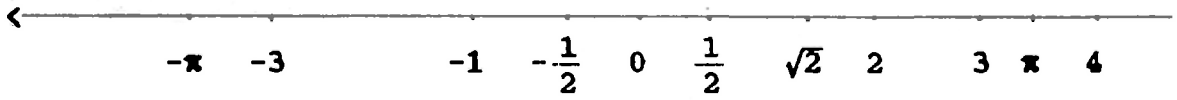
1.5. NUMEROS REALES (ℝ)

1.5.1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

El conjunto de los números Reales es la reunión del conjunto de los números Irracionales y de los números Racionales. Gráficamente los números Reales se pueden representar sobre una recta, pues se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números Reales y los puntos sobre una recta, en el sentido de que cada punto sobre la recta le corresponde un número Real y recíprocamente a cada número Real le corresponde un punto sobre la recta; correspondencia que se establece asignando a cualquier punto sobre la recta el número Ø, luego determinando una unidad del cero a la derecha y localizado a la derecha del cero en forma ascendente los números Reales (Racionales e Irracionales) positivos y a la izquierda del cero y en forma descendente los números Reales (Racionales e Irracionales) negativos como se puede apreciar en la figura siguiente:



Los números con los que se trabaja en los cursos de aritmética son los números Reales y por lo tanto son conocidas las operaciones de suma, resta, multiplicación y

división entre ellos y sus principales propiedades: Asociativa, Conmutativa , existencia de elementos neutros ("Ø" para la suma y "1" para el producto), existencia de inversos y propiedad distributiva. Estas propiedades se llaman propiedades algebraicas o de cuerpo de los números Reales.

Además de estas propiedades algebraicas existen otras propiedades llamadas de orden y que tienen que ver con la ubicación de los números Reales en la recta; estas propiedades se clasifican en dos tipos: Un primer tipo no demostrable cuyo enunciado resulta "evidente" llamado. axiomas de orden y otro tipo de propiedades no tan evidentes como las anteriores, pero que se demuestran a partir de ellas.

Axiomas de orden

Se considera el subconjunto de los números Reales notado por R^+.

i) (Ley de Tricotomia). Si a es un número Real, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$a=Ø$, $a \in R^+$, $-a \in R^+$.

ii) (Clausura para la suma y producto en R^+). Si a y b pertenecen a R^+ entonces: $a+b \in R^+$ y $ab \in R^+$.

Definición

Dados a y b números Reales entonces:

i) Se dice que a es mayor que b y se nota por $a>b$ si y sólo si $a-b\in R^+$. También se dice que b es menor que a y se nota $b<a$.

ii) Se dice que a es mayor o igual que b y se nota por $a\geq b$ si y sólo si $a=b$ ó $a>b$. También se dice que $b\leq a$.

1.5.2. OTRAS PROPIEDADES

i) Si $a>b$ entonces $a+c>b+c$. Para todo Real c. En efecto: $a>b$ por definición significa que $(a-b)\in R^+ \leftrightarrow (a-b)+0\in R^+ \leftrightarrow (a-b)+(c-c)\in R^+ \leftrightarrow (a+c)-(b+c)\in R^+$, que por definición de $>$ significa que $(a+c)>(b+c)$.

Esta propiedad establece que a los dos lados de una desigualdad se le puede sumar un número Real sin que la desigualdad cambie de sentido.

Ejemplo 1

$4>3$ implica que $4+5>3+5$.

Ejemplo 2

Si x+3>5 entonces x+3-3>5-3; entonces x>2.

ii) Si a>b y b>c entonces a>c. En efecto: Si a>b y b>c entonces a-b>Ø y b-c>Ø, luego (a-b)+(b-c)>Ø (Propiedad clausurativa para la suma de números positivos), pero (a-b)+(b-c)=a-c. Entonces a-c>Ø, luego por definición de >; a>c.

