Propagación de la amplitud de ondas gravitacionales en presencia de torsión

Cristian Camilo Riveros Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2022

Propagación de la amplitud de ondas gravitacionales en presencia de torsión

Cristian Camilo Riveros Torres

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magíster en ciencias-física

Director:
Dr. Fernando Izaurieta
Codirector:
Dr. Pablo Beltrán

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2022

It's Okay to say "I don't know!".
There's no shame in that! The only shame
is to pretend that we know everything.

Richard P. Feynman

Agradecimientos

Estoy y estaré infinitamente agradecido con todas las personas que me ayudaron y motivaron en todo el proceso. Primero quiero agradecerle a mis padres por el apoyo, amor, confianza y paciencia que tuvieron en todo momento, desde el inicio de mis estudios hasta el día de hoy, también gracias a mi novia Francy por animarme a seguir por este camino de la ciencia.
Quisiera agradecerle al profesor Fernando Izaurieta de la universidad de Concepción por dirigir este trabajo, además de su paciencia y disposición para resolver cualquier duda que se me ocurría. También quisiera agradecerle por la amabilidad y hospitalidad que tuvo cuando me llevo a conocer su país, ciudad y universidad. También quisiera agradecerle al profesor Eduardo Rodríguez el cual me introdujo en el tema de la gravedad con torsión, y adicionalmente me puso en contacto con el profesor Fernando. Agradezco al profesor Juan Pablo Beltrán por aceptar ser el codirector del trabajo.
La vida universitaria no sería igual si no tuviéramos amigos, por eso quiero agradecerles por todo el apoyo, ayuda y momentos de distracción. Gracias especialmente a Jonathan Díaz que ha sido un gran e importante amigo desde el pregrado, gracias a todos los demás por cada momento compartido: David Barón, Jorge Sanabria, Sebastian Sosa, Gabriel Pulido, Camilo Alberto, Camila Dueñas, Luisamaria Castaño, Miguel Beltrán, Camilo Penagoz, Daniela Gutierrez, Mauricio Perez.
Por último agradecerle a la Universidad Nacional de Colombia por aceptarme desde el pregrado, además por otorgarme la beca de estudiante auxiliar docente, ya que sin esta hubiese sido imposible terminar con mis estudios.

Resumen

Propagación de la amplitud de ondas gravitacionales en presencia de torsión

Las ondas gravitacionales son un efecto físico que se ha medido con gran precisión en laboratorios como LIGO, el objetivo de este trabajo fue estudiar la propagación de dichas ondas en la teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble, la cual es una generalización de la teoría de la relatividad general de Einstein. Para esto, primero introducimos todos los objetos matemáticos que usamos a lo largo de todo el trabajo. Después obtuvimos las ecuaciones de campo para hacer perturbaciones y llegar a la ecuación de propagación de la onda. Encontramos que la relación de dispersión coincide con los datos observacionales, pero existe una propagación anómala de la amplitud y polarización. Por último usamos un modelo simple para estimar que tan relevante es esta desviación comparada con la predicha por Relatividad General.

Palabras clave

Ondas gravitacionales, curvatura, torsión, vierbein, conexión de espín.

Abstract

Gravitational wave amplitude propagation in the presence of torsion

Gravitational waves are a physical effect that has been measured with high precision in laboratories such as LIGO. The objective of this work was to study the propagation of these waves in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble theory, this is a generalization of the Einstein's general theory of relativity. For this, we first introduce all the mathematical objects that we use throughout the work. Then we obtained the field equations to make perturbations and thus obtain the wave propagation equation.

Keywords
gravitational waves, curvature, torsion, vierbein, spin conection.

Contenido

Agradecimientos VI

Resumen VII

Abstract VIII

1. Introducción 1

2. Requisitos matemáticos 3

3. Ondas gravitacionales en presencia de torsión 11
3.1. Teoría ECSK 11
3.2. Perturbaciones de los campos 13
3.3. Propagación de la onda 20
3.3.1. Análisis Eikonal 21
3.4. Propagación anómala de la amplitud y polarización de ondas gravitacionales 24
3.4.1. Propagación anómala de la amplitud 25
3.4.2. Propagación anómala de la polarización 26

4. Modelo de propagación de GW sobre un fondo cosmológico 29
4.1. Aproximación para z pequeño 31

5. Conclusiones 33

A. Reglas de (anti)conmutación 35

B. Variación de la acción 39
B.1. Variación respecto al vierbein 39
B.2. Variación respecto a la conexión de espín 40

C. Comparación de términos 43

D. Propiedades útiles en el modelo cosmológico **45**

Capítulo 1

Introducción

La relatividad general (**RG**) es la mejor teoría sobre la gravedad que tenemos hasta el momento porque sus resultados encajan muy bien con las observaciones hechas sobre el universo [1, 2]. Uno de los fenómenos que se puede deducir de esta teoría son las ondas gravitacionales [3], además es uno de los temas sobre el cual se desarrollara este trabajo. Teóricamente se propuso la existencia de dichas ondas de espacio-tiempo en 1916 y tuvieron que pasar 100 años hasta que los experimentos LIGO (por sus siglas en ingles Laser interferometer gravitational-wave observatory) y Virgo lograran hacer la primera detección directa [1], estas ondas se produjeron por la fusión de dos agujeros negros de aproximadamente 36 y 24 masas solares, dejando como resultado un agujero negro de 62 masas solares, eso significa que aproximadamente la energıa de 3 soles fue emitida en forma de ondas gravitacionales [4].

Sin embargo, existen fenómenos gravitacionales que **RG** no puede explicar satisfactoriamente, como por ejemplo, el problema de la curva de rotación de las galaxias [5], el efecto de lente gravitacional alrededor de cúmulos de galaxias [6], entre otros. Para dar una explicación a estas observaciones se plantea la existencia de una componente desconocida denominada materia oscura [2] [7]. Actualmente se proponen algunos candidatos a materia oscura, como por ejemplo, los neutrinos estériles [8], axiones [9].

Por lo mencionado anteriormente y otros inconvenientes que tiene **RG** creemos que no es la teoría definitiva sobre la gravedad, esto nos lleva a pensar en teorías más generales, algunas de las propuestas que se tienen hoy en día son; teorías tensor-escalar, otras donde consideran que la constante de gravitación G es variable a grandes escalas, dimensiones extra, teorías con torsión, etc.

Gracias a las mediciones de ondas gravitacionales producidas por dos estrellas de neu-

[1] La medición experimental de las ondas gravitacionales fue tan importante para la comunidad científica que el premio nobel del 2017 fue otorgado a Rainer Weiss, Barry C. Barish y en Kip S. Thorne. Por sus grandes aportaciones a al experimento LIGO.

[2] Se estima que aproximadamente el $85\,\%$ de la materia del universo es materia oscura y lo curioso es que aún así no sabemos de que esta hecha.

trones [10] se encontró que las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz, este hecho es de suma importancia porque permite descartar teorías en las que se obtenga una velocidad de propagación diferente. Con esto en mente, en este trabajo queremos estudiar la teoría de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (**ECSK**)[11-13], la cual considera que el espacio-tiempo puede curvarse por la presencia de materia (al igual que **RG**) y adicionalmente "torcerse" por la presencia de partículas con espín. Más concretamente, queremos estudiar la propagación de ondas gravitacionales en esta teoría, si dicha onda llega a pasar por una región con torsión, algunas de sus propiedades deberían cambiar si la comparamos con una onda gravitacional que pasa por una región sin torsión, dicho de otra manera, debería existir una discrepancia entre las amplitudes y polarizaciones predichas por **RG** y **ECSK**. Ahora si suponemos que la fuente de torsión es la materia oscura, estaríamos identificando que dicha materia debe tener un comportamiento fermionico. Afortunadamente existe un proyecto de la agencia espacial europea llamado **LISA** (Laser Interferometer Spacial Antena) el cual consiste en enviar un interferómetro láser al espacio, con el objetivo de medir amplitudes y polarizaciones de ondas gravitacionales con mucha más precisión que la que tenemos actualmente. Si **LISA** logra medir algún parámetro que no coincida con **RG** podría afianzar nuestras suposiciones sobre la materia oscura y la torsión, pero si por el contrario se obtiene que todo encaja con **RG** podríamos inferir que la materia oscura debería tener un comportamiento bosonico.
Esta tesis esta estructurada de la siguiente manera: En el capítulo 2 introducimos los conceptos matemáticos, operadores diferenciales esenciales para entender y desarrollar los siguientes capítulos. En el capítulo 3 obtenemos las ecuaciones de campo de la teoría **ECSK** para hacer pequeñas perturbaciones de los campos y así llegar a la ecuación de propagación de la onda, después usamos el análisis eikonal para obtener la relación de dispersión, ecuación de la propagación de la amplitud y polarizaciones de la onda. En el capítulo 4 usamos el modelo cosmológico para estimar la ecuación para la propagación anómala de la amplitud. Por último, en el capítulo 5 están las conclusiones que podemos inferir de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Requisitos matemáticos

Algunos de los textos consultados para entender y desarrollar este capítulo fueron [14-19]. En RG trabajamos sobre una variedad M en cuatro dimensiones con signatura $(-+++)$, lo más usual es trabajar con la base coordenada $\{\partial_\mu\}$ del espacio tangente T_pM y $\{dx^\mu\}$ la base del espacio cotangente T_p^*M, con $\mu = \{0,1,2,3\}$. Uno de los objetos más importantes para nosotros será la métrica $g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu$ la cual esta escrita en la base coordenada. Es importante resaltar que toda la información métrica queda contenida en las componentes $g_{\mu\nu}$. Adicional a la base coordenada, existe la base ortonormal $\vec{e}_a$ del espacio tangente y e^a la base del espacio cotangente, con $a = \{0,1,2,3\}$, la métrica escrita en esta base toma la forma $g = \eta_{ab}e^a(x) \otimes e^b(x)$, donde η_{ab} son las componentes de la métrica de Minkowski.
Como la métrica debe ser la misma sin importar que base estemos usando

$$g = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab}e^a(x) \otimes e^b(x), \tag{2.1}$$

esto nos muestra fácilmente que en la base ortonormal toda la infamación métrica queda contenida en $\vec{e}_a$ y debe relacionarse con la base coordenada dx^μ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} e^a &= e^a{}_\mu dx^\mu, \\ \vec{e}_a &= e_a{}^\mu \partial_\mu. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definición 2.1. *El producto exterior $\wedge$ se puede expresar mediante el producto tensorial*

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\omega^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma(r)}, \tag{2.3}$$

donde $sgn(\sigma) = 1$ si σ es una permutación par, $sgn(\sigma) = -1$ si σ es una permutación impar,

Definición 2.2. *La derivada exterior es una aplicación que toma elementos del espacio $\Omega^r(M)$ sobre la variedad M y los envía al espacio de $\Omega^{r+1}(M)$, es decir,*

$$d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M), \tag{2.4}$$

al actuar sobre una r-forma $\alpha \in \Omega^r(M)$

$$\alpha = \frac{1}{r!}\alpha_{[\mu_1\cdots\mu_r]}dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}, \tag{2.5}$$

se obtiene la (r+1)-forma

$$d\alpha = \frac{1}{r!}\partial_{[\nu}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r]}dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}. \tag{2.6}$$

Esta derivada cumple con la regla de Leibniz con una corrección de signo, además tiene la ventaja que transforma como tensor y es nilpotente

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \\ d^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Definición 2.3. *El operador* $*$ *(dual de Hodge) es una aplicación lineal tal que [20]*

$$* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{(d-p)}(M),$$

al actuar sobre una p-forma α *se obtiene*

$$* \alpha = \frac{\sqrt{|g|}}{p!\,(d-p)!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d}\alpha^{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d}, \tag{2.8}$$

donde g *es el determinante de la métrica y* $\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d}$ *es el símbolo de Levi-civita, el cual es antisimétrico en todos sus índices.*

Definición 2.4. *La coderivada exterior es una aplicación que toma elementos del espacio* Ω^r *sobre una variedad* M *y los envía al espacio* Ω^{r-1}

$$d^\dagger : \Omega^r \longrightarrow \Omega^{r-1}, \tag{2.9}$$

se define en términos de la derivada exterior d *y el dual de Hodge* $*$ *de la siguiente manera*

$$d^\dagger = -(-1)^{p(p+1)-\eta_-} * (d * . \tag{2.10}$$

Definición 2.5. *El operador* $I^{a_1\cdots a_r}$ *es una aplicación tal que*

$$I^{a_1\cdots a_q} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-q}(M), \tag{2.11}$$

que al actual sobre una p*-forma se obtiene* [1].

$$I^{a_1\cdots a_q}\alpha = (-1)^{(d-p)(p-q)+\eta_-} * (e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_q} \wedge *\alpha), \tag{2.12}$$

[1] Este operador fue definido por primera vez en [21] con la diferencia que lo llamaron $\Sigma^{a_1\cdots a_q}$.

por ejemplo, para el caso más relevante para nosotros, cuando $q = 1$ tenemos

$$I^a\alpha = -(-1)^{d(p-1)+\eta_-} * (e^a \wedge *\alpha), \tag{2.13}$$

este operador es similar a la derivada exterior porque cumple la regla de Leibniz con corrección de signo y también es nilpotente

$$\begin{aligned} I^a(\alpha \wedge \beta) &= I^a\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge I^a\beta, \\ I^a I_a &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Definición 2.6. *La derivada covanriante exterior D es una aplicación tal que*

$$D : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}, \tag{2.15}$$

se define en términos de la derivada exterior d y la conexión de espín de la siguiente manera

$$D = d + \omega, \tag{2.16}$$

es importante mencionar que D no es nilpotente, es decir, $D^2 \neq 0$.

