DISEÑO, CONSTRUCCION Y CONTROL DE UN PENDULO INVERTIDO ROTACIONAL UTILIZANDO TECNICAS LINEALES Y NO LINEALES

CARLOS ANDRES OSORIO ZÚÑIGA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA
MAESTRIA EN INGENIERIA
AUTOMATIZACION INDUSTRIAL
BOGOTA, D.C.
2009

DISEÑO, CONSTRUCCION Y CONTROL DE UN PENDULO INVERTIDO ROTACIONAL UTILIZANDO TECNICAS LINEALES Y NO LINEALES

CARLOS ANDRES OSORIO ZÚÑIGA

Tesis para optar al título de
Magíster en automatización industrial

Director
LEONARDO BERMEO CLAVIJO
Ingeniero electrónico MSc.
Codirector
HERNANDO DIAZ MORALES
Ingeniero Electricista Phd

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERIA
MAESTRIA EN INGENIERIA
AUTOMATIZACION INDUSTRIAL
BOGOTA, D.C.
2009

Nota de aceptación:

Trabajo aprobado por el comité de evaluación en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad Nacional de Colombia para optar al título de Magíster en Automatización Industrial

_____

Jurado

_____

Jurado

_____

Jurado

BOGOTA D.C. Diciembre 2009

Dedicado a:

Toda mi familia y en especial a mis padres: Guillermo Osorio Ortiz y Esperanza Zúñiga Sáenz.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN 1

1. EL PÉNDULO DE FURUTA 4

1.1 MODELO MATEMATICO 5

1.1.1 Cinemática 5

1.1.2 Expresiones de energía 6

1.1.3 Ecuaciones de movimiento 8

1.1.4 Representación en espacio de estado 10

1.2 PUNTOS DE EQUILIBRIO 11

1.3 LINEALIZACION 11

1.4 MODELOS DE FRICCION 13

1.4.1 Modelos de fricción clásicos 14

1.4.1.1 Modelo de fricción de Coulomb con fricción estática 14

1.4.1.2 Modelo de fricción de Karnopp 16

1.4.2 Modelo de fricción dinámico de LuGre 16

2. VALIDACION EXPERIMENTAL DEL MODELO MATEMATICO 19

2.1 OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS 19

2.2 COMPARACIÓN ENTRE EL MODELO MATEMÁTICO Y EL PÉNDULO EXPERIMENTAL 20

3. CONTROL HIBRIDO PARA EL PÉNDULO DE FURUTA 22

3.1 SWING UP 22

3.1.1 Control de energía 24

3.2 REGULADOR LINEAL CUADRATICO (LQR) 28

3.3 CONTROLADOR PI VECTORIAL 34

3.3.1 Controlador PI Vectorial con anti wind-up 39

4. COMPENSACION DE FRICCION 42

4.1 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE COULOMB 43

4.2 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE KARNOPP 44

4.3 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE LUGRE 45

4.3.1 Observadores de fricción de LuGre 48

4.3.1.1 Observador de lazo abierto 48

4.3.1.2 Observador con realimentación 48

5. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES JERARQUICO 55

5.1 REPASO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES 56

5.2 DISEÑO DEL CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES JERÁRQUICO 59

5.2.1 Análisis de estabilidad y deslizamiento de todas las superficies deslizantes 63

5.2.2 Controlador libre de singularidad 66

5.2.3 Resultados experimentales 67

6. TRABAJO FUTURO 69

7. CONCLUSIONES 70

A Componentes utilizados para el sistema 72

BIBLIOGRAFIA 76

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. Valores de los parámetros del sistema 19

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. El péndulo de Furuta 4

Figura 2. Vista general del péndulo de Furuta desarrollado 5

Figura 3. Fricción de Coulomb 14

Figura 4. Fricción de Coulomb con fricción estática 15

Figura 5. Esquema del modelo de fricción de Karnopp 16

Figura 6. La interfaz de fricción entre dos superficies es imaginada como un contacto entre cerdas. Por simplicidad las cerdas inferiores se muestran rígidas. 17

Figura 7. Deflexión promedio de la cerda z. 18

Figura 8. Comparación de respuestas entre el sistema experimental (línea azul) y el sistema de simulación (línea roja) para la condición inicial $\theta_0 = 365\deg, \dot{\theta}_0 = 0.6283 rad/s, \phi_0 = 0.3516\deg, \dot{\phi}_0 = 0 rad/s$. 20

Figura 9. Diagrama de cuerpo libre del péndulo 22

Figura 10. Retrato de fase del sistema con control de energía 25

Figura 11. Comportamiento patológico del sistema con la ley de control (51) con k=22 y $E_0 = 0.15$. 28

Figura 12. Esquema de control por realimentación del estado. 30

Figura 13. Respuesta del sistema exp. con control híbrido (swing up + LQR) para la condición inicial $\theta_0 = -179.8\deg, \dot{\theta}_0 = 0 rad/s, \phi_0 = 0\deg, \dot{\phi}_0 = 0 rad/s$. 32

Figura 14. Respuesta del sistema experimental con control híbrido (swing up + LQR) ante perturbaciones. 33

Figura 15. Esquema de control PI vectorial digital. 35

Figura 16. Respuesta del sistema experimental con control híbrido (swing up + PI Vectorial) ante diferentes valores de referencia para la posición del brazo. 37

Figura 17. Respuesta del sistema con control híbrido (Swing up + PI Vectorial) ante una perturbación en t =103 s. 38

Figura 18. Integrador condicionado para evitar el wind up 39

Figura 19. Resp. del sistema con control híbrido (swing up + PI Vectorial) con antiwind up ante cuatro perturbaciones en t = 80 s, t = 92 s, t = 98 s y t=106s. 40

Figura 20. Control PI Vectorial con comp. de fricción basada en modelo. 42

Figura 21. Efecto de la fricción sobre el sistema de control PI Vectorial 43

Figura 22. Respuesta del sistema en la posición invertida con compensación de fricción de Coulomb 44

Figura 23. Esquema del modelo de fricción de Karnoop 44

Figura 24. Respuesta del sistema en la posición invertida con compensación de fricción de Karnopp 45

Figura 25. Compensación de fricción basada en observador de LuGre y realimentación lineal del estado 49

Figura 26. Compensación de fricción basada en observador de LuGre y realimentación lineal del estado como una interconexión de un sistema SPR y un sistema disipativo 50

Figura 27. Diagrama de Nyquist de G 51

Figura 28. Respuesta del sistema en la posición invertida con control LQR y con compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo abierto. 52

Figura 29. Respuesta del sistema en la posición invertida con control LQR y compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo cerrado 52

Figura 30. Respuesta del sistema en la posición invertida con control PI Vectorial y compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo abierto 53

Figura 31. Deterioro en el desempeño del sistema en la posición invertida ocasionada por sobre compensación de fricción 54

Figura 32. Estructura de las superficies deslizantes jerárquicas 61

Figura 33. Respuesta del sist. de control por modos deslizantes jerárquico 67

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo y control de un péndulo invertido rotacional (péndulo de Furuta). Un ejemplo de este tipo de sistemas son las aeronaves, vehículos espaciales, vehículos submarinos, barcos, satélites y robots construidos por barras y uniones articuladas pasivas y activas. Algunas veces, la subactuación puede ser causada por fallas en los actuadores. El desarrollo de estos mecanismos que pueden realizar tareas complejas con un número reducido de actuadores es un asunto de gran interés, puesto que implica reducción de peso y de costos.

Un reto para la comunidad de control ha sido encontrar una única ley de control no lineal que solucione el problema global de llevar el péndulo desde su posición colgante natural o algún otro estado inicial hasta su posición invertida y mantenerlo allí. En este trabajo se diseñan varios tipos de controladores lineales y no lineales, se examina su desempeño en el péndulo desarrollado y finalmente se diseña un controlador por modos deslizantes jerárquico para solucionar el problema global de control.

La fricción es muy importante para los ingenieros de control, por ejemplo en el diseño de servo mecanismos de alta precisión, robots, sistemas neumáticos e hidráulicos y sistemas de frenos antibloqueo (ABS) para automóviles. En este trabajo, se muestra el efecto de la fricción cuando se utiliza un control por realimentación de variables de estado sobre el péndulo de Furuta. También se diseñan compensadores de fricción clásicos y modernos para reducir los ciclos límite que aparecen al estabilizar el sistema en su posición invertida.

PALABRAS CLAVES: péndulo invertido rotacional, péndulo de Furuta, subactuado, control por modos deslizantes, fricción.

ABSTRACT

This paper presents the development and control of a rotational inverted pendulum (Furuta pendulum). An example of such systems are aircraft, spacecraft, underwater vehicles, ships, satellites and robots built by bars and articulated joints passive and active. Sometimes underactuation can be caused by faults in the actuators. The development of these mechanisms that can perform complex tasks with a reduced number of actuators is a matter of great interest because it further reduces weight and cost.

A challenge for the control community has been to find a single nonlinear control law that solves the global problem of bringing the pendulum from its natural pendant position or some other initial state to its inverted position and keep it there. In this paper were designed several types of linear and nonlinear controllers, examine their performance in the developed pendulum and finally its designed a hierarchical sliding mode controller to solve the global problem of control.

Friction is very important for control engineers, for example in the design of high precision servo mechanisms, robots, pneumatic and hydraulic systems and antilock braking systems (ABS) for automobiles. This paper shows the effect of friction when using a feedback control of state variables on the Furuta pendulum. Classic and modern friction compensators are also designed to reduce the limit cycles that appear when the system its stabilized in its inverted position.

KEY WORDS: Rotational inverted pendulum, Furuta pendulum, underactuated, sliding mode control, friction.

INTRODUCCIÓN

Dentro de los sistemas de péndulos invertidos, un ejemplo muy utilizado y profundamente estudiado es el péndulo encima de un carro móvil, dicho sistema se utiliza para el análisis experimental de técnicas de control. El inconveniente con este sistema se encuentra en que el recorrido del carro se encuentra acotado, lo que limita las maniobras de control. Para eliminar dicha limitación se reemplaza la trayectoria lineal del carro por una trayectoria circular, dando origen al sistema Péndulo de Furuta.

El sistema Péndulo de Furuta (Furuta K. et al., 1994) fue creado por el Dr. K. Furuta del Instituto de Tecnología de Tokio, Japón, el cual es un sistema subactuado de dos grados de libertad rotacionales llamados brazo y péndulo. El movimiento del brazo se realiza en un plano horizontal girando alrededor de un eje perpendicular al plano, el péndulo se encuentra ubicado en un extremo del brazo y su eje giro es colineal al eje axial del brazo y su movimiento se realiza en un plano perpendicular al de éste último.

Desde la aparición del péndulo rotacional se suscitó un problema mucho más general y complejo que el del simple mantenimiento de la varilla en la posición invertida: el problema de llevar el péndulo desde cualquier posición, y en particular desde la posición colgante natural, hasta la posición invertida. Este problema se conoce como el del swing up. Por tanto, en el problema del control del péndulo invertido aparecen dos subproblemas: el de llevar el péndulo desde la posición colgante inicial, u otra posición cualquiera, a las proximidades de la posición deseada; y el de estabilizar al péndulo en la posición invertida.

Conviene observar que el problema del swing up adquiere radicales diferencias con respecto al de estabilización local, puesto que se trata de un problema global y no lineal. Se trata por tanto, de un ejemplo relativamente simple de problema no lineal donde el tratamiento lineal es insuficiente.

En este trabajo se diseña un control híbrido para coordinar los dos subproblemas: un controlador swing up basado en el control de energía del péndulo para llevar el sistema a una región cercana a su punto de equilibrio inestable, un controlador LQR y PI Vectorial para estabilizar localmente el sistema y una estrategia de conmutación para escoger el momento en que funcionará el swing y el control por realimentación de variables de estado.

Un reto que para la comunidad de control ha sido encontrar una única ley de control no lineal que solucione el problema global de llevar el péndulo desde su posición colgante natural o algún otro estado inicial hasta su posición invertida y mantenerlo allí. En este trabajo, se diseña un controlador por modos deslizantes jerárquico para solucionar este problema.

Un sistema subactuado (el péndulo es uno de ellos) es aquel que posee menos actuadores que grados de libertad (DOF). Los sistemas subactuados incluyen fallos en los actuadores, la ausencia de los mismos por consideraciones de diseño, exceso de peso, reducción de costos, etc.

El fallo en los actuadores de un sistema físico es un problema de mucho interés para la teoría de control moderna debido a que resulta imposible tener un control directo sobre el grado de libertad no actuado, de modo que el control de estos se debe realizar (si es posible) por medio de los actuadores restantes.

La fricción fue estudiada ampliamente en la ingeniería mecánica clásica y últimamente ha tenido un fuerte resurgimiento. Aparte de la curiosidad intelectual, esto se debe a grandes necesidades en la ingeniería en un amplio rango de industrias que van desde los discos duros hasta los vehículos.

La fricción es muy importante para los ingenieros de control, por ejemplo en el diseño de servo mecanismos de alta precisión, robots, sistemas neumáticos e hidráulicos y sistemas de frenos antibloqueo (ABS) para automóviles. La fricción es altamente no lineal y puede causar errores de estado estacionario, ciclos límite y un desempeño pobre. Por lo tanto, es importante para los ingenieros de control entender los fenómenos de fricción y como lidiar con ellos. Con la potencia computacional actual es posible en muchos casos lidiar efectivamente con la fricción. Esto tiene un gran potencial en el mejoramiento de la calidad, economía y seguridad de un sistema. Uno de los objetivos de este trabajo es ilustrar los efectos de la fricción, la compensación de fricción y explotar las características de un nuevo modelo dinámico de fricción, el modelo de LuGre (De Wit et al., 1995). Los resultados son comparados con compensadores de fricción clásicos.

La implementación de las técnicas de control mencionadas anteriormente se realiza utilizando el **toolbox xpc target** de Matlab.

1. EL PÉNDULO DE FURUTA

El péndulo de Furuta se muestra en la Figura 1. Consta de dos cuerpos inerciales conectados: un pilar central con momento de inercia *J*, rígidamente conectado a un brazo horizontal de longitud l_a y masa homogéneamente distribuida en línea m_a. El péndulo de longitud l_p y masa homogéneamente distribuida en línea m_p. El ángulo del péndulo, θ, ha sido definido como cero en la posición vertical arriba, y positivo, cuando el péndulo se mueve en la dirección de las manecillas del reloj. El ángulo del brazo, ϕ, se ha definido positivo cuando el brazo se mueve en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Figura 1. El péndulo de Furuta

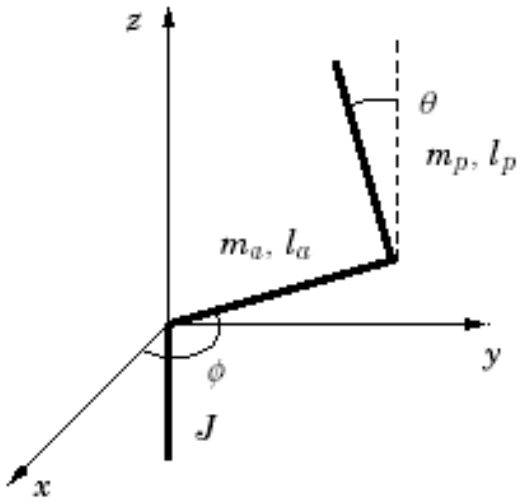


Figura 2. Vista general del péndulo de Furuta desarrollado.

1.1 MODELO MATEMATICO

La obtención del modelo es basada en la teoría de Euler-Lagrange (Gafvert M., 1998).

