



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**La integral definida en la noción de
efecto acumulado.
Una mirada para la formación en los
primeros semestres de la Universidad**

Oscar Orlando Ortiz Corredor

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2013

**La integral definida en la noción de
efecto acumulado.
Una mirada para la formación en los
primeros semestres de la Universidad**

Oscar Orlando Ortiz Corredor

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Doctor en Matemáticas Leonardo Rendón Arbeláez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2013

Dedicatoria

*A mi mamá María Concepción,
A mi papá Florentino,
A mi esposa María Carlina,
A mis hijas Laura Camila y Mariana Lucía,
A mis sobrinas y sobrinos,
A mis hermanos.*

*Es por ellos que mi vida se llena de felicidad y
son la manifestación de un Cristo que imparte
amor.*

Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud especialmente a los profesores de esta grandiosa universidad, Leonardo Rendón director del trabajo de grado, Crescencio Huertas, César Gómez asesores constantes, y Clara Helena Sánchez directora de la maestría, pues con sus sabias orientaciones e inquebrantable ánimo aportaron a la construcción de estas ideas en pro del mejoramiento de la educación matemática en Colombia.

A mi esposa y mis hijas les quedo en deuda, no obstante mis agradecimientos tiendan al infinito, al igual que a mi papá, mamá y toda mi familia. Gracias especialmente a mi esposa, porque esperó con paciencia la culminación de este proceso que nos ha hecho crecer como personas.

Gracias a todos mis compañeros de trabajo, fundamentalmente a Armando Echeverry profesor de la Universidad Jorge Tadeo Lozano y del Colegio Toberín I.E.D., Yency Díaz profesora del Colegio Sans Façon y Ricardo Gómez profesor del Colegio Sans Façon y del Colegio Divino Maestro I.E.D. Ellos valoraron estas ideas e hicieron aportes valiosos a las mismas, especialmente en los aspectos didácticos para aproximarse a la noción de efecto acumulado.

Resumen

El tema que se desarrolla en esta propuesta de acción pedagógica, aporta ideas para ayudar a solucionar uno de los problemas planteados en la Educación Matemática, referente a la caracterización de una posible intervención didáctica en el aula de clase, que procure el equilibrio entre el estudio, de lo que puede denominarse, la teoría de la integración y el conocimiento de estrategias o técnicas de integración.

Un primer elemento que se tiene en cuenta, es el enfoque histórico-epistemológico del conocimiento matemático, donde por medio de la descripción evolutiva de los conceptos, se identifican algunos obstáculos en el avance del saber, originados principalmente por el paradigma de la época y el desarrollo conjunto de otros conceptos asociados.

En segundo lugar, con base en algunos planteamientos clave de la Socioepistemología, entre ellos, asumir la enseñanza de la matemática de manera contextual y realizar estudios empíricos que muestren propuestas didácticas óptimas para la comprensión de los conceptos, se centra el interés en diseñar una motivación para el estudio de la integral definida, basada en algunas prácticas sociales cotidianas como predecir la acumulación de efectos locales. Esta vía es alternativa y complementaria de la causa original correspondiente a la cuadratura de curvas.

Se asume que esta aproximación al concepto, acompañada del uso de herramientas informáticas que favorezcan la transformación de las diferentes representaciones de la integral, contribuirá a una mejor interpretación de su significado y uso en la solución de situaciones problema relacionadas con el cálculo de efectos acumulados.

Palabras clave: Integral definida, integración, efectos acumulados, integración numérica, prácticas sociales, representaciones de la integral.

Abstract

The topic to be developed in this pedagogical proposal seeks to provide ideas that actively aid in one of the problems raised in the education of Mathematics regarding the characterization of a didactic intervention in the actual classroom that provides some balance between the study of what may be called The Theory of Integrates and Strategy Knowledge or Integration Techniques.

One of the first elements to take into account is the historic-epistemologic focus of mathematical knowledge, which by evolutionary description of concepts, identifies some obstacles in the pursuit of knowledge, originated mainly by the paradigm of the epoch and development alongside other associated concepts.

Secondly, based on some key ideas of Socioepistemology, among them for instance, the one that states that Mathematics teaching is contextual and there must exist empirical studies that show didactic proposals aimed to archiving concept understanding; the interest of this work was focused on designing a way to motivate the study of the defined integrate based on everyday social practices such as the prediction of accumulated local effects. This way is alternative as it complements the original cause corresponding to the curve quadrature.

It is assumed that this approximation to the concept, accompanies the use of computer tools that favor the transformation of different integrate representations and contributes to a better interpretation of its meaning and use in the solution of problematic situations related to the calculus of accumulated effects.

Key Words: defined integrate, integration, accumulated effects, number, integration, social practices, integrate representations.

Contenido

	Pág.
Resumen	VII
Abstract	VIII
Introducción	2
1. Algunos aspectos históricos y epistemológicos de la integración	7
1.1 Aportes en la etapa pre-helénica.	7
1.2 Contribuciones de los griegos.....	8
1.3 Aportes en la Europa medieval.....	13
1.4 Contribuciones en los siglos XVII y XVIII. Antecesores de Newton y Leibniz.	16
1.5 El período de Newton y Leibniz	25
1.6 Evolución de la integración con la entrada del concepto de función.....	31
2. Aspectos disciplinares	35
2.1. Nociones matemáticas necesarias para el desarrollo de la propuesta	35
2.1.1. Conocimientos previos.	35
2.1.2. Conceptos asociados al desarrollo del esquema de integral definida.	36
2.2. Aproximaciones didácticas. Descripción de algunos elementos teóricos.	67
2.2.1. Una perspectiva desde la transmisión social del conocimiento matemático.....	67
2.2.2 Un punto de vista para el diseño instruccional.....	70
3. Propuesta didáctica	74
3.1. Objetivo general.	74
3.2. Secuenciación.....	74
3.3. Plan de actividades.	75
4. Conclusiones y proyección de la propuesta	95
4.1 Conclusiones.....	95
4.2 Proyección de la propuesta	96
Anexo A: Descripción de algunas actividades para el desarrollo de las unidades de aprendizaje.	97
Bibliografía	121

Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral merecen una reflexión especial, con su correspondiente toma de decisiones, por parte de los docentes de matemáticas, específicamente, en lo que corresponde al diseño de propuestas que mejoren la conceptualización de la integral definida. Estudios en educación matemática como los que se mencionan a continuación, muestran la existencia de una gran dificultad en la comprensión profunda de los conceptos de integración, sus interpretaciones y aplicaciones. Esto evidencia la realidad de una distancia, entre el avance teórico-conceptual alrededor de la integral definida y lo meramente procedimental; es decir, entre la comprensión de la integral de Riemann y el aprendizaje de las estrategias de integración para el cálculo de primitivas elementales.

De acuerdo con Orton [17] los estudiantes que se inician en la teoría de integración, muestran niveles aceptables de comprensión del cálculo de primitivas y la obtención de respuestas a aplicaciones simples. Quezada en 1986, Artigue en 1998 y Cantoral en el 2000¹, concuerdan que existe una disyunción entre la comprensión de los conceptos y las estrategias (o algoritmos) del cálculo integral, dado que prevalece el estudio de los algoritmos, sobre el discernimiento de las nociones básicas y fundamentales de la integral definida. De la misma manera Muñoz [16] señala que “a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de ejercicios repetitivos y de una manera separada de la parte conceptual...” (pág 27). Según Cordero en el 2003²:

“El profesor y el estudiante, aprenden a “decir” lo que es la integral y su representación geométrica (área bajo la curva); sin embargo, difícilmente alcanzan a mirar una metodología que les permite estudiar fenómenos de variación continua, sólo la conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación”.

¹ Citados en Cabañas y Cantoral [4]

² Citado en Muñoz [16]

En el mismo sentido, Artigue en 1991 expresa³, “los estudiantes pueden calcular primitivas más bien que integrar... por ejemplo cuando se les enfrenta con un problema típico de integración muy pocos estudiantes lo reconocen como tal”.

Por otra parte, con los estudiantes del grado once del colegio Toberín I.E.D. del año 2013, se puede observar que el cálculo de primitivas no representa un gran problema de enseñanza⁴ como se evidencia en la siguiente tabla de resultados de una evaluación asociada a estos procesos:

Evaluación de ejercicios de integrales indefinidas 1102T 18 de abril de 2013				
Escala Notas	f	Fr %	Promedio de notas por escalas	Coficiente de Variación de las notas por escalas %
4,0 a 5,0	9	24	4,43	7
3,0 a 3,9	21	55	3,29	10
Menos de 3,0	8	21	1,73	37
Total del grupo	38	100	3,23	31

Pero, al adentrarse en el camino de la conceptualización teórica de la integral definida, en los momentos de las actividades propuestas por el docente con respecto a la integral de Riemann, se observó y confirmó que los conocimientos previos como, el axioma de completez, el paso al límite y las propiedades relacionadas con la noción de área de una región plana o una superficie⁵, aún no se encontraban lo suficientemente integradas como conocimiento previo; como consecuencia, representaron un verdadero impedimento en la comprensión de los fundamentos conceptuales del cálculo integral.

Frente a la complejidad del problema mencionado, con base en algunos principios y características de la socioepistemología expuestos por Cantoral [5], y ciertos enfoques fundamentados en un análisis histórico-epistemológico del conocimiento como el trabajo

³ Citado por Muñoz [16]

⁴ Sin desconocer que se deben superar algunas barreras de conocimientos previos relativos a la manipulación de expresiones algebraicas y el recuerdo de ciertos resultados en la derivación.

⁵ Tales como: la no negatividad, aditividad, exhaustión, entre otras.

de Turégano [21]; en este escrito, se pone en consideración de los profesores y estudiantes del Cálculo Integral, una propuesta didáctica, cuyos objetivos claramente son:

- Objetivo general: Construir una propuesta de acción pedagógica para la comprensión de la integral definida de una función acotada, en un intervalo subconjunto de \mathbb{R} .
- Objetivos específicos:
 - ✓ Identificar los aspectos fundamentales de la evolución histórica del concepto de integral definida de una función acotada, en un intervalo subconjunto de \mathbb{R} , para motivar su intervención didáctica en el aula de clase.
 - ✓ Apoyar la comprensión del proceso de integración, a través de la identificación de prácticas sociales que generan su conocimiento.
 - ✓ Fomentar el uso de herramientas informáticas como el software Geogebra o la hoja de cálculo Excel, para transformar las diferentes representaciones de un concepto matemático, como la integral definida de Riemann, y así favorecer el aprendizaje de la misma.

En esencia, la base didáctica de la propuesta, va de la mano con la noción de unidad de análisis planteada por Buendía y Montiel en el 2011⁶. Interpretando esta idea, se tienen en cuenta elementos como:

- La exploración intuitiva de la integral definida en un intervalo vía Riemann.
- La asociación de este objeto de estudio matemático con la práctica social de predecir un efecto acumulado.
- La intencionalidad explícita de transmitir este saber en pro de una re-significación de la integral definida en un intervalo, diferente a la práctica de referencia típica, relacionada con la cuadratura de curvas.

Se conjetura que de esta manera, la integral definida tendrá un uso más cotidiano en la resolución de problemas, cuyos enunciados requieran del cálculo del efecto acumulado de valores locales de una función. Tal función debe ser acotada, monótona, positiva y con

⁶ Citados por Calvillo [6]

discontinuidades numerables, en un intervalo determinado de su dominio, y al mismo tiempo, debe representar las razones de cambio de un fenómeno de interés.

Para terminar, es bueno mencionar que esta propuesta se piensa articular con el marco del plan sectorial de educación 2012-2016 de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá D.C., específicamente en el objetivo y la línea de acción correspondientes a la educación media fortalecida y mayor acceso a la educación superior. Con ellos se espera transformar el currículo de la educación media, en pro de la continuidad de los estudios superiores que puedan adelantar los estudiantes de colegios distritales, iniciando parte de su ciclo propedéutico en el colegio y después homologar las asignaturas correspondientes, en las universidades que firmen el respectivo pacto. Es por esta razón que en título de este trabajo se mencionan los primeros semestres de la universidad.

1. Algunos aspectos históricos y epistemológicos de la integración.

La configuración histórica de la conceptualización de la integral definida, no se escapa a los paradigmas sociales y científicos aceptados en las diferentes épocas, los cuales conforman lo que Muñoz [16] denomina el marco epistémico de un momento histórico: “Una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia”. En consecuencia, el marco epistémico puede obstaculizar el desarrollo de aquello que se encuentre por fuera de lo conceptualmente aceptado. Como es de suponer, para transformar y evolucionar el marco epistémico de la época, es necesario el rompimiento de los preceptos dominantes.

De acuerdo con esto, es crucial la descripción de algunos aspectos históricos fundamentales que han apoyado la evolución del significado de la integral definida, de manera que se puedan identificar algunas dificultades epistemológicas presentes en los diferentes estados de su maduración conceptual, e intentar emparejarlos con los niveles de conocimiento que paulatinamente van desarrollando los estudiantes.

1.1 Aportes en la etapa pre-helénica.

La motivación original que dio lugar a la evolución de la integral definida se encuentra en el cálculo de áreas y volúmenes. Según Turégano [21], en la época del papiro del Rhind⁷ (S. XVI a.C.), dadas las necesidades de recolección de alimentos y mediciones de terrenos, la sociedad se planteaba preguntas relacionadas con el cálculo de áreas, volúmenes y capacidades de los recipientes. Estas cuestiones originaron métodos de aproximación de áreas y volúmenes; no obstante, el nivel de abstracción desarrollado no les permitió diferenciar entre lo exacto y lo aproximado. A su vez, las preocupaciones de los babilonios registradas en las tablillas referentes al área, se relacionaron a cuestiones prácticas sin evidencia de un estímulo por la identificación de propiedades o

⁷ También llamado papiro de Ahmes

atributos de ésta y otras magnitudes, lo cual les hubiera permitido avanzar en la comparación y contraste de diferentes figuras. Esta etapa se puede relacionar con el nivel de aprendizaje concreto.

1.2 Contribuciones de los griegos

Por su parte los griegos más centrados en disertaciones filosóficas, teóricas, de exactitud del pensamiento y el deseo por conocer, abren paso a los primeros intentos por solucionar formalmente seis problemas fundamentales para la matemática: La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la razón entre magnitudes inconmensurables⁸, las paradojas sobre el movimiento y la validez de los métodos infinitesimales⁹.

De estas preocupaciones se originan: la prelación de la Geometría sobre la Aritmética, la introducción de métodos indirectos como el de Exhaución y la noción de superficie.

Teniendo en cuenta lo dicho por Boyer [3] y Turégano [21], se puede describir este método de la siguiente manera:

- Se basa en la propiedad que hoy se conoce como Arquimediana de los números racionales¹⁰. Esta expresa que si dos magnitudes tienen razón, es decir son del mismo tipo y ninguna de ellas es nula; entonces, se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra” Boyer [3]. En términos más precisos, Si A y B son dos segmentos, entonces siempre existe un entero n tal que $nA > B$.

⁸ Para Szabo en 1977, el desarrollo de la inconmensurabilidad lineal está relacionada con el problema de la media proporcional de dos magnitudes. Citado en Turégano [21].

⁹ Que según Boyer [3] están relacionados con los pensamientos y aportes de hombres como: Hipócrates de Chios, Arquitas de Tarento, Hipias de Ellis, Hipaso de Metaponto o de Crotona, Zenón de Elea y Demócrito de Abdera.

¹⁰ Boyer [3] afirma que Arquímedes le dio el crédito a Eudoxo en ser el primero que expresó esta propiedad que aparece como base de la definición 4 del quinto libro de los elementos de Euclides. Esta propiedad se extiende en el futuro al sistema de los números reales.

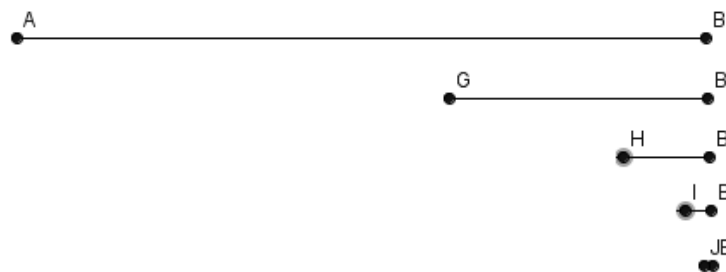


(Figura 1 – 1)

Esta propiedad significa geoméricamente que el segmento \overline{AB} de la figura anterior será recubierto por cualquiera de los segmentos \overline{CD} o \overline{EF} , un número finito de veces.

- Con esta propiedad se puede demostrar la proposición de los Elementos de Euclides (325-265 a.C.)¹¹ conocida como propiedad de Exhaución:

“Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano”.



(Figura 1 – 2)

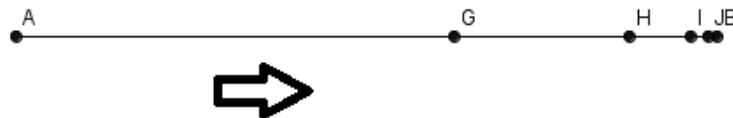
En la figura anterior se ha tomado como magnitud inicial la longitud del segmento \overline{AB} . Sucesivamente se han sustraído los segmentos \overline{AG} , \overline{GH} , \overline{HI} e \overline{IJ} mayores que las mitades respectivas de los restos, para obtener en un número finito de pasos

¹¹ Citado por Boyer [3].

el segmento \overline{JB} , cuya medida es menor que alguna longitud ϵ deseada. De manera un poco más rigurosa y en notación actual, con base en lo expuesto por González [10] se tiene:

Sean $med(\overline{AB}) = M_0, med(\overline{GB}) = M_1, med(\overline{HB}) = M_2, \dots, med(\overline{JB}) = M_n$ las medidas de los segmentos mostrados en la figura anterior. Si M_0 y ϵ son dos magnitudes conocidas a priori y en la sucesión $\{M_1, M_2, \dots\}$ se cumple que $\frac{1}{2}M_0 > M_1, \frac{1}{2}M_1 > M_2, \dots$ se puede concluir que existe un número natural n para el que $M_n < \epsilon$. Esto es así porque según la propiedad Arquimediana se puede hallar un número entero positivo P , tal que $(P + 1)\epsilon > M_0$. Entonces $M_1 < \frac{1}{2}M_0 < \frac{1}{2}(P + 1)\epsilon < P\epsilon$, es decir $M_1 < P\epsilon$. De la misma manera $M_2 < \frac{1}{2}M_1 < \frac{1}{2}P\epsilon < (P - 1)\epsilon$, es decir $M_2 < (P - 1)\epsilon$. Procediendo de la misma forma se tiene que en P pasos $M_p < \epsilon$.

Es bueno aclarar que esta propiedad se puede ilustrar con otras magnitudes como el área de figuras planas o volúmenes de sólidos. Es interesante observar lo que sucede con los extremos izquierdos de los segmentos restantes, tal como se ilustra en la siguiente figura:

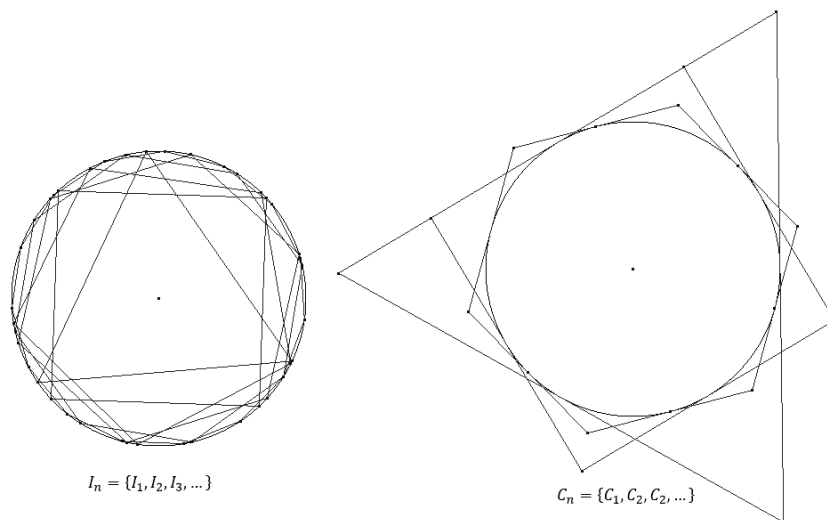


(Figura 1 – 3)

- La aplicación de esta propiedad se convierte en una estrategia para abordar cantidades de magnitudes tan grandes o tan pequeñas como se haga necesario; es decir, es una manera de abordar intuitivamente los problemas infinitesimales

y enfrentarse al infinito¹². Por ejemplo, suponiendo que se quiere mostrar que el área de la figura A es igual a un valor conocido S , con base en la ilustración dada por García y Delgado [9] y Guinness en 1984¹³, en síntesis se procede de la siguiente manera¹⁴: sea $a(A)$ el valor del área de la figura A .

- ✓ Con base en la geometría de la figura A , se construyen dos sucesiones de figuras rectilíneas. La primera de figuras inscritas en A $I_n = \{I_1, I_2, I_3, \dots\}$ tal que $a(I_1) < a(I_2) < a(I_3) < \dots$ es decir, monótona estrictamente creciente; y la segunda de figuras circunscritas en A $C_n = \{C_1, C_2, C_3, \dots\}$ tal que $a(C_1) > a(C_2) > a(C_3) > \dots$ es decir, monótona estrictamente decreciente. Como condición se debe tener que $\forall p \in \mathbb{N}$, la relación entre las figuras inscritas y circunscritas sea $I_p < A < C_p$.



(Figura 1 – 4)

En la figura se muestran algunos polígonos regulares que pertenecen tanto a I_n como a C_n . Se puede observar el carácter monótono

¹² Los griegos excluyen los desarrollos infinitos por desconocimiento de los números reales, específicamente por no considerar a las magnitudes inconmensurables como números. Actualmente los valores de estas magnitudes se reconocen como números irracionales.

¹³ Citado por Castelblanco [7].

¹⁴ Una interpretación de este método usando la notación actual se encuentra en el tomo I del cálculo de Apostol [1], páginas de la 4 a la 9.

decreciente o creciente de las respectivas secuencias. Por decir algo, I_1 corresponde al triángulo inscrito a la izquierda, mientras que C_2 es el cuadro circunscrito a la derecha. Se debe tener en cuenta que la construcción de estas figuras se realizaba con regla y compás.

- ✓ Se muestra que para cada sucesión, dado un valor ϵ positivo, siempre se pueden encontrar la figura I_i lo suficientemente grande y la figura C_j lo suficientemente pequeña, de modo que la diferencia entre sus respectivas áreas y el valor S sean menores que el valor ϵ . Es decir, en términos de Weierstrass $\forall \epsilon > 0, \exists i, j \in \mathbb{N}: S - a(I_i) < \epsilon, S - a(C_j) < \epsilon$. El uso de figuras era esencial para los griegos al desarrollar sus deducciones.
- ✓ Se hacen los supuestos de que $a(A) > S$ o que $a(A) < S$, llegando a contradicciones para mostrar finalmente que $a(A) = S$.

Los razonamientos alcanzados por medio del método de Exhaustión¹⁵ griego carecían de un cierre exitoso por la ausencia del concepto de límite. Para Linés [13] "... el principio de Exhaustión no permite determinar un número único, que esté comprendido entre las áreas de las figuras contenidas en la dada, y las áreas de las figuras que la contienen". Por un lado, esto facilitó la confusión entre aproximaciones finitas e infinitas, lo exacto y lo aproximado, las curvas y segmentos muy pequeños. Por otro lado, muy difícilmente alcanzaron a percibir que las magnitudes continuas son infinitamente indivisibles.

Además, la noción de superficie se restringió a porciones del plano acotadas por rectas, arcos de circunferencia, arcos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, a las cuales se les asignó un área con las propiedades de una magnitud, tal como se expresa en el libro V de los elementos de Euclides. Según Turégano [21] estas propiedades equivalen a una estructura algebraica de semigrupo arquimediano totalmente ordenado y divisible, invariante por desplazamiento, con propiedades naturales de monotonía y aditividad de

¹⁵ También llamado Método de Agotamiento.

uniones no solapadas. Adicionalmente los griegos sostienen que el todo es mayor que la parte y aplican este principio a la solución de áreas en polígonos equidescomponibles, restringiendo los análisis a conjuntos finitos y a los números naturales. Sin embargo, avanzaron en la cuantificación de algunas áreas y volúmenes.

Otro elemento que señala Muñoz [16], corresponde al estudio del movimiento hecho por Aristóteles (384-322 a.C.), el cual se centra en revelar las reales causas del movimiento cuando predominaban las ideas del reposo¹⁶. En este aspecto los griegos alcanzan a describir cualitativamente el movimiento sin lograr procedimientos cuantitativos de los fenómenos de variación.

En síntesis se nota que los griegos reconocían propiedades de figuras, tenían definiciones, hacían por lo general, largas secuencias de deducciones para derivar una propiedad de otra, pero carecían del suficiente rigor en sus sistemas deductivos, tal como se conocen en la actualidad.

1.3 Aportes en la Europa medieval

Según Boyer [3], en la Europa medieval las discusiones sobre la noción de área se caracterizan más por ser de tipo filosófico¹⁷ y descriptivo que cuantitativo, aunque las ideas alrededor del infinito potencial y del infinito actual maduraron mucho más que en el caso de los griegos.

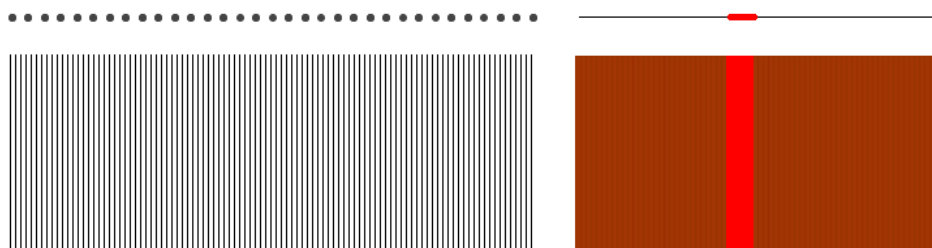
Por ejemplo, de acuerdo con Turégano [21], Thomas Bradwardine (1290-1349)¹⁸ manifiesta que las magnitudes continuas se componen por una infinita cantidad de continuos del mismo tipo y no por átomos matemáticos discretos. En la siguiente gráfica se ilustra, tanto la interpretación discreta como la continua, de la composición una recta

¹⁶ La característica del marco epistémico de la época.

¹⁷ Los filósofos escolásticos abordan problemas como la composición del continuo, el significado del infinito, la naturaleza del movimiento y la latitud de las formas, Turégano [21].

¹⁸ Precursor de la lectura matemática de la naturaleza y por tanto de las bases de la mecánica. Pensamiento clásico, Universidad de Navarra.

y de un rectángulo. A la izquierda por elementos indivisibles y a la derecha por elementos continuos.

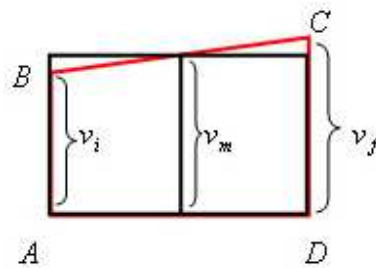


(Figura 1 – 5)

Por otra parte, Oresme (1323-1382) muestra un antecedente de la noción de relación. Usa un sistema de coordenadas denominadas longitud y latitud, para la representar gráficamente “las formas variables” o “latitud de las formas”¹⁹. Además se interesa en la manera en que varía la función y el modo en que varía el área bajo la curva, siendo éstas, ideas precursoras del cálculo. Aunque para Boyer [3] no es claro si Oresme considera el área como la suma de segmentos verticales o como la suma de rectángulos muy estrechos, sin embargo, percibe que en sus ideas hay nuevos estilos de ver el “axioma de exhaustión”, y la noción de un método para calcular lo que actualmente corresponde a la convergencia de algunas series al infinito.

Para aclarar un tanto las ideas de Oresme, Moreno [15] escribe: “Todo lo que varía, decía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo”. Por ejemplo, en su obra “El Tractatus de latitudinibus formarum” Oresme demostró la ley de Merton para explicar el movimiento uniformemente acelerado descrito de la siguiente manera utilizando notación actual:

¹⁹ Recordar que en la época no se puede hacer referencia a los términos de relación y función.



(Figura 1 – 5)

Si el segmento \overline{BC} corresponde a la gráfica del movimiento, el área del trapecio $ABCD$ representa el espacio recorrido s en el tiempo t representado por la longitud de \overline{AD} , durante el cual la velocidad pasa de ser v_i interpretada como la longitud de \overline{AB} , a ser v_f o la longitud \overline{CD} . Como el trapecio $ABCD$ es equivalente al rectángulo que tiene como base el tiempo \overline{AD} y altura la media de las velocidades \overline{AB} y \overline{CD} , entonces:

$$s = v_m t = \frac{|\overline{AB}| + |\overline{CD}|}{2} \cdot |\overline{AD}| \quad (1 - 1)$$

Como la aceleración es la razón entre el cambio de la velocidad transcurrido el tiempo, entonces $a = \frac{|\overline{CD}| - |\overline{AB}|}{\overline{AD}}$, luego $|\overline{CD}| = |\overline{AB}| + a \cdot \overline{AD}$, así en (1 - 1) se tiene:

$$s = \frac{2 \cdot |\overline{AB}| + a \cdot \overline{AD}}{2} \cdot |\overline{AD}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| + \frac{1}{2} a (|\overline{AD}|)^2 = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \blacksquare \quad (1 - 2)$$

Con base en lo anterior, se puede notar que Oresme utiliza el área bajo la curva para representar una magnitud física y además la longitud de los segmentos, representa otras magnitudes como velocidades y tiempos. Moreno [15]²⁰ al respecto expresa: “tal vez podemos ver allí un germen de la desdimensionalización de las variables, lo cual constituye un paso necesario para la creación del lenguaje algebraico”.