Para relacionar la derivada covariante exterior D con la derivada covariante usual ∇, queremos que al actual ambas derivadas sobre una cero-forma $\vec{V}$ sean equivalentes, es decir:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{V} &= D\vec{V}, \\ \big(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda\big) dx^\nu \otimes \partial_\nu &= \big(\partial_\mu V^\nu + \omega^a{}_{b\mu} V^b\big) dx^\nu \otimes \vec{\boldsymbol{e}}_a, \end{aligned} \tag{2.17}$$

esto nos lleva directamente al famoso postulado del vierbein

$$\partial_\mu e^a{}_\nu + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^a{}_\lambda = 0. \tag{2.18}$$

Definición 2.7. *La dos-forma Torsión $T^a \in \Omega^2$,*

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b, \tag{2.19}$$

cuando queremos separar los grados de libertar torsionales de los métricos, introducimos una conexión de espín sin torsión $\mathring{\omega}^a{}_b$ la cual cumple con la ecuación

$$de^a + \mathring{\omega}^a{}_b \wedge e^b = 0, \tag{2.20}$$

ahora, como queremos identificar solamente los grados de libertar torsionales, debemos tomar la diferencia entre la conexión de espín completa y la conexión sin torsión, lo cual nos da como resultado la uno-forma contorsión κ^{ab}

$$\kappa^{ab} = \omega^{ab} - \mathring{\omega}^{ab}, \tag{2.21}$$

Es directo ver que la relación entre la torsión y la contorsión es

$$T^a = \kappa^a{}_b \wedge e^b. \tag{2.22}$$

Definición 2.8. *La dos-forma Curvatura de Lorentz* $R^{ab} \in \Omega^2$

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}, \tag{2.23}$$

usando la ec.(2.21) podemos escribir la curvatura como una parte sin torsión más términos que dependen de la contorsión [2]

$$R^{ab} = \mathring{R}^{ab} + \mathring{D}\kappa^{ab} + \kappa^a{}_c\kappa^{cb}, \tag{2.24}$$

donde $\mathring{D} = d + \mathring{\omega}$ es la derivada covariante exterior construida con la conexión de espín sin torsión. Es sencillo demostrar que las componentes de la torsión T^a y la Curvatura de Lorentz $R^a{}_b$ son

$$T^a = \frac{1}{2} e^a{}_\lambda \left[\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right] dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{2.25}$$

$$R^a{}_b = \frac{1}{2} e_b{}^\lambda e^a{}_\sigma R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{2.26}$$

Para el caso cuando la torsión es nula, la conexión afín se vuelve simétrica y las componentes de la curvatura de Lorentz son $\mathring{R}^a{}_b = \frac{1}{2} e_b{}^\lambda e^a{}_\sigma \mathring{R}^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ donde $\mathring{R}^\sigma{}_{\lambda\mu\nu}$ corresponde al tensor de Riemann de **RG**.

Definición 2.9. *Definimos una nueva derivada* $\mathcal{D}_a$ *tal que*

$$\mathcal{D}_a : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M), \tag{2.27}$$

esta nueva derivada se define en términos de la derivada covariante exterior y el operador I^a *de la siguiente manera*

$$\mathcal{D}_a = \{I_a, D\} = I_a D + D I_a. \tag{2.28}$$

[2] Siempre que usemos $\mathring{R}$ estaremos hablando de la parte sin torsión de R.

El operador diferencial de la definición (2.9) será de gran importancia para para nosotros cuando estudiemos ondas gravitacionales es espacio-tiempos con torsión. A continuación mostramos algunas propiedades importantes que cumple esta derivada [22].

- Cumple con la regla de Leibniz sin corrección de signo

$$\mathcal{D}_a(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{D}_a\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{D}_a\beta. \tag{2.29}$$

- Se relaciona con la derivada convariante usual $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ de la siguiente manera

$$\mathcal{D}_a = e_a{}^\mu \nabla_\mu + I_a T^b \wedge I_b, \tag{2.30}$$

  donde T^b y I_a son los anteriormente mencionados en las definiciones (2.7) y (2.5).

- De la ec.(2.30) vemos fácilmente que para un espacio-tiempo sin torsión las derivadas coinciden.

$$\mathring{\mathcal{D}}_a = e_a{}^\mu \mathring{\nabla}_\mu = \mathring{\nabla}_a. \tag{2.31}$$

- Al invertir la ec.(2.9) se obtiene

$$D = e^a \wedge \mathcal{D}_a - T^a \wedge I_a. \tag{2.32}$$

Definición 2.10. *Generalización de la coderivada covariante*

$$D^\ddagger : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M), \tag{2.33}$$

se define en términos de la derivada covariante exterior D y el operador I_a de la siguiente manera

$$D^\ddagger = -I_a D I^a. \tag{2.34}$$

Definición 2.11. *El operador de Rham*

$$\begin{aligned} \Box_{dR} :&\Omega^p \longrightarrow \Omega^p, \\ \Box_{dR} &= d^\dagger d + d d^\dagger, \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $d^\dagger$ y d son la coderivada y derivada exterior.

Definición 2.12. *Generalización del operador de onda de Lichnerowicz–de Rham*

$$\blacksquare_{LdR} : \Omega^p \longrightarrow \Omega^p(M), \tag{2.36}$$

$$\blacksquare_{LdR} = D^{\ddagger} D + D D^{\ddagger}, \tag{2.37}$$

donde $D^{\ddagger}$ y D vienen dadas por las definiciones (2.6, 2.10).

Definición 2.13. *El operador de Beltrami*

$$\begin{aligned} \square_B :& \Omega^p \longrightarrow \Omega^p, \\ \square_B =& -\mathring{\nabla}^{\mu} \mathring{\nabla}_{\mu}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

donde $\mathring{\nabla}^{\mu}$ es la derivada covariante usual sin torsión $\mathring{\nabla} = \partial + \mathring{\Gamma}$ definida en términos de los símbolos de Christoffel.

Definición 2.14. *Generalización del operador de onda Beltrami* $\blacksquare_B$

$$\blacksquare_B : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M), \tag{2.39}$$

$$\blacksquare_B = -\mathcal{D}_a \mathcal{D}^a, \tag{2.40}$$

donde $\mathcal{D}_a$ es la derivada de la definición (2.9).
Cuando estemos estudiando las ondas gravitacionales en presencia de torsión, los operadores más importantes serán I_a, D y $\mathcal{D}_a$. Por lo tanto, es importante mencionar que estos operadores diferenciales forman una superálgebra abierta que cumple con las siguientes reglas de conmutación y anticonmutación

$$\{I_a, D\} = \mathcal{D}_a, \tag{2.41}$$

$$\{I_a, I_b\} = 0, \tag{2.42}$$

$$\{D, D\} = 2D^2, \tag{2.43}$$

$$[I_a, \mathcal{D}_b] = -T^c{}_{ab} I_c, \tag{2.44}$$

$$[D, \mathcal{D}_b] = D^2 I_b - I_b D^2, \tag{2.45}$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = I_{ab} D^2 + D^2 I_{ab} + I_a D^2 I_b - I_b D^2 I_a - (D T^c{}_{ab} \wedge I_c + T^c{}_{ab} \mathcal{D}_c), \tag{2.46}$$

$$\tag{2.47}$$

donde D^2 dará términos proporcionales a la dor-forma curvatura de Lorentz [3]. La comprobación de estas reglas de (anti)conmutación se muestran en el apéndice A.

[3] Por ejemplo: $D^2 e^a = R^a{}_b \wedge e^b$, $D^2 T^a = R^a{}_b \wedge T^b$.

Los operadores de onda de las definiciones (2.12, 2.14) cumplen la identidad de Weitzenböck

$$\blacksquare_{\text{LdR}} = \blacksquare_{\text{B}} + I_a D^2 I_a, \tag{2.48}$$

para obtener más información sobre el planteamiento y demostración de la identidad de Weitzenböck se puede consultar las referencias [22, 23]. Lo que vamos a hacer a continuación es mostrar un ejemplo de como funciona la identidad Weitzenböck en un espacio tiempo sin torsión para la uno forma del potencial electromagnético $A = A_\mu dx^\mu$ [4].

$$\begin{aligned}
\Box_{\text{dR}} A &= \Box_{\text{B}} A + I_a \mathring{D}^2 I^a A, \\
&= \Box_{\text{B}} A + I_a \mathring{D}^2 A^a, \\
&= \Box_{\text{B}} A + I_a \mathring{R}^a{}_b \wedge I^b A, \\
&= \Box_{\text{B}} A + I_a \left(\frac{1}{2} \mathring{\mathcal{R}}^a{}_{b\sigma\nu} A^b dx^\sigma \wedge dx^\nu \right), \\
&= \Box_{\text{B}} A + \mathring{\mathcal{R}}_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

[5]en la segunda línea hemos aplicado el operador I^a sobre la 1-forma A, en la tercera igualdad usamos la identidad de Bianchi. Después usamos la ec.(2.26) para terminar aplicando el operador I_a sobre la 2-forma que está entre paréntesis. Recordemos que el tensor de Ricci es $\mathring{\mathcal{R}}_{bd} = \mathring{\mathcal{R}}^a{}_{bad}$.
Veamos ahora como quedan las ecuaciones de onda para el tensor electromagnético $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ usando la identidad de Weitzenböck en el caso de torsión nula

$$\begin{aligned}
\Box_{\text{dR}} F &= \Box_{\text{B}} F + I_a \mathring{D}^2 I^a F, \\
&= \Box_{\text{B}} F + I_a \mathring{R}^a{}_b \wedge F^b, \\
&= \Box_{\text{B}} F + I_a \left(\frac{1}{2} \mathring{\mathcal{R}}^a{}_{b\alpha\mu} F^b{}_\nu \right) dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu, \\
&= \Box_{\text{B}} F + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \mathring{\mathcal{R}}^a{}_{b\alpha\mu} F^b{}_\nu \, \delta^{\lambda\rho\sigma}_{\alpha\mu\nu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \right], \\
&= \Box_{\text{B}} F + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\alpha\mu} F^\lambda{}_\nu - \mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\alpha\nu} F^\lambda{}_\mu - \mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\mu\alpha} F^\lambda{}_\nu \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \right], \\
&\qquad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} F^\lambda{}_\alpha + \mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\nu\alpha} F^\lambda{}_\mu - \mathring{\mathcal{R}}^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} F^\lambda{}_\alpha \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \right], \\
&= \Box_{\text{B}} F + \frac{1}{2} \left(\mathring{\mathcal{R}}_{\lambda\mu} F^\lambda{}_\nu - \mathring{\mathcal{R}}_{\lambda\nu} F^\lambda{}_\mu - \mathring{\mathcal{R}}^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

[4]Es curioso que nadie sabe a ciencia cierta quien fue el primero en obtener la identidad de Weitzenböck, a pesar que lleva el nombre del matemático austriaco dicha identidad no aparece en sus trabajos.

[5]En la identidad de Weitzenböck el número de términos de curvatura dependerán del grado de la forma sobre la cual actúe .

Estos dos ejemplos son para mostrar que la identidad de Weitzenböck podríamos escribirla como

$$\Box_{\mathrm{dR}} = \Box_{\mathrm{B}} + (\text{Términos de curvatura de Riemann}), \tag{2.51}$$

donde la forma y cantidad de términos de curvatura dependerán del objeto al que apliquemos esta ecuación.

Capítulo 3

Ondas gravitacionales en presencia de torsión

3.1. Teoría ECSK

La acción de esta teoria gravitacional va a depender de dos campos independientes, el vielbein y la conexión

$$S\left[e^a, \omega^{ab}\right] = \int_M \mathcal{L}\left(e^a, \omega^{ab}\right), \tag{3.1}$$

ahora, para que la acción tenga sentido, la lagrangiana debe ser una 4-forma invariante bajo transformaciones locales de Lorentz. Algo que debemos tener en cuenta es que todos los términos que podamos escribir como derivadas totales no van a ser relevantes en las ecuaciones de campo. Con esto en mente se puede llegar a que la lagrangiana debe ser de la forma

$$\mathcal{L}\left(e^a, \omega^{ab}\right) = \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\left(e^a, \omega^{ab}\right), \tag{3.2}$$

donde $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ es la lagrangiana de materia y $\kappa = 8\pi G/c^4$. La variación de la acción de materia respecto al vielbein define el tensor momento-energía

$$\delta_{\mathrm{e}}\mathcal{L}^{(4)} = - * \mathcal{T}_a \, \delta e^a, \tag{3.3}$$

y al hacer la variación de la acción de materia respecto a la conexión podemos definir el tensor de espín

$$\delta_\omega \mathcal{L}^{(4)} = -\frac{1}{2}\delta\omega^{ab} \wedge *\sigma_{ab}. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, al tomar la variación de la acción completa podemos obtener las ecuaciones de campo [1]

[1] Si desea ver los detalles de como obtener las ecuaciones de campo puede ver el apéndice B.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\mathcal{R} &= \kappa\mathcal{T}_{ab}\ , \\ T^{a}{}_{bc} - \delta^{a}_{b}T^{i}{}_{ic} + \delta^{a}_{c}T^{i}{}_{ib} &= \kappa\sigma^{a}{}_{bc}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si sumamos las tres siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} T_{abc} - \eta_{ab}T^{n}{}_{nc} + \eta_{ac}T^{n}{}_{nb} &= \kappa\sigma_{abc}, \\ +\frac{1}{2}\eta_{ac}(T^{n}{}_{nb} - \eta^{m}{}_{m}T^{n}{}_{nb} + T^{n}{}_{nb}) &= \frac{1}{2}\kappa\eta_{ac}\sigma^{n}{}_{nb}, \\ -\frac{1}{2}\eta_{ab}(T^{n}{}_{nc} - \eta^{m}{}_{m}T^{n}{}_{nc} + T^{n}{}_{nc}) &= -\frac{1}{2}\kappa\eta_{ab}\sigma^{n}{}_{nc}, \end{aligned}$$

obtenemos la solución algebraica para la torsión, esto significa que la torsión no se propaga

$$T_{abc} = \kappa\left(\sigma_{abc} + \frac{1}{2}\eta_{ac}\sigma^{n}{}_{nb} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\sigma^{n}{}_{nc}\right). \tag{3.6}$$

Como no hemos puesto ninguna restricción sobre el tensor de momento-energía o el Ricci, estos tendrán una parte simétrica y una parte antisimétrica $\mathcal{R}^{\pm}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ab} \pm \mathcal{R}_{ba})$, $\mathcal{T}^{\pm}_{ab} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_{ab} \pm \mathcal{T}_{ba})$. La novedad en este caso, es que la parte antisimétrica del tensor de Ricci estará directamente relacionada con la torsión [2], dando así las siguientes ecuaciones [3]

$$\mathcal{R}^{+}_{ab} = -\frac{1}{2}\eta_{ab}\mathcal{R} = \mathcal{T}^{+}_{ab}, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{R}^{-}_{ab} = -\frac{1}{2}I_{cba}DT^{c} = \kappa\mathcal{T}^{-}_{ab}, \tag{3.8}$$

$$T_{abc} - \eta_{ba}T^{n}{}_{nc} + \eta_{ca}T^{n}{}_{nb} = \kappa\sigma_{abc}, \tag{3.9}$$

con este conjunto de ecs.((3.6), (3.7), (3.8), (3.9)) podemos observar por ejemplo, que en el vacío el tensor de espín será nulo llevando a que la torsión y la parte antisimétrica del Ricci desaparezcan, recuperando el mismo comportamiento que **RG** usual. Gracias a la similitud entre **RG** y **ECSK**, esta teoría nos permite estudiar ondas gravitacionales en presencia de torsión sin irnos a escenarios más complejos.