1.1.1 Cinemática La posición de un punto P sobre el péndulo puede ser descrito por el vector de posición

$$r(r_a, r_p) = (r_x(r_a, r_p), r_y(r_a, r_p), r_z(r_a, r_p))^T \tag{1}$$

con

$$\begin{aligned} r_x(r_a, r_p) &= r_a \cdot \cos\phi - r_p \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta \\ r_y(r_a, r_p) &= r_a \cdot \sin\phi + r_p \sin\theta \cdot \cos\phi \\ r_z(r_a, r_p) &= r_p \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

La variable r_a es la posición radial del brazo, y r_p es la posición radial del péndulo. Las distancias radiales son medidas desde el centro de rotación de los cuerpos. Tomando derivadas respecto al tiempo de (1) se obtiene una expresión para la velocidad

$$v(r_a, r_p) = (v_x(r_a, r_p), v_y(r_a, r_p), v_z(r_a, r_p))^T \tag{3}$$

de un punto P sobre el péndulo, con

$$\begin{aligned} v_x(r_a, r_p) &= -r_a \cdot \sin\phi \cdot \dot{\phi} - r_p \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi \cdot \dot{\theta} - r_p \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi} \\ v_y(r_a, r_p) &= r_a \cdot \cos\phi \cdot \dot{\phi} + r_p \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \dot{\theta} - r_p \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \dot{\phi} \\ v_z(r_a, r_p) &= -r_p \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \tag{4}$$

Esto se usa luego para expresar el cuadrado de la magnitud de la velocidad de P:

$$v^2(r_a, r_p) = (r_a{}^2 + r_p{}^2 \cdot \sin^2\theta) \cdot \dot{\phi}^2 + 2 \cdot r_a \cdot r_p \cdot \cos\theta \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} + r_p{}^2 \cdot \dot{\theta}^2 \tag{5}$$

1.1.2 Expresiones de energía Expresiones para la energía cinética y potencial son obtenidas en esta sección. La energía cinética es obtenida a partir de la solución de la integral

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm \tag{6}$$

usando (5), y la energía potencial al resolver

$$V = g\int r_z dm \tag{7}$$

usando (1). Las expresiones son obtenidas para cada cuerpo separadamente.

Pilar central

$$2T_c = J\,\dot{\varphi}^2 \tag{8}$$

$$V_c = 0; \tag{9}$$

Brazo horizontal

$$2T_c = \int_0^{la} v^2(s,0) m_a / l_a ds \tag{10}$$

$$= \frac{1}{3} m_a l_a{}^2\,\dot{\varphi}^2 \tag{11}$$

$$V_a = 0; \tag{12}$$

Brazo pendular

$$2T_p = \int_0^{lp} v^2(r_a, s) m_p / l_p ds \tag{13}$$

$$= m_p(l_a^2 + \frac{1}{3}l_p^2 \sin^2\theta)\dot{\varphi}^2 + m_p l_a l_p \cos\theta \dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{1}{3}m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \quad (14)$$

$$V_p = g\int_0^{lp} r_z(l_a, s)m_p / l_p ds \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2}m_p g l_p \cos\theta \quad (16)$$

La energía cinética total del péndulo invertido rotacional está dada por

$$T = T_c + T_a + T_p \quad (17)$$

y la energía potencial total por

$$V = V_c + V_a + V_p \quad (18)$$

1.1.3 Ecuaciones de movimiento Formulando el Lagrangiano

$$L = T - V \quad (19)$$

las ecuaciones del movimiento están dadas por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (20)$$

siendo τ_ϕ el torque externo aplicado al brazo horizontal. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(J + \left(\frac{1}{3} m_a + m_p \right) l_a{}^2 + \frac{1}{3} m_p l_p{}^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi} + \frac{1}{2} m_p l_a l_p \cos\theta \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{3} m_p l_p{}^2 \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m_p l_a l_p \sin\theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_p g l_p \sin\theta \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m_p l_a l_p \cos\theta \dot{\phi} + \frac{1}{3} m_p l_p{}^2 \dot{\theta}$$

Insertando (21) en (20) e introduciendo

$$\alpha = J + (\frac{1}{3} m_a + m_p) l_a{}^2 \qquad \beta = \frac{1}{3} m_p l_p{}^2$$

$$\gamma = \frac{1}{2} m_p l_a l_p \qquad \delta = \frac{1}{2} m_p g l_p \tag{22}$$

resultan las ecuaciones de movimiento para el sistema:

$$(\alpha + \beta \sin^2\theta) \ddot{\phi} + \gamma \cos\theta \ddot{\theta} + 2\beta \cos\theta \sin\theta \dot{\phi} \dot{\theta} - \gamma \sin\theta \dot{\theta}^2 = \tau_\phi \tag{23}$$

$$\gamma \cos\theta \ddot{\phi} + \beta \ddot{\theta} - \beta \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 - \delta \sin\theta = 0$$

Teniendo en cuenta que el par de control se genera por un motor de corriente continua controlado por voltaje:

$$V = R \cdot I + L\frac{di}{dt} + K_e \cdot \dot{\phi} \Rightarrow I = \frac{V}{R} - \frac{K_e}{R} \cdot \dot{\phi} \tag{24}$$

donde R, K_e y L corresponden a las constantes eléctricas del motor.
En la expresión anterior se desprecia el efecto inductivo en el motor (por ser muy pequeño) para simplificar el modelo.

Considerando que el par es proporcional a la corriente:

$$\tau_\phi = K_t \cdot I \Rightarrow \tau = \frac{K_e}{R} \cdot V - \frac{K_e{}^2}{R} \cdot \dot{\phi} \tag{25}$$

Debido a que en los motores de corriente de continua el valor de Kt y el valor de Ke son casi idénticos, se reemplaza Kt por Ke en la expresión anterior.

1.1.4 Representación en espacio de estado Introduciendo las variables de estado $x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$**,** las ecuaciones de movimiento (23) pueden reescribirse de una forma apropiada para integración y para el diseño de controladores en el espacio de estado:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{\beta\gamma\left(\sin^2\theta - 1\right)\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 - 2\beta^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta\gamma\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \gamma\delta\cos\theta\sin\theta + \beta\tau_\varphi}{\alpha\beta - \gamma^2 + \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\sin^2\theta} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{\beta\left(\alpha + \beta\sin^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 + 2\beta\gamma\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} - \gamma^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \delta\left(\alpha + \beta\sin^2\theta\right)\sin\theta - \gamma\cos\theta\tau_\varphi}{\alpha\beta - \gamma^2 + \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\sin^2\theta}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

1.2 PUNTOS DE EQUILIBRIO

Igualando las derivadas de las variables de estado en la representación (26), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas no lineales:

$$
\begin{aligned}
0 &= x_2 \\
0 &= \cos\theta\sin\theta \\
0 &= x_4 \\
0 &= \left(\alpha + \beta\sin^2\theta\right)\left(\delta\sin\theta\right)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema son $\left(x_1, 0, \theta_0, 0\right)$

Donde $\theta_0 = k\pi \quad \text{con} \quad k \in Z$

1.3 LINEALIZACION

Sea

$$
\frac{dx}{dt} = f(x, \tau) \tag{28}
$$

con f definida de forma apropiada. El modelo linealizado en el punto de equilibrio

$$x_0 = \left(\phi_0, \dot{\phi}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0 \right), \tau_0 = (0,0) \tag{29}$$

se obtiene a partir de

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 \delta x + \frac{\partial f}{\partial \tau} \Big|_0 \tau = A\delta x + B\tau \tag{30}$$

con $\delta x = x - x_0$

Para $x_0 = (0,0,0,0)$ lo anterior origina

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\delta\gamma}{\alpha\beta - \gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\delta}{\alpha\beta - \gamma^2} & \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta}{\alpha\beta - \gamma^2} \\ 0 \\ \frac{-\gamma}{\alpha\beta - \gamma^2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

Con valores propios

$$\left\{ 0,0,\pm\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta - \gamma^2}} \right\} \tag{32}$$

El sistema linealizado posee un valor propio en la parte derecha del semi-plano complejo. Basado en el método de linealización de Lyapunov se puede concluir que el punto de equilibrio $x_0 = (0,0,0,0)$ es inestable.

Para $x_0 = (0,0,\pi,0)$ lo anterior origina

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\delta\gamma}{\alpha\beta-\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\alpha\delta}{\alpha\beta-\gamma^2} & \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\beta}{\alpha\beta-\gamma^2} \\ 0 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha\beta-\gamma^2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Con valores propios

$$\left\{0,0,\pm i\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta-\gamma^2}}\right\} \tag{34}$$

El sistema linealizado posee cuatro valores propios sobre el eje $j\omega$**,** así que no se puede llegar a una conclusión sobre la estabilidad de este punto de equilibrio a partir de la aproximación lineal.

1.4 MODELOS DE FRICCION

La fricción ocurre en todos los sistemas mecánicos, ej. rodamientos, transmisiones, cilindros neumáticos e hidráulicos, válvulas, frenos y ruedas. En el péndulo utilizado para los experimentos, la fricción es una complicación que no puede despreciarse. Nótese, sin embargo, que la fricción en el motor es más notable que en el punto de pivote del péndulo por lo cual se despreciará este última. La fricción es un fenómeno natural bastante difícil de modelar y aún no es completamente comprendido. Los modelos de fricción clásicos son descritos por mapeos estáticos entre velocidad y fuerza de fricción. Estos modelos clásicos no explican el comportamiento histerético cuando se estudia la fricción para velocidades no estacionarias, las variaciones en la fuerza de ruptura ni los pequeños desplazamientos que ocurren en la interfase de contacto durante la fase de fricción estática. Estudios recientes, (Olsson H., 1996) muestran que es

necesario un modelo de fricción dinámico para describir el fenómeno de fricción de forma precisa.

En esta sección se presentarán dos modelos clásicos de fricción y un nuevo modelo dinámico de fricción (De Wit et. Al 1995) apropiado para el control.

1.4.1 Modelos de fricción clásicos

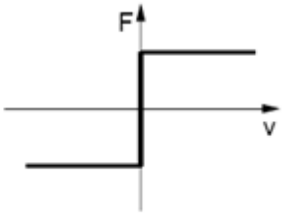
Los modelos de fricción clásicos están conformados por diferentes componentes donde cada uno se ocupa de ciertos aspectos de la fuerza de fricción. La idea princial es que la fricción se opone al movimiento y que su magnitud es independiente de la velocidad y del área de contacto.

1.4.1.1 Modelo de fricción de Coulomb con fricción estática

El modelo mas común que se utiliza es el modelo de fricción de Coulomb (Coulomb 1785)

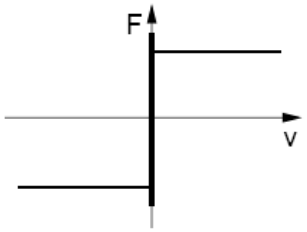
$$F = F_C \operatorname{sgn} \dot{\varphi} \tag{35}$$

Figura 3. Fricción de Coulomb



Donde la fuerza de fricción Fc es proporcional a la carga normal, ej. $F_C = \mu F_N$. Nótese que este modelo es un modelo ideal de relé. El modelo de fricción de Coulomb no describe que sucede cuando la velocidad es cero. Puede ser cero, o puede tomar algún valor entre el intervalo –Fc y Fc, dependiendo de como se defina la función signo. Una forma popular para resolver esto es introducir "Stiction" (Stiction es un modo informal de escribir Static Friction) la cual describe la fuerza de fricción en el reposo. Por lo tanto, se asume que si la velocidad es cero y la fuerza total que actúa sobre el sistema es menor que la fuerza de fricción estática Fs, entonces la velocidad permanece en cero. El movimiento ocurre cuando la fuerza aplicada es mayor que Fs.

Figura 4. Fricción de Coulomb con fricción estática



Un estimativo de la fuerza de fricción obtenida de este modelo es

$$\hat{F} = F_s \operatorname{sgn}\left(\bar{F}\right) \text{ si } \dot{\phi} = 0$$

$$\hat{F} = F_c \operatorname{sgn}\left(\dot{\varphi}\right) \text{ si } \dot{\phi} \neq 0 \qquad (36)$$

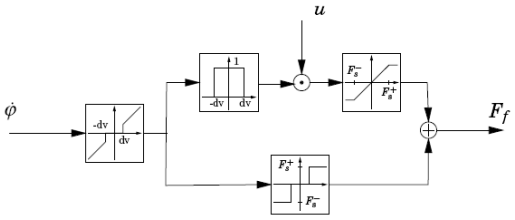
donde $\bar{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre la junta del brazo.

Un problema con este modelo para simulaciones o propósitos de control es el de detectar cuando la velocidad es cero. Una solución para esto es el modelo presentado por Karnopp (Karnopp 1985).

1.4.1.2 Modelo de fricción de Karnopp

Este modelo fue desarrollado para solucionar el problema de detectar cuando la velocidad es cero y para evitar la conmutación entre diferentes ecuaciones para adhesión y deslizamiento. En la figura 5 se muestra un esquema de este modelo.

Figura 5. Esquema del modelo de fricción de Karnopp

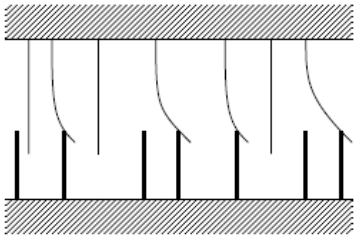


El modelo define un intervalo de velocidad cero, $|\upsilon| < DV$. Para velocidades dentro de este intervalo, la velocidad puede cambiar y ser diferente de cero pero la salida del bloque se mantiene en cero por una zona muerta. Dependiendo de si $|\upsilon| < DV$ o no, la fuerza de fricción es una versión saturada de la fuerza externa o una función estática arbitraria de la velocidad.

1.4.2 Modelo de fricción dinámico de LuGre

Recientemente, ha habido un interés significativo en los modelos de fricción dinámicos. Esto se debe a la curiosidad intelectural, a la demanda de servos de precisión en un amplio rango de industrias y los avances de hardware que hacen posible la implementación de compensadores de fricción.

Figura 6. La interfaz de fricción entre dos superficies es imaginada como un contacto entre cerdas. Por simplicidad las cerdas inferiores se muestran rígidas.



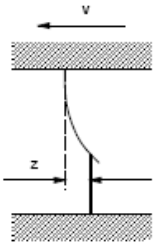
El modelo de LuGre es un modelo de fricción dinámico presentado en (De Wit et. Al 1995). En (Olsson H., 1996) se puede encontrar un análisis extenso del modelo y sus aplicaciones. Este modelo está relacionado con la interpretación del modelo de cerda de la fricción. La fricción se modela como la fuerza de deflección promedio de resortes elásticos. Cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deflectarán como resortes. Si la deflección es suficientemente grande, las cerdas empiezan a deslizar. La deflección promedio de la cerda para un movimiento en estado estable está determinada por la velocidad. Es más baja, a bajas velocidades, lo cual implica que la deflección en estado estado estable decrementa con el incremento de la velocidad. Esto modela el fenómeno donde las superficies se apartan debido a el lubricante y modela el efecto Stribeck. El modelo también incluye el fenómeno de variación de la fuerza de ruptura y el de retardo de fricción.

El modelo tiene la forma

$$\frac{dz}{dt} = \upsilon - \sigma_0 \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} z$$
$$g(\upsilon) = F_C + \left(F_S - F_C\right) e^{-(\upsilon/\upsilon_s)^2} \Big/ \sigma_0 \qquad (37)$$
$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt}$$

Donde z denota la deflexión promedio de la cerda

Figura 7. Deflexión promedio de la cerda z.



El parámetro σ_0 es la rigidez de las cerdas y σ_1 un coeficiente de amortiguamiento. La función $g(\upsilon)$ modela el efecto Stribeck (disminución de la fuerza de fricción al incrementar la velocidad a bajas velocidades) donde υ_s es la velocidad de Stribeck. El parámetro Fc corresponde a la fuerza de fricción de Coulomb y Fs a la fuerza de fricción estática.

