UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Pensamiento variacional para la enseñanza del concepto de proporción a través de un OVA en el grado séptimo de la Institución Educativa la Milagrosa del municipio de Viterbo

Julián Camilo Mejía Jaramillo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas

Manizales -Caldas, Colombia

2018

Pensamiento variacional para la enseñanza del concepto de proporción a través de un OVA en el grado séptimo de la Institución Educativa la Milagrosa del municipio de Viterbo

Variational thinking for teaching the concept of proportion through a VLO in the seventh grade of La Milagrosa Educational Institution of the municipality of Viterbo

Trabajo presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

Doctor: Simeón Casanova Trujillo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas

Manizales -Caldas, Colombia

2018

Dedicatoria:

A mis padres Beatriz Jaramillo Osorio y Jaime Mejía Penagos, por su tenacidad y ejemplo, quienes son fuente de inspiración para lograr mis metas.

A mi familia y hermanos Santiago Mejía Jaramillo y Sebastián Mejía Jaramillo, quienes son mi apoyo incondicional.

Agradecimientos:

A mis familiares y amigos por su apoyo y consejos en cada momento de dificultad y por la paciencia que tuvieron en cada momento que no compartí con ellos.

A todos los profesores que me acompañaron y aportaron con su formación y apoyo en la consolidación de este proyecto.

Agradecimiento especial al Doctor Simeón Casanova Trujillo por sus consejos y apoyo en la propuesta de grado, al grupo LEAC: Paula Bibiana Mejía Pinzón, Xiomara Valencia Castaño y Laura Vivian Ríos Obando por su dedicación y esfuerzos en la creación del objeto virtual de aprendizaje.

Resumen:

En este trabajo se desarrolla y se aplica una unidad didáctica potencialmente significativa, por medio de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) y actividades propias del pensamiento numérico variacional, con la intensión de generar un aprendizaje significativo en el desarrollo del pensamiento proporcional de los estudiantes del grado séptimo de la institución educativa la Milagrosa. La propuesta dio inicio con la aplicación de una prueba diagnóstico, donde se identificaron los conocimientos previos. Luego se crearon tres guías pensadas para crear un OVA, que permita movilizar a los estudiantes por un aprendizaje significativo. Por último se realiza una prueba final para medir el progreso de los estudiantes y a su vez el potencial del OVA.

Palabras claves: Pensamiento variacional, proporción, Objeto Virtual de Aprendizaje, estrategias de enseñanza.

Summary:

In this work a potentially significant didactic unit is developed and applied, by means of a Virtual Learning Object (VLO) and activities of the variational numerical thinking, with the intention of generating a significant learning in the development of the proportional thinking of the students of the seventh grade of the educational institution La Milagrosa.

The proposal began with the application of a diagnostic test, where previous knowledge was identified. Then three guidelines were created to create a VLO, which allows students to be mobilized for meaningful learning. Finally, a final test is carried out to measure the progress of the students and, in turn, the potential of the VLO.

Keywords: Variational thinking, proportion, Virtual Learning Object, teaching strategies.

Tabla de Contenido

Lista de tablas:

Lista de Ilustraciones:

Capítulo 1: Horizonte del trabajo

1.1 Planteamiento del problema:

La implementación de herramientas tecnológica en el aula de clase como mediador de los diferentes procesos educativos, ha sido un trabajo que desde El Ministerio de Educación Nacional (MEN), ha venido implementando en las últimas décadas con el ánimo de mejorar en diferentes pruebas externas. Por consiguiente el MEN ha procurado que el proceso educativo de las matemáticas se lleven a un ambiente más innovador, motivante y competitivo para el ciudadano moderno. (Bedoya , Hernández Llamas, Rivera, & Silva Ferro).

En el saber matemático se han reconocido dos conocimientos base: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. Asociando el primero a conceptos y teorías propias de la actividad cognitiva y reflexiva. Por otro lado el conocimiento procedimental se asocia con la acción y se relaciona con las técnicas. Este último es donde el estudiante reafirma lo aprendido permitiendo el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos. (MEN, Estandares Básicos de Competencias de Matemáticas)

El concepto de la proporcionalidad es una herramienta fundamental para el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos, entre ellos el pensamiento numérico y variacional. Este concepto que se debe ir implementando desde la primaria, en ocasiones se pasa por alto o se deja la responsabilidad para el desarrollo en el grado séptimo, como está planteado en muchos de los planes de estudios de diferentes instituciones y libros de enseñanza, generando algunas dificultades para su comprensión y aplicación posterior tanto en otras asignaturas como en problemas de la cotidianidad, dificultad que en ocasiones es compensada por docentes y alumnos pasando a la tradicional regla de tres. Esta última es aplicada como una fórmula de caja negra donde no se tiene en cuenta magnitudes y el tipo de proporcionalidad.

Otra de las dificultades en el desarrollo del pensamiento proporcional y variacional se evidencia en la poca o nula interpretación que los estudiantes hacen de la elaboración de las gráficas, empezando por la tabulación de los datos y sus magnitudes, identificación de los ejes y como decrecen o crecen estas funciones.

Conforme a lo anterior, se hace importante generar situaciones donde el alumno pueda desarrollar el concepto de proporción como punto de comparación entre las razones, donde una magnitud puede generar cambios en la otra, pero a su vez dejando una relación contante. Este concepto se puede desarrollar a través del pensamiento variacional como lo recomienda Gasperini, (2013).

Este trabajo pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo movilizar el aprendizaje del concepto de proporción, a través de un objeto virtual de aprendizaje (OVA), apoyado en actividades de pensamiento variacional, en estudiantes de grado séptimo de la institución educativa La Milagrosa?

1.2 Justificación:

El desarrollo tecnológico y las dinámicas globales nos ponen en el acelerado y nutrido mundo de la información. Es desde la labor docente que tenemos la necesidad de desarrollar en los estudiantes habilidades como la de sintetizar, analizar y plantear un sentido crítico hacia la información, para que los estudiantes puedan extraer un conocimiento constante y flexible donde su aplicación cobra sentido en los diferentes contextos a los que se enfrenta.

Muchos de los conceptos tratados en matemáticas requieren de un pensamiento abstracto que no se da con naturaleza en algunos estudiantes, Según Piaget el pensamiento abstracto se logra después de haber pasado por la etapa sensoria motriz y del pensamiento concreto. Este pensamiento abstracto se desarrolla progresivamente desde los 12 hasta los 15 años, edad en la que se encuentran los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa La Milagrosa. Por lo anterior se pretende realizar una estrategia educativa donde el estudiante pueda movilizarse desde lo concreto a lo abstracto y viceversa, posibilitando el desarrollo de una actitud creadora y transformadora frente a los conocimientos matemáticos.

Esta estrategia se llevará a cabo con la ayuda de un objeto virtual de aprendizaje (OVA), donde hay diferentes actividades con el propósito de movilizar al estudiante por diferentes representaciones del concepto de proporción, (imagines, videos y prácticas fuera de aula) tal y como lo sugiere Duval, (2016): “no limitarse a la presentación de representaciones en la adquisición de conocimientos”.

Este trabajo se realizará teniendo en cuenta los estándares en matemáticas para el grado séptimo, propios del pensamiento variacional:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

- Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
- Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
- Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan (MEN, Estandares Básicos de Competencias de Matemáticas, 2018).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general:

Aportar al desarrollo del pensamiento proporcional usando mediaciones tecnológicas y pensamiento variacional en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de grado 7 de la institución educativa “La Milagrosa”.

1.3.2 Objetivos específicos:

- Diseñar e implementar una prueba que permita evaluar los avances de los estudiantes entorno al desarrollo de su pensamiento proporcional.
- Diseñar e implementar actividades de pensamiento variacional para movilizar la comprensión del concepto de proporcionalidad.
- Usar como mediador una OVA (objeto virtual de aprendizaje), para la enseñanza-aprendizaje del pensamiento proporcional.

Capítulo 2: Marco referencial

2.1 Marco de antecedentes:

Se realiza una revisión de los antecedentes investigativos más afines, realizados en años recientes, organizados dentro del texto de manera ascendente, con el objetivo de conocer el tratamiento, metodologías, resultados y conclusiones que han realizado investigadores, teniendo como base el pensamiento variacional para la comprensión de la proporción, sus relaciones y beneficios en la enseñanza-aprendizaje, basados en las tic y metodologías innovadoras.

2.1.1 Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana

Autores, año: Tanith Ibarra Muñoz, Vanessa Moreno Yepes, (2010)

Objetivo: Identificar y analizar cuáles son las relaciones que establecen los estudiantes del grado octavo, a partir de la proporcionalidad directa simple en una aproximación al concepto de función lineal, en situaciones de variación de la vida cotidiana.

Metodología: La metodología de este trabajo, está enmarcada en la investigación cualitativa con el método de investigación acción y centrado en la investigación acción participativa; la muestra que se tomó para efectos del análisis fue de cuatro estudiantes de los cuales se recolectaron los datos que al organizarlos y analizarlos, emergieron tres categorías que son: "La constante de proporcionalidad", "La formulación de problemas de la vida cotidiana" y "Las características de la función de proporcionalidad directa simple";

éstas permitieron realizar una triangulación entre los resultados de los estudiantes participantes, los referentes teóricos y las observaciones y reflexiones de las investigadoras. Se destaca el uso del programa GeoGebra y la implementación de tablas de datos donde los estudiantes deben identificar el comportamiento lineal de la función y su relación con la proporcionalidad directa.

Resultados y conclusiones:

A partir de gráficos y tablas, los estudiantes formulan problemas en los cuales se involucran situaciones de proporcionalidad directa simple, relacionados con la vida cotidiana.

El software GeoGebra se tornó en un instrumento, en la medida que fortaleció el concepto de función de proporcionalidad directa simple, favoreciendo que los estudiantes identificaran características de la gráfica, tales como: la expresión matemática del tipo $y = kx$, la pareja ordenada (0,0) como punto de origen y la alineación de los puntos que la conforman.

2.1.2 La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático

Autores, año: Lina María Jaramillo Vélez, (2012)

Objetivo: Proponer y realizar algunas actividades usando estrategias metodológicas que permitan consolidar el significado del concepto de proporcionalidad

Metodología: En la metodología de Aula Taller el conocimiento se adquiere por descubrimiento y asimilación propios, despertando curiosidad en torno al tema o problema planteado, es decir de “aprender-haciendo”. En el taller los estudiantes tienen la oportunidad de construir estrategias de pensamiento y construir y reconstruir conocimiento de forma colectiva y participativa.

Esta metodología permite el trabajo interdisciplinario y en grupo, y se caracterizada por la utilización de material didáctico para la exploración de situaciones concretas, que conlleve al desarrollo de un pensamiento matemático y científico, y el uso y diseño de guías de trabajo que plantean situaciones problema que se caracterizan por la integración de los diferentes pensamientos matemáticos.

Resultados y conclusiones:

Las actividades que componen la experiencia permitieron la elaboración de conjeturas que apuntaban a los conceptos involucrados con la proporcionalidad, con la semejanza de triángulos, la solución de problemas de aplicación y la formulación de situaciones relacionadas. Se sugiere incluir como parte de la formación de las estudiantes el uso reflexivo y significativo de la geometría dinámica, a través de talleres donde se puedan realizar procesos de construcciones geométricas o acercamientos a propiedades y relaciones geométricas, que permitan el descubrimiento de éstas, así como la formulación y validación de conjeturas.

2.1.3 Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes

Autores, año: Eruin Alonso Sánchesz Ordoñes, (2013)

Objetivo: Analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de grado séptimo de educación, a través de cinco situaciones de variación y cambio, donde se exhibe de qué manera los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad son usados para enfrentar tales situaciones.

Metodología: Se tomó como modelo el esquema presentado en (Obando,

Vanegas y Vásquez, 2006; Posada, 2006), que consistió en anticipar cuáles serían las posibles respuestas de los estudiantes y cómo resolvería las situaciones un experto. En este momento, se identificó si los estudiantes recurrían a análisis escalares o a análisis funcionales y se determinó cuál era el rol jugado por la razón en las diversas posibles soluciones, es decir, si la razón obraba como relator, como operador o como correlator entre cantidades de magnitud (Obando, Vasco y Arboleda, 2009), las cuales son consideradas como una parte del bloque teórico que soportas la técnicas empleadas para resolver los problemas de los distintos tipos de situaciones.

- El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a cada una de las situaciones: Teniendo en cuenta que antes de aplicar la siguiente situación se debe analizar la anterior.
- La determinación de la pertinencia o no de realizar una intervención por parte del investigador.
- El diseño de sub-situaciones que permitan determinar los alcances y deficiencias de las intervenciones.

Resultados y conclusiones:

Los estudiantes recurrieron inicialmente a la técnica correspondiente a las representaciones tabulares, para dar algunas respuestas. Aunque, al solicitarles hacer una gráfica, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de las representaciones icónicas. Este par de hechos llevó a que en la primera intervención se recordará lo referente a las gráficas cartesianas y estadísticas, lo que condujo a que en las siguientes dos situaciones, en las que se pedía hacer una gráfica, los estudiantes acudieran a la técnica de las gráficas cartesianas.

2.1.4 Propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo de la institución educativa departamental San Miguel

Autores, año: Juan Manuel Daza López, (2014)

Objetivo: Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo, que permita sugerir estrategias para superar la falta de transversalidad detectada en el área de matemáticas de la Institución Educativa Departamental San Miguel.

Metodología: En este trabajo se realiza una reflexión sobre el razonamiento proporcional y sus aplicaciones en diferentes contextos, tomando como base los aspectos disciplinares, didácticos e históricos-epistemológicos, con el fin de elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo, que permita sugerir estrategias para superar la falta de transversalidad detectada en el área de matemáticas de la Institución Educativa Departamental San Miguel.

Resultados y conclusiones:

Privilegiar situaciones en la que los estudiantes apliquen de manera contextualizada el concepto de proporción, ayuda al desarrollo de las competencias establecidas por el Ministerio de Educación Nacional, desde los diferentes pensamientos. De esta manera actividades realizadas como el conteo con captura y recaptura, permite progresar en el pensamiento aleatorio y el cálculo de probabilidades y abrir paso al manejo algebraico por parte de los estudiantes. Igual sucede con actividades como la medir el tiempo de caída del agua, en la cual se trabaja el pensamiento variacional y la actividad de medición de edificios con la cual se desarrolla un pensamiento geométrico y métrico.

2.1.5 Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que movilice el Aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa a través de las TIC en el grado Séptimo la Institución Educativa el Pedregal del Municipio de Medellín

Autores, año: César Augusto Lopez Zapata, (2014)

Objetivo: Diseñar una unidad de enseñanza potencialmente significativa, apoyada en TIC que movilice el aprendizaje en la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa en estudiantes del grado séptimo de la educación básica de la Institución Educativa el Pedregal

Metodología: Para este caso se aplicará la monografía de análisis de experiencias o estudio de casos en la cual se abordaron las teorías del constructivismo y el aprendizaje significativo. La propuesta didáctica se desarrolla en cuatro momentos: el momento I corresponde al diagnóstico donde se realizó un test con 20 preguntas para identificar los saberes previos de los estudiantes, el momento II se enfocó en el análisis de la prueba diagnóstica, en el momento III se diseñaron y se aplicaron las estrategias con sus respectivas actividades siguiendo los pasos de las UEPS y el momento IV se utilizó para el análisis de resultados de las actividades y del test final.

Resultados y conclusiones:

Al confrontar el test inicial con el test final en el pensamiento numérico y variacional se logra una mejoría representativa para reconocer qué es una proporción, qué es una magnitud, una razón y la proporcionalidad inversa de la directa. Frente a la solución de problemas, la equivalencia entre fracciones, los métodos para resolver problemas de proporcionalidad como comparación, fracciones, factor de cambio frente al pret-test, se nota una leve mejoría, que se podría determinar en un aumento de un 8%. Mejora el razonamiento proporcional en un 22% en problemas de comparación y equivalencias entre fracciones. Sin embargo se aumenta en un 11% el proceso aditivo para resolverlos. El proceso para solucionar problemas haciendo uso del razonamiento multiplicativo mejoró en un 18%, Se puede apreciar que el método más adecuado para resolver problemas de proporcionalidad es reduciendo a la unidad.

De las situaciones problema, la teoría del aprendizaje significativo, las UEPS y de todos los medios que se utilizaron sirvieron para dinamizar las clases, permitió pasar de una enseñanza tradicional a una enseñanza constructivista, allí los estudiantes trabajan a su propio ritmo de acuerdo a la capacidad cognitiva, motivación y autonomía por desarrollar el trabajo. Las teorías mencionadas permitieron transverzalizar los contenidos e interactuar de una herramienta a otro de acuerdo a sus necesidades. Las dos teorías en mención privilegian el trabajo colaborativo, permiten ubicar al docente y al alumno en un punto de arranque de conocimientos.

2.1.6 “El número de Oro y Proporcionalidad Áurea en la Escuela Secundaria utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Un estudio de caso”

Autores, año: Sabrina Beatriz Dechima Dendorfer, (2016)

Objetivo: Elaborar una propuesta didáctica basada en el uso de plantillas desarrolladas con el software de geometría dinámica GeoGebra para analizar cómo actúan los alumnos frente a ella y como se apropian de propiedades y características relevantes en relación a los contenidos: “Proporcionalidad áurea y número de oro” los alumnos de 1º año “C” de la Escuela de Educación Secundaria N° 6 de la localidad de Belén de Escobar.

Metodología: Corresponde a un enfoque cualitativo, debido a que los resultados que se obtendrán no podrán ser relacionados con valores numéricos de manera directa. Durante su implementación se intentó observar la totalidad de los hechos sin reducirlos a sus partes integrantes y se desarrollaron preguntas antes, durante y después del proceso. Posee un total de cuatro etapas: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

Resultados y conclusiones:

Fueron los alumnos quienes se involucraron en su propio proceso teniendo como meta la exposición de reflexiones. En el desarrollo de las puestas en común se apeló constantemente a relacionar los conocimientos que disponen, las actividades desarrolladas, los ensayos, errores, aciertos, aportes y discusiones realizadas por ellos mismos. Este proceso cargó de sentido la tarea desarrollada hasta el momento, pues favorece al mismo tiempo la autonomía y el control de cada una de sus producciones.

También el acceso a recursos digitales y su utilización para el desarrollo de las actividades marcó una diferencia. El software GeoGebra, favorece la exploración, al mismo tiempo posibilita trabajar con contenidos desde distintos registros.

2.1.7 Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa

Autores, año: Daniela Reyes , (2016)

Objetivos: Sistematizar los elementos a considerar en un diseño de intervención para el desarrollo profesional docente con una cierta característica: asumiendo que su fin sea el promover que el profesor se sume y sea parte de la transformación del proceso de enseñanza que corresponde a un nuevo paradigma del aprendizaje basado en prácticas.

Este paradigma sustentado en la socioepistemología busca transformar la realidad de los profesores en cuanto a sus prácticas profesionales y la de los estudiantes en relación con su aprendizaje, mediante una "matemática funcional" para la vida de ambos.

Nuestro eje de estudio considera una articulación indispensable entre tres elementos teóricos: el saber matemático funcional, ejemplificado con la noción de la proporcionalidad directa, el constructo teórico de empoderamiento docente y la noción misma aula extendida, en tanto, proceso que permite la evolución pragmática de la construcción del conocimiento matemático.

Metodología: Esta investigación reporta un estudio sistémico de corte cualitativo interpretativo multimetodológico. Articuló los resultados de la tesis de maestría (Reyes, 2011), con la investigación doctoral para realizar in situ un programa para el desarrollo profesional docente en Matemáticas del nivel secundario, donde se estudió, amplió y teorizó la relación entre “lo proporcional (local y global)” con el constructo social del empoderamiento docente. El marco teórico que permitió llevar a cabo esta investigación se sustentó en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa.

Resultados y conclusiones:

Este trabajo nos ha permitido construir una explicación alternativa que estudia al fenómeno de manera sistémica: afirmamos que las estructuras objetivables del discurso Matemático Escolar se apoyan en un tratamiento aritmético de la proporcionalidad, cuando la naturaleza del saber matemático precisa del desarrollo de un pensamiento variacional que lo anteceda. Este fue un punto fundamental de la presente investigación.

La p.m.e. (problematización de la matemática escolar), es considerada el mecanismo para confrontar y desafiar la matemática escolar con la comunidad docente. Con base en ella, se propuso un dispositivo de intervención para propiciar el cambio de relación con el conocimiento matemático por parte de los profesores, es decir, un dispositivo innovador para el desarrollo profesional docente que les permita relacionarse con el saber matemático escolar. Decimos innovador dado que su estructura fundamental refiere al tránsito de una relación centrada en objetos hacia una relación centrada en prácticas, un cambio de paradigma para con el conocimiento matemático escolar.

2.1.8 Reflexión acerca del marco de antecedentes

Los diferentes trabajos relacionados anteriormente, muestran una estrecha y benéfica relación entre el desarrollo de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad con el pensamiento variacional, dando lugar importante a las experiencias donde el estudiante puede aplicar de manera contextualizada los conceptos. De igual forma se le da resonancia al uso de la TIC (Tecnología de la información y la comunicación), con el fin de posibilitar la interacción del estudiante con los conceptos, ya que software como GeoGebra o Excel les permitieron hacer descubrimientos y formulación de conjeturas que con otros métodos no.

2.2 Marco teórico:

Este marco contiene una revisión concisa sobre teorías de la educación, tanto del aprendizaje como de la enseñanza, que tienen relación con los objetivos de la investigación; de igual manera se consideran aspectos de los procesos cognitivos, curriculares y tecnológicos que son de suma importancia para la construcción y sustentación del trabajo, que se desarrolla en este documento.

2.2.1 Currículo en matemáticas:

Desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se plantea la construcción del currículo en matemáticas. La resolución 2346 de1996 da los lineamientos generales y logros educativos, están planteados para guiar a la comunidad educativa. Con esto se espera dar respuesta a las necesidades que emergen respecto a las competencias que el estudiante debe tener, lo cual es medido no solo en el contexto nacional, sino que además debe responder a los estándares internacionales, en donde una de las metas a lograr globalmente se dirige a la aplicabilidad de los conceptos y demás contenidos a situaciones de la vida diaria.

Con el objetivo de mejorar estos lineamientos el MEN implementó los estándares educativos. Estos estándares y lineamientos constituyen el marco referencial para que las instituciones educativas, sin perder autonomía, tengan un referente más claros sobre lo que los niños deben aprender, lo que la sociedad espera de los maestros y los resultados mínimos que debe obtener el sistema educativo colombiano (MEN, 2001).

En el año 2000 el gobierno colombiano identificó la necesidad de implementar en la educación la tecnología de la información y la comunicación (TIC), como un mecanismo fundamental para crear territorios y sociedades más competitivas e incluyentes, buscando la transformación de diversos sectores relevantes para el desarrollo social y económico del país. La implementación de TIC en Colombia representa un esfuerzo continuo y permanente de varias administraciones y varios periodos de gobierno interesados en implementar una política pública coherente con las necesidades de la sociedad y del Estado en el siglo xxi (Valencia Tello, 2015).

Con base a estas directrices el proyecto cobra importancia en la implementación de tecnologías de la información y la comunicación, sin dejar de lado la práctica del currículo, al encausarlo con el entendimiento del concepto de proporción y el desarrollo del pensamiento variacional. De igual manera se debe implementar acorde a las necesidades de los estudiantes del grado séptimo y los estándares planteados por MEN (2018).

2.2.2 Constructivismos en la educación

Desde la perspectiva constructivista el estudiante es el creador de su propio conocimiento. Tomando como base lo que el estudiante ya conoce de sus experiencias previas, la labor del docente es propiciar los escenarios adecuados para la interacción de lo conceptual, con lo procedimental y lo actitudinal, permitiendo que el estudiante construya sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo que conlleva a que modifique su ideas y siga aprendiendo. Para conocer mejor el enfoque constructivista debemos entenderlo desde diferentes posturas:

Jean Piaget muestra la importancia en la construcción del conocimiento a partir de la interacción con el medio. Las ideas de Piaget se basan en que la inteligencia va atravesando diferentes etapas, donde se pasa de una estructura a otra a medida que el niño va creciendo. Este proceso de aprender se da cuando se presenta un conflicto cognitivo entre el sujeto y el entorno, permitiendo al sujeto hace una modificación cognitiva donde sea posible la relación entre el objeto y el sujeto (Carretero, 1993).

Vygotsky (2007) aporta a la teoría constructivista, con la idea de que el conocimiento surge como producto de la interacción social y cultural. Su postura se enfoca en la necesidad social que tiene el sujeto y como los procesos psicológicos superiores (Comunicación, lenguaje, conocimiento), se adquieren en un contexto social para luego ser internalizado. En la teoría de Vygotsky (2007) aparece la zona de desarrollo próximo (ZDP). Esta es como una distancia entre el nivel actual del sujeto y lo potencial a aprender, esta distancia es disminuida o superada por medio de una guía adulta o un par con mayor capacidad. En consecuencia el papel del docente es acercar al estudiante a una trasformación de su saber por medio de experiencias contextualizadas (Schunk, 2012).