[2] Usando la identidad de Bianchi $R^{a}{}_{b} \wedge e^{b} = DT^{a}$, es posible obtener la parte antisimétrica del Ricci.

[3] Como tenemos tantas letras parecidas, no esta de más aclarar que la $\mathcal{T}_{ab}$ hace referencia al momento-energía mientras que T_{abc} hace referencia a la torsión.

3.2. Perturbaciones de los campos

La forma tradicional de iniciar a estudiar ondas gravitacionales en **RG** es considerar que la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la suma de una métrica de fondo $g_{\mu\nu}$ y una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.10}$$

con esto calcular el tensor de Einstein para estudiar su comportamiento bajo esta perturbación.
Siguiendo esta idea, vamos a considerar perturbaciones sobre los campos, que en este casos serán el vielbein y la conexión de espín

$$\begin{aligned} \bar{e}^a &= e^a + \frac{1}{2}H^a, \\ \bar{\omega}^{ab} &= \omega^{ab} + u^{ab}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Las perturbaciones del vielbein son una 1-forma $H^a = H^a{}_b e^b$ con componentes simétricas $H_{ab} = H_{ba}$ [4]. Recordemos ahora que las métricas $g_{\mu\nu}$ y $\bar{g}_{\mu\nu}$ están relacionadas con los vielbeins e^a y $\bar{e}^a$ respectivamente,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu \qquad , \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \tag{3.12}$$

usando la ec.(3.10) podemos ver como se relaciona la perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$ con la perturbación del vielbein H^a

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}, \\ &= \eta_{ab}\bar{e}^a{}_\mu \bar{e}^b{}_\nu - \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \\ &= \eta_{ab}\left(e^a{}_\mu + \frac{1}{2}H^a{}_c e^c{}_\mu\right)\left(e^b{}_\nu + \frac{1}{2}H^b{}_d e^d{}_\nu\right) - \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \\ &= \frac{1}{2}H_{bc} e^c{}_\mu e^b{}_\nu + \frac{1}{2} e^a{}_\mu H_{ad} e^d{}_\nu + \frac{1}{4} H_{bc} e^c{}_\mu H^b{}_d e^d{}_\nu, \\ &= H_{\mu\nu} + \frac{1}{4} H_{\lambda\mu} H^\lambda{}_\nu, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $H_{\mu\nu} = H_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$. La relación inversa puede obtenerse haciendo una expansión en series

$$H^a{}_\mu = h^a{}_\mu - \frac{1}{4} h^a{}_\rho h^\rho{}_\mu + \cdots ,$$

[4] La parte antisimétrica de la perturbación del vielbein no es relevante porque es una transformación local de Lorentz infinitesimal de e^a.

con estas relaciones nos aseguramos que $H_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$ parametrizan los mismos grados de libertar métricos.
Siguiendo el procedimiento de la referencia [24], la perturbación de la conexión u^{ab} la podemos escribir como una perturbación sin torsión $\mathring{u}^{ab} = \mathring{\bar{\omega}}^{ab} - \mathring{\omega}^{ab}$ más una parte que contenga toda parte torsional $q^{ab} = \bar{\kappa}^{ab} - \kappa^{ab}$, esto es posible si consideramos

$$\begin{aligned} u^{ab} &= \bar{\omega}^{ab} - \omega^{ab}, \\ &= \left(\bar{\kappa}^{ab} + \mathring{\bar{\omega}}^{ab}\right) - \left(\kappa^{ab} + \mathring{\omega}^{ab}\right), \\ &= \mathring{\bar{\omega}}^{ab} - \mathring{\omega}^{ab} + \bar{\kappa}^{ab} - \kappa^{ab}, \\ &= \mathring{u}^{ab} + q^{ab}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Naturalmente $\mathring{\bar{\omega}}^{ab}$ debe ser una conexión sin torsión para la geometría perturbada

$$\begin{aligned} T^a = 0 &= d\bar{e}^a + \mathring{\bar{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{e}^b, \\ &= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\mathring{u}^a{}_b + \mathring{\omega}^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\ &= de^a + \frac{1}{2}H^a + \mathring{u}^a{}_b \wedge e^b + \mathring{u}^a{}_b \wedge \frac{1}{2}H^a + \mathring{\omega}^a{}_b \wedge \frac{1}{2}H^b, \\ &= \frac{1}{2}\left(dH^a + \mathring{\omega}^a{}_b \wedge H^b\right) + \mathring{u}^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) + de^a + \mathring{\omega}^a{}_b \wedge e^b, \\ &= \frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \end{aligned}$$

en estos simples pasos hemos tenido en cuenta como se expresa la perturbación del vielbein y la conexión de espín sin torsión, después organizamos un poco y usamos la definición de la derivada covariante exterior sin torsión, para llegar finalmente a la ecuación de $\mathring{u}^a{}_b$

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) = 0.} \tag{3.15}$$

Por la forma en como esta construido $\mathring{u}_{ab}$ no puede tener grados de libertad independientes, dicho de otro modo, puede depender de H^a y sus derivadas, con esto en mente podemos plantear una solución para la ec.(3.15) en forma de serie

$$\mathring{u}_{ab} = \mathring{u}^{(1)}_{ab} + \mathring{u}^{(2)}_{ab} + \cdots ,$$

donde $\mathring{u}^{(1)}_{ab}$ hace referencia a que es de orden lineal en H^a, $\mathring{u}^{(2)}_{ab}$ es de orden cuadrático en H^a y así sucesivamente. Veamos entonces como es la solución de ec.(3.15) a primer orden $\mathring{u}_{ab} = \mathring{u}^{(1)}_{ab}$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^{a(1)}_{\ b} \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&= \frac{1}{2}\mathring{D}H^a + \mathring{u}^{a(1)}_{\ b} \wedge e^b, \\
&= \left(\frac{1}{4}\mathring{\mathcal{D}}_n H^a_{\ m}\delta^{nm}_{cb} + \frac{1}{2}\mathring{u}^{a(1)}_{\ nm}\delta^{nm}_{bc}\right)e^c \wedge e^b,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

lo cual significa que las componentes deben ser iguales a cero

$$
\frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_c H_{ab} - \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} + \mathring{u}^{(1)}_{abc} - \mathring{u}^{(1)}_{acb} = 0, \tag{3.17}
$$

si hacemos un par de permutaciones cíclicas y sumando de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\mathring{u}^{(1)}_{abc} - \mathring{u}^{(1)}_{acb} &= \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_c H_{ab}, \\
\mathring{u}^{(1)}_{bca} - \mathring{u}^{(1)}_{bac} &= \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_c H_{ba} - \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}, \\
-\mathring{u}^{(1)}_{cab} + \mathring{u}^{(1)}_{cba} &= -\frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_a H_{cb} + \frac{1}{2}\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ca},
\end{aligned}
$$

además, recordando que $\mathring{u}^{(1)}_{abc} + \mathring{u}^{(1)}_{bac} = 0$ y $H_{ab} = H_{ba}$, llegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathring{u}^{(1)}_{abc} - \mathring{u}^{(1)}_{bac} &= \mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}, \\
\mathring{u}^{(1)}_{abc} &= \frac{1}{2}\Big(\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}\Big),
\end{aligned}
$$

para finalmente obtener

$$
\mathring{u}^{(1)}_{ab} = \frac{1}{2}\Big(\mathring{\mathcal{D}}_b H_{ac} - \mathring{\mathcal{D}}_a H_{bc}\Big)e^c = -\frac{1}{2}\Big(I_a\mathring{D}H_b - I_b\mathring{D}H_a\Big). \tag{3.18}
$$

Siguiendo este mismo procedimiento, podemos obtener la solución a segundo orden $\mathring{u}_{ab} = \mathring{u}^{(1)}_{ab} + \mathring{u}^{(2)}_{ab}$, considerando solo términos hasta $\mathcal{O}(H^2)$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\mathring{D}H_a + \left(\mathring{u}^{(1)}_{ab} + \mathring{u}^{(2)}_{ab}\right) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&= \frac{1}{2}\mathring{D}H_a + \mathring{u}^{(1)}_{ab} \wedge e^b + \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{ab} \wedge H^b + \mathring{u}^{(2)}_{ab} \wedge e^b, \\
&= \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{ab} \wedge H^b + \mathring{u}^{(2)}_{ab} \wedge e^b, \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{akn}H^k_{\ m}\delta^{nm}_{cb} + \frac{1}{2}\mathring{u}^{(2)}_{anm}\delta^{nm}_{bc}\right]e^c \wedge e^b,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

esto significa que las componentes deben ser iguales a cero

$$\frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{akc}H^{k}{}_{b} - \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{akb}H^{k}{}_{c} + \mathring{u}^{(2)}_{abc} - \mathring{u}^{(2)}_{acb} = 0. \tag{3.20}$$

Haciendo permutaciones cíclicas y sumando lo siguientes términos

$$\begin{aligned}
\mathring{u}^{(2)}_{abc} - \mathring{u}^{(2)}_{acb} &= \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{akb}H^{k}{}_{c} - \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{akc}H^{k}{}_{b}, \\
\mathring{u}^{(2)}_{bca} - \mathring{u}^{(2)}_{bac} &= \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{bkc}H^{k}{}_{a} - \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{bka}H^{k}{}_{c}, \\
-\mathring{u}^{(2)}_{cab} + \mathring{u}^{(2)}_{cba} &= -\frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{cka}H^{k}{}_{b} + \frac{1}{2}\mathring{u}^{(1)}_{ckb}H^{k}{}_{a},
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathring{u}^{(2)}_{abc} - \mathring{u}^{(2)}_{bac} &= \frac{1}{2}\Big[\mathring{u}^{(1)}_{akb}H^{k}{}_{c} - \mathring{u}^{(1)}_{akc}H^{k}{}_{b} + \mathring{u}^{(1)}_{bkc}H^{k}{}_{a} - \mathring{u}^{(1)}_{bka}H^{k}{}_{c} - \mathring{u}^{(1)}_{cka}H^{k}{}_{b} + \mathring{u}^{(1)}_{ckb}H^{k}{}_{a}\Big], \\
\mathring{u}^{(2)}_{abc} &= \frac{1}{4}\Big[\mathring{u}^{(1)}_{akb}H^{k}{}_{c} - \mathring{u}^{(1)}_{akc}H^{k}{}_{b} + \mathring{u}^{(1)}_{bkc}H^{k}{}_{a} - \mathring{u}^{(1)}_{bka}H^{k}{}_{c} - \mathring{u}^{(1)}_{cka}H^{k}{}_{b} + \mathring{u}^{(1)}_{ckb}H^{k}{}_{a}\Big], \\
\mathring{u}^{(2)}_{ab} &= \frac{1}{8}I_{ab}\Big(\mathring{D}H_{k}\wedge H^{k}\Big) + \frac{1}{2}\Big[I_{b}\Big(\mathring{u}^{(1)}_{ak}\wedge H^{k}\Big) - I_{a}\Big(\mathring{u}^{(1)}_{bk}\wedge H^{k}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Hasta aquí podemos decir que hemos solucionado la ec.(3.15) en términos de la derivada covariante sin torsión, pero todas las cantidades que nos interesan usan la derivada covariante exterior con torsión.
Para solucionar este problema se plantea la siguiente parametrización de las perturbaciones

$$U^{ab} = u^{ab} - \Delta^{ab}, \tag{3.22}$$

$$V^{ab} = q^{ab} - \Delta^{ab}. \tag{3.23}$$

Donde Δ^{ab} es una 1-forma antisimétrica que debemos determinar. En términos de las nuevas variables la perturbación de espín la podemos escribir como

$$u^{ab} = \mathring{u}^{ab} + q^{ab} = U^{ab} + V^{ab},$$

y la condición para $\mathring{\bar{\omega}}^{ab}$ tomara la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
T^a = 0 &= d\bar{e}^a + \mathring{\bar{\omega}}^a{}_b \wedge \bar{e}^b, \\
&= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\mathring{u}^a{}_b + \mathring{\omega}^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (U^a{}_b + \Delta^a{}_b + \omega^a{}_b - \kappa^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&= \frac{1}{2}\big(dH^a + \omega^a{}_b \wedge H^b\big) + U^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) + \Delta^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&+ de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b - \kappa^a{}_b \wedge -\frac{1}{2}\kappa^a{}_b H^b, \\
&= \frac{1}{2}DH^a + U^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) + \Delta^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}\kappa^a{}_b H^b.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Exigiendo que Δ^{ab} satisfaga la condición

$$
\Delta_{ab} \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}\kappa_{ab} \wedge H^b = \frac{1}{2}I_a\left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2}H^b \wedge I_b(H^c \wedge T_c)\right] + \mathcal{O}\big(H^3\big), \tag{3.25}
$$

podemos resolver la ec.(3.25) en forma de serie en ordenes de H^a

$$
\Delta_{ab} = \Delta^{(1)}_{ab} + \Delta^{(2)}_{ab} + \mathcal{O}\big(H^3\big),
$$

la solución para primer y segundo orden serán

$$
\Delta^{(1)}_{ab} = \frac{1}{2}[I_a(\kappa^c_{bc}) - I_b(\kappa_{ac} \wedge H^c)], \tag{3.26}
$$

$$
\Delta^{(2)}_{ab} = -\frac{1}{8}I_{ab}\big(H^c \wedge \kappa^d_{cd}\big) - \frac{1}{2}\left[I_a\left(\Delta^{(1)}_{bc} \wedge H^c\right) - I_b\big(\Delta^{(1)}_{ac} \wedge H^c\big)\right]. \tag{3.27}
$$