Ejemplo 1

1Ø>8 y 8>4 entonces 1Ø>4.

iii) Si a>b y c>Ø entonces ac>bc. En efecto: Como a>b; a-b>Ø y como c>Ø entonces c(a-b)=ca-cb>Ø (propiedad clausurativa para la multiplicación de números positivos) y de aquí ac>bc. Esta propiedad establece que a los dos lados de una desigualdad se le puede multiplicar por un número Real positivo cualquiera, sin que la desigualdad cambie de sentido.

Ejemplo 1

5>3 entonces 5.4>3.4; pues 4>Ø.

Ejemplo 2

Si $3x>9$ entonces $\frac{3x}{3} > \frac{9}{3}$; pues $\frac{1}{3} > 0$ y por lo tanto $x>3$.

iv) Si $a>b$ y $c<0$ entonces $ac<bc$.

Demostración (Ejercicio).

Esta propiedad establece que si los lados de una desigualdad se multiplican por un número Real negativo qualquiera, entonces la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplo 1

$12>9$ entonces $12(-3)<9(-3)$; pues $-3<0$.

Ejemplo 2

$4x>12$ entonces $-\frac{4x}{4} < 12(-\frac{1}{4})$; pues $-\frac{1}{4} <0$, por tanto $-x<-3$.

v) $ab>0$ sí y sólo sí ($a>0$ y $b>0$) ó ($a<0$ y $b<0$).

Demostración (Ejercicio).

(Recordar que si $d>0$ entonces $(1/d)>0$).

Ejemplo 1

$(x-3)(x+3)>0$ si y sólo si ($x-3>0$ y $x+3>0$) ó ($x-3<0$ y $x+3<0$) es decir; ($x>3$ y $x>-3$) ó ($x<3$ y $x<-3$).

vi) $ab<0$ sí y sólo sí ($a<0$ y $b>0$) ó ($a>0$ y $b<0$).

Demostración (Ejecicio).

Ejemplo

$x(x-1)<0$ si y sólo si ($x>0$ y $x-1<0$) ó ($x<0$ y $x-1>0$), es decir, ($x>0$ y $x<1$) ó ($x<0$ y $x>1$).

vii) Si $a>b$ y $c>d$ entonces $a+c>b+d$.

Demostración (Ejercicio).

Esta desigualdad establece, que se pueden sumar miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, dando como resultado otra desigualdad del mismo sentido.

Ejemplo

$3>-2$ y $6>5$ entonces $3+6>-2+5$.

viii) Si $a>b$, $a>0$, $b>0$ entonces $1/a<1/b$.

Demostración (Ejercicio).

Esta propiedad dice, que al tomar los recíprocos (Inverso para la multiplicación) a los dos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad cambia, siempre y cuando los dos términos de la desigualdad

sean ambos positivos. (También se cumplen cuando los dos son negativos).

Ejemplo 1

$12>8$ entonces $1/12<1/8$.

Ejemplo 2

$-3>-5$ entonces $-1/3<-1/5$.

ix) Si $a\in\mathbb{R}$ entonces $a^2\geq 0$.

Demostración (Ejercicio).

Estas propiedades se satisfacen también si se reemplaza ">" por "$\leq$" ó "<" por "$\leq$".

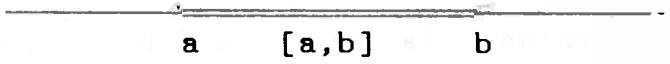
1.5.3. INTERVALOS

Los subconjuntos de los números Reales más utilizados, en el trabajo con desigualdades son los intervalos, los cuales se definen y se notan a continuación.

