak{M}_\mathfrak{n}(\mathbb{C})$. φ preserva matrices simétricas y antisimétricas, si y sólo si, existen números complejos $d_1, d_2, ..., d_s$ y matrices reales $A_1, A_2, ..., A_s$, tales que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} d_i A_i \otimes A_i = \sum_{i=1}^{s} d_i A_i^{\otimes 2}$$

Prueba:$\Rightarrow$ *Sea* $\varphi = \left(\varphi_{kl}^{ij}\right)$. Nótese que φ puede escribirse

$$\varphi = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \varphi_{kl}^{ij} E_{ij} \otimes E_{kl} \tag{2.6}$$

Como φ preserva matrices simétricas y antisimétricas, $\varphi_{kl}^{ij}{=}\varphi_{ij}^{kl}$ para $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$. De (2.6) se tiene que

$$\varphi = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \varphi_{ij}^{kl} (E_{ij} {\otimes} E_{kl} {+} E_{kl} {\otimes} E_{ij})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}^{ij} E_{ij}^{\otimes 2} + \sum_{1 \le i<k, 1 \le j<l}^{n} \varphi_{kl}^{ij} (E_{ij} {\otimes} E_{kl} {+} E_{kl} {\otimes} E_{ij})$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{ij}^{ij}E_{ij}^{\otimes 2}+\sum_{1\leq i<k,1\leq j<l}^{n}\varphi_{kl}^{ij}(E_{ij}^{\otimes 2}+E_{ij}\otimes E_{kl}+E_{kl}\otimes E_{ij}+E_{kl}^{\otimes 2})\text{ -}$$
$$\sum_{1\leq i<k,1\leq j<l}^{n}\varphi_{kl}^{ij}(E_{ij}^{\otimes 2}+E_{kl}^{\otimes 2})$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{ij}^{ij}E_{ij}^{\otimes 2}+\sum_{1\leq i<k,\leq 1\leq j<l}^{n}\varphi_{kl}^{ij}(E_{ij}+E_{kl})^{\otimes 2}\text{-}\sum_{1\leq i<k,1\leq j<l}^{n}\varphi_{kl}^{ij}(E_{ij}^{\otimes 2}+E_{kl}^{\otimes 2}).$$

Con esto se prueba que un operador que preserva simetría y antisimetría puede descomponerse en sumas de cuadrados de Kronecker.

$\Leftarrow$ *Sea* $A\in S_n$,

$$[\varphi(A)]^T=\left[\sum_{i=1}^{s}\delta_iA_i\otimes A_iVec(A)\right]^T$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{s}\delta_iA_iAA_i^T\right]^T$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\delta_iA_iAA_i^T$$

$$=\varphi(A)$$

La prueba se realiza de forma similar, cuando$A$ es antisimétrica.

Teorema 3. Sea φ un operador lineal sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{C})$. φ preserva matrices simétricas y antisimétricas, si y sólo si, existen números complejos d_{ij} con $i,j=1,2,...,s$ tales que la matriz $(d_{ij})_{s\times s}$ es simétrica y matrices reales $A_1,A_2,...,A_s$ tales que

$$\varphi=\sum_{i,j=1}^{s}d_{ij}A_i\otimes A_j$$

Prueba: $\Rightarrow$) Por hipótesis, φ preserva simetría y antisimetría, y por el Teorema anterior existen números complejos d_1, ..., d_s y matrices reales A_1, A_2, ..., A_s tales que $\varphi=\sum_{i=1}^{s}d_iA_i\otimes A_i$. Como diag$(d_1,...,d_s)$es simétrica, todas las condiciones del **teorema 2** se cumplen y se tiene el resultado.

$\Leftarrow$) Ahora, si $d_{ij}=d_{ji}$ para $1\leq i,\ j\leq s$, para cualquier $A\in S_n$ se tiene:

$$[\varphi(A)]^T=\left[\sum_{i,j=1}^{s}d_{ij}A_i\otimes A_jvec(A)\right]^T$$

$$=\left[\sum_{i,j=1}^{s}d_{ij}A_jAA_i^T\right]^T$$

$$=\sum_{i,j=1}^{s}d_{ij}A_iAA_j^T$$

$$[\varphi(A)]^T=\left[\sum_{i,j=1}^{s}d_{ij}A_j\otimes A_i\right]vec(A)$$

$$= \left[\sum_{i,j=1}^{s} d_{ji} A_j \otimes A_i \right] vec\,(A)$$

$$= \left[\sum_{i,j=1}^{s} d_{ij} A_i \otimes A_j \right] vec\,(A)$$

$$= \varphi\,(A)$$

Si la matriz es antisimétrica, la prueba es similar.

Corolario 3. Sea $\varphi\,(X) = AXB$, φ preserva simetría y antisimetría, si y sólo si,

$$a_{ij} b_{kl} = a_{lk} b_{ji}$$

Prueba:

$\varphi(X) = AXB$

$$(B^T \otimes A) Vec(X)$$

Nótese que $\varphi_{ij}^{kl}{=}a_{ij} b_{kl}$ y $\varphi_{kl}^{ij}{=}a_{lk} b_{ji}$, y φ preserva simetría y antisimetría $\varphi_{ij}^{kl}{=}\varphi_{kl}^{ij}$, de lo anterior se sigue que $a_{ij} b_{kl} = a_{lk} b_{ji}$.