2 VALIDACION EXPERIMENTAL DEL MODELO MATEMATICO

2.1 OBTENCIÓN DE LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS

Los valores de las masas y las longitudes del brazo y el péndulo se obtuvieron mediante medición directa. Los datos mecánicos y eléctricos del motor se obtuvieron a partir de la hoja de datos del fabricante.

Algunos valores de parámetros del modelo de fricción se obtuvieron mediante sintonización manual. Estos parámetros son la rigidez de la cerda σ_0, el coeficiente de amortiguamiento σ_1 y la velocidad de Stribeck.

Tabla 1. Valores de los parámetros del sistema

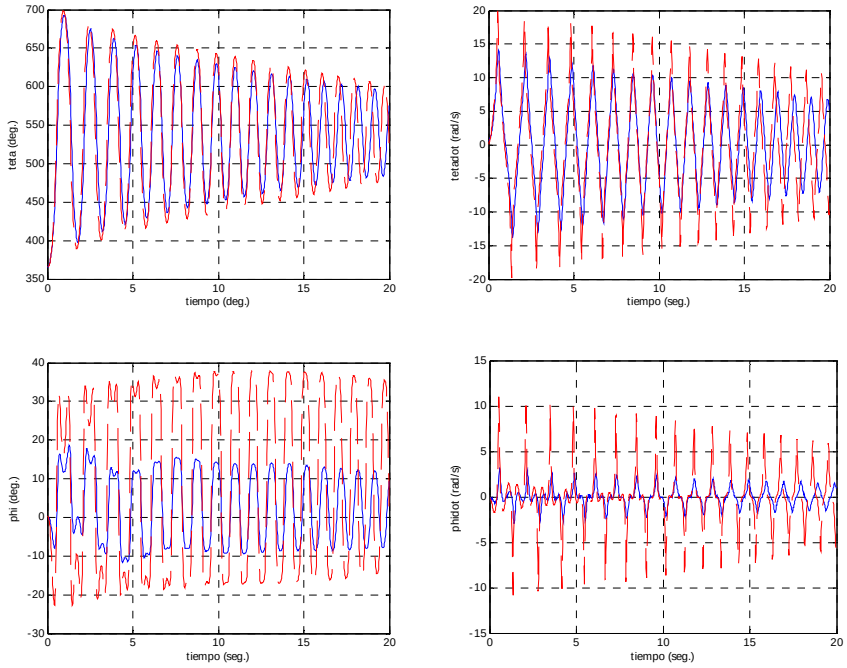
Parámetros del sistema	Valor	Unidades
Masa del Péndulo (m_p)	0.089	Kg
Masa del Brazo (m_a)	0.056	Kg
Longitud del Péndulo (l_p)	0.25	m
Longitud del Brazo (l_a)	0.35	m
Inercia del Motor (J)	8.47e-06	Kgm^2
Inercial del pilar central	30e-05	Kgm^2
Gravedad (g)	9.8	m / s^2
Constante de Torque en el Motor (K_t)	0.0424	Nm / A
Resistencia del Motor (R)	3.35	Ω
Torque de fricción de Coulomb	0.004	Nm
Torque de fricción estático	0.0045	Nm
Velocidad de Stribeck	0.001	m/s
Rigidez de la cerda	0.2	N/m

Parámetros del sistema	Valor	Unidades
Coeficiente de amortiguamiento	0.04	Ns/m

2.2 COMPARACIÓN ENTRE EL MODELO MATEMÁTICO Y EL PÉNDULO EXPERIMENTAL

Para verificar la validez del modelo matemático con el modelo de fricción de LuGre (37), se realizó una toma de datos en lazo abierto del péndulo experimental bajo cierta condición inicial conocida y se comparó con la respuesta del sistema de simulación bajo la misma condición.

Figura 8. Comparación de respuestas entre el sistema experimental (línea azul) y el sistema de simulación (línea roja) para la condición inicial $\theta_0 = 365\deg, \dot{\theta}_0 = 0.6283 rad/s, \phi_0 = 0.3516\deg, \dot{\phi}_0 = 0 rad/s$.



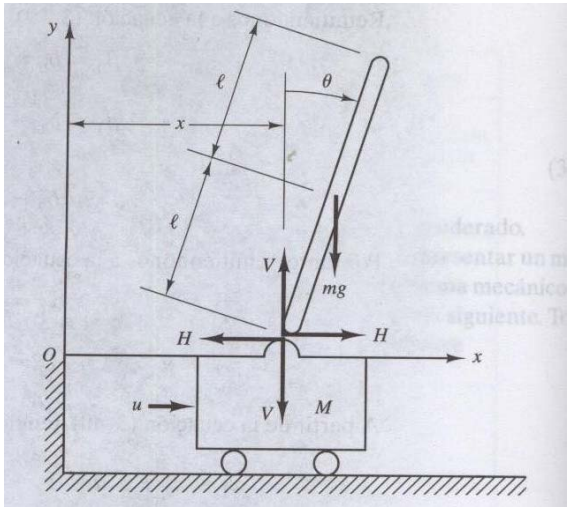
En la figura 8 se puede apreciar que el modelo matemático junto con la sintonización de los valores de los parámetros parece ser una buena aproximación de la dinámica real del péndulo de Furuta experimental.

3. CONTROL HIBRIDO PARA EL PÉNDULO DE FURUTA

3.1 SWING UP

En esta sección se utiliza un modelo simplificado del péndulo de Furuta. Este modelo simplificado desprecia los torques de reacción ejercidos desde el péndulo hacia el brazo, de esta forma, el control de energía del péndulo pueda estudiarse sin considerar la posición y la velocidad del brazo. El modelo obtenido de esta simplificación es de segundo orden.

Figura 9. Diagrama de cuerpo libre del péndulo



Sea m_p la masa del péndulo, J_p el momento de inercia del péndulo respecto al pivote y l_{cm} la distancia desde el pivote a su centro de masa. El ángulo entre la vertical y el péndulo es θ, donde θ es positivo en el sentido de las agujas del reloj. La aceleración de la gravedad es g y la aceleración del pivote es u. La aceleración u es positiva si es en la dirección positiva del eje x. La ecuaciones de movimiento para el péndulo son:

$$\sum F_x = m_p a_{xcm} = H = m_p \frac{d}{dt^2}\left(x + l_{cm}\sin\theta\right) \tag{38}$$

$$\sum F_y = m_p a_{ycm} = V - m_p g = m_p \frac{d}{dt^2}\left(l_{lcm}\cos\theta\right) \tag{39}$$

$$\sum T_{cm} = Vl_{cm}\sin\theta - Hl_{cm}\cos = I_{cm}\frac{d}{dt^2}\theta \tag{40}$$

H y V son las fuerzas de reacción ejercidas por el brazo sobre el péndulo.

De (38), (39) y (40) se obtiene la ecuación de movimiento del péndulo:

$$J_p \ddot{\theta} - m_p g l_{cm}\sin\theta + mul_{cm}\cos\theta = 0 \tag{41}$$

La estrategia utilizada es basada en el control por energía y es presentada en (Astrom y Furuta, 1996). La idea básica es incrementar la energía del sistema de tal manera que finalmente tenga suficiente energía para llegar a una región cercana al punto de equilibrio inestable. Allí, se realiza un intercambio a una ley de control local que estabiliza el péndulo.

La energía del péndulo sin controlador (u=0) es:

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + m_p g l_{cm}\left(\cos\theta - 1\right) \tag{42}$$

La energía total es la suma de la energía cinética y la energía potencial. Se ha definido que la energía potencial es cero cuando el péndulo está en la posición vertical superior.

3.1.1 Control de energía Una forma de llevar el péndulo a la posición vertical superior es incrementar su energía al valor correspondiente de energía en dicha posición. Esto corresponde a la trayectoria

$$E = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}^2 + m_p g l_{cm} (\cos\theta - 1) = 0 \tag{43}$$

La cual corresponde a la órbita homoclína del sistema. Es evidente que esta trayectoria contiene el punto $\dot{\theta} = 0, \theta = 0$.

Para realizar el control de energía es necesario entender como influencia la aceleración del pivote la energía del péndulo. Calculando la derivada de E respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dE}{dt} = J_p \dot{\theta} \ddot{\theta} - m_p g l_{cm} \dot{\theta} \sin\theta = -m_p u l_{cm} \dot{\theta} \cos\theta \tag{44}$$

En la anterior expresión se ha utilizado la ecuación (41). La ecuación (44) muestra que es fácil controlar la energía. El sistema es simplemente un integrador con ganancia variable. La controlabilidad se pierde en (44) cuando $\dot{\theta} = 0$ o $\theta = \pm\pi/2$, por ejemplo cuando el péndulo está horizontal o en el instante en el que el péndulo cambia de dirección. Para obtener la ley de control se utiliza el método de Lyapunov. Sea $V = (E - E_0)^2 / 2$ una función candidata de Lyapunov, al derivar se obtiene

$$\dot{V} = (E - E_0)\dot{E} = -m_p l_{cm} u (E - E_0) \dot{\theta} \cos\theta \tag{45}$$

Si se escoge

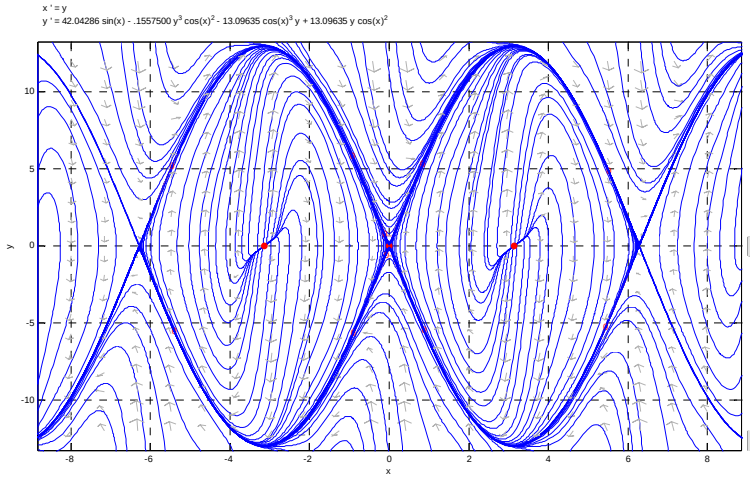
$$u = k\left(E - E_0\right)\dot{\theta}\cos\theta \tag{46}$$

se encuentra que

$$\dot{V} = -m_p l_{cm} k\left(\left(E - E_0\right)\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 \tag{47}$$

Con lo que $\dot{V}$ es semidefinida negativa. La función de Lyapunov tiende a cero siempre y cuando $\dot{\theta} \neq 0$ y $\cos\theta \neq 0$. Debido a que el péndulo no puede mantener una posición estacionaria con $\theta = \pm\pi/2$ la estrategia (46) lleva la energía hacia el valor deseado E_0.

Figura 10. Retrato de fase del sistema con control de energía



En la figura 10 se puede apreciar que las trayectorias del sistema tienden a la curva de energía cero. El sistema controlado conserva los puntos de equilibrio en estado “natural”. El punto de equilibrio $(0,0)$ es una silla por lo cual se hace necesario utilizar una estrategia diferente para estabilizar el origen del sistema. El punto de equilibrio $(\pm\pi,0)$ es una fuente nodal.

Existen otras leyes de control que consiguen llevar la energía del sistema al valor deseado. Para cambiar la energía lo más rápido posible la magnitud de la señal de control debe ser lo más grande posible. Esto se consigue con la ley de control

$$u = u_{máx}\, sign\left((E - E_0)\dot{\theta}\cos\theta \right) \tag{48}$$

La cual lleva la función $V = |E - E_0|$ a cero y E hacia E_0. La ley de control (48) puede resultar en chatering. Esto puede evitarse con la ley de control

$$u = k(E - E_0)\, sign\left(\dot{\theta}\cos\theta \right) \tag{49}$$

Para valores grandes de k, la estrategia (49) se comporta de forma similar a la estrategia (48) que proporciona el máximo incremento o decremento de energía.

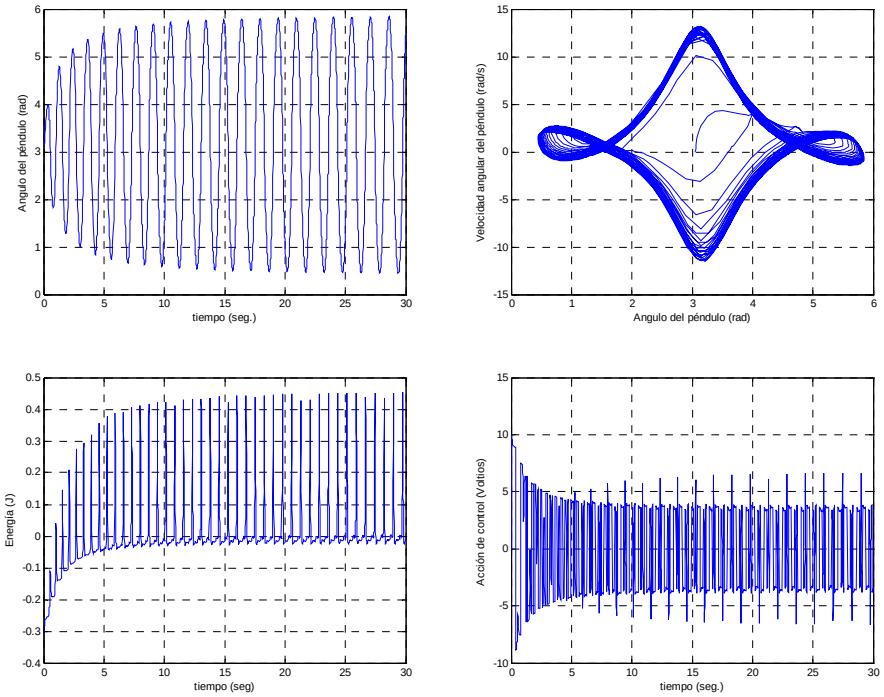
La ley de control presentada en (49) resulta en un swing up que hace que el péndulo pase por el origen. Sin embargo, queda estabilizar localmente el péndulo alrededor de su posición de equilibrio inestable. Para realizar el intercambio entre la ley de control del swing up y la ley de control local se utiliza una estrategia de conmutación muy simple. Si el péndulo se encuentra en una posición angular

menor a los +-15° el controlador local entra en funcionamiento de lo contrario funcionará el controlador swing up. En el caso en el que el sistema pase por el origen con exceso de energía debido a una condición inicial “fuerte” y el controlador local no logre estabilizar el péndulo y escape del dominio de atracción, el controlador swing up entrará en funcionamiento e intentará llevar el péndulo nuevamente hasta arriba.

Hasta ahora el control de energía planteado anteriormente para realizar el swing up no parece presentar problemas. Sin embargo, al implementar esta técnica en el modelo de cuarto orden del péndulo de Furuta se presentan algunos casos donde la ley falla.

Una primera conclusión a partir de simulaciones y experimentos en el péndulo real es que la ley de control (49) basada en el modelo simplificado de dimensión dos necesita ajustarse de forma cuidadosa. Se ha encontrado que para valores de k inferiores a 23 y $E_0 = 0.15$, el estado del sistema no pasa cerca al origen. Por supuesto, el controlador local nunca tendrá la oportunidad de funcionar.

Figura 11. Comportamiento patológico del sistema con la ley de control (51) con k=22 y $E_0 = 0.15$.



3.2 REGULADOR LINEAL CUADRATICO (LQR)

En la anterior sección se presentó que con un buen ajuste de los parámetros del controlador swing up se logra llevar el péndulo a una región cercana al origen. También se demostró que el origen es inestable lo que hace necesario utilizar una estrategia de control diferente para estabilizarlo. Debido a que todos los estados son medibles, se utiliza una técnica de control lineal (LQR) por realimentación del estado para estabilizar localmente el punto de equilibrio $(0,0,0,0)$.