Con esta elección de Δ_{ab}, podemos escribir las ecs.((3.18),(3.21)) en términos de U_{ab} de la siguiente forma

$$
U^{(1)}_{ab} = -\frac{1}{2}(I_a DH_b - I_b DH_a), \tag{3.28}
$$

$$
U^{(2)}_{ab} = \frac{1}{8}I_{ab}(DH_c \wedge H^c) - \frac{1}{2}\left[I_a\left(U^{(1)}_{bc} \wedge H^c\right) - I_b\big(U^{(1)}_{ac} \wedge H^c\big)\right], \tag{3.29}
$$

estas ecuaciones son las más adecuadas ya que se encuentran en términos de la derivada exterior, no como antes que solo aparecía la derivada sin torsión.
Con esto la torsión y curvatura perturbada son

$$
\begin{aligned}
T^a \longrightarrow \bar{T}^a &= d\bar{e}^a + \bar{\omega}^a{}_b \wedge \bar{e}^b, \\
&= d\left(e^a + \frac{1}{2}H^a\right) + (\omega^a{}_b + u^a{}_b) \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right), \\
&= T^a + \frac{1}{2}DH^a + u^a{}_b \wedge e^b + \frac{1}{2}u^a{}_b \wedge H^b, \\
&= T^a + \frac{1}{2}DH^a + U^a{}_b \wedge e^b + V^a{}_b \wedge e^b + \frac{1}{2}U^a{}_b \wedge H^b + \frac{1}{2}V^a{}_b \wedge H^b, \\
&= T^a + V^a{}_b \wedge \left(e^b + \frac{1}{2}H^b\right) - \frac{1}{2}I_a\left[H^b \wedge T_b - \frac{1}{2}H^b \wedge I_b(H^c \wedge T_c)\right],
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{ab} \longrightarrow \bar{R}^{ab} &= d\bar{\omega}^{ab} + \bar{\omega}^a{}_c \wedge \bar{\omega}^{cb}, \\
&= d\big(\omega^{ab} + u^{ab}\big) + (\omega^a{}_c + u^a{}_c) \wedge \big(\omega^{cb} + u^{cb}\big), \\
&= R^{ab} + DU^{ab} + DV^{ab} + (U^a{}_c + V^a{}_c) \wedge \big(U^{cb} + V^{cb}\big), \\
&= R^{ab} + DU^{ab}_{(1)} + DV^{ab} + DU^{ab}_{(2)} + \big(U^a_{(1)c} + V^a{}_c\big) \wedge \big(U^{cb}_1 + V^{cb}\big) + \mathcal{O}\big(H^3\big), \\
&= R^{ab} + R^{ab}_{(1)} + R^{ab}_{(2)} + \mathcal{O}\big(H^3\big),
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

donde $R^{ab}_{(1)} = DU^{ab}_{(1)} + DV^{ab}$ es un término lineal en H y V, $R^{ab}_{(2)} = DU^{ab}_{(2)} + \left(U^a_{(1)c} + V^a{}_c\right) \wedge \left(U^{cb}_{(1)} + V^{cb}\right)$ es un término cuadrático en H y V. Para nosotros será relevante solamente el término $R^{ab}_{(1)}$ porque dan derivadas de segundo oren de H, permitiéndonos estudiar la propagación de ondas gravitacionales.
Con las ecs.((3.30), (3.31)) podemos reescribir las ecuaciones de campo para la curvatura hasta segundo orden

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^m{}_n &= e^m \wedge \left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}\big(R^{ab} + R^{ab}_{(1)} + R^{ab}_{(2)}\big) \wedge \left(e^c + \frac{1}{2}H^c\right) - \kappa * \bar{\mathcal{T}}_n\right) = 0, \\
\mathcal{E}^m{}_n &= e^m \wedge \big(\mathcal{G}_n + \mathcal{G}^{(1)}_n + \mathcal{G}^2_n - \kappa * \bar{\mathcal{T}}_n\big) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_n &= \frac{1}{2}\epsilon_{acbn}R^{ab} \wedge e^c, \\
\mathcal{G}^{(1)}_n &= \frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge e^c + \frac{1}{4}\epsilon_{abcn}R^{ab} \wedge H^c, \\
\mathcal{G}^{(2)}_n &= \frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(2)} \wedge e^c + \frac{1}{4}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge H^c,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

y para la torsión hasta segundo orden

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^m{}_{ab} &= e^m \wedge \left(\left(T^c + T^c_{(1)} + T^c_{(2)}\right) \wedge \left(e^d + \frac{1}{2}H^d\right) - \kappa * \bar{\sigma}_{ab} \right) = 0, \\ \mathcal{E}^m{}_{ab} &= e^m \wedge \left(\tau_d + \tau^{(1)}_d + \tau^{(2)}_d - \kappa * \bar{\sigma}_{ab} \right) = 0,\end{aligned} \tag{3.34}$$

con

$$\begin{aligned}\tau_d &= \epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d, \\ \tau^{(1)}_d &= \epsilon_{abcd} \left(\frac{1}{2} T^c \wedge H^a + T^c_{(1)} \wedge e^d \right), \\ \tau^{(2)}_d &= \epsilon_{abcd} \left(\frac{1}{2} T^c_{(1)} \wedge H^a + T^c_{(2)} \wedge e^d \right).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Para que la onda gravitacional este bien definida, debe existir una separación evidente de escalas entre el fondo y la perturbación, esto se hace considerando que la escala de variación típica del fondo sea L, mientras que la escala de variación de la perturbación es λ tal que

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} \ll L_B, \tag{3.36}$$

Lo cual es equivalente a decir que la frecuencia de oscilación de la perturbación debe ser mucho mayor que la frecuencia del fondo. Considerando que la métrica y el vielbein son $\mathcal{O}(1)$, $H^a \sim \mathcal{O}(H)$ y $V^{ab} \sim \mathcal{O}(V)$. Los términos construidos con el vielbein y la conexión de fondo son de baja frecuencia, es decir, que escalaran de la siguiente forma

$$\left|R^{ab}\right| \sim \frac{1}{L^2}, \tag{3.37}$$

$$|T^a| \sim \frac{\epsilon_T}{L}, \tag{3.38}$$

donde el parámetro ϵ_T nos indicara la intensidad de la intensidad de la torsión en la teoría. $R^{ab}_{(1)}$ y $T^{(1)}_{abc}$ contienen modos de alta frecuencia, $R^{ab}_{(2)}$ y $T^{(2)}_{abc}$ pueden contener modos de alta y baja frecuencia. Por lo tanto, podemos seguir el método tradicional que es separar las ecuaciones de campo en dos grupos, el primero que contenga solo términos de frecuencias bajas y el otro que contenga solo términos de frecuencias altas [25]

Ecuaciones con términos de frecuencias bajas

$$\mathcal{R}^+_{ab} + \mathcal{R}^{+(2)}_{ab}\Big|_{\text{baja}} = \kappa \left(\mathcal{T}^+_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\mathcal{T} \right)\Big|_{\text{baja}}, \tag{3.39}$$

$$\mathcal{R}^-_{ab} + \mathcal{R}^{-(2)}_{ab}\Big|_{\text{baja}} = \kappa\, \mathcal{T}^-_{ab}\Big|_{\text{baja}}, \tag{3.40}$$

$$T_{abc} + T^{(2)}_{abc}\Big|_{\text{baja}} = \kappa \left(\sigma_{abc} + \frac{1}{2}\eta_{ac}\sigma^n{}_{nb} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\sigma^n{}_{nc} \right)\Big|_{\text{baja}}. \tag{3.41}$$

Ecuaciones con términos de frecuencias altas

$$\mathcal{R}^{+(1)}_{ab} + \mathcal{R}^{+(2)}_{ab}\Big|_{\text{alta}} = \kappa\left(\mathcal{T}^{+}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\mathcal{T}\right)\Big|_{\text{alta}}, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{R}^{-(1)}_{ab} + \mathcal{R}^{-(2)}_{ab}\Big|_{\text{alta}} = \kappa\,\mathcal{T}^{-}_{ab}\Big|_{\text{alta}}, \tag{3.43}$$

$$T^{(1)}_{abc} + T^{(2)}_{abc}\Big|_{\text{alta}} = \kappa\left(\sigma_{abc} + \frac{1}{2}\eta_{ac}\sigma^{n}{}_{nb} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\sigma^{n}{}_{nc}\right)\Big|_{\text{alta}}. \tag{3.44}$$

A partir de las ecuaciones de campo de baja frecuencia ecs.((3.39),(3.40),(3.41)) podríamos obtener los tensores momento-energía y de espín efectivos de las ondas gravitacionales, mientras que las ecuaciones de altas frecuencias ecs.((3.42),(3.43),(3.44)) nos indicaran como se propaga la onda gravitacional.

3.3. Propagación de la onda

En este trabajo estamos interesados en la propagación de ondas gravitacionales en la teoría **ECSK**, por lo tanto solo nos centraremos en estudiar las ecuaciones de alta frecuencia ecs.((3.42),(3.43),(3.44)). Después de ver cuales son los términos dominantes y subdominantes de la curvatura (Ver apéndice para más detalles C) [26] llegamos a que debemos solucionar la ec.(C.13) la cual podemos reescribir como

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}_{(1)} \wedge e^{c} = \left(W_{mn} - \frac{1}{2}\eta_{mn}W\right) * e^{m} = 0, \tag{3.45}$$

con

$$\begin{aligned}
W^{m}{}_{n} &= I_{an}R^{am}_{(1)} = 0,\\
&= I_{an}D\big(U^{am}_{(1)} + V^{am}\big),\\
&= (I_n\mathcal{D}_a - I_a\mathcal{D}_n)\big(U^{am}_{(1)} + V^{am}\big),\\
&= \frac{1}{2}[-I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^aH^m + I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^mH^a + \mathcal{D}_nI_a\left(\mathcal{D}^aH^m - \mathcal{D}^mH^a\right)] + \left(I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_nI_a\right)V^{am},\\
&= -\frac{1}{2}\left(I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^aH_m - I_n\left[\mathcal{D}_a,\mathcal{D}_m\right]H^a\right) + (I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_nI_a)V^{am},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

en este procedimiento hemos empleado algunas reglas de (anti)conmutación ecs((2.42)-(2.47)), el gauge de Lorenz $\mathcal{D}_aH^a - \frac{1}{2}dH = 0$. Es importante notar que el termino de H_m corresponde al operador de onda de Lichnerowicz–de Rham ec.(2.48).

3.3.1. Análisis Eikonal

Como tenemos que $\lambda\!\!\!^{-} \ll L$, donde L es la escala de variación típica del fondo y $\lambda\!\!\!^{-}$ la escala de variación típica de la perturbación. Podemos utilizar la aproximación Eikonal, la cual consiste en proponer un ansatz para las perturbaciones que tenga una fase θ rápidamente variable (con escala de variación típica $\lambda\!\!\!^{-}$), mientras que la amplitud varia lentamente (con escala de variación típica L) [5]. Definimos la 1-forma de onda $k := d\theta = k_a e^a$

$$\begin{aligned} H^a &= e^{i\theta}\mathbb{H}^a, \\ V^a_{\ b} &= e^{i\theta}\mathbb{V}^a{}_b, \end{aligned} \tag{3.47}$$

reemplazando el anzats propuesto ec.(3.47) en la ec.(3.46) tenemos

$$W_{mn} = -\frac{1}{2}\left\{I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\left(e^{i\theta}\mathbb{H}_m\right) - I_n\left[\mathcal{D}_a,\mathcal{D}_m\right]\left(e^{i\theta}\mathbb{H}^a\right)\right\} + \left(I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a\right)\left(e^{i\theta}\mathbb{V}^a{}_m\right), \tag{3.48}$$

el primer término lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\left(e^{i\theta}\mathbb{H}_m\right) &= I_n\mathcal{D}_a\left[e^{i\theta}(ik^a\mathbb{H}_m + \mathcal{D}_a\mathbb{H}_m)\right], \\ &= I_n\left\{e^{i\theta}\left[-k^2\mathbb{H}_m + ik^a\mathcal{D}_a\mathbb{H}_m + i\mathcal{D}^a k_a\mathbb{H}_m + ik_a\mathcal{D}^a\mathbb{H}_m + \mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\mathbb{H}_m\right]\right\}, \\ &= e^{i\theta}\left[-k^2\mathbb{H}_{mn} + i(2k^a I_n\mathcal{D}_a\mathbb{H}_m + \mathcal{D}^a k_a\mathbb{H}_{mn}) + I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\mathbb{H}_m\right], \\ &= e^{i\theta}\left[-k^2\mathbb{H}_{mn} + i\left(2k^a T_{ban}\mathbb{H}^b{}_m + 2k^a\mathcal{D}_a\mathbb{H}_{mn} + \mathcal{D}_a k^a\mathbb{H}_{mn}\right) + I_n\mathcal{D}_a\mathcal{D}^a\mathbb{H}_m\right], \end{aligned} \tag{3.49}$$

haciendo un desarrollo similar podemos escribir el segundo y tercer término de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_n[\mathcal{D}_a,\mathcal{D}_m]\left(e^{i\theta}\mathbb{H}^a\right) &= e^{i\theta}\left(I_n[\mathcal{D}_a,\mathcal{D}_m]\mathbb{H}^a - iT_{abm}k^a\mathbb{H}^b{}_n\right), \\ \left(I_n\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_n I_a\right)\left(e^{i\theta}\mathbb{V}^a{}_m\right) &= e^{i\theta}\left\{ik^a\left(\mathbb{V}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}_{mc}{}^c\right) + I_n\mathcal{D}_a\mathbb{V}^a{}_m - \mathcal{D}_n I_a\mathbb{V}^a{}_m\right\}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

Usando esto en la ec.(3.48) tenemos

$$\begin{aligned} W_{mn}(H,V) = e^{i\theta}&\left\{\frac{1}{2}k^2\mathbb{H}_{mn} + \mathbb{W}_{mn}\right\} \\ &- ie^{i\theta}\left\{\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a\mathbb{H}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a\mathbb{H}_{mn} + T_{ban}\mathbb{H}^b_m + \frac{1}{2}T_{abm}\mathbb{H}^b{}_n - \left(\mathbb{V}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}_{mc}{}^c\right)\right]\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

[5] Por simplicidad escogemos que la fase θ sea igual para las dos perturbaciones, pero en general pueden ser distintas.