2.2.2. El operador de Transposición

El ejemplo clásico de un operador que preserva simetría y antisimetría, es el operador de transposición,

$$T : \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}\,(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}\,(\mathbb{C})$$

$$A \to A^T$$

La matriz de representación de T, está dada por

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix}$$

en donde $T_{ij}{=}\left(t_{kl}^{ij}\right)_{n^2 \times n^2}$, con

$$t_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = k \, y \, j = 1 \\ 0 & en \, los \, dem\acute{a}s \, casos \end{cases}$$

Proposición 1. El operador de transposición es un operador ortogonal cuyos únicos vectores propios son las matrices simétricas y antisimétricas no nulas, con valores propios 1 y -1, respectivamente.

Prueba: (i) Sea $A\in \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}}\,(\mathbb{C})$. Como $\|A^T\|_F = \|A\|_F$, T es unitaria y dado que sus entradas son reales, se tiene que T es ortogonal.

(ii) Sea V un vector propio de T, es decir, $T(V)= \lambda V$. Si se aplica nuevamente el operador T se tiene

$$T(T(V)) = T(\lambda V)$$

$$V = \lambda^2 V$$

$$V - \lambda^2 V = 0$$

$$\left(1 - \lambda^2\right) V = 0$$

Como V es vector propio de T, $V \neq 0$. Luego, $1-\lambda^2 = 0$, esto indica que $\lambda = \pm 1$. Así, si $\lambda = 1$, $T(V)= V$ y V es simétrica y si $\lambda = -1$, $T(V) = -V$ y V es antisimétrica.

En el siguiente corolario se afirma que un operador preserva simetría y antisimetría, si y sólo si, conmuta con el operador de transposición.

Corolario 4. Si φ preserva simetría y antisimetría, entonces

$\varphi\left(A^T\right) = \left[\varphi\left(A\right)\right]^T$.

Prueba:

$$\varphi(A^T) = \sum_{i=1}^{s} \delta_i A_i \otimes A_i Vec\left(A\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \delta_i A_i A^T A_i^T$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{s} \delta_i A_i A A_i^T\right]^T$$

$$= \left[\varphi\left(A\right)\right]^T$$

Capítulo 3

PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1. Introducción

Durante el aprendizaje escolar se trata de manera aislada los conceptos de matriz y transformación en el plano. La presente propuesta didáctica está cimentada concretamente en el pensamiento geométrico y variacional, cuya intensión es la apropiación del concepto de Matriz de manera estructurada, utilizando como eje central las transformaciones geométricas, dejando en claro la relación entre los mismos.

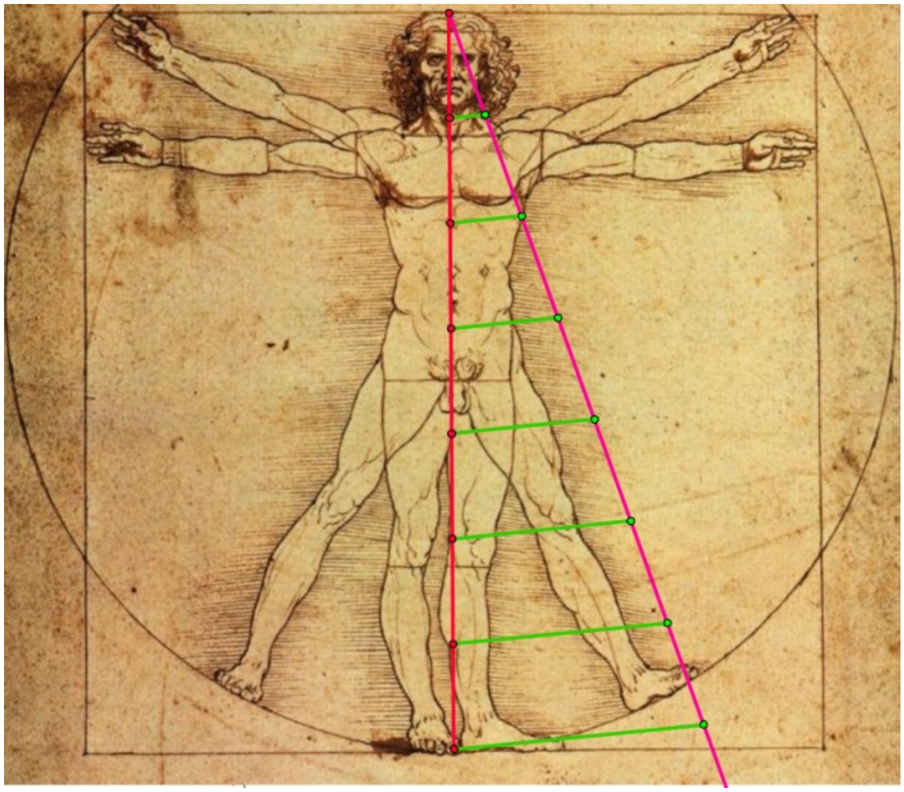
En este capítulo, se dará a conocer la definición de Pensamiento espacial y Pensamiento Variacional, así como lo expuesto en el currículo de Matimáticas en cuanto a estos dos tipos de pensamiento. Así como las herramientas tecnológicas para la planeación de la mayoría de las actividades. concretamente se hace referencia al uso del Programa computacional Derive y como apoyo gráfico el software GeoGebra.

3.2. Algunas definiciones de Pensamiento Espacial y Pensamiento Variacional

3.2.1. El pensamiento espacial

"Todo lo pensado y actuado tiene origen espacial"[16]. Esta corta frase recoge el sentido del pensamiento espacial. Los elementos básicos de la geometría han sido abstraidos de lo que palpamos y observamos del mundo real. Es evidente la armonía que guarda la naturaleza, a través de la simetría de las telas de una araña, en los panales de las abejas, las celdas hexágonales; en geología, la simetría que permite la clasificación mediante la cual se reconocen los minerales: la Cristalografía.