Sean a y b números Reales, con $a<b$;

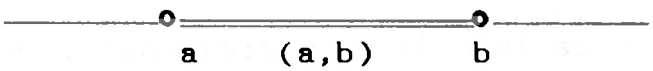
i) El conjunto de todos los números Reales que son mayores o iguales a a y menores o iguales a b, es decir: $\{x/a \leq x \leq b\}$, se nota por [a,b], es decir:

$[a,b]=\{x/a \leq x \leq b\}$

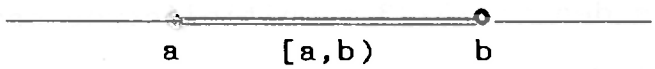


En forma análoga se notan:

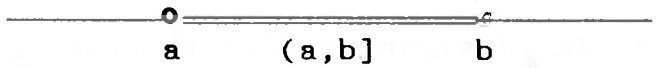
ii) $(a,b)=\{x/a<x<b\}$



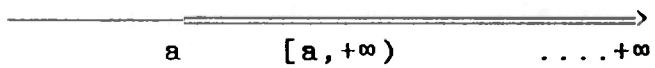
iii) $[a,b)=\{x/a \leq x<b\}$



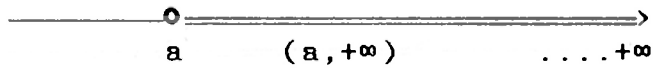
iv) $(a,b]=\{x/a<x \leq b\}$



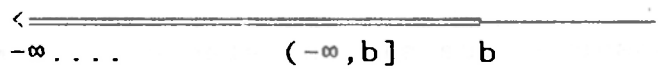
v) $[a,+\infty)=\{a \leq x\}$



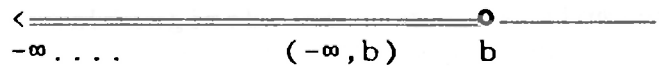
vi) $(a,+\infty)=\{x/x>a\}$



vii) $(-\infty,b]=\{x/x \leq b\}$



viii) $(-\infty,b)=\{x/x<b\}$



ix) $(-\infty,+\infty)=R$

El uso adecuado de las propiedades de orden de los números Reales es la base para hallar el conjunto solución de desigualdades o sea el conjunto de todos los valores reales que puede tomar una varible x para que se satisfaga la

desigualdad que la contenga. Conjunto que generalmente viene dado como reunión o intersección de intervalos, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Determinar la solución de la desigualdad $-4x+5<-x+8$. En efecto: Si se suma a cada lado de la desigualdad el número -5 se obtiene: $-4x+5-5<-x+8-5$ o sea $-4x<-x+3$ y si ahora se suma a cada lado de la desigualdad x, se observa que $-4x+x<-x+x+3$, es decir; $-3x<3$ y multiplicando cada miembro de $-3x<3$ por $-1/3$ se tiene que $x>-1$; y de aqui se concluye que la solución de la desigualdad $-4x+5<-x+8$ es $\{x/x>-1\}$, es decir, el intervalo $(-1,+\infty)$. La solución está representada gráficamente en la siguiente figura:

Observe que si en efecto se toma por ejemplo x=1 y se reemplaza en la desigualdad $-4x+5<-x+8$, se tiene que $-4*1+5=1<-1+8=7$, es decir, x=1 es solución de la desigualdad $-4x+5<-x+8$, pero si se tomara x=-3 y se reemplazara, se ve claramente que x=-3 no es solución de la desigualdad ya que 12+5=17 no es menor que 3+8=11.

Ejemplo 2

Resolver el sistema de desigualdades $2x-2\leq 4$; $x-1\leq 3x-5$; $-2x\leq -x+1$. En efecto: En este caso se resuelve cada desigualdad y la solución del sistema de desigualdades, es el conjunto formado por los elementos comunes de las tres soluciones:

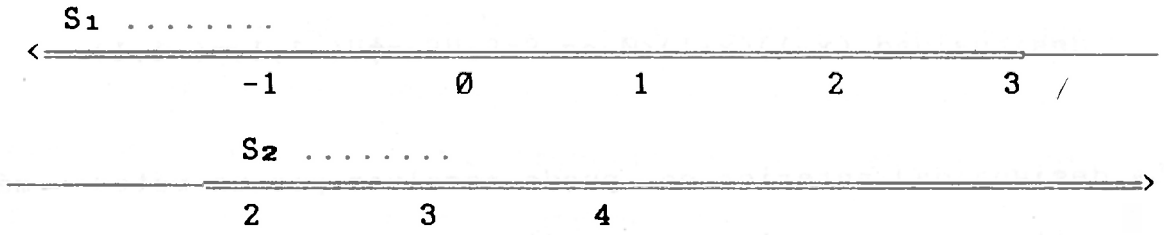
i) $2x-2\leq 4$; $2x\leq 6$; $x\leq 3$, luego la solución de la desigualdad $2x-2\leq 4$ es $(-\infty,3]=S_1$.