2.2.3 Aprendizaje significativo

El aprendizaje significativo es un proceso por el cual se adquiere un nuevo conocimiento, a través de una relación no arbitraria o lineal con la estructura cognitiva de la persona que está aprendiendo. En el aprendizaje significativo, el objeto de aprendizaje se trasforma de un significado lógico a uno psicológico para el sujeto. En palabras de Ausubel (1963), el aprendizaje significativo es el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento.

Cuando se habla de una relación no arbitraria o lineal en el proceso de aprendizaje, se refiere a que el estudiante debe conectarse de manera sustancial con el nuevo conocimiento. Esto se logra cuando lo que se está aprendiendo se conecta con su estructura cognitiva previa, es decir está conectado con un símbolo, una imagen, una proposición o un concepto previo que para el estudiante tiene relevancia.

Por consiguiente, es importante considerar lo que el educando ya sabe para conectarlo con aquello que debe aprender. Este proceso tiene lugar cuando el individuo tiene en su estructura cognitiva, imágenes, ideas, proposiciones y conceptos que son relevantes y están bien definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar.

Es importante en el aprendizaje significativo que el docente evite los datos memorísticos sin una conexión con los pres saberes del estudiante, La idea por tanto es activar los conocimientos previos del estudiante y a partir de estos mostrarle la nueva información, de igual modo el docente tiene la tarea de llevarlos por medio de experiencias a aquello que no saben, creando desequilibrio cognitivo, con el fin de despertar en ellos la motivación intrínseca, es decir las ganas de aprender.

2.2.4 Requisitos para lograr el aprendizaje significativo:

A continuación se presentan algunas características que se deben tener para permitir un aprendizaje significativo, basados en la teoría de Ausubel y otros investigadores:

- El conocimiento previo es el factor más importante en el aprendizaje significativo (Ausubel 1963)
- El alumno es el que decide si desea aprender significativamente, manifestando una disposición para relacionar, de manera no arbitraria el conocimiento. (Novak & Gowin, 1988)
- El material de aprendizaje: El docente debe presentar al estudiante un material organizado que permita activar los conocimientos previos desde los intereses sociales del alumno.
- Significado psicológico del material: El alumno debe conectarse con el material presentado por el docente donde permita impactar en la memoria del mismo y favorecer la construcción y memorización del conocimiento.
- Frente a una nueva situación, el primer paso para resolverla es construir, en la memoria de trabajo, un modelo mental funcional, que es un análogo estructural de esa situación (Johnson Laird, de Vega, Intons-Peterson, Denis, & Marschark, 1996).
- Las situaciones problema son las que dan sentido a nuevos conocimientos (Vergnaud, 1997); deben ser pensadas para despertar la intencionalidad del alumno para el aprendizaje significativo. Las situaciones-problema pueden funcionar como organizadores previos.
- El papel del profesor es el de proveedor de situaciones-problema, cuidadosamente seleccionadas, de organizador de la enseñanza y mediador de la captación de significados de parte del alumno (Vergnaud; Gowin 1988).
- Un episodio de enseñanza supone una relación tríadica entre alumno, docente y materiales educativos, cuyo objetivo es llevar el alumno a captar y compartir significados que son aceptados en el contexto de la materia de enseñanza (Gowin 1981).

- La interacción social y el lenguaje son fundamentales para la captación de significados (Vygotsky, 2007).
- El aprendizaje debe tener un carácter crítico, evitando lo mecánico (Moreira, 2012).
- El aprendizaje significativo crítico es estimulado por la búsqueda de respuestas (cuestionamiento) en lugar de la memorización de respuestas conocidas, por el uso de la diversidad de materiales y estrategias educacionales, por el abandono de la narrativa en favor de una enseñanza centrada en el alumno (Moreira, 2012). Esto es posible a través del diseño de una OVA para movilizar el aprendizaje de la proporción a través de las TIC.
- La evaluación del aprendizaje significativo debe ser realizada en términos de búsqueda de evidencias.

2.2.5 Unidades de enseñanza potencialmente significativas (UEPS):

Una unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS) posee una secuencia de enseñanza fundamentada teóricamente y orientada al aprendizaje no mecánico, que puede estimular el aprendizaje. El doctor Marco Antonio Moreira (2012) nos sugiere los siguientes pasos para su construcción:

1. Definir el tema específico que será abordado, identificando sus aspectos declarativos y procedimentales tal y como se aceptan en el contexto de la materia de enseñanza en la que se inserta el tema escogido

2. Crear/proponer situación(ones) – discusión, cuestionario, mapa conceptual, situación problema, etc. – que lleve(n) el alumno a exteriorizar su conocimiento previo, aceptado

o no aceptado en el contexto de la materia de enseñanza, supuestamente relevante para el aprendizaje significativo del asunto (objetivo) en pauta.

3. Proponer situaciones-problema, en un nivel bastante introductorio, teniendo en cuenta el conocimiento previo del alumno, que preparen el terreno para la introducción del conocimiento (declarativo o procedimental) que se pretende enseñar; estas situaciones problema pueden incluir, desde ya, el asunto en pauta, pero no para empezar a enseñarlo; tales situaciones-problema pueden funcionar como organizador previo; son las situaciones que dan sentido a los nuevos conocimientos, pero para eso el alumno tiene que percibirlas como problemas y debe ser capaz de modelarlas mentalmente; los modelos mentales son funcionales para el aprendiz y resultan de la percepción y de conocimientos previos (invariantes operatorios); estas situaciones-problema iniciales se pueden proponer a través de simulaciones computacionales, demostraciones, vídeos, problemas del cotidiano, representaciones vehiculadas por los medios de comunicación, problemas clásicos de la materia de enseñanza, etc., pero siempre de modo accesible y problemático, es decir, no como ejercicio de aplicación rutinaria de algún algoritmo.

4. Una vez trabajadas las situaciones iniciales, se presenta el conocimiento que debe ser enseñado/aprendido, teniendo en cuenta la diferenciación progresiva, es decir, empezando con aspectos más generales, inclusivos, dando una visión inicial del todo, de lo que es más importante en la unidad de enseñanza, pero después se ponen

ejemplos, abordando aspectos específicos; la estrategia de enseñanza puede ser, por ejemplo, una breve exposición oral seguida de una actividad colaborativa en pequeños grupos que, a su vez, debe ser seguida de una actividad de presentación o discusión en el grupo grande;

5. A continuación, se retoman los aspectos más generales, estructurantes (es decir, lo que efectivamente se pretende enseñar), del contenido de la unidad de enseñanza, en nueva presentación (que puede ser a través de otra breve exposición oral, de un recurso computacional, de un texto, etc.), pero con un nivel más alto de complejidad con relación a la primera presentación; las situaciones-problema deben ser propuestas en niveles crecientes de complejidad; dar nuevos ejemplos, destacar semejanzas y diferencias con relación a las situaciones y ejemplos ya trabajados, o sea, promover la reconciliación integradora; después de esta segunda presentación, hay que proponer alguna otra actividad colaborativa que lleve los alumnos a interactuar socialmente, negociando significados, contando con el profesor como mediador esta actividad puede ser la resolución de problemas, la construcción de un mapa conceptual o un diagrama V, un experimento de laboratorio, un pequeño proyecto, etc., pero necesariamente tiene que haber negociación de significados y la mediación docente.

6. Concluyendo la unidad, se da continuidad al proceso de diferenciación progresiva retomando las características más relevantes del contenido en cuestión, pero desde una perspectiva integradora, o sea, buscando la reconciliación integrativa; eso debe ser realizado a través de una nueva presentación de los significados que puede ser, otra

vez, una breve exposición oral, lectura de un texto, recurso computacional, audiovisual, etc.; lo importante no es la estrategia en sí, sino el modo de trabajar el contenido de la unidad; después de esta tercera presentación, se deben proponer y trabajar nuevas situaciones-problema en un nivel más alto de complejidad con relación a las situaciones anteriores; esas situaciones deben ser resueltas en actividades colaborativas y después presentadas y/o discutidas en el grupo grande, siempre contando con la mediación del docente.

7. La evaluación del aprendizaje en la UEPS debe ser realizada a lo largo de su implementación, anotando todo lo que pueda ser considerado evidencia de aprendizaje significativo del contenido de la misma; además, debe haber una evaluación sumativa después del sexto paso, en la que se deben proponer cuestiones/situaciones que impliquen comprensión, que manifiesten captación de significados e, idealmente, alguna capacidad de transferencia; tales cuestiones/situaciones deben ser previamente validadas por profesores expertos en la materia de enseñanza; la evaluación del desempeño del alumno en la UEPS deberá estar basada, en pie de igualdad, tanto en la evaluación formativa (situaciones, tareas resueltas colaborativamente, registros del profesor) como en la evaluación sumativa.

8. La UEPS solamente será considerada exitosa si la evaluación del desempeño de los alumnos suministra evidencias de aprendizaje significativo (captación de significados, comprensión, capacidad de explicar, de aplicar el conocimiento para resolver situaciones problema). El aprendizaje significativo es progresivo, el dominio de un

campo conceptual es progresivo; por eso, el énfasis en evidencias, no en comportamientos finales.

Aspectos transversales:

- En todos los pasos, los materiales y las estrategias de enseñanza deben ser diversificados, el cuestionamiento debe ser privilegiado con relación a las respuestas memorizadas y el diálogo y la crítica deben ser estimulados.
- Como tarea de aprendizaje, en actividades desarrolladas a lo largo de la UEPS, se le puede pedir a los alumnos que ellos mismos propongan situaciones-problema relativas al asunto en cuestión.
- Aunque la UEPS deba privilegiar las actividades colaborativas, la misma puede también prever momentos de actividades individuales.

2.2.6 Objetos virtuales de aprendizaje (OVA)

Un objeto virtual de aprendizaje (OVA), es un conjunto de recursos digitales que posibilita la creación de UEPS, donde el docente puede organizar cursos, cuadros, fotografías, películas, videos y documentales que posean claros objetivos educacionales y permiten desde un ambiente digital dar una educación innovadora y efectiva.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2018) lo define como: todo material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de la Internet. El objeto de aprendizaje debe contar además con una ficha de registro o metadato, consistente en un listado de atributos que además de describir el uso posible del objeto, permiten la catalogación y el intercambio del mismo.

En el ámbito internacional y con un concepto más estructurado se tiene que un Objeto de Aprendizaje es cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología.

En América Latina se viene convocando, desde el 2006, a instituciones, investigadores y docentes interesados, para conformar la Comunidad Latinoamericana de Objetos de Aprendizaje LACLO, iniciativa a la que se han venido uniendo representantes de varios países entre los que se encuentra Colombia (Cabrera Medina, Sánchez Medina, & Rojas Rojas, 2016)

Características de los OVA:

1. Reutilizable: El OVA debe tener la facilidad de ser utilizado en diferentes contextos de aprendizaje y propósitos educativos; con la flexibilidad para ser modificado, actualizado y reconstruido con la intensión de mejorar su potencialidad educativa.

2. Interoperables: El objeto debe permitir su operatividad en diferentes tipos de plataformas. Posibilitando el intercambio de la información y utilizar la información intercambiada.

3. Durabilidad: Deben contar con información vigente y contextualizada, sin que sea necesario el cambio del diseño.

4. Accesibilidad: Debe contar con facilidad y rapidez para acceder a los objetos virtuales, mediante los diversos descriptores.

5. Autocontenibles: Esto se refiere a que todo lo necesario para lograr el aprendizaje está planteado dentro del mismo objeto de aprendizaje, como: objetivos y propósitos, diversos tipos de contenidos de estudios, actividades y evaluaciones.

6. Propósito educativo: Este es realizado por el docente, donde le da sentido al aprendizaje. Decidiendo y retroalimentado el OVA con el fin de incitar y motivar a los alumnos en su proceso educativo. Permitiendo estimular el pensamiento, el autoaprendizaje, la recursividad y la creatividad (Morales Martin, Gutiérrez Mendoza, & Ariza Nieves, 2016).

2.2.7 Pensamiento variacional y la proporcionalidad

El pensamiento variacional es una actividad de reconocimiento al cambio donde se busca relacionar las diferentes cantidades y magnitudes, de un fenómeno, a través de la modelación matemática. El MEN (2018), reconoce el pensamiento variación como una competencia fundamental y activa en la solución de problemas, tanto de las mismas matemáticas como de otras áreas del conocimiento.

Los primeros acercamientos al desarrollo del pensamiento variación, van de la mano en la actividad de observar y reconocer patrones que puedan ser reproducidos y predichos en el tiempo. En la Educación Básica Primaria se puede desarrollar a través del análisis de fenómenos de variación, por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes, el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a la institución. Luego, estos son representados en graficas o por medio de tablas MEN (2018).

El desarrollo continúa en la básica secundaria con la modelación algebraica a través de las funciones, buscando alcanzar la formulación que defina el patrón y las reglas que predicen el fenómeno de estudio, relacionando el cambio entre la magnitud X y la magnitud Y.

Por otro lado el pensamiento o razonamiento proporcional según (Lesh , Post, & Behr, 1988) se define como un tipo de razonamiento matemático que involucra sentido de covariación y de múltiples comparaciones. Ellos aseguran que la principal característica del razonamiento proporcional es el reconocimiento de similitud estructural e invarianza.

Estas actividades propias del pensamiento variacional como: identificar variables, constantes, funciones, razones, tazas de cambio, dependencia e independencia entre las variables y los distintos modelos permiten movilizar el pensamiento proporcional tal y como lo sugiere el MEN(2018) , es su texto de estándares básicos de competencias matemáticas: “Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas” En consecuencia, actividades que involucren el manejo de datos en forma estática o variacional permite acercarse a la proporcionalidad.

2.2.8 Didáctica para el pensamiento variacional y las TIC

El MEN en su interés por mejorar los procesos educativos bajo la mediación de las TIC ha generado un documento bajo la coordinación de la doctora Ana Celia Castiblanco Paipa (2004), donde se realiza una propuesta, en fases integradas y no necesariamente secuenciales, para el trabajo dentro del aula relacionado con situaciones didácticas que impliquen razones de cambio y variación, bajo el marco de los sistemas computacionales, gráficos y algebraicos, que se indican a continuación:

- **Observar y describir las situaciones:** En esta fase se propone a los estudiantes realizar una descripción libre de la situación de cambio, con base a lo observado, se propone formular algunas hipótesis y predicciones basados en preguntas como: ¿Qué elementos varían?, ¿Cómo varían? , ¿Qué elementos permanecen constantes? , ¿Qué valores pueden o podrían tomar las magnitudes en observación?, ¿Qué sucede con una de las magnitudes a medida que varía la otra?

- **Registro de los datos en una tabla y descripción de la variación:** Teniendo presente la información numérica en la tabla se procede a realizar un análisis cualitativo de la variación, para un mejor análisis se cuantifica la variación mediante la realización de diferencias al interior de cada columna y de cocientes entre estas diferencias (análisis de proporción).

  Para realizar el análisis se pueden proponer las siguientes preguntas: ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar la variable independiente?, ¿cuál es el rango de valores que puede tomar la variable dependiente?, ¿cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente se acercan a cero? , ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de variable independiente aumentan? , ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de variable independiente disminuyen?, ¿existe un valor de la variable independiente para el que se obtenga el valor máximo de la variable dependiente?, ¿uno para el que se obtenga el valor mínimo?, ¿cuáles son estos valores? En general, ¿cómo varían los valores de la variable dependiente a medida que varían los valores de la variable independiente? , ¿Existen valores en la variable independiente a los que les corresponda más de un valor?, ¿existen valores diferentes para la variable independiente a los que les corresponda un mismo valor? Explicar.

- Visualización de la gráfica formada por un conjunto de valores registrados: Teniendo en cuenta la información obtenida por la gráfica, se hace posible es estudio de la variación y la dependencia entre variables, se proponen los siguientes aspectos para su análisis: ¿Qué forma aproximada tendría la gráfica que une los puntos? , ¿En qué coincide con las gráficas esbozadas anteriormente? , ¿En qué difieren? ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar la variable independiente? , ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar la variable dependiente? , ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente se acercan a cero? , ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de variable independiente aumentan? , ¿Cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de variable independiente disminuyen? , ¿Existe un valor de la variable independiente para el que se obtenga el valor máximo de la variable dependiente? ¿Uno para el que se obtenga el valor mínimo? ¿Cuáles son estos valores? , ¿Se podrían encontrar otros? Explicar. ¿En general, cómo varían los valores de la variable dependiente a medida que varían los valores de la variable independiente? ¿Existen valores en la variable independiente a los que les corresponda más de un valor? Explicar. ¿Existen valores diferentes para la variable independiente a los que les corresponda un mismo valor? Explicar.

- **Relacionar la información obtenida en la gráfica con la información obtenida en la tabla:** Confrontar las respuestas obtenidas en los puntos anteriores y relacionar la información con el fenómeno en estudio.

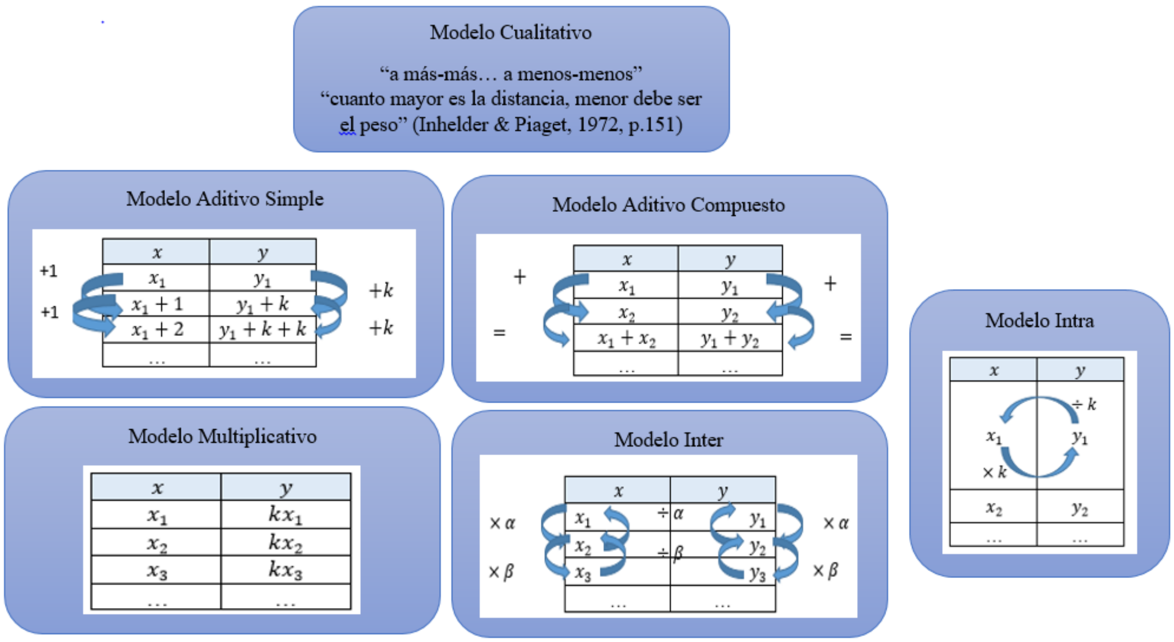
- **Hacer aproximaciones de la expresión algebraica que mejor relaciona las variables:** Teniendo en cuenta lo realizado hasta esta fase, se debe intentar la formulación de expresiones algebraicas que se acomoden de manera aproximada con relación a los datos, para la verificación de estas hipótesis se debe utilizar el editor de ecuaciones, que ofrecen algunos software como GeoGebra, donde se puede establecer relaciones de forma rápida sobre las expresiones algebraicas, su representación gráfica y el conjunto de puntos tomados del fenómeno en estudio.

- **Hacer el cálculo de regresión:** De acuerdo con la función que mejor modela los datos, confrontar las respuestas planteadas y analizar la función obtenida en el conjunto de todos los reales (ceros, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, etc.) (Castriblanco Paiba, Urquina Llanos, & Gempeler, 2004)

2.2.9 La enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad:

Daniela Reyes Gasperini (2013) menciona 6 modelos de pensamiento proporcional en su artículo "transversalidad de la proporcionalidad", como se muestra en la ilustración 2-1, donde se destacan estos modelos para la interpretación e intervención didáctica en el aula de clase:

Ilustración 1: Modelos de pensamiento proporcional



Fuente: (Gasperini, 2013)

Modelo cualitativo:

Los primeros investigadores acerca del desarrollo del pensamiento proporcional son Piaget y e Inherder. Ellos observaron que la noción de proporcionalidad, se inicia de una forma cualitativa y lógica para luego dar paso a la cuantitativa, y es precisamente en este proceso de pasar de lo cotidiano a lo cuantitativo donde se da una construcción matemática del concepto de proporcionalidad para el niño (Piaget & Inhelder, 1977).

Dentro de los experimentos realizados por Piaget y Inhelder se destaca el realizado con una balanza, en donde su objetivo principal era el de relacionar la noción de proporcionalidad con el problema de equilibrio. De estos experimentos se llegaron a las siguientes conclusiones:

- Una primera etapa del pensamiento proporcional donde se da una serie de proporciones en forma cualitativa:" a más más "; "a menos-menos"," cuanto mayor es la distancia menor debe ser el peso"
- Una segunda etapa o etapa intermedia donde se presenta una igualdad entre diferencias y los estudiantes aplican comprensiones aditivas.
- Y una última etapa o etapa avanzada donde aplican razonamiento proporcional sin importar los valores numéricos y las razones (Gomez).

Modelo aditivo simple:

Es el modelo sugerido por Godino (2004), que facilita una primera entrada a la enseñanza de la proporcionalidad, sin embargo está limitado a cantidades discretas como se puede ver en siguiente ejemplo:

Tabla 1: Modelo aditivo simple

	Kilo de queso (kg)	Precio (US$)	
	1	12	
+¿?	1,5	18	+12
	2	24	
	3	36	+12

Fuente: Basado en (Gasperini, 2013)

Dado que 1 kg de queso tiene un precio de $12, dos valdrán $24, tres $36 y cuatro $48. Sería fácil afirmar que la constante es $12, puesto que es el valor que sumamos cada vez que aumentamos una unidad. Sin embargo, si preguntamos por kilo y medio ya no se podría decir que se suma constantemente $12.

Modelos Multiplicativos:

Se distinguen por parte de Carretero (1989), dos estructuras especiales. Por un lado se encuentra las que presentan una relación dada entre magnitudes homogéneas a las que denomina modelo multiplicativo escalar, y por otro lado; aquellas que presentan una relación entre magnitudes heterogéneas, llamada modelo multiplicativo funcional. Subsiguiente a este trabajo Lamon (1993), desarrolla una estrategia con los estudiantes para hallar el valor faltante de una proporcionalidad, donde se denotan los modelos Inter (correspondiente al modelo multiplicativo escalar) y el modelo Intra (correspondiente al modelo multiplicativo funcional). Siguiendo con el ejemplo los modelos pueden ser interpretados de la siguiente manera:

Tabla 2: Modelo multiplicativo escalonar o inter

	Kilo de queso (kg)	Precio (USD$)	
×1,5	1	12	×1,5
×2	1,5	18	×2
	2	24	
×2	3	36	×2

Fuente: Basado en (Gasperini, 2013)

Tabla 3: Modelo multiplicativo funcional o intra

	Kilo de queso (kg)	Precio (USD$)
12	1	12
12	1,5	18
12	2	24
12	3	36

Fuente: Basado en (Gasperini, 2013)

Como conclusión de los trabajos realizados por carreteto y Lamon se tiene que la división es una operación mas compleja para su aprendizaje, ubicando al modelo Inter como en un nivel intermedio, siendo el modelo aditivo el inicial y dejando por último, por complejidad; el model Intra, donde se involucran las operaciones de multiplicacion y división (Gasperini, 2013).

Asimismo Gasperini (2013) recomienda llevar al estudiante por los diferentes modelos y encaminarlo a la idea fundamental de la proporcionalidad. Como la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes. Para lograr esto, sugiere un cambio en el discurso docente enfocado al pensamiento variacional donde se identifique la función lineal $(y = mx)$, a través del modelo Intra, y dejando un poco de lado el modelo cualitativo, que es el más frecuente en el aula de clase; y que conlleva a ambigüedades en el interpretación de problemas de proporcionalidad.

2.2.10 Una reflexión sobre el marco teórico

Con base en lo expuesto en este marco teórico, la educación está en la labor constructivista y trasformadora de la sociedad, siendo el docente un eje importante en este proceso, planteando desde su contexto, y sobre todo el del estudiante, experticias significativas que permitan el desarrollo competente de sus estudiantes. Asimismo las experiencias basadas en sistemas informáticos es una invocación de la escuela tradicional, apoyada por el MEN, donde, usado de forma correcta, es una potente herramienta para visualizar los conceptos matemáticos y desarrollar pensamientos como el variación y proporcional, danto también al estudiante de hoy una actitud más activa frente a su proceso educativo.