El modelo lineal utilizado se obtiene al linealizar (26) en el punto de equilibrio $(0,0,0,0)$. Teniendo en cuenta la expresión (25) se obtiene como entrada al sistema el voltaje aplicado a los terminales del motor. La representación en el espacio de estado de tiempo continuo al reemplazar los valores de los parámetros de la tabla 1 es:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u \tag{50}$$

donde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.182 & -63.803 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.195 & 110.4 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.29 \\ 0 \\ -4.6 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Utilizando el método de invarianza al escalón con un tiempo de muestreo de 10 ms se obtiene la siguiente representación en el espacio de estado de tiempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{52}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.0099 & -0.0032 & -1.0635e-5 \\ 0 & 0.9982 & -0.6387 & -0.0032 \\ 0 & 9.7527e-6 & 1.0055 & 0.010 \\ 0 & 0.0019 & 1.1054 & 1.0055 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0429 \\ -0.0002 \\ -0.046 \end{bmatrix} \tag{53}$$

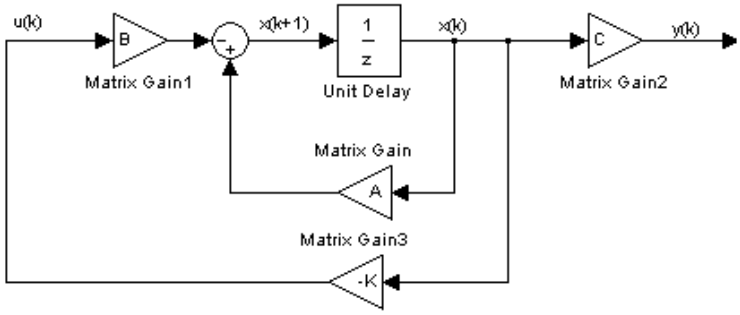
La matriz de controlabilidad del sistema (52) está dada por

$$Co = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0006 & 0.0010 & 0.0015 \\ 0.0429 & 0.0431 & 0.0437 & 0.0444 \\ -0.0002 & -0.0007 & -0.0012 & -0.0016 \\ -0.0460 & -0.0464 & -0.0473 & -0.0488 \end{bmatrix} \quad (54)$$

El rango de la matriz Co es 4. Por lo tanto, el sistema discreto es controlable.

El esquema de control por realimentación del estado utilizado se muestra en la figura 12.

Figura 12. Esquema de control por realimentación del estado.



Para obtener la matriz de ganancia de realimentación de estado K se utiliza el control óptimo LQ. Este regulador calcula la matriz de ganancia óptima tal que la ley de realimentación de estado $u(k) = -Kx(k)$ minimiza la función de costo

$$J = \sum x^T Qx + u^T Ru \quad (55)$$

Los parámetros de diseño del diseño LQ son las matrices de peso Q y R. Q se

utiliza como pesos de penalización para los estados y R para penalizar la señal de control.

Las matrices de diseño utilizadas para los experimentos son:

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$R = 10 \tag{57}$$

Este diseño arroja el vector de realimentación del estado

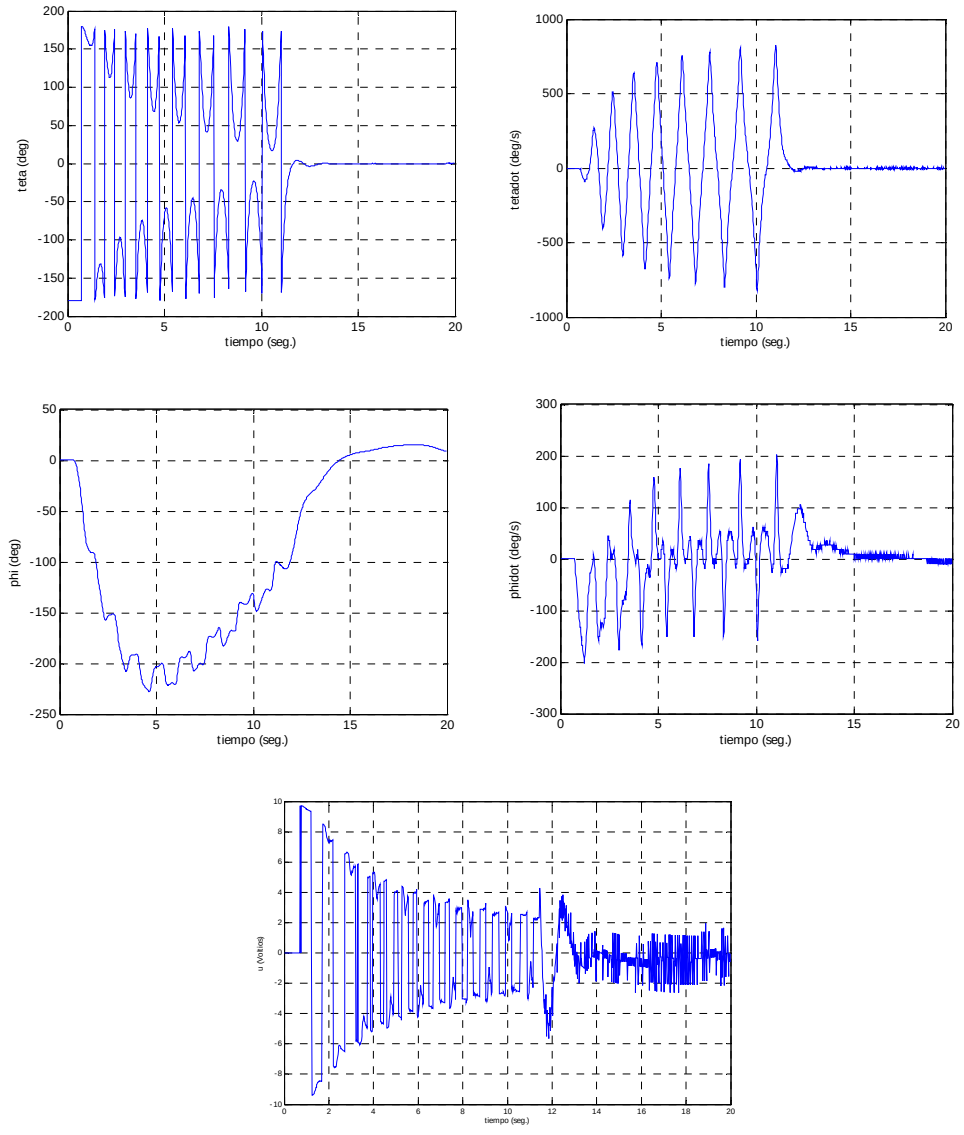
$$K = [-1.923 \quad -3.043 \quad -68.44 \quad -8.66] \tag{58}$$

y los polos de lazo cerrado

$$[0.822 \quad 0.99 \quad 0.964 \quad 0.939] \tag{59}$$

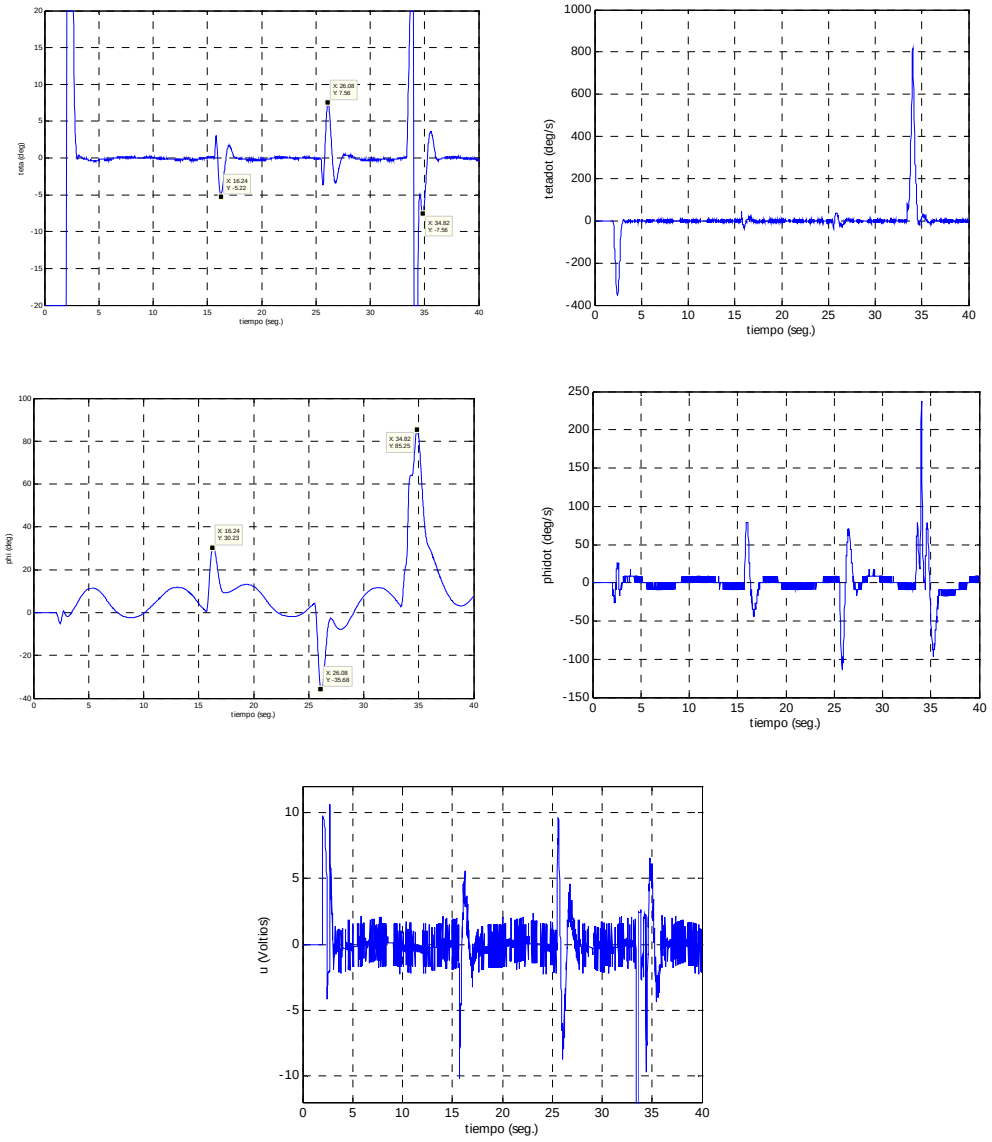
A continuación se presentan las gráficas de respuesta del sistema experimental con control híbrido para la condición inicial $\theta_0 = -179.8\deg, \dot{\theta}_0 = 0 rad/s, \phi_0 = 0\deg, \dot{\phi}_0 = 0 rad/s$. Los valores de los parámetros para el controlador swing up son $E_0 = 0.1$ y $k = 24$.

Figura 13. Respuesta del sistema experimental con control híbrido (swing up + LQR) para la condición inicial $\theta_0 = -179.8\,\text{deg}, \dot{\theta}_0 = 0 rad/s, \phi_0 = 0\,\text{deg}, \dot{\phi}_0 = 0 rad/s$.



A continuación se realiza una nueva toma de datos donde se lleva manualmente el péndulo hasta su posición invertida y se perturba aplicando una fuerza en su extremo.

Figura 14. Respuesta del sistema experimental con control híbrido (swing up + LQR) ante perturbaciones.



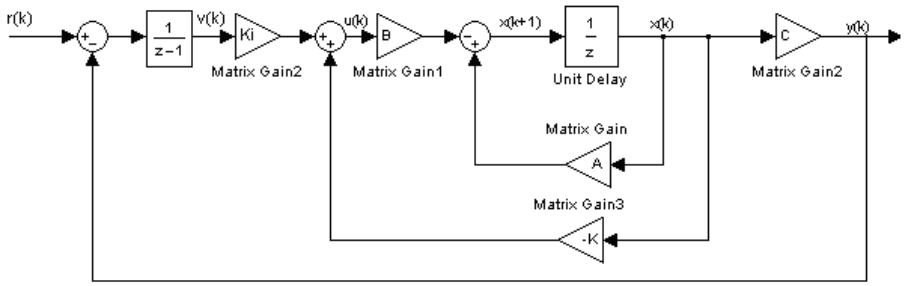
En la figura 14 se puede observar la respuesta del sistema ante perturbaciones ocasionadas por la aplicación de una fuerza externa sobre el extremo del péndulo. Tal como se puede observar, el sistema es capaz de mantener el equilibrio a pesar de las perturbaciones en t = 16.24 s y t = 26.08 s. Para ello, el brazo se tiene que mover hasta 30.23 grados para que el péndulo recupere el equilibrio y luego hasta -35.68 grados. En t = 35 s la perturbación hace caer el péndulo y el swing up lo lleva nuevamente hasta una región cercana al punto de equilibrio inestable donde el controlador LQR lo regula.

3.3 CONTROLADOR PI VECTORIAL

En la sección 3.2 se utilizó un controlador LQR para llevar el estado del sistema a cero. Sin embargo, este tipo de diseño no considera directamente las especificaciones estáticas. Para eliminar errores de estado estacionario de forma aceptable se requiere usar un pre compensador; pero este diseño no es robusto para reducir los errores. Una forma de conseguir un desempeño robusto consiste en utilizar acción integral.

En esta sección se pretende diseñar un controlador lineal para lograr que el brazo siga referencias de posición tipo escalón manteniendo el péndulo en su posición invertida.

Figura 15. Esquema de control PI vectorial digital.