En la serie Eikonal, las amplitudes de las perturbaciones $\mathbb{H}^a$ y $\mathbb{V}^{am}$ las podemos descomponer en una parte dominante $\mathbb{H}^a_{(0)}$ y $\mathbb{V}^{am}_{(0)}$ más términos de orden superior en ϵ

$$k \sim \frac{1}{L}\frac{1}{\epsilon}, \tag{3.52}$$

$$\partial k \sim \frac{1}{L^2}\frac{1}{\epsilon}, \tag{3.53}$$

$$\mathbb{H}^a = \sum_0^\infty \mathbb{H}^a_{(p)}, \tag{3.54}$$

$$\mathbb{V}^{am} = \sum_0^\infty \mathbb{V}^{am}_{(p)}, \tag{3.55}$$

$$\tag{3.56}$$

donde $\mathbb{H}^a_{(p)}$ y $\mathbb{V}^{am}_{(p)}$ son de orden ϵ^p. Esto nos permite identificar que W_{mn} tiene términos de distintos ordenes en ϵ, para nosotros solamente serán relevantes los términos dominantes $W_{mn(-2)}$ que son de orden $1/\epsilon^2$ y los términos subdominantes $W_{mn(-1)}$ que son de orden $1/\epsilon$, todo lo demás son desviaciones a la óptica geométrica.

$$W_{mn}\Big|_{\text{Dom+Subdom}} = e^{i\theta}\big(W_{mn(-2)} + W_{mn(-1)}\big), \tag{3.57}$$

con

$$\begin{aligned} W_{mn(-2)}(H,V) &= \frac{1}{2}k^2\mathbb{H}^{(0)}_{mn}, \\ W_{mn(-1)}(H,V) &= \frac{1}{2}k^2\mathbb{H}^{(1)}_{mn} - i\left(\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathbb{H}^{(0)}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a\mathbb{H}^{(0)}_{mn} + T_{ban}\mathbb{H}^b_{(0)m} + \frac{1}{2}T_{abm}\mathbb{H}^b_{(0)n} - \left(\mathbb{V}^{(0)}_{amn} + \eta_{an}\mathbb{V}^{(0)c}_{mc}\right)\right]\right). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Recordando que $W_{mn} = 0$, a orden dominante obtenemos que la relación de dispersión es la misma de **RG**

$$k_a k^a = k_\mu k^\mu = k^2 = 0. \tag{3.59}$$

Tomando la derivada de la ec.(3.59), teniendo en cuenta que $k_a = \mathcal{D}_a\theta$ y usando las ec.((2.30),(2.47)) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b(k_a k^a) &= 2k^a\mathcal{D}_b\mathcal{D}_a\theta, \\ &= 2k^a(\mathcal{D}_a\mathcal{D}_b + T^c{}_{ab}\,k_c), \\ &= 2k^a\mathring{\mathcal{D}}_a k^b, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.60}$$

si escribimos $k^\lambda = \frac{1}{\lambda}\frac{dX^\lambda}{d\eta}$ donde η es el parámetro de la geodésica nula, este resultado lo podemos escribir como

$$k^\mu \mathring{\nabla}_\mu k^\lambda = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2X^\lambda}{d\eta^2} + \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\eta}\frac{dX^\nu}{d\eta}\right) = 0, \tag{3.61}$$

lo cual significa que las ondas gravitacionales se propagan en geodésicas nulas sin importar la torsión que tenga el espacio-tiempo. Estos dos resultados nos dice que en eventos multimensajeros las ondas gravitacionales y la luz se propagan a la misma velocidad, además de propagarse sobre las mismas trayectorias.
Ahora a nivel sibdominante tenemos

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} + k^a\left[\mathcal{D}_a\mathcal{H}_{mn} + T_{ban}\mathcal{H}^b{}_m + \frac{1}{2}T_{abm}\mathcal{H}^b{}_n - (\mathcal{V}_{amn} + \eta_{an}\mathcal{V}_{mc}{}^c)\right] = 0, \tag{3.62}$$

donde $\mathcal{H}_{mn} = \mathbb{H}^{(0)}_{mn}$, $\mathcal{V}_{amn} = \mathbb{V}^{(0)}_{amn}$, además, esta ecuación se puede descomponer en una parte simétrica y antisimétrica. La parte simétrica es

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} \\
&+ k^a\left[\mathcal{D}_a\mathcal{H}_{mn} + \frac{1}{2}\left\{\left(T_{ban} + \frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m + \left(T_{bam} + \frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n\right\}\right] \\
&- k^a\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_{amn} + \mathcal{V}_{anm} + \eta_{an}\mathcal{V}_{mc}{}^c + \eta_{am}\mathcal{V}_{nc}{}^c\right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

y la parte antisimétrica

$$\frac{1}{2}k^a\left[\left(T_{ban} - \frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m - \left(T_{bam} - \frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n - (\mathcal{V}_{amn} - \mathcal{V}_{anm} + \eta_{an}\mathcal{V}_{mc}{}^c - \eta_{am}\mathcal{V}_{nc}{}^c)\right] = 0. \tag{3.64}$$

Tomando la traza de esta ecuación es sencillo llegar a

$$\mathcal{V}_{nc}{}^c = \frac{1}{4}\left(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_n - T_{pqn}\mathcal{H}^{pq}\right), \tag{3.65}$$

usando este resultado y haciendo un par de permutaciones cíclicas se obtiene [6]

$$\mathcal{V}_{amn} = \frac{1}{2}\big(\mathcal{X}_{a[mn]} - \mathcal{X}_{m[an]} + \mathcal{X}_{n[ma]}\big), \tag{3.66}$$

con

[6] Es básicamente hacer el mismo procedimiento que hicimos para obtener la ec.(3.18).

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{a[mn]} = &\left(T_{ban} - \frac{1}{2}T_{abn}\right)\mathcal{H}^b{}_m - \left(T_{bam} - \frac{1}{2}T_{abm}\right)\mathcal{H}^b{}_n \\ &+ \frac{1}{4}\left[\eta_{am}\left(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_n - T_{pqn}\mathcal{H}^{pq}\right) - \eta_{an}\left(T^c{}_{cb}\mathcal{H}^b{}_m - T_{pqm}\mathcal{H}^{pq}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.67}$$

Reemplazando las ecs.((3.65), (3.66)) junto con la ecuación del gauge de Lorenz en la ecuación simétrica ec.(3.63) obtenemos la ecuación clave para estudiar la propagación de la amplitud y polarizaciones de la onda.

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} + k^c\left(\mathcal{D}_c\mathcal{H}_{mn} + \frac{1}{2}M^+_{cmn}\right) = 0, \tag{3.68}$$

con

$$\begin{aligned}M^+_{cmn} = &\left(2T_{bcn} + \frac{1}{2}\left[T_{cbn} + T_{nbc}\right]\right)\mathcal{H}^b{}_m + \left(2T_{bcm} + \frac{1}{2}\left[T_{cbm} + T_{mbc}\right]\right)\mathcal{H}^b{}_n + \\ &+ \frac{1}{2}\eta_{mn}T_{pqc}\mathcal{H}^{pq} - \frac{1}{4}\left[\eta_{mn}T^s{}_{sc} - \left(T_{mnc} + T_{nmc}\right)\right]\mathcal{H}.\end{aligned} \tag{3.69}$$

3.4. Propagación anómala de la amplitud y polarización de ondas gravitacionales

La amplitud de la onda es un escalar real φ, mientras que las componentes de la polarización P_{mn} en general son complejas. Ambas cantidades quedan definidas por

$$\mathcal{H}_{mn} = \varphi P_{mn}, \tag{3.70}$$

con la condición de normalización $\bar{P}_{mn}P^{mn} = 1$ [7], lo cual implica que $\bar{\mathcal{H}}_{mn}\mathcal{H}^{mn} = \varphi^2$. Además definimos la 1-forma densidad de corriente $J = \varphi^2 k_a e^a$, lo importante de este objeto es que en el límite eikonal en **RG** se conserva

$$d^\dagger J = -\mathcal{D}_a J^a = -\mathring{\nabla}_\mu J^\mu = 0, \tag{3.71}$$

pero como estamos trabajando con una teoría torsional esto ya no es cierto, se puede ver fácilmente si tomamos la derivada de las componentes de la densidad de corriente, recordando que $\omega^{ab} = \mathring{\omega}^{ab} + k^{ab}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a J^b &= I_a D J^b, \\ &= I_a \mathring{D} J^b + I_a k^b{}_c J^c, \\ &= \mathring{\mathcal{D}}_a J^b + k^b{}_{ca} J^c,\end{aligned} \tag{3.72}$$

[7] El complejo conjugado de alguna cantidad lo denotaremos con una barrita encima.

teniendo en cuenta que $k^a{}_{ba} = T_{ab}$ y contrayendo los índices a con b obtenemos

$$\mathring{\mathcal{D}}_a J^a = \mathcal{D}_a J^a - T^a{}_{ac} J^c. \tag{3.73}$$

Para ver explícitamente a que es igual la derivada de la densidad de corriente , primero derivamos el cuadrado de la amplitud y usamos la ec.(3.68)

$$\begin{aligned} k^a \mathcal{D}_a \varphi^2 &= k^a \mathcal{D}_a \bar{\mathcal{H}}_{mn} \mathcal{H}^{mn} + \bar{\mathcal{H}}^{mn} k^a \mathcal{D}_a \mathcal{H}_{mn}, \\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_a k^a \bar{\mathcal{H}}_{mn} + k^a \bar{M}^+_{amn}\right)\mathcal{H}^{mn} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{H}}^{mn}\left(\mathcal{D}_a k^a \mathcal{H}_{mn} + k^a M^+_{amn}\right), \\ &= -\mathcal{D}_a k^a \varphi^2 - \frac{1}{2} k^a \big(\bar{M}^+_{amn}\mathcal{H}^{mn} + \bar{\mathcal{H}}^{mn} M^+_{amn}\big), \end{aligned} \tag{3.74}$$

esto nos permite escribir

$$\mathcal{D}_a J^a = -\frac{1}{2} k^a \big(\bar{M}^+_{amn}\mathcal{H}^{mn} + \bar{\mathcal{H}}^{mn} M^+_{amn}\big). \tag{3.75}$$

Usando la ec.(3.69) y definiendo a Π^{ab} como

$$\Pi^{ab} := \frac{1}{2}\left[3\left(\bar{P}^{as} P_s{}^b + P^{as}\bar{P}_s{}^b\right) - \left(\bar{P}P^{ab} + \bar{P}^{ab}P\right) + \frac{1}{2}\bar{P}P\eta^{ab}\right], \tag{3.76}$$

obtenemos

$$\mathcal{D}_a J^a = \Pi^{ab} T_{abc} J^c, \tag{3.77}$$

para finalmente escribir la no conservación de del número de rayos de ls siguiente manera

$$\mathring{\mathcal{D}}_a J^a = \left(\Pi^{ab} - \eta^{ab}\right) T_{abc} J^c. \tag{3.78}$$

3.4.1. Propagación anómala de la amplitud

En esta parte vamos a comparar la amplitud de la onda φ de la teoría **ECSK** con la amplitud de la onda $\mathring{\varphi}$ predicha por **RG** , para esto tengamos en cuenta que la corriente en la teoría con torsión es $J^\lambda = \varphi k^\lambda$ y la corriente en un espacio tiempo sin torsión es $\mathring{J}^\lambda = \mathring{\varphi} k^\lambda$. La comparación la podemos hacer con

$$\mathbb{I} = \ln \frac{\varphi}{\mathring{\varphi}}, \tag{3.79}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= e^{2\mathbb{I}} \mathring{\varphi}^2, \\ J^\lambda &= e^{2\mathbb{I}} \mathring{J}^\lambda. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Si tomamos la derivada sin torsión de esta ecuación y recordamos que la corriente en **RG** se conserva $\mathring{\nabla}_\lambda \mathring{J}^\lambda = 0$ obtenemos

$$\frac{d\mathbb{I}}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\right) T_{\mu\nu\lambda} \frac{dX^\lambda}{d\eta}, \tag{3.81}$$

por último, hacemos la integral sobre la geodésica nula

$$\mathbb{I}(\eta) - \mathbb{I}\left(\eta_0\right) = \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} \mathrm{d}\tilde{\eta}\left(\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\right) T_{\mu\nu\lambda} \frac{dX^\lambda}{d\tilde{\eta}}, \tag{3.82}$$

lo cual nos permite escribir la ec.(3.80) como [8]

$$\varphi^2(\eta) = \exp\left[\int_{\eta_0}^{\eta} d\tilde{\eta}\left(\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\right) T_{\mu\nu\lambda} \frac{dX^\lambda}{d\tilde{\eta}}\right] \mathring{\varphi}^2(\eta). \tag{3.83}$$

Esta ecuación nos muestra claramente que la propagación anómala de la amplitud dependerá de las componentes de la torsión y la métrica, además, si tomamos el caso de torsión nula, recuperamos el resultado de **RG** estándar.