Desde otra perspectiva, los atributos de esta etapa histórica comparados con los niveles de conocimiento, se asemejan a la capacidad de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otras, pero no se atiende al rigor de un

²⁰ Citado por Turégano [21].

sistema deductivo formal. Algo similar ocurre en la descripción intuitiva de ciertos niveles de conocimiento que se perciben en proceso de aprendizaje de los estudiantes.

1.4 Contribuciones en los siglos XVII y XVIII. Antecedentes de Newton y Leibniz.

Según Muñoz [16] entre los siglos XVII y XVIII se avanza en el estudio tanto de curvas geométricas, como del movimiento de los cuerpos. Sin embargo, el paradigma cambia a la búsqueda de relaciones que se pueden determinar entre distancias y tiempos en la caída de los cuerpos, cuando las ideas predominantes corresponden a las relaciones entre reposo y movimiento. Como consecuencia, se obtiene el establecimiento del principio de inercia y se transforma el estudio del movimiento de lo meramente cualitativo a la introducción de las medidas, principalmente por parte de Galileo (1564-1642). Esto implica la identificación de variables que lleven asociados una medida y los primeros pasos hacia la construcción de relaciones funcionales cuya variable independiente corresponde al tiempo. Menna [14] basado en lo expuesto por el filósofo e historiador científico Alexandre Koyré, sugiere que esta etapa corresponde a la génesis de la ciencia moderna donde se presenta "... una revolución teórica... caracterizada por la disolución del cosmos y la geometrización del espacio."

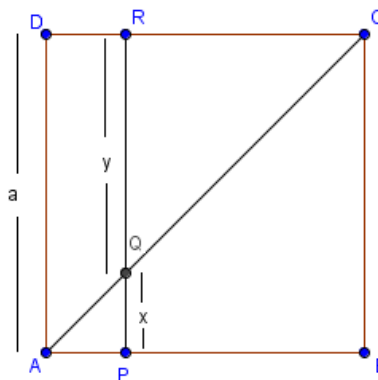
Una característica de capital importancia de esta época corresponde a la génesis de los métodos infinitesimales. Turégano [21] afirma que es a Kepler (1571-1630) a quien se le adeuda el uso de infinitesimales para el cálculo de áreas y que "para Kepler, el infinitesimal es aquel elemento pequeñísimo que compone las figuras, pero que conserva las dimensiones de la misma". De acuerdo con Boyer [3] y Turégano [21], estos métodos pretendían evitar la agudeza lógica del método de exhaustión, siendo así, que sus modificaciones condujeron finalmente al cálculo infinitesimal.

Contrariamente al pensamiento de lo infinitamente pequeño actual y el imprescindible paso al límite de Kepler, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) muestra otra interpretación de los elementos determinantes y constitutivos de los cuerpos, planos y rectas. Se trata de la noción de lo indivisible, el cual tiene una dimensión menos del objeto que

categoriza; esto es, todas las líneas y todos los planos de un cuerpo, equivalen a él. Dicho por Turégano [21], la anterior declaración de “equivalente” no debe interpretarse como la suma de líneas o de planos que consecuentemente forman el cuerpo. Para Koyré, señalado por Turégano [21], los indivisibles son familias de derivadas, que al compararse establecen relaciones entre sus funciones primitivas, e incluso las llegan a determinar.

Con base en lo expuesto por Turégano [21], Cavalieri entre 1635 y 1647 demuestra que el cálculo del área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo de $[0, a]$ es $\frac{a^3}{3}$ de la siguiente manera:

Sea el cuadrado $ABCD$ de lado a dividido en dos triángulos por su diagonal \overline{AC} tal como se muestra en la siguiente figura:



(Figura 1 – 6)

Si \overline{PR} es un segmento arbitrario paralelo a uno de los lados del cuadrado que corta a \overline{AC} en el punto Q , entonces las longitudes de los segmentos \overline{PQ} y \overline{QR} suman la longitud de un lado del cuadrado, esto es $x + y = a$. Por lo tanto,

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y. \quad (1 - 3)$$

Por simetría en los triángulos congruentes $\Delta(ABC)$ y $\Delta(ACD)$ se tiene que $\sum_A^B x = \sum_A^B y$, entonces,

$$\sum_A^B a = 2 \sum_A^B x \leftrightarrow \sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a. \quad (1 - 4)$$

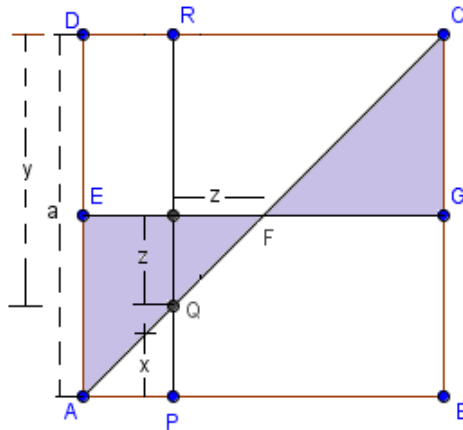
Como todos los segmentos de longitud a comprendidos desde \overline{AD} hasta \overline{BC} equivalen al cuadrado $ABCD$, entonces se puede deducir que $\sum_A^B a$ representa el área del cuadrado; por lo tanto,

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2} a^2. \quad (1-5)$$

Por otro lado,

$$\sum_A^B a^2 = \sum_A^B (x+y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy. \quad (1-6)$$

Ahora, si se toma la distancia z como se muestra en la siguiente figura, $x+z = \frac{a}{2}$ y $y-z = \frac{a}{2}$.



(Figura 1-7)

Luego, en la ecuación (1-5) se tiene:

$$\sum_A^B a^2 = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{a}{2} - z\right) \left(\frac{a}{2} + z\right) = 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2\right), \quad (1-7)$$

$$\sum_A^B a^2 = 2 \sum_A^B x^2 + \frac{1}{2} \sum_A^B a^2 - 2 \sum_A^B z^2. \quad (1-8)$$

Luego,

$$\frac{1}{2} \sum_A^B a^2 = 2 \sum_A^B x^2 - 2 \sum_A^B z^2 \leftrightarrow \sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum_A^B z^2. \quad (1-9)$$

Ahora, $\sum_A^B z^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B x^2$, pues la suma de las áreas de los triángulos $\triangle AEF$ y $\triangle FGC$ es equivalente al área del cuadrado con vértices en los puntos A, E, F y el punto medio del segmento \overline{AB} . A su vez, el cuadrado precedente es congruente con la cuarta parte del cuadrado $ABCD$, de donde se obtiene que

$$\sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \left(\frac{1}{4}\right) \sum_A^B x^2 \leftrightarrow \sum_A^B a^2 = 3 \sum_A^B x^2. \quad (1-10)$$

Como la suma de a^2 sobre el cuadrado $ABCD$ representa un cubo de arista a , entonces,

$$\sum_A^B a^2 = a^3. \quad (1-11)$$

Por último de las ecuaciones (1-10) y (1-11) se deduce que,

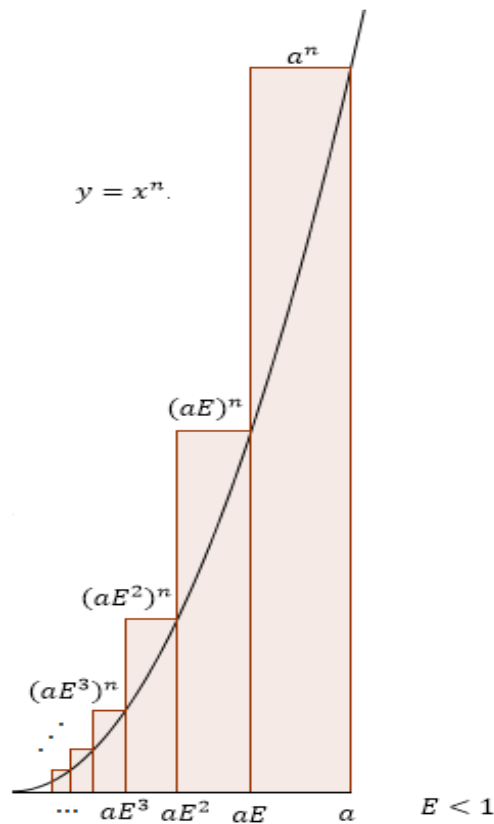
$$\sum_A^B x^2 = \frac{1}{3} a^3 \quad \blacksquare \quad (1-12)$$

Entre tanto, según Boyer [3], Fermat (1601-1665) alrededor de 1629 ya había hallado un resultado análogo al de Cavalieri, relativo al área bajo la curva $y = x^n$ con n un entero positivo, en un intervalo cerrado. Lo sorprendente aquí, si se permite la expresión, es que el método utilizado por Fermat, que no es otro que el de exhaustión griego basado en progresiones geométricas, permite extender el exponente n a fracciones y ofrece una interpretación para el caso con exponente negativo $n = -1$ ²¹ en el intervalo $[0, a]$. Muñoz [16] resalta que Fermat usaba los ejes rectangulares y representaba las curvas como relaciones entre las variables X y Y .

Teniendo en cuenta lo dicho por Boyer [3], se puede describir la solución de Fermat de la siguiente manera: considérese la curva $y = x^n, n \in \mathbb{Z}^+$. Calcular el área comprendida bajo la curva, entre los valores $x = 0$ y $x = a$.

²¹ Va más allá que Cavalieri cuyo trabajo se basa en exponentes enteros del 1 al 9, según Boyer [3].

- En primer lugar, se subdivide el intervalo de $x = 0$ a $x = a$ en una cantidad infinita de sub-intervalos tomando los puntos cuyas abscisas son a, aE, aE^2, aE^3, \dots , siendo $E < 1$; y cuyas ordenadas son los correspondientes puntos de la curva.
- Se toman los respectivos triángulos circunscritos a la curva, cuyas bases son los sub-intervalos anteriores y se calcula la suma de sus áreas; tal como se indica en la figura a continuación. Se observa que las áreas de los respectivos rectángulos determinan la progresión geométrica $a^n(a - aE), a^nE^n(aE - aE^2), a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3), \dots$



(Figura 1 – 8)

Lo cual significa que el término n – ésimo de esta progresión es,

$$A_j = a^n E^{(j-1)n} (aE^{j-1} - aE^{j-1}) = a^{n+1} E^{(j-1)(n+1)} (1 - E),$$

$$A_j = a^{n+1} (1 - E) [E^{(n+1)}]^{(j-1)}. \quad (1 - 13)$$

Luego, la suma de las áreas de los infinitos rectángulos²² es,

$$S_{A\infty} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \leftrightarrow \quad (1-14)$$

$$S_{A\infty} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{(1-E)(1+E+E^2+E^3+\dots+E^n)} \leftrightarrow \quad (1-15)$$

$$S_{A\infty} = \frac{a^{n+1}}{(1+E+E^2+E^3+\dots+E^n)}. \quad (1-16)$$

- Se analizan e identifican las condiciones para las cuales, los rectángulos son cada vez más pequeños y por lo tanto, su suma infinita se aproxima más al área bajo la curva:

$A_j \rightarrow 0$, cuando $a^{n+1}(1-E)[E^{(n+1)}]^{(j-1)} \rightarrow 0$, es decir, cuando $(1-E) \rightarrow 0$ o lo mismo, $E \rightarrow 1$. Por lo tanto, en la ecuación (1-16) haciendo $E = 1$, se tiene:

$$S_{A\infty} = \frac{a^{n+1}}{(1+1+1^2+1^3+\dots+1^n)}. \quad (1-17)$$

En consecuencia, el área bajo la curva pedida es:

$$S_{A\infty} = \frac{a^{n+1}}{1+n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad \blacksquare \quad (1-18)$$

Ahora, si $n = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, en este caso Fermat define $F = E^{\frac{1}{q}}$. Al hacer la respectiva sustitución en la ecuación (1-14), se obtiene:

$$S_{A\infty} = \frac{a^{\frac{p+q}{q}}(1-F^q)}{1-F^{p+q}}, \quad q \neq 0 \leftrightarrow \quad (1-19)$$

$$S_{A\infty} = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{(1-F)(1+F+F^2+F^3+\dots+F^{q-1})}{(1-F)(1+F+F^2+F^3+\dots+F^{p+q-1})}, \quad q \neq 0 \leftrightarrow \quad (1-20)$$

$$S_{A\infty} = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{(1+F+F^2+F^3+\dots+F^{q-1})}{(1+F+F^2+F^3+\dots+F^{p+q-1})}, \quad q \neq 0. \quad (1-21)$$

De manera semejante al análisis sobre el exponente $n \in \mathbb{Z}^+$, cuando $E = 1$, $F = 1$; luego,

$$S_{A\infty} = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{(1+1+1^2+1^3+\dots+1^{q-1})}{(1+1+1^2+1^3+\dots+1^{p+q-1})}, \quad q \neq 0 \leftrightarrow \quad (1-22)$$

²² Si bien es cierto que Fermat trata con cierta confianza los métodos infinitos, el uso del “lazo del amor” o ∞ , se utiliza por primera vez en los trabajos de Wallis, de acuerdo con lo expresado por Boyer [3].

$$S_{A\infty} = a^{\frac{p+q}{q}} \frac{1+q-1}{1+p+q-1}, \quad q \neq 0 \leftrightarrow \quad (1-23)$$

$$S_{A\infty} = \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}, \quad q \neq 0 \quad \blacksquare \quad (1-24)$$

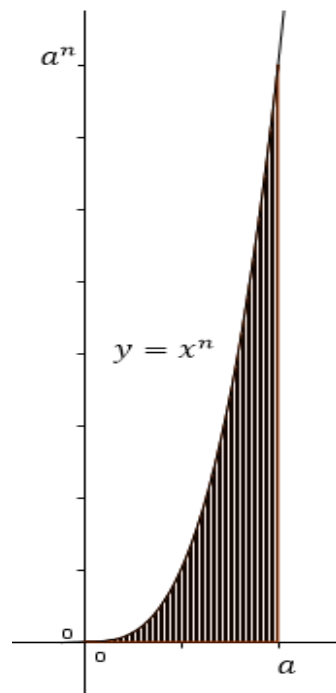
Finalmente, para el caso con exponente negativo $n = -1$, Fermat recurre a un planteamiento similar, considerando $E > 1$ y analizando lo que ocurre cuando $E \rightarrow 1$, calculando el área desde $x = a$ hasta el infinito.

En el año en que muere Pierre de Fermat, John Wallis (1616-1703) publica *Arithmetica infinitorum*, que según Turégano [21], trata de la integración aritmética. Boyer [3] explica que Wallis aritmetiza la *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri, asignado “valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras”. Con base en la interpretación realizada por Boyer [3] y Castelblanco [7], el procedimiento que utilizó Wallis para obtener,

$$\int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1, \quad (1-25)$$

se describe a continuación:

- Parte del área bajo la curva $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ en el intervalo $[0, a]$, la cual se forma de la unión infinita de rectángulos con igual base de pequeña longitud.



(Figura 1 – 9)

- Supone que hay $m + 1$ indivisibles en el intervalo $[0, a]$ de dimensión n , los ordena y a cada uno le asigna una magnitud de 0 hasta m respectivamente. Después considera la razón entre la suma de los indivisibles debajo de $y = x^n$ y los correspondientes indivisibles del rectángulo circunscrito en la curva. Esto es:

$$\frac{(0^n + 1^n + 2^n + \dots + m^n)}{(m^n + m^n + m^n + \dots + m^n)} \quad (1 - 26)$$

Factorizando el denominador se obtiene:

$$\frac{0^n + 1^n + 2^n + \dots + m^n}{(m + 1)m^n} \quad (1 - 27)$$

Por inducción²³ sobre n , esta fracción es equivalente a:

$$\frac{\sum_{i=0}^m i^m}{(m + 1)m^n} = \frac{1}{n + 1}, \quad n \neq -1. \quad (1 - 28)$$

En notación actual, este resultado es similar a,

$$\frac{\int_0^a x^n dx}{a^{m+1}} = \frac{1}{n + 1}, \quad n \neq -1 \quad \blacksquare \quad (1 - 29)$$

²³ Comenta Boyer [3] que Fermat criticó los métodos de inducción de Wallis, por falta de rigor. Además, que Wallis interpoló su resultado a los fraccionarios y negativos, excepto -1 .

Antes de mencionar las contribuciones hechas por Newton y Leibniz al descubrimiento de la conexión entre los problemas de cuadraturas y tangentes, es justo señalar la existencia de algunos antecedentes. Es el caso del resultado demostrado por Isaac Barrow (1630-1677), donde se desentraña una primera versión rigurosa del teorema fundamental del cálculo, pese a estar basado principalmente en argumentos geométricos. En este resultado se muestra un método para trazar una recta tangente a una curva, relacionándolo con la cuadratura de otra curva.

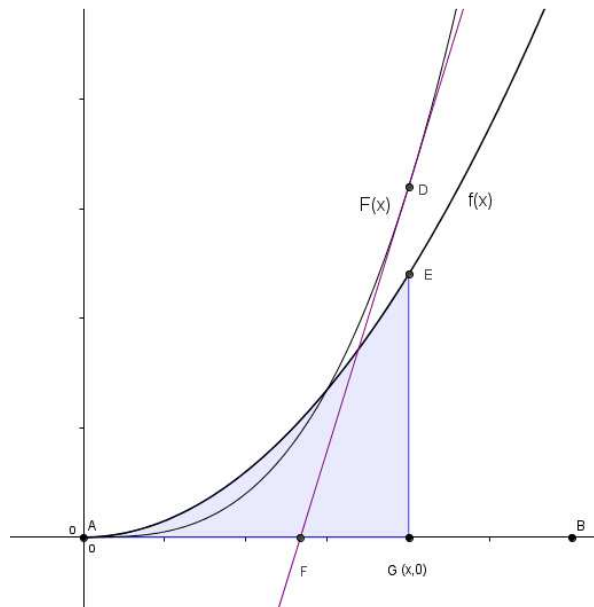
Una versión simplificada de este resultado lo explica Ponce [18] de la siguiente manera: sea $y = f(x)$ una función continua y creciente definida en un intervalo $[a, b]$. Se define la curva que describe el área acumulada debajo de $f(x)$ como:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1 - 30)$$

En la figura (1 - 8) se consideran los puntos $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $D(x, F(x))$ y $E(x, f(x))$.

Sea el punto $F(x - \overline{FG}, 0)$ en el intervalo $[a, x]$ tal que:

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{GE}} = \overline{FG}. \quad (1 - 31)$$



(Figura 1 - 8)

Entonces,

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{FG}} = \overline{GE} = f(x). \quad (1 - 32)$$

Es decir, la pendiente de la tangente \overline{DF} a la curva $F(x)$ en el punto D , es \overline{GE} ; en palabras actuales, la derivada de $F(x)$ en el punto D es $f(x)$. Por lo tanto,

$$F'(x) = f(x). \quad (1 - 33)$$

Dicho de otro modo:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right]. \quad (1 - 34)$$

Es claro que el resultado de la ecuación (1 - 34) es evidencia del antecedente, en un contexto geométrico, del Teorema Fundamental del Cálculo descubierto por Barrow.

En síntesis, Barrow, Wallis y Gregory (1638-1675), abordaron soluciones a problemas como la cuadratura, la rectificación de curvas y el cálculo de tangentes, entre otras. Sin embargo, sus métodos corresponden a problemas aislados o particulares de funciones específicas, ya sea porque conservaban la adhesión a los métodos geométricos o porque eran precarios de rigor en algunas de sus demostraciones.

1.5 El período de Newton y Leibniz

Posteriormente, a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), se les asocia la invención del cálculo diferencial e integral. Según Boyer [3] debido a que, sus reflexiones y aportes permitieron evolucionar, legitimar y usar el infinito en sus razonamientos de una manera más sistemática, cuestión que anteriormente no se había considerado con tanta fuerza. Por otro lado, porque demostraron tener mucha claridad al generalizar en una sola teoría la relación inversa entre la derivada y la integral, con sus respectivas notaciones y aplicaciones; no obstante, movidos por causas aparentemente distintas y de manera independiente.

Siguiendo lo expuesto por Muñoz [16], las ideas motivadoras de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos, se relacionaban con el cálculo del estado final de un sistema de movimiento, si eran conocidos los valores de las variables que intervienen en un lugar y momento dado, actualmente conocidas como condiciones

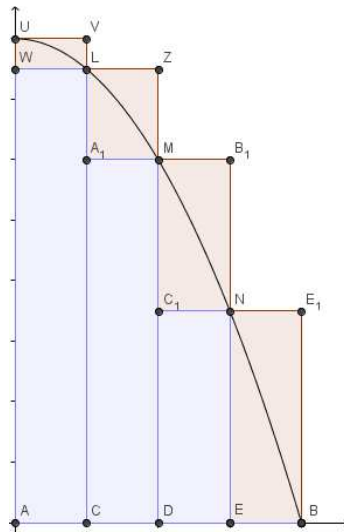
iniciales²⁴. Muñoz [16] resalta la emergencia de la práctica social relacionada con la noción de predecir, cuantificando los estados posteriores, con base en los estados iniciales de un fenómeno mecánico, el cual al ser representado matemáticamente por funciones entre variables, implica el surgimiento del cálculo infinitesimal. Adicionalmente, Turégano [21] explica las ideas de Newton para establecer razones entre áreas: para Newton es suficiente con hacer razones de polígonos o paralelogramos, u otros, que estén inscritos en la figura de interés; es decir, Newton justifica las simplificaciones de los razonamientos del método de exhaución de los antiguos griegos, que se hacen en esta época.

Para ilustrar esto último y con base en las ideas expuestas por Turégano [21], se presentan a continuación dos resultados de Newton, referentes a la cuadratura de curvas o área bajo la curva y su versión del Teorema Fundamental del Cálculo:

- En el libro I, lema II, Newton hace un intento por definir el área de una región bajo una curva en términos de áreas de rectángulos; con base, en su teoría de razones primeras y últimas²⁵: de acuerdo con la siguiente imagen, en una figura $AUMB$, comprendida entre las rectas AU , AB y la curva UMB , se inscriben varios paralelogramos AL , CM , DN , entre otros, contruidos sobre bases iguales AC , CD , DE , etc., siendo los lados CL , DM , EN paralelos al lado AU de la figura.

²⁴ Según Turégano [21], por esta razón Newton en su tratado no habla de la constante de integración, puesto que para describir el movimiento de un cuerpo, se hace partir de un momento inicial y una posición dada.

²⁵ De la obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1887), en el libro I el lema I se aclaran las nociones de razones primeras y últimas: Las cantidades o las razones de las cantidades que tienen que tienden constantemente a la igualdad en un tiempo finito y que, antes del fin del tiempo, se acercan más una a la otra que toda diferencia dada, son al final iguales.

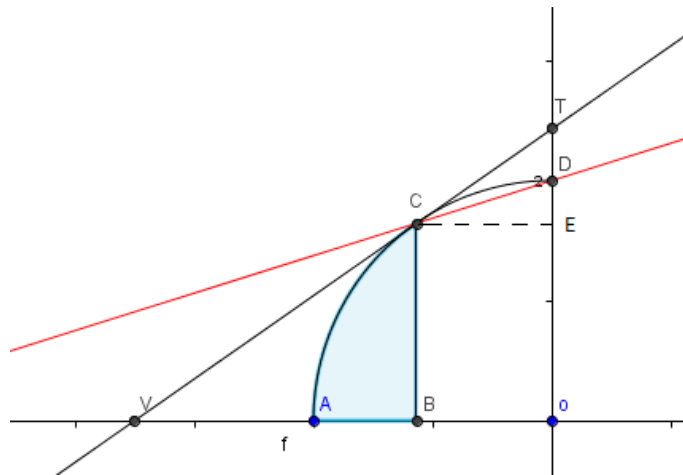


(Figura 1 – 9)

Si se completan los paralelogramos $AWLC$, CA_1MD , DC_1NE , se disminuye la longitud de sus bases aumentando indefinidamente el número de ellos, entonces, las razones últimas que se dan entre la figura inscrita $AWLA_1MC_1NE$, la circunscrita $AUVLZMB_1NE_1B$ y la curvilínea $AULMNB$, son razones de igualdad.

En el razonamiento que hace Newton, descrito por Turégano [21], esto se tiene porque la diferencia entre las figuras inscrita y circunscrita, es la suma de los paralelogramos WV , A_1Z , C_1B_1 , EE_1 ; esto es, el rectángulo de base WL y de altura la suma AU de las alturas, es el rectángulo $ACVU$. Pero este rectángulo es más pequeño que cualquier rectángulo dado porque su base disminuye indefinidamente, luego por el lema I, las figuras inscrita, circunscrita y la curvilínea intermedia, son al final iguales.

- En segundo lugar, según Turégano [21], en la teoría Newtoniana se le denominan fuentes a las cantidades generadas por movimientos continuos, y fluxiones a las velocidades de dichos movimientos. Las fluxiones, en la primera razón de los aumentos nacientes o límites, son aproximadamente proporcionales a los aumentos de las fuentes en intervalos de tiempos iguales muy pequeños. Para demostrar esta proposición, Newton razona con base en la siguiente figura:



(Figura 1 – 10)

Se considera el área ABC descrita por la ordenada \overline{BC} moviéndose uniformemente sobre la base \overline{AB} . La fluxión de esta área es proporcional a la ordenada \overline{BC} , porque ambas aumentan en el tiempo. Si se avanza la ordenada \overline{BC} hacia su posición límite \overline{OD} , se completa el paralelogramo $BCEO$ y así, \overline{BO} es el incremento de la abscisa \overline{AB} y \overline{ED} el incremento de la ordenada \overline{BC} . Se traza la recta \overline{VT} tangente a la curva en el punto C , donde V y T son los puntos de intersección entre \overline{BT} y \overline{AB} , \overline{BT} y \overline{OE} respectivamente. Si los incrementos \overline{BO} y \overline{ED} ocurren en tiempos pequeños, los lados del triángulo CET , están en el inicio del movimiento en la misma razón de las fluxiones \overline{AB} y \overline{BC} y se representan por los lados del triángulo VBC , que es proporcional a CET . Por lo tanto, la pendiente de la tangente \overline{VT} a la curva en el punto C se calcula en el inicio del movimiento así:

$$m_{\overline{VT}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{VB}} = \lim_{\Delta \overline{AB} \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{BC}}{\Delta \overline{AB}} = \lim_{\overline{BO} \rightarrow 0} \frac{\overline{ED}}{\overline{BO}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1 - 35)$$

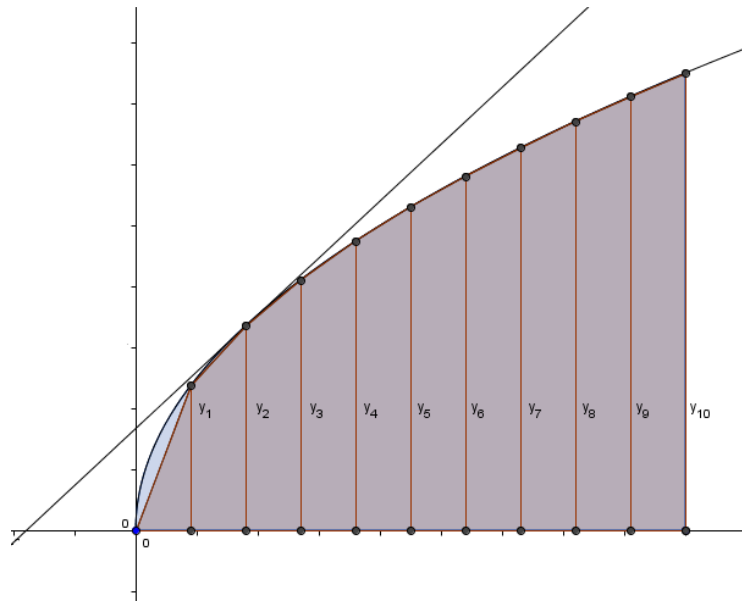
Si ahora se traza la recta secante \overrightarrow{CD} y se retrocede la ordenada \overline{OD} hasta \overline{BC} ²⁶, cuando los puntos D y C coincidan, la secante \overrightarrow{CD} coincidirá con la tangente \overrightarrow{VT} , esto es, la tangente es la última razón de la secante cuando el arco de la curva ACD se disminuya en tiempos pequeños.

De acuerdo con el razonamiento anterior, al avanzar la ordenada \overline{BC} con un movimiento continuo hasta \overline{OD} se genera el área ABC , y cuando se retrocede la ordenada \overline{OD} hasta \overline{BC} se genera la tangente a la curva en el punto C . Por consiguiente, se obtiene el significado geométrico que Newton le da al Teorema Fundamental del Cálculo.

A su vez, según Muñoz [16], las preocupaciones de Leibniz se enfocaban inicialmente en sucesiones de sumas y diferencias de números y el valor de una suma infinita de esta clase. Esto se puede notar en la concepción de área que tiene Leibniz, fundamentada en lo infinitamente pequeño, donde el área es una suma infinita de elementos diferenciales o infinitamente pequeños. Turégano [21] afirma que en 1672, Leibniz descubre que dada una sucesión numérica a_1, a_2, \dots, a_n , si se obtiene la sucesión de las primeras diferencias entre cantidades consecutivas d_1, d_2, \dots, d_{n-1} , donde $d_i = a_i - a_{i-1}$, al calcular la suma finita $d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$ da como resultado $a_n - a_1$.