Al igual que en la naturaleza, el hombre a través de la historia ha querido plasmar en los lienzos lo que observa, lo que está a su alrededor. Algunos artístas como Filippo Brunelleschi, Leonardo Da Vinci, Durero, entre otros, han mostrado su interés por extraer la naturaleza, de forma precisa. De esta manera la perspectiva se va transformando en objeto de estudio de la geometría. Leonardo Da Vinci plasmó la simetría del cuerpo humano en su obra *El hombre de Vitrubio*



1

En los estándares de matemáticas [3], el pensamiento espacial es entendido como: *“ El conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales(...). Giros, rotaciones, traslaciones, estiramientos, acortamientos , movimientos en el eje coordenado, comparaciones de características en figuras similares, etc. Son aspectos que permiten desarrollar el pensamiento espacial y aplicar el conocimiento geométrico en diferentes contextos.”.*

La anterior cita nos conduce a reconocer uno de los aspectos del pensamiento espacial, las simétrias en el plano. El estudio de las isometrías y las transformaciones en el plano es una interesante y atractiva manera de desarrollar competencias, en cuanto a la relación con nuestro entorno, tal y como se mencionó inicialmente.

Con respecto al currículo, los Estándares proponen un aumento en la exploración abierta y en el planteamiento de conjeturas, y una mayor atención a temas de la geometria de transformaciones. [17].

A continuación se presentarán ***las etapas del conocimiento espacial según Piage***t, no podríamos dejar atrás los aportes de Piaget sobre cómo el individuo conoce el espacio. Brevemente se describirá una subdivisión del espacio, que presenta María Agustina García, considerándolo esencial en cuanto al desarrollo del pensamiento espacial. [16]:

1. *Espacio orgánico postural: Hace referencia al espacio que se vive sin razonarlo. Ejemplo: cerrar los ojos para dormir.*

[1]Tomado de http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/indhv.htm

2. *Espacio sensorio- motor: Se va conociendo, su uso presenta características de grupo. El niño lo aprende en la cotidianidad.*

3. *Intuición de imagenes: Se vive con representaciones. La imagen mental es una imitación interiorizada que sirve como significante simbólico de las acciones ejercidas sobre los objetos o de estos objetos en tanto metas de las acciones .*

4. *Operaciones concretas: Se hacen composiciones utilizando un determinado tipo de elementos.*

5. *Operaciones formales: Allí se sitúan las representaciones esquemáticas de los objetos. Las construcciones sobre éstos son imaginadas.*

6. *Espacio Axiomático: Están vinculado con las operaciones lógicas-aritméticas, eliminando el espacio real. El mundo tridimensional se hace lineal.*

3.2.2. El pensamiento variacional

Los lineamientos curriculares (MEN, 1998) [3], permiten interpretar una nueva manera de reorganizar todos aquellos contenidos que se han constituido en los desarrollos curriculares para el área de las matemáticas en los grados 8ž y 9ž, tradicionalmente, etiquetados con el nombre de álgebra. Por lo tanto es importante acercarnos a la comprensión del pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos. Sólo así podemos continuar comprendiendo el por qué de la necesidad de una propuesta curricular que mejore los desempeños de nuestros estudiantes en lo relativo al álgebra escolar.

En los estándares de matemáticas *el pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, asi como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.*

En este texto, indica que este pensamiento es fundamental en cuanto a la resolución de problemas, específicamente los que tienen que ver con la variación y el cambio, así como en la modelación de procesos de la vida cotidiana y en otras ciencias.

3.3. Desarrollo del Pensamiento Geométrico y los Niveles de Van Hiele

Las nuevas investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indican que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas finales, cabe decir que los niveles finales corresponden a niveles escolares muy avanzados que los que se dan en la escuela, es el caso del nivel 5.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece ser más acertada en cuanto a la evolución y que adquiere cada vez mayor aceptación, en lo referente a la geometría escolar.

El modelo de Van Hiele abarca dos aspectos:

- Descriptivo: Mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede el progreso de éstos.

- Instructivo: Marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría. Estos niveles son:

- **El Nivel 1**: Es el nivel de visualización, denominado también de familiarización, en donde el estudiante percibe las figuras como un todo global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes. En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de "la misma forma".

- **El Nivel 2**: Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Dichas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. En este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.

- **El Nivel 3**: Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificada, pero sólo con ayuda y guía . Los estudiantes pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones. Se empiezan a establecer las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

- **El Nivel 4**: Es de razonamiento deductivo; en este se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamiento abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

- **El Nivel 5**: En este nivel el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Algunos estudios han mostrado que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, en especial el nivel 5, ya que exige un nivel de cualificación matemático elevado. Cabe aclarar que los niveles de Van Hiele, deben ser secuenciales, no es posible alterar el orden.

3.4. El Computador como Herramienta Didáctica

El sentido de utilizar la tecnología en el aula, según la revista ALTABLERO, del MEN, en uno de sus apartes indica textualmente:

Un programa multimedial interactivo puede convertirse en una poderosa herramienta pedagógica y didáctica que aproveche nuestra capacidad multisensorial. La combinación de textos gráficos, sonido, fotografía, animaciones y videos; permite transmitir el conocimiento de manera mucho más natural, vívida y dinámica, lo cual resulta crucial para el aprendizaje. Este tipo de recursos puede incitar a la *transformación de los estudiantes, de recipientes pasivos de información a participantes más activos de su proceso de aprendizaje.* [17].