3.4.2. Propagación anómala de la polarización

Para obtener la ecuación de la propagación anómala de la polarización debemos tener en cuenta que $\mathcal{H}_{mn} = \varphi P_{mn}$, esto es para escribir la ec.(3.68) como

$$\begin{aligned}
0 &= k^a \mathcal{D}_a P_{mn} + \frac{1}{\varphi}\left(k^a \mathcal{D}_a \varphi + \frac{1}{2}\varphi \mathcal{D}_a k^a\right) P_{mn} + \frac{1}{2\varphi} k^a M^+_{amn}, \\
&= k^a \mathcal{D}_a P_{mn} + \frac{1}{\varphi}\left(\frac{1}{2\varphi}\mathcal{D}_a J^a\right) P_{mn} + \frac{1}{2\varphi} k^a M^+_{amn}, \\
&= k^a \mathcal{D}_a P_{mn} + \frac{1}{2\varphi^2}\Pi^{ab} T_{abc} J^c P_{mn} + \frac{1}{2\varphi} k^a M^+_{amn}, \\
&= k^c \mathcal{D}_c P_{mn} + \frac{1}{2} k^c \left(\Pi^{ab} T_{abc} P_{mn} + \frac{1}{\varphi} M^+_{cmn}\right).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Notemos que

$$\mathcal{D}_c P_{mn} = \mathring{\mathcal{D}}_c P_{mn} + \kappa_{nbc} P^b_m + \kappa_{mbc} P^b_n, \tag{3.85}$$

recordando que las componentes de la contorsión las podemos escribir como

$$k_{abc} = \frac{1}{2}(T_{bac} - T_{abc} + T_{cab}), \tag{3.86}$$

[8] Es natural pensar que la emisión de ondas gravitacionales en **ECSK** y **RG** se da de forma similar, es decir, $\mathbb{I}(\eta_0) \sim 0$.

tras reemplazar esto en la ec.(3.84) y la definición de M^{+}_{cmn} obtenemos finalmente la ecuación de la propagación anómala de la polarización

$$k^{\lambda}\mathring{\nabla}_{\lambda}P_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k^{\lambda}\left[\Pi^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma\lambda}P_{\mu\nu} + \left(T_{\sigma\lambda\nu} - \frac{1}{2}\left[T_{\lambda\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\lambda}\right]\right)P^{\sigma}_{\mu} + \right.$$
$$\left. + \left(T_{\sigma\lambda\mu} - \frac{1}{2}\left[T_{\lambda\sigma\mu} + T_{\mu\sigma\lambda}\right]\right)P^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho\sigma\lambda}P^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\left[g_{\mu\nu}T^{\sigma}_{\sigma\lambda} - \left(T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda}\right)\right]P\right]. \tag{3.87}$$

Para el caso de **RG** las polarizaciones se trasladan paralelamente sobre una geodésica nula $k^{\lambda}\mathring{\nabla}_{\lambda}P_{\mu\nu} = 0$ [25]. Adicionalmente veamos que, si la torsión del espacio-tiempo es nula recuperamos satisfactoriamente el resultado estándar.
En principio, la ec.(3.87) es muy complicada de integrar, así que vamos a tomar su traza para extraer información un poco más fácil

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}|P|^2 + T_{\rho\sigma\lambda}\frac{\mathrm{d}X^{\lambda}}{\mathrm{d}\eta}\left[\Pi^{\rho\sigma}|P|^2 - \frac{1}{2}\left(\bar{P}P^{\rho\sigma} + \bar{P}^{\rho\sigma}P + g^{\rho\sigma}|P|^2\right)\right] = 0. \tag{3.88}$$

Capítulo 4

Modelo de propagación de GW sobre un fondo cosmológico

Considerando el principio cosmológico y los datos que nos siguieren una sección espacial plana [27] obtenemos que la métrica y la torsión deben ser de la forma [28]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\big[dx^2 + dy^2 + dz^2\big], \tag{4.1}$$

$$T_{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{c^2}\Big[\nu^+(t)(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + 2\sqrt{|g|}\nu^-(t)\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\Big]U^\rho, \tag{4.2}$$

donde $a^2(t)$ es el factor de escala, $\nu^+(t)$, $\nu^-(t)$ son funciones arbitrarias y U^ρ es la velocidad cosmológica en el marco comóvil. Teniendo en cuenta el apéndice D las ecs.((3.81), (3.88)) toman la forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{I}}{d\eta} &= \frac{1}{2}\left(\Pi^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\right)T_{\mu\nu\lambda}\frac{dX^\lambda}{d\eta}, \\
&= -\frac{1}{2c}\nu^+(t)(\Pi_{\lambda 0} - g_{\lambda 0} - 3g_{\lambda 0} + 4g_{\lambda 0})\frac{dX^\lambda}{d\eta}, \\
&= -\frac{1}{2c}\nu^+(t)\Pi_{\lambda 0}\frac{dX^\lambda}{d\eta}, \\
&= -\frac{1}{4c}\nu^+(t)\left[3\big(\bar{P}_\lambda{}^\sigma P_\sigma{}^0 + P_\lambda{}^\sigma \bar{P}_\sigma{}^0\big) - \big(\bar{P}P_{\lambda 0} + \bar{P}_{\lambda 0}\big) + \frac{1}{2}|P|^2 g_{\lambda 0}\right]\frac{dX^\lambda}{d\eta}, \\
&= -\frac{1}{4}\nu^+(t)|P|^2\frac{dt}{d\eta},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}|P|^2 &= -T_{\rho\sigma\lambda}\frac{\mathrm{d}X^\lambda}{\mathrm{d}\eta}\left[\Pi^{\rho\sigma}|P|^2 - \frac{1}{2}\left(\bar{P}P^{\rho\sigma} + \bar{P}^{\rho\sigma}P + g^{\rho\sigma}|P|^2\right)\right],\\ &= \frac{1}{c}\nu^+(t)\left[|P|^2\frac{dX^\lambda}{d\eta}\Pi_{\lambda 0} - \frac{1}{2}\frac{dX^\lambda}{d\eta}\left(\bar{P}P_{\lambda 0} + \bar{P}_{\lambda 0}P\right) + g_{\lambda 0}|P|^2\right],\\ &= \nu^+(t)\frac{dt}{d\eta}|P|^2\left(\frac{1}{2}|P|^2 - 1\right).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Notemos que la propagación de $\mathbb{I}$ y $|P|^2$ solo se ven afectadas por el parámetro ν^+. Al integrar la ec.(4.3) obtenemos

$$\mathbb{I}(t) - \mathbb{I}_\mathrm{e} = \frac{1}{4}\int_{t_\mathrm{e}}^{t} \mathrm{d}\tilde{t}\nu^+(\tilde{t})|P|^2, \tag{4.5}$$

también podemos reemplazar la (4.3) en ec.(4.4) e integrar para llegar a que $|P|^2$ e $\mathbb{I}$ están relacionados de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}|P|^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}|P_\mathrm{e}|^2\right)\mathrm{e}^{-2(\mathbb{I}-\mathbb{I}_\mathrm{e})}. \tag{4.6}$$

Aquí $|P_\mathrm{e}|$ e $\mathbb{I}_\mathrm{e}$ hacen referencia al momento de emisión que deberían ser valores muy pequeños porque asumimos que la emisión de la onda en **ECSK** y **RG** es muy similar. Con todo esto, es sencillo integrar las ecs.((4.4), (4.3))

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2(\mathbb{I}(t)-\mathbb{I}_\mathrm{e})} &= 1 + \frac{1}{2}|P_\mathrm{e}|^2\left(\mathrm{e}^{\Theta^+} - 1\right),\\ \frac{1}{2}|P|^2 &= 1 - \frac{1 - \frac{1}{2}|P_\mathrm{e}|^2}{1 + \frac{1}{2}|P_\mathrm{e}|^2\left(\mathrm{e}^{\Theta^+} - 1\right)},\end{aligned} \tag{4.7}$$

con

$$\Theta^+ = \int_{t_0}^{\tilde{t}} \nu^+(\tilde{t})d\tilde{t}. \tag{4.8}$$

Adicionalmente, considerando que $|P|^2 \geq 0$ y usando la ec.(4.6) obtenemos que $\mathbb{I} \geq 0$. Por otro lado, si consideramos el límite cuando $\mathbb{I}$ es muy grande obtenemos que $|P|^2 < 2$. En resumen tenemos

$$0 \leq |P_\mathrm{e}| \leq |P|^2 < 2. \tag{4.9}$$

Esto a su vez nos dice que para obtener alguna desviación de **RG** debe cumplirse que $\Theta^+ > 0$.

4.1. Aproximación para z pequeño

A continuación vamos a escribir la ec.(4.8) en función del redshift $z(t)$, el cual viene dado en términos del factor de escala $a^2(t)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{a_0}{a(t)} - 1 \\ dt &= -\frac{dz}{(z+1)H} \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de hubble, $z = 0$ corresponde al ahora y $z(t_{\rm e})$ nos dice que la emisión ocurrió en el tiempo $t_{\rm e}$. Esto nos permite escribir la ec.(4.8) como

$$\Theta^+(z) = -\int_z^0 \frac{\nu^+(\tilde{z})}{(\tilde{z}+1)H(\tilde{z})} d\tilde{z}, \tag{4.11}$$

Ahora vamos a considerar el caso donde z es pequeño, permitiéndonos hacer la expansión de H y considerar que $\nu^+(\tilde{z}) \sim \langle \nu^+ \rangle$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_0}[1 - z(1+q_0)] + \cdots \tag{4.12}$$

donde q_0 es el parámetro de desaceleración.

$$\begin{aligned} \Theta^+(z) &\approx -\frac{\langle \nu^+ \rangle}{H_0} \int_z^0 \frac{1-(1+q_0)\tilde{z}}{1+\tilde{z}}, \\ &= -\frac{\langle \nu^+ \rangle}{H_0}[(1+q_0)z - (2+q_0)\ln(1+z)]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Teniendo en cuanta los valores de los siguientes parámetros $q_0 \sim -0,6$ [29], $\langle \nu^+ \rangle \sim 0,5H_0$ [30] y por ejemplo para $z = 0,1$ [1], podemos hacer una estimación rápida de la comparación entre la amplitud de **ECSK** y **RG**

$$\frac{\varphi}{\mathring{\varphi}} = e^{\mathbb{I}} \approx 1 + \frac{1}{4}|P_{\rm e}|^2 \Theta^+(z = 0,1), \tag{4.14}$$

En un escenario de torsión débil podemos considerar que $\frac{1}{2}|P_{\rm e}| \sim \epsilon$, con $\epsilon \leq 10^{-20}$. Al reemplazar las mejores estimaciones posibles obtenemos

$$\frac{\varphi}{\mathring{\varphi}} \approx 1 + 5 \cdot 10^{-42}. \tag{4.15}$$

Este resultado nos indica claramente que si existe una propagación anómala de la amplitud, el efecto es extremadamente pequeño.

[1] Escogemos el valor de $z = 0,1$ porque se espera que **LISA** pueda detectar eventos multimensajero hasta ese redshift.

Capítulo 5

Conclusiones

En este último capítulo presentamos las conclusiones, resumimos los resultados más importantes y planteamos alguna forma de seguir con esta línea de trabajo.
Recordemos nuestro objetivo es identificar si existe una propagación anómala de la amplitud y polarizaciones de una onda gravitacional en un espacio-tiempo de fondo con torsión. Para abordar este objetivo decidimos usar teoría **ECSK** definida por el lagrangiano ec.(3.2), la cual tiene una torsión no nula que no se propaga por el espacio-tiempo y es generada por el espín de partículas fermionicas, en nuestro caso suponemos que la torsión es generada por la materia oscura.
Iniciamos con el capítulo 2 donde se abordan algunos conceptos matemáticos importantes, como la base ortonormal que usamos en gran parte del trabajo y además definimos operadores diferenciales esenciales para el correcto desarrollo de los siguientes capítulos, por ejemplo, los operadores I_a, D y $\mathcal{D}_a$ que cumplen una superálgebra abierta, adicionalmente con base en estos construimos los operadores de onda de Lichnerowicz-de Rham ec.(2.12) y Beltrami ec.(2.14) los cuales están relacionados mediante la identidad de Weitzenböck ec.(2.48) [1].
En el capítulo [3] hacemos la variación de la ec.(3.2) respecto a los dos campos independientes, que en nuestro caso son el vierbein e^a y la conexión de espín ω^{ab}, obteniendo las ecuaciones ecs.(3.5).
Siguiendo el método tradicional para obtener la ecuación de la onda gravitacional, hacemos las perturbaciones del vielbein y la conexión, lo cual nos permite escribir las ecuaciones de campo como términos que dependen de las cantidades del fondo más pequeñas perturbaciones, esto junto a la separación de términos de alta y baja frecuencia nos permitió obtener la ecuación de propagación de la onda ec.(C.13), aquí es importante notar que la perturbación del vielbein obedece la ecuación de onda construida con el operador de Lichnerowicz-de Rham (2.12). Después empleamos el análisis eikonal arrojando los siguientes resultados:

[1] Suele decirse que el operador de Lichnerowicz-de Rham es “el laplaciano del matemático” y el operador de Beltrami es “el laplaciano del físico”.