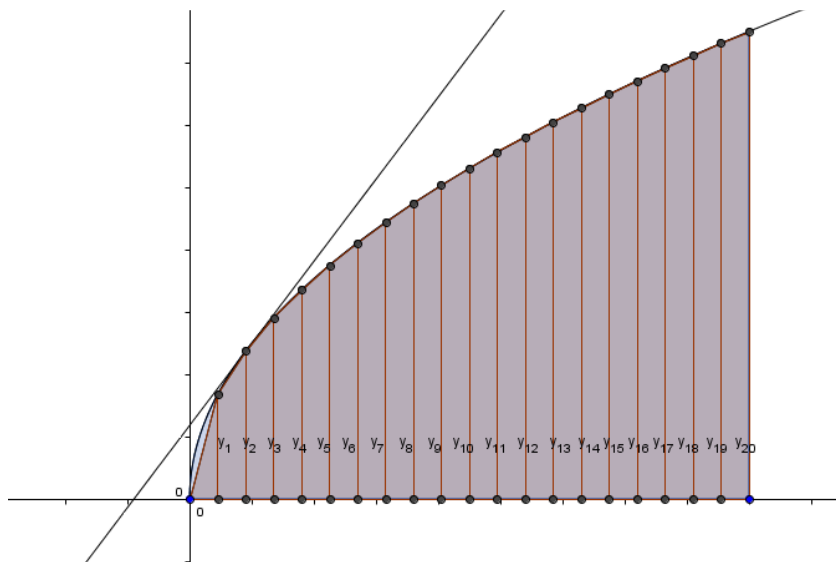
Al aplicar esta idea fundamental en una curva como la que aparece a continuación:

²⁶ Recordar que esta ordenada es proporcional a la fluxión del área ABC .



(Figura 1 – 11)

Al sumar la sucesión de ordenadas de igual incremento en las abscisas, se obtiene una aproximación de la cuadratura de la curva. Al mismo tiempo, la diferencia entre las ordenadas sucesivas da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente. En el caso en que el incremento pueda tomarse infinitamente más pequeño, las aproximaciones serán más exactas como puede observarse en la siguiente gráfica:



(Figura 1 – 12)

Siendo así la cuadratura igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la tangente igual a la diferencia de las ordenadas. De esta manera se puede apreciar, que para Leibniz la determinación de cuadraturas y tangentes se basan en operaciones inversas; de ahí que, utilice la “ese alargada” \int para la suma y la letra d para la diferencia.

En esencia, Leibniz se vale del triángulo aritmético de Pascal fundamentado en sumas entre números, para formar el triángulo armónico que, por el contrario, se basa en restas. Él observa la relación inversa que existe entre estos últimos, la asocia a figuras curvas y calcula sus longitudes o superficies de revolución, entre otras. Además extrapola los resultados discretos a situaciones continuas.

Es importante señalar que la “tendencia” en el pensamiento preponderante de la época, limitó el nivel de rigurosidad en la fundamentación de los descubrimientos y sus respectivos razonamientos, mucho más a Newton que a Leibniz, teniendo en cuenta que Leibniz prefería la evidencia formal sobre la geométrica, la cual consideraba un elemento auxiliar para la comprensión del fenómeno²⁷. Aun así, Leibniz no pudo soportar las críticas hechas a la existencia de sus infinitesimales y en parte titubeó sobre la existencia de los mismos, precisamente por la deficiente rigurosidad en sus razonamientos.

1.6 Evolución de la integración con la entrada del concepto de función.

Muñoz [16] menciona que, más adelante en el siglo XVIII ese matrimonio entre Física y Matemática encuentra un impase con la aparición del problema de la cuerda vibrante que implicó cambios en el concepto de función²⁸. Se sabe que las funciones que motivan este análisis y otros asociados al fenómeno en cuestión son de tipo numérico más que

²⁷ En el libro de Turégano [21] aparece una cita de Leibniz en la cual se aprecia su preferencia por la evidencia formal: “... son las proposiciones universales... las que constituyen el razonamiento, y lo sostendrán cuando ya no estuviera la figura.”

²⁸ Por ejemplo en el caso de las series de Fourier, el valor en un intervalo no contiene necesariamente información consecuente sobre el valor en otro de sus intervalos.

del cálculo de magnitudes variables físicas o geométricas y los insumos matemáticos con se contaba en el momento, trajo como consecuencia un cambio en la prioridad del estudio de la integral, volcándose hacia las funciones numéricas.

Ejemplo de esto, es el trabajo de Euler (1701-1783) que extiende a la integral más allá del área bajo curvas. Turégano [21] comenta que el modelo funcional de Euler separa esta noción de la geometría, empezando así la “aritmización del análisis”. Según los historiadores esto va de la mano con el origen de la teorización de la integración, donde integrar una función $f(x)$ vía Euler, se transforma en encontrar una función $F(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, es decir, encontrar una primitiva.

Como lo menciona Muñoz [16], la ruptura entre el cálculo de variables y de funciones numéricas genera en matemáticos como Fourier (1768-1830) inquietudes que llevan a preguntarse sobre la naturaleza y significado que tiene la expresión $\int_a^f f(x)dx$, para los casos donde $f(x)$ es una sucesión arbitraria de ordenadas.

Al respecto Boyer [3] referencia a Cauchy (1789-1857) y sus definiciones de límite y función continua, muy semejante a la que conocemos hoy en día, donde los infinitesimales dejan de ser números fijos y pasan a ser variables cuyos valores tienden a cero. Con estas definiciones logra mostrar una sutil diferencia entre primitivas²⁹ y la integral definida, siendo esta última mucho más amplia en alcance a las diversas funciones consideradas en el momento en el sentido Euler³⁰; esto es, en palabras de Muñoz [16], Cauchy construye una teoría de integración para funciones continuas, la cual se puede extender a funciones acotadas, a funciones con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo y a algunas funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad.

²⁹ Integrales calculadas por la regla de Barrow o como se llama actualmente el segundo teorema fundamental del cálculo, en el cual se tiene como hipótesis la existencia de la antiderivada.

³⁰ Expresadas o representadas explícitamente por una sola expresión analítica.

Como se puede apreciar hasta el momento y siguiendo lo dicho por Muñoz [16], el sistema cognitivo o conocimientos alrededor de la integral, se enfoca en cuestiones reflexivas del significado de integral por sí misma, perdiendo importancia su uso en problemas cotidianos. Por ejemplo, Riemann (1826-1866) va un paso más allá de Cauchy, pues perfecciona la definición de integral despojándola definitivamente de cualquier interpretación geométrica relacionada con el área bajo la curva, motivado, según Muñoz [16], por la interpretación de la integral de una función correspondiente a una sucesión arbitraria de ordenadas densamente continua. Boyer [3] escribe que Riemann dio las condiciones necesarias y suficientes para que una función acotada sea integrable teniendo en cuenta los criterios de convergencia de Dirichlet (1805-1859). Sin embargo, la definición que más se conoce y utiliza actualmente para definir la integral en los primeros cursos de análisis basada en sumas superiores e inferiores varía levemente con la definición original de Riemann, en aspectos relacionados con la definición dada por Darboux (1842-1917): por ejemplo, Darboux considera en su definición una sola suma inferior y una sola suma superior para cada partición, mientras que Riemann contempla más de una suma en ambos casos por cada partición.

A Lebesgue (1875-1941) se le debe un paso más allá en el perfeccionamiento de la integral de Riemann. Boyer [3] menciona, que Lebesgue basa su definición de integral en los trabajos adelantados por Cantor (1845-1918) y Borel (1871-1956) sobre conjuntos medibles. La definición de la integral de Lebesgue, por ejemplo permite la existencia de la integral de la función de Dirichlet relacionada con discontinuidades infinitas en un intervalo, es decir, permite el cálculo de algunas funciones que cumplen algunas condiciones relacionadas con la definición de medida.

A partir de los estudios sobre la teoría de la medida, en estudios más avanzados sobre análisis matemático, se encuentran otras definiciones alternativas de la integral en búsqueda de poder hallar un algoritmo para la misma y reemplazar el total del conjunto de estrategias para calcular la integral definida de funciones que los matemáticos actuales llaman "Patológicas". Entre estos intentos se pueden mencionar las definiciones de las integrales de Stieltjes (1856-1894), Denjoy (1884-1974), Haar (1885-1933) algunas conocidas como Riemann-Stieltjes, Lebesgue-Stieltjes, entre otras. En palabras de Carl Boyer [3] "...aunque la integración es tan antigua como la época de Arquímedes, la *teoría* [sic] de la integral ha sido una creación del siglo XX."

2. Aspectos disciplinares.

En esta segunda parte se presentan las nociones matemáticas y aproximaciones teóricas didácticas, que configuran una posible solución al problema de desequilibrio entre el avance conceptual de los estudiantes alrededor de la integral definida, y el privilegio que por lo general se le concede en los cursos típicos de cálculo integral, al conocimiento de las principales estrategias de anti-derivación.

2.1. Nociones matemáticas necesarias para el desarrollo de la propuesta

2.1.1. Conocimientos previos.

Para el desarrollo de esta propuesta se hace necesario que el docente interesado en reproducirla, en un primer momento, abra un espacio para diagnosticar el nivel de comprensión de los siguientes pre-conceptos, de los cuales se sugiere hacer una intervención específica para mejorar las correspondientes funciones semióticas³¹ desarrolladas, en espera de que estos conocimientos previos puedan adaptarse a la construcción del esquema³² de integral definida deseado.

- Noción de función: es necesario hacer énfasis en la conexión y coordinación entre las representaciones gráficas, tabulares, numéricas, algebraicas y de lenguaje natural. También es importante garantizar que los estudiantes establecen semejanzas y diferencias entre clases de funciones, dado un criterio de interés como por ejemplo signo de la función, monotonía, continuidad, entre otros.
- Noción de sucesión: profundizar en la coordinación entre las representaciones como secuencias numéricas y como funciones con dominio en los enteros positivos.

³¹ En el sentido que Godino en el 2003 sugiere, en pro del mejoramiento de los procesos comunicativos, alrededor de los conceptos construidos hasta el momento por el estudiante.

³² De igual manera, en el sentido que Vergaud a finales de la década de los 80 propone con respecto al proceso de conceptualización y su dinámica evolutiva.

- Naturaleza de los números reales: indagar sobre la comprensión del axioma de completitud, la propiedad arquimediana y las propiedades del extremo superior, que posteriormente sirvan de argumentos para sostener resultados donde intervienen procesos infinitos.
- Noción de límite: hacer claridad entre valores aproximados y exactos. Por ejemplo, si se tiene en cuenta la interpretación de aproximación entre los valores de una función $f(x)$ y un valor L por medio de procesos finitos, los cuales a su vez están en función de un margen de error dado $|f(x) - L| < \epsilon$ y de un radio de aproximación en las abscisas $|x - a| < \delta$, en contraste con el paso al límite que por medio de procesos infinitos se garantiza siempre la existencia de δ para cualquier ϵ arbitrario.
- Noción de continuidad: hacer énfasis en la coordinación entre lo geométrico y lo numérico en los extremos donde exista algún tipo de discontinuidad. Además, la conexión entre la definición analítica y la representación geométrica de las propiedades de una función continua.
- Noción de derivada: profundizar en la representación geométrica como la pendiente de la recta tangente a un punto de la curva, de una manera dinámica por medio del uso de programas como Geogebra³³. De la misma manera, indagar lo que se entiende por razón de cambio instantánea o por razón relacionada instantánea, vistas como funciones del tiempo o de otra magnitud.

2.1.2. Conceptos asociados al desarrollo del esquema de integral definida.

El enfoque teórico de la modelación didáctica, basada en los planteamientos cognitivos de la descomposición genética, según lo escrito por Gavilán [14], asume que el desarrollo de un esquema está en función del desarrollo de otros esquemas conceptuales que se configuran como una red alrededor del concepto de interés.

³³ Una buena guía para iniciarse en el uso de este software con esta intención específica se puede recuperar en: http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf

Parece claro que, para construir una imagen descriptiva de la integral definida, las nociones que más se asocian con este elemento matemático corresponden a: la noción de medida, partición, sumas de Darboux, integrales superior e inferior de una función acotada desde el enfoque de Darboux, integral de Darboux, integral de Riemann, equivalencia entre las definiciones de Riemann y Darboux, condiciones para que una función sea integrable, propiedades y teorema del valor medio para integrales, teorema fundamental del cálculo, integración numérica y primitivas de funciones elementales. A continuación se hace una síntesis de estos conceptos mencionando las definiciones y teoremas fundamentales, indicando las respectivas fuentes.

- **Noción de medida:**

Los conjuntos que se utilizan para el estudio de la integral definida de Riemann, para el caso de la recta real \mathbb{R} , corresponden a intervalos $I_B \subset \mathbb{R}$ de la forma (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ entre otros, donde a y $b \in \mathbb{R}$ y $a < b$; o para el caso del plano \mathbb{R}^2 , regiones que son el producto cartesiano de un par de la clase de intervalos precedentes, es decir $\mathcal{R}_B \subset \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{R}_B = I_{B_i} \times I_{B_j}$.³⁴ Se consideran las dos familias compuestas, primero por todos los intervalos de la forma $I_B \subset \mathbb{R}$ y segundo por todas las regiones de la forma $\mathcal{R}_B \subset \mathbb{R}^2$, descritas de manera precedente, denotadas por \mathbb{M} y \mathbb{M}^2 respectivamente.

Intuitivamente se puede observar que los elementos de \mathbb{M} y \mathbb{M}^2 cumplen con las siguientes propiedades:

- ✓ $\mathbb{R} \in \mathbb{M}$ y $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{M}^2$.
- ✓ Si $I_B \in \mathbb{M}$, entonces $I_B^c \in \mathbb{M}$. También, si $\mathcal{R}_B \in \mathbb{M}^2$, entonces $\mathcal{R}_B^c \in \mathbb{M}^2$.
- ✓ Si $I_{B_1}, I_{B_2}, \dots, I_{B_n}, \dots \in \mathbb{M}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{B_i} \in \mathbb{M}$. También, si $\mathcal{R}_{B_1}, \mathcal{R}_{B_2}, \dots, \mathcal{R}_{B_m}, \dots \in \mathbb{M}^2$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}_{B_j} \in \mathbb{M}^2$.

Definición1: Espacios medibles.

³⁴ Se notan I_B y \mathcal{R}_B , para hacer referencia a la σ – álgebra de Borel en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , tal como lo explica Blanco [2].

A las duplas $\langle \mathbb{R}, \mathbb{M} \rangle$ y $\langle \mathbb{R}^2, \mathbb{M}^2 \rangle$ construidas anteriormente se les denomina espacios medibles. A los elementos de las familias \mathbb{M} y \mathbb{M}^2 se les llama conjuntos medibles.

A un espacio medible se le puede asignar una función definida entre la familia de conjuntos medibles y el conjunto de los números reales, denotada por m , tal que:

$$m: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2-1)$$

$$I_B \mapsto m(I_B),$$

$$m: \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2-2)$$

$$\mathcal{R}_B \mapsto m(\mathcal{R}_B),$$

y m cumple con las siguientes propiedades³⁵:

✓ **Propiedad de no negatividad.**

Para cada conjunto $I_B \in \mathbb{M}$ y $\mathcal{R}_B \in \mathbb{M}^2$, sus medidas son no-negativas:.

$$m(I_B) \geq 0, \quad (2-3)$$

$$m(\mathcal{R}_B) \geq 0, \quad (2-4)$$

✓ **Propiedad aditiva.**

Si I_{B_i} y I_{B_j} están en \mathbb{M} , entonces $I_{B_i} \cap I_{B_j}$ y $I_{B_i} \cup I_{B_j}$ también pertenecen a \mathbb{M} . De igual manera, Si \mathcal{R}_{B_i} y \mathcal{R}_{B_j} están en \mathbb{M}^2 , entonces $\mathcal{R}_{B_i} \cap \mathcal{R}_{B_j}$ y $\mathcal{R}_{B_i} \cup \mathcal{R}_{B_j}$ también pertenecen a \mathbb{M}^2 . Además,

$$m(I_{B_i} \cup I_{B_j}) = m(I_{B_i}) + m(I_{B_j}) - m(I_{B_i} \cap I_{B_j}), \quad (2-5)$$

$$m(\mathcal{R}_{B_i} \cup \mathcal{R}_{B_j}) = m(\mathcal{R}_{B_i}) + m(\mathcal{R}_{B_j}) - m(\mathcal{R}_{B_i} \cap \mathcal{R}_{B_j}). \quad (2-6)$$

✓ **Propiedad de la diferencia.**

Si I_{B_i} y I_{B_j} están en \mathbb{M} , siendo $I_{B_i} \subseteq I_{B_j}$, entonces $I_{B_j} - I_{B_i} \in \mathbb{M}$. Análogamente si \mathcal{R}_{B_i} y \mathcal{R}_{B_j} están en \mathbb{M}^2 , siendo $\mathcal{R}_{B_i} \subseteq \mathcal{R}_{B_j}$, entonces $\mathcal{R}_{B_j} - \mathcal{R}_{B_i} \in \mathbb{M}^2$. Además,

$$m(I_{B_j} - I_{B_i}) = m(I_{B_j}) - m(I_{B_i}), \quad (2-7)$$

$$m(\mathcal{R}_{B_j} - \mathcal{R}_{B_i}) = m(\mathcal{R}_{B_j}) - m(\mathcal{R}_{B_i}). \quad (2-8)$$

³⁵ Tomadas de Apostol [1].

✓ **Invariancia por congruencia.**

Si $I_B \in \mathbb{M}$ y A es congruente a I_B , entonces $A \in \mathbb{M}$ y:

$$m(I_B) = m(A). \quad (2 - 9)$$

De igual manera, si $R_B \in \mathbb{M}^2$ y B es congruente a R_B , entonces $B \in \mathbb{M}^2$ y:

$$m(R_B) = m(B). \quad (2 - 10)$$

✓ **Elección de escala.**

Todo segmento \overline{AB} pertenece a \mathbb{M} . Si los extremos de \overline{AB} son a y b respectivamente, entonces:

$$m(\overline{AB}) = |b - a|. \quad (2 - 11)$$

Análogamente, todo rectángulo R pertenece a \mathbb{M}^2 . Si los lados de R tienen longitudes $m(\overline{A_i B_i})$ y $m(\overline{A_j B_j})$ respectivamente, entonces:

$$m(R) = m(\overline{A_i B_i}) \cdot m(\overline{A_j B_j}). \quad (2 - 12)$$

✓ **Propiedad de exhaustión.**

Sea A un conjunto que se puede encerrar entre dos intervalos I_{B_i} y I_{B_j} que están en \mathbb{M} , de tal manera que:

$$I_{B_i} \subseteq A \subseteq I_{B_j}, \quad (2 - 13)$$

si existe uno y sólo un número α que satisface las desigualdades:

$$m(I_{B_i}) \leq \alpha \leq m(I_{B_j}), \quad (2 - 14)$$

para todos los intervalos I_{B_i} y I_{B_j} que satisfacen (2 - 13), entonces $A \in \mathbb{M}$ y:

$$m(A) = \alpha. \quad (2 - 15)$$

De igual manera, Sea B un conjunto que se puede encerrar entre dos regiones R_{B_i} y R_{B_j} que están en \mathbb{M}^2 , de tal manera que:

$$R_{B_i} \subseteq B \subseteq R_{B_j}, \quad (2 - 16)$$

si existe uno y sólo un número β que satisface las desigualdades:

$$m(R_{B_i}) \leq \beta \leq m(R_{B_j}), \quad (2 - 17)$$

para todos las regiones escalonadas³⁶ R_{Bi} y R_{Bj} que satisfacen la relación (2 – 16), entonces $B \in \mathbb{M}^2$ y:

$$m(B) = \beta. \quad (2 - 18)$$

Definición2: Espacios de medida euclidiana.

A las triplas $\langle \mathbb{R}, \mathbb{M}, m \rangle$ y $\langle \mathbb{R}^2, \mathbb{M}^2, m \rangle$ construidas anteriormente se les denomina espacios de medida euclidiana.

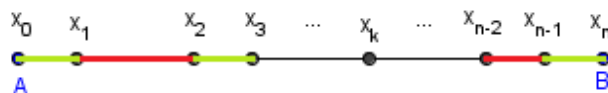
En adelante, todo intervalo I_B se notará simplemente como I . De manera análoga, toda región R_B , se notarán I y R .

- **Noción de partición:**

Definición3: Partición de un intervalo cerrado en \mathbb{R} .

Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$. La sucesión finita creciente de números $\{x_n\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$, es una partición P_n del intervalo $[a, b]$.

Esta partición genera $n - \text{subintervalos}$ cerrados de $[a, b]$, que al unirlos componen el intervalo, tal como se muestra en la figura.



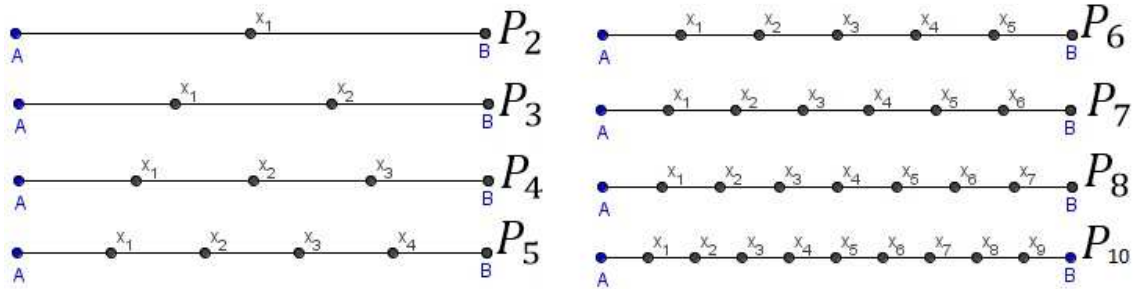
(Figura 2 – 1)

Se simboliza $\Delta(P_n) = \{[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ a la familia de intervalos cerrados con interiores disyuntos dos a dos, determinados por la partición P_n . Debe notarse que la longitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ no necesariamente es la misma para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

³⁶ Entiéndase por región escalonada, tal como la interpreta Apostol [1]: la reunión de una colección o familia finita de rectángulos con bases en el eje de las abscisas se llama región escalonada.

Definición 4: familia de particiones.

La familia de todas las particiones finitas del intervalo $[a, b]$, se designa como $\mathbb{P}([a, b]) = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$. En la siguiente figura se muestran algunas particiones del segmento $[a, b]$ que generan intervalos congruentes.



(Figura 2 – 2)

Definición 5: Refinamientos y propiedades.

Dadas dos particiones P_i y P_j que pertenecen a $\mathbb{P}([a, b])$, tales que $P_i \subsetneq P_j$, entonces se dice que P_j es un refinamiento de P_i , o que P_j es más fina que P_i . Por lo tanto, en $\mathbb{P}([a, b])$ hay definida una relación de orden parcial³⁷. Adicionalmente, si P_j es más fina que P_i , cada intervalo cerrado $I_{P_i} \in \Delta(P_i)$ es unión de aquellos intervalos $I_{P_j} \in \Delta(P_j)$ que se encuentran contenidos en I_{P_i} y por tanto:

$$m(I_{P_i}) = \sum m(P_j) \quad (2 - 19)$$

- **Sumas de Darboux.**

Definición 6: Suma superior y suma inferior de Darboux.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, tal que:

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq C. \quad (2 - 20)$$

Toda $P_n \in \mathbb{P}(I)$ genera una familia $\Delta(P_n)$ de n intervalos cerrados que son subconjuntos de I , notados aquí como S_i .

Si, $\forall S_i \in \Delta(P)$ se define:

³⁷ Es bueno recordar que una relación de orden parcial no implica que todas las particiones estén relacionadas por medio de la contención, esto es, existen al menos dos particiones donde no es posible establecer si una es más fina que la otra.

$$B_{S_i}(f) = \max\{f(x) : x \in S_i\} \leq C \wedge l_{S_i}(f) = \min\{f(x) : x \in S_i\} \geq -C, \quad (2 - 21)$$

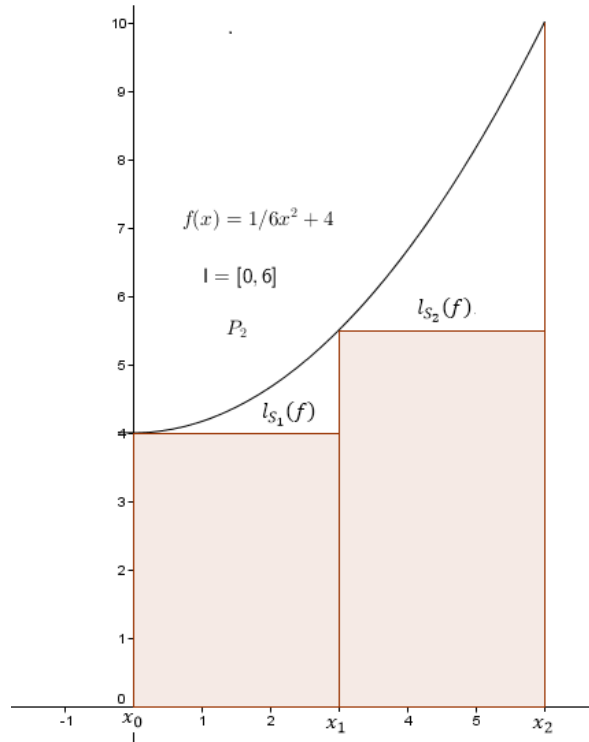
Entonces a cada $P_n \in \mathbb{P}(I)$ se le asocian las sumas superior e inferior de Darboux definidas respectivamente como:

$$U(f, P_n) = \sum_{S \in \Delta(p)} B_{S_i}(f) \cdot m(S_i) \wedge L(f, P_n) = \sum_{S \in \Delta(p)} l_{S_i}(f) \cdot m(S_i). \quad (2 - 22)$$

Vale aclarar que en el enfoque de Darboux $m(S_i) = m(\overline{x_{i-1}x_i}) = \frac{m(I)}{n}$, esto es, todos los intervalos S_i de $\Delta(P_n)$ son congruentes. Teniendo en cuenta estas precisiones, también se pueden denotar estas sumas de Darboux como:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{S \in \Delta(P)} B_S(f) \cdot (x_i - x_{i-1}) \wedge \\ L(f, P) &= \sum_{S \in \Delta(P)} l_S(f) \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (2 - 23)$$

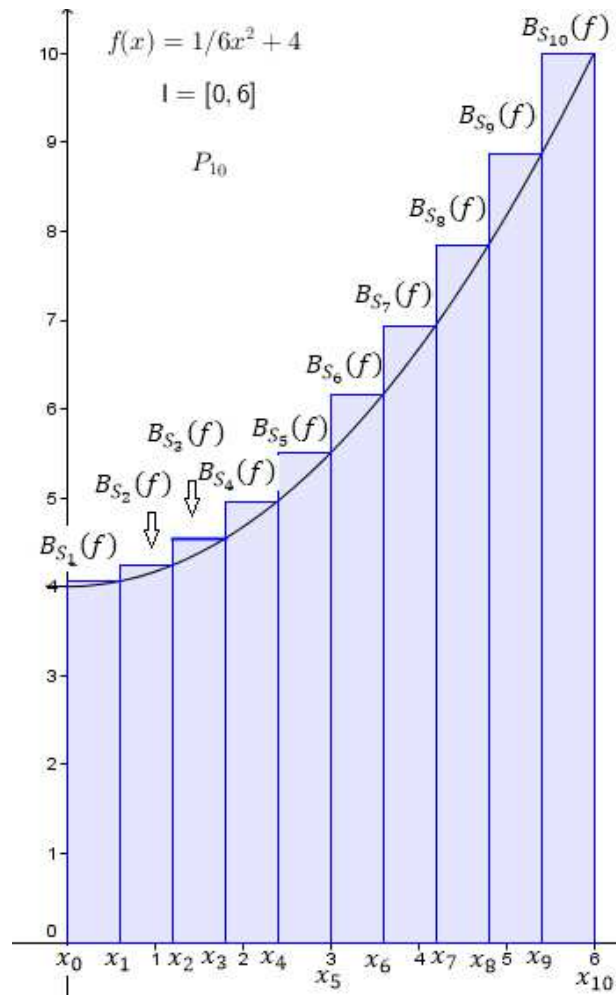
Se puede ver una interpretación gráfica de estas sumas para $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$.



(Figura 2 – 3)

Debe notarse que $\forall x \in [0,6]$, se cumple que $\left| \frac{1}{6}x^2 + 4 \right| \leq 10$, esto es, $f(x)$ es acotada en $[0,6]$. En la figura (2 – 3), la partición P_2 genera la familia de intervalos $\Delta(P_2) = \{S_1 = [0,3], S_2 = [3,6]\}$. Ahora, se puede observar que $l_{S_1}(f) = \min\{f(x): x \in [0,3]\} = f(0) = 4$ y $l_{S_2}(f) = \min\{f(x): x \in [3,6]\} = f(3) = \frac{11}{2} = 5,5$. Entonces, a P_2 se le asocia la suma inferior de Darboux dada por la ecuación (2 – 22) equivalente a $L(f, P_2) = (l_{S_1}(f) \cdot (x_1 - x_0)) + (l_{S_2}(f) \cdot (x_2 - x_1)) = (4 \cdot (3 - 0)) + \left(\frac{11}{2} \cdot (6 - 3)\right) = \frac{57}{2} = 28,5$ unidades cuadradas.