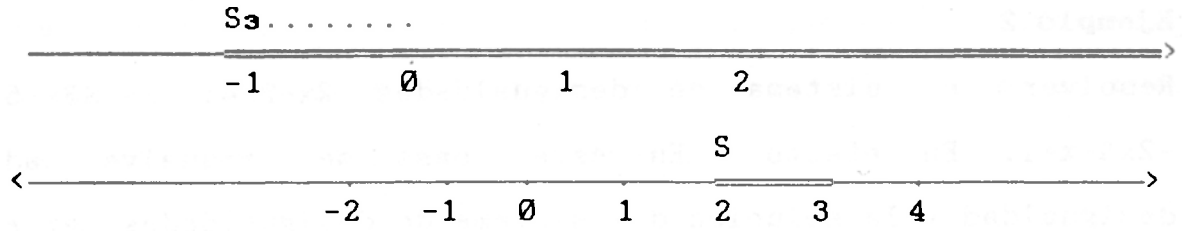
ii) $x-1\leq 3x-5$; $4\leq 2x$; $2\leq x$; la solución de la desigualdad $x-1\leq 3x+5$ es $[2,+\infty)=S_2$.

iii) $-2x\leq -x+1$; $-x\leq 1$; $x\geq -1$, la solución de $-2x\leq -x+1$ es $[-1,+\infty)=s_3$.

Asi que la solución del sistema es:

$S=S_1\cap S_2\cap S_3=(-\infty,3]\cap[2,+\infty)\cap[-1,+\infty)=[2,3]$. Gráficamente:





Ejemplo 3

Resolver la desigualdad $x-2 \leq 2x-3 < 2+x$, consiste realmente en resolver el sistema $x-2 \leq 2x-3$; $2x-3 < 2+x$. (Ejercicio).

Ejemplo 4

Resolver la desigualdad $(x-1)(x+1) < \emptyset$. En efecto: $(x-1)(x+1) < \emptyset$ sí y sólo sí $(x-1 > \emptyset$ y $x+1 < \emptyset)$ ó $(x-1 < \emptyset$ y $x+1 > \emptyset)$.

i) Como $x-1 > \emptyset$ y $x+1 < \emptyset$, se tiene que $x > 1$ y $x < -1$, cuya solución es $(1,+\infty) \cap (-\infty,-1) = \phi$.

ii) La solución del sistema $x-1 < \emptyset$ y $x+1 > \emptyset$ es $(-1,1)$, ya que $x < 1$ y $x > -1$ entonces $x \in (-\infty,1)$ y $x \in (-1,\infty)$ es decir $x \in (-\infty,1) \cap (-1,+\infty) = (-1,1)$. Luego la solución de la desigualdad $(x-1)(x+1) < \emptyset$ es $S = S_1 \cup S_2 = \phi \cup (-1,1) = (-1,1)$.

La desigualdad anterior se puede resolver por un método más sencillo, que consiste en dividir R en determinados intervalos y analizar la desigualdad en cada uno de ellos.