Es evidente cómo el estudiante puede vivenciar otra manera de aprender conceptos matemáticos, de manera interactiva, con ello se sigue un camino sin vuelta atrás sobre el uso de las Tics en el aula. Este camino va en pro del mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje.

En la educación matemática existe un objetivo primordial en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en todos los niveles, consiste en potenciar en el estudiante las capacidades intelectuales que intervienen en el procesos de resolución de problemas, por ello se cree que un aprendizaje activo de la matemática debe estar ligado a la resolución de problemas, sustentado por todos aquellos recursos que puedan incidir sobre el desarrollo de destrezas para interpretar la información, estructurarla, organizarla, formular hipótesis, verificarlas, sistematizarlas y generarlizar conclusiones. [11].

El objeto de utilizar el computador como herramienta se evidencia en la tercera fase, según las fases establecidas por Polya[2]

3.4.1. Asistentes Matemáticos

Según el artículo sobre *Actividades para el Aula con Derive*, lo primero que hay que tener en cuenta es qué tipo de programas fueron diseñados para realizar cálculos y operaciones de manera automática y eficiente, no han sido diseñados para la educación. Inmediatamente cabe la pregunta £Para qué usarlos en el mundo de la educación?, teniendo en cuenta que el cálculo ha sido y es uno de los pilares fundamentales, no es banal, más bien al contrario, completamente necesaria en primer lugar para aclarar los objetivos que se quieren alcanzar y posteriormente precisar cómo se pueden conseguir.

Cuando se pretende aplicar un concepto es indispensable comprenderlo, es decir identificar en qué situaciones aparece y qué ventajas puede aportar su uso. Su significado no es inmediato, sino que se requiere el reconocimiento en diferentes situaciones, lo que significa dar relevancia a la verdadera comprensión, por encima de aplicaciones mecánicas que no tienen gran valor.

En el caso de los procedimientos de cálculo, además de dominar el proceso a seguir es necesario conocer en qué situaciones se puede aplicar y saber interpretar sus resultados. Estos programas ofrecen facilidad y rapidez de cálculo.[3]

Teniendo una idea sobre lo que son los asistentes matemáticos. Nos centraremos en hacer una breve descripción del programa computacional Derive y en segunda medida la aplicación Geogebra.

3.4.1.1. Programa de Álgebra Computacional Derive

Es un programa de matemáticas para computador. Procesa variables, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores y matrices al igual que una calculadora científica, sirve para trabajar con números. Derive puede realizar cálculos numéricos y simbólicos; con álgebra, trigonometría y análisis, así como representarciones gráficas en dos y tres dimensiones. Derive se encarga de los aspectos mecánicos y los

[2]La tercera fase consiste en llevar a cabo el plan, para ello se debe disponer de una estrategia diseñada, es decir se debe describir el plan ideado en términos precisos, de tal manera que cualquier persona novata en cuanto al manejo de los computadores, pueda seguir al pie de la letra las instrucciones para llevar a cabo las actividades, En cuanto al computador, se debe construir algoritmos, que debe expresarse en términos de un lenguaje concreto, muy conciso y formal.

[3]Garcia, A y Otros. Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Síntesis.

algoritmos de la resolución de problemas. Los estudiantes pueden concentrarse en el significado de los conceptos matemáticos. [2].

3.4.1.2. GeoGebra

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo. Su categoría más cercana es "software de geometría dinámica" [del inglés: DAS]. Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, entre otras. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc. [11]

3.5. Marco Metodológico

3.5.1. Constructivismo y Aprendizaje Significativo

> *El principio fundamental es el conocimiento, siendo el conocimiento una construcción del ser humano en comunidad. Construcción que depende de las creencias y suposiciones básicas que se poseen acerca de sí mismo, de la naturaleza y la sociedad (Rómulo Gallegos, 2005). [4]*

Diversos autores han manifestado que es mediante la realización de aprendizajes significativos que el estudiante construye "significado" que enriquece su conocimiento del mundo físico y social, potenciando así su crecimiento personal. Se postulan tres aspectos claves que favorecen el proceso instruccional: el logro del aprendizaje significativo, la memorización comprensiva de los contenidos escolares y la funcionalidad de lo aprendido.

Desde esta teoría, se rechaza la concepción del educando como simple receptor o reproductor de los saberes culturales; la escuela juega un rol importante como generadora de espacios que permiten que el estudiante construya una identidad personal en el marco de un contexto social y cultural específico, cuya finalidad es que el educando desarrolle la capacidad de realizar aprendizaje significativo, por sí solo en medio de una variedad de situaciones y circunstancias, lo que se denominaria "Aprender a aprender".

3.5.2. Aprendizaje Significativo

Para clarificar más la idea sobre aprendizaje significativo, es pertinente citar a Ausbel(1983), quién manifiesta que:

> *Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente*

> *específicamente relevante en la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un simbolo ya significativo, un concepto o una proposición. [4]*

Ausbel plantea que el aprendizaje del estudiante depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse 'estructura cognitiva', al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

Lo que quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe, de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información 'se conecta' con un concepto relevante, es decir que las nuevas ideas, conceptos o proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de anclaje a las primeras.

A continuación se dan a conocer a groso modo, las fases del aprendizaje significativo.

Fases del Aprendizaje Significativo en el proceso aprendizaje:

- *Primera fase*: El estudiante percibe nueva información y la interpreta utilizando su conocimiento esquemático.
- *Segunda fase*: Encuentra relación e inicia una reflexión acerca de estos nuevos conceptos, siendo posible utilizarla en la solución de tareas.
- *Tercera fase*: El estudiante acumula la información y puede hacer uso de ella cuando lo necesite.