Ahora, en la figura (2 – 4) se puede observar el caso de la suma superior con respecto a P_{10} .



(Figura 2 – 4)

Haciendo un procedimiento análogo al anterior, aplicando la ecuación (2 – 22) se obtiene que $U(f, P_{10}) = 37,86$ unidades cuadradas.

Como consecuencia inmediata de la definición 6 y teniendo en cuenta la ecuación (2 – 23), se tiene que $\forall P \in \mathbb{P}(I)$, $L(f, P) \leq U(f, P)$ y si P_j es más fina que P_i , entonces $L(f, P_i) \leq L(f, P_j) \leq U(f, P_j) \leq U(f, P_i)$.

- **Integrales superior e inferior de una función acotada desde el enfoque de Darboux.**

Definición 7: Integrales superior e inferior de una función acotada.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, tal que se cumple (2 – 20). Se define el conjunto:

$$\{L(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}, \quad (2 - 24)$$

compuesto por todos los números reales que son sumas inferiores de f , generadas por las particiones $P \in \mathbb{P}(I)$. De manera análoga, se define el conjunto:

$$\{U(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}, \quad (2 - 25)$$

compuesto por todos los números reales que son sumas superiores de f , generadas por las particiones $P \in \mathbb{P}(I)$. Si se fija $Q \in \mathbb{P}(I)$, tal que $U(f, Q)$ es cota superior de $\{L(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}$; entonces, se define la integral inferior de f sobre I como:

$$\sup\{L(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\} \leq U(f, Q), \quad (2 - 26)$$

y se escribe como:

$$\int_{I_L} f \, dx = \sup\{L(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}, \quad (2 - 27)$$

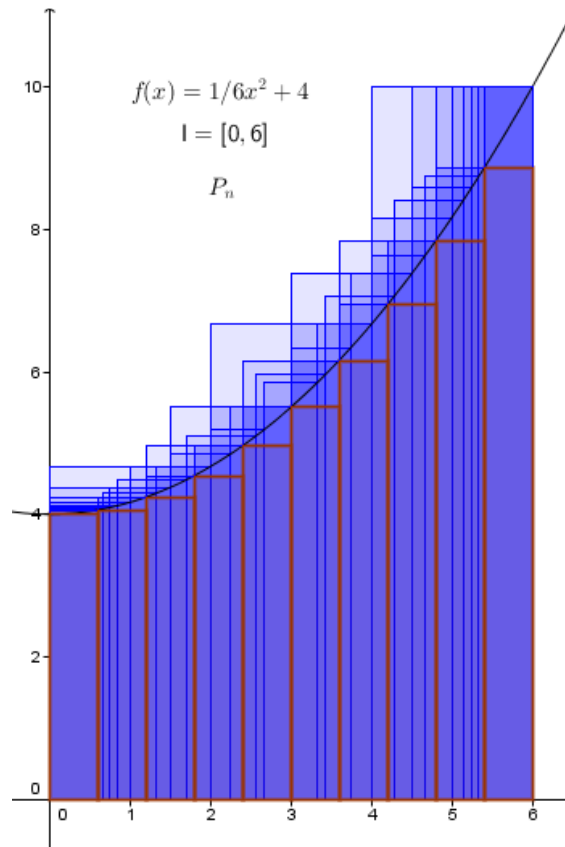
Análogamente, si se fija $Q \in \mathbb{P}(I)$, tal que $L(f, Q)$ es cota inferior de $\{U(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}$, entonces, la integral superior de f sobre I es:

$$\inf\{U(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\} \geq L(f, Q), \quad (2 - 28)$$

y se escribe como:

$$\int_{I_U} f \, dx = \inf\{U(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}. \quad (2 - 29)$$

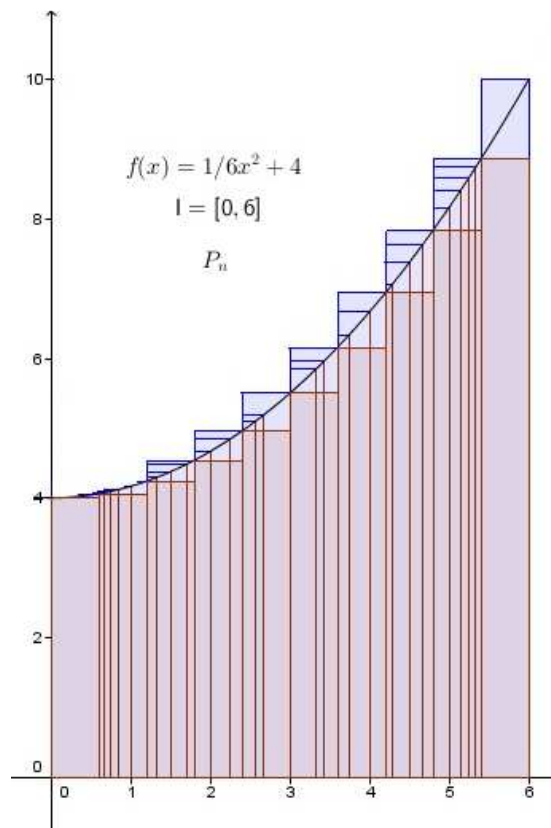
En la figura (Figura 2 – 5) para $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$, se resaltan algunos rectángulos relacionados con la suma inferior generada por P_{10} , después de haber obtenido las sumas superiores correspondientes a $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ y P_{10} . Se puede notar que si se fija $Q = P_{10}$, la suma inferior $L(f, P_{10}) = 34,26$ unidades cuadradas es cota inferior del conjunto de las sumas superiores $\{U(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1,2,3, \dots, 10\}\}$. Entonces, la integral superior de $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$ sobre $[0,6]$, notada como $\int f(x)_{[0,6]_U} dx$ es el $\inf\{U(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1,2,3, \dots, 10\}\} \geq 34,26$.



(Figura 2 – 5)

En la figura (Figura 2 – 6) de manera similar, se ilustra la integral inferior para $f: [0,6] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$. Los rectángulos azules representan la suma superior generada por P_{10} , después de haber obtenido las sumas inferiores correspondientes a $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ y P_{10} . De la misma manera, si se fija

$Q = P_{10}$, la suma superior $U(f, P_{10}) = 37,86$ unidades cuadradas es cota superior del conjunto de las sumas inferiores $\{L(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$. Entonces, la integral inferior de $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$ sobre $[0, 6]$, notada como $\int f(x)_{[0,6]_L} dx$ es el $\sup\{L(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}\} \leq 37,86$. Para calcular este valor con exactitud, es necesario establecer otras relaciones que se desarrollarán más adelante.



(Figura 2 – 6)

En la figura (Figura 2 – 6) de manera similar, se ilustra la integral inferior para $f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$. Los rectángulos azules representan la suma superior generada por P_{10} , después de haber obtenido las sumas inferiores correspondientes a $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ y P_{10} . De la misma manera, si se fija $Q = P_{10}$, la suma superior $U(f, P_{10}) = 37,86$ unidades cuadradas es cota superior del conjunto de las sumas inferiores $\{L(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$.

Entonces, la integral inferior de $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4$ sobre $[0,6]$, notada como $\int f(x)_{[0,6]_L} dx$ es el $\sup\{L(f, P_n): P_n \in \mathbb{P}(I), i = \{1,2,3, \dots, 10\}\} \leq 37,86$. Para calcular este valor con exactitud, es necesario establecer otras relaciones que se desarrollarán a continuación.

- **Integral de Darboux.**

Definición 8: Integral desde el enfoque de Darboux.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, tal que se cumple (2 – 20). Si:

$$\sup\{L(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\} = \inf\{U(f, P): P \in \mathbb{P}(I)\}, \quad (2 - 30)$$

entonces, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre I . A este valor común se le llama *integral de Darboux* de f sobre I y se escribe:

$$(D) \int_I f dx = \int_{I_L} f dx = \int_{I_U} f dx, \quad (2 - 31)$$

o sencillamente:

$$\int_I f dx. \quad (2 - 32)$$

- **Integral de Riemann.**

Definición 9: Integral de Riemann.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, tal que se cumple (2 – 20). Se dice que f es integrable Riemann en I si existe un número real $A \in \mathbb{R}$ que satisface, la proposición $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que si $P \in \mathbb{P}(I)$, $m(I) < \delta$ y $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_n\} \in I$ son números tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i] \in \Delta(P)$, entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) - A \right| < \varepsilon. \quad (2 - 33)$$

A las sumas $\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ se les denomina Sumas de Riemann. Al número A se le llama Integral de Riemann de f sobre I y se escribe:

$$(R) \int_I f dx, \quad (2 - 34)$$

o sencillamente:

$$\int_I f \, dx. \quad (2 - 35)$$

- **Equivalencia entre las definiciones de Riemann y Darboux.**

Se enuncia el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 1.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es integrable Riemann.
2. f es integrable Darboux.

Esto es:

$$(R) \int_I f \, dx = (D) \int_I f \, dx \quad (2 - 36)$$

En consecuencia, si una función es integrable, no se hace distinción si es integrable Darboux o integrable Riemann sobre un intervalo cerrado. Ahora, a estas funciones se les llama “Integrandos”, a sus integrales se les llama “Integrales Definidas” y al intervalo correspondiente se le denomina “Intervalo de integración”.

- **Condiciones para que una función sea integrable.**

Se enuncian los dos siguientes teoremas sin demostración.

El siguiente teorema muestra una condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable sobre un intervalo cerrado.

Teorema 2.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, tal que se cumple (2 – 20).

Entonces f es integrable sobre I , si y solo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{P}(I)$, tal que:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon. \quad (2 - 37)$$

El teorema a continuación muestra una condición suficiente para que una función sea integrable sobre un intervalo cerrado.

Teorema 3.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$. Entonces f es integrable sobre I .

- **Propiedades de la integral definida.**

De las definiciones de la integral definida según Darboux y Riemann, se deducen las propiedades fundamentales. Según Apostol [1] estas propiedades son:

Teorema 4. Algunas propiedades de la integral definida.

Primera: *Linealidad*

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$ entonces la función $k_1f + k_2g$ también es integrable en I y:

$$\int_a^b (k_1f(x) + k_2g(x))dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx. \quad (2 - 38)$$

Segunda: *Aditividad*

Sea $f(x)$ una función integrable en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$ y $c \in I$. Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \quad (2 - 39)$$

Tercera: *Transformación de la integral definida frente a una traslación.*

Sea $f(x)$ una función integrable en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx. \quad (2 - 40)$$

Cuarta: *Transformación de la integral definida cuando se dilata, contrae o refleja el intervalo de integración.*

Sea $f(x)$ una función integrable en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$ y $k \neq 0 \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx. \quad (2 - 41)$$

En particular, si $k = -1$, se tiene la *reflexión* del intervalo de integración.

Quinta: Comparabilidad de las integrales definidas.

* Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$; tales que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (2 - 42)$$

En particular, si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \quad (2 - 43)$$

* Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$; tal que $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$, entonces:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a). \quad (2 - 44)$$

* Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$;

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \quad (2 - 45)$$

- **Teorema fundamental del cálculo.**

Teorema 5.

Primera parte.

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$, entonces la función $F(x)$ definida por:

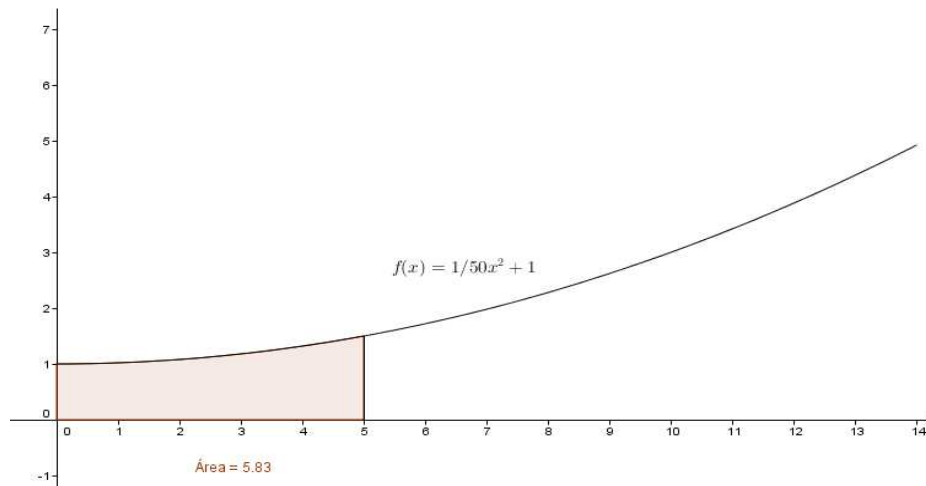
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in I. \quad (2 - 46)$$

Es una función continua y diferenciable en el intervalo I y además satisface la ecuación:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (2 - 47)$$

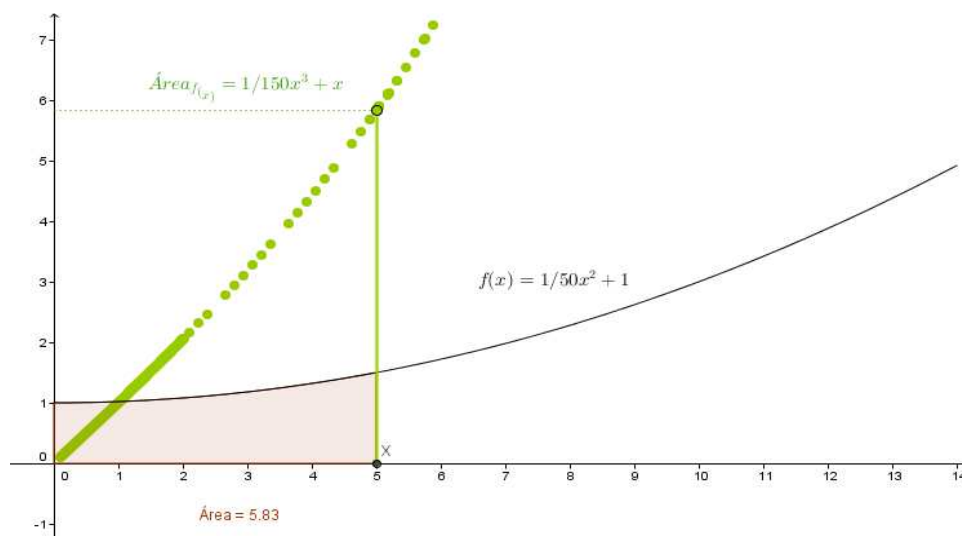
En este caso F se llama anti-derivada de f .

Para ilustrar gráficamente este teorema, en la figura (2 – 7) se muestra la función $f(x) = \frac{1}{50}x^2 + 1$, en el intervalo $[0,14]$ y el área acumulada debajo de su representación gráfica desde la abscisa $x = 0$ a la abscisa $x = 5$, esto es en términos analíticos, $\int_0^5 \left(\frac{1}{50}x^2 + 1\right) dx = \frac{35}{6} \approx 5,83$ unidades cuadradas:



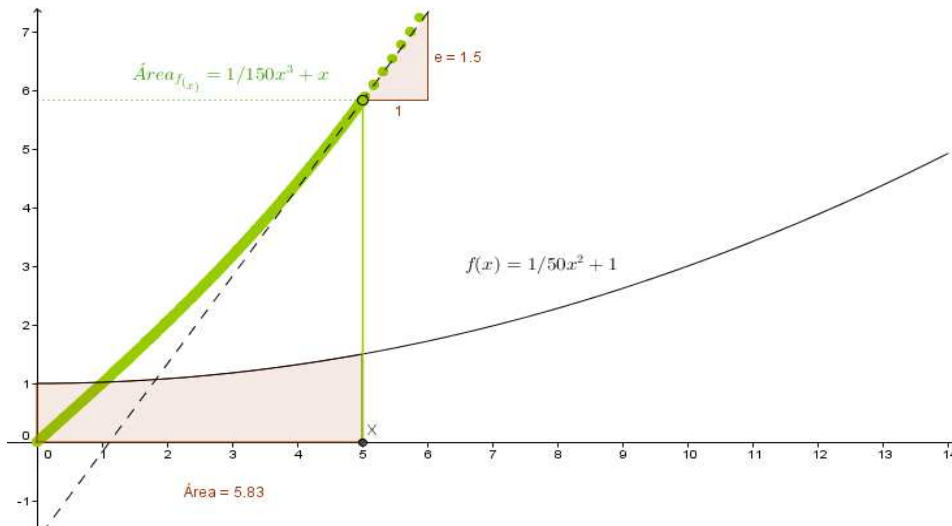
(Figura 2 – 7)

Al definir la función “Área acumulada” de $f(x)$ en el intervalo $[0, X] \subseteq [0,14]$, se tiene $\text{Área}_{f(x)} = \int_0^X \left(\frac{1}{50}t^2 + 1\right) dt$. En la figura (2 – 8) se muestran algunos valores discretos de esta función que corresponde a $\text{Área}_{f(x)} = \frac{1}{150}x^3 + x$. En particular, la ordenada de color verde en la abscisa $x = 5$ corresponde al área acumulada bajo $f(x) = \frac{1}{50}x^2 + 1$ en el intervalo $[0,5]$, $\text{Área}_{f(5)} = \frac{35}{6} \approx 5,83$ unidades cuadradas:



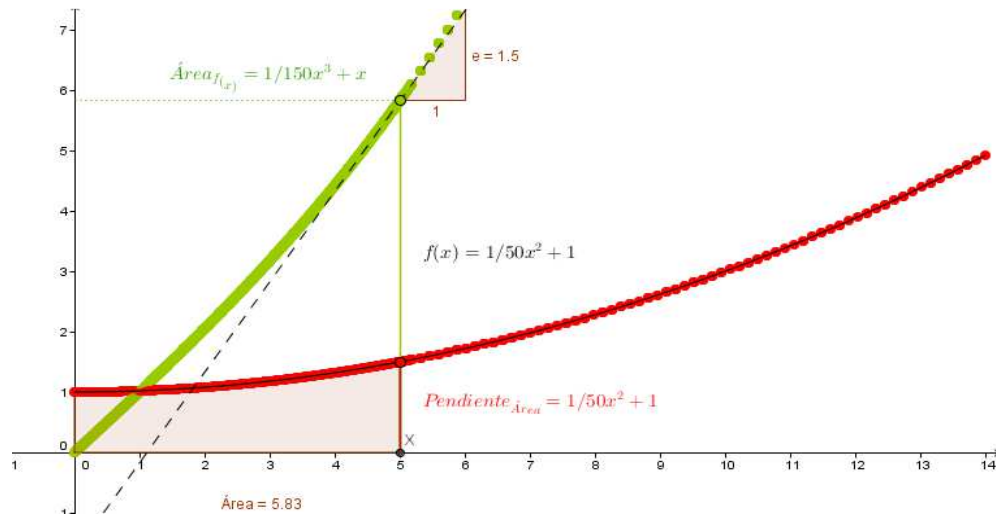
(Figura 2 – 8)

Adicionalmente, si se toma la expresión general del valor de las pendientes de las rectas tangentes a esta función $\text{Área}_{f(x)}$, y se calcula por ejemplo para el punto $(5, \frac{35}{6})$, se obtiene, $m(x) = \frac{d(\text{Área}_{f(x)})}{dx} = \frac{d(\frac{1}{150}x^3 + x)}{dx} = \frac{1}{50}x^2 + 1$; cuando $x = 5$, $m(5) = \frac{3}{2}$ de unidad. En la figura (2 – 9) se ilustra esta situación:



(Figura 2 – 9)

Vale la pena señalar que al definir la función “Pendiente de las rectas tangentes a la función Área acumulada de $f(x)$ ” en el intervalo $[0, X] \subseteq [0, 14]$, se obtiene una equivalencia con la función $f(x)$, es decir, $m(x) = \frac{d(\text{Área}_{f(x)})}{dx} = f(x)$. En la figura (2 – 10) se ilustra con la abscisa de color rojo esta igualdad entre $m(x)$ y $f(x)$, que escrita en términos técnicos corresponde a la relación entre las ecuaciones (2 – 46) y (2 – 47):



(Figura 2 – 10)

Segunda parte.

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$ y $F(x)$ antiderivada particular de la función f en el intervalo I , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2 - 48)$$

Su demostración se verá más adelante.

- **Integración numérica.**

Integración numérica por sumas de Riemann.

Sea $f(x)$ una función integrable, no negativa en el intervalo $I = [a, b]$ y P una partición de I , tal que los n intervalos de $\Delta(P)$ ³⁸ tengan igual longitud. Si \bar{x}_i es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces de acuerdo con Leithold [12], se define:

Definición 9. Regla del punto medio.

³⁸ Recordar que $\Delta(P)$ es la familia de intervalos cerrados disyuntos dos a dos determinados por la partición p .

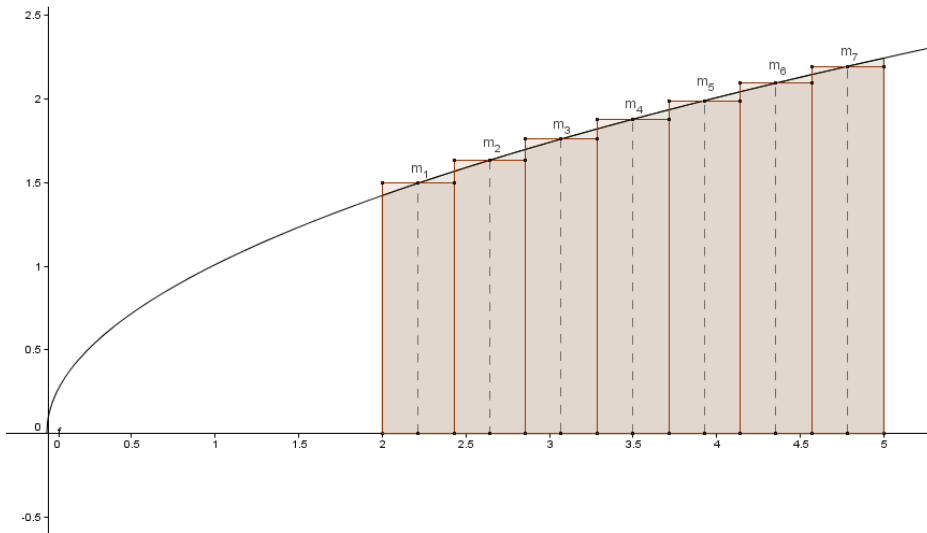
$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x [f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)] = M_n \quad (2 - 49)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = M_n \quad (2 - 50)$$

Donde,

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad y \quad \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad (2 - 51)$$

Es claro que la aproximación de $\int_a^b f(x) dx$ notada como M_n depende del número n de puntos de la partición p . Una interpretación gráfica de la definición precedente puede corresponder al siguiente ejemplo de M_7 para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [2,5]$.



(Figura 2 – 11)

Ahora, como lo muestra Leithold [12] también se puede aproximar el valor de la integral tomando cualquier punto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \Delta(p)$, de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x [f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)] = (AI)_n, \quad (2 - 52)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = (AI)_n, \quad (2 - 53)$$

con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. En particular si se toman los extremos, x_{i-1} o x_i de cada intervalo $I \in \Delta(p)$ se obtienen las aproximaciones de la integral definida en cuestión con extremos izquierdos y con extremos derechos respectivamente.

Definición 10. Aproximación con extremos izquierdos.

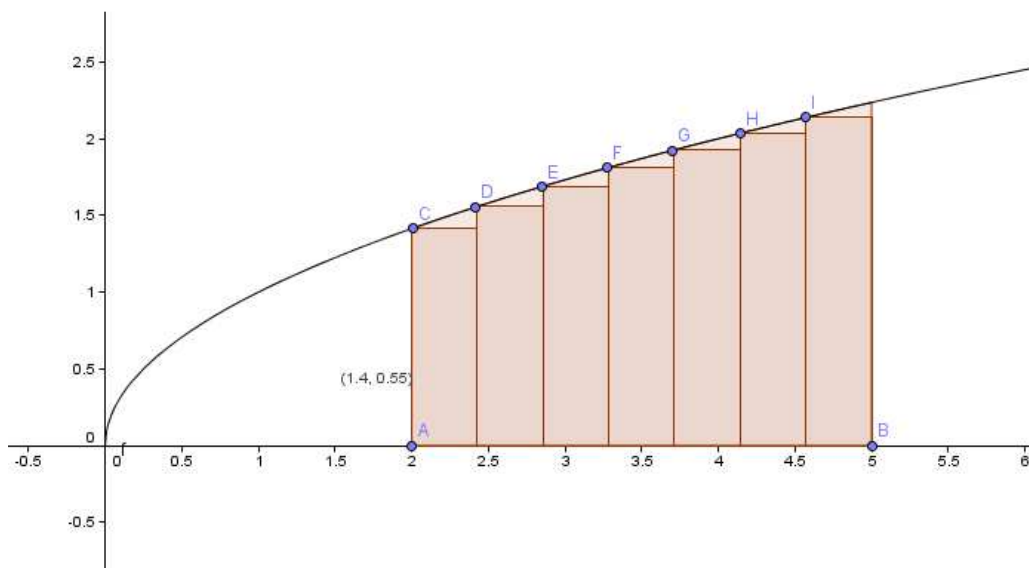
$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] = L_n \quad (2-54)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = L_n, \quad (2-55)$$

donde,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \quad (2-56)$$

La siguiente gráfica corresponde a un ejemplo de L_7 para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [2,5]$.



(Figura 2 – 12)

Definición 11. Aproximación con extremos derechos.

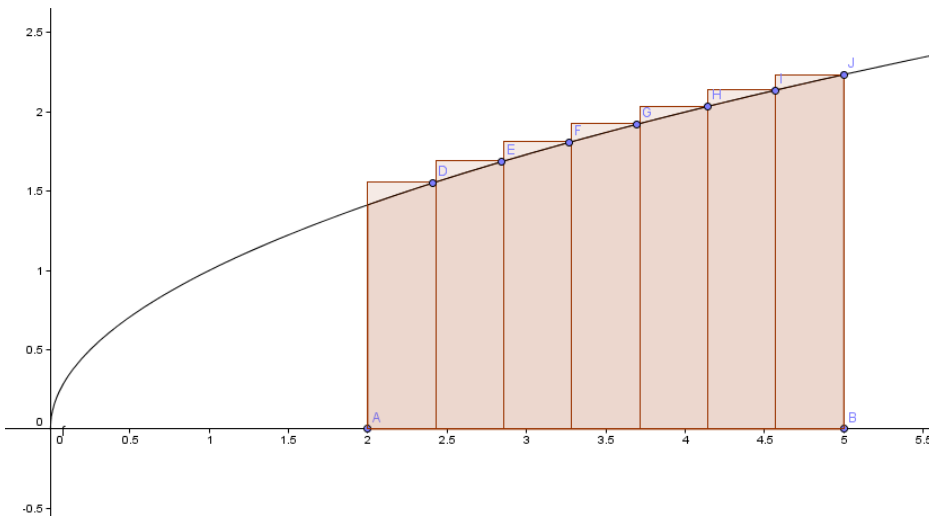
$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x [f(x_1) + f(x_1) + \dots + f(x_n)] = R_n \quad (2-57)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = R_n \quad (2 - 58)$$

Donde,

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}. \quad (2 - 59)$$

La siguiente gráfica corresponde a un ejemplo de R_7 para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $I = [2,5]$.



(Figura 2 – 13)

Integración numérica por Trapecios.

Con base en las ideas de Leithold [12], al tomar el promedio de las aproximaciones L_n y R_n ; se obtiene:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{L_n + R_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] \quad (2 - 60)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \{ \Delta x [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + \Delta x [f(x_1) + f(x_1) + \dots + f(x_n)] \}$$

(2 – 61)

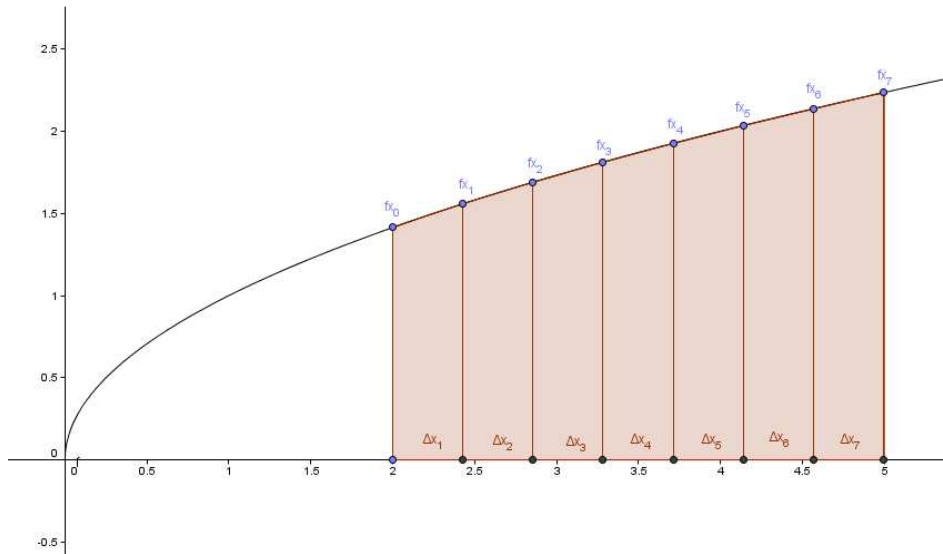
Reorganizando la expresión se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left\{ \frac{\Delta x [f(x_0) + f(x_1)]}{2} \right\} + \left\{ \frac{\Delta x [f(x_1) + f(x_2)]}{2} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{\Delta x [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})]}{2} \right\} + \left\{ \frac{\Delta x [f(x_{n-1}) + f(x_n)]}{2} \right\}$$

(2 – 62)

Para apoyar el razonamiento, se tiene en cuenta la siguiente interpretación gráfica:



(Figura 2 – 14)

Donde,

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = \Delta(x_3) = \Delta(x_4) = \Delta(x_5) = \Delta(x_6) = \Delta(x_7) = \Delta(x). \quad (2 – 63)$$

Luego, al tomar la media aritmética de las aproximaciones con los extremos de las sumas de Riemann, se obtiene una nueva aproximación llamada regla del trapecio, que consta de las sumas de las áreas de los trapecios cuyas bases corresponden a las ordenadas de los extremos de cada intervalo que pertenece a $\Delta(P)$ y con altura constante igual a $\Delta(x)$.