A orden dominante obtenemos que la relación de dispersión es idéntica a la obtenida en **RG**, es decir, que la onda gravitacional y la luz viajan por geodésicas nulas a la misma velocidad. Este resultado encaja muy bien con las observaciones de evento multimensajero [10].
A pesar que en **ECSK** la torsión no se propaga. A orden subdominante obtenemos que la amplitud y las polarizaciones se ven afectadas por la torsión. Dicho de otro modo obtenemos una propagación anómala de la amplitud dada por la ec.(3.83). Mostrándonos directamente que si la onda se propaga por una región sin torsión, la amplitud obtenida es igual a la de **RG**.
Por otra parte, las polarizaciones cumplen la ec.(3.87), mostrando que a diferencia de **RG**, las polarizaciones pueden cambiar mientras se propaga la onda, resultando nuevos modos de polarización diferentes a los usuales (los modos $\times$ y $+$). En este caso también es directo ver que si no hay torsión, las polarizaciones serán idénticas a las de **RG**.
Con el fin de obtener una estimación de la propagación anómala de la amplitud, en el capítulo 4 usamos un modelo simple con valores de redshift z pequeños y hacemos la comparación de amplitudes ec.(4.15), a pesar de que existe una propagación anómala de la amplitud el efecto es diminuto porque los modos de traza $|P_{\mathrm{e}}|$ son muy pequeños, esto se debe a que estamos considerando un escenario con torsión débil. En conclusión el efecto de la torsión en la propagación de la amplitud de una oda gravitacional no es relevante, por lo menos dentro del marco de la teoría **ESCK** y las consideraciones que tomamos.
El tema tratado en este trabajo se puede continuar de varias formas, una de ellas puede ser considerando escenarios donde la torsión juegue un papel importante, un ejemplo de esto es el universo temprano, porque en ese caso podrían existir grandes densidades de espín, haciendo que la emisión y propagación de ondas gravitacionales sea muy diferente de **RG**.
Otra forma más conservadora de seguir esta línea de trabajo puede ser integrar la ec.(3.87) en el modelo FLRW para ver como es el verdadero comportamiento de las polarizaciones. También podemos usar otros modelos , por ejemplo, una métrica y torsión tipo Schwarzschild, para solucionar las ecuaciones ecs.((3.87), (3.87)) de tal forma que se puedan contrastar con las observaciones.

Apéndice A

Reglas de (anti)conmutación

En este apartado vamos a mostrar que en efecto se cumplen las reglas mencionadas en las ecs.((2.42)-(2.47)).
La ec.(2.42) viene de la definición 2.9 y la ec.((2.44)) es trivial, por lo que no es necesario demostrarlas.
Para mostrar que la ec.(2.43) es valida, consideremos una p-forma

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{c_1\cdots c_p} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_p}. \tag{A.1}$$

Para ver que pasa cuando le aplicamos el conmutador $[I_a, I_b]$ a esta p-forma, partamos del hecho que el operador I_a sobre α actúa de la siguiente forma

$$I_a\alpha = e_a{}^{\mu}\frac{1}{(p-1)!}\alpha_{\mu c_1\cdots c_{p-1}} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_{p-1}}, \tag{A.2}$$

por lo tanto

$$I_b I_a\alpha = \frac{1}{(p-2)!(p-1)!} e_b{}^{\nu} e_a{}^{\mu}\alpha_{\mu\nu c_1\cdots c_{p-2}} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_{p-2}}, \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} I_a I_b\alpha &= \frac{1}{(p-2)!(p-1)!} e_a{}^{\nu} e_b{}^{\mu}\alpha_{\mu\nu c_1\cdots c_{p-2}} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_{p-2}}, \\ &= -\frac{1}{(p-2)!(p-1)!} e_a{}^{\nu} e_b{}^{\mu}\alpha_{\nu\mu c_1\cdots c_{p-2}} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_{p-2}}, \\ &= -\frac{1}{(p-2)!(p-1)!} e_b{}^{\nu} e_a{}^{\mu}\alpha_{\mu\nu c_1\cdots c_{p-2}} e^{c_1} \wedge \cdots \wedge e^{c_{p-2}}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para las ecs.((A.3),(A.4)) hemos tenido en cuenta como actúan los operador I_a sobre una p-forma y una (p-1)-forma. Adicionalmente, en la segunda igualdad de la ec.((A.4)) usamos el hecho que las componentes de α son antisimétricas y en la tercera igualdad renombramos algunos índices, si tomamos la resta entre las ecs.((A.3),(A.4)) obtenemos directamente

$$[I_b, I_a] = I_b I_a - I_b I_a = 0. \tag{A.5}$$

Ahora para demostrar la ec.((2.45))vamos a aplicar el conmutador directamente sobre la p-forma α

$$[I_a, \mathcal{D}_b]\alpha = I_a \mathcal{D}_b \alpha - \mathcal{D}_b I_a \alpha, \tag{A.6}$$

para esto, nos será de gran utilidad primero ver como actúa la derivada $\mathcal{D}_b$ sobre nuestra p-forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_b\alpha &= \frac{1}{p!}\mathcal{D}_b\alpha_{c_1\cdots c_p}e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + \frac{1}{p!}\alpha_{c_1\cdots c_p}\mathcal{D}_b(e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p}),\\
&= \frac{1}{p!}\mathcal{D}_b\alpha_{c_1\cdots c_p}e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + \frac{1}{p!}\alpha_{c_1\cdots c_p}I_bT^j\wedge I_j(e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p}),\\
&= \frac{1}{p!}\mathcal{D}_b\alpha_{c_1\cdots c_p}e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + I_bT^j\wedge I_j\left(\frac{1}{p!}\alpha_{c_1\cdots c_p}e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p}\right),\\
&= \frac{1}{p!}\mathcal{D}_b\alpha_{c_1\cdots c_p}e^{c_1}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + I_bT^j\wedge I_j\alpha,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

en este caso, para la primera igualdad debemos recordar que $\mathcal{D}_b$ cumple con la regla de Leibniz, para la segunda igualdad expresamos la derivada como $\mathcal{D}_b = e_b{}^\mu\nabla_\mu + I_bT^j\wedge I_j$ y las derivadas covariantes de la base $\{e^{c_k}\}$ desaparecen gracias a la compatibilidad métrica, en los dos últimos renglones solamente reescribimos la ecuación. Veamos ahora que pasa si a la ec.(A.7) le aplicamos el operador I_a

$$\begin{aligned}
I_a\mathcal{D}_b\alpha &= \frac{1}{(p-1)!}\mathcal{D}_b\alpha_{ac_2\cdots c_p}e^{c_2}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + I_a\big(I_bT^j\wedge I_j\alpha\big),\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\mathcal{D}_b\alpha_{ac_2\cdots c_p}e^{c_2}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} + I_aI_bT^j{}_{lm}\,e^l\wedge e^m\wedge I_j\alpha - I_bT^j\wedge I_aI_j\alpha,\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\mathcal{D}_b\alpha_{ac_2\cdots c_p}e^{c_2}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} - I_bI_aT^j{}_{lm}\,e^l\wedge e^m\wedge I_j\alpha + I_bT^j\wedge I_jI_a\alpha,\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\mathcal{D}_b\alpha_{ac_2\cdots c_p}e^{c_2}\wedge\cdots\wedge e^{c_p} - T^j{}_{ab}\wedge I_j\alpha + I_bT^j\wedge I_{aj}\alpha,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

con esto es fácil notar que

$$I_a\mathcal{D}_b\alpha = \frac{1}{(p-1)!}\mathcal{D}_b\alpha_{ac_2\cdots c_p}e^{c_2}\wedge\cdots e^{c_p} + I_bT^j\wedge I_{aj}\alpha, \tag{A.9}$$

reemplazando estos dos resultados en la ec.(A.6) tenemos

$$[I_a, \mathcal{D}_b] = -T^c{}_{ab}\,I_c. \tag{A.10}$$

La siguiente regla de conmutación que vamos a demostrar es la ec.(2.46),

$$\begin{aligned}
[D, \mathcal{D}_b] &= D\mathcal{D}_b - \mathcal{D}_b D, \\
&= D(I_b D + D I_b) - (I_b D + D I_b) D, \\
&= D I_b D + D^2 I_b - I_b D^2 - D I_b D, \\
&= D^2 I_b - I_b D^2,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

para este caso solamente usamos la definición 2.9 y operamos.
Por último vamos a demostrar la ec.(2.47)

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] &= [\{I_a, D\}, \mathcal{D}_b], \\
&= [(I_a D + D I_a), \mathcal{D}_b], \\
&= [I_a D, \mathcal{D}_b] + [D I_a, \mathcal{D}_b], \\
&= [I_a, \mathcal{D}_b] D + I_a [D, \mathcal{D}_b] + [D, \mathcal{D}_b] I_a + D [I_a, \mathcal{D}_b], \\
&= -T^c{}_{ab} I_c D + I_a \big(D^2 I_b - I_b D^2\big) + \big(D^2 I_b - I_b D^2\big) I_a + D(-T^c{}_{ab} I_c), \\
&= I_a D^2 I_b - I_a I_b D^2 + D^2 I_b I_a - I_b D^2 I_a - T^c{}_{ab} I_c D - D T^c{}_{ab} \wedge I_c - T^c{}_{ab} D I_c, \\
&= I_{ab} D^2 + D^2 I_{ab} + I_a D^2 I_b - I_b D^2 I_a - (D T^c{}_{ab} \wedge I_c + T^c{}_{ab} \mathcal{D}_c),
\end{aligned} \tag{A.12}$$

usamos la definición 2.9 en la primera línea, entre la segunda y tercera igualdad solamente usamos las propiedades de los conmutadores para después usar las ecs.((2.45), (2.46)), en la sexta igualdad usamos las propiedades la propiedad $I_{ab} = I_b I_a$ y distribuimos la derivada D para que en la última igualdad volvamos a usar la ec.(2.42).
Con estas relaciones de conmutación y anticonmutación es sencillo demostrar que estos operadores cumplen la siguiente identidad de Jacobi

$$\{D, [I_b, \mathcal{D}_a]\} + [\mathcal{D}_a, \{D, I_a\}] - \{I_b, [\mathcal{D}_a, D]\} = 0. \tag{A.13}$$

Apéndice B

Variación de la acción

Vamos a tomar la variación de la siguiente 4-forma lagrangiana para obtener las ecuaciones de campo

$$\mathcal{L}\left(e^a, \omega^{ab}\right) = \frac{1}{4\kappa}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\left(e^a, \omega^{ab}\right). \tag{B.1}$$

B.1. Variación respecto al vierbein

En este caso la lagrangiana depende de dos campos independientes, el vierbein y la conexión de espín, en este apartado vamos a tomar solamente la variación de la ec.(B.1) respecto a e^a

$$\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L} &= \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \delta e^c \wedge e^d + \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d + \delta_e\mathcal{L}_{\mathrm{M}}, \\
&= \frac{1}{2\kappa}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c \wedge \delta e^d - *\mathcal{T}_d \wedge \delta e^d, \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c - \kappa * \mathcal{T}_d\right) \wedge [\delta e]^d{}_m e^m, \\
&= -\frac{1}{\kappa}e^m \wedge \left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c - \kappa * \mathcal{T}_d\right)[\delta e]^d{}_m.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Recordemos que la 2-forma curvatura podemos escribirla solo en términos de la conexión de espín $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cd}$ y por lo tanto su variación respecto al veirbein sera cero, además hemos tenido en cuenta la ec.(3.3) y que $\delta e^d = [\delta e]^d{}_m e^m$. Como la variación debe ser igual a cero para cualquier $[\delta e]^d{}_m$ tenemos que

$$\mathcal{E}^m{}_d = e^m \wedge \left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R^{ab} \wedge e^c - \kappa * \mathcal{T}_d\right) = 0, \tag{B.3}$$

si aplicamos el dual de Hodge a esta ecuación obtenemos las componentes equivalentes

$$
\begin{aligned}
*\mathcal{E}^m{}_n &= *\left[e^m \wedge \left(\frac{1}{2}\epsilon_{abcn}R^{ab}\wedge e^c - \kappa * \mathcal{T}_n\right)\right],\\
&= *\left[\left(\frac{1}{4}e^m{}_k\epsilon_{abcn}\mathcal{R}^{ab}{}_{ij} - \kappa * \frac{1}{3!}e^m{}_k\mathcal{T}_n{}^l\epsilon_{lijc}\right)e^k\wedge e^i\wedge e^j\wedge e^c\right],\\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{4}e^m{}_k\mathcal{R}^{ab}{}_{ij}\epsilon_{abcn}\epsilon^{mijc} - \frac{\kappa}{3!}e^m{}_k\mathcal{T}_n{}^l\epsilon_{lijc}\epsilon^{kijc}\right],\\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{4}e^m{}_k\mathcal{R}^{ab}{}_{ij}\delta^{kijc}_{abcn} - \frac{\kappa}{3!}e^m{}_k\mathcal{T}_n{}^l\delta^{kijc}_{lijc}\right],\\
&= \frac{1}{4!}\left[-\frac{1}{4}e^m{}_k\mathcal{R}^{ab}{}_{ij}\delta^{kij}_{abn} - \frac{\kappa}{3!}e^m{}_k\mathcal{T}_n{}^l\left(3!\delta^k_l\right)\right],\\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{4}\left(-\mathcal{R}^{mb}{}_{bn} + \mathcal{R}^{mb}{}_{nb} + \mathcal{R}^{am}{}_{an} - \mathcal{R}^{am}{}_{na} - \delta^m_n\mathcal{R}^{ab}{}_{ab} - \delta^m_n\mathcal{R}^{ab}{}_{ba}\right) - \kappa\mathcal{T}^m{}_n\right],\\
&= \frac{1}{4!}\left[\left(\mathcal{R}^m{}_n - \frac{1}{2}\mathcal{R}\delta^m_n\right) - \kappa\mathcal{T}^m{}_n\right]\\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

multiplicando esta ecuación por la métrica η_{mn} obtenemos finalmente las primeras ecuaciones de campo

$$
\boxed{\mathcal{R}_{mn} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\eta_{mn} = \kappa\mathcal{T}_{mn}}
\tag{B.5}
$$