Es fundamental tener presente que el aprendizaje debe ser continuo y que estas fases deben ser graduadas. Tanto docentes como estudiantes debemos tener claro en qué fase nos encontramos para ir reforzando y disciplinándonos en este proceso de aprendizaje significativo.

3.6. Temática de la propuesta

La temática a abordar en la propuesta se enfoca en el trabajo de las transformaciones en el plano, a partir de las matrices. Para ello se lleva a cabo una serie de actividades de forma sistemática, que inducen al estudiante a la adquisición del concepto que se pretende desarrollar; teniendo en cuenta el aprendizaje significativo, los nivel establecidos por los esposos Van Hiele y apoyados en una herramienta poderosa como lo son las Tics, se plantea una serie de actividades diseñadas para proponerlas a estudiantes de grado noveno de básica secundaria.

3.6.1. Objetivo

Introducir al estudiante de grado noveno, en el aprendizaje significativo en lo que concierne a la generación de procedimientos que permiten construir diferentes tipos de matrices y se muestre didácticamente los cambios que se producen en ellas al efectuar operaciones algebraicas, de esta manera se pueda entender de forma innovadora, que muchos de los procedimientos que se aprenden mecánicamente no son sino consecuencias de efectuar operaciones algebraicas con una matriz, lo cual permite establecer un enlace que facilita entender los movimientos internos que se pueden producir en las matrices, utilizando como herramienta el programa computacional Derive.

3.6.1.1. Objetivos Específicos:

- Desarrollar en el estudiante de grado noveno el concepto de matriz y posteriormente la aplicabilidad de ésta en transformaciones geométricas, a través del programa computacional Derive y GeoGebra, este último como ayuda visual.
- Guiar al estudiante tanto en el aspecto técnico del manejo del programa computacional Derive, como en el aspecto pedagógico de la ruta a seguir para lograr los objetivos didácticos de cada actividad.
- Siguiendo la corriente constructivista en cuanto al aprendizaje matematico se refiere, el programa computacional Derive, a lo largo de la cartilla se toma como una herramienta util para descubrir resultados, comprobar conjeturas, comparar hipótesis, entre otros. Todo ello con la orientación del profesor.

3.6.2. Estructura de las actividades

Para el diseño de los talleres se tiene en cuenta los procesos generales de la actividad matemática que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas , los Niveles de Van Hiele, así como las Fases del Aprendizaje Significativo en el proceso aprendizaje. Las actividades planteadas se combinarán con el manejo del programas computacional Derive y en los dos últimos talleres el software GeoGebra. Las actividades presentan una estructura general acorde a las fases: Objetivo, recuadros informativos o de conceptualización, en algunos talleres se presentan ejemplos para iniciar los ejercicios, posteriormente los ejercicios propuestos, entre ellos tenemos ***"Hazlo con Derive"***

- **Objetivo**: finalidad de la actividad

- **Recuadros Informativos**: Definición del concepto matemático que se pretenda formalizar.
- **Ejemplos**: Se muestran ejercicios resueltos, previos a los ejercicios propuestos.
- **Ejercicio**: Se propone aplicar lo visto, presentado de manera didáctica.
- **Hazlo con Derive**: Son ejercicios propuestos para realizar en Derive de forma rápida, dichos ejercicios primero se realizan manualmente y luego se comprueban mediante este programa.
- **DERIVE**: Aparece de forma llamativa, allí el estudiante bajo la guía del docente debe realizar los ejercicios propuestos, con el fin de generar matrices especiales. El estudiante se verá abocado a conjeturar posibles resultados, a realizar un análisis elemental de la función expuesta, asi como de llegar a conclusiones.

3.6.3. Descripción e intensionalidad de algunas de las actividades propuestas.

A continuación se dan a conocer algunas actividades que contienen la propuesta y la ubicación dentro de los Niveles de Van Hiele:

En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con el objeto de estudio, en este caso las matrices, el razonamiento se basa en la consideración global del concepto, como modelo de situaciones, haciendo un acercamiento utilizando como estrategia el juego. La primera actividad es fundamentalmente visual y manipulativa.

La necesidad de un razonamiento de tipo visual motiva a que el estudiante logre una mejor comprensión del concepto.

Indicadores

1. *Identificación de características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana.*

1. JUGUEMOS!!!

Objetivo: identificar los elementos de una matriz, utilizando el juego "Batalla Naval".

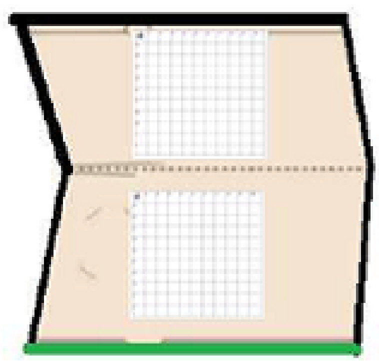
Materiales: Carpeta de cartón, dos hojas con formato (Figura 1), marcador o esfero.