La ecuación (2 – 62), comúnmente se presenta como el siguiente teorema, que según Leithold [12] se enuncia así:

Teorema 6. Regla del Trapecio.

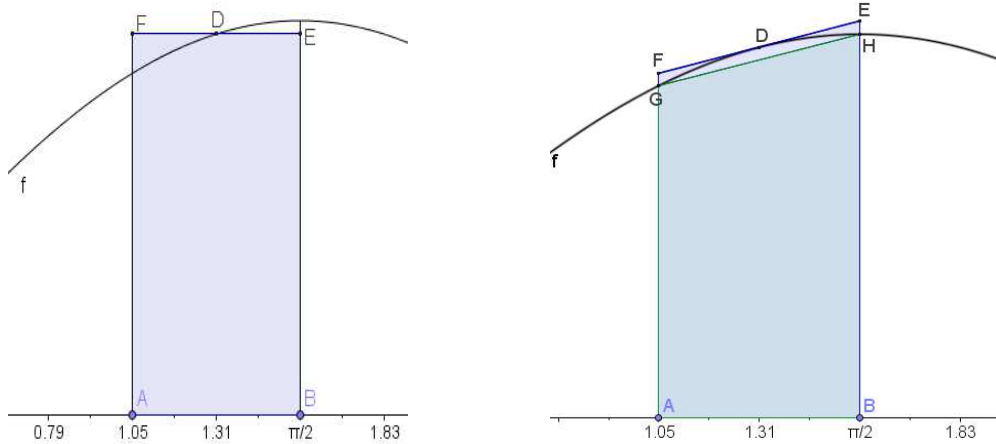
Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ y los números $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ que forman una partición de I , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)] = T_n \quad (2-64)$$

Donde cada altura de los diferentes trapecios tiene como medida,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \quad (2-65)$$

Según Leithold [12], en la mayoría de los casos se puede observar que el error causado por la regla del punto medio es menor que el error por la regla del trapecio, según el siguiente razonamiento intuitivo: en la figura (2-6), dado que el punto D corresponde a la proyección del punto medio del segmento \overline{AB} sobre la curva f , el área del rectángulo $AFEB$ en la izquierda, coincide con el área del trapecio $AFEB$ en la derecha, donde el segmento \overline{FE} es parte de la tangente a f en el punto D . Entonces, se aprecia en la derecha que el área del trapecio $AFEB$ se aproxima mejor al área bajo la curva de f entre las abscisas $x = A$ y $x = B$, que el área del trapecio $AGHB$.



(Figura 2 – 15)

Observaciones sobre los respectivos errores para la mayoría de los casos:

- ✓ En todos los métodos de aproximación, en la medida que se tomen particiones más finas, disminuye el error; pero se debe tener precaución por un nuevo error dado por el redondeo en los cálculos aritméticos.

- ✓ Si $n \rightarrow \infty$, tanto M_n como L_n , R_n y T_n todas tienden a $\int_a^b f(x)dx$, pero cuidado con el error por redondeo.
- ✓ Los errores en las aproximaciones con los extremos izquierdo y derecho tienen signos opuestos y tienden a disminuir en un factor de dos (2) al duplicar el valor de n .
- ✓ Los errores en las aproximaciones con las reglas M_n y T_n tienen signos opuestos y tienden a disminuir en un factor de cuatro (4) al duplicar el valor de n .
- ✓ Las aproximaciones por M_n y T_n son más exactas que por L_n y R_n .
- ✓ El error con M_n es, aproximadamente, la mitad del error con T_n .

Teorema 7. Error por truncamiento generado al usar las reglas del punto medio y del trapecio.

Sea una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$, tal que f' y f'' existen en I , entonces:

$$E_{M_n} = \int_a^b f(x)dx - M_n \text{ y } E_{T_n} = \int_a^b f(x)dx - T_n \quad (2 - 66)$$

Además, si $|f''(x)| \leq K$ en I , con $K \in \mathbb{R}$; entonces los errores precedentes se pueden estimar en los intervalos:

$$|E_{M_n}| \leq \frac{k(b-a)^3}{24n^2} \text{ y } |E_{T_n}| \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2} \quad (2 - 67)$$

Con el teorema anterior se puede estimar el tamaño n de la partición P , con el cual se obtenga un error esperado, tanto, por M_n como por T_n , sencillamente despejando el valor de n en las desigualdades.

Integración numérica por segmentos parabólicos.

En la regla del trapecio T_n para una partición P de $I = [a, b]$, dos puntos sucesivos $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i(x_i, f(x_i))$ forman el segmento correspondiente al lado superior de uno de sus $i - \text{ésimos}$ trapecios. En la siguiente forma de aproximar el

área bajo la curva de $f(x)$, denominada la regla de Simpson, los puntos sucesivos³⁹ $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, f(x_i))$ y $P_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ hacen parte de un arco parabólico que aproximará en el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ la curva correspondiente a $f(x)$. Conocidos tres puntos en el plano, el área dentro de un arco parabólico, el eje de las abscisas y las rectas que pasan por x_{i-1} y x_{i+1} , se determina tal como lo muestra el siguiente teorema basado en las ideas de Leithold [12], cuya demostración se encuentra en esta misma referencia.

Teorema 7. Área de la región limitada por un arco parabólico sobre el eje de las abscisas.

Sean $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, $P_{i-1}(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, g(x_i))$, $P_{i+1}(x_{i+1}, g(x_{i+1}))$ y $\Delta(x)$, una parábola, tres puntos no colineales de $g(x)$ y $\Delta(x) = x_i - x_{i-1}$ respectivamente, tales que $\forall j \in \{-1, 0, 1\}$, $g(x_{i+j}) \geq 0$ y $x_{i+j} = x_{i-1} + (1+j)h$; entonces, el área de la región limitada por $g(x)$, el eje de las abscisas, las rectas $x = x_0$ y $x = x_2$, notada como A_{ap} "Área bajo el Arco Parabólico", viene dada por la expresión:

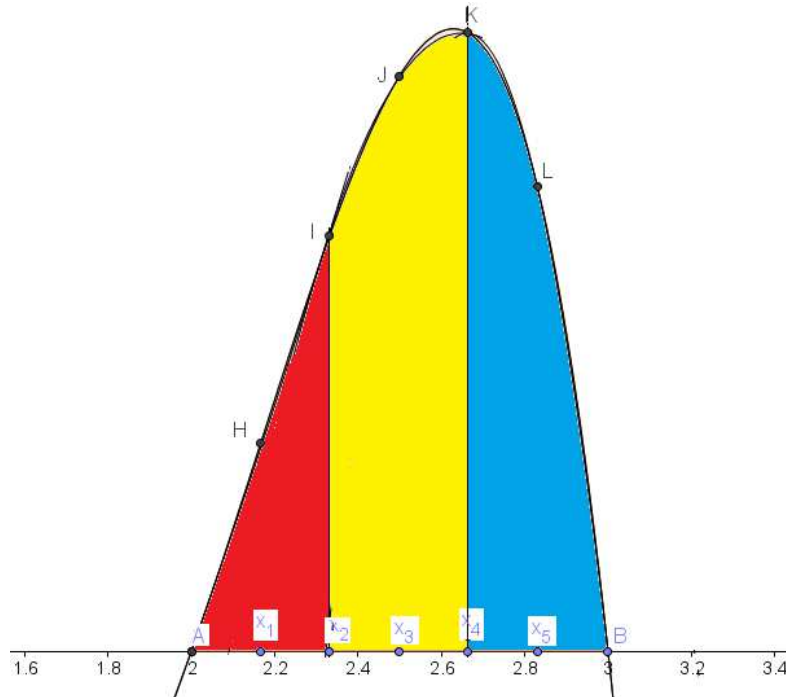
$$A_{ap} = \frac{\Delta(x)}{3} [g(x_{i-1}) + 4g(x_i) + g(x_{i+1})]. \quad (2 - 68)$$

Para ilustrar el uso de este teorema en la regla de Simpson, tengamos en cuenta la figura (2 - 7). En ella se aprecia que las áreas limitadas por cada uno de los arcos de parábola $g(x)$ que aparecen en colores distintos, se aproximan con muy poco error al área bajo la curva de $f(x)$ en cada uno de los tres intervalos. Nótese también que si las abscisas de los puntos A y B son respectivamente x_0 y x_6 , la partición genera un número par de intervalos que cubren toda el área en $I = [2,3]$.

También se puede observar intuitivamente la razón por la cual el número de intervalos que genera la partición p debe ser par, puesto que cada arco de parábola debe contener por lo menos tres (3) puntos para definir la parábola que los

³⁹ Es bueno recordar que un conjunto de tres puntos no colineales en el plano, determinan perfectamente una parábola.

contiene. Si el número fuera impar, quedaría un sector del área bajo $f(x)$ sin aproximar por medio de esta regla.



(Figura 2 – 16)

Con base en la figura y las observaciones precedentes, se puede hacer la siguiente deducción: tomando $g_1(x) = A_1x^2 + B_1x + C_1$ que contiene los puntos $A(x_0, g_1(x_0))$, $H(x_1, g_1(x_1))$ e $I(x_2, g_1(x_2))$, con $\Delta(x) = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$; entonces,

$$A_{ap_1} = \frac{\Delta(x)}{3} [g_1(x_0) + 4g_1(x_1) + g_1(x_2)]. \quad (2 - 69)$$

Ahora, si $g_2(x) = A_2x^2 + B_2x + C_2$ que contiene los puntos $I(x_2, g_2(x_2))$, $J(x_3, g_2(x_3))$ y $K(x_4, g_2(x_4))$, con $\Delta(x) = x_3 - x_2 = x_4 - x_2$; entonces,

$$A_{ap_2} = \frac{\Delta(x)}{3} [g_2(x_2) + 4g_2(x_3) + g_2(x_4)]. \quad (2 - 70)$$

Finalmente, si $g_3(x) = A_3x^2 + B_3x + C_3$ que contiene los puntos $K(x_4, g_3(x_4))$, $L(x_5, g_3(x_5))$ y $B(x_6, g_3(x_6))$, con $\Delta(x) = x_5 - x_4 = x_6 - x_4$; entonces,

$$A_{ap_3} = \frac{\Delta(x)}{3} [g_3(x_4) + 4g_3(x_5) + g_3(x_6)]. \quad (2 - 71)$$

Pero las ordenadas de $f(x)$ son iguales a $g_j(x)$ en cada arco parabólico, esto es, $f(x_i) = g_j(x_i)$ para $x_i = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $g_j = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$, siendo m el número de arcos parabólicos distintos en que se dividió la curva de $f(x)$ en I , luego:

$$A_{ap_1} = \frac{\Delta(x)}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (2 - 72)$$

$$A_{ap_2} = \frac{\Delta(x)}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \quad (2 - 73)$$

$$A_{ap_3} = \frac{\Delta(x)}{3} [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \quad (2 - 74)$$

Entonces en el ejemplo de la figura (2 - 7) se tiene:

$$\int_{a=x_0=2}^{b=x_6=2} f(x)dx \approx A_{ap_1} + A_{ap_2} + A_{ap_3} \quad (2 - 75)$$

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0=2}^{b=x_6=2} f(x)dx & \\ & \approx \frac{\Delta(x)}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + f(x_4) \\ & + 4f(x_5) + f(x_6)] \end{aligned} \quad (2 - 76)$$

$$\begin{aligned} \int_{a=x_0=2}^{b=x_6=2} f(x)dx & \\ & \approx \frac{\Delta(x)}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) \\ & + f(x_6)] \end{aligned} \quad (2 - 77)$$

En la última ecuación se puede intuir un patrón en los coeficientes de las ordenadas de los órdenes impares y pares de las abscisas, correspondientes a los puntos de $f(x)$ generados por la partición p : La primera $f(x_0)$ y la última $f(x_6)$ (ambas pares) tienen coeficiente uno (1), las otras pares intermedias tienen coeficiente dos (2) y las impares tienen coeficiente (4).

La anterior comprobación motiva el siguiente teorema, llamado la Regla de Simpson.

Teorema 8. Regla de Simpson.

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ y los números $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ que forman una partición de I , donde n es par; entonces,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta(x)}{3} \{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\} \\ = S_n \quad (2 - 78)$$

donde,

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}. \quad (2 - 79)$$

Se puede demostrar una relación entre S_{2n} , T_n y M_n , por medio del siguiente teorema, según una observación hecha por Leithold [12].

Teorema 9. Relación entre la regla de Simpson y las reglas del punto medio y del trapecio.

Las aproximaciones con la regla de Simpson son promedios ponderados de las cantidades que se usan en las reglas del punto medio y del trapecio, es decir;

$$S_{2n} = \frac{2}{3}M_n + \frac{1}{3}T_n \quad (2 - 80)$$

Finalmente se puede demostrar que el error con la regla de Simpson decrece en un factor aproximado de dieciséis, cuando se duplica n . Esto se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 10. Error por truncamiento generado al usar la regla de Simpson.

Sea una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $I = [a, b]$, tal que f' , f'' , f''' y $f^{(IV)}$ existen en I , entonces:

$$E_{S_n} = \int_a^b f(x)dx - S_n. \quad (2 - 81)$$

Además, si $|f^{(IV)}(x)| \leq K$ en I , con $K \in \mathbb{R}$; entonces el error precedente se pueden estimar en el intervalo:

$$|E_{M_n}| \leq \frac{k(b-a)^5}{180n^4}. \quad (2 - 82)$$

De la misma manera que en el análisis hecho a los errores de T_n y M_n , se puede estimar el tamaño n de la partición p , con el cual se obtenga un error esperado, por S_n ; sencillamente despejando el valor de n en la desigualdad.

- **Primitivas de funciones elementales.**

Definición 12. Definición de primitivas.

Una función $F(x)$ que satisface la siguiente ecuación, para todo punto del intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\frac{d(F(x))}{dx} = f(x), \quad (2 - 83)$$

se denomina una primitiva de $f(x)$ en I .

Teorema 11. Primitivas de funciones continuas.

Una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado, siempre admitirá una primitiva en ese intervalo.

Noción de una función elemental y primitivas elementales.

Una función elemental puede obtenerse mediante la suma, multiplicación, división y descomposición a partir de funciones racionales, trigonométricas, arco, logarítmicas y exponenciales. De acuerdo con Spivack [20] en general no es posible encontrar primitivas elementales y con base en los ejemplos mostrados por Ivorra⁴⁰ sobre funciones de variable real sin primitiva elemental se tiene:

- ✓ $\int e^{p(x)} dx$, siendo $p(x)$ un polinomio con grado ≥ 2 .
- ✓ $\int \frac{dx}{\ln|x|}$.
- ✓ $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

⁴⁰ Recuperable en <http://www.uv.es/ivorra/>.

- ✓ $\int \sin(p(x))dx$ y $\int \cos(p(x))dx$, siendo $p(x)$ un polinomio con grado ≥ 2 .
- ✓ $\int e^{e^x} dx$.
- ✓ $\int \ln(\ln|x|)dx$.
- ✓ $\int e^x \ln|x|dx$.
- ✓ $\int \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx$, si $0 < k < 1$.
- ✓ $\int \sqrt{x^3 - 1} dx$
- ✓ $\int x^k(b + ax^h)^q dx$, si y solo si, todos los números $q, \frac{k+1}{h}, \frac{k+1}{h} + q$ no son enteros, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $h, k, q \in \mathbb{Q}$ son todos no nulos.

Conjunto de todas las primitivas de una función continua.

Si suponemos que $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces, existe una constante real C tal que:

$$G(x) + C = F(x). \quad (2 - 84)$$

Esto es razonable por lo teoremas de diferenciación, específicamente la derivada de una suma y la derivada de una función constante. Este resultado motiva la siguiente definición de integral indefinida.

Definición 13. Integral indefinida

Sea $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ continua en un intervalo, entonces, la integral indefinida de $f(x)$ se define como el conjunto de primitivas de $f(x)$ que difieren entre sí por una constante. Se utiliza un símbolo especial para denotar esta familia uniparamétrica correspondiente a una “ese” alargada, esto es,

$$\int f(x) dx = \left\{ F(x) + C : \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x), C \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2 - 85)$$

Es bueno señalar que $\int f(x) dx$ es equivalente a $\int f(u) du$ o a $\int f(z) dz$ o a cualquier expresión donde se utilice una variable que cumpla con la estructura anterior. Pero $\int f(y) dx$ no es equivalente a las anteriores, ya que en esta última integral indefinida el término acompañante dx de $f(y)$ hace a $f(y)$ una función constante.

Integrales indefinidas inmediatas.

De la definición de integral indefinida y de los resultados del proceso de derivación, se obtiene la siguiente tabla:

Integrales indefinidas inmediatas	
$\int ax^n dx$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1} + C; n \neq -1$
$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
$\int \sec^2 x dx$	$\tan x + C$
$\int \csc^2 x dx$	$-\cot x + C$
$\int \sec x \cdot \tan x dx$	$\sec x + C$
$\int \csc x \cdot \cot x dx$	$-\csc x + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int a^x dx, a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C; x \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx$	$\arctan x + C$
$\int \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}} dx$	$\operatorname{arcsec} x + C$

Tabla 2 – 1

Teorema 12. Propiedad de linealidad de las integrales indefinidas.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas; entonces,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad (2 - 86)$$

$$\int [kf(x)] dx = k \int f(x) dx. \quad (2 - 87)$$

2.2. Aproximaciones didácticas. Descripción de algunos elementos teóricos.

Como primera medida, de acuerdo con Rodríguez [19], es necesario diferenciar entre teoría del aprendizaje y teoría de la instrucción. En 1964, Bruner⁴¹ especifica que las primeras buscan explicar sistemáticamente los fenómenos de aprendizaje, mientras que las segundas pretenden ordenar los procesos de aprendizaje con intencionalidades específicas. Hecho este contraste, a continuación se sintetizan las herramientas teóricas que facilitan esta propuesta didáctica sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral.

2.2.1. Una perspectiva desde la transmisión social del conocimiento matemático.

Las ideas que motivan esta propuesta, están correlacionadas con los principios y características del enfoque Socioepistemológico. De acuerdo con Cabañas y Cantoral [4], desde esta perspectiva se plantea asumir el conocimiento matemático socialmente situado, dándole valor a sus “escenarios históricos, culturales e institucionales” y su incidencia en la actividad humana. Según Cantoral [5], una de las características de la aproximación socioepistemológica es el pragmatismo, esto es, admitir que el entendimiento del saber matemático proviene de su uso, de su puesta en funcionamiento y no de su declaración⁴² estática.

Para abordar la comprensión del concepto matemático de interés, desde el punto de vista socioepistemológico, un elemento clave corresponde a las prácticas sociales que generan

⁴¹ Citado por Rodríguez [19].

⁴² El término declaración se asocia a la definición y ejemplificación sin tener en cuenta otros elementos que describen la complejidad de sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

su conocimiento. Para Cantoral [5] éstas son vistas como un componente didáctico que acompañan y regulan⁴³ la noción del concepto que se desea construir. Cantoral [5] señala que las prácticas sociales no suplen el saber específico, al contrario, ayudan a cimentar las bases del mismo y se interpretan como la estimulación para hacer lo que se hace, cuando se ponen en juego nociones o conceptos matemáticos. Adicionalmente Cantoral [5] indica que los principales atributos de una práctica social son: es inferible pero no observable, regula los comportamientos grupales, como se dijo antes, acompaña la construcción del conocimiento y son permanentes a través del tiempo haciendo parte de la cultura, esto es, no son espontáneas.

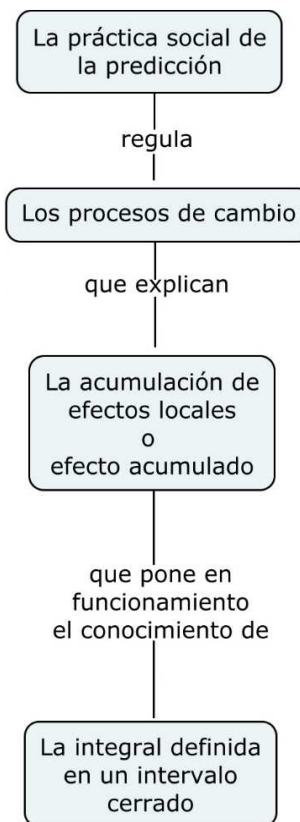
Así mismo, Calvillo [6] citando el trabajo de Montiel en el 2005 relacionado con la construcción social del conocimiento de la función trigonométrica, contrasta las nociones de prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades. A groso modo, en las prácticas sociales se identifican fenómenos, problemas, realidades y herramientas relacionadas con el concepto matemático en ámbitos no escolares donde nace y se usa este conocimiento, por ejemplo el cambio, la variación y la predicción, entre otras. A su vez, en las prácticas de referencia se identifican las vías de construcción de los conceptos, diferenciando dentro de ellas, actividades específicas como la producción de teoremas, lemas, definiciones, procedimientos, métodos y otras propias del andamio lógico-matemático. Para identificar éstas prácticas sociales se pueden hacer diversos trabajos, entre estos, de tipo histórico-epistemológico y de trabajo empírico en el aula.

Consecuente con este enfoque, como se mencionó anteriormente, la intención de esta propuesta es articular el concepto de la integral definida para funciones elementales, con la práctica social de predecir, como una manera de re-significar la noción de integración. La predicción (como práctica social), enlaza los procesos de cambio asociados a la acumulación de efectos locales en un intervalo de variación (que corresponden a una práctica de referencia), los cuales se vinculan y le dan sentido al cálculo de la integral definida de una función acotada en un intervalo cerrado (este cálculo toma el rol de actividad específica del saber matemático), y este a su vez normatiza y ajusta el tarea de

⁴³ Regulan en el sentido de explicar por medio de nociones e ideas, el proceso de construcción social del conocimiento.

las definiciones y teoremas que le caracterizan. En la propuesta, no se desconoce la práctica social de cuantificar, que incorpora a la práctica de referencia asociada a la medida de la cuadratura de curvas; por el contrario, se establece una relación de esta última con el ejercicio de calcular efectos acumulados en un intervalo.

La siguiente figura, esquematiza las relaciones precedentes, entre prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades, para abordar el estudio de la integral definida en un intervalo.



(Figura 2 – 17)

Con respecto a la acción de acumular, en los diccionarios se muestran diferentes definiciones de este término, tales como: “juntar y amontonar progresivamente una

colección de cosas, animales, personas”⁴⁴. “Unir unos elementos a otros para sumar su efecto”⁴⁵.

Vale la pena aclarar, que los diferentes significados asociados a la práctica social de predecir la acumulación de efectos diferenciales o locales, pueden mostrarle a los estudiantes la relación que existe con la operación de integral definida en un intervalo de cambio determinado, claro está, teniendo en cuenta las condiciones de integrabilidad de las funciones que sirven de modelo de variación, a partir de las cuales se genera esta acción de acumular.

Por ejemplo, la teoría económica de la acumulación de capital de Marx, afirma que el capital se acumula por ciclos de producción, cuyo efecto corresponde a la diferencia entre lo producido al final del ciclo y lo invertido al inicio del mismo, esto es, la ganancia. Algo similar ocurre en el montañismo con el desnivel acumulado que corresponde a la suma de todos los desniveles que posee una ruta, donde el desnivel acumulado se convierte en un criterio para clasificar los niveles de dificultad que deben superar este tipo de deportistas. Así mismo, para expresar la actividad de los ciclones tropicales, la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica de los Estados Unidos de Norteamérica, calcula la energía ciclónica acumulada como la suma de los cuadrados de la velocidad máxima estimada y sostenida en intervalos de 6 horas. Como estos ejemplos, existen muchos otros relacionados con la Bioestadística, la Mecánica, la Industria, entre otros, en los cuales el cálculo de un efecto acumulado es de vital importancia.

2.2.2 Un punto de vista para el diseño instruccional.

En palabras de Rodríguez [19], en 1999 Reigeluth, define el diseño instruccional como teoría de los principios y técnicas para organizar la enseñanza en un proceso de aprendizaje que tiene una finalidad determinada. A grandes rasgos, Reigeluth sostiene que los atributos del diseño instruccional deben tener en cuenta aspectos como: centrarse

⁴⁴ Recuperable en www.wordreference.com

⁴⁵ Recuperable en www.thefreedictionary.com.

en los medios que faciliten los objetivos de aprendizaje, ofrecer esquemas para realizar las acciones que guíen el logro de los resultados esperados, identificar situaciones donde se apliquen los procedimientos propios de la instrucción o estrategias didácticas, las cuales tienen un carácter probabilístico en cuanto al nivel del logro de la meta establecida y éstas últimas se puede subdividir en procedimientos más específicos dependiendo de su complejidad.

La estructura de un diseño instruccional, de acuerdo con las ideas Marqués en el 2002⁴⁶, se debe componer fundamentalmente de los objetivos educativos deseados, las características de los estudiantes, el contexto en donde se desarrolla el aprendizaje, la estrategia didáctica a practicar y la evaluación. Acorde con lo propuesto por Rodríguez [19], el esquema de las unidades de instrucción, que acompaña esta propuesta didáctica, se compone de: objetivos, descripción de actividades, materiales y recursos, dinámicas de clase y procedimientos de evaluación.

La secuenciación o estructura del conjunto de conocimientos, que se conjetura, facilitará el aprendizaje de la integral definida en un intervalo de la recta real, que de acuerdo con Rodríguez [19], debe cumplir con criterios como: reconocer el nivel de comprensión de los conocimientos previos desarrollados por los estudiantes que le permitirán abordar el estudio de la integral definida con eficiencia, partir de las nociones más generales para precisar la sistematización de las más específicas, al igual que procurar iniciar con los conocimientos actuales, así sea de manera intuitiva, para relacionarlos posteriormente con los orígenes históricos y culturales, y finalmente incorporar los significados especializados, intentando despojarlos de la motivación inicial que sirvió como pretexto para su construcción con sentido social.

La concreción de los componentes de la unidad de instrucción se realiza en el plan de actividades. La siguiente tabla, ilustra la estructura de dicho plan y sugiere algunas orientaciones cercanas a la actividad matemática descrita por Contreras y Ordoñez [8]:

Unidad No.	Título
------------	--------

⁴⁶ Citado por Rodríguez [19]

Tiempo estimado	# de horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Acordes con la comprensión de conceptos, la significación sistémica de las nociones, reconocimiento de relaciones entre diferentes representaciones de los objetos matemáticos: analítica, gráfica, numérica o de lenguaje natural. 2. Coherentes con habilidades mentales como identificar atributos, comparar, contrastar, clasificar, generalizar, sintetizar, inducir, argumentar, modelar, validar, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos, planear y aplicar estrategias de solución de problemas, usar diferentes recursos. 3. Ligados a las acciones de participar proactivamente en las actividades de clase, coevaluar y autoevaluar tareas, maneras de asumir los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lecturas y resúmenes. 2. Construcción de preguntas. 3. Construcción de mapas de ideas para sistematizar nociones: manualmente o por medio de un software apropiado. 4. Construcción de analogías. 5. Identificación de diferentes representaciones de un concepto matemático: en lenguaje natural, gráficas, numéricas o analíticas. 6. Transformación de las diferentes representaciones del concepto de interés. 7. Desarrollo de procedimientos, operaciones, algoritmos o técnicas de cálculo. 8. Planteamiento de procedimientos, operaciones, algoritmos o técnicas de cálculo. 9. Explicación de procedimientos: uso racional de wolframalpha. 10. Establecimiento de relaciones. 11. Identificación de propiedades. 12. Planteamiento de conjeturas o proposiciones: escritos de manera convencional o uso de Twitter.

	<ul style="list-style-type: none"> 13. Ejercicios de argumentación intuitiva, deducciones o demostraciones. 14. Solución de situaciones problema. 15. Planteamiento de situaciones problema. 16. Selección de una estrategia óptima para resolver un problema. 17. Evaluar la tarea de un par o un compañero. 18. Evaluar un procedimiento. 19. Evaluar su propio desempeño. 20. Usar un software especializado. 21. Producir un video con una finalidad determinada. 22. Participar en un foro virtual. 23. Construir un sitio web.
Materiales y recursos	<ul style="list-style-type: none"> 1. Uso de software especializado: Geogebra, Excel, Derive, Cabri-Geometry, Matlab, entre otros. 2. Videos. 3. Páginas web.
Dinámica	<ul style="list-style-type: none"> 1. Trabajo individual. 2. Trabajo en equipo. 3. Plenaria, exposiciones técnicas, foros.
Criterios de evaluación	<ul style="list-style-type: none"> 1. Desempeños observables con base en los objetivos. 2. Escalas de calificación. 3. Peso específico en la evaluación de las actividades.