La representación en tiempo discreto de la planta está dada por (52), (53) y (60)

$$y(k) = Cx(k) \tag{60}$$

Para este diseño, la matriz de salida está dada por $C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

La ley de control para el PI Vectorial digital está dada por

$$u(k) = -Kx(k) + Kiv(k) \tag{61}$$

donde

$$\begin{bmatrix} K & Ki \end{bmatrix} = \left[\hat{K} + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} A - I & B \\ CA & CB \end{bmatrix}^{-1} \tag{62}$$

$$\xi(k+1) = \hat{A}\xi(k) + \hat{B}w(k) \tag{63}$$

$$w(k) = -\hat{K}\xi(k) \tag{64}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{65}$$

Los polos de lazo cerrado deseados son

$$[0.822 \quad 0.939 \quad 0.964 \quad 0.990 \quad 0.998] \tag{66}$$

lo cual arroja

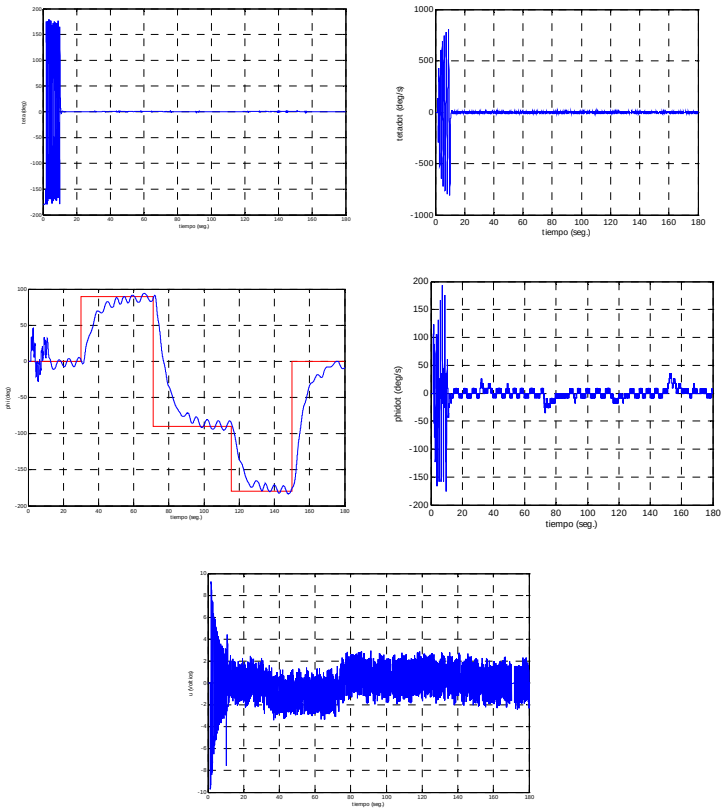
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0.0027 & -0.0357 & -7.6532 & -0.7334 & -0.7071 \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$K = \begin{bmatrix} -2.3265 & -3.2023 & -69.577 & -8.8338 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$Ki = -0.0027 \tag{69}$$

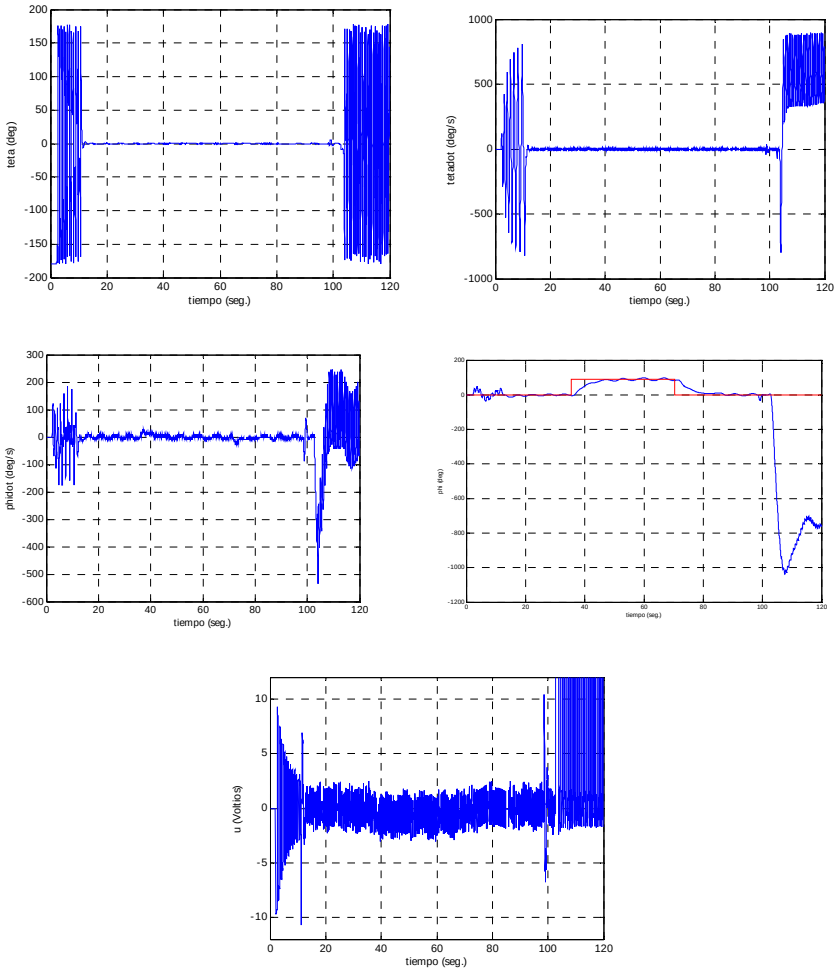
A continuación se realiza una toma de datos del sistema experimental con el controlador swing up y el controlador PI Vectorial para comprobar la habilidad de este último para seguir referencias de posición tipo escalón.

Figura 16. Respuesta del sistema experimental con control híbrido (swing up + PI Vectorial) ante diferentes valores de referencia para la posición del brazo.



En la figura 16 se puede apreciar que el sistema es capaz de seguir referencias tipo escalón para la posición del brazo de forma aceptable. Hasta ahora este diseño para no presentar ningún problema. Sin embargo, aún no se ha estudiado la estabilidad del sistema ante perturbaciones. Las siguientes figuras muestran la respuesta del sistema ante perturbaciones.

Figura 17. Respuesta del sistema con control híbrido (Swing up + PI Vectorial) ante una perturbación en t =103 s.

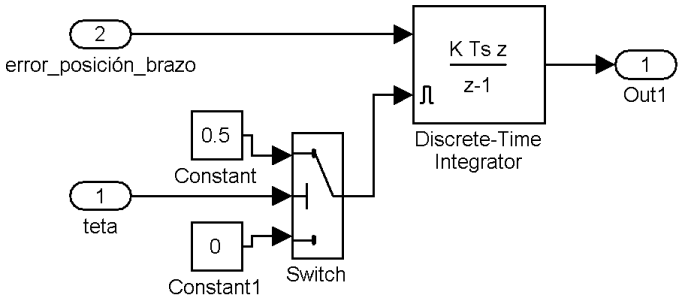


En la figura 17 se puede apreciar que una perturbación ocasionada por una fuerza externa sobre el extremo del péndulo desestabiliza la posición invertida y el sistema nunca vuelve a recuperar la estabilidad en dicha posición. Un análisis más profundo revela que esto es causado por el efecto del wind-up en el integrador del PI Vectorial. Al utilizar control híbrido, se debe tener en cuenta que si el controlador local posee acción integral, esta debe apagarse cuando el péndulo se

encuentre en la fase del swing up para evitar el fenómeno de wind-up que ocasiona inestabilidad en el péndulo de Furuta.

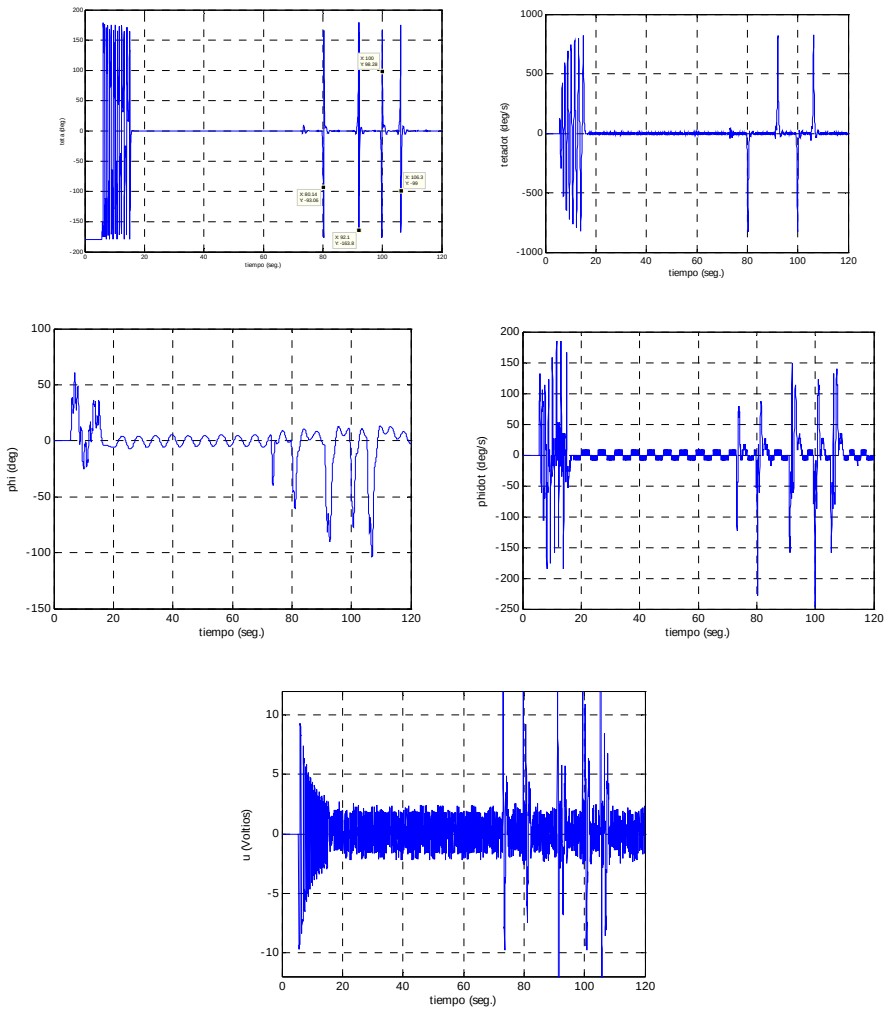
3.3.1 Controlador PI Vectorial con anti wind-up Para implementar el controlador PI Vectorial con anti wind up, se reemplaza el integrador en tiempo discreto por el siguiente integrador condicional

Figura 18. Integrador condicionado para evitar el wind up



El integrador de la figura 18 entrará en funcionamiento si el péndulo se encuentra en el dominio de atracción del controlador local $(\pm 15 \deg \text{ para } \theta)$ y se apagará por fuera de él.

Figura 19. Respuesta del sistema con control híbrido (swing up + PI Vectorial) con antiwind up ante cuatro perturbaciones en t = 80 s, t = 92 s, t = 98 s y t=106 s.



En la figura 19 se puede apreciar que el controlador PI Vectorial con anti wind up logra estabilizar el péndulo en su posición invertida a pesar de perturbaciones tan fuertes que hacen caer el péndulo.

Es importante resaltar que para implementar el controlador LQR y PI Vectorial es necesario realizar una instrumentación de la señal del ángulo θ. Esta señal debe transformarse de tal forma que el ángulo teta siempre se encuentre entre el rango $-\pi$ rad $+\pi$ rad sin importar el número de vueltas que pueda llegar a realizar el péndulo. Esto se debe, a que por su naturaleza, los controladores LQR y PI Vectorial son controladores lineales y esperan valores de las variables de estado ligeramente desviados del punto de linealización $(0,0,0,0)$. Por ejemplo, si esto no se realizara, un valor de ángulo de 355 grados o 715 grados (desviación de 5 grados) ocasionaría un mal cálculo de la acción de control y el sistema no funcionaría. Para el controlador swing up, sin embargo, esta transformación es indiferente ya que para el cálculo de la acción de control, utiliza el coseno del ángulo θ.

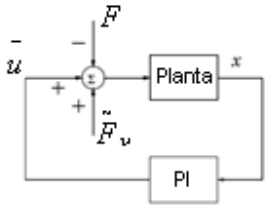
4. COMPENSACION DE FRICCION

El objetivo de esta sección es mejorar aún más el desempeño del controlador local diseñado en la sección 3.3. Se propone agregar una componente no lineal al controlador PI Vectorial para reducir el efecto de la fricción en la junta del brazo. Para esto, se utiliza un modelo de fricción y se obtiene un estimativo de la fuerza de fricción $\tilde{F}$ la cual se convierte a voltaje $\tilde{F}_v$ a través de la expresión (25) y se suma a la ley de control local.

$$\bar{u}(k) = -Kx(k) + Kiv(k) \tag{70}$$

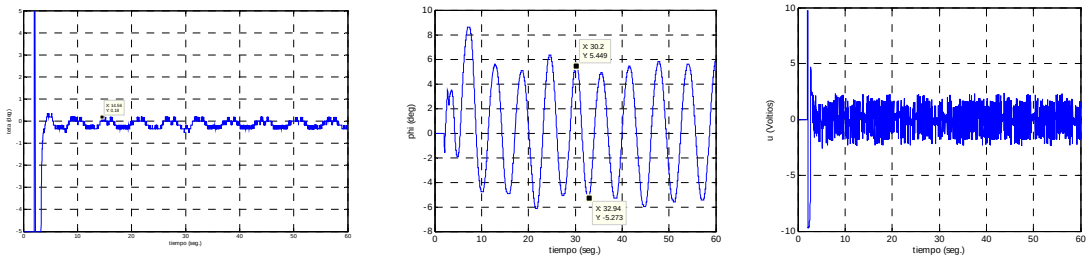
$$u = \bar{u} + \tilde{F}_v \tag{71}$$

Figura 20. Control PI Vectorial con compensación de fricción basada en modelo.



Debido a que la entrada de control y la fricción entran al sistema en el mismo lugar, el torque de fricción real se cancela si $\tilde{F}_v - F = 0$.

Figura 21. Efecto de la fricción sobre el sistema de control PI Vectorial



En la figura 21 se puede apreciar el efecto de la fricción sobre el desempeño del sistema de control PI Vectorial. La fricción en la junta del brazo ocasiona que éste oscile con una amplitud aproximada de 11 grados.

4.1 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE COULOMB

Para obtener un estimativo del torque de fricción en la junta del brazo se utiliza el modelo

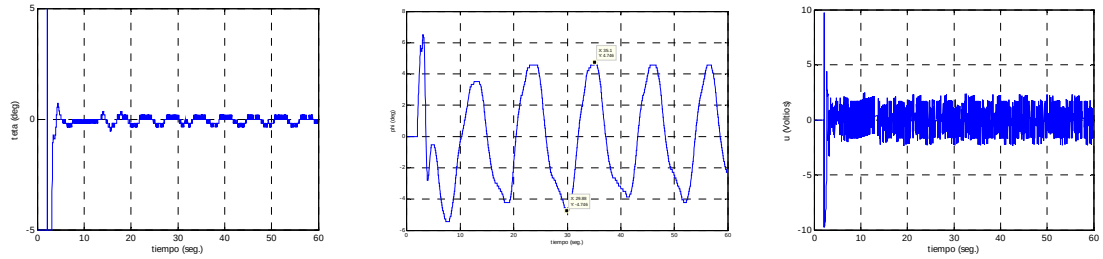
$$\tau_F = \tau_C \operatorname{sgn} \dot{\varphi} \tag{72}$$

Donde τ_c es el torque de fricción de Coulomb y es igual 0.004 Nm.

Para producir un torque aproximadamente igual a τ_F se utiliza la expresión (25). Por lo tanto, la señal de voltaje que debe sumarse a la acción de control del PI Vectorial es

$$\tilde{F}_\upsilon = \frac{\tau_c \operatorname{sgn}\left(\dot{\phi}\right) R}{K} \tag{73}$$

Figura 22. Respuesta del sistema en la posición invertida con compensación de fricción de Coulomb

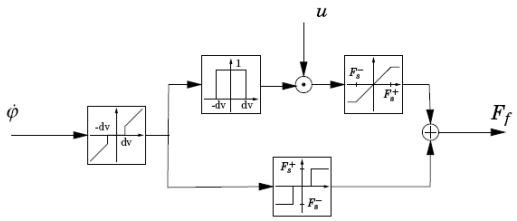


En la figura 22 se puede apreciar que se logró reducir en 2 grados aproximadamente la oscilación del brazo con una compensación de fricción basada en el modelo de fricción de Coulomb en comparación con la respuesta sin compensación de fricción.

4.2 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE KARNOPP

Para la estimación del torque de fricción se utiliza el esquema de la figura 23

Figura 23. Esquema del modelo de fricción de Karnoop



El valor de dv utilizado es 0.04 rad/s, el nivel de fricción estática es $\tau_S = 0.0045$ y el nivel de fricción de Coulomb es $\tau_C = 0.004$.

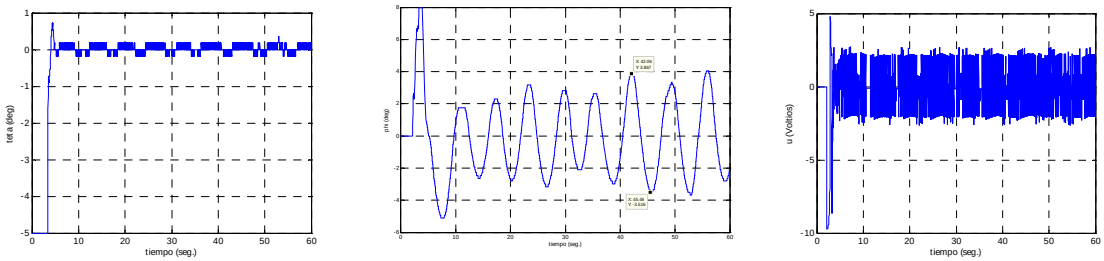
Para el caso en que $abs\left(\dot{\phi}\right) < dv$

$$\tilde{F}_{\upsilon} = sat_{\tau_s}\left(\bar{u}\right) \tag{74}$$

En caso contrario

$$\tilde{F}_{\upsilon} = \frac{\tau_c \operatorname{sgn}\left(\dot{\phi}\right) R}{K} \tag{75}$$

Figura 24. Respuesta del sistema en la posición invertida con compensación de fricción de Karnopp



En la figura 24 se puede apreciar que se logró reducir en 4 grados aproximadamente la oscilación del brazo con una compensación de fricción basada en el modelo de fricción de Karnopp en comparación con la respuesta sin compensación de fricción.