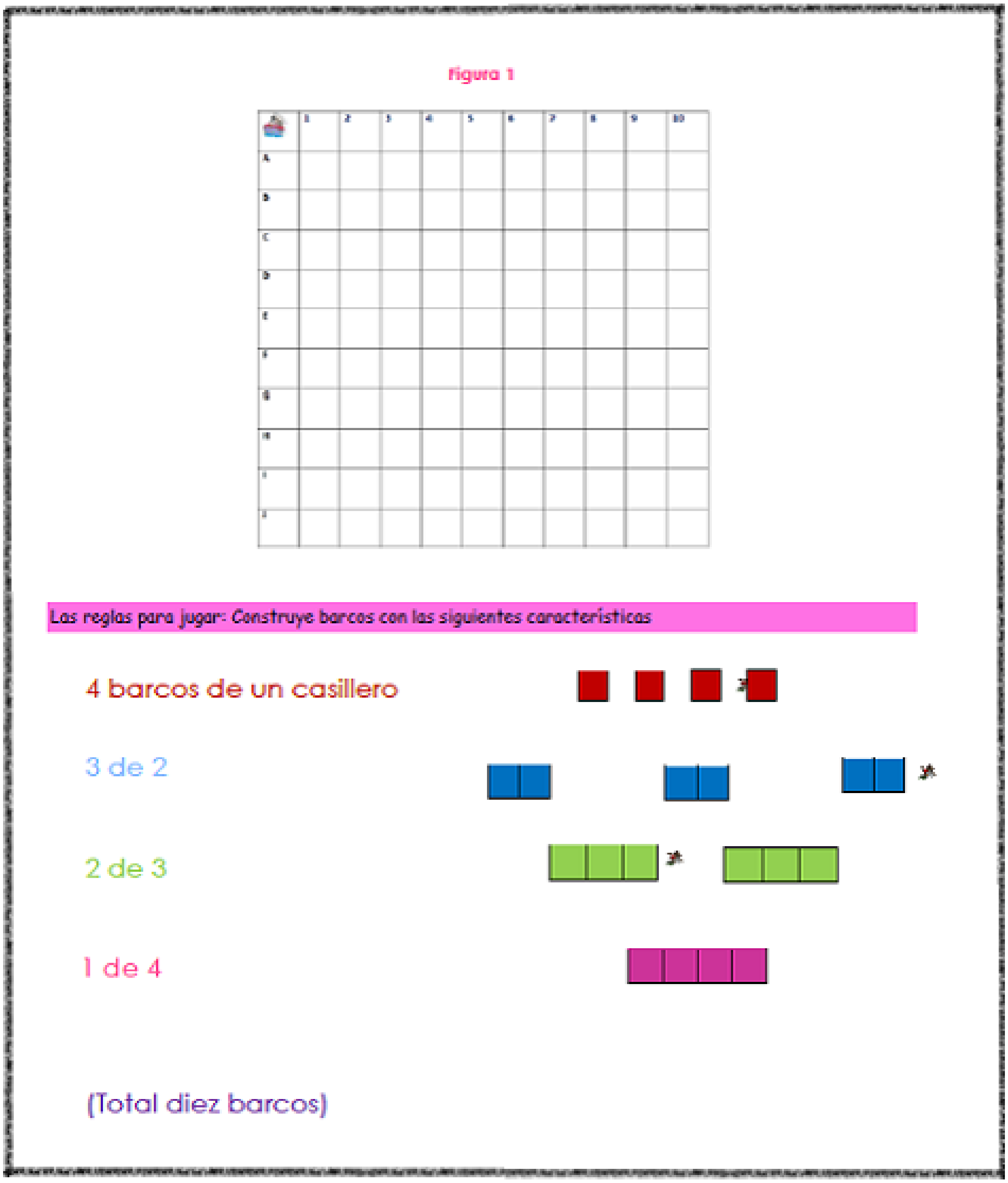
Ejercicio 1:

Conforma un equipo de juego con uno de tus compañeros (quien será tu contrincante en el juego). Ahora ubíquense tal y como se muestra en la figura.

Una vez se ubiquen uno frente al otro, cada jugador debe tener su respectivo material, el cual consta de una carpeta de cartón, así como se indica.

... en cuyas caras internas se encuentra el formato, que se muestra en la figura 1.





2. Percepción global de la ubicación de objetos, teniendo en cuenta las reglas para la posición de los mismos sobre el plano cartesiano.

Matrices y Transformaciones

- El barco más pequeño que dibujó Homero, se encuentra ubicado en la casilla________________.
- Para impacta el barco grande, hasta hundirlo completamente, se debe apuntar hacia las siguientes casillas:____________
- Si el contrincante lanza su ofensiva sobre la casilla que tiene como coordenadas, horizontal 10 y vertical 8. ¿Logra impactar el barco?
- Con una equis ( ), se muestran los impactos que uno de los barcos enemigos produjo.
- Identifique las casillas de los barcos hundidos completamente.

- El Nivel 2: Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Dichas propiedades van siendo comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etc. En el nivel 2, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras, piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con esas figuras.

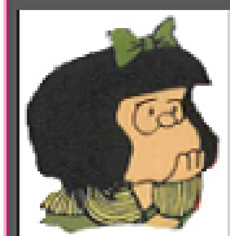
Indicadores

1. *Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de las propiedades que caracterizan las matrices.*
2. *Utilización de la notación y vocabulario matemático para identificar o referirse al tamaño de la matriz, para dar a conocer un tipo especial de matriz, para nombrar los elementos de la matriz.*

4. PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

OBJETIVO: REFORZAR CONCEPTOS APRENDIDOS EN LOS ANTERIORES TALLERES E IR FORMALIZANDO NOTACIÓN PROPIA DE LAS MATRICES.

Recuerda que...



una matriz es un arreglo ordenado de números en forma rectangular. El orden de una matriz es el número de filas y columnas que forman la matriz. Si una matriz tiene m filas y n columnas de m X n. Observa el ejemplo que se muestra a continuación:

$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ La matriz M tienen dos filas y tres columnas, por lo tanto es de orden (2X3)

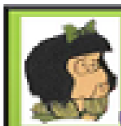
Ejercicio 1

a. De acuerdo a la información suministrada. Relaciona con una flecha la columna de la izquierda con la columna de la derecha, según corresponda. Observa el ejemplo:

- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} = A$
- $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} = D$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = C$
- $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 45 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 9 \\ -6 & 1 & 46 \end{pmatrix} = F$
- $\begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 12 & -5 & 11 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

- (4×3)
- (3×3)
- (3×4)
- (3×1)
- (5×5)
- (1×3)

Recuerda...