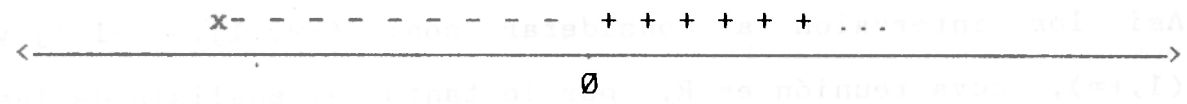
Para hallar estos intervalos se buscan los valores de x, para los cuales cada uno de los factores se anulan; los factores de la desigualdad $(x-1)(x+1)<0$ se anulan en $x=1$ y $x=-1$ respectivamente y se localizan en la recta numérica

Así los intervalos a considerar son: $(-\infty,-1]$; $(-1,1]$ y $(1,+\infty)$, cuya reunión es R, por lo tanto el análisis de las soluciones en cada intervalo debe conducir a todas las soluciones posibles. El conjunto solución de la desigualdad es la unión de todas las soluciones obtenidas al analizar cada intervalo por separado. El procedimiento es como sigue:

Sobre la recta numérica se ubican los puntos donde cada factor se anula. En cada uno de los intervalos en que se divide la recta se analiza cada factor por separado en el sentido de si allí es éste positivo o negativo colocando + ó - segun lo sea. Luego de analizar así en todos los intervalos, todos los factores, se hace en cada intervalo el producto de los signos de los factores dando como resultado + ó -; este intervalo será o no parte de la solución según la desigualdad sea de la forma producto de factores >0 ó <0. El siguiente ejemplo ilustrará este método:

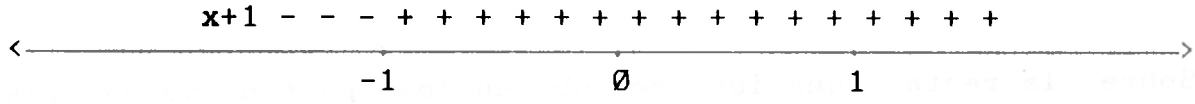
Ejemplo 1

Para hallar el conjunto solución de la desigualdad $x(x-1)(x+1)<0$; primero se consideran los puntos donde los factores se anulan, en esta caso $x=0$, $x=1$, $x=-1$. El factor x es positivo si $x>0$ y negativo si $x<0$, luego:

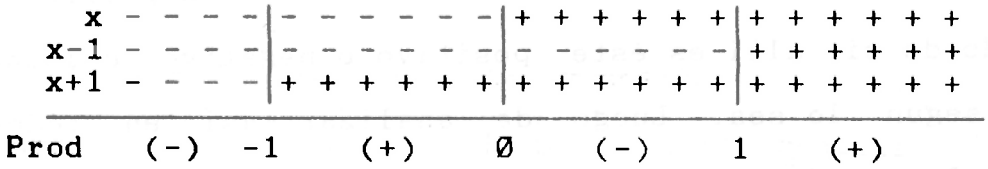


El factor x-1 es positivo si $x>1$ y negativo si $x<1$; luego:

El factor x+1 es positivo si $x>-1$ y negativo si $x<-1$, luego:



Los tres gráficos anteriores se representan en uno solo así:



Los intervalos a considerar son: $(-\infty,-1]$; $(-1,0]$; $(0,1]$ y $(1,+\infty)$. Los puntos -1, 0 y 1 no son solución de la desigualdad, ya que si se reemplaza x por +1 ó por 0 ó por -1 en $x(x-1)(x+1)<0$, se obtiene que $0<0$.

Puesto que la desigualdad es con $<\emptyset$, el intervalo $(-\infty,-1)$ es solución ya que el producto de los tres factores es (-), $(<\emptyset)$, el intervalo $(-1,\emptyset)$ no es solución ya que el producto de los tres factores es (+), $(>\emptyset)$, el intervalo $(\emptyset,1)$ es solución, ya que el producto de los tres factores es (-), $(<\emptyset)$, el intervalo $(1,+\infty)$ no es solución, pues el producto de los tres factores es (+), $(>\emptyset)$.

Luego el conjunto solución de la desigualdad $x(x-1)(x+1)<\emptyset$ es $(-\infty,-1)U(\emptyset,1)$.

Ejemplo 2

Resolver la desigualdad $\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)}>0$.