B.2. Variación respecto a la conexión de espín

Tomando la variación se la ec.(B.1) respecto a ω^{ab}

$$
\begin{aligned}
\delta_\omega\mathcal{L} &= \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}\delta R^{ab}\wedge e^c\wedge e^d + \delta_\omega\mathcal{L}_{\mathrm{M}},\\
&= \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}\delta\left(d\omega^{ab} + \omega^a{}_r\omega^{rb}\right)\wedge e^c\wedge e^d - \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab},\\
&= \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}\left(d\delta\omega^{ab} + \delta\omega^a{}_r\omega^{rb} + \omega^a{}_r\delta\omega^{rb}\right)\wedge e^c\wedge e^d - \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab},\\
&= \frac{1}{4\kappa}\epsilon_{abcd}D\delta\omega^{ab}\wedge e^c\wedge e^d - \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab},\\
&= \frac{1}{4\kappa}\left[d\left(\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\wedge e^c\wedge e^d\right) + 2\epsilon_{abcd}\delta\omega^{ab}\wedge T^c\wedge e^d\right] - \frac{1}{2}\delta\omega^{ab}\wedge *\sigma_{ab},\\
&= \frac{1}{2\kappa}\delta\omega^{ab}\wedge\left(\epsilon_{abcd}T^c\wedge e^d + \kappa * \sigma_{ab}\right),\\
&= \frac{1}{2\kappa}[\delta\omega]^{ab}{}_m e^m\wedge\left(\epsilon_{abcd}T^c\wedge e^d + \kappa * \sigma_{ab}\right),
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

el término de la derivada exterior (o término de borde) no será relevante. Adicionalmete hemos tenido en cuenta que $\delta\omega^{ab} = [\delta\omega]^{ab}{}_{m} e^m$. Como la variación debe ser igual a cero para cualquier $[\delta\omega]^{ab}{}_{m}$ tenemos que

$$\mathcal{E}^m{}_{ab} = e^m \wedge \left(\epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d - \kappa * \sigma_{ab}\right) = 0, \tag{B.7}$$

si aplicamos el dual de Hodge a esta ecuación obtenemos las componentes equivalentes

$$\begin{aligned}
*\mathcal{E}^m{}_{ab} &= *\left[e^m \wedge \left(\epsilon_{abcd} T^c \wedge e^d - \kappa * \sigma_{ab}\right)\right], \\
&= *\left[\left(\frac{1}{2} e^m{}_k \epsilon_{abcd} T^c{}_{ij} - \frac{1}{3!}\kappa \sigma_{ab}{}^l \epsilon_{lijd}\right) e^k \wedge e^i \wedge e^j \wedge e^d\right], \\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2} e^m{}_k T^{cij} \epsilon_{abcd} \epsilon^{kijd} - \frac{\kappa}{3!} e^m{}_k \sigma_{ab}{}^l \epsilon_{lijd} \epsilon^{kijd}\right], \\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2} e^m{}_k T^c{}_{ij} \delta^{kijd}_{abcd} - \frac{\kappa}{3!} e^m{}_k \sigma_{ab}{}^l \delta^{kijd}_{lijd}\right], \\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2} e^m{}_k T^c{}_{ij} \delta^{kij}_{abc} - \frac{\kappa}{3!} e^m{}_k \sigma_{ab}{}^l \left(3! \delta^k_l\right)\right], \\
&= \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2} e^m{}_k \left(T^k{}_{ab} - T^c{}_{ac}\delta^k_b - T^c{}_{bc}\delta^k_a + T^k{}_{ba} + T^c{}_{ca}\delta^k_b - T^c{}_{cb}\delta^k_a\right) - \kappa e^m{}_k \sigma_{ab}{}^k\right], \\
&= \frac{1}{4!}\left[\left(\delta^c_a T^d{}_{bd} - \delta^c_b T^d{}_{ad} + T^m{}_{ab}\right) - \kappa \sigma^m{}_{ab}\right], \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Esto significa que las ecuaciones de campo para la torsión seran

$$\boxed{T^m{}_{ab} - \delta^m_a T^d{}_{db} + \delta^m_b T^d{}_{da} = \kappa \sigma^m{}_{ab}.} \tag{B.9}$$

Apéndice C

Comparación de términos

Como bien sabemos, las ondas gravitacionales se definen como pequeñas perturbaciones de variación rápida (o longitud de onda corta) sobre un espacio-tiempo de fondo de variación lenta (o longitud de onda larga) [25]. Considerando que el vielbein es de orden 1,

$$\left|e^{a}{}_{\mu}\right| \sim 1, \tag{C.1}$$

la Curvatura y torsión de fondo tendrán un tamaño característico

$$|T^{a}| \sim \frac{\epsilon_T}{L} \qquad , \qquad \left|R^{ab}\right| \sim \frac{1}{L^2}, \tag{C.2}$$

el término ϵ_T es un parámetro que nos indicara que tan relevante o despreciable es la torsión. La escala de las perturbaciones $|H^{a}| \sim H$ y $\left|V^{ab}\right| \sim V$ deben ser pequeñas, es decir, $H \ll 1$ y $V \ll 1$. Estas perturbaciones cambian con una longitud de onda muy corta λ [1]

$$|H^{a}| \sim \frac{H}{\lambda} \qquad , \qquad \left|V^{ab}\right| \sim \frac{V}{\lambda}, \tag{C.3}$$

la longitud de onda del fondo L es mucho más grande que la de las perturbaciones, esto nos permite definir el parámetro eikonal de la siguiente manera

$$\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1. \tag{C.4}$$

Como la expansión de la torsión no depende de las derivadas de las perturbaciones ec.(3.30) es de esperar que

$$\left|T^{(1)}_{a}\right| \sim \epsilon_T \frac{H}{L} \qquad , \qquad \left|T^{(2)}_{a}\right| \sim \epsilon_T \frac{H^2}{L}, \tag{C.5}$$

[1] Por simplicidad escogemos que la longitud de onda de las dos perturbaciones sea del mismo orden, cosa que en general no tiene porque ser cierta.

equivalentemente que

$$V \sim \epsilon_T \frac{H}{L}, \tag{C.6}$$

lo cual significa que la perturbación de la torsión es mucho más débil que la del vielbein. Con esto en mente, podemos identificar los términos más relevantes de las ecs.((3.30), (3.31))

$$\left|DU^{ab}_{(1)}\right| \sim \frac{1}{L^2}\frac{H}{\epsilon^2}, \tag{C.7}$$

$$\left|DV^{ab}_{(1)}\right| \sim \frac{\epsilon_T}{L^2}\frac{H}{\epsilon}, \tag{C.8}$$

$$\left|DU^{ab}_{(2)} + U^{a}_{(1)c} \wedge U^{cb}_{(1)}\right| \sim \frac{1}{L^2}\frac{H^2}{\epsilon^2}, \tag{C.9}$$

$$\left|U^{a}_{(1)c} \wedge V^{cb} + V^{a}_{c} \wedge U^{cb}_{(1)}\right| \sim \frac{\epsilon_T}{L^2}\frac{H^2}{\epsilon}, \tag{C.10}$$

$$\left|V^{a}{}_{c}{}^{cb}\right| \sim \frac{H^2}{L^2}. \tag{C.11}$$

De las ecuaciones de campo de baja frecuencia es posible llegar a

$$V \ll H \ll \epsilon \ll 1, \tag{C.12}$$

con esto es sencillo ver que los términos dominantes y subdominantes están contenidos solo en

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd} R^{ab}_{(1)} \wedge e^c = 0. \tag{C.13}$$

Apéndice D

Propiedades útiles en el modelo cosmológico

1. Veamos primero que pasa si contraemos un objeto simétrico $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ con la torsión cosmológica

$$
\begin{aligned}
S^{\mu\nu}T_{\mu\nu\lambda} &= -\frac{1}{c^2}S^{\mu\nu}\Big[\nu^+(t)(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + 2\sqrt{|g|}\nu^-(t)\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\Big]U^\rho, \\
&= -\frac{1}{c^2}\nu^+(t)S^{\mu\nu}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})U^\rho, \\
&= -\frac{1}{c^2}\nu^+(t)\big(S_{\lambda\rho} - S^\mu{}_\mu g_{\lambda\rho}\big)U^\rho, \\
&= -\frac{1}{c}\nu^+(t)\big(S_{\lambda 0} - S^\mu{}_\mu g_{\lambda 0}\big).
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Recordando que las componentes de la velocidad en el sistema comóvil son

$$
U^\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{D.2}
$$

2. Calculemos ahora la traza de $\Pi_{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
\Pi = g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[3\big(\bar{P}^{\mu\sigma}P_{\sigma}{}^{\nu} + P^{\mu\sigma}\bar{P}_{\sigma}{}^{\nu}\big) - \big(\bar{P}P^{\mu\nu} + \bar{P}^{\mu\nu}P\big) + \frac{1}{2}\bar{P}Pg^{\mu\nu}\right], \\
&= \frac{1}{2}\left[3\big(\bar{P}^{\mu\sigma}P_{\sigma\mu} + P^{\mu\sigma}\bar{P}_{\sigma\mu}\big) - (\bar{2}PP) + \frac{1}{2}\bar{P}Pg^{\mu}{}_{\mu}\right], \\
&= \frac{1}{2}\left[3\cdot 2 - 2 + \frac{1}{2}\cdot 4\right], \\
&= 3.
\end{aligned}
\tag{D.3}
$$

Para este caso es importante recordar que las polarizaciones están normalizadas.

3. El gauge de Lorenz lo podemos escribir de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
k^{\mu}H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}k_{\nu}H, \\
k^{\mu}(\varphi P_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}k_{\nu}(\varphi P), \\
k^{\mu}P_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}k_{\nu}P.
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

Bibliografía

[1] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago press, 2010).

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (Macmillan, 1973).

[3] B. P. Abbott y col. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), «GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral», Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017), https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101.

[4] B. P. Abbott y col. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger», Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016), https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102.

[5] W. Shane y G. Bieger-Smith, «The galactic rotation curve derived from observations of neutral hydrogen», Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands **18**, 263 (1966), https://scholarlypublications.universiteitleiden.nl/access/item%5C%3A2714959/view.

[6] J. F. Navarro, «The structure of cold dark matter halos», en Symposium-international astronomical union, vol. 171 (Cambridge University Press, 1996), págs. 255-258.

[7] L. Bergström, «Non-baryonic dark matter: observational evidence and detection methods», Reports on Progress in Physics **63**, 793-841 (2000), https://doi.org/10.1088/0034-4885/63/5/2r3.

[8] A. Dolgov y S. Hansen, «Massive sterile neutrinos as warm dark matter», Astroparticle Physics **16**, 339-344 (2002), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927650501001153.

[9] L. D. Duffy y K. van Bibber, «Axions as dark matter particles», New Journal of Physics **11**, 105008 (2009), https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/10/105008.

[10] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. Adya y col., «Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A», The Astrophysical Journal Letters **848**, L13 (2017).

[11] D. W. Sciama, «Erratum: The Physical Structure of General Relativity», Rev. Mod. Phys. **36**, 1103-1103 (1964), https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.1103.

[12] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick y J. M. Nester, «General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects», Rev. Mod. Phys. **48**, 393-416 (1976), https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393.

[13] R. T. Hammond, «Torsion gravity», Reports on Progress in Physics **65**, 599-649 (2002), https://doi.org/10.1088/0034-4885/65/5/201.

[14] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry* (Cambridge University Press, 2019).

[15] S. Weinberg, *Cosmology* (OUP Oxford, 2008).

[16] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics* (CRC press, 2018).

[17] B. Janssen, «Teorıa de la relatividad general», Universidad de Granada **22** (2013).

[18] H. I. Arcos y J. G. Pereira, «Torsion gravity: a reappraisal», International Journal of Modern Physics D **13**, 2193-2240 (2004).

[19] M. Hassaine y J. Zanelli, *Chern-Simons (super) gravity*, vol. 2 (World Scientific, 2016).

[20] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences by (Harley Flanders)* (Elsevier, 1963).

[21] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, F. Izaurieta, P. Medina, D. Narbona, E. Rodrıguez y O. Valdivia, «Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in Horndeski's theory», Phys. Rev. D **96**, 084023 (2017), https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.084023.

[22] J. Barrientos, F. Izaurieta, E. Rodrıguez y O. Valdivia, «Wave operators, torsion, and Weitzenböck identities», General Relativity and Gravitation **54**, 1-33 (2022), eprint: https://doi.org/10.1007/s10714-022-02914-7.

[23] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, F. Izaurieta, P. Medina, D. Narbona, E. Rodríguez y O. Valdivia, «Nonminimal couplings, gravitational waves, and torsion in Horndeski's theory», Phys. Rev. D **96**, 084023 (2017), arXiv:1703.09686 [gr-qc].

[24] F. Izaurieta, E. Rodrıguez y O. Valdivia, «Linear and second-order geometry perturbations on spacetimes with torsion», The European Physical Journal C **79**, 1-7 (2019), eprint: https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6852-y.

[25] M. Maggiore, *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments* (OUP Oxford, 2007), https://oxford.universitypressscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001/acprof-9780198570745.

[26] J. Barrientos, F. Cordonier-Tello, C. Corral, F. Izaurieta, P. Medina, E. Rodríguez y O. Valdivia, «Luminal Propagation of Gravitational Waves in Scalar-tensor Theories: The Case for Torsion», Phys. Rev. D **100**, 124039 (2019), arXiv:1910.00148 [gr-qc].

[27] P. A. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo y col., «Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters», Astronomy & Astrophysics **594**, A13 (2016), https://arxiv.org/pdf/1502.01589v3.pdf.

[28] A. Toloza y J. Zanelli, «Cosmology with scalar–Euler form coupling», Classical and Quantum Gravity **30**, 135003 (2013), https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/13/135003.

[29] P. Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo y col., «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters», (2020).

[30] S. Pereira, R. d. C. Lima, J. Jesus y R. Holanda, «Acceleration in Friedmann cosmology with torsion», The European Physical Journal C **79**, 1-9 (2019).