Una matriz cuadrada es aquella matriz cuyo número de filas y de columnas es igual.

Figura 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cuadrada } (4 \times 4)$$

b. En el programa computacional derive, representa las matrices.

c. Determina cuál o cuáles de éstas son cuadradas.

d. La matriz que se muestra en la **Figura 1**, es una matriz cuadrada, de orden (4x4). Menciona los elementos que conforman la diagonal principal de la matriz, dando a conocer simbólicamente su posición en la matriz. Por ejemplo el número 5 es a_{23}, es decir el número 5 está en la fila 2, columna 3. Continúa con el ejercicio.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

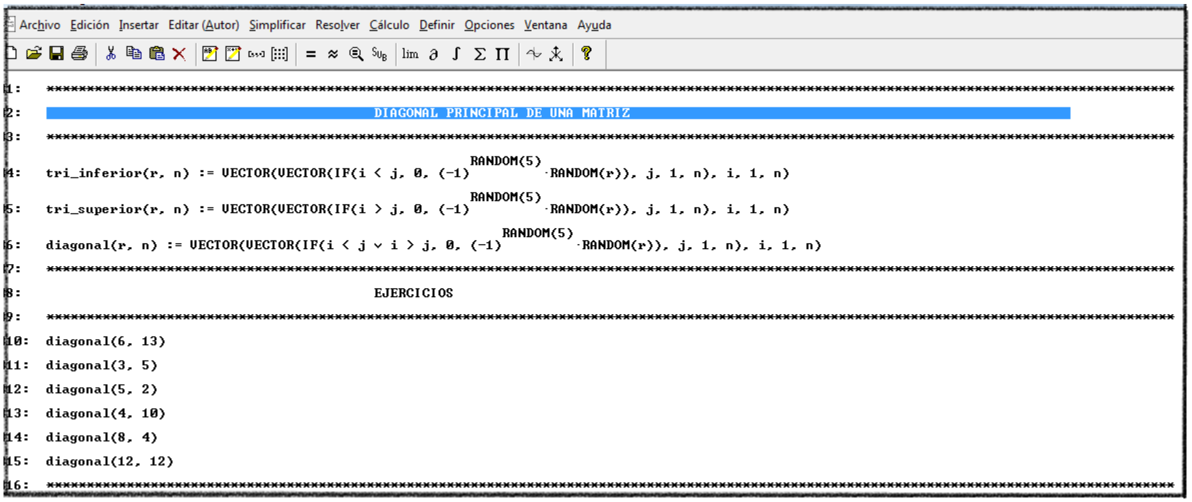
Figura 2

Ejercicio 2

Observa la matriz que se muestra en la Figura 2 y de acuerdo a esta contesta:

a. ¿ Es un cuadrado mágico?. Muestra que las suma de sus columnas, filas y diagonales son iguales.
b. ¿Qué pasa si se multiplica cada componente por 2?¿Seguirá siendo cuadrado mágico?.
c. Da a conocer la posición de cada componente de la matriz. Ejemplo: a_{32}, 9.

La imagen que se muestra a continuación es un pantallazo del programa computacional DERIVE, corresponde a una sección de algunas actividades propuestas, con el fin de que el estudiante genere matrices especiales, a partir de una función dada.



- El Nivel 3: Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificada, pero sólo con ayuda y guía . Los estudiantes pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones. Se empiezan a establecer las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

Indicadores

1. *Obtener y aplicar directamente transformaciones en el plano, a partir del concepto de matriz estudiado.*

2. *Extender la relación directa entre operaciones de las matrices con las transformaciones en el plano.*

6. TRANSFORMACIONES Y MATRICES

Objetivo: *Aplicar transformaciones en el plano, operando matrices entre sí, así como un vector y una matriz.*

Las matrices se pueden considerar como transformaciones de los vectores. Al multiplicar por una matriz. Un vector se transforma en otro vector.

De esta manera:

Primero debes aprender cómo se multiplica un vector por una matriz.

Observa el ejemplo:

Al multiplicarla matriz $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, éste se transforma en el vector $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

El vector se multiplica por la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Se transforma en el vector $\begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix}$ ...

Calcular el producto $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Para obtener la primera entrada se multiplica la primera fila de la matriz (3, -6), por el vector:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aquí se señala el procedimiento:

Realizando las operaciones indicadas, se obtiene el valor de la primera componente del vector resultante.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + & ((-6 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$$

Para obtener la entrada en la segunda fila de $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, se multiplica la segunda fila (5,2) de la matriz, por la segunda fila del vector, o sea 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \\ (1 \times 5) + \quad (2 \times 2) \end{pmatrix}$$

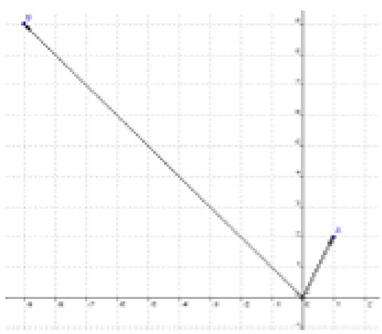
Realizando las operaciones indicadas, se obtiene la segunda componente del vector resultante:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \\ (1 \times 5) + \quad (2 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 5 + \quad 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 9 \end{pmatrix}$$

Se concluye que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gráficamente, se puede observar la transformación:



Ejercicio 1

Sea la $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Hallar el vector que resulta, calculando el producto

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

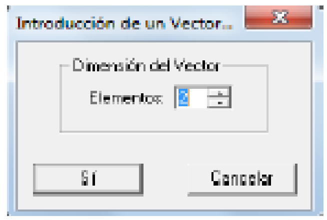
(Realiza el procedimiento indicado en el ejemplo anterior).