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Historia y necesidad de los conceptos: razón, proporción y proporcionalidad

La proporcionalidad es un tema que viene desde que despertamos nuestros instintos, comparamos por naturaleza, la selección natural nos doto con esta para sobrevivir, tenemos una concepción de belleza universal dominada por la proporción aurea tal y como lo afirma Stephen Marquard (2018), en sus investigaciones, esta proporción divina, tal y como la llamo Kepler; no solo se encuentra en la belleza de los rostros humanos, también está inherente en la naturaleza y en las mejores obras de arte que la humanidad ha creado.

El hombre ha evolucionado usando las proporciones instintivamente desde diferentes campos y aspectos de su vida. Ha encontrado en la proporción una herramienta importante para medir y buscar la armonía de las cosas que lo rodea. Por ejemplo la escuela pitagórica entre los siglos VI y V a.c se sorprendía creado la escala musical a través de un sistema de proporción entre las longitudes de las cuerdas de un instrumento y los sonidos producidos (Tomasini, 2018). El teorema de Tales (Peralta, 1995), con las proporciones encontró las medidas de las pirámides de Egipto y es fundamental en ingeniería, arquitectura y astronomía para encontrar medidas de manera indirecta.

Para comprender mejor la proporcionalidad se hace necesario conocer los principios y hechos históricos de algunos conceptos. En el libro de la historia de las matemáticas de Ian Stewart (2008), se encuentran algunos indicios como la fracción o número fraccionarios que se remontan a los años 1800 y 1650 a.C. con los babilonios y los egipcios con el uso reciproco de los números naturales. Los Chinos por el año 100 d.C. calculaban las fracciones con varillas que median entre 3 y 14 cm. Fibonacci en Italia con su notación de barra separaba el numerador y denominado. Estos fueron algunos de los promotores del concepto de fracción. Finalmente Simón stevin con la teoría de las fracciones decimales dieron el concepto moderno de fracción. Se concibe la idea de fracción como la división entre dos números enteros con excepción cuando el cero se encuentra en el denominador. Formalmente escrito como (Stewart, 2008):

$$\frac{a}{b}; a, b \in Z;\ b \neq 0$$

Desde el concepto de fracción se puede dar claridad que se está trabajando con magnitudes conmensurables, es decir que al ser divididas dos cantidades estas dan como resultado un número racional (número con expansión decimal finita o número con expansión decimal infinita periódica), y por tanto la magnitud menor puede medir a la mayor. Lo que es equivalente a decir que dos magnitudes son conmensurables si existe una medida común (Gasperini, 2013).

Ejemplo: las magnitudes lineales, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son conmensurables si existe una magnitud $\overline{MN}$, que le sirve de unidades a ambas, es decir existen números naturales p, q tales que (Gasperini, 2013):

$$AB = p \times MN \quad y \quad CD = q \times MN$$

Por otro lado si no es posible encontrar una medida común se dice que son magnitudes inconmensurables, o de otra manera; al realizar la división entre dos magnitudes obtenemos como resultado un número irracional (número con expansión decimal infinita no periódica).

Los primeros orígenes de la proporcionalidad se encuentran en la necesidad de resolver algunos problemas prácticos, se han encontrado problemas muy antiguos como el del papiro de Rhind (siglo XVII a.C.) "si 10 hekat (unidad volumétrica 4,8 L) de grasa deben durar un año. ¿Cuánta grasa puede usarse en un día?". Problemas similares se pueden encontrar en textos chinos pertenecientes al siglo II a.C. y otros textos hindúes posteriores a esta época (Stewart, 2008).

No obstante, la base fundamental de la razón y la proporcionalidad se desarrollan con los libros de elementos de Euclides que son una recopilación de los tratamientos matemáticos que daban los griegos Pitágoras y Eudoxo a este tipo de problemas en el siglo V (Stewart, 2008).

El libro V de los elementos que trata sobre las magnitudes y el VII dedicado a la aritmética son los primeros indicios formales para definir matemáticamente la proporcionalidad y la razón. Sin embargo para la época el concepto de razón no se encontraba definido claramente y era aceptada como un proceso llamado antifairesis o antanairesis que consistía en tomar dos números, uno mayor y otro menor; restar el menor al mayor tanta veces como sea posible hasta quedar una cantidad más pequeña que el número menor inicial.

Ejemplo: dados los números 14 y 6 la antifairesis seria restar el 6 al 14 tanta veces como sea posible

$$14 - 6 = 8 \quad 8 - 6 = 2$$

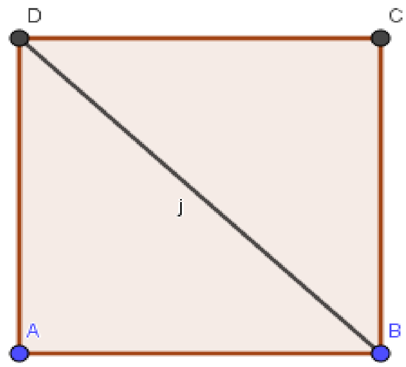
Luego debemos seguir con el proceso, pero ahora se intercambia el papel entre el 2 y el 6.

$$6 - 2 = 4 \quad 4 - 2 = 2 \quad 2 - 2 = 0$$

La antifairesis termina llegando a cero, este concepto de razón queda íntimamente relacionado a un concepto de medida. Se llegaba a un número finito de pasos al trabajar con los números naturales como lo hacían en la escuela Pitagórica, No obstante este concepto no fue aplicable a las magnitudes inconmensurables como se puede apreciar en la siguiente demostración (Oller Mercen & Gairín Sallán, 2013).

Considerando el cuadrado ABCD demostrar que el lado $\overline{DC}$ es inconmensurable con la diagonal $\overline{DB}$

Ilustración 2: Inconmensurabilidad del cuadrado



Fuente: (Gasperini, 2013)

Al demostrarlo por negación, debemos suponer que los segmentos $\overline{DC}$ y la diagonal $\overline{DB}$ son conmensurables, es decir que hay una magnitud $\overline{LM}$ que al ser multiplicada por p y q nos dará los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ respectivamente:

$$\overline{DC} = p \times \overline{LM} \quad y \quad \overline{DB} = q \times \overline{LM}$$

Lo que nos lleva a decir que:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{q}{p}$$

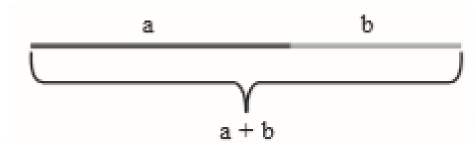
Ahora con ayuda del Teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la diagonal:

$$\overline{DB} = \sqrt{2(\overline{DC})^2} \quad \overline{DB} = \sqrt{2} \times \overline{DC}$$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \sqrt{2}$$

Luego $\sqrt{2}$ es un número irracional lo que nos indica que el lado de un cuadrado y su diagonal son magnitudes inconmensurables. Este planteamiento geométrico donde no era posible medir estas magnitudes, fue reemplazado en la teoría geométrica Euclidiana por el de comparar. De allí nace la necesidad de un planteamiento diferente de razón y la diferencia fundamental con la división.

Planteamientos similares se dan con la aparición de constantes famosas como el número áureo que se entiende como la división de un segmento en dos partes que cumple la siguiente proporción:



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad 1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$$

$$si\ \varphi=\frac{a}{b} \quad tenemos\ que\ \ 1+\varphi^{-1}=\varphi$$

$$al\ multiplicar\ por\ \varphi\ tenemos\ \varphi+1=\varphi^2$$

$$la\ solucion\ positiva\ de\ la\ ecuación\ \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

También el famoso número Pi (π) que surge como la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

El planteamiento de estas situaciones donde no era posible medir con exactitud el todo con la parte, tal y cómo se hacía con la antifairesis; dio origen a una crisis en la filosofía y el esquema de perfección del número que tenían los pitagóricos, los planteamientos de proporcionalidad previos quedaban entre dicho e incluso se trata de ocultar el hecho de la irracionalidad y lo inconmensurable de estos descubrimientos, se dice que el primero en dar a conocer estas ideas caería en la deshonra y no sería visto con muy buenos ojos por los demás, hecho que se cree le sucedió a Hipaso de Metaponto (Gonzalez Urbaneja, 2008).

Sin embargo esta crisis de inconmensurabilidad fue superada con Eudoxo, dejando de lado un poco la definición de razón y enfocándose más en la igualdad de las razones, la definición V.5 de Los Elementos de Euclides se postula de la siguiente manera:

"Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente" (Definición V.5 de Los Elementos de Euclides).

Esta definición nos dice que dado que tenemos a y b como dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son tambien del mismo tipo (no es necesario que ab y cd sean del mismo tipo), entonces las razones a/b y c/d son proporcionales, para cualquier par de enteros positivos n y m se tiene:

$$na > mb \ \ y \ \ nc > md \quad \text{ó} \quad na = mb \ y \ \ nc = md \quad \text{ó} \quad na < mb \ y \ nc < md$$

Esta definición buscaba alejarse del proceso antifairesis, puesto que era un concepto más abstracto que no se limitaba a procesos de medida y era aplicable a las razones inconmensurables.

Por otro lado en la definición III del libro V de Euclides se limita la proporción a magnitudes homogéneas, además de no considerar la razón y la proporción como resultado de dividir una magnitud por otra magnitud como se hace actualmente. El proceso de aritmetización y aplicación de la proporción como se conoce hoy en día se dio con las traducciones, copias y comentarios a los elementos de Euclides que se realizaron durante la edad media (Oller Mercen & Gairín Sallán, 2013).

El desarrollo de la proporcionalidad no se debe únicamente a los aportes de la cultura griega, por otro lado los matemáticos chinos crearon el libro de los nueve capítulos sobre el arte matemático. En este se encuentra una recopilación de problemas y su solución, mostrando un enfoque diferente al griego donde se basaban en axiomas y demostraciones mientras que este tiene un sentido más práctico. Los comentarios que hizo chino Liu Hui en el siglo III al libro, le dieron un valor diferente debido a los aportes que da a la génesis de la regla de tres (Oller Mercen & Gairín Sallán, 2013).

2.3.2 Distinciones entre fracción y razón:

Es importante aclarar algunas diferencias entre las razones matemáticas y las fracciones puesto que en la enseñanza-aprendizaje de la misma se tiende a tratarlas de forma similar, gracias en gran medida al planteamiento frecuente de problemas que se desarrollan aritméticamente sin distinciones (Diaz Godino, 2003).

- Las razones comparan medidas heterogéneas. Por ejemplo 3 limones por el precio de mil pesos. Las fracciones, en cambio comparan medidas iguales u objetos iguales como 2 partes (tajadas) de un limón, lo que indica 2/3.
- Las razones pueden tomar notaciones no fraccionales. Como por ejemplo, 2 litro por cada botella, donde no es necesaria la notación de fracción.
- Las razones pueden escribirse en diferentes notaciones. La razón 4 a 7 se puede escribir como 4:7 o 4→7.

- El segundo componente (denominador) de la razón puede ser cero. En un salón de clase pueden haber 10 mujeres por cada 3 hombres (10:3), pero también se puede decir que hay 10 mujeres y cero hombres (10:0).
- Las razones no siempre son números racionales. Como lo es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (π) o el número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Esta distinción es muy importante porque como ya se ha visto la fracción únicamente permite la relación entre números enteros.
- Por lo general las razones no se operan de la misma manera que las fracciones. Tener 3 aciertos de 5 intentos, y luego 4 aciertos de 7 intentos se pueden combinar para dar 7 aciertos de 12 intentos, que es muy diferente al sumar los fraccionarios 3/5 y 4/7.

2.3.3 Razón:

La razón matemática se define como la comparación entre dos cantidades. Esta comparación se puede expresar de dos maneras diferentes: Si la comparación se hace en forma de cocientes, es decir por medio de una división, recibe el nombre de razón geométrica. Por otra lado si la comparación entre las dos cantidad se hace en forma de resta recibe el nombre de razón aritmética. Ambas poseen dos términos llamados antecedente y consecuente, tal y como se ilustra en el siguiente cuadro:

Tabla 4: Tipos de razones

Tipos de razones	Razón aritmética	Razón geométrica

Definición General	$R_a = a - b$	$R_g = \frac{a}{b}$
Términos	a: Antecedente b: Consecuente	a: Antecedente b: Consecuente
Ejemplo	$R_a = 2,5 - 11 = -8,5$	$R_g = \frac{2,5}{11} = 0,227 \ldots$

Fuente: Basado en (Joya Vega, et al., 2016)

Es de resalta, de nuevo en el ejemplo, la diferencia entre la razón geométrica y la fracción. Obsérvese que en el ejemplo el antecedente 2,5 es un número racional decimal y por definición las fracciones únicamente permiten el uso de números enteros (Joya Vega, et al., 2016).

2.3.4 Series de razones iguales:

En muchos ejercicios prácticos se pueden establecer relaciones entre magnitudes, que pueden ser obtenidas unas de otras al ser multiplicadas por un mismo valor, este par de series relacionadas por una constante es lo que se conoce como series de razones iguales. Por ejemplo el costo de un helado y el número de helados puede generar una serie de razones iguales. El precio de un helado es de $ 1500, para dos helados sería (2)*($1500)=$3000, para 4 helados sería $6000 y así sucesivamente podríamos crear unas series de razones iguales, como se muestra en la tabla (Joya Vega, et al., 2016):

Tabla 5: Ejemplo serie de razones

Número de helados	1	2	3	4	5	6	7
Precio pagado en pesos	1.500	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500

Fuente: Basado en (Joya Vega, et al., 2016)

2.3.5 Propiedad fundamental de la serie de razones:

Todas las series de razones iguales, cumple con la propiedad de que cada una es igual a la razón entre la suma delos antecedentes y la suma de los consecuentes, así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$$

Continuando con el ejemplo anterior, si aplicamos la propiedad fundamental para las tres primeras columnas tendremos:

$$\frac{1}{1500} = \frac{2}{3000} = \frac{3}{4500} = \frac{1 + 2 + 3}{1500 + 3000 + 4500} = \frac{6}{9000}$$

El resultado nos muestra la equivalencia de las tres primeras columnas con la sexta (Joya Vega, et al., 2016).

2.3.6 Proporción:

Una vez conocida la diferencia y posibilidades de conmensurabilidad e inconmensurabilidad de la razón matemática, La noción de proporción se da cuando se comparan dos razones matemáticas a través de una notación y tratamiento propio de las fracciones matemáticas, de donde se pueden deducir las diferentes propiedades de las proporciones, tal como el producto cruzado entre los numeradores y denominadores u otra reacomodación entre la igualdad planteada:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad también\, puede\ escribrise\ como\ a{:}\,b \ :: \ c{:}\,d$$

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a y d se denominan extremos y b y c se denominan medios (Joya Vega, et al., 2016).

Por ejemplo a 27 le hacemos corresponder 6, y a 36 le hacemos corresponder 8. En este caso, 6 a 27 o simplificando y expresando como fracción 2/9; 8 a 36 o simplificando y expresando como fracción 2/9, en consecuencia las dos series de números

$$27 \rightarrow 6$$
$$36 \rightarrow 8$$

Establecen una proporción y se escribe en la forma de igualdad de dos razones

$$\frac{6}{27} = \frac{8}{36}, \text{ o también } \frac{6}{8} = \frac{27}{36}$$

Cualquier modificación entre los cuatro números que forman la proporción que no modifiquen los productos cruzados de los numeradores y los denominadores entre sí dará lugar a una nueva igualdad de fracciones que son interpretadas como razones (Diaz Godino, 2003)

2.3.7 Clases de proporciones:

Las proporciones se pueden clasificar en continuas o discretas:

Si los medios o los extremos en una proporción son iguales, la proporción es continua.

Ejemplo:

Tabla 6: Ejemplo proporción continua y discreta

Extremos iguales	Medios iguales
$\frac{15}{5} = \frac{45}{15}$	$\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$
Esta proporción es continua ya que los extremos (15=15), son iguales.	Esta proporción es continua ya que los medios (9=9), son iguales.

Fuente: Basado en (Joya Vega, et al., 2016)

Si todos los términos de una proporción son diferentes, la proporción es discreta.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$$

Esta proporción es discreta ya que los cuatro términos son diferentes. $1 \neq 2 \neq 7 \neq 14$

En una proporción discreta cada término se denomina el Cuarto proporcional de los otros tres términos (Joya Vega, et al., 2016)

2.3.8 Propiedad fundamental de la proporción:

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\text{, entonces, } a \times d = b \times c$$

Por ejemplo: en la proporción $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$ se cumple que $6 \times 15 = 5 \times 18$

2.3.9 Proporcionalidad directa:

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando se pueden ajustar a una función lineal que pasa por el origen del plano cartesiano. Además, al comparar dichas medidas se obtiene una razón constante, llamada constante de proporcionalidad.

Si x y y son directamente proporcionales, entonces, se cumple que:

$$\frac{y}{x} = k$$

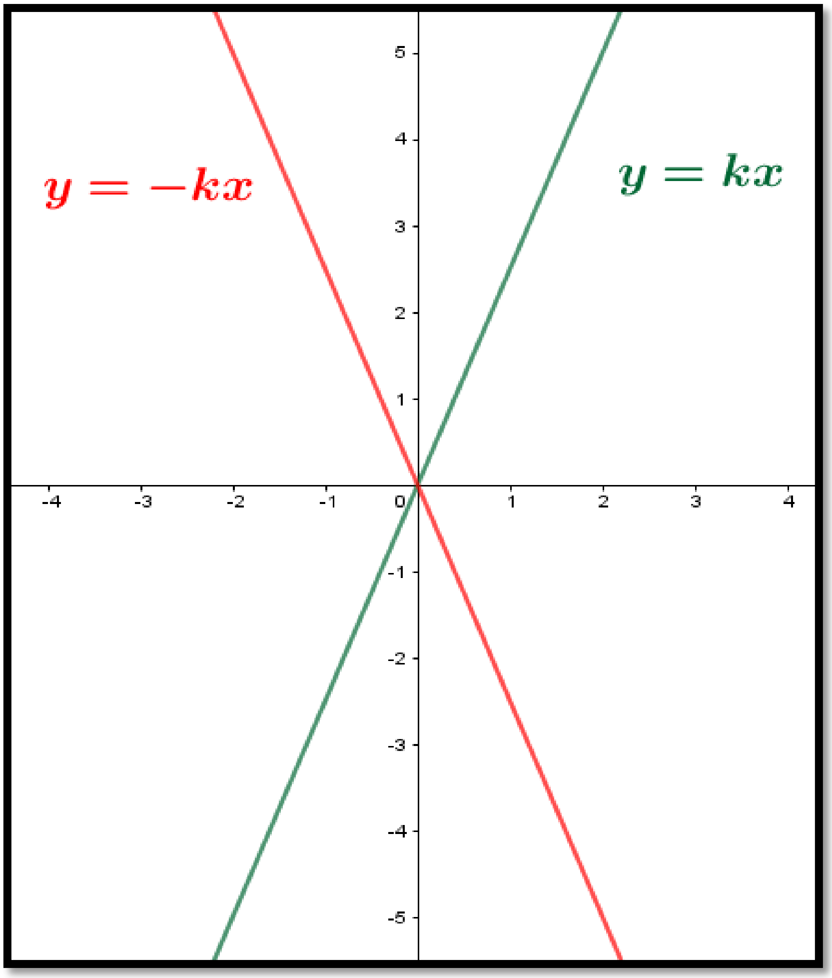
Con lo cual las magnitudes x y y se relacionan mediante la ecuación $y = x \cdot k$ donde k es la constante de proporcionalidad.

Por tanto, para que dos magnitudes sean directamente proporcionales se debe cumplir que:

- Las magnitudes estén directamente correlacionadas
- La razón entre dos magnitudes correspondiente sean constantes (Joya Vega, et al., 2016)

En vista de un análisis variacional a continuación se presenta todas las posibles funciones de la proporcionalidad directa (Gasperini, 2013)

Ilustración 3: Gráficas posibles de una función de proporcionalidad directa



Fuente: Basado en (Gasperini, 2013)

Ejemplo:

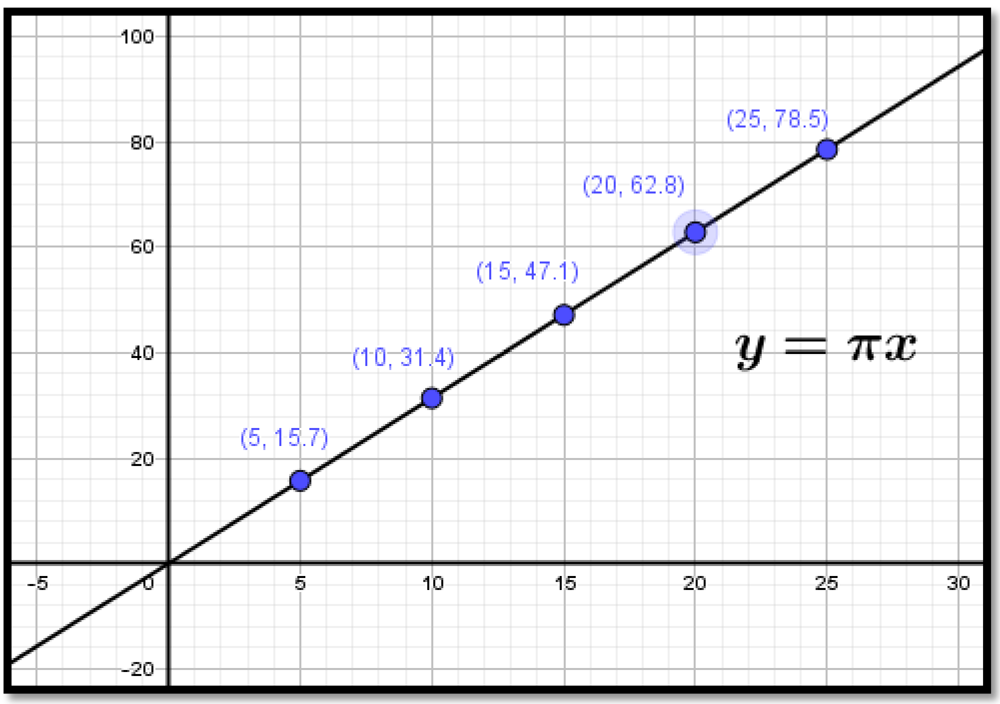
Dado el perímetro y el diámetro de cinco circunferencias distintas se forman dos series de números proporcionales que al graficarlas forman una línea que pasa por el origen del plano cartesiano de manera proporcional.

Tabla 7 Ejemplo tabulación de función de proporción directa

Diámetro	Perímetro	Constante de

(cm)	(cm)	proporcionalidad
5	15,7	3,14
10	31,4	3,14
15	47,1	3,14
20	62,8	3,14
25	78,5	3,14

Ilustración 4: Funciones de proporción directa



2.3.10 Proporcionalidad inversa:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando están inversamente correlacionadas y se cumple que el producto entre las medidas correspondientes de ambas magnitudes es constante.

Si x y y son inversamente proporcionales, entonces, se cumple que:

$$y \cdot x = k$$

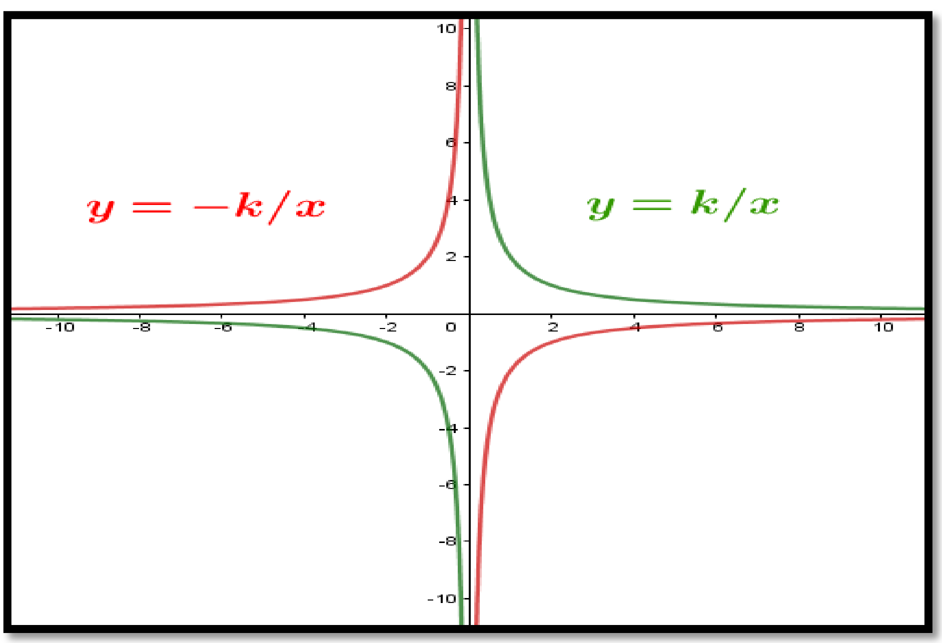
Con lo cual las magnitudes x y y se relacionan mediante la ecuación $y = \frac{k}{x}$ donde k es la constante de proporcionalidad.