Tabla 2 – 2

En el siguiente capítulo se presenta la propuesta didáctica que articula estos elementos precedentes en búsqueda de la comprensión de la integral definida.

3. Propuesta didáctica

Inicialmente se plantea el objetivo general de la intervención didáctica para el aprendizaje de la integral definida, después se muestra una tabla que contiene la secuenciación de las unidades de aprendizaje que configuran la propuesta, con base en los criterios expuestos en el capítulo anterior. Por último, se propone el plan de actividades respectivo a cada unidad, para desarrollarse de acuerdo con el modelo descrito en la tabla 2 – 2.

3.1. Objetivo general.

Poner en funcionamiento el conocimiento disponible de la integral definida, en situaciones relacionadas con la acumulación de efectos locales.

3.2. Secuenciación.

El tiempo estipulado para desarrollar la propuesta es aproximadamente de 10 semanas, asumiendo que cada semana tiene 5 horas de clase. Ahora bien, de acuerdo con el objetivo, en la planeación se excluye el desarrollo de las estrategias de integración, el cálculo de primitivas dada una condición inicial y las aplicaciones típicas de la integral definida, temas que se abordarán en el tiempo restante del semestre o año lectivo.

En la siguiente tabla se presenta la secuencia de conocimientos para el desarrollo de la propuesta:

Unidad 0	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
1 semana 5 horas	1 semana 5 horas	2 semanas 10 horas	3 semanas 15 horas	3 semanas 15 horas
Diagnóstico	Noción de efecto acumulado (E.A.)	Algunos elementos históricos de la cuadratura de curvas	Medición de áreas y efectos acumulados	Teorema Fundamental del cálculo (T.F.C.), anti-derivadas e introducción a la integración numérica
↓	↓	↓	↓	↓
Noción de función	Relación intuitiva entre el E. A. y el	Nociones intuitivas del método de	Noción de espacios de	Anti-derivadas Inmediatas

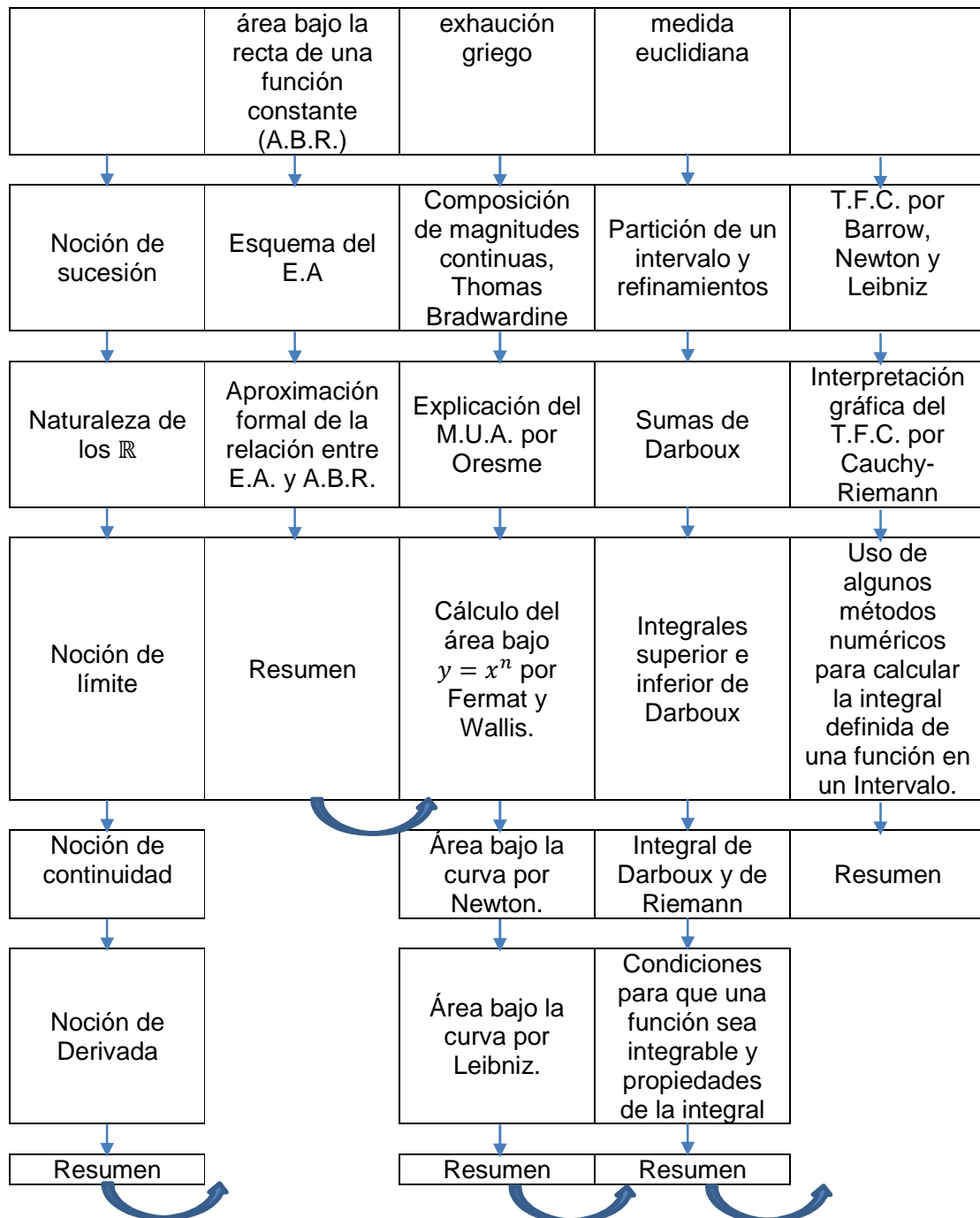


Tabla 3 – 1

3.3. Plan de actividades.

Las siguientes tablas, contienen el plan de actividades por cada unidad de aprendizaje

Unidad 0	Diagnóstico
Tiempo estimado	8 horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Enfatizar en la conexión y coordinación entre las representaciones gráficas, tabulares, numéricas, algebraicas y de lenguaje natural de las funciones, sucesiones, límites, continuidad de funciones y derivadas. 2. Establecer semejanzas y diferencias entre clases de funciones, según su signo, monotonía y continuidad, entre otros. 3. Indagar sobre la comprensión del axioma de completitud, la propiedad arquimediana y las propiedades del extremo superior. 4. Hacer claridad entre valores aproximados y exactos, por medio de la noción de límite. 5. Profundizar en la representación geométrica como la pendiente de la recta tangente a un punto de la curva. 6. Participar proactivamente en las actividades de clase, coevaluar y autoevaluar tareas, y asumir con responsabilidad los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Los estudiantes construyen un mapa de ideas con las nociones que han integrado en su red conceptual sobre: funciones y continuidad, sucesiones, naturaleza de los \mathbb{R}, límites de funciones, derivada de funciones. 2. Repaso por parte del docente o de los estudiantes, de: <ul style="list-style-type: none"> • Los diferentes tipos de funciones: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y a trozos. • La propiedad arquimediana y propiedades del extremo superior. • Valores numéricos parciales que aproximan el límite de una función y la noción de paso al límite para calcular el valor exacto. • Las diferentes representaciones de la derivada de una función: gráfica, tabular, numérica, algebraica y de lenguaje natural.

	3. Los estudiantes vuelven a construir un mapa de ideas después del repaso y hacen una comparación para indicar cuáles conceptos se modificaron.
Materiales y recursos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bibliografía sugerida: Leithold [12]. 2. Videos en la red: youtube, vimeo. <ul style="list-style-type: none"> • http://www.youtube.com/results?search_query=videos+de+funciones&sm=3 • http://www.youtube.com/results?search_query=videos+de+limites+de+una+funcion&sm=3 • http://www.youtube.com/results?search_query=videos+de+derivadas+de+una+funcion&sm=1 3. Páginas web: www.vitutor.com, www.wolframalpha.com. 4. Estos recursos también los encuentra en: https://sites.google.com/site/maestriacarlina/
Dinámica	1. Trabajo individual o trabajo en equipo.
Criterios de evaluación	<p>Indicadores:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Conecta y coordina las representaciones gráficas, tabulares, numéricas, algebraicas y de lenguaje natural de las funciones, sucesiones, límites, continuidad de funciones y derivadas. 2. Establece semejanzas y diferencias entre clases de funciones, según su signo, monotonía, concavidad y continuidad. 3. Reconoce el axioma de completitud, la propiedad arquimediana y las propiedades del extremo superior. 4. Diferencia entre valores aproximados y exactos, por medio de la noción de límite. 5. Participa proactivamente en las actividades de clase, coevalúa y/o autoevalúa tareas, asumiendo con responsabilidad los roles del trabajo en equipo. <p>Peso específico de la unidad y de sus actividades:</p> <p>El diagnóstico tiene un peso del 10% sobre la nota de las 10 semanas de aprendizaje. De este 10%, el peso específico de cada actividad es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mapa conceptual inicial: 30%. • Mapa conceptual final: 50%.

	• Comparación de los conceptos modificados: 20%.
--	--

Tabla 3 – 2

Unidad 1	Noción de efecto acumulado (E.A.)
Tiempo estimado	5 horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Inducir la noción de efecto acumulado, para funciones constantes. 2. Establecer una relación intuitiva entre el efecto acumulado positivo y el área bajo una función constante en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 3. Mostrar intuitivamente, la equivalencia entre el efecto acumulado de una función constante positiva y el valor del área del rectángulo que se encuentra debajo de la función en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 4. Resolver situaciones problema relacionadas con el efecto acumulado de una función constante en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 5. Participar proactivamente en las actividades de clase, co-evaluar y autoevaluar tareas, y asumir con responsabilidad los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. El docente explica la actividad uno de la unidad uno que aparece en el anexo A. 2. Los estudiantes desarrollan la actividad dos de la unidad uno que aparece en el anexo A, utilizando el procedimiento mostrado por el docente. 3. El docente explica la equivalencia entre el efecto acumulado de una función constante positiva y el valor del área del rectángulo que se encuentra debajo de la función en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. Una aproximación a tal explicación se describe en la actividad tres de la unidad uno que aparece en el anexo A. 4. Los estudiantes por medio de un mapa de ideas, proponen un esquema conceptual de la noción de efecto acumulado. 5. Los estudiantes solucionan los problemas planteados en la actividad cuatro de la unidad uno que aparece en el anexo A. Éstos, son solo una muestra de situaciones problema se relacionan con el efecto

	<p>acumulado de una función constante en un intervalo. Se debe tener en cuenta que la propuesta va dirigida a programas de cálculo para estudiantes que profundizan en ciencias básicas, de ahí, la necesidad de ubicar el uso de esta noción en una diversidad de enunciados.</p> <p>6. Los estudiantes se reúnen en grupo de al menos 5 integrantes, para desarrollar una sesión de trabajo en equipo, con el objetivo de revisar la solución de los problemas planteados en la actividad anterior. Los roles que según Insuasty [11] deben asumir, para cumplir con éxito esta meta, se describen a continuación:</p> <ul style="list-style-type: none">• <u>Moderador(a)</u>: direcciona la sesión de trabajo recordando el propósito de la misma y ordenando las intervenciones de sus compañeros. Hace una síntesis de lo desarrollado, en los momentos que sea necesaria.• <u>Relator(a)</u>: construye una memoria escrita donde aparece la descripción de los principales momentos del debate, que se genera alrededor de las soluciones a los problemas propuestos. La descripción consiste en señalar las formas en que un determinado integrante expone y argumenta sus propuestas de solución (opiniones, intuiciones o deducciones con base en definiciones y propiedades, uso de las representaciones en lenguaje natural, analítico, gráfico, numérico y transformaciones entre estas representaciones).• <u>Ponente</u>: expone y justifica, a sus compañeros, la solución de algunos de los problemas propuestos, utilizando diversas maneras de argumentación, propias de la actividad matemática (remitirse a la descripción precedente).• <u>Oponente</u>: utilizando preguntas o expresiones interrogativas, señala los posibles errores en que incurra el ponente en un momento determinado. Estos errores pueden ser en procedimientos utilizados, técnicas de cálculo, proposiciones falsas, relaciones y/o propiedades inexistentes, transformaciones imprecisas, entre otros.
--	---

	<ul style="list-style-type: none"> • Observador: valora la forma como asumieron los diferentes roles los compañeros participantes. Para esto, puede diseñar una tabla de dos columnas. En la primera, aparecen los nombres de los integrantes, la manera de interpretar el rol asumido y el número de ejercicios o problemas resueltos, y en la segunda, un espacio para asignar la calificación respectiva, en una escala predeterminada. <p>7. El docente organiza una plenaria para identificar las posibles dudas existentes al respecto de la noción de efecto acumulado. Al finalizar la actividad, el docente o un estudiante, presenta un resumen de la unidad, por medio de un esquema sobre el efecto acumulado.</p> <p>8. El docente propone una prueba escrita basada en los esquemas de los estudiantes sobre la noción de efecto acumulado de una función constante positiva en un intervalo cerrado de \mathbb{R}.</p>
<p>Materiales y recursos</p>	<p>1. Anexo A.</p> <p>2. Evaluación del trabajo en equipo: http://rubistar.4teachers.org/index.php?screen=ShowRubric&rubric_id=1586643&</p> <p>5. Estos recursos también los encuentra en: https://sites.google.com/site/efectoacumulado/home</p>
<p>Dinámica</p>	<p>1. Trabajo individual y trabajo en equipo.</p>
<p>Criterios de evaluación</p>	<p>Indicadores:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Establece una relación intuitiva entre el efecto acumulado positivo y el área bajo una función constante en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 2. Resuelve situaciones problema relacionadas con el efecto acumulado de una función constante en un intervalo cerrado de \mathbb{R} 3. Participa proactivamente en las actividades de clase, coevalúa y/o autoevalúa tareas, asumiendo con responsabilidad los roles del trabajo en equipo. <p>Peso específico de la unidad y de sus actividades:</p>

	<p>La unidad 1, correspondiente a la noción de efecto acumulado, tiene un peso del 20% sobre la nota de las 10 semanas de aprendizaje. De este 20%, el peso específico de cada actividad es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Actividad dos de la unidad uno: 10%. • Mapa conceptual correspondiente al esquema de la noción de efecto acumulado: 10%. • Evaluación del trabajo en equipo: 30% • Evaluación propuesta por el docente: 50%.
--	--

Tabla 3 – 3

Unidad 2	Algunos elementos históricos de la cuadratura de curvas.
Tiempo estimado	10 horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reconocer la evolución histórica-epistemológica de la noción de área como motivación original de la integral definida. 2. Establecer semejanzas y diferencias entre algunos enfoques que le ha dado la humanidad, a la noción de cuadratura de curvas; con base al registro disponible de su evolución histórica. 3. Participar proactivamente en las actividades de clase, co-evaluar y autoevaluar tareas, y asumir con responsabilidad los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Los estudiantes leen la sección 1.2. de este escrito, denominada contribuciones de los griegos. Con base en lectura, construyen al menos tres preguntas para motivar un futuro debate alrededor del método de exhaustión. 2. Los estudiantes analizan las nociones complementarias a la lectura anterior, que se presentan en el video “Ideas básicas del método de exhaustión griego”, cuyo vínculo se encuentra en la sección de materiales y recursos de esta unidad. 3. Los estudiantes leen la sección 1.3. de este escrito, denominada “Aportes en la Europa medieval”. Con base en lectura, responden las siguientes preguntas:

	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué implicaciones tienen las ideas de Thomas Bradwardine, con respecto a la composición de magnitudes continuas, sobre el cálculo del efecto acumulado de una función constante?• ¿Qué semejanzas y diferencias encuentra entre los planteamientos de Oresme para explicar el M.U.A. y el preámbulo de la relación entre el efecto acumulado de una función constante en un intervalo cerrado y el área del rectángulo respectivo, estudiada en la unidad precedente? <ol style="list-style-type: none">4. Los estudiantes leen la sección 1.4. de este escrito, denominada “Contribuciones en los siglos XVII y XVIII. Antecesores de Newton y Leibniz”. Con base en lectura, describen los procedimientos utilizados por Fermat y Wallis para el cálculo del área bajo $y = x^n$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿Cuáles son las principales diferencias entre los métodos utilizados por ellos?, ¿Cuáles sus principales semejanzas?5. Los estudiantes leen la sección 1.5. de este escrito, denominada “El periodo de Newton y Leibniz”. Hacen una descripción de los procedimientos utilizados por cada uno de ellos para encontrar el área bajo la curva.6. Los estudiantes analizan las nociones complementarias a la lectura anterior, que se presentan en los videos “Concepción de área según Newton” y “Concepción de área según Leibniz”; cuyos vínculos se encuentran en la sección de materiales y recursos de esta unidad.7. ¿Cuál estrategia entre la de Fermat, Wallis, Newton y Leibniz, es a su parecer, la más óptima para resolver el problema de la cuadratura de curvas? Justifique los criterios que utiliza para hacer su elección.8. Explique el procedimiento que hipotéticamente utilizaría Newton para hallar el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo de $[2,4]$. Haga lo mismo para el área bajo la curva $y = x^3$ en el intervalo de $[0,2]$ pero con las ideas fundamentales de Leibniz. Si el gusto de algún estudiante, se permite realizar la explicación por medio de un video y el uso de Geogebra u otro software disponible.
--	--

	9. El docente propone una plenaria, donde se discutan las respuestas a las preguntas y ejercicios de las actividades 1, 3, 4 y 8.
Materiales y recursos	<ol style="list-style-type: none"> Secciones 1.2, 1.3 y 1.4 del capítulo “Algunos aspectos históricos y epistemológicos de la integración” Videos complementarios a las lecturas propuestas. <ul style="list-style-type: none"> Exhaución griego: http://youtu.be/-uhyeq9WfWY Concepción de área según Newton: http://youtu.be/KQEfSaGSz_4. Concepción de área según Leibniz. http://youtu.be/L8SEdiyL8mE. Guía para iniciarse en el uso del software Geogebra con la intención específica de aprender a representar geoméricamente situaciones de cambio en forma dinámica: http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf Estos recursos también los encuentra en: https://sites.google.com/site/efectoacumulado/home
Dinámica	1. Trabajo individual y trabajo en plenaria.
Criterios de evaluación	<p>Indicadores:</p> <ol style="list-style-type: none"> Reconoce la evolución histórica-epistemológica de la noción de área como motivación original de la integral definida, identificando los aportes principalmente de Bradwardine, Oresme, Fermat, Wallis, Newton y Leibniz. Establece semejanzas y diferencias entre los enfoques que le dieron a la noción de la cuadratura de curvas, Fermat, Wallis, Newton y Leibniz; con base al registro disponible de su evolución histórica. Participa proactivamente en las actividades de clase, coevalúa y/o autoevalúa tareas, asumiendo con responsabilidad los roles del trabajo en equipo o del trabajo en plenaria. <p>Peso específico de la unidad y de sus actividades:</p> <p>La unidad 2, correspondiente a algunos elementos históricos de la cuadratura de curvas, tiene un peso del 20% sobre la nota de las 10 semanas de aprendizaje. De este 20%, el peso específico de cada actividad es:</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • Lecturas correspondientes a las actividades 1, 3, 4 y 5 con sus respectivas preguntas y/o respuestas: 40%. • Actividad 7: 20%. • Actividad 8: 20% • Plenaria propuesta por el docente: 20%.
--	--

Tabla 3 – 4

Unidad 3	Medición de áreas y efectos acumulados.
Tiempo estimado	15 horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Incorporar en el esquema conceptual de los estudiantes, las nociones relacionadas con la integral definida en un intervalo cerrado. 2. Hacer énfasis en las representaciones gráficas y numéricas de las nociones que se ponen en juego alrededor del estudio de la integral definida. 3. Participar proactivamente en las actividades de clase, co-evaluar y autoevaluar tareas, y asumir con responsabilidad los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. El docente explica las nociones de: medida de un intervalo en \mathbb{R} y de una región en \mathbb{R}^2, particiones y refinamientos, sumas de Darboux, integral de Darboux, equivalencia entre la integral de Darboux y Riemann, condiciones para que una función se integre y propiedades de la integral. Estas nociones se pueden basar en la definiciones, teoremas y proposiciones escritas en la sección 2.1.2. de este trabajo, titulada “Conceptos asociados al desarrollo del esquema de la integral definida” 2. Los estudiantes construyen esquemas de las nociones precedentes por medio de un mapa conceptual, una vez se haya avanzado en las explicaciones respectivas. 3. Con respecto a las particiones y refinamientos de intervalos, los estudiantes desarrollaran ejercicios referentes a:

	<ul style="list-style-type: none">• Dividir un segmento en varias partes de manera gráfica y mostrar el conjunto de valores ordenados que conforma la partición. Además generalizar la partición por medio de representaciones analíticas. Explicación de las definiciones 3 y 4 del capítulo 2 de este escrito, con base en las figuras (2 – 1) y (2 – 2).• Transformaciones entre las diferentes representaciones: gráfica, numérica y analítica, de la partición de un intervalo.• Refinar una partición gráfica, numérica y analíticamente. Explicación de la definición 5 del capítulo 2 de este trabajo.• Construcción de ejemplos utilizando el programa Geogebra, de acuerdo con la guía para el uso de Geogebra #1 titulada “Representaciones gráfica y numérica de la partición de un intervalo cerrado”: Los estudiantes responden las preguntas: Al observar en la vista gráfica el intervalo cerrado del ejemplo correspondiente a $[2,7]$, en la medida que se aumenta el número de puntos de la partición, ¿qué sucede con la medida de los intervalos que genera cada partición?, ¿Cuántos intervalos hay cuando $n = 20$?, ¿Cuál es la medida de esos intervalos? <p>4. Con respecto a las sumas superiores o inferiores de Darboux, los estudiantes desarrollaran ejercicios referentes a:</p> <ul style="list-style-type: none">• Esquema de la noción de partición y refinamientos, por medio de un mapa de ideas.• Representación gráfica de rectángulos inscritos y de rectángulos circunscritos, cuya unión no solapada aproximan la región bajo la curva que describe una función acotada específica $f(x)$ en un intervalo determinado, de acuerdo a la división del intervalo según la partición dada, y a la selección de la imagen máxima, media o mínima para cada intervalo generado por la partición. Se sugiere comenzar por funciones $f(x)$ positivas estrictamente monótonas, después hacer ejercicios con funciones que cambian la monotonía en el intervalo de interés, seguir con funciones que cambian de signo en el intervalo y terminar con funciones a trozos.
--	---

	<ul style="list-style-type: none"> • Representación numérica y analítica de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y de los rectángulos circunscritos, en todos los casos anteriores. • Transformaciones entre las representaciones gráfica, numérica y analítica de las sumas de Darboux para un intervalo y una partición arbitraria, en todos los casos anteriores. <p>Estos ejercicios se basan en la explicación de la definición 6 del capítulo 2, la ecuación (2 – 23) y los ejemplos correspondientes a las figuras (2 – 3) y (2 – 4).</p> <p>5. Con respecto a la integral definida vista como la coincidencia entre el supremo y el ínfimo de las sucesiones conformadas por las sumas de los rectángulos inscritos y circunscritos a la curva que describe la función acotada $f(x)$, en otras palabras, la igualdad entre la integral superior y la integral inferior de Darboux; los estudiantes desarrollaran ejercicios referentes a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construcción de esquemas por medio de mapas de ideas, relacionados con las nociones de: sucesión, sup e inf de conjuntos y sumas de Darboux. • Representaciones gráfica, numérica y analítica, de una sucesión de sumas superiores y de una sucesión de sumas inferiores de Darboux, con $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $f(x)$ acotada. Explicación de la definición 7 y ecuaciones (2 – 27) y (2 – 29). . Se sugiere comenzar por funciones $f(x)$ positivas estrictamente monótonas, después hacer ejercicios con funciones que cambian la monotonía en el intervalo de interés, seguir con funciones que cambian de signo en el intervalo y terminar con funciones a trozos. • Transformaciones entre estas representaciones, con base en los ejemplos correspondientes a las figuras (2 – 5) y (2 – 6), para todos los casos anteriores. • Representaciones gráfica, numérica y analítica de la desigualdad: $\sum_{S \in \Delta(P)} l_S(f) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \int_{I_L} f \, dx \leq \int_{I_U} f \, dx \leq \sum_{S \in \Delta(P)} B_S(f) \cdot (x_i - x_{i-1}),$ con $l_S(f) \leq f \leq B_S(f)$ y de la igualdad:
--	---

$$\int_{I_L} f \, dx = \int f \, dx = \int_{I_U} f$$

Se recomienda utilizar la guía para el uso de Geogebra #2 titulada “Representaciones gráfica y numérica de las integrales superior e inferior de Darboux-Riemann”: Los estudiantes responden las preguntas: Al observar el gráfico de barras, ¿qué interpretación se le puede dar a la sucesión de valores que crecen de izquierda a derecha y se acumulan en una ordenada específica?, ¿qué interpretación se le puede dar a la sucesión de valores que decrecen de derecha a izquierda y se acumulan en una ordenada específica?, ¿qué representa la ordenada que queda entre las dos sucesiones de valores precedentes?, ¿Cuánto vale esa ordenada en el ejemplo?.

6. Aprovechando la actividad anterior, el docente argumenta gráficamente la condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable.
7. Con el conocimiento básico respecto al uso del programa Geogebra, los estudiantes comprueban las propiedades de la integral definida, descritas en el capítulo 2 de este trabajo y correspondientes al conjunto de ecuaciones de la (2 – 38) a la (2 – 45). Un ejemplo de este ejercicio, se desarrolla en la guía para el uso de Geogebra #3, titulada “Teorema de comparación para funciones integrables en un intervalo cerrado”. Los estudiantes responden: Al observar el valor de la diferencia entre la integral de la función mayor y la integral de la función menor, cuando se desliza el punto que corresponde al extremo superior del intervalo de integración, ¿qué se puede concluir?
8. Con base a la propiedad de aditividad de la integral definida con respecto al intervalo de integración, el docente aclara la diferencia entre un área o efecto acumulado para funciones negativas en un intervalo. Advierte sobre el error de calcular (o aproximar) la integral definida en un intervalo donde la función cambia de signo, siendo lo aconsejable utilizar esta propiedad para separar en dos o más

	<p>integrales, de tal manera que los efectos acumulados o las áreas siempre se sumen.</p> <p>Se recomienda utilizar la guía para el uso de Geogebra #3 titulada “Interpretación de integrales negativas”: Los estudiantes responden las preguntas: ¿por qué es necesario partir el intervalo de integración en dos o más intervalos?. Justifique su respuesta. En las prácticas sociales que desarrollan los seres humanos, ¿pueden existir efectos acumulados negativos? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, si se puede modelar tal efecto por medio de la integral, ¿cómo se calcularía?</p> <p>9. El docente propone al menos dos pruebas escritas basadas en los esquemas de los estudiantes sobre la noción de la integral definida en un intervalo cerrado, las respuestas a las preguntas planteadas en las actividades anteriores y los ejercicios propuestos con base en las guías para afianzar las representaciones gráficas y numéricas de las nociones estudiadas.</p>
<p>Materiales y recursos</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Sección 2.1 de este escrito: “Nociones Matemáticas necesarias para el desarrollo de la propuesta”. 2. Guía para el uso de Geogebra # 1: “Representaciones gráfica y numérica de la partición de un intervalo cerrado”. 3. Guía para el uso de Geogebra # 2: “Representaciones gráfica y numérica de las integrales superior e inferior de Darboux-Riemann”. 4. Guía para el uso de Geogebra # 3: “Teorema de comparación para funciones integrables en un intervalo cerrado” 5. Guía para el uso de Geogebra # 4: “Interpretación de integrales negativas”. 6. Videos que acompañan las respectivas guías para el uso de Geogebra que también se encuentran en el C.D. adjunto: <ul style="list-style-type: none"> • Partición y refinamientos: http://youtu.be/k85HOn5R26w. • Interpretación gráfica y numérica de la integral de Darboux: http://youtu.be/FBNGEGt9YUQ. • Teorema de comparación para funciones integrables en un intervalo cerrado:

	<p>http://youtu.be/6Bf3GOmpOZg.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretación de integrales negativas. <p>http://youtu.be/g3AZ9u38UU8</p> <p>7. Estos recursos también los encuentra en:</p> <p>https://sites.google.com/site/efectoacumulado/home</p>
Dinámica	2. Trabajo individual y trabajo en plenaria con el docente.
Criterios de evaluación	<p>Indicadores:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construye esquemas para representar las relaciones entre los conceptos alrededor de la integral definida. 2. Representa de manera gráfica, numérica y analítica particiones y refinamientos de un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 3. Representa de manera gráfica, numérica y analítica sucesiones de sumas finitas de Darboux-Riemann. 4. Representa de manera gráfica, numérica y analítica la integral de Darboux-Riemann. 5. Transforma las diferentes representaciones gráfica, numérica y analítica, de las nociones de particiones y refinamientos, sucesiones de sumas finitas de Darboux-Riemann y la integral de Darboux-Riemann. 6. Reconoce las condiciones de integrabilidad de una función de variable real, en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 7. Identifica las propiedades de las funciones integrables en un intervalo cerrado de \mathbb{R}. 8. Participa proactivamente en las actividades de clase, coevalúa y/o autoevalúa tareas, asumiendo con responsabilidad los roles del trabajo en equipo o del trabajo en plenaria. <p>Peso específico de la unidad y de sus actividades:</p> <p>La unidad 3, correspondiente a algunos elementos históricos de la cuadratura de curvas, tiene un peso del 30% sobre la nota de las 10 semanas de aprendizaje. De este 30%, el peso específico de cada actividad es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construcción de esquemas alrededor de los conceptos alrededor de la integración: 20%.