Ejercicio 2

Hazlo en Derive

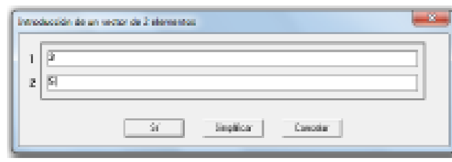
1. Genera la matriz $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ en Derive. El siguiente paso es generar el vector.

2. Oprime el icono, con el fin de genera el vector $\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}$. Aparecerá el recuadro mostrado en el *Cuadro 1*



Cuadro 1

3. Selecciona "2", como número de elementos. Y luego oprime Sí. *A* continuación aparecerá el recuadro. En el cual se colocan los elementos del vector. *Cuadro 2*



Cuadro 2

4. Se oprime Sí e inmediatamente aparece en la pantalla el vector [3, 5], representado como un punto.

Cuadro 3

5. Una vez generada la matriz y el vector, se seleccionan y se oprime F3. En la barra se tendría: *Cuadro 3*.

6. Posteriormente vas a la barra superior, oprimes $=$, en la pantalla aparecerá el vector que resulta de $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$.

7. Compara el resultado obtenido que obtuviste realizando los cálculos de manera manual y el resultado obtenido en Derive.

Ejercicio 3

Haz lo mismo con los siguientes productos que se muestran a continuación. 

$$\begin{bmatrix}-2 & 7\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot[3, -1]$$

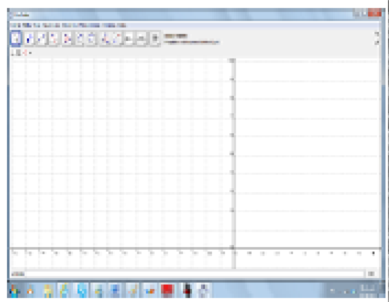
$$\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\cdot[2, 4]$$

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}\cdot[-1, 2]$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot[-1, 2]$$

Ejercicio 4 GRAFICA EN GEOGEBRA 

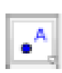
Grafica el vector inicial y el vector resultante que obtuviste al utilizar Derive en el Ejercicio 2, Hazlo para cada uno de los ejercicios propuestos en el Ejercicio 3.



PRESENTACIÓN PANTALLA DE GEOGEBRA

Sigue las instrucciones:

1. Reconoce GEOGEBRA

2. Debes dar clic en el icono , para ubicar el punto sobre el plano cartesiano que muestra la pantalla del programa.

3. oprime , para unir el origen (0,0) con el punto (x, y) así obtendrás el vector.

4. Ubica el vector que se da inicialmente y también el vector que resultó de realizar el producto matricial.

Bibliografía

[1] D'Amore, B.(2006). Didáctica de la Matemática. Colombia: Editorial Magisterio.

[2] Castro, I. (1997) Cómo hacer matemática con Derive. Colombia: Editorial Reverté.

[3] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

[4] Díaz, F. y Otros. (2002). Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. México: Mc Graw-Hill Interamericana. Editores, S.A.

[5] Sarria, H. Teoría Avanzada de Matrices [Notas de Clase]. Colombia: Universidad Nacional de Colombia, Bogotá: Departamento de Matemáticas.

[6] El Álgebra del siglo XIX: Matrices y Determinantes. (2012). Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia %20y %20Filosofia/Parte6/Cap20/Parte04_20.htm

[7] Boyer, C. B. (1994). Historia de la Matemática. España: Alianza Editorial.

[8] *O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (2011). Historia de las matrices. Recuperado de http://palillo.usach.cl/Pamela/historia.htm*

[9] Ministerio de Educación Nacional. (2012). Altablero. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87408.html

[10] Cajaraville, J.(1989). Ordenador y Educación Matemática. España: Editorial Síntesis.

[11] Wikipedia la enciclopedia libre. (2011) GeoGebra. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

[12] Transformaciones geométricas en la historia . Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/31 %20Moriena.pdf

[13] Horn, R. A. y Otros.(1992). Matrix Analysis. Estados Unidos: Cambridge University Press.

[14] Instituto de Matemáticas. Universidad Austral de Chile. (2010). Transformaciones lineales. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/13273741/Transformaciones-Lineales.

[15] Alvarez, Y. (2005). Operadores Lineales Que Preservan Simetría y Antisimetria. Tesis. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia.

[16] García, M. A. y Otros.(2006). Didáctica de la Geometría Euclidiana. Colombia: Magisterio.

[17] Sánchez, M.J. (2006). Geometria interactiva aplicada al estudio de los movimientos en el plano. Guía del profesor. Recuperado de http:/concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/guia_profesor.pdf

Capítulo 4

ANEXOS

CARTILLA: *ENSEÑANZA DE LAS MATRICES A TRAVÉS DE DERIVE*.

La cartilla se compone de las siguientes actividades:

1. JUGUEMOS!!!

2. CUADRADOS MÁGICOS

3. DESCUBRE LA DIAGONAL DE UNA MATRIZ

4. PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO

5.£QUÉ ES UN VECTOR?

6. TRANSFORMACIONES Y MATRICES

7. MATRICES Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

8. DIVIÉRTETE