Por tanto, para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales se debe cumplir que:

- Las magnitudes estén inversamente correlacionadas
- El producto de dos medidas correspondiente sea constante (Joya Vega, et al., 2016)

En vista de un análisis variacional a continuación se presenta todas las posibles funciones de la proporcionalidad inversa (Gasperini, 2013)

Ilustración 5: Gráficas posibles de una función de proporción inversa



Fuente: Basado en (Gasperini, 2013)

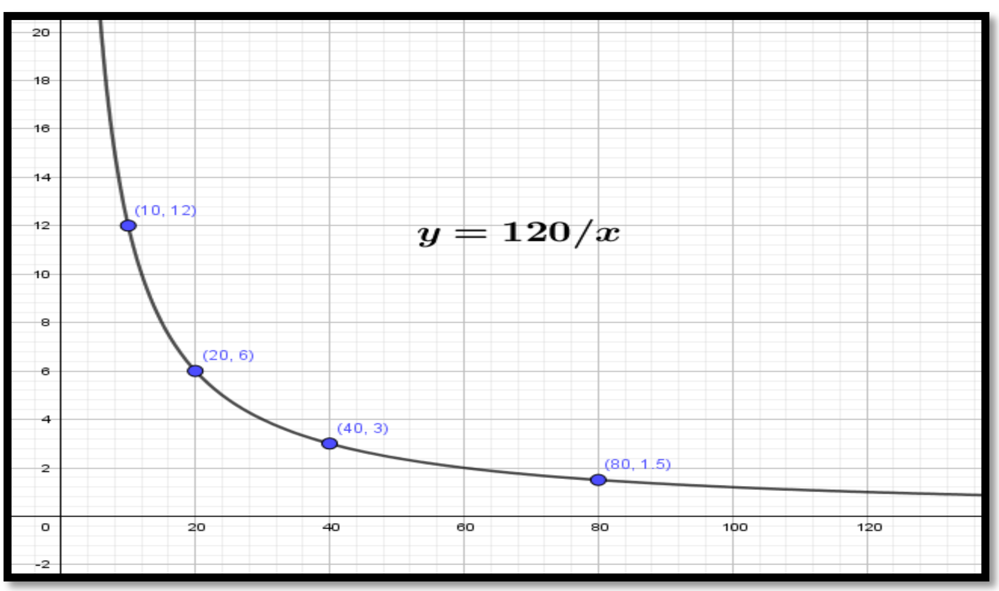
Ejemplo:

En un maquina conformada por ruedas dentadas que se cumple que la rueda de 10 mm de radio da 12 vueltas mientras que la rueda de 20 mm de radio da 6 vueltas y la rueda de 40 mm de radio da 3 vueltas. Determinar la proporcionalidad y graficarla.

Tabla 8: Ejemplo de tabulación función de proporción inversa

Radio de la rueda (mm) X	Número de vueltas y	Proporcionalidad inversa $y \cdot x = k$
10	12	120
20	6	120
40	3	120
80	1,5	120

Ilustración 6: Ejemplo función de proporción inversa



2.3.11 Los porcentajes:

El porcentaje es otra manera usar la proporcionalidad, puesto que el concepto de porcentaje nos lleva a comparar que fracción o proporción de un caso es respecto a otro. Usualmente se usa la base 100 para hacer estas comparaciones. El siguiente ejemplo ilustra de mejor manera la comparación mencionada

Ejemplo:

En una elección en la que se emitieron 5.781.200 de votos un candidato obtuvo 2.948.412 votos; en la siguiente elección se emitieron 6. 456.900 votos y dicho candidato obtuvieron 3.099.312 votos. ¿Han mejorado los resultados de este candidato entre una y otra votación?

En la primera votación la fracción de votos obtenidos ha sido:

2.948.412/5.781.200 = 51/100; mientras que en la segunda

3.099.312/6.456.900 = 48/100.

El uso de los porcentajes permite conocer el número de votantes que recibió el candidato por cada 100 votantes, y comprobar de manera inmediata que el candidato ha perdido posición entre el electorado (Diaz Godino, 2003).

2.3.12 Regla de tres:

Es el nombre que recibe un método para resolver algunos problemas de proporcionalidad. Aplicando una multiplicación de dos de los términos seguida de la división del tercer término conocido, se calcula un cuarto término de la proporcionalidad. Es un procedimiento sencillo, sin embargo los estudiantes lo pueden utilizan de manera ineducada sin tener en cuenta el tipo de proporcionalidad del problema y ubicando los números de manera aleatoria sin razonar.

Tabla 9: Regla de tres directa e inversa

Regla de tres directa	**Regla de tres inversa**
$\frac{a}{b}=\frac{y}{x}=k \quad \rightarrow \quad y=\left(\frac{a}{b}\right)x=kx$	$a\times b=x\times y=k \quad \rightarrow \quad y=\frac{(a\times b)}{x}=\frac{k}{x}$
Se necesitan 8 litro de pintura para pintar 2 habitaciones, ¿cuántos litros de pintura se necesitan para pintar 5 habitaciones?	Si 8 obreros pintan un muro en 15 horas, ¿cuánto tardaras 5 obreros en pintar el mismo muro?
$\frac{8\,L}{2\,hab}=\frac{y}{5\,hab}=4$ $y=\left(\frac{8\,L}{2\,hab}\right)5\,hab$ $y=4L\times 5=20\,Litros$	$8\,Ob\times 15\,h=5\,Ob\times y=120\,Ob\cdot h$ $y=\frac{(8\times 15)\,Ob\cdot h}{5\,Ob}=\frac{120\,Ob\cdot h}{5\,Ob}$ $y=60\,horas$

2.3.13 Factor de conversión:

El factor de conversión aparece como un método alternativo de la regla de tres. Este consiste en tener una fracción unitaria donde el numerador y denominados esta expresado en unidades medida diferentes, su uso se facilita en que una vez tenemos el factor de conversión únicamente se deben multiplicar los fraccionarios para encontrar un cuarto valor desconocido.

Ejemplo: La estatura promedio de una colombiana es de 160 cm. ¿A cuánto equivale en pulgadas?

Primero se crear el factor de conversión o equivalencia que es 1 pulgada= 2,54cm

$$fracción\ unitaria\ o\ factor\ de\ conversión: 1 = \left(\frac{1\ Pulgada}{2{,}54\ cm}\right)$$

Luego se usa este factor para resolver el problema de proporcionalidad:

$$160\ cm \times \left(\frac{1\ Pulgada}{2{,}54\ cm}\right) = \frac{160}{2{,}54}\ Pulgadas = 63\ Pulgadas$$

Capítulo 3 Metodología:

En este capítulo se describen los procedimientos necesarios para llevar a cabo el trabajo de investigación. Para lograr esto se aplicó la monografía de análisis de experiencias (Universidad Tecnológica Intercontinental, 2018), se investigó sobre las teorías constructivistas en educación, las experiencias significativas, la creación de unidades didácticas potencialmente significativas (UDPS), la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad a través del pensamiento variacional y los objeto virtual como mediadores de aprendizaje, que nos permitirá una forma distinta de acercar los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad a los estudiantes de la institución educativa La Milagrosa.

Para el desarrollo de este trabajo se tendrán en cuenta cuatro fases: La fase I correspondiente a una prueba diagnóstico, donde se busca identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema de estudio y punto de partida para plantear las actividades de la unidad didáctica, la fase II corresponde a un análisis de la prueba diagnóstica, en la fase III se plantea la unidad didáctica teniendo como base las teorías mencionadas anteriormente y la prueba diagnóstico, para la fase final se hace un análisis cuantitativo comparando el progreso a través de la prueba diagnóstico.

En vista de que las actividades se desarrollaran bajo la mediación de la TIC, se llevaran a los estudiantes a la sala de informática para familiarizarlos con el programa Excel y GeoGebra, donde se dedicaran 4 horas aproximadamente a la exploración de las herramientas más importante de ambos programas, y se harán algunas actividades con tablas de datos y representación de puntos en el plano cartesiano.

3.1 Instrumentos metodológicos:

El desarrollo del trabajo se hará por medio de un OVA, donde contará con tres unidades: La primera es una introducción y explica al concepto de razón, en la segunda se explica el concepto de proporción y en la última deben aplicar la proporción desde el teorema de Tales.

1 Unidad. Razones y proporciones: En esta unidad se hace la introducción al tema por medio de unas actividades básicas de conteo y comparación de cantidades, esto teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, para luego sugerir la definición del concepto de razón. También cuenta con algunos ejemplos ilustrativos y un video explicativo del tema central. Al final hay una guía para imprimir, donde hay una explicación y aplicación de la razón para realizar compras de manera económica e inteligente. Esta actividad se realizará fuera del aula de clase, luego serán socializadas las conclusiones para construir el concepto de razón.

2 Unidad. Museo del oro matemático: Para esta unidad se dan algunos referentes históricos relacionados con la proporción aurea y se explica desde allí el concepto de proporción. Cuenta con animaciones donde por medio de la sucesión de Fibonacci y el manejo variacional de la misma se puede llegar al número de oro. También cuenta con videos explicativos referentes al tema y una guía para imprimir y aplicar dentro del aula donde los estudiantes miden partes de su cuerpo y encuentra la proporción de oro. La segunda parte de la guía es tomar los datos de otros compañeros y crea una tabla en Excel donde podrán ver la variación en las medidas y la similitud en la contante de la proporción aurea.

3 Unidad. Midiendo gigantes con la luz: En esta unidad los estudiantes conocerán sobre los triángulos semejantes, líneas paralelas y el teorema de Tales. Aplicarán los conceptos para resolver un cuestionario que está incluido en la misma unidad. Además de contar con un video explicativo y ejemplos sobre el uso del teorema de Tales. Tendrán una guía para imprimir y desarrollar fuera del aula, donde deben encontrar la altura a la que está el aro de la cancha de baloncesto del colegio aplicando el teorema de Tales. La guía cuenta con otro momento donde deben recopilar información de otros grupos para luego graficar esta información en el programa GeoGebra y analizar el comportamiento proporcional que se presenta.

3.2 Fuente de información:

La primera fuente de información es la prueba diagnóstico, está complementada con el desarrollo e indagación durante las clases, sirvió para identificar los conocimientos previos de los estudiantes, la segunda fuente de información vendrá de las guías desarrolladas al final de cada unidad, ya que aplicarán lo aprendido y luego generarán conclusiones. Como ultima fuente de información, al final del proceso, se volverá aplicar la prueba diagnóstico con el objetivo de evaluar el progreso de los estudiantes y la efectividad de la metodología aplicada.

Capítulo 4: Resultados

4.1 Fase I: Prueba diagnóstico:

Se desarrolla un cuestionario con 20 preguntas de selección múltiple, relacionadas con los conceptos de fracción equivalente, razón, proporción y proporcionalidad. Con el propósito de conocer los conocimientos previos y familiarizar a los estudiantes con los temas que van ver. Se aplica la prueba a 28 estudiantes del grado 7-A con una duración de 2 horas aproximadamente. Este grupo ha presentado bajo nivel académico y los profesores manifiestan poco interés y trabajo en clase. Razón por la cual se pretende cambiar un poco la metodología en beneficio del grupo.

4.2 Fase II: Análisis de la prueba diagnóstico:

En esta fase se tomaron las pruebas de 28 estudiantes del grado 7 y se realizó un análisis con el propósito de identificar los conocimientos previos de los estudiantes y dificultades. Para esto se realizó una sábana de resultados y se identificó el tema más relevante de cada pregunta.

Por respeto al buen nombre de los estudiantes se enumera cada estudiante y los resultados son los siguientes:

Tabla 10: Resultados prueba diagnóstico

Estudiante	PREGUNTAS QUE COMPONEN LA PRUEBA DIAGNOSTICO																				TOTAL		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Incorrecta	Correcta	N / R
1																					14	6	0
2																					15	5	0
3																					13	6	1
4																					16	4	0
5																					16	4	0
6																					12	8	0
7																					12	8	0
8																					15	5	0
9																					8	6	6
10																					10	10	0
11																					7	11	2
12																					12	8	0
13																					15	5	0
14																					9	11	0
15																					13	6	1
16																					13	7	0
17																					12	5	3
18																					6	14	0
19																					11	7	2
20																					13	7	0
21																					14	6	0
22																					14	6	0
23																					10	8	2
24																					13	7	0
25																					11	6	3
26																					8	11	1
27																					5	7	8
28																					11	9	0
TOTAL	13	19	20	25	15	7	10	14	22	13	12	20	22	6	20	17	16	17	19	21			
	15	9	8	2	12	21	18	14	2	15	15	6	5	22	4	7	10	8	6	4			
	0	0	0	1	1	0	0	0	4	0	1	2	1	0	4	4	2	3	3	3			

El mejor resultado fue obtenido por el estudiante 18, logrando 14 respuestas correctas (70% correcto), lo que nos indica buenos conocimientos previos respecto a la proporcionalidad, sin embargo este estudiante se encuentra repitiendo grado séptimo . Por otro lado la mediana con respecto a las respuestas correctas es de 7, y el 3 cuartil toma un valor de 8. Indicando que el 50 % solo alcanzó como mínimo a responder 7 preguntas correctamente y el 75% solo 8. Por ende es necesario que los estudiantes conozcan sobre el tema de estudio a través de una metodología significativa que permita su uso en grados superiores.

Con respecto a las preguntas, la numero 13 fue la más acertada, con un 78,6 % y las menos acertadas fueron las preguntas 4 y 9 con un 7,1%. Además las preguntas 9, 15 y 16 fueron las preguntas que más se abstuvieron de dar alguna respuesta con un porcentaje del 14,3%.

Pregunta 1:

Conocimiento: Definición de razón

El 53,6 % de los estudiantes selecciona la respuesta correcta como la comparación entre cantidades, la segunda definición más seleccionada fue la de razón como una diferencia, con un 32%. En consecuencia la mitad del grupo tiene una idea previa sobre el concepto de razón.

Pregunta 2:

Conocimiento: Definición de proporción

Se observó que el 32,1% de los estudiantes conoce el concepto de proporción, lo que nos indica que no es un conocimiento previo muy común en el grupo y es punto de partida importante para la unidad didáctica.

Pregunta 3:

Conocimiento: Identificar si es una proporción o una correlación

Solo el 28,6 % identifica la relación entre magnitudes como una correlación, mostrando en general que no hay una buena interpretación del enunciado o no se conoce el tema.

Pregunta 4:

Conocimiento: Identificar si es una proporción o una correlación

El 7,14 % identifica la relación entre magnitudes como una correlación. Esta pregunta muestra de nuevo la dificultad interpretativa del tema.

Pregunta 5:

Conocimiento: Identificar las fracciones equivalente

El 42,9 % de los estudiantes identifican entre dos fracciones cuales son equivalentes. A pesar de ser un tema tratado en el periodo anterior aún se evidencian dificultades entre los estudiantes para identificar cuando hay fracciones equivalentes.

Pregunta 6:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 75,0% de los estudiantes respondió correctamente, siendo la segunda con mejor porcentaje. En esta pregunta se da el valor unitario, o constante para encontrar un valor desconocido. Sugiere, entonces que la dificultad esta en encontrar la constante de proporcionalidad para su aplicación.

Pregunta 7:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 64,29% aplica de forma correcta la proporción para encontrar un valor desconocido. En esta pregunta no se da el valor unitario o constante, sin embargo, al revisar los procedimientos (hoja de cálculo), únicamente se identifica el planteamiento de una división sin resolver. Lo que sugiere, que la mayoría identifico la respuesta correcta por intuición o por descarte de las otras opciones.

Pregunta 8:

Conocimiento: Calcular razones y compararlas

El 50% de los estudiantes responde correctamente, sin embargo, al revisar los procedimientos no se encuentran argumentos válidos para acertar en la pregunta, lo que nos indica que el concepto de razón no es claro.

Pregunta 9:

Conocimiento: Proporción y aplicación del teorema de Tales

Únicamente 7,14% de los estudiantes encontró la respuesta correcta, el 14,3% no marcaron una respuesta, lo que nos indicando que es un concepto completamente nuevo para ellos.

Pregunta 10:

Conocimiento: Identificar el procedimiento más adecuado para encontrar el valor desconocido de una proporción.

Para la pregunta: Si dos litros de helado cuestan $30.000. ¿Cuánto cuesta 15 litros? El 53,5% identificó de manera correcta el procedimiento, de dividir 30.000 entre dos y multiplicar por 15. El 10,7% respondió: Sumar 15.000 quince veces como respuesta correcta, ningún estudiante eligió la respuesta de sumar 30.000 en 7 veces y luego sumar 15.000. Quedando al final con un 35,71% para la opción de multiplicar 15 litros por 30.000 y dividir por 2.

Pregunta 11:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 53,6 % de los estudiantes respondió correctamente. Preguntas similares indican que aproximadamente la mitad el grupo cuenta con buenas bases para desarrollar problemas que involucran la proporción y encontrar algún valor desconocidos. Sin embargo, en el cuadro de cálculos de la prueba, hay pocos con procedimientos o cálculos que siguieran que el tema ya es conocido por parte de ello.

Pregunta 12:

Conocimiento: Identificar si dos razones forman una proporción

Con un porcentaje de 21,4 el grupo respondió correctamente la pregunta número 12. Indicando que muy pocos reconocen las condiciones para que haya una proporción.

Pregunta 13:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 17,9 % de los estudiantes acertó con la respuesta. Para esta pregunta no se da directamente la contante o valor unitario, las unidades de dólar y peso, pueden presentar algo de confusión en la interpretación del ejercicio, lo que nos indica de nuevo la dificultad de los estudiantes para encontrar la constante o valor por unidad.

Pregunta 14:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 78,6 % respondió acertadamente. La pregunta indica explícitamente el valor por unidad, lo que nos muestra de nuevo que la dificultad en los estudiantes esta en encontrar la contante por medio de la división, para luego aplicar la multiplicación para encontrar el valor desconocido.

Pregunta 15:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

El 14,3% responde correctamente. La pregunta tiene el valor de la contante de forma indirecta, además de la dificultad ya identificada para que los estudiantes encuentre la constante, es posible que términos “más que “ dificulte su interpretación y siguiera operaciones que nos son necesaria.

Pregunta 16:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar una razón desconocida

Únicamente el 25% de los estudiantes respondió correctamente. Hay un enunciado de la pregunta que expresa: “la razón hombres y mujeres es 7 a 3” indicando que este tipo de expresiones no son conocidas por los estudiantes o dificultan su interpretación.

Pregunta 17:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar una razón desconocida

El 35,7% responde correctamente, la pregunta da la constante expresada en forma de fracción (edades de Santiago y Sebastián es de 8/3), el bajo porcentaje nos indica que este tipo de expresiones dificultad su interpretación o no es familiar para los estudiantes.

Pregunta 18:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad inversa

El 28,6 % selecciono la respuesta correcta, el 10,7 % no responde la pregunta. Conclusión desconocen los procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad inversa.

Pregunta 19:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad e identificación de gráficas

El 21,4% responde correctamente, el 10,7 % no responde la pregunta. Conclusión no identifican el comportamiento grafico de una serie de datos directamente proporcionales.

Pregunta 20:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad compuesta

El 14,3% responde correctamente, el 10,7 % no responde la pregunta. Conclusión desconocen los procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta.

4.3 Fase III Diseño y aplicación del OVA:

Para el diseño del OVA se contó con el apoyo del grupo LEAC (Laboratorio Enseñanza - Aprendizaje de las Ciencias), que ofrece la Universidad Nacional para la implementación y desarrollo de recursos educativos digítales. El proceso dio inicio con el diseño de tres guías que recogen la información, actividades, animaciones y videos pertinentes para la enseñanza-aprendizaje de la proporción. Luego fue enviado al grupo de diseñadores y programadores que en conjunto al asesor y a las ejecuciones en campo se dieron las respectivas correcciones para dar origen a la siguiente OVA:

Ilustración 7: Ova, PASEO MATEMÁTICO

Ilustración 8: Ova, 1 Razones y Proporciones

Ilustración 9 Ova, 1 Razones y Proporciones

Ilustración 10: Ova, 1 Razones y Proporciones

Ilustración 11: Ova, 1 Razones y Proporciones

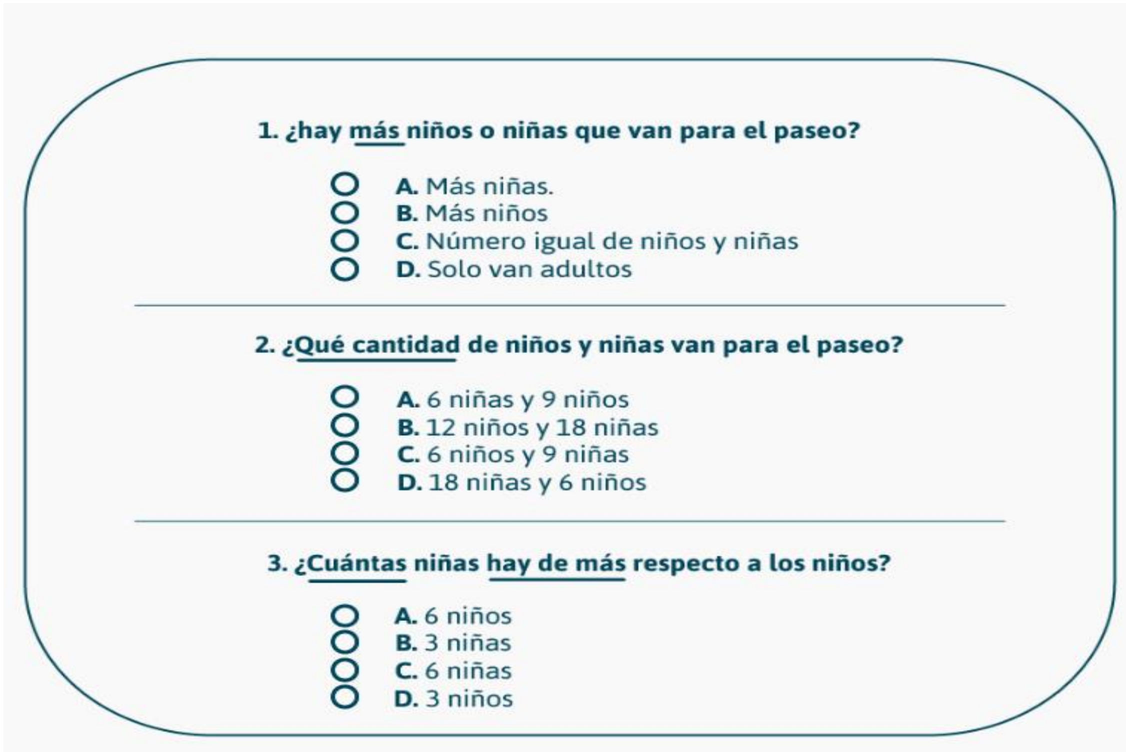


Ilustración 12: Ova, 1 Razones y Proporciones

Ilustración 13: Ova, 1 Razones y Proporciones

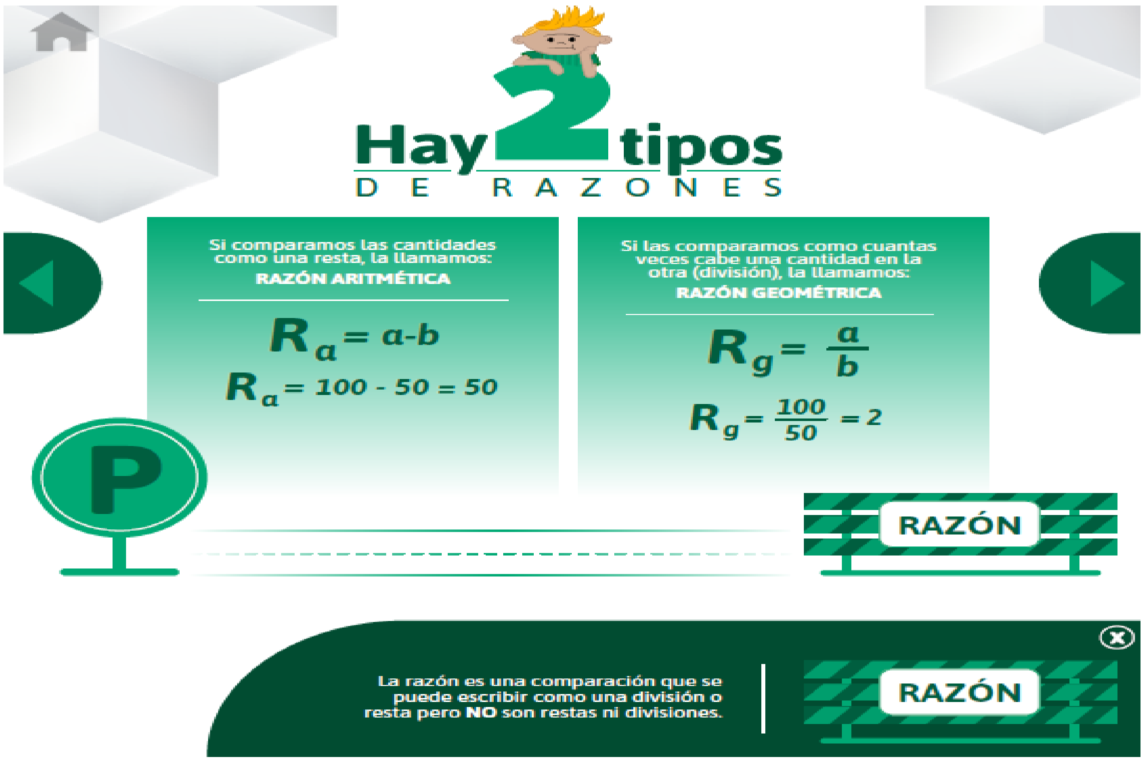
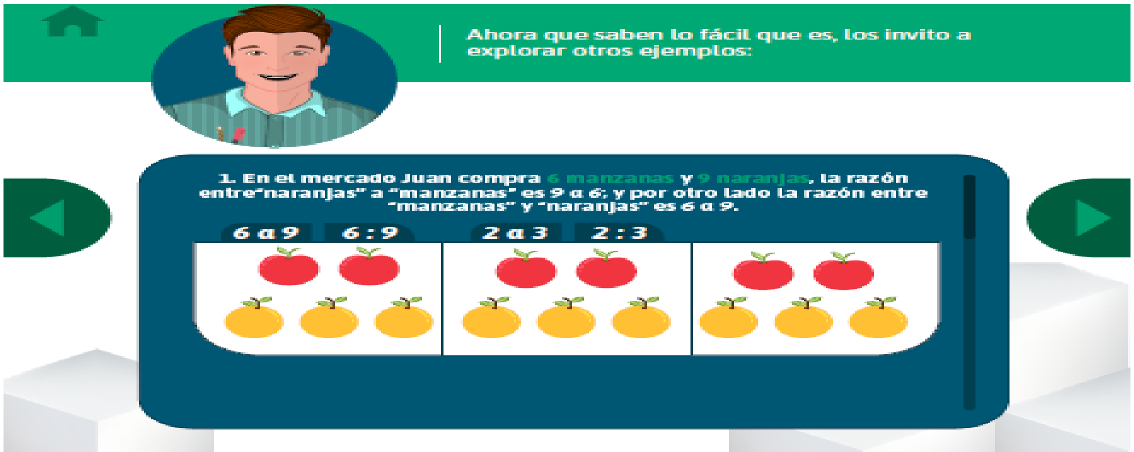