4.3 COMPENSACIÓN DE FRICCIÓN BASADA EN EL MODELO DE FRICCIÓN DE LUGRE

Una motivación detrás del modelo de LuGre es ofrecer un modelo de fricción de Coulomb con fricción estática regularizado. Este modelo captura muchas de las

características de la fricción tales como el incremento del torque de fricción a bajas velocidades. La forma más común utilizada es (76)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \upsilon - \sigma_0 \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} z \\ g(\upsilon) &= F_C + (F_S - F_C) e^{-(\nu/\nu_s)^2} / \sigma_0 \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{76}$$

Con $F_s, F_c, \upsilon_s, \sigma_0, \sigma_1$ parámetros positivos.

Para integrar al modelo las propiedades intuitivas del modelo de cerda, la deflexión z debe ser finita. Es por esto, que el modelo posee la siguiente propiedad:

Propiedad 1: Asuma que $0 < g(\upsilon) \le a$. Si $|z(0)| \le a$, entonces $|z(t)| \le a \ \forall t \ge 0$.

Demostración: Sea $V(t) = z^2 / 2$, entonces la derivada temporal de V evaluada a lo largo de la solución de () es

$$\frac{dV}{dt} = z\left(\upsilon - \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} z \right) \tag{77}$$

$$\frac{dV}{dt} = -|\upsilon||z|\left(\frac{|z|}{g(\upsilon)} - \operatorname{sgn}(\upsilon)\operatorname{sgn}(z) \right) \tag{78}$$

La derivada dV/dt es negativa cuando $|z| > g(\upsilon)$. Debido a que $g(\upsilon)$ es estrictamente positiva y acotada por a, se puede apreciar que el conjunto

$\Omega = \{z : |z| \le a\}$ es un conjunto invariante para las soluciones de (). Todas las soluciones de z(t) que empiezan en Ω permanecen allí. $\otimes$

Intuitivamente, se espera que la fricción disipe energía. Puede probarse que el mapeo $\varphi : \upsilon \to z$ definido por () es disipativo.

Propiedad 2: El mapeo $\varphi : \upsilon \to z$, definido por (76), es disipativo respecto a la función $V(t) = \frac{1}{2} z^2(t),$ es decir,

$$\int_0^t z(\tau)\upsilon(\tau)d\tau \ge V(t) - V(0) \tag{79}$$

Demostración: De () se tiene que

$$z\upsilon = z\frac{dz}{dt} + \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} z^2 \tag{80}$$

$$\ge z\frac{dz}{dt} \tag{81}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t z(\tau)\upsilon(\tau)d\tau \ge \int_0^t z(\tau)\frac{dz(\tau)}{d\tau} \ge V(t) - V(0) \otimes \tag{82}$$

Para el péndulo de Furuta se tiene que $\upsilon = \dot{\phi}$.

Debido a que el estado z no puede medirse, es necesario utilizar un observador para estimar la fricción con este modelo.

4.3.1 Observadores de fricción de LuGre Para el modelo de Coulomb la fuerza de fricción puede determinarse directamente a partir de cantidades medibles. Debido a que el modelo de LuGre es dinámico, es necesario utilizar un observador para estimar la fuerza de fricción.

4.3.1.1 Observador de lazo abierto Debido a que la dinámica en el modelo de LuGre es estable y rápida, la solución más simple es utilizar el observador de lazo abierto

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{z}}{dt} &= \upsilon - \sigma_0 \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} \hat{z} \\ \hat{F} &= \sigma_0 \hat{z} + \sigma_1 \frac{d\hat{z}}{dt} \end{aligned} \tag{83}$$

4.3.1.2 Observador con realimentación Se puede obtener un observador más complejo introduciendo realimentación a partir de otras señales del sistema. El observador resultante es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{z}}{dt} &= \upsilon - \sigma_0 \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} \hat{z} - ke \\ \hat{F} &= \sigma_0 \hat{z} + \sigma_1 \frac{d\hat{z}}{dt} \end{aligned} \tag{84}$$

donde la realimentación del observador e es una señal relacionada al error de estimación. Se asume que la fricción afecta al sistema en la entrada.

Sea $e = Lx$, donde x es el estado del sistema. Sea $\tilde{F} = F - \hat{F}$ y $\tilde{z} = z - \hat{z}$. La ecuación de error

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = -\sigma_0 \frac{|\upsilon|}{g(\upsilon)} \tilde{z} + kLx \tag{85}$$

se obtiene restando (84) de (76). El sistema de lazo cerrado

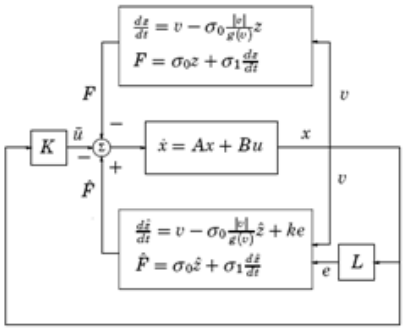
$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(u - F) \tag{86}$$

$$u = \hat{F} + \bar{u} \tag{87}$$

$$\bar{u} = -Kx \tag{88}$$

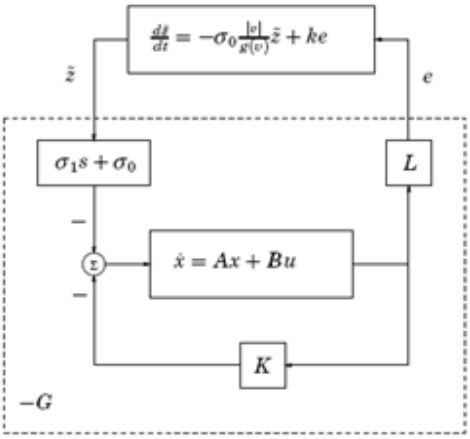
(86), (87), (88), (76) y (84) puede representarse por el diagrama de bloques en la figura 25.

Figura 25. Compensación de fricción basada en observador de LuGre y realimentación lineal del estado.



(Gafvert M., 1999)

Figura 26. Compensación de fricción basada en observador de LuGre y realimentación lineal del estado como una interconexión de un sistema SPR y un sistema disipativo.



(Gafvert M., 1999)

Particionando el sistema de lazo cerrado en una parte lineal y una no lineal se origina el diagrama de bloques de la figura 26. Se puede apreciar que

$$e = -\frac{L\left(sI - A\right)^{-1} B\left(\sigma_1 s + \sigma_0\right)}{1 + K\left(sI - A\right)^{-1} B} \tilde{z} = -G\,\tilde{z} \tag{89}$$

En (Gafvert, 1999), se plantea que para asegurar que el error de observador $\tilde{F} = F - \hat{F}$ y el estado x convergen asintóticamente a cero, se debe escoger L de forma tal que G sea estrictamente real positiva (SPR).

Al introducir el observador de lazo cerrado, se obtiene un mapeo disipativo de e a $\tilde{z}$ y, sumando la señal estimada de fricción a la señal de control, el error será la salida de un sistema lineal operando sobre $\tilde{z}$. Esto significa, que se tiene una

interconexión de un sistema disipativo y un sistema lineal SPR. Se conoce que tal interconexión es asintóticamente estable.

El valor escogido para L es

$$L = [-0.5 \quad -2 \quad -3 \quad -4] \tag{90}$$

lo cual origina la función de transferencia

$$G = \frac{0.4038s^4 + 2.498s^3 + 17.25s^2 + 77.99s + 18.57}{s^4 + 30.36s^3 + 243.1s^2 + 645.8s + 415.2} \tag{91}$$

la cual es SPR según el diagrama de Nyquist de la figura 27.

Figura 27. Diagrama de Nyquist de G

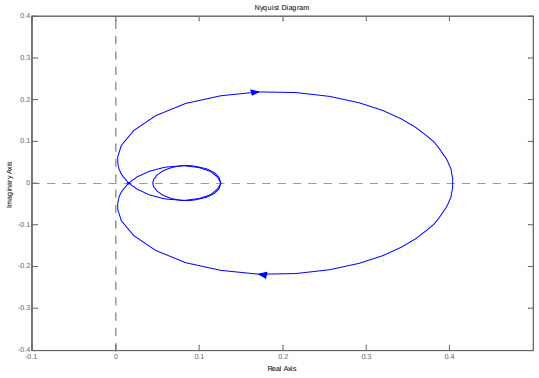
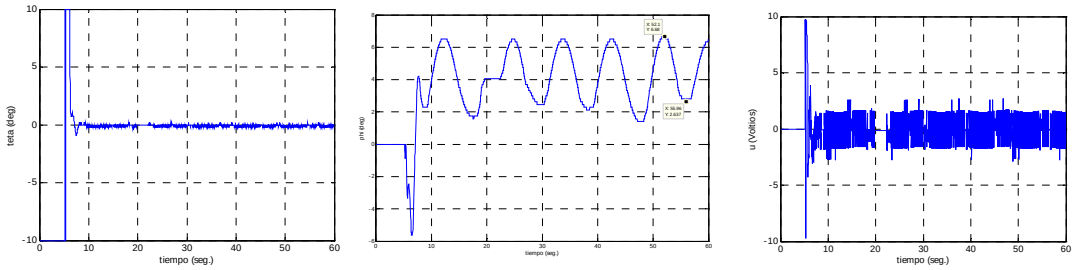
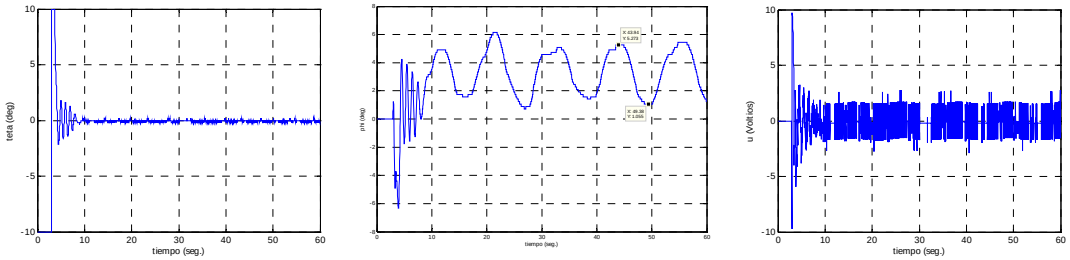


Figura 28. Respuesta del sistema en la posición invertida con control LQR y con compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo abierto



En la figura 28 se puede apreciar que se logró reducir en 7 grados aproximadamente la oscilación del brazo con una compensación de fricción de LuGre basada observador de lazo abierto en comparación con la respuesta sin compensación de fricción.

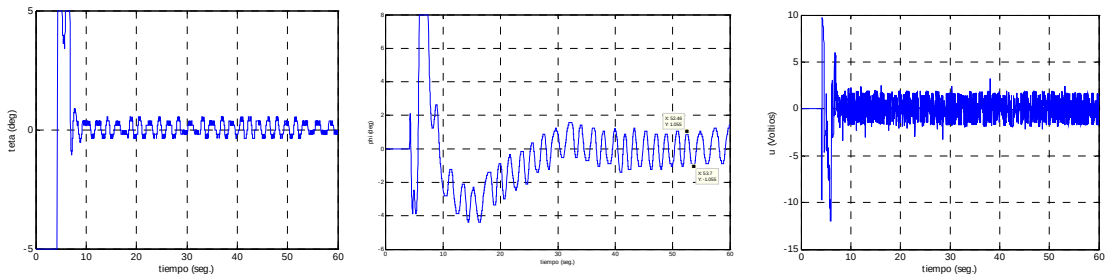
Figura 29. Respuesta del sistema en la posición invertida con control LQR y compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo cerrado



En la figura 29 se puede apreciar que se logró reducir al igual que en el caso anterior, aproximadamente en 7 grados la oscilación del brazo con una compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo cerrado. Esto, en comparación con la respuesta sin compensación de fricción.

En las figuras 28 y 29 se ha utilizado un controlador LQR para estabilizar el sistema en su posición invertida. Aunque se logró reducir la amplitud de las oscilaciones con la implementación de los observadores de fricción de LuGre, en comparación con otros modelos, el sistema presenta error de estado estacionario. Por esta razón, en el siguiente experimento, se utiliza el controlador PI Vectorial diseñado en la sección 3.3 con el observador de fricción de lazo abierto (83).

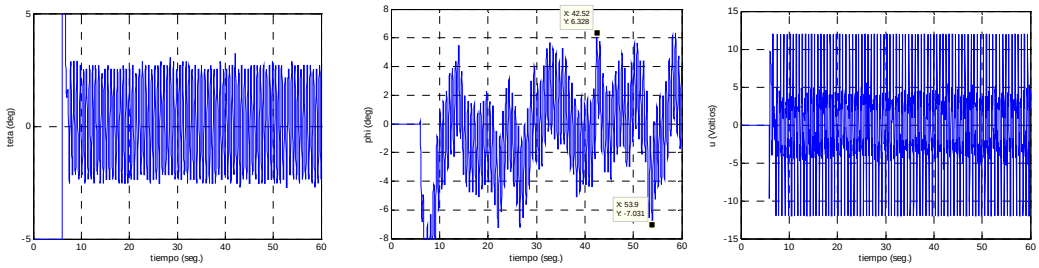
Figura 30. Respuesta del sistema en la posición invertida con control PI Vectorial y compensación de fricción de LuGre basada en observador de lazo abierto



En la figura 30 se puede apreciar que se logró reducir la oscilación del brazo a 2 grados aproximadamente. Además, se logró mejorar considerablemente el error de estado estacionario.

Es evidente, que el buen desempeño del observador de fricción de lazo abierto, depende en gran medida, de un buen ajuste de parámetros para el modelo de LuGre. Un mal ajuste de parámetros puede ocasionar una compensación pobre o una sobre compensación de fricción (ver Figura 31) y empeorar el desempeño que tenía el sistema cuando no se utilizaba compensación de fricción o incluso causar inestabilidad.

Figura 31. Deterioro en el desempeño del sistema en la posición invertida ocasionada por sobre compensación de fricción



Al igual que el caso de estabilización por realimentación de variables de estado, podría considerarse el estudio de utilizar un observador de lazo cerrado en combinación con el controlador PI Vectorial, o una compensación de fricción adaptativa. Este estudio va más allá de los objetivos de este trabajo y se deja para una futura investigación.

5. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES JERARQUICO

Los sistemas mecánicos subactuados han sido ampliamente estudiados por investigadores en diversos campos tales como el aeroespacio, robótica, ingeniería marina, etc. En contraposición con los sistemas completamente actuados, estos sistemas son difíciles de controlar debido a su propiedad de subactuación. Estos sistemas, sin embargo, están presentes en todas partes en el mundo real. Ejemplos de estos sistemas son las aeronaves, vehículos espaciales, submarinos, buques de superficie y robots. Existe otro caso, como algunos satélites y robots con eslabones flexibles, donde su propiedad de subactuación se debe a un diseño especial por razones de reducción de costos o propósitos prácticos. En algunos casos, la subactuación es ocasionada por el fallo en los actuadores.