	<ul style="list-style-type: none"> • Representación y transformación de las diferentes representaciones de los conceptos alrededor de la integración: 20%. • Reconocimiento e identificación de condiciones de integrabilidad y propiedades de las integrales en un intervalo cerrado: 20% • Evaluaciones del docente: 40%.
--	--

Tabla 3 – 5

Unidad 3	Teorema Fundamental del cálculo (T.F.C.), anti-derivadas e introducción a la integración numérica
Tiempo estimado	15 horas de clase
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar el conjunto de anti-derivadas de una función elemental. 2. Comparar y contrastar los razonamientos de Barrow, Newton y Leibniz, para justificar la conexión entre el cálculo de las pendientes de las rectas tangentes a los puntos de una curva (efectos locales), con el cálculo de las áreas bajo la curva de una función acotada en un intervalo cerrado (efecto acumulado). 3. Representar gráfica, numérica y analíticamente el T.F.C. de Cauchy-Riemann. 4. Reconocer algunos métodos de integración numérica para calcular el efecto acumulado de funciones integrables en un intervalo cerrado. 5. Participar proactivamente en las actividades de clase, co-evaluar y autoevaluar tareas, y asumir con responsabilidad los roles del trabajo en equipo.
Descripción de las actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. El docente explica la noción de primitiva de una función en un intervalo con base en la definición 12 y la ecuación (2 – 83), la condición de continuidad en un intervalo para que una función admita una primitiva (Teorema 11), la noción de función elemental y primitiva de una función elemental, mostrando algunos contra ejemplos de funciones de variable real sin primitiva elemental, la noción de integral indefinida con base en la definición 13 y las ecuaciones (2 – 84) y (2 – 85).

	<ol style="list-style-type: none">2. Los estudiantes con base en la definición 12 y la ecuación (2 – 83), construyen una tabla de integrales indefinidas que se deducen inmediatamente de esta definición. Un ejemplo que contiene dichos resultados se muestra en la tabla 2 – 1.3. Los estudiantes asocian un grupo de funciones elementales con sus respectivas anti-derivadas en el ejercicio titulado “Apareamiento de funciones elementales con sus anti-derivadas” que se encuentra en el anexo A, en la actividad 3 de la unidad 4.4. Los estudiantes leen los complementos de las secciones 1.4. de este escrito, “Contribuciones en los siglos XVII y XVIII. Antecedentes de Newton y Leibniz” y 1.5. “El periodo de Newton y Leibniz”, correspondientes a, por un lado, los antecedentes del T.F.C en el trabajo de Barrow que se ilustra en la figura (1 – 8) y las ecuaciones de la (1 – 30) a la (1 – 34) , y por otro lado, los significados geométricos que tanto Newton como Leibniz, le dan a este teorema. Para el caso de Newton, remitirse a la figura (1 – 10) y la ecuación (1 – 35) y para los argumentos de Leibniz las figuras (1 – 11) y (1 – 12). Con base en las lecturas, construyen una tabla de semejanzas y diferencias entre los respectivos planteamientos.5. Los estudiantes reconstruyen las ideas de Barrow, de acuerdo con la guía para el uso de Geogebra # 5 titulada “Versión del T.F.C. según Barrow”. Discutir la respuesta a la siguiente pregunta: ¿este procedimiento es válido para todo tipo de funciones que sean acotadas?6. Los estudiantes reconstruyen las ideas de Newton, de acuerdo con la guía para el uso de Geogebra # 6 titulada “Versión del T.F.C. según Newton”: Discutir la respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuál es la principal debilidad de este argumento para sostener el T.F.C.?7. Los estudiantes reconstruyen las ideas modernas del T.F.C., de acuerdo con la guía para el uso de Geogebra # 7 titulada “Versión moderna del T.F.C.” Como lo menciona Apostol [1], este razonamiento supone que la función $f(x)$ es continua, ¿qué
--	--

	<p>procedimiento se debe tener en cuenta para sustentar el teorema si la hipótesis considera la continuidad en un solo punto?</p> <p>8. El docente explica la necesidad de la integración numérica para funciones que no poseen una primitiva elemental o se desconoce la representación analítica de su relación funcional, haciendo énfasis en la regla del trapecio descrita por las ecuaciones (2 – 60) al (2 – 65) y las figuras (2 – 14) y (2 – 15) y la integración numérica por segmentos parabólicos o regla de Simpson ilustrada en teorema 7, las ecuaciones (2 – 68) a la (2 – 79) y la figura (2 – 16).</p> <p>9. Los estudiantes utilizan una hoja de cálculo para aproximar una función, cuando se conoce un conjunto finito de puntos que representan su variación, dada una condición inicial de la función que esté en relación con la abscisa del primer punto; de acuerdo con la guía para el uso de Excel # 1 titulada “Regla del Trapecio”. Consultar: ¿Cómo programar la hoja de cálculo para hallar las aproximaciones por medio de la Regla de Simpson?</p> <p>10. El docente insinúa la noción del Efecto Acumulado, relacionándola con la ecuación (2 – 46) de este trabajo, la cual corresponde a la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, con las condiciones suficientes y la satisfacción de la ecuación (2 – 46), que se recuerdan en la siguiente figura:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$, entonces la función $F(x)$ definida por:</p> $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in I. \quad (2 - 46)$ <p>Es una función continua y diferenciable en el intervalo I y además satisface la ecuación:</p> $\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (2 - 47)$ </div> <p style="text-align: center;">(Figura 3 – 1)</p> <p>11. Los estudiantes solucionan los problemas planteados en la actividad once de la unidad cuatro que aparece en el anexo A, que sustentarán en evaluación escrita. Éstos, son solo una muestra de situaciones</p>
--	--

	<p>problema se relacionan con el efecto acumulado o integral definida de una función integrable en un intervalo. Algunos de ellos sirven de motivación para la búsqueda de estrategias de integración (métodos de integración). Se debe tener en cuenta que la propuesta va dirigida a programas de cálculo para estudiantes que profundizan en ciencias básicas, de ahí, la necesidad de ubicar el uso de esta noción en una diversidad de enunciados, algunos de ellos no típicos de los textos usuales.</p>
<p>Materiales y recursos</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Sección 2.1 de este escrito: “Nociones Matemáticas necesarias para el desarrollo de la propuesta”. 2. Ejercicio de apareamiento de funciones elementales con algunas de sus antiderivadas. Anexo A: unidad 4, actividad 3. 3. Secciones 1.4 “Contribuciones en los siglos XVII y XVIII. Antecesores de Newton y Leibniz” y 1.5. “El período de Newton y Leibniz” de este escrito. <p>En el anexo A, se encuentran las siguientes guías:</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. Guía para el uso de Geogebra # 5: “Versión T.F.C. según Barrow”. 5. Guía para el uso de Geogebra # 6: “Versión T.F.C. según Newton”. 6. Guía para el uso de Geogebra # 7: “Versión moderna del T.F.C.” 7. Guía para el uso de Excel # 1: “Regla del trapecio”. 8. Videos que acompañan las respectivas guías para el uso de Geogebra que también se encuentran en el C.D. adjunto: <ul style="list-style-type: none"> • Versión del Teorema Fundamental del Cálculo según Barrow: http://youtu.be/ssg1skJOY-Y. • Versión del Teorema Fundamental del Cálculo según Newton: http://youtu.be/zFP9Kx6x4WA. • Versión moderna del Teorema Fundamental del Cálculo: http://youtu.be/el57k4YTERA. • Regla del trapecio. http://youtu.be/siRsINkABMo 9. Ejercicios de solución de problemas. Anexo A: unidad 4, actividad 11. 10. Estos recursos también los encuentra en: https://sites.google.com/site/efectoacumulado/home

Dinámica	3. Trabajo individual y trabajo en plenaria con el docente.
Criterios de evaluación	<p>Indicadores:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construye una tabla de integrales indefinidas con base en la definición de anti-derivadas. • Identifica la anti-derivada de una función elemental en un grupo de integrales indefinidas. • Compara y contrasta los argumentos utilizados por Barrow, Newton y Leibniz, para conectar el cálculo del área de una región, con el cálculo de pendientes de las rectas tangentes a una curva. • Utiliza hojas de cálculo para aproximar una función con base en la Regla del Trapecio. • Relaciona la noción de Efecto Acumulado con el cálculo de integrales definidas, aplicándolo a la solución de situaciones problema en diversos contextos. <p>Peso específico de la unidad y de sus actividades:</p> <p>La unidad 4, correspondiente al Teorema Fundamental del Cálculo, Anti-derivadas e introducción a la Integración Numérica, tiene un peso del 20% sobre la nota de las 10 semanas de aprendizaje. De este 20%, el peso específico de cada actividad es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construcción de la tabla de integrales indefinidas: 10 %. • Identificación de anti-derivadas de funciones elementales: 20%. • Tabla de comparación y contraste de argumentos utilizados por Barrow, Newton y Leibniz, para justificar el T.F.C: 30%. • Solución de situaciones problemas: 40%.

Tabla 3 – 6

4. Conclusiones y proyección de la propuesta

4.1 Conclusiones

Se desarrolló la planeación de una propuesta de acción pedagógica, tendiente a la comprensión de la integral definida de una función acotada en un intervalo cerrado, subconjunto de \mathbb{R} ; con base en un estudio histórico-epistemológico del concepto y la asociación del mismo con la práctica de acumular.

Se identificaron los aspectos fundamentales de la evolución histórica de los conceptos más importantes alrededor de la integración, especialmente las motivaciones epistemológicas de las principales etapas del proceso, mostrando la complejidad de sus relaciones y algunos obstáculos epistémicos que se superaron en el tiempo, para el desarrollo de las nociones que los sustentan en la actualidad.

Adicionalmente, se hizo énfasis en las concepciones de área que tenían los antecesores a Newton y Leibniz, como es el caso de los griegos en cabeza de Arquímedes, Cavalieri, Fermat, Wallis, Barrow, entre otros, así como los argumentos de Barrow, Newton y Leibniz que sustentan el Teorema Fundamental del Cálculo; todo esto, para motivar la comprensión de la Integral Definida como concepto de interés.

Con base en algunos principios y atributos de la Socioepistemología, se propuso apoyar la comprensión de este concepto, a través de la identificación de prácticas sociales que generan su conocimiento, tales como la predicción de procesos de cambio que acumulan efectos locales; en otras palabras, anticipar los valores de un efecto acumulado.

Por otro lado, con el convencimiento de que las prácticas pedagógicas respaldadas por el uso de elementos informáticos, mejoran las reflexiones alrededor de las nociones asociadas a un determinado concepto y su aplicación a la solución de situaciones problemas asociadas, permiten la construcción y transformación entre diferentes representaciones de un objeto matemático de manera más eficiente, se alimentó la propuesta con el uso de software especializado en el área, como es el caso de Geogebra y Excel.

Cabe mencionar que la universidad nacional cumple con su propósito de fortalecer al estudiante de la maestría para la creación y evaluación de las propias estrategias de enseñanza, a través de la profundización en los conocimientos disciplinares de interés propio, con respecto a las ciencias exactas y naturales, y a la actualización de orientaciones pedagógicas y didácticas. Esto permite que la acción pedagógica mejore significativamente en el aula, incidiendo favorablemente en los enfoques curriculares de las instituciones educativas.

4.2 Proyección de la propuesta

Toda propuesta debe desarrollarse experimentalmente en ámbitos escolares que la avalen y retroalimenten, por lo tanto el paso a seguir corresponde a la toma de datos sobre el despliegue de las actividades propuestas, apoyadas en entrevistas, cuestionarios, instrumentos de observación, entre otras, que ilustren las consideraciones teóricas que la sustentan.

De igual manera, se hace necesario enriquecer el conjunto de situaciones problema propuesto, buscando contextos cada vez más cercanos a las prácticas sociales cotidianas de los estudiantes, teniendo en cuenta las características que éstas deben cumplir, para que su solución implique el uso de la integración.

También es necesario generar otra propuesta más enfocada a acciones especiales de la actividad matemática como definir y demostrar los conceptos relacionados con la integración, para que en un trabajo conjunto se logre avanzar con mayor profundidad en el desarrollo de las operaciones mentales intrínsecas del quehacer matemático.

Anexo A: Descripción de algunas actividades para el desarrollo de las unidades de aprendizaje.

1. Unidad 1, actividad 1. Explicación del docente.

El siguiente enunciado corresponde a una aproximación intuitiva de un fenómeno de la Bioestadística denominado Incidencia Acumulada.

Se supone una función que relaciona la razón de cambio del estado de salud de un grupo de individuos sanos que desarrollan una enfermedad en un periodo de tiempo determinado. Se simboliza el cambio del estado de salud de un individuo del grupo en el tiempo como:

$$C(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (A - 1)$$

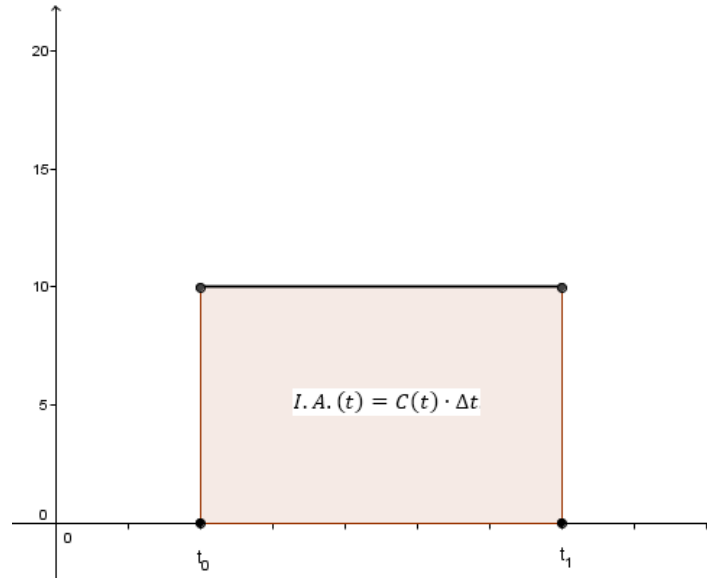
Δs es el cambio en el estado de salud de un individuo medido en "%" de bienestar⁴⁷ y Δt un intervalo de tiempo medido en segundos "s". Si para un individuo, en un intervalo de tiempo dado, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 10 \text{ \%}/s$; entonces, se define el riesgo o probabilidad de que el individuo desarrolle la enfermedad en el intervalo de tiempo dado, denominada la Incidencia Acumulada (I.A.), como:

$$I. A. (t) = C(t) \cdot \Delta t. \quad (A - 2)$$

Se puede apreciar que las unidades de $I. A. (t)$ son las mismas de Δs en el intervalo de tiempo.

⁴⁷ Esta medida es el producto de las medidas de los signos vitales del individuo con respecto a las medidas de los signos vitales medios de un individuo sano.

En la siguiente gráfica se ilustra la representación gráfica de la incidencia acumulada $I.A.(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$:



(Figura A – 1)

Dicho de otro modo, $I.A.(t)$ es el área del rectángulo formado por la superficie entre el segmento de altura 10, las ordenadas en t_0 y t_1 y el eje de las abscisas, esto es, el producto entre la constante 10 y la medida del intervalo $[t_0, t_1]$.

2. Unidad 1, actividad 2. Ejercicio para los estudiantes.

El siguiente enunciado corresponde al desplazamiento de un móvil que se mueve con velocidad constante.

Se supone una función que relaciona la razón de cambio de la posición de un móvil en un periodo de tiempo determinado. En la mecánica clásica newtoniana, se define la velocidad media del móvil como:

$$V(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (A - 3)$$

Δx es el desplazamiento medido metros "m" y Δt un intervalo de tiempo medido en segundos "s". Si para un móvil, en un intervalo de tiempo dado, $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 30 \text{ m/s}$, entonces, ¿cómo definir el desplazamiento acumulado del móvil en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$?, y ¿Cuál es su representación gráfica en este intervalo de tiempo?

3. Unidad 1, actividad 3. Explicación del docente.

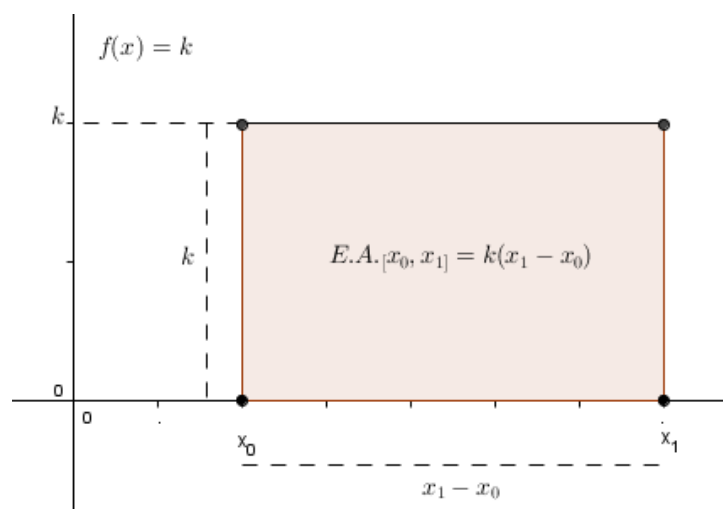
Como se puede apreciar, con base en los dos ejemplos anteriores para funciones constantes positivas, los efectos acumulados en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ concernientes a la incidencia acumulada y el desplazamiento acumulado, se comportan intuitivamente de la misma forma. Además, su representación gráfica corresponde al área del rectángulo formado por la superficie entre el segmento de altura constante k , las ordenadas en t_0 y t_1 y el eje de las abscisas.

En consecuencia, se define una función T entre el conjunto de los números reales no-negativos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que contiene los valores de los efectos acumulados de una función constante $f(x) = k$, $k \geq 0$, en un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que incluye los valores de las áreas de los rectángulos correspondientes, que se forman entre el segmento de altura constante k , las ordenadas en x_i y x_{i+1} , y el eje de las abscisas; denotados como $R_{[x_i, x_{i+1}]}$ tal que:

$$T: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (A-4)$$

$$E.A._{[x_i, x_{i+1}]} \mapsto T(E.A._{[x_i, x_{i+1}]}) = \text{área}(R_{[x_i, x_{i+1}]}).$$

En la siguiente figura, se muestra la representación gráfica del efecto acumulado de una función conste en un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Nótese que el efecto acumulado depende del valor de la función y del ancho del intervalo.



(Figura A - 2)

Entonces, los efectos acumulados y las áreas, definidos de manera precedente, son intuitivamente equivalentes.

4. Unidad 1, actividad 4. Solución de situaciones problema.

En el siguiente conjunto de problemas, utilice las diferentes representaciones de las funciones inmersas en los enunciados, para calcular los efectos acumulados en los intervalos correspondientes.

- Un tubo de vidrio cerrado se encuentra casi lleno de un fluido, excepto por una burbuja que recorre $2,5 \text{ cm}$ por cada segundo. ¿Cuánto desplazamiento x acumula la burbuja (en metros), en los primeros 5 segundos?
- En una piscina que inicialmente se encuentra en reposo, se lanza una pelota provocando ondas y circunferencias, cuyos radios varían $3,5 \text{ dm}$ cada 3 segundos. ¿Cuánto aumenta el radio r (en metros) de la circunferencia que se forma en los primeros 9 segundos?
- Al llenar un tanque se observa que cada minuto, se ocupa un volumen de $5,4 \text{ m}^3$. ¿Cuánto volumen V se acumulada (en m^3), al cabo de 45 minutos?
- Unido a un soporte, se ubica un resorte verticalmente y de él se cuelgan bloques de madera de diferentes masas. Si se observa que por cada 20 N que se aumente de peso, el resorte se deforma $0,125 \text{ m}$, ¿Cuánta fuerza F (en N) acumulada experimenta el resorte, cuando se deforma $0,7 \text{ m}$ de manera continua?
- Camino al colegio o a la ruta que lo transporta, se observa que un estudiante que sale de su casa recorre $3,5 \text{ m}$ en 5 s . ¿Cuánto se desplaza (en metros), después de 10 minutos y 22 segundos?

- La sombra que proyecta un edificio en un día soleado del mes de enero se acerca a la base del mismo, aproximadamente $1\frac{1}{3}m$ al cabo de una hora. ¿Cuánto se acerca (en metros) la sombra al edificio, al cabo de 20,5 minutos?
- Se decora un espacio para celebrar el cumpleaños de una persona y se observa que al inflar una bomba súper-grande, en cada inyección de aire el volumen se aumenta en $\frac{1}{2}$ litro. ¿Cuánto volumen de aire se acumula en la súper-bomba (en dm^3), después de 5 inyecciones continuas?
- En un hospital se administra un tratamiento a un paciente, que consiste de una dosis de 3 mg (miligramos) de un fármaco, por cada 4 horas. ¿Cuánta cantidad de fármaco (en mg), se acumula en el paciente después de 6 días?
- El cabello humano en condiciones normales, a través de las fases catágena, anágena y telógena; crece a una velocidad promedio aproximada de $0,410678$ milímetros por cada día. ¿A Cuánto equivale el promedio de crecimiento del cabello (en milímetros) de los humanos, diariamente?
- El crecimiento de las uñas depende de muchos factores como la edad, el estado de salud, genes hereditarios, acciones cotidianas, estaciones climáticas en el caso de las personas que las experimentan, entre otras. Además, hay una pequeña variación si se trata de manos o pies, inclusive del cuál mano y cuál dedo. Si una persona descubre que en promedio, el ritmo de crecimiento de las uñas de su mano derecha es de $0,1$ milímetros por cada día, ¿cuánto crece en promedio las uñas de esta mano (en mm), una semana y media después de habérselas cortado?

¿Se puede aplicar el procedimiento precedente a las siguientes situaciones problema?. Justificar la respuesta.

- El árbol genealógico de una familia muy particular muestra que por cada generación hay 3 nuevos integrantes. ¿Cuántos integrantes de la familia se acumulan al cabo de 4 generaciones?
- Una persona acostumbra a ahorrar \$1000 diariamente. ¿Cuánto ahorra (en pesos), al cabo de 215 días?

5. Unidad 3, actividad 3. Guía para el uso de Geogebra # 1

Representaciones gráfica y numérica de la partición de un intervalo cerrado.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado “Partición y refinamientos” que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) Definir un deslizador, asignándole el nombre “ n ”, como valor mínimo el número 1, máximo el número 50 e incrementos de 1.
- b) Construir las coordenadas cartesianas de los puntos de la partición, seleccionando en el menú superior la pestaña vista, hoja de cálculo.
- c) En la celda $A1$, escribira la frase “Número de puntos”. En la celda $A2$, digitar el nombre del deslizador, es decir, la letra n . Este valor corresponde al número de puntos e intervalos generados por la partición.
- d) En la celda $B1$ escribir la frase “Extremo inferior” y en la celda $C1$ la frase “Extremo superior”. En las celdas $B2$ y $C2$ digitar el valor de extremo inferior y del extremo superior del intervalo donde se hará la partición. En el ejemplo del video se trata del intervalo cerrado $[2,7]$.
- e) En la celda $A3$ escribir la frase “Incrementos” y en la celda $A4$ la fórmula “ $= (C2 - B2)/n$ ”.
- f) En la celda $A5$ escribir la frase “Factor del incremento” y la celda $A6$ digitar el número 0 (cero).
- g) En la celda $A7$ escribir la fórmula “ $= A6 + 1$ ” y copiar esta fórmula hasta la celda $A56$.
- h) En la celda $B5$ digitar la frase “Abscisas”, en la $C5$ “Ordenadas” y en la $D5$ “Coordenadas”.

-
- i) En la celda $B6$ digitar la fórmula “= $B\$2 + A6 * \$A\$4$ ” y copiar esta fórmula hasta la celda $B56$. En las celdas entre $C6$ y $C56$ escribir el número 0.
 - j) En la celda $D6$ escribir el punto con coordenadas $(B6, C6)$. Copiar esta secuencia de coordenadas hasta la celda $D56$. Aprovechar que están seleccionadas estas celdas para hacer clic derecho y desactivar la opción “Mostrar rótulo”.

6. Unidad 3, actividad 5. Guía para el uso de Geogebra # 2

Representaciones gráfica y numérica de las integrales superior e inferior de Darboux-Riemann.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado “Representaciones gráfica y numérica de las integrales superior e inferior de Darboux-Riemann” que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) Escribir en la barra de entrada (ubicada en la parte inferior izquierda) una función y llamarla “ f ” (en minúscula, sin incluir comillas). En el ejemplo se utiliza $f(x) = \sin(x)$.
- b) Definir dos puntos sobre el eje de las abscisas y nombrarlos A y C respectivamente. La abscisa de A debe ser menor que la de C . Para esto, en la barra de entrada digitar entre paréntesis las coordenadas de los puntos. Por defecto el punto C aparece como B . Para renombrarlo, hacer clic derecho y seleccionar la opción renombrar y escribir C en vez de B .
- c) Construir una semi-recta que pase por los puntos A y C . Hacer clic en la barra de los íconos principales de la parte superior izquierda, en el tercer ícono de izquierda a derecha y seleccionar “Semirrecta que pasa por dos puntos”. Acto seguido, hacer clic en los puntos A y C . Por defecto la semirrecta será nombrada con la letra a .

-
- d) Definir un punto B en la semirrecta a . En la misma barra del paso anterior, hacer clic en el segundo ícono (de izquierda a derecha) y seleccionar "Punto en objeto". En seguida hacer clic en la semirrecta a .
 - e) Definir un deslizador para generar el número de puntos de la partición. Hacer clic en el decimoprimer ícono en la misma dirección, en la caja de diálogo que aparece, nombrar el deslizador con la letra n , tomar el valor mínimo 1, el máximo como 50 y el incremento como 1.
 - f) Digitar en la barra de entrada $SumaSuperior[f, x(A), x(B), n]$. Al valor obtenido renombrarlo como S_s .
 - g) Digitar en la barra de entrada $Integral[f, x(A), x(B)]$. Al valor obtenido renombrarlo como I .
 - h) Digitar en la barra de entrada $SumaInferior[f, x(A), x(B), n]$. Al valor obtenido renombrarlo como S_i .
 - i) Hacer clic en el décimo ícono siguiendo la misma dirección y seleccionar "Inserta texto". Hacer clic en la ventana gráfica y en la caja de diálogo seleccionar "Fórmula LaTeX". En el espacio superior digitar (comillas incluidas) "a="+ $(x(A))$. Esto se hace para que aparezca en la ventana gráfica el valor aproximado a dos cifras decimales de la abscisa correspondiente al extremo inferior del intervalo, que en este caso es el punto A .
 - j) Repetir el paso anterior para el extremo superior, en este caso B . Digitar "b="+ $(x(B))$.
 - k) Repetir el paso i) para exponer el valor de la suma superior. Digitar "Suma Superior="+ S_s .
 - l) Hacer lo mismo para exponer los valores de la integral y la suma inferior. Digitar respectivamente "Integral="+ I y "Suma Inferior="+ S_i .
 - m) Ubicar el deslizador n en el valor mínimo.
 - n) Seleccionar en el menú principal de la parte superior izquierda, "Vista hoja de cálculo".
 - o) Hacer clic derecho en "Suma Superior" y seleccionar registro en hoja de cálculo. De igual manera, proceder en "Suma inferior".
 - p) Variar los valores del deslizador desde el mínimo al máximo.
 - q) Seleccionar todos los valores generados en la hoja de cálculo.

- r) Hacer clic en el segundo con la orientación usual “Análisis una variable”. En la caja de diálogo hacer clic en “Analizar”.
- s) En otra caja de diálogo que aparece, desplegar la pestaña de opciones y seleccionar “Gráfico de barras”.

7. Unidad 3, actividad 7. Guía para el uso de Geogebra # 3

Teorema de comparación para funciones integrables en un intervalo cerrado.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado “Teorema de comparación para funciones integrables en un intervalo cerrado” que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) Definir en la barra de entrada una función monótona $f(x)$.
- b) Definir en la barra de entrada otra función $g(x) = f(x) + k$, siendo $k > 0$. Cambiar el color de $g(x)$ para que contraste con $f(x)$, haciendo clic derecho sobre esta función, seleccionando “Propiedades del objeto” y la pestaña “color”.
- c) Definir el punto A que representa el extremo inferior del intervalo de integración. Digite las coordenadas de A en la barra de entrada.
- d) Definir otro punto en el eje de las abscisas con la letra C .
- e) Construir la semirrecta \overline{AC} seleccionado en la barra de los íconos principales el tercer ícono en el sentido de izquierda a derecha “Semirrecta que pasa por dos puntos”. El programa por defecto la notará con la letra a . En seguida, ocultar el punto C .
- f) Definir el punto B que representa el extremo superior del intervalo de integración. En la misma barra del paso anterior, seleccione el segundo ícono en la misma dirección “Punto en objeto” y haga clic en la semirrecta a .
- g) Calcular la integral de $f(x)$ desde A hasta B y renombrar este valor como I_f . En la barra de entrada digitar $Integral[f, x(A), x(B)]$. Hacer clic derecho en I_f y desactive la opción “Muestra rótulo”.
- h) Calcular la integral de $g(x)$ desde A hasta B y renombrar este valor como I_g . En la barra de entrada digitar $Integral[g, x(A), x(B)]$. Hacer clic derecho en I_g y

desactive la opción “Muestra rótulo”. De nuevo hacer clic derecho en I_g y asignar el mismo color de $g(x)$

- i) Hacer clic en el décimo ícono siguiendo la misma dirección y seleccionar “Inserta texto”. Hacer clic en la ventana gráfica y en la caja de diálogo seleccionar “Fórmula LaTeX”. En el espacio superior digitar (comillas incluidas) "a="+ $(x(A))$. Esto se hace para que aparezca en la ventana gráfica el valor aproximado a dos cifras decimales de la abscisa de A .
- j) Repetir el paso anterior para el extremo superior, en este caso B . Digitar "b="+ $(x(B))$. Hacer clic derecho sobre el texto b y seleccionar en la pestaña “Posición punto de origen” la opción B .
- k) Teniendo en cuenta las dos instrucciones anteriores, inserte los textos: "Integral_f=" + I_f , "Integral_g=" + I_g e , "Integral_g-Integral_f=" + $(I_g - I_f)$. Asignar a los textos anteriores los respectivos colores de $f(x)$ y $g(x)$.
- l) Seleccionar el primer ícono de la izquierda “Elige y mueve” y deslizar el punto B . Observar el signo de los valores que se obtienen en el texto $Integral_g-Integral_f$.