Ilustración 14: Ova, 1 Razones y Proporciones

Ilustración 15: Ova, 1 Razones y Proporciones



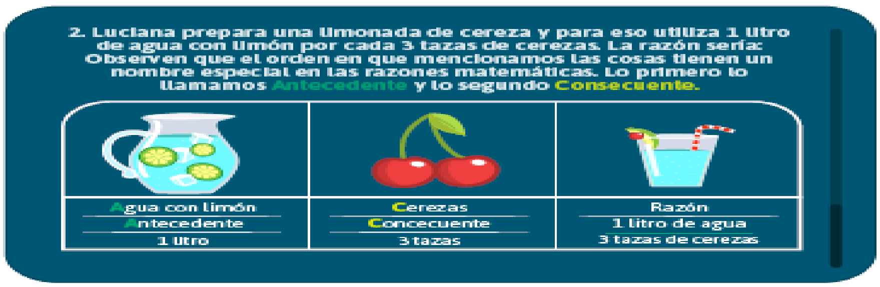


Ilustración 16: Ova, 1 Razones y Proporciones

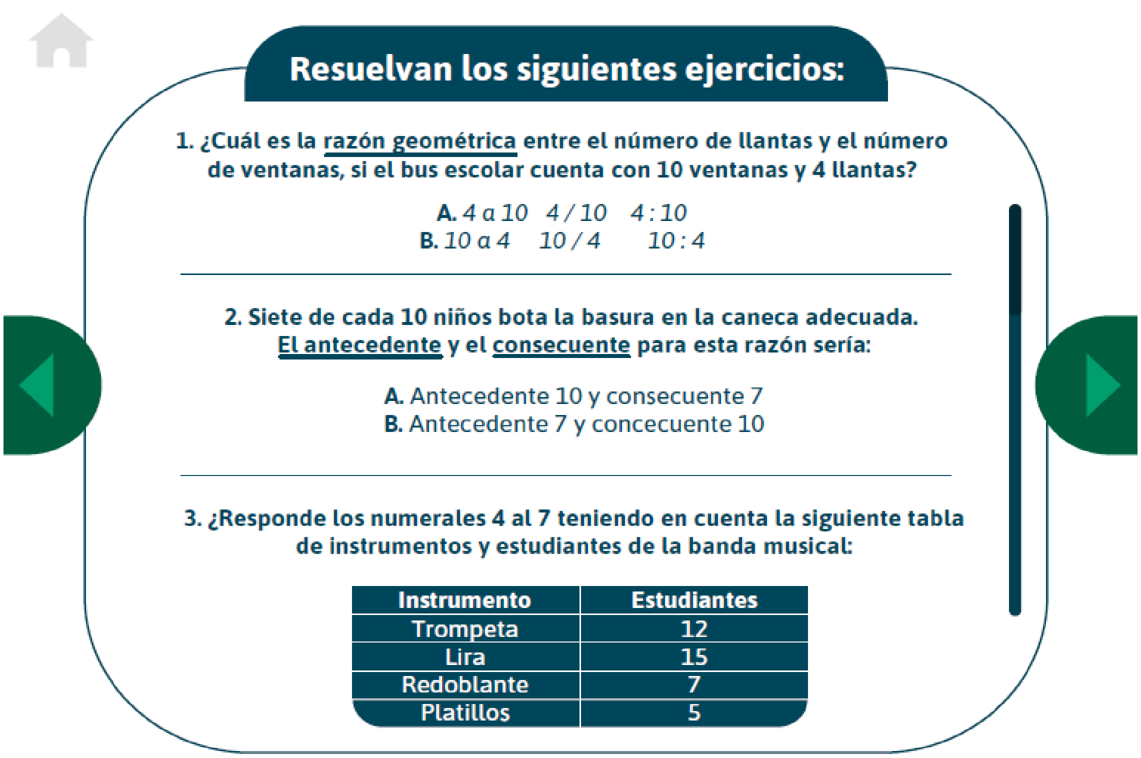


Ilustración 18: Ova, 1 Razones y Proporciones

Resuelvan los siguientes ejercicios:

4. ¿Cuál es la razón de estudiantes que toca trompeta a los que tocan lira?

A. *15 a 12*
B. *15 a 7*
C. *12 a 15*
D. *7 a 15*

---

5. ¿Cuál es la razón de estudiantes que toca platillos a los que tocan trompeta?

A. *5 / 12*
B. *7 / 15*
C. *12 / 5*
D. *15 / 7*

---

5. ¿Cuál es la razón de estudiantes que toca platillos a los que tocan trompeta?

A. *12 a 7*
B. *7 a 15*
C. *15 a 7*
D. *7 a 12*

Ilustración 17: Ova, 1 Razones y Proporciones

Resuelvan los siguientes ejercicios:

7. Completen la siguiente tabla de trompetistas y platilleros, si el colegio desea formar 5 bandas

Banda	Platilleros	Trompetistas	Razón platilleros a trompetistas	Razón Trompetistas a platilleros
	5	12	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$
2		24	$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$	$\frac{24}{10} = \frac{12}{5}$
3	15		$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$	$\_\_ = \frac{12}{5}$
4		48	$\_\_ = \frac{5}{12}$	$\_\_ = \frac{12}{5}$
5			$\_\_ = \_\_$	$\_\_ = \_\_$

Ilustración 19: Ova. Guía 1 paso hacia las razones y proporciones

PASEO HACIA LAS RAZONES Y PROPORCIONES

Nombres ______________________________ **Grado: 7-**____ **Fecha:**________

Las razones y proporciones

- Las razones o proporciones nos pueden ayudar en diferentes contextos, una forma de hacer compras de manera económica, es encontrando la razón entre el precio y la cantidad de producto; luego comparar y tomar la mejor opción.

Por ejemplo al ir al supermercado podemos encontrar bolsas de leche de diferente marca y precio, pero ¿Cuál es la mejor opción?

Marca	Precio	Cantidad de bolsas	Mililitro de leche	Razón o proporción
Leche A	$ 3.100	1	1.100 ml	$\frac{\$3100}{1.100\ ml} = 2.82$ \$/ml
Leche B	$17.400	6	1.100 ml x 6=6.600 ml	$\frac{\$17.400}{6.600\ ml} = 2.64$ \$/ml
Comparación			$\frac{\$3.100}{1.100\ ml} > \frac{\$17.400}{6.600\ ml}$	2,82 $ / ml >2,64$/ml

La opción más económica seria comprar el paquete de 6 bolsas de la marca B pues pagaríamos casi 0,18 pesos por mililitro menos que por la otra marca; lo que significaría un ahorro de $198 pesos por bolsa.

Algunas cadenas de supermercado incluyen en sus etiquetas de precio este tipo de razones, donde podemos comparar y así realizar una mejor compra:

Ilustración 20: Ova. Guía 1 paso hacia las razones y proporciones

Actividad

Con ayuda de un adulto responsable vayan a tres supermercados, encuentren la razón de 5 productos. Luego compara y escoge la mejor opción.

El siguiente es un ejemplo de lo que se debe hacer, donde las razones marcadas son las más económicas para 5 productos diferentes.

Producto	Super.1	Super.2	Super.3	Super.4	Super.5	Medida
Aceite	$5,75	$3,50	$5,74	$5,78	$5,80	Mililitro
Atún en aceite	$28,08	$27,33	$26,61	$29,77	$28,33	Peso escurrido en gramos
Detergente	$4,25	$3,25	$2,67	$4,19	$4,20	Gramos
Leche deslactosada	$1,83	$1,88	$1,82	$1,78	$1,60	Mililitro
Papel Higiénico	$21,88	$30,17	$21,85	$26,04	$22,40	Metro

Llene la siguiente tabla con la información recolectada:

Producto	Super.1	Super.2	Super.3	Medida

Conclusiones: ____

____

____

Ilustración 22: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 21: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 24: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 23: Ova. 2 Museo del oro matemático

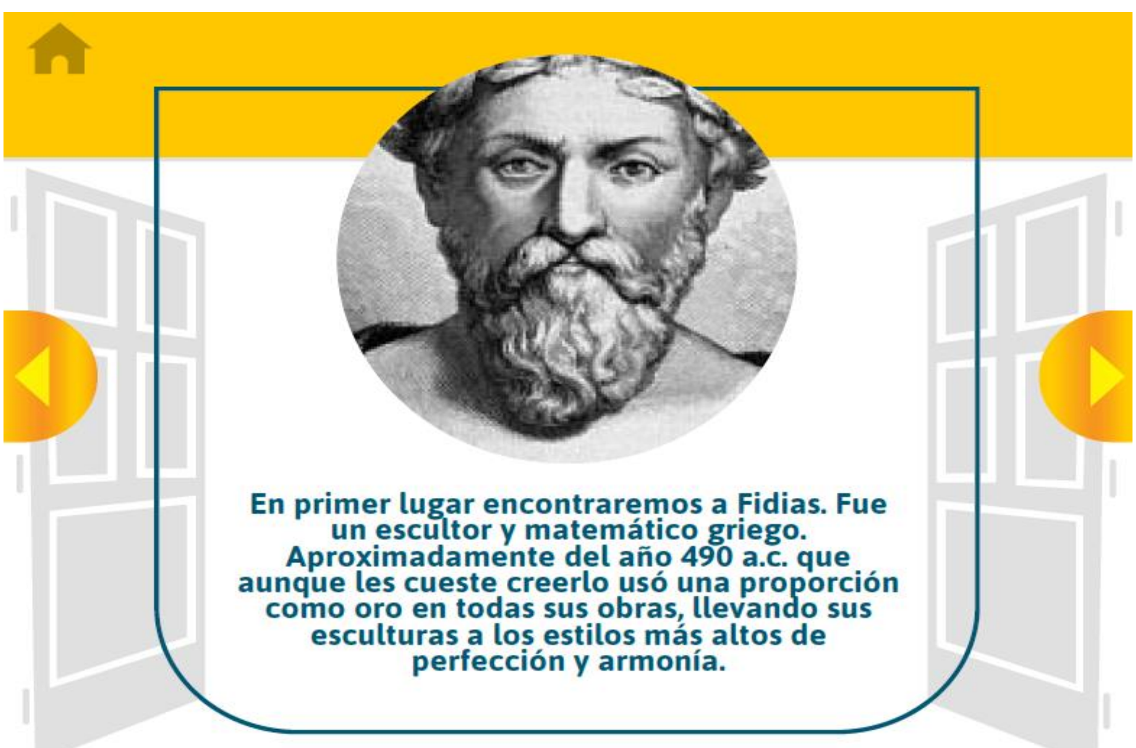


Ilustración 25: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 26: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 27: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 28: Ova. 2 Museo del oro matemático

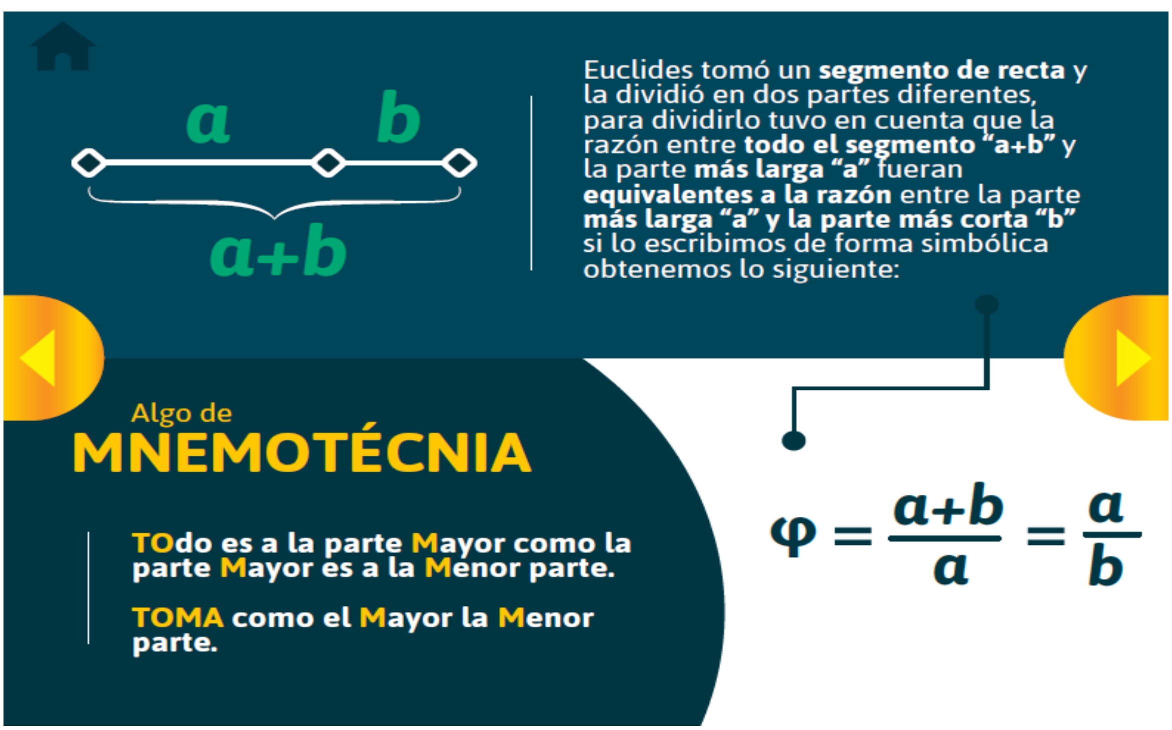


Ilustración 29: Ova. 2 Museo del oro matemático

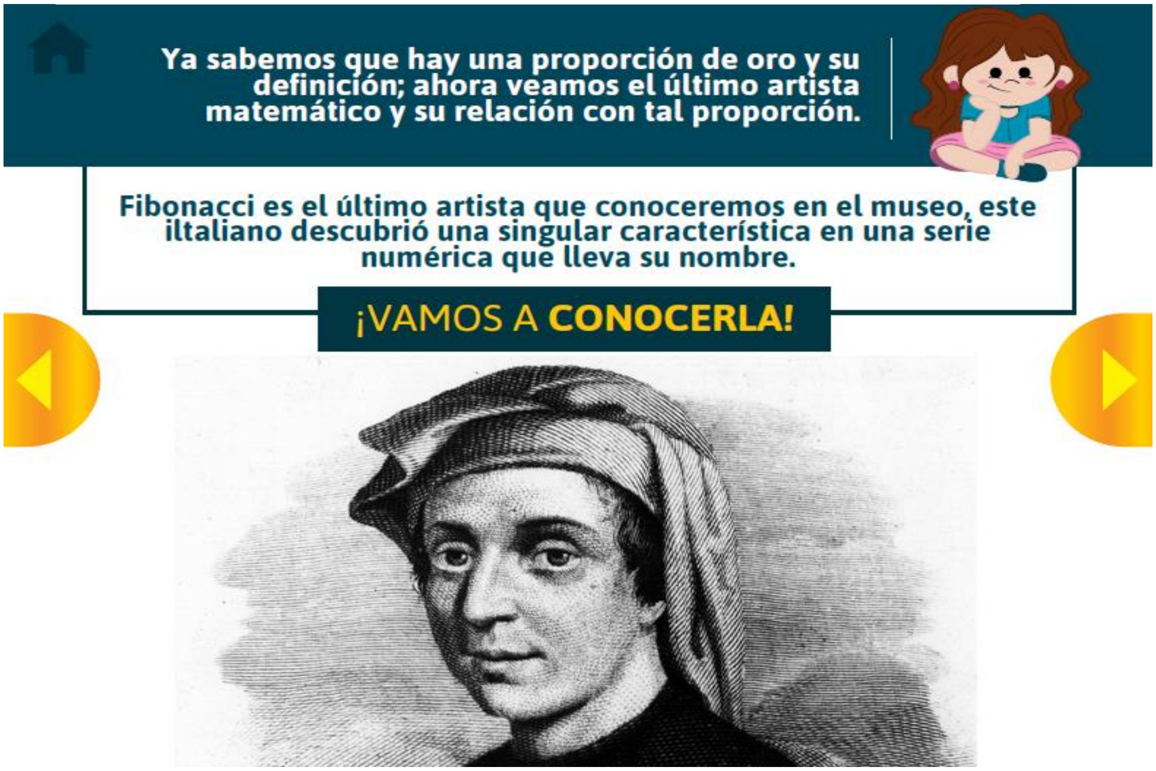


Ilustración 30: Ova. 2 Museo del oro matemático

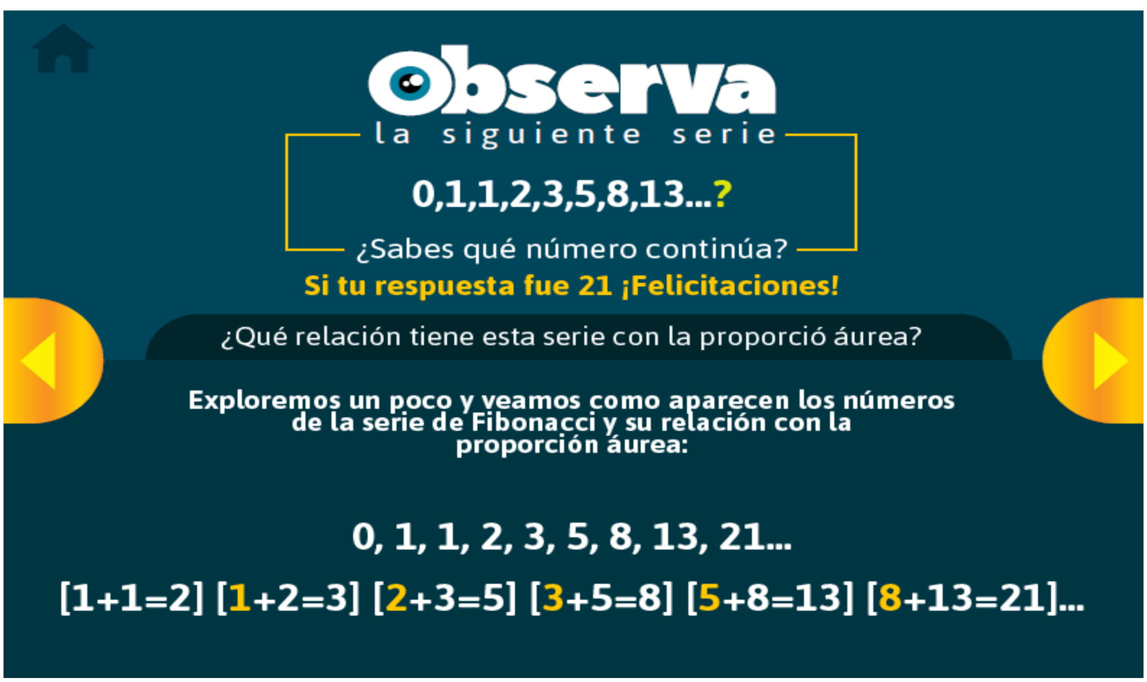


Ilustración 31: Ova. 2 Museo del oro matemático

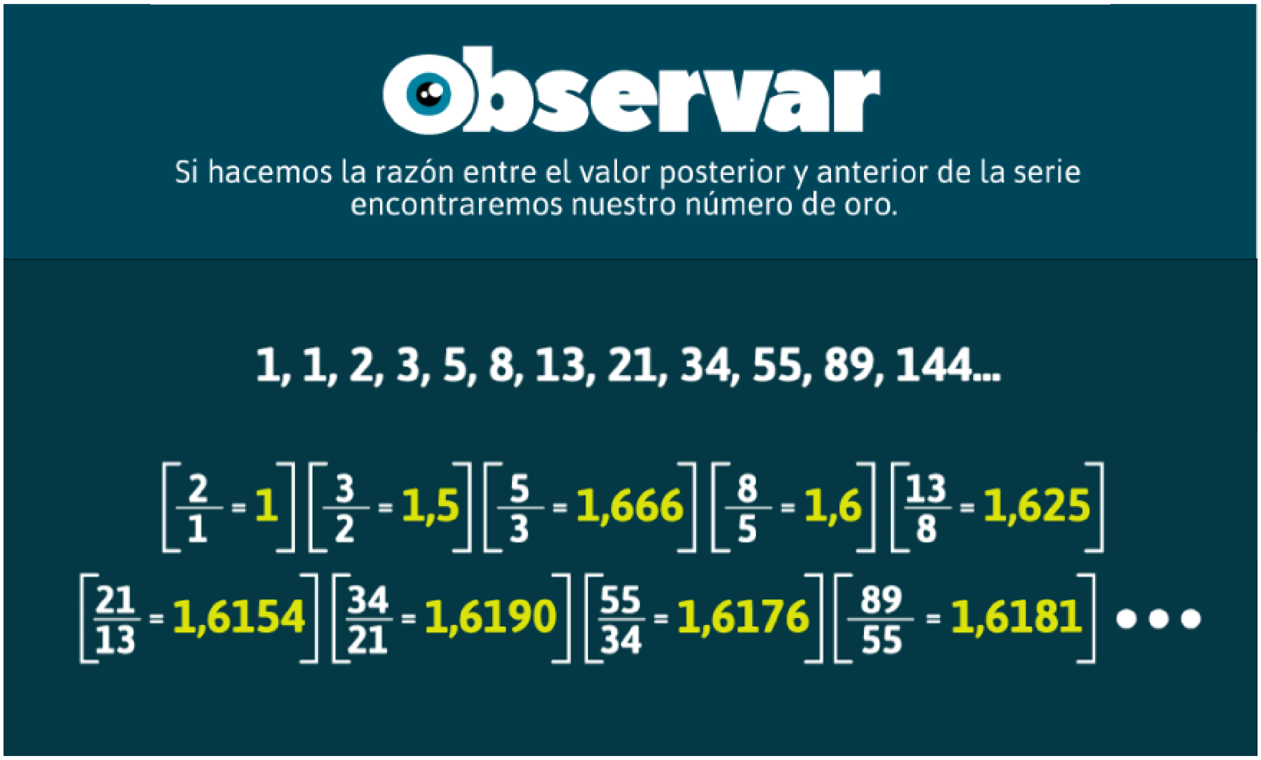


Ilustración 32: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 33: Ova. 2 Museo del oro matemático

Ilustración 34: Ova. Guía 2 LA BELLEZA MATEMATICA DEL CUERPO

LA BELLEZA MATEMÁTICA DEL CUERPO

Objetivos
- Conocer la razón áurea y su relación con el cuerpo humano.
- Aplicar patrones de medida y conocer el cuerpo humano a través de las matemáticas.

