I. Construccion del numero e a partir de la sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

A. Algunos elementos para esta construccion.

Dare en este punto algunos elementos teoricos necesarios para el estudio de las sucesiones de terminos constantes. Como el trabajo no se refiere especificamente al estudio de este tipo de sucesiones, solo dare las definiciones que considero necesarias y enunciare los teoremas que se utilizaran.

a1. Definicion:

Una sucesion es una funcion cuyo dominio es el conjunto de los numeros naturales.

a2. Definicion:

Sea $\{a_n\}$ una sucesion. Entonces:

i) Diremos que es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Diremos que es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a21. Observaciones:

i) Si una sucesion es creciente o si es decreciente, se dice que la sucesion es monotona.

ii) Si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesion es estrictamente creciente.

iii) Si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesion es estrictamente decreciente.

a3. Definicion:

Una sucesion se dice acotada si y solo si tiene una cota superior y una cota inferior.

a4. Definicion:

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite L si, para cada numero positivo ϵ, existe otro numero positivo N (que en general depende de ϵ) tal que

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

En este caso decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es convergente y converge hacia L, y escribiremos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

a5. Teorema:

Toda sucesion monotona y acotada es convergente.

B. Estudio de la sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Demostraremos en esta parte que esta sucesion es monotona y acotada.

b1. La sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es monotona.

En efecto: Desarrollemos $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ usando el binomio de Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1.2.3.\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1+1+\frac{n^2-n}{1.2.n^2}+\frac{(n^2-n)(n-2)}{1.2.3.n^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(n^2-n)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1.2.\cdots n.n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

Todos los terminos en el lado derecho de (1) son mayores o iguales a cero, ya que si $n=1$ todos los terminos despues del segundo se hacen cero y para $n>1$ se tienen terminos de la forma $1-\alpha$, $\alpha<1$.

Ademas cuando pasamos de n a $n+1$ todos los terminos de (1) despues del segundo crecen:

$$\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

-------- etc.

Es decir $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$,

Luego la sucesion es creciente y por lo tanto monotona.

b2. La sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es acotada.

b21. Veamos que tiene cota inferior.

De la igualdad (1) es claro que 2 es cota inferior puesto que la sucesion es creciente y el menor valor que toma es 2, i.e.

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

b22. Veamos que la sucesion tiene cota superior.

Teniendo en cuenta que:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<1,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1, \ldots, \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1$$

de lo igualdad (1) se tiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots.n}$$

ademas como

$$\frac{1}{1.2.3}<\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1.2.3.4}<\frac{1}{2^3}, \ldots\ldots, \frac{1}{1.2\ldots.n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

entonces

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right] \qquad (2)$$

Los terminos entre corchetes de la desigualdad (2) forman una progresion geometrica con razon, $r=1/2$ y primer termino, $a=1$, por lo tanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{a-ar^n}{1-r} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

La parte derecha de esta desigualdad es menor que 3, ya que cuando n crece indefinidamente el termino entre corchetes se aproxima a 2, luego $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$; E.d. 3 es cota superior de la sucesion.

De b21 y b22 podemos concluir que la sucesion es acotada ya que:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Hemos probado entonces que la sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es monotona (b1) y acotada (b2).

C. Construccion de e.

Ahora construiremos el numero e a partir de la sucesion $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Como ya lo hemos probado esta sucesion es monotona y acotada, por lo tanto es convergente (Teorema a5), es decir tiene limite y a este limite se le nota e. O sea que se define e como sigue:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e1. Observacion.

El numero e esta entre 2 y 3. Veamoslo:
De la desigualdad (3) se tiene

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad , \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} 2 \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n\to\infty} 3$$

es decir

$$2 \leq e < 3$$

Un valor de e con diez cifras decimales es: $e = 2.7182818284\ldots$

e2. Veamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, para $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$,

$x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$.