En los últimos años, se han desarrollado muchos trabajos de investigación que tratan de dar solución al problema de diseño de controladores para este tipo de sistemas. Como resultado, se han presentado diversas clasificaciones y se han discutido aspectos sobre su estabilidad y controlabilidad. Algunas aproximaciones de control que se han utilizado incluyen linealización por realimentación (Olfati-Saber, R. 1999) y lagrangiano controlado (Bloch A. M. et. Al. 1999).

El control por modos deslizantes, el cual es una clase de los sistemas de control de estructura variable, es un control por realimentación no lineal donde se cambia su estructura intencionalmente para conseguir el desempeño deseado. Debido a que el control por modos deslizantes es menos sensible a variaciones en los parámetros del sistema y perturbaciones, se puede considerar su uso para el control de sistemas subactuados. Sin embargo, diseñar un control por modos deslizantes común para estos sistemas no es apropiado. En el control por modos

deslizantes estándar, la ley de control consta de dos partes: el control equivalente y una parte de control de conmutación. Mientras el control equivalente garantiza que los estados del sistema permanecen sobre la superficie deslizante y convergen al valor deseado, el control de conmutación lleva los estados del sistema hacia una superficie deslizantes específica.

En (Wang W. et al 2004), se presenta un control por modos deslizantes jerárquico para una clase de sistemas subactuados de segundo orden sobre el cual se basa esta sección. En dicho trabajo, se presentan dos ejemplos sobre los cuales se implementa el control para verificar su validez. En el primer ejemplo, se utiliza un péndulo invertido encima de un carro móvil en modo grúa y en el segundo un Pendubot. Sin embargo, al aplicar sus resultados para tratar de controlar el péndulo de Furuta, se presentaron inconvenientes. Un análisis más cuidadoso reveló que estos inconvenientes eran ocasionados por la forma en que los autores escogieron una de las superficies deslizantes. Los problemas presentados eran la incapacidad de realizar el swing up en la mayoría de los casos y la incapacidad de estabilizar el péndulo en su posición invertida en casos donde el péndulo daba varias vueltas alrededor de su pivote ocasionadas por una perturbación. Otra de las falencias encontradas en el trabajo es que no se muestra que sucede cuando el sistema pasa por una singularidad que el controlador posee en el denominador o cómo evitarla.

5.1 REPASO DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

El control por modos deslizantes es un controlador de estructura variable en el cual se modifica su estructura entre las superficies de conmutación para lograr características de control robusto. La idea básica es alterar la dinámica del sistema a lo largo de algunas superficies en el espacio de estado de forma tal que los estados del sistema son atraídos a estas superficies. En particular, una vez los

estados alcanzan una superficie, las trayectorias del sistema permanecen sobre esta superficie mientras los estados se deslizan hasta su valor deseado. En otras palabras, si se satisface la condición de deslizamiento, la superficie es un conjunto invariante. Además, cumplir la condición de deslizamiento también implica que se pueden tolerar algunas perturbaciones o incertidumbres dinámicas si la superficie permanece invariante. Para obtener la ley de control que fuerza el movimiento de los estados a permanecer sobre la superficie s=0, se define la función de Lyapunov positiva definida

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2 \tag{92}$$

Si la derivada $\dot{V}(t)$ es negativa definida, entonces el sistema es estable, los estados alcanzarán la superficie y se deslizarán hasta el valor deseado. Una condición de modo deslizante bien conocida es

$$\dot{V}(t) = s\,\dot{s} \leq 0 \tag{93}$$

Sin pérdida de generalidad, considere el diseño de un controlador por modos deslizantes para el siguiente sistema de segundo orden

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + bu(t) \tag{94}$$

Se asume que $b \neq 0$, y u(t) es la entrada del sistema. La ley de control consta de dos partes. La siguiente expresión es una posible estructura para un controlador por modos deslizantes

$$u = u_{eq} + u_{sw} = u_{eq} - \eta \,\mathrm{sgn}(s) - ks \tag{95}$$

Donde u_{eq} es denominado el control equivalente. Este, puede interpretarse como la ley de control que mantiene $\dot{s} = 0$ si se conoce la dinámica del sistema en forma exacta. El término discontinuo u_{sw} es denominado el control de conmutación, y puede interpretarse, como la ley de control que lleva los estados del sistema hacia la superficie de deslizamiento. El control de conmutación incluye una función signo y una ley exponencial que asegura que los estados del sistema alcancen el modo deslizante más rápido; s es llamada la función de conmutación debido a que la acción de control conmuta su signo sobre los dos lados de la superficie de conmutación s=0; s puede definirse como

$$s = \lambda e + \dot{e} \tag{96}$$

Donde $e = x - x_d$ y x_d es el estado deseado. λ es una constante positiva y sgn(s) es una función definida como

$$s = \begin{cases} 1 \text{ si } s > 0 \\ 0 \text{ si } s = 0 \\ -1 \text{ si } s < 0 \end{cases} \tag{97}$$

La estrategia de control adoptada garantiza que los estados alcanzan la superficie s = 0 y permanecen en ella sin importar la condición inicial del sistema siempre y cuando satisfaga (93).

5.2 DISEÑO DEL CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES JERÁRQUICO

De (26) se tiene que la representación en el espacio de estado del sistema es

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{\beta\gamma\left(\sin^2\theta - 1\right)\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 - 2\beta^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + \beta\gamma\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \gamma\delta\cos\theta\sin\theta + \beta\tau_\varphi}{\alpha\beta - \gamma^2 + \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\sin^2\theta} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{\beta\left(\alpha + \beta\sin^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta\,\dot{\varphi}^2 + 2\beta\gamma\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} - \gamma^2\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \delta\left(\alpha + \beta\sin^2\theta\right)\sin\theta - \gamma\cos\theta\tau_\varphi}{\alpha\beta - \gamma^2 + \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\sin^2\theta}
\end{aligned}
\tag{98}
$$

El anterior sistema puede expresarse de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= f_1(X) + b_1(X)u \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= f_2(X) + b_2(X)u \\
y(t) &= \left[x_1, x_3\right]^T
\end{aligned}
\tag{99}
$$

donde $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ es el vector de estado, $f_1(X)$, $f_2(X)$, $b_1(X)$ y $b_2(X)$ son las funciones nominales no lineales y u es la entrada de control. Los estados (x_1, x_2) y (x_3, x_4) pueden tratarse como los estados de dos subsistemas con forma canónica. El objetivo de control es diseñar una entrada u para controlar simultáneamente los estados (x_1, x_2) y (x_3, x_4) con el fin de conseguir el desempeño deseado.

Para los dos grupos de variables de estado (x_1, x_2) y (x_3, x_4) se construye un par de superficies deslizantes como el primer nivel

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1(x_1 - x_{1d}) + x_2 \\ s_2 &= c_2 \sin(x_3) + x_4 \end{aligned} \tag{100}$$

Donde c_1 y c_2 son constantes positivas y x_{1d}, x_{3d} son los valores deseados de salida. Si se diseña una ley de control que restringa el movimiento del sistema a las variedades o superficies $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, el movimiento de los 2 subsistemas estará gobernado respectivamente por $\dot{x}_1 = -c_1(x_1 - x_{1d})$ y $\dot{x}_3 = -c_2 \sin(x_3)$. El movimiento sobre estas superficies es independiente de $f_1(X)$, $f_2(X)$, $b_1(X)$ y $b_2(X)$.

La ley de control equivalente para cada uno de los subsistemas es

$$u_{eq1} = \frac{-f_1(X) - c_1 x_2}{b_1(X)} \tag{101}$$

$$u_{eq2} = \frac{-f_2(X) - c_2 \cos(x_3) x_4}{b_2(X)} \tag{102}$$

Para controlar las dos salidas con una sola ley de control, se define la ley de control total como

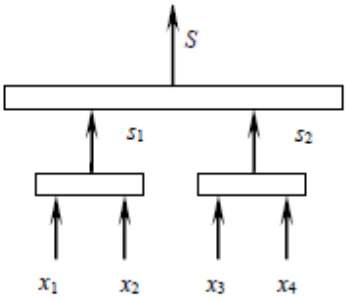
$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw} \tag{103}$$

Donde u_{sw} es la parte de conmutación del controlador deslizante. Entonces, se construye la superficie deslizante de segundo nivel

$$S = \lambda s_1 + \sigma s_2 \tag{104}$$

Donde λ, σ son parámetros de diseño.

Figura 32. Estructura de las superficies deslizantes jerárquicas.



A continuación se obtiene la ley de control de conmutación por medio del teorema de estabilidad de Lyapunov. La función de energía de Lyapunov puede definirse como

$$V(t) = \frac{1}{2} S^2 \tag{105}$$

Diferenciando $V(t)$ con respecto al tiempo t se obtiene

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= S\dot{S} = S\left(\lambda \dot{s}_1 + \sigma \dot{s}_2\right) \\
&= S\left[\lambda\left(c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2\right) + \sigma\left(c_2 \cos(x_3)x_4 + \dot{x}_4\right)\right] \\
&= S\left[\lambda\left(c_1 x_2 + f_1 + b_1\left(u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw}\right)\right) + \sigma\left(c_2 \cos(x_3)x_4 + f_2 + b_2\left(u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw}\right)\right)\right] \\
&= S\left[\lambda b_1\left(u_{eq2} + u_{sw}\right) + \sigma b_2\left(u_{eq1} + u_{sw}\right)\right] \\
&= S\left[\left(\sigma b_2 u_{eq1} + \lambda b_1 u_{eq2}\right) + u_{sw}\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)\right]
\end{aligned} \tag{106}
$$

Sea $u_{sw}\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right) + \sigma b_2 u_{eq1} + \lambda b_1 u_{eq2} = -\eta \,\mathrm{sgn}(S) - kS$ donde η, k son constantes positivas. Entonces,

$$
u_{sw} = -\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)^{-1}\left[\sigma b_2 u_{eq1} + \lambda b_1 u_{eq2} + \eta \,\mathrm{sgn}(S) + kS\right] \tag{107}
$$

La ley de control total es $u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw}$

De esta forma, la ley de control total está dada por

$$
u = \frac{\lambda b_1}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} u_{eq1} + \frac{\sigma b_2}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} u_{eq2} - \frac{\eta \,\mathrm{sgn}(S)}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} - \frac{kS}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} \tag{108}
$$

$$
u = -\frac{\lambda\left(c_1 x_2 + f_1\right)}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} - \frac{\sigma\left(c_2 \cos\left(x_3\right) x_4 + f_2\right)}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} - \frac{\eta \,\mathrm{sgn}(S)}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} - \frac{kS}{\left(\sigma b_2 + \lambda b_1\right)} \tag{109}
$$

Entonces

$$\dot{V} = -\eta|S| - kS^2 \tag{110}$$

Por lo tanto, la superficie deslizante de segundo nivel S es asintóticamente estable.

5.2.1 Análisis de estabilidad y deslizamiento de todas las superficies deslizantes Ahora se analiza la estabilidad asintótica de las superficies deslizantes de primer nivel.

Al integrar en ambos lados de (110) se obtiene

$$\int_0^t \dot{V}\, d\tau = \int_0^t \left(-\eta|S| - kS^2\right) d\tau \tag{111}$$

Entonces,

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \left(-\eta|S| - kS^2\right) d\tau \tag{112}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[V(t) - V(0)\right] = -\int_0^\infty \left(\eta|S|\right) d\tau - \int_0^\infty \left(kS^2\right) d\tau \tag{113}$$

$$V(\infty) - V(0) = -\int_0^\infty \left(\eta|S|\right) d\tau - \int_0^\infty \left(kS^2\right) d\tau \tag{114}$$

$$V(0) = \int_0^\infty \left(\eta|S|\right) d\tau - \int_0^\infty \left(kS^2\right) d\tau \tag{115}$$

Como $0 \le V(0) < \infty$, se tiene:

$$0 \le \eta \int_0^\infty |S| \, d\tau < \infty \tag{116}$$

$$0 \le k \int_0^\infty S^2 d\tau < \infty \tag{117}$$

De (104) entonces,

$$0 \le k \int_0^\infty \left(\lambda s_1 + \sigma s_2 \right)^2 d\tau < \infty \tag{118}$$

$$0 \le k\lambda^2 \int_0^\infty {s_1}^2 d\tau + k \int_0^\infty 2\lambda\sigma s_1 s_2 + k\sigma^2 \int_0^\infty {s_2}^2 < \infty \tag{119}$$

Si escogemos $\sigma > 0$ y λ tal que

$$\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda_0 \; s_1 s_2 \ge 0 \\ -\lambda_0 \; s_1 s_2 < 0 \end{matrix} \right\} \left(\lambda_0 > 0 \right) \tag{120}$$

Entonces se tiene que

$$\int_0^\infty {s_1}^2 d\tau < \infty \tag{121}$$

$$\int_0^\infty {s_2}^2 d\tau < \infty \tag{122}$$

Por lo tanto, $s_1 \in L_2$ y $s_2 \in L_2$, es decir, s_1 y s_2 son señales de cuadrado integrable.

Definición 5.1 Función de cuadrado integrable. Una función f(x) de una variable real con valores reales o complejo se dice de cuadrado sumable o también de cuadrado integrable sobre un determinado intervalo, si la integral del cuadrado de su módulo, definida en el intervalo de definición, converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{123}$$

A continuación se hace uso de una alternativa simple del Lema de Barbalat (Tao G, 1997) para probar que las superficies son asintóticamente estables.

Lema 5.1 (Barbalat) Si una señal es de cuadrado integrable y su derivada es acotada, entonces la señal converge a cero asintóticamente.

Continuando con el análisis de estabilidad se tiene,

La derivada de s_2 es

$$\dot{s_2} = c_2 x_4 \cos(x_3) + f_2 + b_2 u \tag{124}$$

Como todas las variables del lado derecho de (124) son acotadas, $\dot{s_2}$ es acotada, es decir, $\dot{s_2} \in L_\infty$. Por lo tanto, según el Lema 5.1, la superficie deslizante s_2 es asintóticamente estable, es decir, los estados alcanzan la superficie y se deslizan hacia el origen. Debido a que $S = \lambda s_1 + \sigma s_2$, S y s_2 convergen a cero asintóticamente, es evidente que la superficie deslizante s_1 converge a cero asintóticamente.

5.2.2 Controlador libre de singularidad En (109), sin embargo, el controlador posee una singularidad donde el denominador se hace cero, es decir, cuando

$$\sigma b_2 + \lambda b_1 = 0 \tag{125}$$

Esto ocurre cuando

$$\frac{\lambda\beta}{\sigma\gamma} = \cos\theta \tag{126}$$

Para poder realizar el swing up, es necesario evitar la singularidad. El valor escogido para landa negativo es de

$$\lambda = -3 \tag{127}$$

con lo que $\frac{\lambda\beta}{\sigma\gamma} = -3.5$.