Este problema trata como si en lugar de cociente se tuviera el producto de todos los factores que figuran tanto en el numerador como en el denominador, debido a que el resultado de "producto de signos" es igual al de "cociente de signos", luego:

$x-1=\emptyset$ si $x=1$; $x-1>\emptyset$ si $x>1$ y $x-1<\emptyset$ si $x<1$

$x=\emptyset$

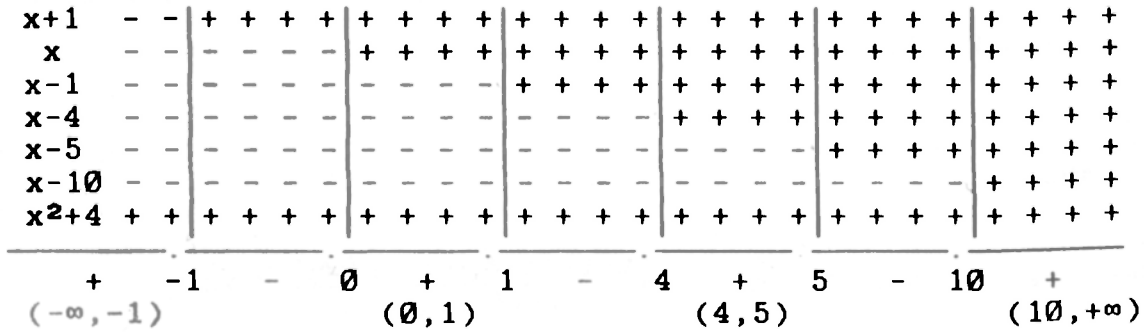
$x-4=0$ si $x=4$; $x-4>0$ si $x>4$ y $x-4<0$ si $x<4$

$x-5=0$ si $x=5$; $x-5>0$ si $x>5$ y $x-5<0$ si $x<5$

$x-10=0$ si $x=10$; $x-10>0$ si $x>10$ y $x-10<0$ si $x<10$

$x+1=0$ si $x=-1$; $x+1>0$ si $x>-1$ y $x+1<0$ si $x<-1$.

El factor x^2+4 no se tiene en cuenta ya que es siempre positivo para cualquier valor de x (o se coloca + + +... en $\mathbb{R}$ si se tiene en cuenta).



Luego la solución total es $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(4,5)\cup(10,+\infty)$.

La solución de la desigualdad $\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)} \geq 0$ es $(\infty,-1)\cup(0,1]\cup[4,5]\cup[10,+\infty)$ (Ejercicio).

Y la solución de la desigualdad $\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)} < 0$ es $(0,-1)\cup(1,4)\cup(5,10)$ (Ejercicio).

Ejemplo 3

Para hallar la solución de la desigualdad $1/x<1$ hay varias formas de hacerlo:

1. i). Si $x>0$, se tiene que $1/x<1$, es equivalente a $x>1$, asi se tiene, que la solución es $x>1$ si $x>0$, es decir $(1,+\infty)\cap(0,+\infty)=(1,+\infty)$, luego, la solución es el intervalo $(1,+\infty)$ si $x>0$.

ii). Si $x<0$; $1/x<1$, equivale a $1>x$, luego de $x<1$ y $x<0$, se concluye que $x<0$, asi la solución es $(-\infty,0)$ si $x<0$.

Por tanto la solución total de la desigualdad $\frac{1}{x}<1$

es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

2. $\frac{1}{x}<1$, equivale a $(1/x)-1<0$, que a su vez equivale a

$(1-x)/x<0$; y ésto se puede solucionar de tres formas diferentes:

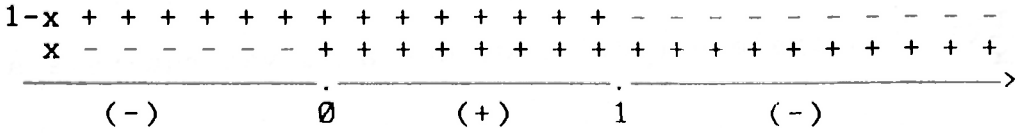
A. i). Si $x>0$; entonces $(1-x)/x<0$, equivale a $1-x<0$, es decir $x>1$; luego la solución es $(1,+\infty)\cap(0,+\infty)=(1,+\infty)$.