1. En parejas tomen el metro y realicen las siguientes medidas para comprobar la proporción áurea:

Nombres ______________________________ **Grado:** 7-___ **Fecha:**__________

____

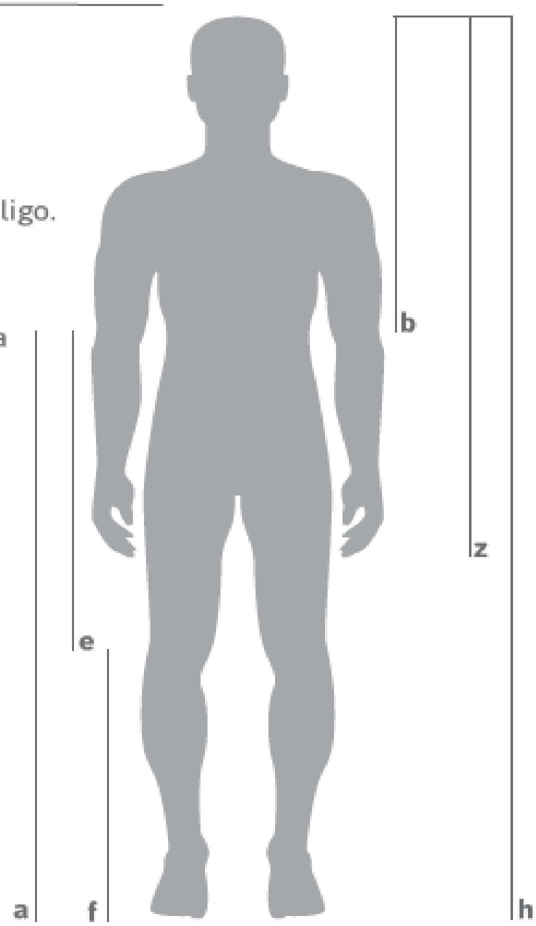
Materiales:
Metro, regla, calculadora y el programa excel.

Medidas a tomar:
- a: Distancia desde los pies al ombligo.
- b: Distancia desde la cima del cráneo al ombligo.
- e: Distancia desde el ombligo a la rodilla.
- f: Distancia desde la rodilla a los pies.
- h: Altura de cada integrante
- z: Distancia desde la punta de los dedos de la mano, hasta la cima del cráneo.

- Áureo 1: La primera relación áurea se calcula con la razón h/a.
- Áureo 2: La segunda relación áurea se calcula con la razón z/b.
- Áureo 3: La tercera relación áurea se calcula con la razón e/f.
- % Error: Porcentaje de error.

Para calcular el porcentaje de error utilice la siguiente fórmula:

$$\% \text{ Error} = \frac{|1{,}6180 - \text{Áureo } n|}{1.6180} \times 100$$



$$\frac{h}{a} = 1{,}618$$

$$\frac{z}{b} = 1{,}618$$

$$\frac{e}{f} = 1{,}618$$

Ilustración 35: Ova. Guía 2 LA BELLEZA MATEMATICA DEL CUERPO

2. Con la ayuda del programa Excel o GeoGebra con la calculadora toma los datos de 8 compañeros más, llene la tabla y determine quien se aproxima más a la proporción áurea.

No.	Nombre	h (cm)	a (cm)	b (cm)	z (cm)	e (cm)	f (cm)	Áureo 1	Áureo 2	Áureo 3	% error 1	% error 2	% error 3
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
Sumatoria													
Promedio													

Conclusiones:

Ilustración 36: Ova. 3 Midiendo Gigantes

Ilustración 37: Ova. 3 Midiendo Gigantes

Ilustración 38: Ova. 3 Midiendo Gigantes

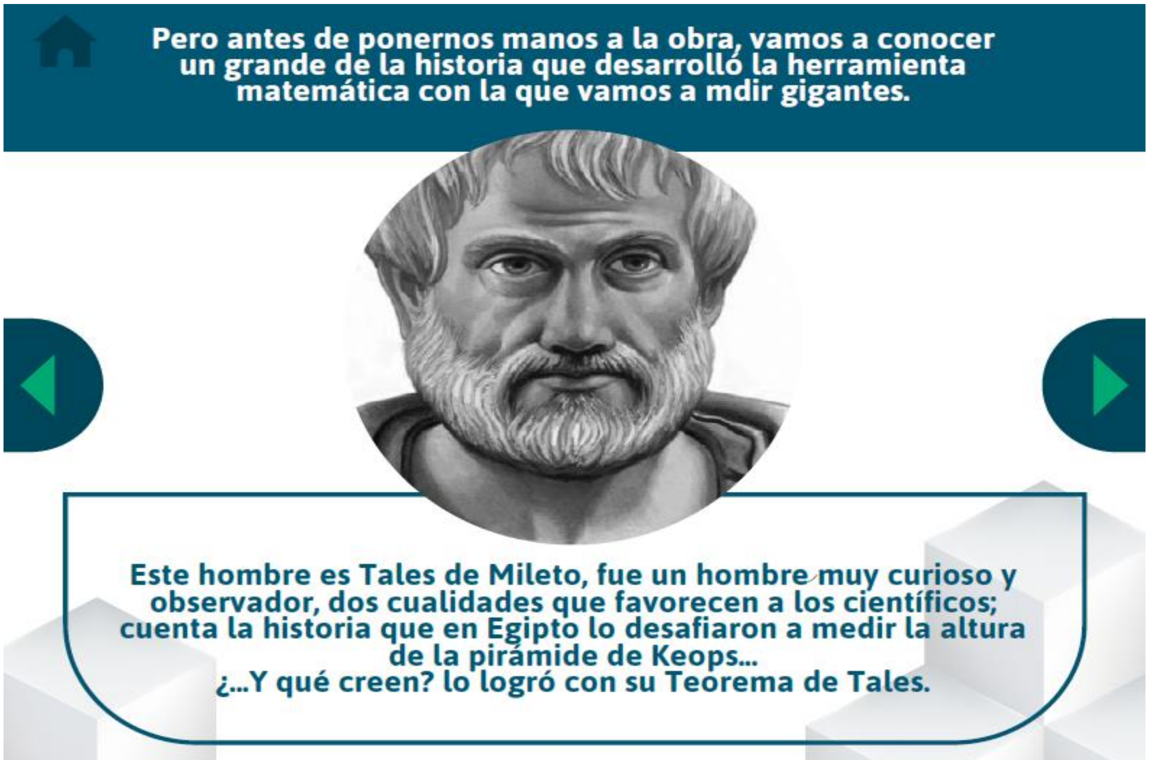


Ilustración 39: Ova. 3 Midiendo Gigantes

Ilustración 40: Ova. 3 Midiendo Gigantes

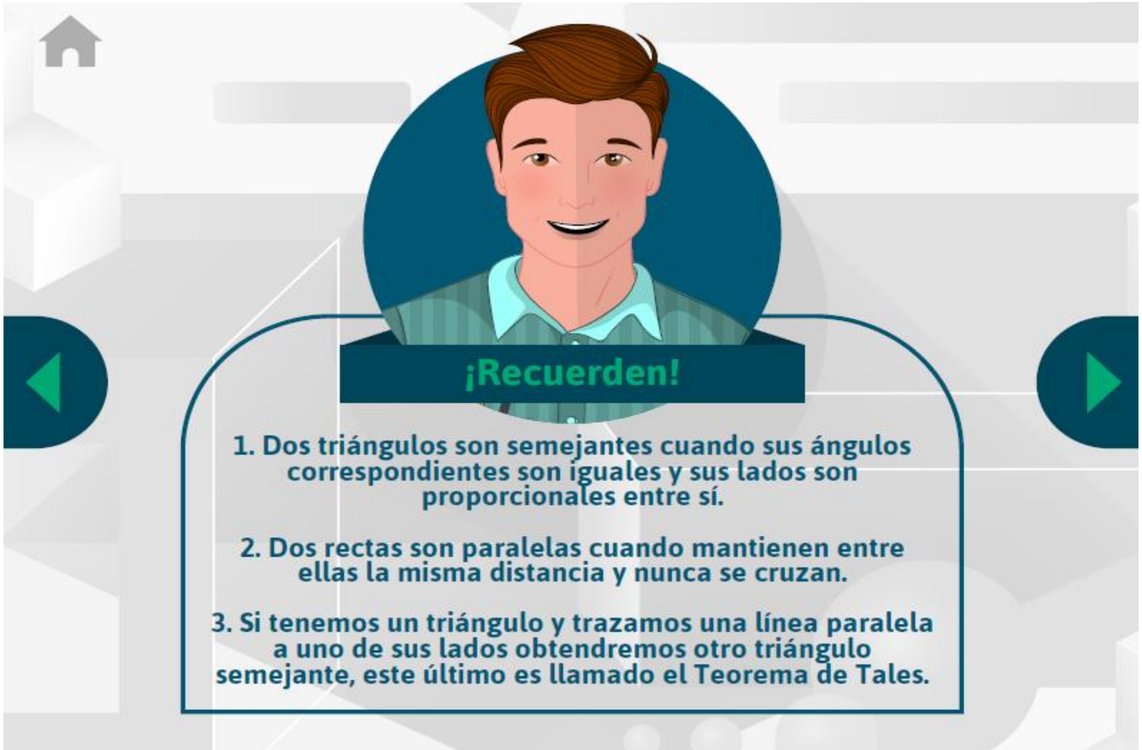


Ilustración 41: Ova. 3 Midiendo Gigantes

Ilustración 42: Ova. 3 Midiendo Gigantes

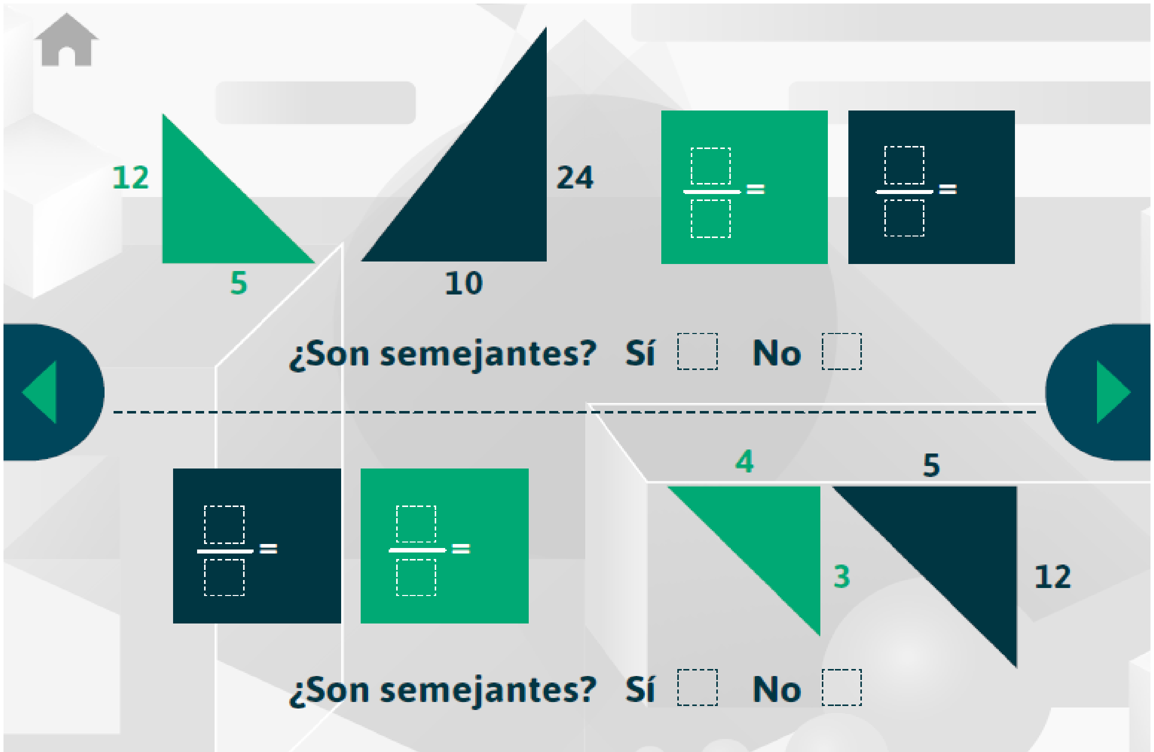


Ilustración 43: Ova. 3 Midiendo Gigantes

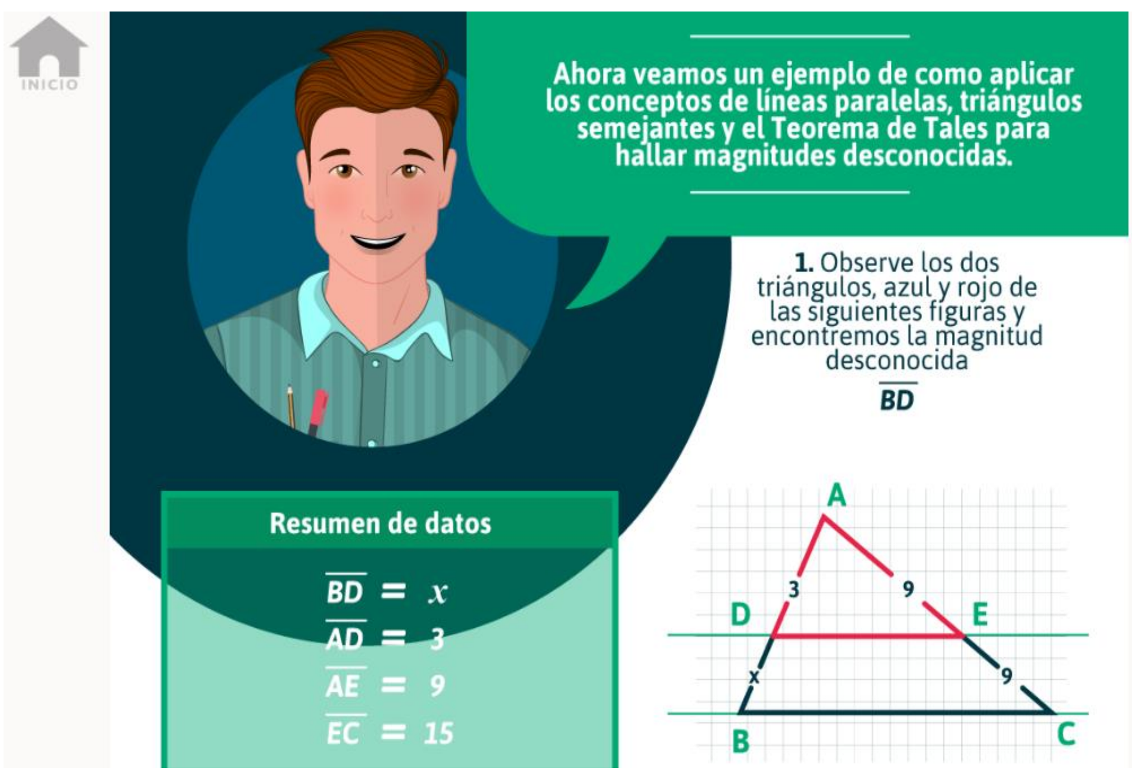


Ilustración 44: Ova. 3 Midiendo Gigantes

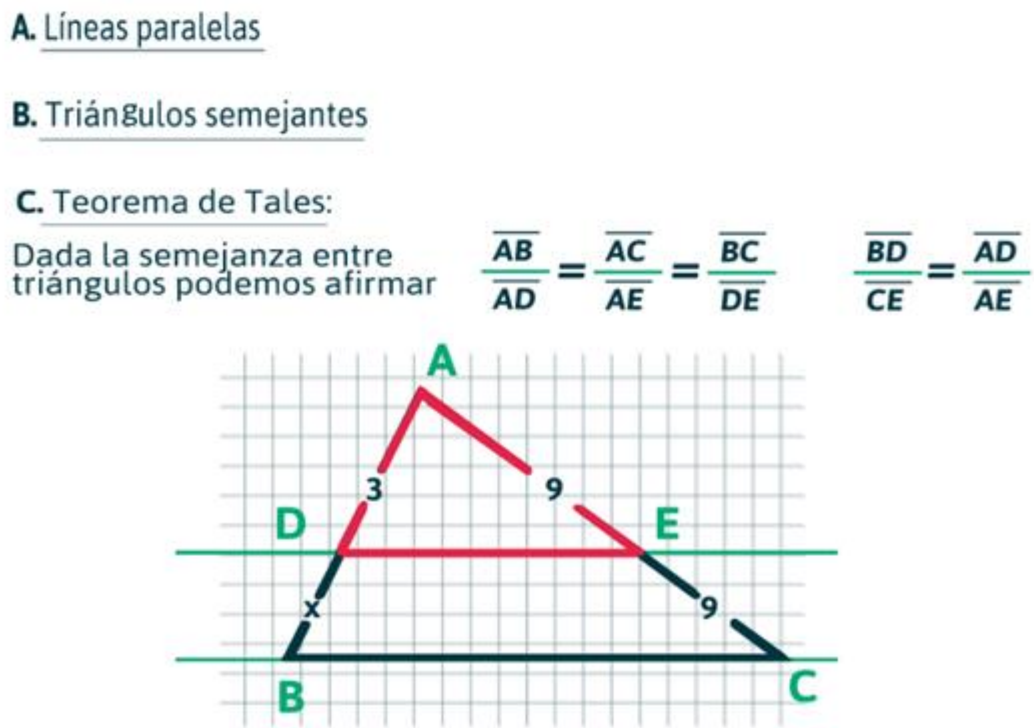


Ilustración 45: Ova. 3 Midiendo Gigantes

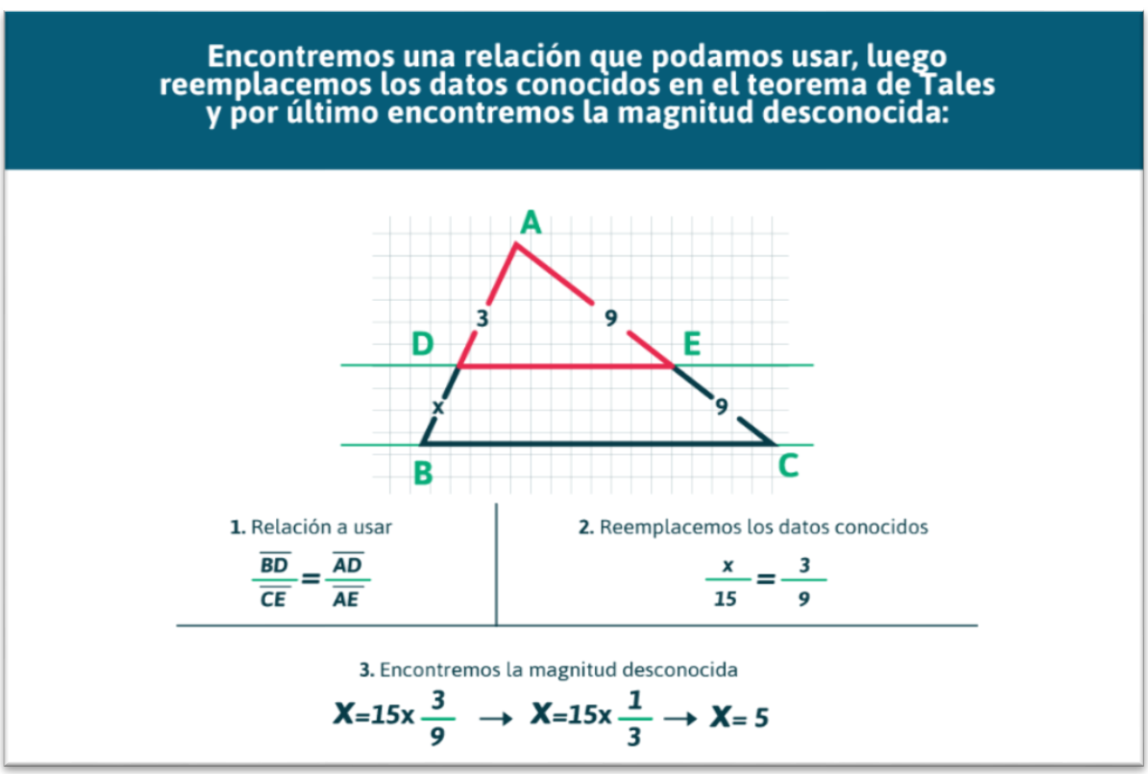


Ilustración 46: Ova. 3 Midiendo Gigantes

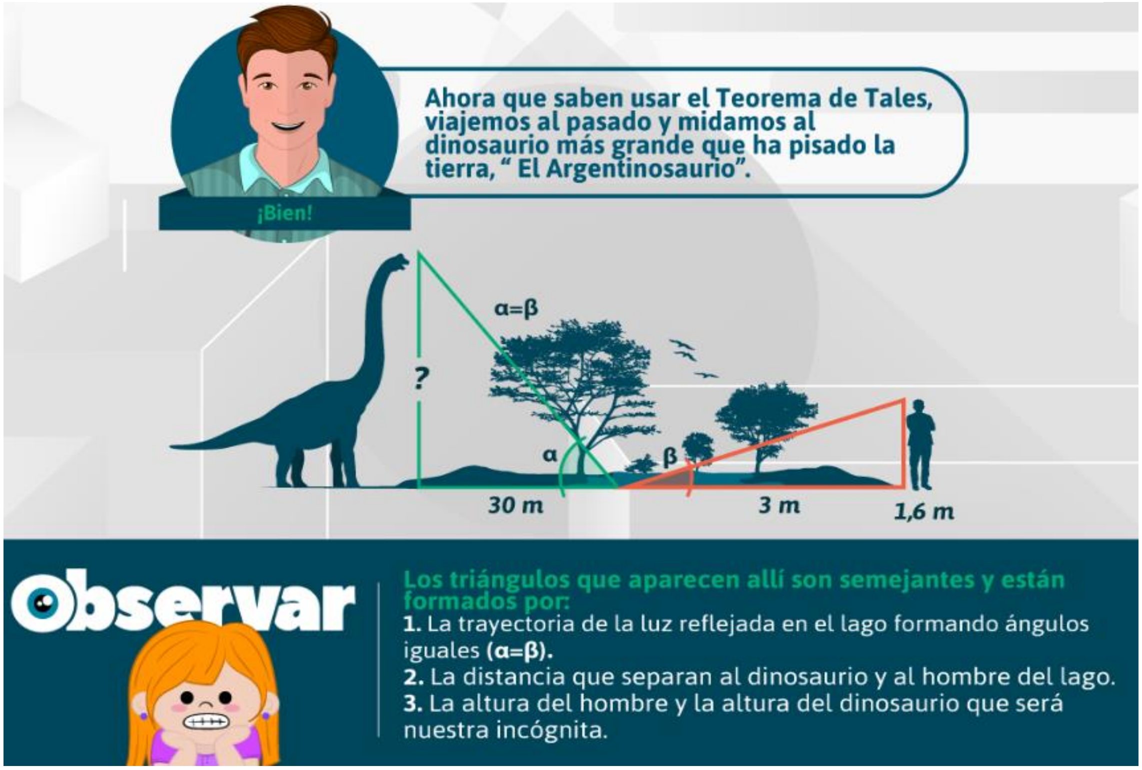


Ilustración 47: Ova. 3 Midiendo Gigantes

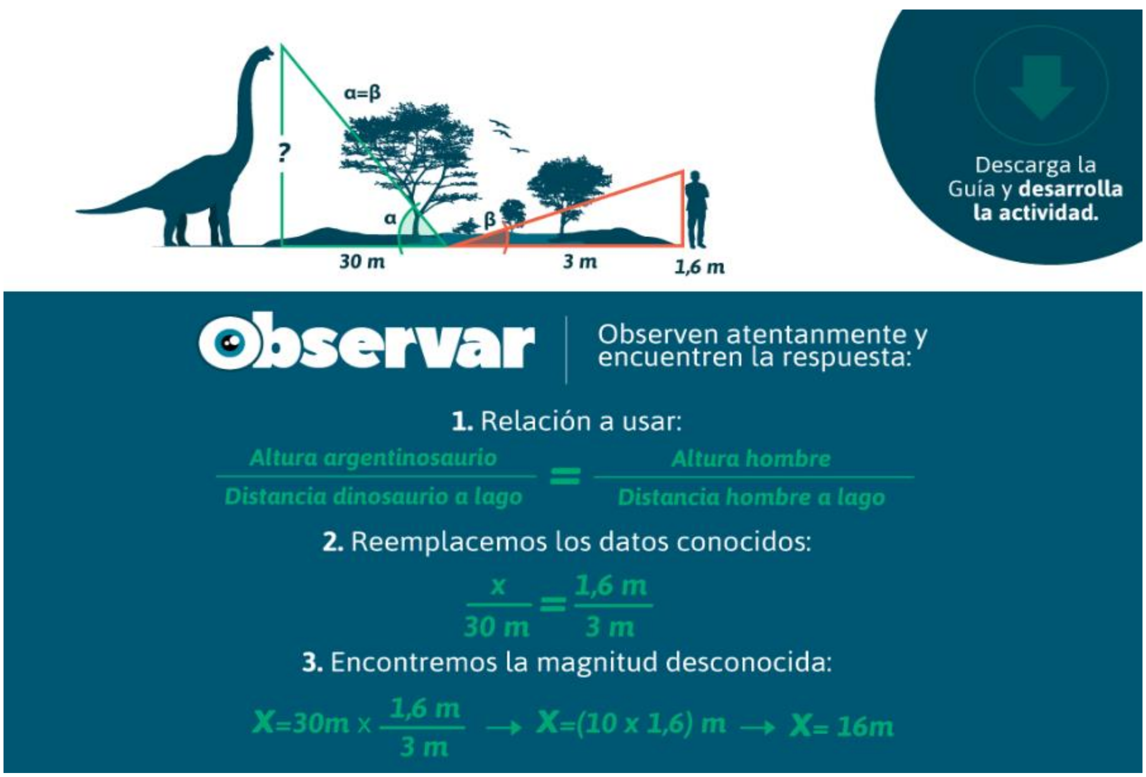


Ilustración 48: Ova. Guía 3 MIDIENDO GIGANTES CON LA LUZ

MIDIENDO GIGANTES CON LA LUZ

Objetivos

- Usar la proporcionalidad como herramienta de semejanza entre triángulos.
- Conocer y aplicar el Teorema de Tales para medir estructuras de mi entorno.