El valor escogido para landa positivo se realiza de la siguiente manera:

Se puede escoger $\sigma = 0.8$ y conmutar el valor de landa de forma apropiada. De lo anterior, se propone

$$\lambda = \begin{cases} 0.8539 \text{ si } |\theta| > 30 \\ 0.5 \text{ en otro caso} \end{cases} \tag{128}$$

Para el caso en que $\lambda = 0.8539$, la singularidad ocurre en $\theta = 5 \text{ deg}$. En el caso en que $\lambda = 0.5 \text{ deg}$, la singularidad ocurre en $\theta = 54 \text{ deg}$. De esta forma, es posible

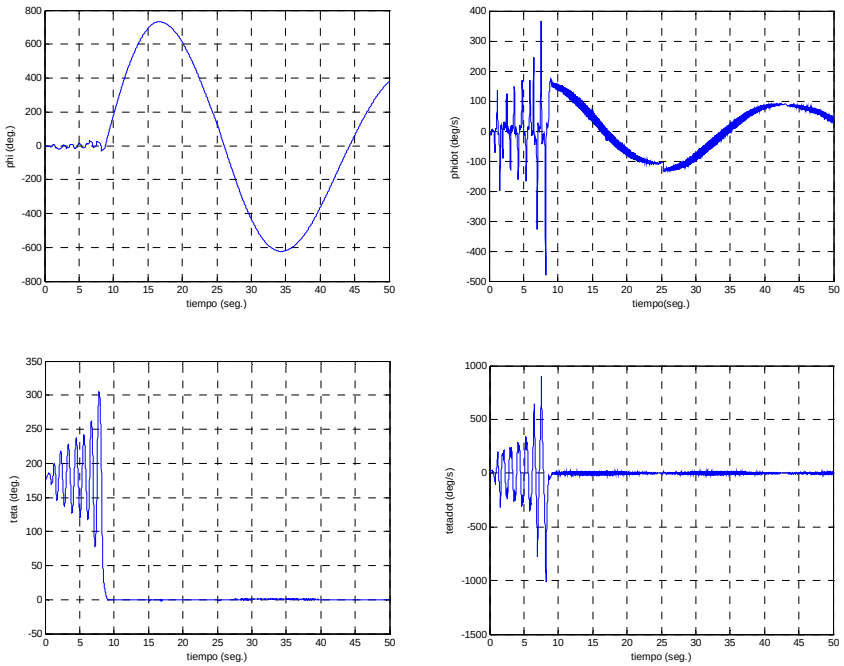
realizar el swing up y la estabilización del péndulo con un único controlador libre de singularidad.

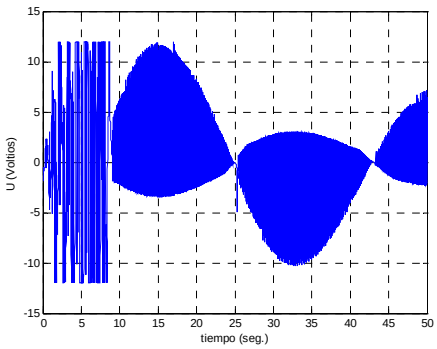
5.2.3 Resultados experimentales Para corroborar la validez del controlador por modos deslizantes jerárquico, se realizaron simulaciones en Matlab y experimentos sobre el péndulo real.

Los valores de los parámetros utilizados para el controlador son $c_1 = 1$, $c_2 = 20$, $\sigma = 0.8$, $k = 1$, $\eta = 15$ y λ según (127) y (128).

El valor deseado de salida para x_1 es 0 rad.

Figura 33. Respuesta del sistema de control por modos deslizantes jerárquico.





En la figura 33 se puede apreciar que el controlador por modos deslizantes jerárquico logra llevar el péndulo desde su posición colgante natural hasta su posición invertida. Es de notar el excesivo chatering en la acción de control ocasionado por la condición (120) lo que limita su aplicabilidad en el péndulo real.

6. TRABAJO FUTURO

El diseño de los controladores lineales de las secciones 3.2 y 3.3 asume un muy buen conocimiento de la planta. Una interesante e importante extensión de este trabajo es explorar las consecuencias de incertidumbres en la planta, realizar un análisis de robustez y diseñar controladores robustos.

En la sección 4.3.1.2 se presentó el diseño de compensadores de fricción basados en observador para sistemas de control por realimentación del estado de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Una extensión de este trabajo consiste en considerar el diseño de estos observadores para sistemas de control por realimentación del estado con acción integral (PI Vectoriales), incluir estimación de parámetros y adaptación.

En la sección 5 se consideró el problema global de control de un sistema subactuado como lo es el péndulo de Furuta. Se diseñó un control por modos deslizantes jerárquico para dar solución al problema con muy buenos resultados. Aunque se mostró por simulación que es posible resolver el problema del swing up y la estabilización con un único controlador no lineal, la implementación sobre el péndulo real no fue posible debido al fenómeno de chatering en la acción de control. Una extensión de este trabajo consiste en investigar como eliminar dicho chatering y poder implementar el controlador sobre el péndulo real.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se probaron tanto en simulación como en el laboratorio diferentes estrategias de control lineal y no lineal para resolver el problema del swing up y la estabilización para el péndulo de Furuta. Las simulaciones y los experimentos mostraron que el controlador swing up desarrollado por Astrom y Furuta no logra cumplir con su objetivo para algunas condiciones iniciales y ganancia. Esto se debe a que el cálculo del controlador fue basado en un modelo simplificado del péndulo de Furuta (segundo orden) y el modelo real del sistema es de cuarto orden. Por lo tanto, si se quiere mejorar el desempeño del controlador swing up, un buen punto de partida es desarrollar un controlador considerando el orden real del sistema.

El péndulo de Furuta fue utilizado para evaluar compensadores de fricción. El efecto de la compensación de fricción fue muy bien ilustrado reduciendo los ciclos límite cuando se trata de estabilizar el péndulo. El compensador de fricción de LuGre basado en observador se comparó con compensadores de fricción clásicos utilizando el modelo de fricción de Coulomb y Karnopp. El desempeño del compensador de LuGre fue ligeramente superior al del compensador de Karnopp. Una diferencia importante es la suavidad de la fricción estimada con el observador de LuGre.

En la sección 3 se abordó el problema global de control mediante el enfoque del control híbrido. Se diseñó un controlador de energía (controlador **swing up**) para llevar el péndulo desde su posición colgante natural u otra condición inicial hasta una región cercana a su punto de equilibrio inestable y un controlador local por realimentación de variables de estado con acción integral (PI Vectorial) para su estabilización en dicha posición. Para escoger que controlador debía entrar en

funcionamiento se diseñó una estrategia de conmutación. Se encontró que esta combinación de controladores ocasiona el fenómeno del **wind up** en el controlador PI Vectorial causando inestabilidad en el sistema. Para solucionar este problema se diseñó un integrador condicionado el cual se apaga y se reinicia mientras el controlador **swing up** se encuentra en operación.

En la sección 5 se presentó un controlador por modos deslizantes jerárquico para una clase de sistemas subactuados de segundo orden. El método puede controlar sistemas no lineales de una entrada y múltiples salidas de forma eficiente. Al mismo tiempo, debido a las características del control por modos deslizantes, el sistema total es menos sensible a las variaciones en los parámetros del sistema y a las perturbaciones. El trabajo muestra como todas las superficies deslizantes son asintóticamente estables. Por lo tanto, este método ofrece una solución viable para una clase de sistemas subactuados de segundo orden. El método puede aplicarse a sistemas subactuados de alto orden con más de dos subsistemas. Aunque se logró demostrar matemáticamente y en simulación que es posible resolver el problema global de control con un único controlador por modos deslizantes jerárquico queda pendiente por resolver el problema del chatering presente en la acción de control lo cual limita su aplicabilidad en sistemas reales.

APENDICE A

COMPONENTES UTILIZADOS EN EL SISTEMA

A.1 Motor

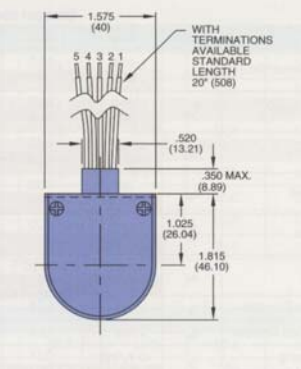
Figura A.1 Hoja de datos del motor D.C. a 24 V

Model 9X37 Winding Data (Other windings available upon request)

Line No.	Parameter	Symbol	Units	9X37			
44	Reference Voltage	E	V	12.0	19.1	24.0	30.3
45	Torque Constant	K_T	oz-in/A (N-m/A)	3.00 (21.2×10^{-3})	4.72 (33.3×10^{-3})	6.00 (42.4×10^{-3})	7.43 (52.5×10^{-3})
46	Back-EMF Constant	K_E	V/krpm (V/rad/s)	2.22 (21.2×10^{-3})	3.49 (33.3×10^{-3})	4.44 42.4×10^{-3})	5.50 (52.5×10^{-3})
47	Resistance	R_T	Ω	0.55	1.20	1.85	2.82
48	Inductance	L	mH	0.49	1.21	1.97	3.01
49	No-Load Current	I_{NL}	A	0.37	0.23	0.18	0.15
50	Peak Current (Stall)	I_P	A	21.7	15.9	12.96	10.73

A.2 Encoder del brazo

Figura A.2 Tabla de conexión del encoder a 1024 PPR



Encoder Connection Chart

Pin No.	Color	Connection
1	Black	Ground
2	Green	Index/NC
3	Yellow	Channel A
4	Red	Vcc
5	Blue	Channel B

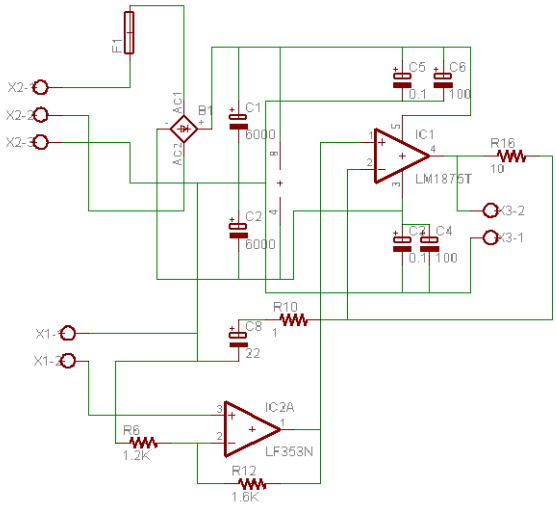
A.3 Encoder del péndulo

Figura A.3 Tabla de conexión del encoder a 1000 PPR

Electrical Connections	
Function (If Used)	**Wire Color Code**
Supply	Red
Common	Black
Signal A	White
Signal B	Green
Signal Z	Orange
Floating	Shield

A.4 Amplificador de potencia del motor

Figura A.4 Esquema de conexión del driver del motor



A.5 Tarjeta de Adquisición de Datos Sensoray Modelo 626

Figura A.5 Conectores de los encoders

Table 24 Encoder Connectors					
J5					
26 pin IDC ribbon connector					
Encoder 1A – 3A					
Pin	Function	User Designation	Pin	Function	User Designation
1	Encoder (0A) A-		2	Encoder (0A) A+	
3	GND		4	Encoder (0A) B-	
5	Encoder (0A) B+		6	5V	
7	Encoder (0A) I-		8	Encoder (0A) I+	
9	GND		10	Encoder (1A) A-	
11	Encoder (1A) A+		12	5V	
13	Encoder (1A) B-		14	Encoder (1A) B+	
15	GND		16	Encoder (1A) I-	
17	Encoder (1A) I+		18	5V	
19	Encoder (2A) A-		20	Encoder (2A) A+	
21	GND		22	Encoder (2A) B-	
23	Encoder (2A) B+		24	5V	
25	Encoder (2A) I-		26	Encoder (2A) I+	

J4					
26 pin IDC ribbon connector					
Encoder 1B – 3B					
Pin	Function	User Designation	Pin	Function	User Designation
1	Encoder (0B) A-		2	Encoder (0B) A+	
3	GND		4	Encoder (0B) B-	
5	Encoder (0B) B+		6	5V	
7	Encoder (0B) I-		8	Encoder (0B) I+	
9	GND		10	Encoder (1B) A-	
11	Encoder (1B) A+		12	5V	
13	Encoder (1B) B-		14	Encoder (1B) B+	
15	GND		16	Encoder (1B) I-	
17	Encoder (1B) I+		18	5V	
19	Encoder (2B) A-		20	Encoder (2B) A+	
21	GND		22	Encoder (2B) B-	
23	Encoder (2B) B+		24	5V	
25	Encoder (2B) I-		26	Encoder (2B) I+	

Figura A.6 Conectores A/D y D/A

J1					
50 pin IDC ribbon cable connector					
Analog inputs & outputs					
Pin	Function	User Designation	Pin	Function	User Designation
1	Shield (Chassis)		2	Ground	
3	-AD0		4	+AD0	
5	-AD1		6	+AD1	
7	-AD2		8	+AD2	
9	-AD3		10	+AD3	
11	-AD4		12	+AD4	
13	-AD5		14	+AD5	
15	-AD6		16	+AD6	
17	-AD7		18	+AD7	
19	Ground		20	Ground	
21	-AD8		22	+AD8	
23	-AD9		24	+AD9	
25	-AD10		26	+AD10	
27	-AD11		28	+AD11	
29	-AD12		30	+AD12	
31	-AD13		32	+AD13	
33	-AD14		34	+AD14	
35	-AD15		36	+AD15	
37	Ground		38	Ground	
39	Ground		40	Ground	
41	Sense1		42	DAC0	
43	Sense2		44	DAC1	
45	Sense3		46	DAC2	
47	Sense4		48	DAC3	
49	Ground		50	Shield (Chassis)	

BIBLIOGRAFIA

Astrom, K.J., Furuta K. (1996) “Swinging up a Pendulum by Energy Control.” In IFAC World Congress. San Francisco, California.

Bloch A. M., Leonard N. E., and Marsden J. E. (1999) Stabilization of the pendulum on a rotor arm by the method of controlled lagrangians. In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics an Automation.

Coulomb C. A. (1785) Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et la roideur des cordages. In Mém. Math. Phys., volumen X, pages 161–342.

De Wit, C. C., Olsson H., Aström K. J., and Lischinsky P. (1995) A new model for control of systems with friction. IEEE Transactions on Automatic Control, 40(3), páginas 419-425.

Fantoni, I., Lozano, R., and Spong, M.W. (2000) Energy control of the Pendubot, IEEE Trans. Autom. Control, 45, (4), pp. 725–729.

Furuta K., Yamakita M., Kobayashi S., Nishimura M. (1994) A new inverted pendulum apparatus for eduction. In IFAC Symposium on Advances in Control Education, Boston, páginas 191–196.

Gafvert M. (1999) Dynamic model based friction compensation on the Furuta pendulum. In 1999 IEEE International Conference on Control Applications, Hawaii.

Gafvert, M. (1998) Modelling the Furuta Pendulum. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.

Gafvert M. (1996) Comparison of two friction models. Master's thesis, Lund Institute of Technology.

Khalil H. K. Nonlinear Systems. New York: Macmillan, 1992.

Karnopp D. (1985) Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 107(1), páginas 100–103.

Lin C.M., Mon Y.J., (2005) Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 13, pp. 593–598.

Mori, S., Nishihara, H, Furuta K. (1976) "Control of Unstable Mechanical Systems: Control of Pendulum", Int. J. of Control, vol 23, n5, Pág. 673-692.

Ogata K. Ingeniería de control moderna. 3 ed. México: Pearson, 1998. 997p.

Ogata K. Sistemas de control en tiempo discreto. 2 ed. México: Pearson, 1996. 745p.

Olfati-Saber R. (1999) Fixed Point Controllers and Stabilization of the Cart-Pole System and the Rotating Pendulum. Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, pp. 1174-1181, Phoenix, AZ.

Olsson H, Åström K. J., De Wit C. C., Gäfvert M., Lischinsky P. (1998) Friction models and friction compensation. European Journal of Control, 1998(4), páginas 176–195.

Olsson H. (1996) Control Systems with Friction. PhD thesis, Lund Institute of Technology, University of Lund.

Olsson H., Astrom K. J. (1996) Observer based friction compensation. In 35th IEEE Conf. on Decision and Control, pages 4345-5450, Kobe, Japan.

Slotine, J.J., LI, W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991. 461p.

Spong M.W., Block D.J. (1995) The Pendubot: a mechatronic system for control research and education, Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, vol.1, pp. 555–556.

Tao G. (1997). A simple alternative to the Barbalat Lemma. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 5.

Wang, W. Yi, J. Zhao, D. Liu, D. (2004) Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems. IEE Proceedings: Control theory and applications, ISSN 1350-2379, Vol 151, No. 6, Págs. 683-690.