Antes de hacer esto veamos que la funcion $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tiene

como limite a e cuando $|x|$ crece indefinidamente.
Ya hemos visto que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, si $n \in \mathbb{N}$. Supongamos ahora que $|x|$ crece indefinidamente tomando valores fraccionarios y enteros.

1. Supongamos que $x \to \infty$.

Cada valor de x se halla entre dos enteros positivos

$$n \leq x \leq n+1 \quad , \; n \in \mathbb{N}.$$

entonces

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1} \quad , \; n \in \mathbb{N}.$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} \geq 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Si $x \to \infty$, es claro que $n \to \infty$ $(n \leq x \leq n+1)$. Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.1. = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

Llevando estos resultados a (1) se tiene:

$$e \geq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \geq e.$$

Es decir
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2. Supongamos que $x \to -\infty$.

Introduzcamos una nueva variable $t = -(x+1)$
o sea $x = -(t+1)$. Cuando $t \to +\infty$, tenemos que $x \to -\infty$.
Entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.1 = e.$$

Queda asi demostrado que la funcion $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tiene como limite a e cuando x tiende al infinito. Este resultado sera usada en los siguientes puntos. (*)

Ahora si veamos que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, para $x\in N$, $x\in Z$, $x\in Q$, $x\in \mathbb{R}$.

e21. Si $x\in N$.

Introduzcamos la variable $t = n/x$, es claro que $t\to\infty$ si y solo si $n\to\infty$; luego

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{tx} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^x$$

$$= \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^x, \text{ ya que } x\in N$$

$$= e^x, \quad (*)$$

e22. Si $x\in Z$.

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

1. Si $x \in \mathbb{N}$, ya se probó en @21.

2. Si $x = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 = e^0 = e^x.$$

3. Si $x \in \mathbb{Z}^-$

Hagamos $x = -a$, $a \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{tx} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-ta}$$

$$= \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-a} = \frac{1}{\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{ta}}$$

$$= \frac{1}{e^a} = e^{-a} = e^x.$$

@23. Si $x \in \mathbb{Q}$.

Como $x \in \mathbb{Q}$ entonces $x = r/s$, $s \neq 0$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}^+$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{sn}\right)^n$$

Definamos $t = sn$, es claro que $t \to \infty$ si y sólo si $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{ns}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{r}{t}\right)^{t/s} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{r}{t}\right)^t\right]^{1/s}$$

La ultima igualdad ya que $s \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = (e^r)^{1/s} = e^{r/s} = e^x.$$

e24. Si $x \in \mathbb{R}$.

Para esta parte haremos uso del hecho siguiente:
Dado $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesion de racionales $\{r_m\}$ que converge a x. Mas concretamente existe una sucesion creciente y una sucesion decreciente de racionales que convergen a x.

Sea $\{r_m\}$ una sucesion creciente de racionales tal que $\lim_{m\to\infty} r_m = x$.

Veamos que $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Usando el binomio de Newton:

$$\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n = 1 + r_m + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{r_m}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{r_m}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{r_m}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n\right| = \left| x - r_m + \frac{n(n-1)}{2}\left[\left(\frac{x}{n}\right)^2-\left(\frac{r_m}{n}\right)^2\right]\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left[\left(\frac{x}{n}\right)^3-\left(\frac{r_m}{n}\right)^3\right]+\cdots$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{x}{n}\right)^n-\left(\frac{r_m}{n}\right)^n\right|$$

* ya que $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = x$

Cuando $m\to\infty$ el lado derecho de esta igualdad tiende a cero; luego queda probado que

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Ahora deseamos probar que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n = e^{r_m}$, por C23.

Luego dado $\epsilon>0$, existe N_1 tal que si $n\geq N_1$ entonces $\left|\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n - e^{r_m}\right| < \frac{\epsilon}{2}$

entonces $\lim\limits_{m\to\infty}\left|\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n - e^{r_m}\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

Es decir $\left|\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_m}{n}\right)^n - \lim\limits_{m\to\infty} e^{r_m}\right| < \epsilon$

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| < \epsilon, \text{ si } n\geq N_1.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$