1. En grupos de tres personas, tomen el metro y realicen las siguientes medidas para comprobar la proporción áurea:

Nombres ____________________________________ **Grado:** 7-____ **Fecha:**__________

____

____

Materiales:
Cinta métrica, calculadora, un espejo plano y dispositivo para tomar fotos.

Realizar la siguiente actividad y tomar evidencias de la misma.

Medidas a tomar:

- Observen el siguiente montaje y toma las medidas indicadas para determinar la altura del aro de la cancha de baloncesto.

$$\frac{\text{Altura del individuo}}{\text{Distancia al individuo}} = \frac{\text{Altura de la canasta}}{\text{Distancia de la canasta}}$$

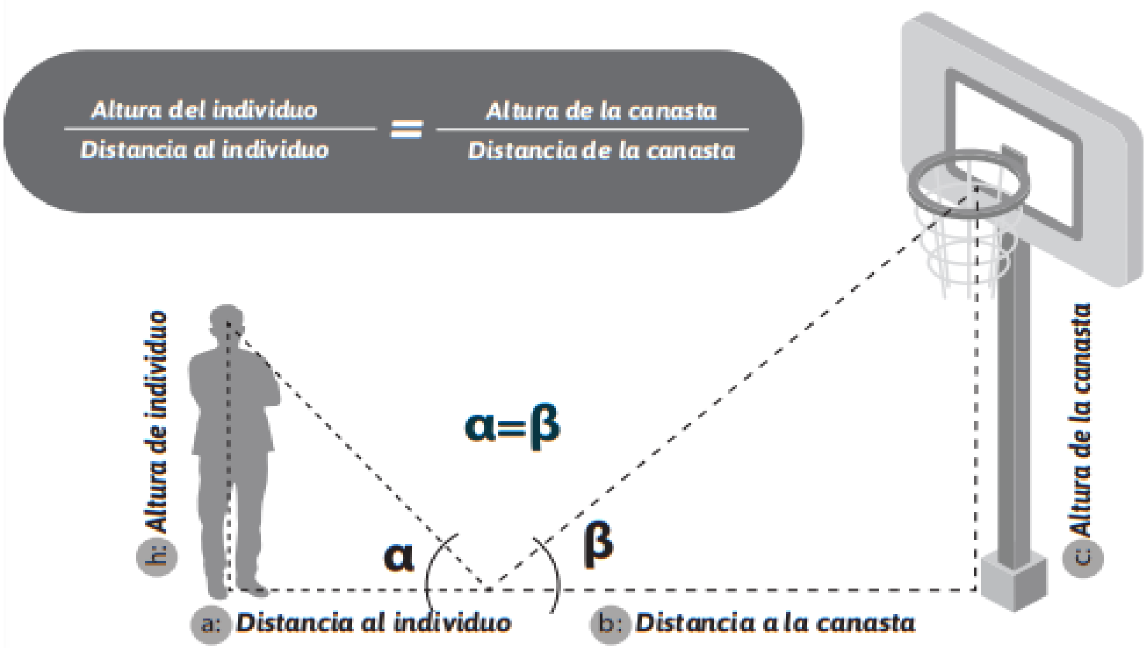


Ilustración 49: Ova. Guía 3 MIDIENDO GIGANTES CON LA LUZ

Completa la tabla con los datos de otros 9 grupos, luego determina el valor promedio de la altura del aro de baloncesto:

- h: Altura de la persona desde sus ojos hasta el piso.
- a: Distancia de la persona al centro del espejo.
- b: Distancia desde el centro del espejo a la proyección del aro.
- c: Altura de la cancha.

- **Razón 1:** Razón del triángulo mayor $\frac{c}{b}$
- **Razón 2:** Razón del triángulo menor $\frac{h}{a}$

Nota: Recuerde mantener constante la distancia b.

Grupo	h (m)	a (m)	b (m)	c (m)	Razón 1	Razón 2
1			2			
2			2			
3			2			
4			2			
5			2			
6			2			
7			2			
8			2			
9			2			
10			2			
Sumatoria			20			
Promedio			2			

Con los datos obtenidos desarrolle las siguientes actividades:
1. Determine la altura de la cancha aplicando el Teorema de Tales.
2. Con la ayuda de Excel o Geogebra grafique los datos de a contra los datos de h.
3. Analice los valores obtenidos y realice las conclusiones pertinentes.

4.4 Fase IV Análisis prueba final

Para la prueba final, se utilizó la misma prueba diagnóstico, con el propósito de comparar y encontrar el progreso por estudiante y por pregunta. Se aplicó la prueba a 24 estudiantes, puesto que 4 fueron retirados. Por respeto al buen nombre de los estudiantes se identificaron por números y se recopilaron los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 11: Resultados prueba final

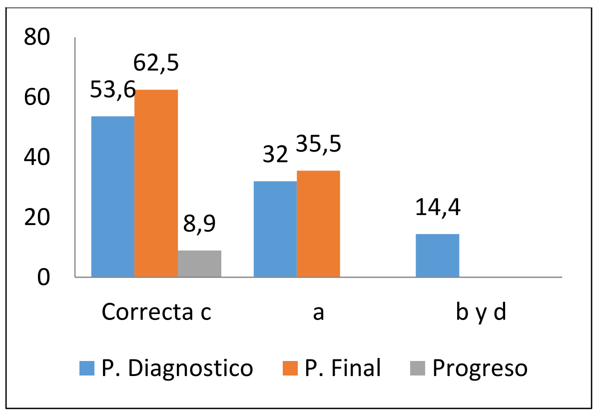
Estudiante	PREGUNTAS DE LA PRUEBA																				TOTAL		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Incorrectas	Correctas	N/R
1																					6	14	0
2																					8	12	0
3	ESTUDIANTE RETIRADA																				0	0	0
4																					5	15	0
5	ESTUDIANTE RETIRADA																				0	0	0
6																					10	10	0
7																					9	11	0
8																					9	11	0
9																					7	11	2
10																					4	16	0
11																					7	13	0
12																					9	11	0
13																					6	14	0
14																					7	13	0
15																					10	10	0
16																					6	13	1
17	ESTUDIANTE RETIRADA																				0	0	0
18																					3	17	0
19																					9	11	0
20																					9	11	0
21																					6	14	0
22																					8	11	1
23																					7	13	0
24																					8	12	0
25	ESTUDIANTE RETIRADA																				0	0	0
26																					6	14	0
27																					5	15	0
28																					6	14	0
TOTAL	9	5	8	12	7	3	6	8	12	6	3	17	10	2	11	8	9	11	9	14			
	15	19	16	12	17	21	18	16	12	18	21	7	14	22	12	16	15	12	14	9			
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1			

Los mejores resultados de nuevo fueron obtenidos por el estudiante 18, acertando en 17 pregunta (85% correctas). De igual forma, la estudiante14, obtuvo el mejor progreso, con una mejoría de 11 preguntas correctas de más comparada con la prueba inicial. La mediana con respecto a las respuestas correctas fue de 13, un avance significativo para la mitad del grupo. El tercer cuartil con un valor de 14,25 significa un progreso de casi 7 preguntas de más del 75 % de los estudiantes, donde eligieron la respuesta correcta.

Pregunta 1:

Conocimiento: Definición de razón

Ilustración 50: Análisis de datos pregunta 1

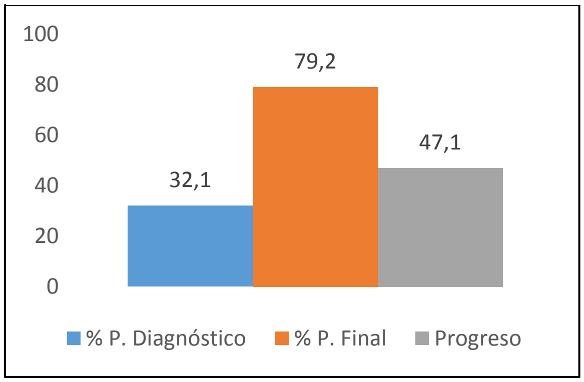


El 62,5% de los estudiantes responde de forma correcta que la razón es una comparación entre dos cantidades (opción c), mientras el 35,5% (opción a), escogió como respuesta la diferencia entre dos cantidades. El progreso fue de aproximadamente 9%. El grupo confunde la respuesta más acertada, sin embargo reconoce que la razón no es una división o una resta.

Pregunta 2:

Conocimiento: Definición de proporción

Ilustración 51: Análisis de datos pregunta 2

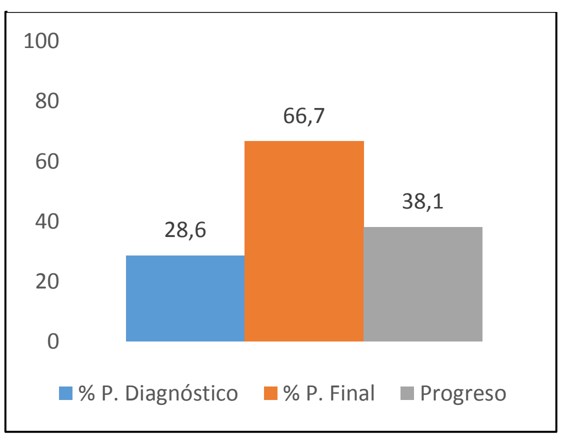


El 79,2% del grupo reconoce que una proporción se forma al igualar dos razones. El 10,4 % identifica las proporciones como una igualación de magnitudes y el otro 10,4 no identifica o no sabe que es una proporción. El progreso fue de un 47,1% con respecto a la definición de proporción

Pregunta 3:

Conocimiento: Identificar si es una proporción o una correlación

Ilustración 52: Análisis de datos pregunta 3

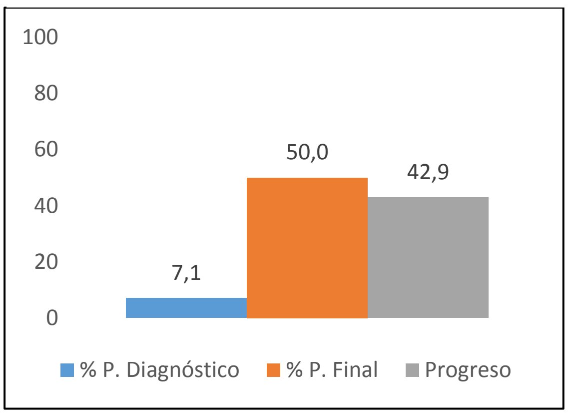


El 66,7% de los estudiantes identifico en una tabla de datos, que se trataba de magnitudes directamente correlacionadas (correcta c). Con un 29,6 % escogieron como segunda opción magnitudes directamente proporcionales y solo el 3,7% escogieron entre magnitudes inversamente. Se progresó con respecto a la identificación de magnitudes directamente correlacionadas, teniendo como base una tabla de datos, en un 38,1%.

Pregunta 4:

Conocimiento: Identificar si es una proporción o una correlación

Ilustración 53: Análisis de datos pregunta 4

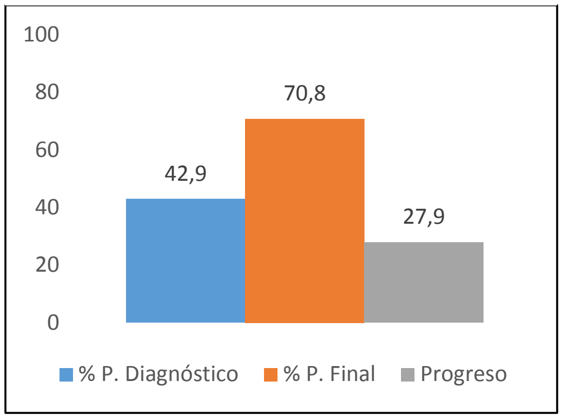


El 50 % de los estudiantes identificaron, con base a una tabla de datos, que son magnitudes directamente proporcionales. Se logró una mejoría con respecto a la identificación de magnitudes directamente proporcionales, teniendo como base una tabla de datos, de un 42,9%.

Pregunta 5:

Conocimiento: Identificar las fracciones equivalente

Ilustración 54: Análisis de datos pregunta 5

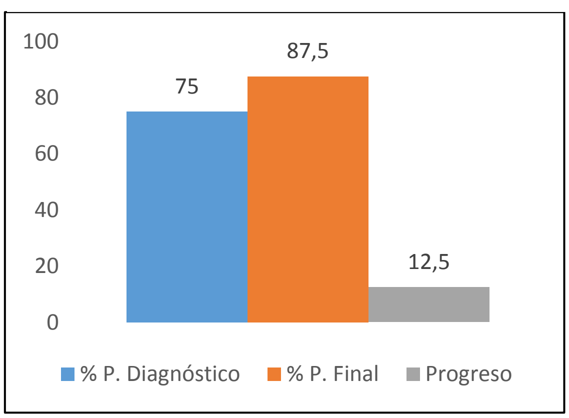


El 70,8% de los estudiantes identifico correctamente las fracciones equivalentes. Tema que se trató en el periodo anterior y que se reforzó con la identificación de la proporción. Se mejoró notablemente con un porcentaje del 27,9%. En la mayoría del discurso docente se insistió en tratar la proporción como una identificación de fracciones equivalente.

Pregunta 6:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 55: Análisis de datos pregunta 6



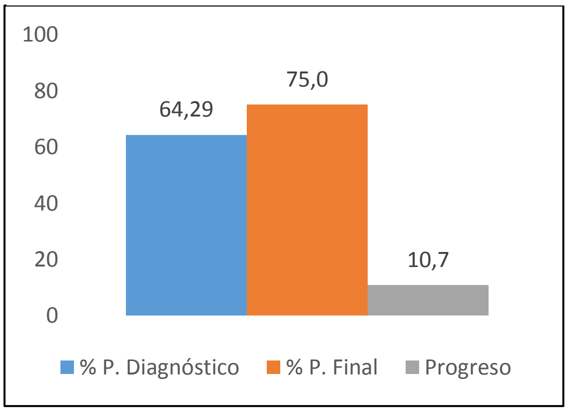
El 87,5 % de los estudiantes escogió la respuesta correcta, además de identifica el antecedente y consecuente como partes que componen las razones. Se mejoró en un

12,5%, los estudiantes pueden realizar ejercicio de proporción, siempre en cuando se parte de la unidad o constante de proporción.

Pregunta 7:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 56: Análisis de datos pregunta 7

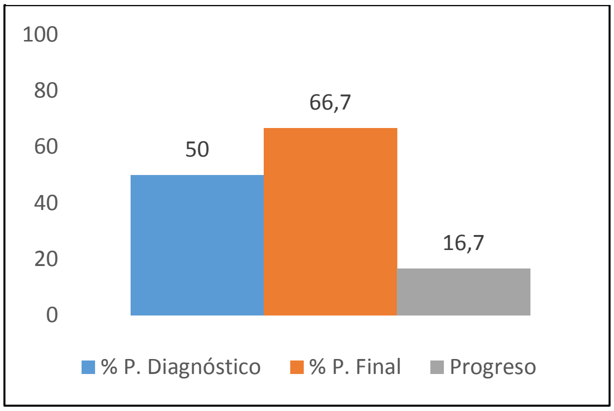


Un 75% del grupo responde de forma correcta al identificar una razón y reconoce las formas como se representa las razones (correcta c). Se mejoró con un progreso del 10,7% respecto a la connotación de las razones.

Pregunta 8:

Conocimiento: Calcular razones y compararlas

Ilustración 57: Análisis de datos pregunta 8

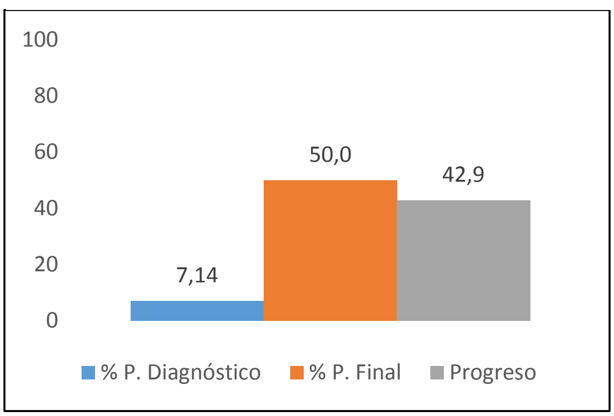


El 66,7 % de los estudiantes responde de manera correcta la pregunta donde deben realizar razones y compararlas. Se mejoró en un 16.7 %. Indicando un buen progreso, sin embargo muestra que aún hay dificultades en el orden de los números decimales.

Pregunta 9:

Conocimiento: Proporción y aplicación del teorema de Tales

Ilustración 58: Análisis de datos pregunta 9

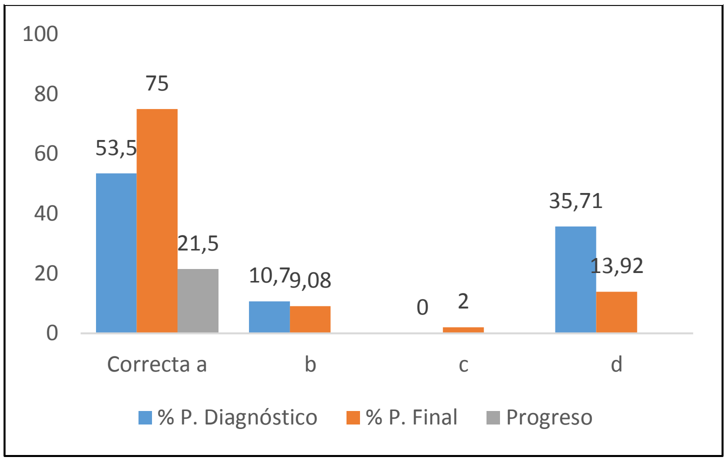


El 50% del grupo comprende y responde de manera correcta, interpreta a partir de un texto una situación donde se debe halla medidas indirectas. El progreso con respecto al uso del teorema de Tales fue del 42.9%.

Pregunta 10:

Conocimiento: Identificar el procedimiento más adecuado para encontrar el valor desconocido de una proporción.

Ilustración 59: Análisis de datos pregunta 10

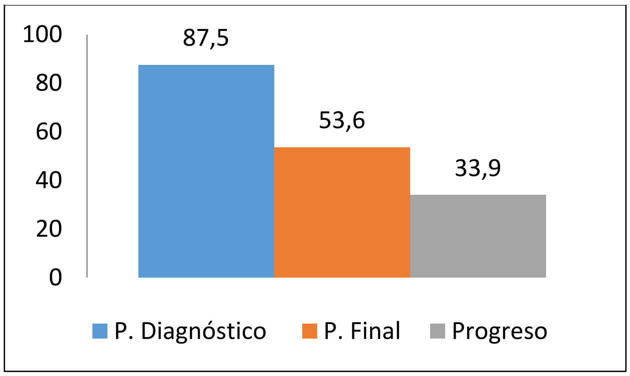


El 75 % de los estudiantes responde de manera correcta a la opción de identificar la constante de proporcionalidad y luego multiplicar para encontrar el valor desconocido. Se progresó con un porcentaje del 21,5% con respecto a la interpretación para elegir el mejor método de solución de problemas de proporcionalidad. Siendo un avance significativo ya que Según Carretero y lemon este método es el más complejo en cuanto su aprendizaje (Gasperini, 2013).

Pregunta 11:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 60: Análisis de datos pregunta 11

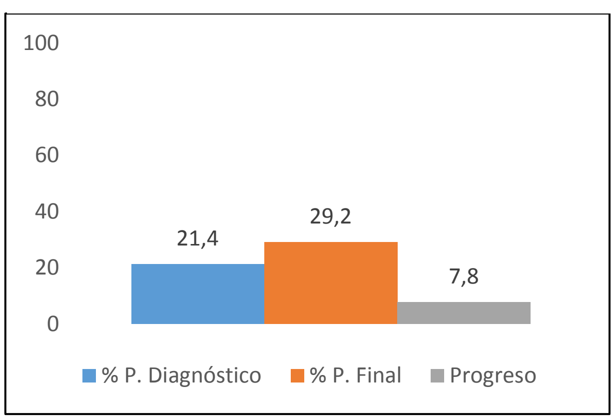


Con un porcentaje del 87,5 % los estudiantes de grado 7 eligieron la opción C como la correcta, donde debían encontrar la constante de proporción y hallar un valor desconocido. Con un progreso del 33,9%, los estudiantes pudieron resolver un problema donde implicaba la operación de división para hallar la constante de proporción, y luego una multiplicación, para encontrar un valor desconocido.

Pregunta 12:

Conocimiento: Identificar si dos razones forman una proporción

Ilustración 61: Análisis de datos pregunta 12

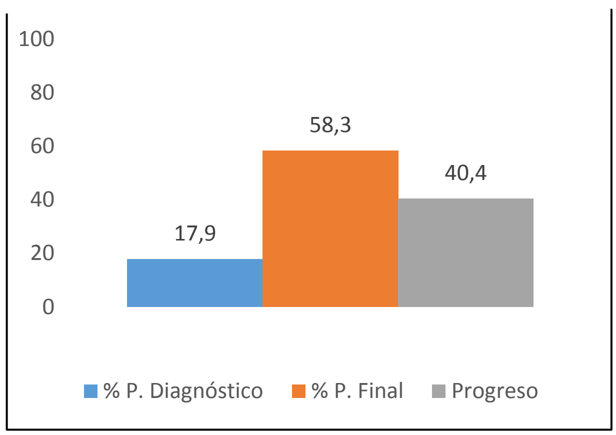


El 29,2% del grupo identifico en un par de razones cuales formaban una proporción. Se mejoró el 7,8% en la identificación de una proporción, dado un par de razones matemáticas. Fue el menor progreso de todas las preguntas. Indicando, por las otras preguntas; que pueden resolver problemas de proporción, sin embargo les cuesta establecer relaciones entre cantidades, aspecto que es importante en el desarrollo del pensamiento variacional (Cantoral, 2013).

Pregunta 13:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 62: Análisis de datos pregunta 13

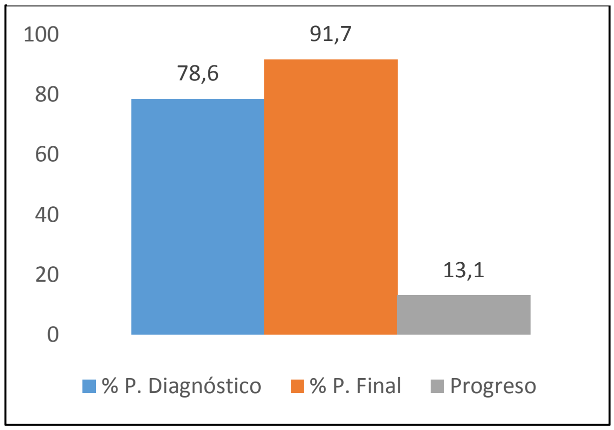


Con un 58,3%, el grupo dio con la respuesta correcta, aplicando el concepto de proporción para cambio de moneda. Se mejoró notablemente con un 40,4% en la resolución del problema que implicaba uso del concepto de proporción. Se percibe que los ejercicios donde se involucran dinero o compras; hay un progreso más significativo, estas situaciones problema le dan más sentido el nuevo conocimiento del alumno tal y como lo sugiere Vergnaud, (1997) en el aprendizaje significativo.

Pregunta 14:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 63: Análisis de datos pregunta 14

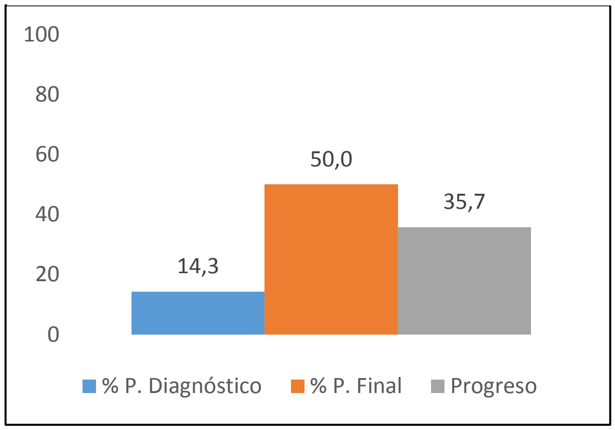


El 91,7 % de los estudiantes respondieron de forma correcta a la pregunta números 14 donde se indica el valor unitario o contante de la proporción para encontrar un valor desconocido. Con un 13,1 % se progresó en la solución del problema. Este mínimo avance comprueba que la mayor dificultad en la resolución de problemas se encuentra en identificar y operar la división para encontrar la constante unitaria, tal y como lo afirma Carreteto, (1989) en su modelo Intra de aprendizaje.