8. Unidad 3, actividad 8. Guía para el uso de Geogebra # 4

Interpretación de integrales negativas.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado “Interpretación de integrales negativas” que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) En la barra de entrada, definir una función que cambie de signo en un intervalo determinado y nombrarla $f(x)$. En la explicación del video se toma $f(x) = \sin(x)$
- b) Definir el intervalo de integración por medio de dos puntos en el eje de las abscisas. En la barra de entrada, digitar entre paréntesis las coordenadas de los puntos y nombrarlos como A y B respectivamente. En la explicación del video se toma el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, digitando los puntos $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

- c) Calcular la integral de $f(x)$ desde A hasta B y renombrar este valor como I . En la barra de entrada digitar $Integral[f, x(A), x(B)]$. Hacer clic derecho en I y desactive la opción “Muestra rótulo”.
- d) Calcular el corte de $f(x)$ con las abscisas en el intervalo seleccionado. Digite en la barra de entrada $Raíces[f, x(A), x(B)]$. Aparecerán las coordenadas de los puntos por donde $f(x)$ corta al eje de las abscisas, si existen; es decir, la solución de la ecuación $f(x) = 0$.
- e) Calcular la integral entre el eje de las abscisas y la función $f(x)$, para el sub-intervalo donde la función es negativa, y de manera análoga, calcular la integral ente la función $f(x)$ y el eje de las abscisas, para el sub-intervalo donde la función es positiva. Suponiendo que el sub-intervalo donde $f(x) \leq 0$ es $[x(A), x(C)]$ y que el sub-intervalo donde $f(x) \geq 0$ es $[x(C), x(B)]$, digitar en la barra de entrada $IntegralEntre[0, f, x(A), x(C)]$ para el primer caso e $IntegralEntre[f, 0, x(C), x(B)]$ para el segundo.
- f) Nombrar los valores precedentes como I_1 e I_2 . Desactivar la opción “Muestra rótulo”.
- g) Sumar $I_1 + I_2$ y renombrar este valor como AC .

9. Unidad 4, actividad 3. Apareamiento de funciones elementales con algunas de sus antiderivadas.

En las dos columnas a la izquierda se encuentran asignados los números del 1 al 20 a algunas funciones elementales que poseen antiderivadas inmediatas. Escribir en la tercera columna el número que corresponda a la función de la derecha, donde se encuentran las integrales indefinidas correspondientes.

1	$f(x) = -3x^5$		$F(x) = e^x + C$
2	$f(x) = -secxtanx$		$F(x) = tanx + C$
3	$f(x) = -sinx$		$F(x) = \frac{4^x}{ln4} + C$
4	$f(x) = \frac{1}{x}$		$F(x) = -\frac{x^6}{2} + C$
5	$f(x) = 3^x$		$F(x) = -secx + C$

6	$f(x) = 4^x$		$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$
7	$f(x) = 4\cos x$		$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
8	$f(x) = e^x$		$F(x) = \ln x + C$
9	$f(x) = \sec^2 x$		$F(x) = 4\sin x + C$
10	$f(x) = x^3$		$F(x) = \cos x + C$
11	$f(x) = -2x^{\frac{2}{3}}$		$F(x) = 3\sin x + C$
12	$f(x) = -2\csc^2 x$		$F(x) = \frac{x^3\sqrt{x^2}}{5} + C$
13	$f(x) = \frac{1}{e^x}$		$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
14	$f(x) = \frac{20}{1+x^2}$		$F(x) = 2\cot x + C$
15	$f(x) = 3\cos x$		$F(x) = -\frac{6}{5}x^3\sqrt{x^2} + C$
16	$f(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$		$F(x) = \frac{24}{7}x^4\sqrt{x^3} + C$
17	$f(x) = 5\sec^2 x$		$F(x) = -e^{-x} + C$
18	$f(x) = 6^4\sqrt{x^3}$		$F(x) = 4\arcsin x + C$
19	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$		$F(x) = 20\arctan x + C$
20	$f(x) = x^2$		$F(x) = \frac{10}{2}\tan x + C$

(Tabla A – 1)

10. Unidad 4, actividad 5. Guía para el uso de Geogebra # 5

Versión del T.F.C. según Barrow.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado "Interpretación de integrales negativas" que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

Parte uno: construcción de un segmento equivalente al área de la región encerrada por las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$, el eje de las abscisas y la gráfica de la función $f(x)$.

- a) En la barra de entrada definir una función estrictamente monótona y positiva $f(x)$.
- b) Insertar un punto sobre el eje de las abscisas y nómbrelo como A . Este punto representará el extremo inferior del intervalo de integración.
- c) Insertar texto " $a =$ " + $(x(A))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto A . Hacer clic derecho sobre el texto a y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción A .
- d) Insertar otro punto sobre el eje de las abscisas y nombrarlo como A_1 , de tal manera que sea visible en la vista gráfica.
- e) Construir la semirrecta $\overrightarrow{AA_1}$ y defina sobre ella el punto B . Utilizar los íconos "Semirrecta que pasa por dos puntos" y "Punto en objeto" respectivamente.
- f) Insertar texto " $b =$ " + $(x(B))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto B . Hacer clic derecho sobre el texto b y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción B .
- g) Definir un deslizador, nombrarlo c , como valor mínimo la abscisa del punto A digitando $x(A)$ y como valor máximo $x(B)$.
- h) Insertar el punto C con abscisa el valor del deslizador c y ordenada 0, es decir $(c, 0)$.
- i) Insertar texto " $c =$ " + $(x(C))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto C . Hacer clic derecho sobre el texto c y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción C .
- j) Insertar los puntos E y D con coordenadas $(x(A), f(x(A)))$ y $(x(B), f(x(B)))$ respectivamente.
- k) Trazar los segmentos \overline{AE} y \overline{CD} que representarán las ordenadas que encierran la región $ACDE$ junto con el eje de las abscisas y la curva que representa $f(x)$.
- l) Insertar el punto I con coordenadas $(c, Integral[f, x(A), c])$ y construir el segmento \overline{CI} cuya longitud equivale al área de la región A .
- m) Hacer clic derecho en el punto I y activar rastro, en seguida deslizar c .
- n) Insertar la función $F(x) = Integral[f]$ y observar la coincidencia entre el rastro dejado por el punto I y la gráfica de $F(x)$.

Parte dos: construcción de las rectas tangentes a la función $F(x)$ (mayúscula) en el intervalo $[a, b]$.

- o) Ocultar la función $F(x)$, haciendo clic derecho en $F(x)$ que se encuentra en la ventana algebraica y seleccionado "Muestra objeto".
- p) Trazar los segmentos \overline{CI} y \overline{AC} .
- q) Redefinir los segmentos \overline{CI} , \overline{CD} y \overline{AC} como CI , CD y AC respectivamente. Hacer clic derecho sobre los segmentos y desactivar "Mostrar rótulo".
- r) Insertar el punto T con coordenadas $(AC - \frac{CI}{CD}, 0)$. Por defecto, aparecerá nombrado como G , entonces renombrar como T .
- s) Trazar la recta \overleftrightarrow{IT} y renombrarla IT .
- t) Mover el cursor y observar que \overleftrightarrow{IT} es tangente al rastro dejado por el punto I , este último equivalente a $F(x)$.

Parte tres: T.F.C. según Barrow.

- u) Construir el segmento \overleftrightarrow{TC} y renombrar como TC .
- v) Insertar el punto con coordenadas $(c, \frac{IC}{TC})$, renombrar como T_1 , activar el rastro y cambiar a un color que genere contraste.
- w) Deslizar c y observar la relación del rastro de T_1 con la gráfica $f(x)$ (minúscula).
- x) Si el punto A no está en el origen, redefinir sus coordenadas a $(0,0)$, haciendo doble clic en el punto.
- y) Deslizar de nuevo c y observar la nueva relación entre el rastro de T_1 con la gráfica $f(x)$ (minúscula).

11. Unidad 4, actividad 6. Guía para el uso de Geogebra # 6

Versión del T.F.C. según Newton.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado "Interpretación de integrales negativas" que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) En la barra de entrada definir una función estrictamente monótona y positiva $f(x)$.
- b) Insertar un punto sobre el eje de las abscisas y nómbrelo como A . Este punto representará el extremo inferior del intervalo de integración.
- c) Insertar texto " $a =$ " + $(x(A))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto A . Hacer clic derecho sobre el texto a y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción A .
- d) Insertar otro punto sobre el eje de las abscisas y nombrarlo como A_1 , de tal manera que sea visible en la vista gráfica.
- e) Construir la semirrecta $\overrightarrow{AA_1}$ y defina sobre ella el punto B . Utilizar los íconos "Semirrecta que pasa por dos puntos" y "Punto en objeto" respectivamente.
- f) Insertar texto " $b =$ " + $(x(B))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto B . Hacer clic derecho sobre el texto b y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción B .
- g) Definir un deslizador, nombrarlo c , como valor mínimo la abscisa del punto A digitando $x(A)$ y como valor máximo $x(B)$.
- h) Insertar el punto C con abscisa el valor del deslizador c y ordenada 0, es decir $(c, 0)$.
- i) Insertar texto " $c =$ " + $(x(C))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto C . Hacer clic derecho sobre el texto c y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción C .
- j) Definir el punto α con coordenadas $(x(C), f(x(C)))$ y trazar el segmento $\overline{\alpha C}$.
- k) Definir un deslizador, nombrarlo d , como valor mínimo la abscisa del punto C digitando $x(C)$ y como valor máximo $x(B)$.
- l) Insertar el punto D con abscisa el valor del deslizador d y ordenada 0, es decir $(d, 0)$.
- m) Insertar texto " $d =$ " + $(x(D))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto C . Hacer clic derecho sobre el texto d y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción D .
- n) Definir el punto β con coordenadas $(x(D), f(x(D)))$ y trazar el segmento $\overline{\beta D}$.

- o) Trazar la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto α , seleccionando en el cuarto ícono de izquierda a derecha la opción "Tangentes", haciendo clic en el punto α y en seguida en la gráfica de $f(x)$.
- p) Trazar la recta $\overrightarrow{\alpha\beta}$ secante a $f(x)$ que pasa por los puntos α y β .
- q) Introducir el valor $Integral[f, x(A), c]$ y renombrarlo I .
- r) Deslizar c de izquierda a derecha y d de derecha a izquierda.
- s) Observar que en un sentido se acumula el área en el intervalo $[a, b]$ mientras fluye el punto C , no obstante en el sentido contrario, la recta secante se aproxima a la recta tangente, mientras fluye el punto D .

12. Unidad 4, actividad 7. Guía para el uso de Geogebra # 7

Versión moderna del T.F.C.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado "Interpretación de integrales negativas" que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) En la barra de entrada tomar una función $f(x)$ integrable en algún intervalo Real. Cambiar el aspecto de la curva haciendo clic derecho, seleccionado propiedades, la pestaña estilo, opción estilo de trazo, en seguida ubicar la pestaña color y cambiar.
- b) Hallar la integral de $f(x)$, introduciendo en la barra de entrada $I(x) = Integral(f(x))$.
- c) Insertar un punto sobre el eje de las abscisas y nómbrelo como A . Este punto representará el extremo inferior del intervalo de integración.
- d) Insertar texto " $a = (x(A))$ " para mostrar el valor de la ordenada del punto A . Hacer clic derecho sobre el texto a y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción A .
- e) Insertar otro punto sobre el eje de las abscisas y nombrarlo como Z , de tal manera que sea visible en la vista gráfica.
- f) Construir la semirrecta \overrightarrow{AZ} y defina sobre ella el punto B . Utilizar los íconos "Semirrecta que pasa por dos puntos" y "Punto en objeto" respectivamente.

- g) Insertar texto " $b =$ " + $(x(B))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto B . Hacer clic derecho sobre el texto b y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción B .
- h) Definir un deslizador, nombrarlo c , como valor mínimo la abscisa del punto A digitando $x(A)$ y como valor máximo $x(B)$.
- i) Insertar el punto C con abscisa el valor del deslizador c y ordenada 0, es decir $(c, 0)$.
- j) Insertar texto " $c =$ " + $(x(C))$ para mostrar el valor de la ordenada del punto C . Hacer clic derecho sobre el texto c y seleccionar en la pestaña "Posición punto de origen" la opción C .
- k) Definir el punto I_A con coordenadas $(x(A), I(x(A)))$, de igual manera definir el punto I_C con coordenadas $(x(C), I(x(C)))$.
- l) Definir los puntos f_A con coordenadas $(x(A), f(x(A)))$ y f_C con coordenadas $(x(C), f(x(C)))$, y trazamos los segmentos $\overline{Af_A}$ y $\overline{Cf_C}$. Estos últimos representan las ordenadas de los puntos f_A y f_C .
- m) Trazar la tangente a la función $I(x)$ en el punto I_A y nombrarla como T . Cambiar de color para crear contraste.
- n) Calcular la pendiente de T_A y nombrarla m_T . Asignarle el color de T .
- o) Trazar la secante a la función $I(x)$ que pase por los puntos I_A e I_C y nombrarla como S . Cambiar de color para crear contraste.
- p) Calcular la pendiente de S y nombrarla m_S . Asignarle el color de S .
- q) Trazar el segmento \overline{AC} y renombrar como h . Cambiar el color.
- r) Insertar los textos " $h \rightarrow 0 =$ " + h , " $m_T - m_S =$ " + $(m_T - m_S)$ y " $y(f_A) - y(f_C) =$ " + $(y(f_A) - y(f_C))$, uno por vez.
- s) Deslizar c y observar que en la medida que $h \rightarrow 0$, se tiene que $y(f_C) \rightarrow y(f_A)$ y $m_S \rightarrow m_T$; esto es, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = f(x) = \frac{d(I(x))}{dx}$.

13. Unidad 4, actividad 9. Guía para el uso de Excel # 1.

Regla del Trapecio.

Es conveniente ir desarrollando la actividad simultáneamente con el video denominado “Interpretación de integrales negativas” que se encuentra en el C.D. adjunto a este trabajo. Si se tiene acceso a internet, en el plan de actividades se encuentra el vínculo correspondiente.

- a) Tomar un conjunto discreto de puntos que representan la variación de una función $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en un intervalo determinado, dada una condición inicial de la función que esté en relación con la primera abscisa. Por ejemplo, los siguientes datos se encuentran entre las celdas A1:J2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$\Delta y/\Delta x$	3	12	27	48	75	108	147	192	243

(Figura A – 3)

- b) Copiar en la fila 4 los mismos valores de las abscisas (x).
c) En la celda J5 digitar la función:

$$=(J4- \$B\$4)/(2*CONTAR(\$B\$4:J4))*(\$B\$2+2*SUMA(\$C\$2:I2)+J2)$$

(Figura A – 4)

- d) Copiar la función para las celdas entre C5:I5, arrastrando el cursor desde la parte inferior derecha de la celda J5.
e) En la celda C5 borrar de la formula el término $2 * SUMA(\$C\$2: C2)$, para evitar contarlo dos veces.
f) En la celda B5 digitar la condición inicial para el valor de la abscisa que se encuentra en B1.
g) Observar que los valores de la fila 5 son aproximaciones de la función de interés, que mejorarán en la medida que la partición del intervalo sea más fina.
El resultado del ejemplo es:

$$T_n = \frac{(b-a)}{2n} [f(x_0) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)] \approx \int_a^b f(x) dx$$

Regla del Trapecio										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$\Delta y/\Delta x$	3	12	27	48	75	108	147	192	243
3										
4	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	$\approx y$	1	3,75	18	48,375	100,8	181,25	295,714286	450,1875	650,666667

(Figura A – 5)

14. Unidad 4, actividad 11. Solución de ejercicios y problemas relacionados con el área bajo la curva y el valor de un Efecto Acumulado.

En el siguiente conjunto de problemas, utilice las diferentes representaciones de las funciones inmersas en los enunciados, para calcular las áreas de las regiones bajo la curva o los efectos acumulados, en los intervalos correspondientes.

- Hallar el área de la Región A del plano que se especifica en cada enunciado a continuación:
 - ✓ A se encuentra entre el eje de las abscisas, dos rectas $x = a$, $x = b$ y la función $f(x) = 4x^3$, con $a = 0$ y $b = 2$.
 - ✓ A se encuentra entre el eje de las abscisas, dos rectas $x = a$, $x = b$ y la función $f(x) = \cos x$, con $a = \frac{\pi}{2}$ y $b = \pi$.
 - ✓ A se encuentra entre el eje de las abscisas, dos rectas $x = a$, $x = b$ y la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, con $a = 1$ y $b = \frac{3}{2}$.
 - ✓ A se encuentra entre el eje de las abscisas, dos rectas $x = a$, $x = b$ y la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, con $a = -1$ y $b = 1$.
 - ✓ A se encuentra entre el eje de las abscisas, dos rectas $x = a$, $x = b$ y la función $f(x) = \sec^2(x)$, con $a = \frac{\pi}{4}$ y $b = \frac{\pi}{3}$.

- Al ingerir una tableta de un cierto fármaco, la velocidad de disolución w , se describe por la ecuación de Noyes-Whitney:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{k_d(C_s - C)}{L}A, \quad (A - 5)$$

donde w es la cantidad de fármaco por cada litro disuelta en el estómago, k_d el coeficiente de difusión del fármaco, C_s la concentración del fármaco en la capa de difusión que lo rodea, C la concentración del fármaco en el medio de disolución principal, L el grosor de la capa de difusión y A el área superficial de la tableta que contiene el fármaco. Si se saben los valores k_d , C_s , C y L , ¿Cuánta cantidad de fármaco w medida en microgramos por cada litro ($\mu g/l$) hay disuelta en el estómago, en los primeros 120 minutos, si el área superficial de la tableta disminuye a razón de $0,3\mu m^2$ en cada segundo y la tableta tenía un área superficial inicial de $653,451136mm^2$?

- Un cuerpo de masa m inicialmente en reposo, se deja caer desde cierta altura aquí en la tierra y adquiere una velocidad dada por la ecuación:

$$v(t) = \frac{mg - f_a}{m}t, \quad (A - 6)$$

donde f_a es la fuerza de fricción en N que ejerce el aire sobre el cuerpo, g el valor medio de la aceleración gravitacional en m/s^2 y t el tiempo transcurrido mientras el cuerpo cae en segundos (s). ¿Cuánto hay caído el cuerpo en el intervalo de $0,5s$ a $4s$?

- ¿Cuánto es el monto compuesto S de un capital inicial de dinero P , que varía su interés a una tasa compuesta anual j_c conocida, y se capitaliza continuamente durante el 2º y 3º año, si S varía de acuerdo al número de años de capitalización t de la siguiente manera?:

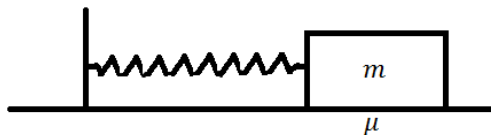
$$\frac{dS}{dt} = j_c \cdot P e^{(j_c \cdot t)}. \quad (A - 7)$$

En una inversión de este tipo, donde los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños; se considera que la acumulación de intereses es instantánea. Si se define el interés como la diferencia entre el monto compuesto y el capital inicial, ¿cuánto interés se ha acumulado en este intervalo de tiempo?

- El trabajo es la medida de la energía consumida por una fuerza al mover una partícula de un punto a otro. Para la mecánica newtoniana, el trabajo W corresponde al cambio de la energía mecánica total; es decir, la acumulación o pérdida, de energía cinética o de energía potencial. Suponiendo que la fuerza F varía de acuerdo al desplazamiento de la partícula, en el movimiento rectilíneo se puede establecer que:

$$\frac{dW}{dx} = F_{neta}, \quad (A - 8)$$

donde x representa la posición de la partícula. En un sistema masa-resorte como se muestra en la figura,



(Figura A - 6)

por la segunda ley de Newton, se deduce la ecuación escalar:

$$F_{neta} = kx - \mu mg, \quad (A - 9)$$

donde k el coeficiente de elasticidad del resorte, μ es el coeficiente de fricción entre la superficie de deslizamiento y la superficie de la masa y g la aceleración gravitacional. Combinando las ecuaciones (A - 8) y (A - 9) se obtiene:

$$\frac{dW}{dx} = kx - \mu mg. \quad (A - 10)$$

¿Si se traslada la masa conocida m , de la posición inicial x_0 a la posición final x_f , ¿cuánto trabajo W en Joules sobre m , consume la fuerza neta del sistema para un valor de k predeterminado?

- En palabras de Apostol [1], el principio de Cavalieri se puede interpretar de manera intuitiva como dos pilas de naipes, una dispuesta de tal manera que cada naipe cubre casi perfectamente a su anterior y la otra de tal forma que algunos naipes están deslizados en su propio plano, tal como se muestra en la siguiente figura:



(Figura A – 7).

La forma del sólido cambia, pero no su volumen. Esto se debe a que, en cada pila, los naipes entran en correspondencia funcional, representando a una pequeña sección de los volúmenes de cada sólido S_1 y S_2 , las cuales son perpendiculares a los segmentos de recta l_1 y l_2 respectivamente. Si cada par de naipes homólogos; en otras palabras, pares de naipes que ocupan posiciones funcionalmente equivalentes en los respectivos sólidos, son iguales; entonces, el volumen de S_1 es igual al volumen de S_2 . Al denotar la sección perpendicular a l_1 o l_2 ; es decir, un naipe en alguna de las pilas como:

$$\frac{dV_S}{dl} = a_S, \quad (A - 11)$$

donde, V_S es el volumen del sólido, a_S la sección plana perpendicular al segmento del eje de referencia l ; entonces, al suponer que $a_S = \pi r^2$, ¿cuánto volumen del sólido V_S hay en la sección que va de $l_0 = 1,5\text{cm}$ a $l_f = 3,2\text{cm}$?

- Se sabe que cuando el aire seco se eleva, se expande y se enfría. En la siguiente tabla se muestran valores discretos de la variación continua de la temperatura dT en $^{\circ}\text{C}$ con respecto a la variación continua de la altitud da en km :

da	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{dT}{da}$	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10

(Tabla A – 2)

Si se sabe que a los 0 km la temperatura es de 20 °C, ¿cuánta temperatura se registra a los 2,5 km y a 3 km de altitud? y ¿qué variación sufre la temperatura entre los 1,5 km y los 3,5 km de altitud?

- En la siguiente tabla se muestra las variaciones de los niveles promedio de CO_2 en la atmósfera del hemisferio norte, medidas en partes por millón cada 10 años, desde el año 1860 al 2000. Estos datos se basan en informes del Panel Intergubernamental de Cambio Climático (IPCC)⁴⁸, en los cuales el valor aproximado de la concentración de CO_2 en 1860 era de 287,5 ppm.

dt	0	10	20	30	40	50	60	70
$\frac{dCO_2}{dt}$	0,4097	0,3147	0,2497	0,2147	0,2097	0,2347	0,2897	0,3747
dt	80	90	100	110	120	130	140	-
$\frac{dCO_2}{dt}$	0,4897	0,6347	0,8097	1,0147	1,2497	1,5147	1,8097	-

(Tabla A – 3)

Calcular los valores respectivos de CO_2 en cada punto del intervalo de la tabla, por medio de la aproximación dada por la regla del trapecio.

- En un laboratorio de física con una cámara de alta velocidad y con ayuda de una lámpara estroboscópica, se obtuvieron los siguientes datos de la caída de una bola de billar, la cual avanzó 7,09 cm en los primeros 0,033 s. La velocidad inicial es aproximadamente igual a 198,45 cm/s.

$t(s)$	0,033	0,066	0,099	0,132	0,165	0,198	0,231	0,264	0,297	0,330	0,363
v $(\frac{cm}{s})$	231	263	294	326	360	393	425	457	489	524	556

(Tabla A – 4)

⁴⁸ Información recuperable en <http://www.mitosyfraudes.org/Calen6/Beck.html>

Calcular la aproximación del desplazamiento en el intervalo de $[0.099s, 0.264s]$.
Compare estos resultados aplicando los modelos newtonianos, tomando $g = 986,5 \text{ cm}/s^2$.

- Según los registros de una estación meteorológica ubicada en la población de Málaga Santander, el 22 de abril de 2008 se registraron los siguientes cambios de temperatura en $^{\circ}\text{C}$, en la medida que transcurrían las horas del amanecer, la mañana y hasta el mediodía.

$t(h)$	0	2	4	6
$\frac{dT}{dt}$	0,83688569	-1,9108813	-2,5704224	-0,4209859
$t(h)$	8	10	12	-
$\frac{dT}{dt}$	2,1885072	2,40638271	-0,0054555	-

(Tabla A – 5)

Si la temperatura a las 0 horas de la madrugada fue de 14°C , calcular la temperatura aproximada registrada en cada hora de la tabla anterior.

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. Calculus. Volumen 1. Segunda edición. Barcelona: Reverté, 1984.
- [2] BLANCO, L. Probabilidad. 2ª edición. Bogotá D.C.: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. ISBN: 978-958-719-576-7, 2010.
- [3] BOYER, C. Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial, 1897.
- [4] CABAÑAS, M., & CANTORAL, R. La Integral Indefinida: Un Enfoque Socioepistemológico. En: C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 3-25). Ciudad de México D.F.: Diaz de Santos., 2007.
- [5] CANTORAL, R. Fundamentos y métodos de la socioepistemología. Conferencia Simposio en Matemática Educativa. México, 2011. Recuperable en: <http://www.youtube.com/watch?v=byHKKFnAq5Y&list=FLIO4FAWK42tth-PK7V4IS3A>
- [6] CALVILLO, N. Prácticas sociales en la convergencia de Sucesiones Numéricas. Proyecto de investigación para doctorado en Matemática Educativa. Zacatecas, 2013. Recuperable en: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/coloquio/doc/calvillo13.pdf>.
- [7] CASTELBLANCO, Y. Propuesta didáctica para trabajar el concepto de integral a partir de métodos que aporta la historia de la matemática. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2012.
- [8] CONTRERAS, A., & ORDOÑEZ, L. Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la Integral Definida. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en*

Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática educativa. 9, 001. (pp. 65-84). ISSN (Versión impresa):1665-2436. Distrito Federal de México: Redalyc, 2006.

[9] GARCÍA, A. & DELGADO A. Euclides: Los Elementos. Teoría de las Paralelas. Método de Exhaustión. En: *Historia de la Geometría Griega*. Actas año I. (pp. 295-296). ISBN 10: 84-88542-00-3, 1992.

[10] GONZÁLEZ, P. La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de Exhaustión. En: *Sigma: Revista de matemáticas-Matematika aldizkaria*. Nº 33, (pp. 101-129). Vitoria:Abendua., 2008.

[11] INSUASTY, L. Guía de trabajo: Explicaciones para planear la propuesta de acción pedagógica en el aprendizaje autónomo. En *Proyecto de Acción Pedagógica: Generación y Uso del aprendizaje Autónomo*, 33-40. Bogotá D.C.: UNAD-CAFAM., 2000.

[12] LEITHOLD, L. El cálculo con geometría analítica. Sexta edición. Mexico D.F.: Harla, 1992.

[13] LINÉS, E. Principios de Análisis Matemático. Barcelona: Editorial Reverté S.A., 1991.

[14] MENNA, S. La Historia de Koyré y el Problema de la Creatividad Científica. Recuperado marzo 17, 2013, de Centro de Lógica, Epistemología e História da Ciência, website, <http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/Sergio%20Menna.pdf>, 2004.

[15] MORENO, R. Historia de las matemáticas. Recuperado noviembre 12, 2013, de divulgaMAT centro virtual de divulgación de las matemáticas, RSME, website, http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent§ion=6&category=37&Itemid=67&limitstart=20, 2008.

[16] MUÑOZ, G. Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.), *Matemática*

Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula (pp. 27-76). Ciudad de México: Diaz de Santos, 2007.

[17] ORTON, A. Students Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, 1-18. 1983.

[18] PONCE, J. Isacc Barrow y su version geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Números*, 83, 123-130. ISSN: 1887-1984. 2013.

[19] RODRIGUEZ, J. Algunas Teorías para el diseño instructivo de unidades didácticas. *Revista de educación a distancia. Publicación en línea*, 20. Universidad de Murcia: Murcia, 2008. Recuperable en: <http://www.um.es/ead/red/20/rodriguez.pdf>.

[20] SPIVAK, M. Calculus. Segunda edición. Mexico D.F.: Reverté Ediciones, S.A., 1996.

[21] TURÉGANO, P. De la noción de área a su definición: Investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida. Segunda edición. Castilla-La mancha: Servicio de publicaciones de la universidad de castilla-la mancha, 1993.