Pregunta 15:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar un valor desconocido

Ilustración 64: Análisis de datos pregunta 15

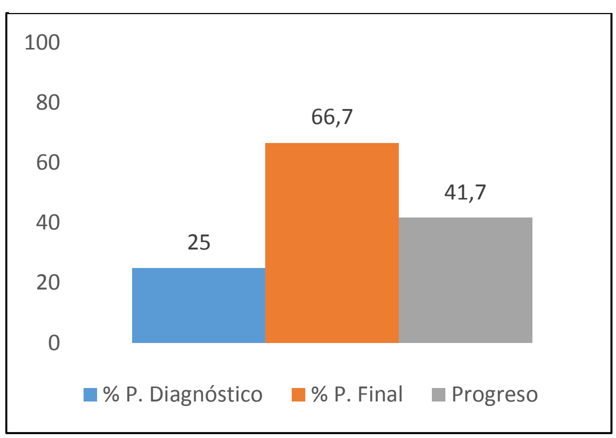


El 50% de los estudiantes eligieron la respuesta correcta para la pregunta número 15, donde debían encontrar la contante de proporcionalidad para solucionar el problema de proporción. Con un progreso de 35,7 %, los estudiantes pudieron identificar el valor unitario para luego halla un dato desconocido en un problema de proporción.

Pregunta 16:

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar una razón desconocida

Ilustración 65: Análisis de datos pregunta 16

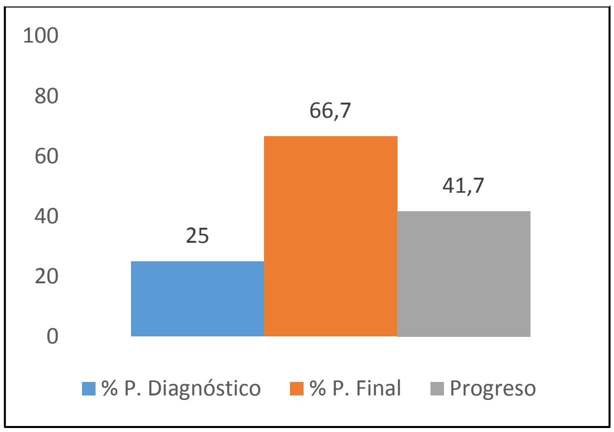


El 66,7 % de los estudiantes seleccionaron la respuesta correcta. El progreso fue del 41,7 %. Donde se identifica una razón y a partir de esta encontrar otra con la misma proporción.

Pregunta 17

Conocimiento: Aplicar el concepto de proporción para encontrar una razón desconocida

Ilustración 66: Análisis de datos pregunta 17

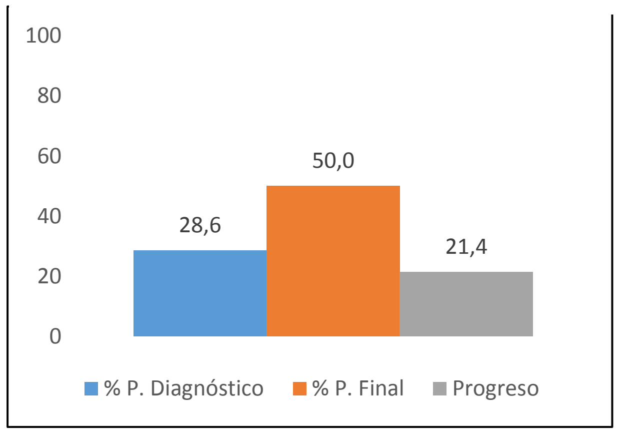


El 66,7% de los estudiantes selecciona la respuesta correcta para un problema de proporción donde se debe calcular una razón. Con un progreso del 41,7 % se identifica que los estudiantes mejoraron en el cálculo de razones a partir de una inicial donde se debe cumplir con la misma proporción.

Pregunta 18:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad inversa

Ilustración 67: Análisis de datos pregunta 18

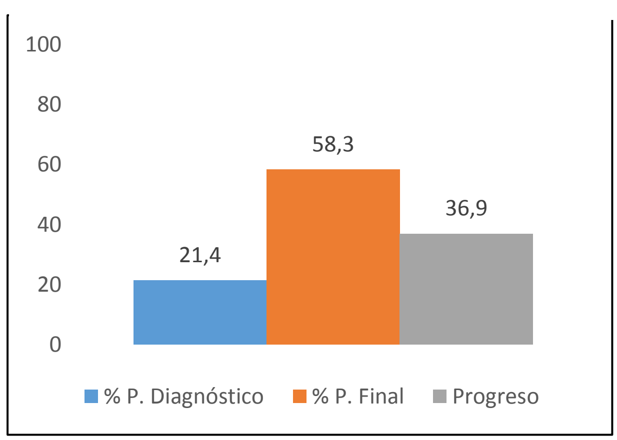


El 50% de los estudiantes seleccionan de forma correcta la respuesta a un problema de proporcionalidad inversa. Con un porcentaje del 21,4 se mejoró en la solución de problemas que implicaban proporcionalidad inversa.

Pregunta 19:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad e identificación de gráficas

Ilustración 68: Análisis de datos pregunta 19

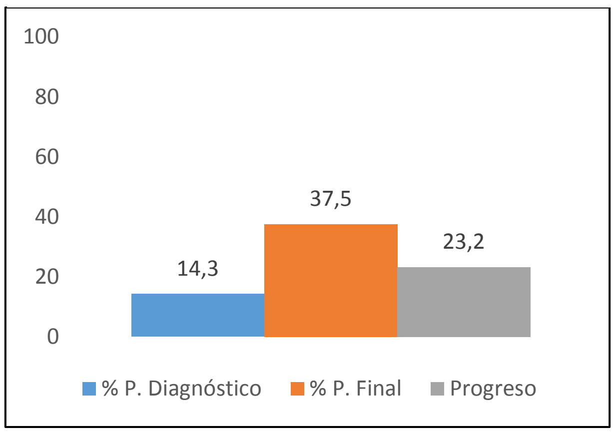


Con un 58,3% los estudiantes seleccionan la respuesta correcta a un problema donde deben analizar graficas de comportamiento proporcional. Se mejoró con un 36,9% en la clasificación de graficas que implicaban diferenciar el comportamiento proporcional de una correlacionar directo.

Pregunta 20:

Conocimiento: Desarrollo de problemas con proporcionalidad compuesta

Ilustración 69: Análisis de datos pregunta 20



El 23,2% de los estudiantes responde manera correcta a un problema de proporción compuesta. Se mejoró con un 23,2% en la resolución de problemas que implicaban proporción múltiple.

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones:

5.1 Conclusiones:

Basado en los objetivos planteados y en relación con las teorías, actividades y resultados del trabajo realizado en la institución educativa La Milagrosa las conclusiones son las siguientes:

- Con respecto a la prueba diagnóstico se concluye que los estudiantes del grado séptimo de la institución educativa La Milagrosa conocen los concepto de razón con un 53,6%, la proporción en un 31,2%, la fracción equivalente con un 42,9% y al menos un 50% del grupo pudo aplicar estos conceptos en la solución de los problemas 6, 7, 8, 10, 11, y 14 de tipo proporcional; donde la constante de proporcionalidad o valor unitario era dado. Lo que indica que se encuentran, según los modelos de aprendizaje de Gasperini, (2013); en un nivel bajo (modelo aditivo) o intermedio (modelo Inter), ya que el encontrar la constante de porporcionalidad implica identificar y realizar la operación de división con las magnitudes y esto se logra en un nivel posterior de aprendizaje.
- De la prueba diagnostico se concluye que menos del 30% (preguntas 3 y 4), del grupo puede diferenciar, a partir de graficas o tablas de datos el comportamiento porporcional del correlacionar. Además solo el 7,2% del grupo pudo resolver un problema donde involucraba el uso del teorema de Tales.
- En consecuencia con lo anterior, la prueba diagnostico permitió identificar el nivel y los preconceptos que el grupo tenía y además fue pieza claves para el diseño del objeto virtual de aprendizaje.

- En cuanto a la aplicación del objeto virtual, los estudiantes se mostraron motivados e interesados por conocer y terminar lo más pronto posible las diferentes pantallas y actividades que éste ofrecía. El uso fue algo muy intuitivo para ellos, sin embargo, algunos estudiantes no se detuvieron a ver todos los videos, por otro lado, la asesoría del docente se hizo necesaria con algunos estudiantes que no dominan mucho el manejo del computador. Las pantallas y actividades propuestas en el OVA fueron diseñadas para avanzar si se terminaban de forma correcta, similar a un juego de nivel; lo que pone al estudiante en una situación de conflicto. Según las teorías constructivistas de Jean Piaget estas situaciones de conflicto permiten al sujeto hacer una modificación cognitiva en la que se relaciona el sujeto (estudiante), con el objeto (OVA). Se concluye con lo anterior que el objeto virtual permitió la movilización del aprendizaje.
- Las actividades de medición y observación que se propusieron al final de las tres guías del objeto virtual, favorecieron el desarrollo de competencias; tal y como lo sugiere el Ministerio de Educación Nacional, desde los diferentes pensamientos. De esta manera la actividad realizada al comparar las razones entre cantidad de producto y precio por medio de tablas permitió el desarrollo del pensamiento variacional. En la segunda actividad, los estudiantes tomaron medidas de partes de sus cuerpos para encontrar la razón Aurea, recopilaron la información en tablas y compararon quienes se aproximaba más a ésta, promoviendo el pensamiento geométrico métrico y variacional. En la tercera actividad por medio del teorema de Tales hallaron la medida indirecta de la canchas de baloncesto. En esta actividad debían graficar y ver el comportamiento lineal, promoviendo de esta manera el

desarrollo del pensamiento variacional, geométrico métrico y por supuesto proporcional.

- Al comparar la prueba final con la inicial se logró movilizar el pensamiento proporcional. con una mejoría del 9% para el conceptos de razón y un 47,1% en el concepto de proporción. En relación con el pensamiento numérico variacional. La caracterización de magnitudes directamente correlacionadas o proporcionales, teniendo en cuenta una tabla de datos, mejoró en un 38,1% y un 42,9% respectivamente. Además, con un 36,9% se mejoró la identificación en una representación gráfica de un comportamiento directamente proporcional. Por otro lado, se concluye que la prueba permitió evaluar los avances de los estudiantes tal y como se planteó en los objetivos específicos.

5.2 Recomendaciones:

- La propuesta didáctica por medio de un objeto virtual de aprendizaje y complementado con actividades concreta que permitan la interacción de la tecnología con lo real, le da otro sentido a la clase y le permite al estudiante aprender desde diferentes perspectivas, dando un sentido más integral y aplicable de las matemáticas. Por lo anterior es importante y recomendable el uso complementario de lo virtual y lo real en las clases para ofrecerles a los estudiantes diferentes de oportunidades de aprendizaje.
- El objeto virtual de aprendizajes a funcionando como una herramienta importante donde el docente no cargue con todo el trabajo de captar la atención, repetir, tener cuidado en el discurso para enseñar entre otras funciones importantes que deben realizar al tiempo en una clase. Es recomendables el uso de estos para permitir la autonomía de los aprendizajes y poner al docente en una posición más evaluativa de su planeación, permitiendo el crecimiento en la labor docente y en el aprendizaje de los estudiantes.

6 Bibliografía

Lesh , R., Post, T., & Behr, M. (1988). Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Volume 2. *National Council of Teachers of Mathematics*, 93-118.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune.

Bedoya , F., Hernández Llamas, L. G., Rivera, P., & Silva Ferro, M. (s.f.). *Ministerio de Educación Nacional.* Recuperado el Septiembre de 2018, de https://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/Libro%20Innovacion%20MEN%20-%20V2.pdf

Cabrera Medina, J. M., Sánchez Medina, I. I., & Rojas Rojas, F. (2016). Uso de objetos virtuales de aprendizaje OVAS como estrategia de enseñanza – aprendizaje inclusivo y complementario a los cursos teóricos – prácticos. Una experiencia con estudiantes del curso física de ondas. *Educación en Ingeniería*, 4-12.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Carretero, M. (1993). *Federacion de Educadores Bonaerenses.* Obtenido de https://bejomi1.wordpress.com/2009/06/13/%C2%BFque-es-el-constructivismo-carretero-mario/

Carreteto, L. (1989). *La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años.* Anuario de psicología.

CASTIBLANCO PAIBA, A. C. (2004). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. *Ministerio de Educación Nacional*.

Castriblanco Paiba, A. C., Urquina Llanos, H., & Gempeler, E. A. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales, PROYECTO: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia .* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Daza López, J. M. (2014). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo de la institución educativa departamental San Miguel.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Dechima Dendorfer, S. B. (2016). *"El número de Oro y Proporcionalidad Áurea en la Escuela Secundaria utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Un estudio de caso".* Belen de Escobar, Argentina: Universidad Tecnológica Nacional Regional Pacheco.

Diaz Godino, J. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada.

Duval, R. (2016). Obtenido de Universidad Distrital Francisco José de Caldas: http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/comprension_y_aprendizaje_en_matematicas_perspectivas_semioticas_seleccionadas.pdf

Gasperini, D. R. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad.* Mexico.

Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Madrid: Universidad de Granada.

Gomez, H. Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. *Tesis de maestría.* Cinvestav, Mexico.

Gonzalez Urbaneja, P. M. (2008). *LA SOLUCIÓN DE EUDOXO A LA CRISIS DE LOS INCONMENSURABLES. LA TEORIA DE LA PROPORCIÓN Y EL MÉTODO DE EXHAUCIÓN.* SIGMA.

Gowin, R. B. (1981). *Educating.* Ithaca ,N, Y: Cornell University.

Holguín Ortega, C. E. (2012). *Razonamiento proporcional.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Ibarra Muñoz , T., & Moreno Yepes, V. (2010). *UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL DESDE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA SIMPLE EN SITUACIONES DE VARIACIÓN DE LA VIDA COTIDIANA.* Medellín: Universidad Antioquia .

Jaramillo Vélez, L. M. (2012). *La Proporcionalidad y el Desarollo del Pensamiento Matemático.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Johnson Laird, P., de Vega, M., Intons-Peterson, M., Denis, M., & Marschark, M. (1996). *Models of Visuospatial Cognition.* New York: Oxford University Press.

Joya Vega, A. D., Patiño , Ó. J., Buitrago Garcia, L., Sabogal Reyes, Y. A., Ortiz Wilches, L. G., Ramirez Rincón , M., y otros. (2016). *Saberes ser hacer Matemáticas 7.* Bogotá: Santillana.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-61.

Lopez Zapata, C. A. (2014). *Diseño de una Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa que movilice el Aprendizaje de la proporcionalidad directa e inversa a través de las TIC en el grado Séptimo la Institución Educativa el Pedregal del Municipio de Medellín.* Medellín: Universidad Nacional .

Marquardt, S. (16 de Junio de 2018). *Marquardt Beauty Analysis.* Obtenido de https://www.beautyanalysis.com/articles/

MEN. (4 de Mayo de 2001). Obtenido de Ministerio de Educación Nacional: https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87317.html

MEN. (2018). *Estandares Básicos de Competencias de Matemáticas.* Recuperado el 23 de Junio de 2018, de MEN: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2018). *Minsterio de Educación Nacional*. Recuperado el 24 de Julio de 2018, de https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-82739.html

Morales Martin, L. Y., Gutiérrez Mendoza, L., & Ariza Nieves, L. M. (2016). Guía para el diseño de objetos virtuales de aprendizaje OVA. Aplicación al proceso enseñanza-aprendizaje del área bajo la curva de cálculo integral. *Científica General José María Córdoba* , 127-147.

Moreira, M. A. (2012). UNIDADES DE ENSEÑANZA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVAS– UEPS. *Aprendizaje Significativo en Revista*.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Oller Mercen, A., & Gairín Sallán, J. M. (2013). LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN Y POSTERIOR ARITMEIZACIÓN. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática* . Huerga Y Fierro Editores.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1977). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

Reyes , D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.* México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Sánchesz Ordoñes, E. A. (2013). *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes.* Popayan : Universidad del Cauca.

Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje una perspectiva educativa, Sexta edición .* México: Pearson.

Stewart, I. N. (2008). *HISTORÍA DE LAS MATEMÁTICAS.* Crítica .

Tomasini, M. C. (15 de Junio de 2018). *El fundamento matemático de la escala músical.* Obtenido de http://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf

Universidad Tecnológica Intercontinental. (2018). *Investigación científica y tecnológica*. Recuperado el 23 de Junio de 2018, de Investigación científica y tecnológica: http://www.utic.edu.py/investigacion/index.php/monografia-de-analisis-de-experiencias

Valencia Tello, D. C. (2015). Implementación de tecnologías de la información y las comunicaciones (tic) en Colombia. *Derecho común*, 1-20.

Vergnaud, G. (1997). *The nature of mathematical concepts.* Psychology Press .

Vygotsky, L. S. (2007). *Pensamiento y habla.* Buenos Aires- Argentina: Colihue.

Anexo:

Test Diagnóstico:

1. Pensado matemáticamente, una razón es:
   a) Una diferencia entre dos cantidades
   b) Una división entre dos números
   c) Una comparación entre dos cantidades
   d) Una resta entre dos números

2. Una proporción se forma al igualar:
   a) Proporciones
   b) Dos razones
   c) Magnitudes
   d) Decimales

3. ¿La cantidad de kilómetros recorridos por un automóvil y la cantidad de combustible consumido están en relación?

Cantidad de combustible	3 L	5 L	7 L	8 L
kilómetros recorridos	30 km	54 km	78 km	90 km

   a) Directamente proporcional
   b) Inversamente proporcional
   c) Directamente correlacionadas
   d) Inversamente correlacionadas

4. ¿La cantidad de sillas en un salón y precio de las mismas están en relación?

Precio de las sillas	$ 75.000	$ 125.000	$175.000	200.000
Cantidad de sillas	3	5	7	8

   a) Directamente proporcional
   b) Inversamente proporcional
   c) Directamente correlacionadas
   d) Inversamente correlacionadas

5. ¿Qué fracción NO es equivalente a 14/42
   a) 5/15
   b) 1/3
   c) 2/6
   d) 10/15

6. Si un litro de helado marca A cuesta 15.000 pesos, ¿Cómo será su razón para 12 litros?
   a) 12 L Antecedente y $180.000 Consecuente

   b) 150.000 Consecuente y 12 L Antecedente
   c) $ 180.000 Antecedente y 12 L Consecuente
   d) 12 L Consecuente y 150.000 Antecedente

7. Pedro ha pagado $ 600.000 por 15 días de trabajo ¿Cómo se representa esta razón para 18 días?
   a) $720.000 / 8 días
   b) $72.000 a 18 días
   c) $720.000 : 18 días
   d) $72.000 / 18 días

8. Juan vende 5 litros de helado marca A por $ 85.000. David vende 8 litros de helado de la misma marca por $124.000. ¿Quién vende más barato?
   a) David a razón de 17000 $/L
   b) Juan a razón de 15500 $/L
   c) David a razón de 15500$/L
   d) Juan a razón de 17000 $/L

9. Una valla publicitaria proyecta una sombra de 35 metros. Al mismo tiempo Carlos que se encuentra a esta distancia proyecta una sombra de 2,5 metros. ¿Si Carlos mide 1,5 metros cuál es la altura de la valla?
   a) 21 metros
   b) 19,5 metros
   c) 21,5 metros
   d) 19 metros

10. Si dos litros de helado cuestan 30.000. ¿ Cuánto cuesta 15 litros ? el procedimiento más adecuado para hallar la respuesta es:
    a) Dividir 30.000 entre dos y multiplicar por 15
    b) Sumar 15.000 quince veces
    c) Sumar 30.000 7 veces y luego sumar 15.000
    d) Multiplicar 15 litros por 30.000 y dividir por 2

11. Entre 6 personas arriendan un local de eventos y cada una tiene que pagar 40.000 pesos. Si lo arriendan entre 8 personas. ¿Cuánto tendría que pagar cada una?
    a) $ 5.000
    b) $ 30.000
    c) $ 3.000
    d) $ 50.000

12. ¿Cuál de los siguientes pares de razones forman una proporción?
    a) 2/3 = 5/7
    b) 10/5 = 5/10
    c) 18/16 = 27/24
    d) 12/6 = 4/8

13. Una maquina granizadora tiene un costos de 1.700 dólares. ¿Cuantos pesos debe pagar por esta, si 30 dólares equivalen a 84.000 pesos?
    a) $ 4’260.000
    b) $ 4’760.000
    c) $ 4’220.000
    d) $ 4’720.000

14. Paola compró 5 mesas para su negocio en 25.000 pesos cada una. ¿cuánto pagará en total?
    a) $ 250.000
    b) $ 2’500.000
    c) $ 125.000
    d) $ 1’250.000

15. Kate compro 5 litros de mezcla para granizado por 20.000. Luego Camilo tuvo que comprar 13 litros más que hacían falta. ¿Cuánto pago Camilo?
    a) $ 520.000
    b) $ 260.000
    c) $ 100.000
    d) $ 650.000

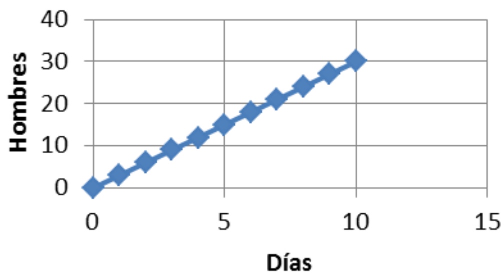
16. El aula cuenta con 30 estudiantes, si la razón entre hombres y mujeres es de 7 a 3. ¿Cuántas mujeres y hombres hay en el aula?
    a) 9 hombres y 21 mujeres
    b) 21 hombres y 9 mujeres
    c) 3 mujeres y 27 hombres
    d) 27 mujeres y 3 hombres

17. La razón entre las edades de Santiago y Sebastián es de 8/3. Si la suma de sus edades es 33, ¿cuál es la edad de cada uno?
    a) Santiago 9 y Sebastián 24 años
    b) Sebastián 25 y Santiago 8 años
    c) Santiago 24 y Sebastián 9 años
    d) Sebastián 8 y Santiago 25 años

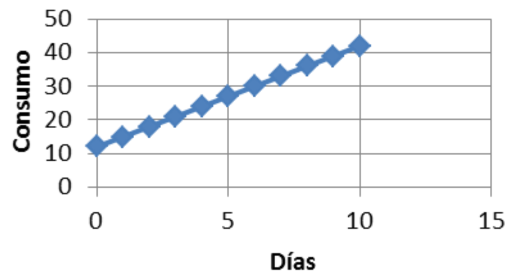
18. Cuatro artistas tardaron 20 días trabajando 6 horas diarias en pintar un mural. ¿cuantos días tardarán 12 artistas, trabajando 5 horas diarias para pintar el mismo mural?
    a) 6,5 días
    b) 7 días
    c) 9 días
    d) 8 días

19. Un grupo de 50 hombres tienen provisiones para 20 días a razón de tres raciones diarias. ¿qué grafica representa mejor esta situación?

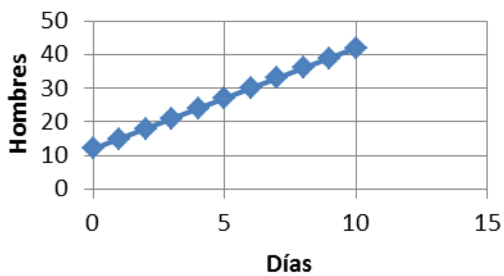
a)



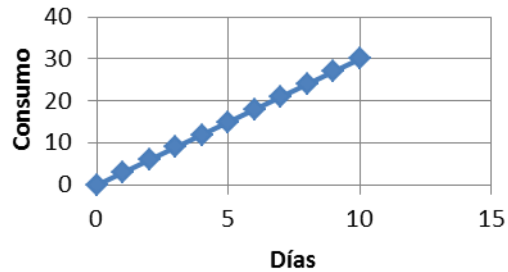
b)



c)



d)



20. Claudia requiere de una esfera y un marco para hacer un aviso publicitario. Para esto prepara una maqueta con las siguientes dimensiones: radio 5 cm y marco de 7 x 12cm. Si el vendedor solo tiene disponible una esfera de 4 m ¿qué dimensiones deberá tener el marco para que luzca como la maqueta?
    a) 5m x 7 m
    b) 4,5m x 6,5m
    c) 5,6m x 9,6m
    d) 4m x 6m