ii). Si $x<0$; $(1-x)/x<0$, es equivalente a $(1-x)>0$ (multiplicar por $x<0$, ambos lados de la desigualdad), así que $x<1$, luego la solución es $(-\infty,1)\cap(-\infty,0)=(-\infty,0)$.

luego la solución total es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

B. $(1-x)/x<0$ si y sólo si $(1-x<0$ y $x>0)$ ó $(1-x>0$ y $x<0)$; es decir $(x>1$ y $x>0)$ ó $(x<1$ y $x<0)$, luego la solución total es $\{(1,\infty)\cap[0,+\infty)\}\cup\{(-\infty,1)\cap(-\infty,0)\}=(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$.

C. Por el método usado en el ejemplo anterior se tiene que: $1-x>0$ si $x<1$ y $1-x<0$ si $x>1$, así que:



La solución de la desigualdad $(1-x)/x<0$ es la unión de los intervalos $(-\infty,0)$ y $(1,+\infty)$, ya que en ellos el producto de los dos factores $1-x$ y $\frac{1}{x}$ son negativos (-), es decir $S=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

Los puntos 0 y 1 no pertenecen al conjunto solución, ya que no satisfacen la solución $\frac{1-x}{x}<0$.

EJERCICIOS

1. Enunciar e ilustrar con ejemplos las propiedades: **Asociativa** ,conmutativa, modulativa, invertiva y distributiva de suma y producto de números Reales.

2. Ilustrar con ejemplos que:
   i) Si $a>b$ y $c<0$ no se tiene que $ac>bc$
   ii) Si $a>b$ no siempre se tiene que $1/a<1/b$.

3. Realizar las siguientes operaciones entre conjuntos:
   i) $[-5,10)\cap(-1,2)$
   ii) $[-20,+\infty)\cup(4,10)$
   iii) $\{(-\infty,3]\cup(-4,2)\}\cap[-4,3]$
   iv) $\{[2,10]\cap(-\infty,6)\}\cup\{(0,2)\cap[-1,1]\}$

4. Solucionar las desigualdades siguientes:
   i) $3x+8<2x+5$ ii) $5x+3>5x+1$
   iii) $3x+4<3x$ iv) $x^2<0$
   v) $x^2\leq 0$ vi) $x^4+4>0$
   vii) $x^4+4\geq 0$ viii) $1/x^2\leq 0$
   ix) $(1/x)+x<10$ x) $(1/x)<3x+4$
   xi) $(x+4)(x-1)\geq 0$ xii) $\dfrac{(x^2+4x+90)}{x}(x-1)<0$

xiii) $\frac{(x+4)(x-3)(x+2)x^2}{(x^2+1)(x-3)(x-2)} < 0$ xiv) $x^2 \geq 4$

xv) $(x-1)/(x-2) \geq 0$ xvi) $\frac{(x-2)^2}{(x-1)} \leq 0$

5. ¿Son verdaderas las afirmaciones siguientes?.

i) ¿Si $a>0$ y $b>0$, $a^2>b^2$ implica que $a>b$ y $a>b$ implica $a^2>b^2$?.

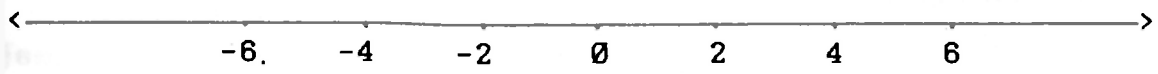
ii) ¿Si $b \geq 0$, $a^2<b$ implica que $-\sqrt{b}<a<\sqrt{b}$ y recíprocamente?.

iii) ¿Si $a>0$ y $b>0$; $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ implica que $a>b$ y recíprocamente?.

iv) ¿Si $b \geq 0$, $a^2>b$ implica que $(a>\sqrt{b})$ o $(a<-\sqrt{b})$ y recíprocamente?.

1.5.4. VALOR ABSOLUTO

Teniendo en cuenta que cuando se habla de distancia siempre se hace referencia a un número positivo; en la siguiente figura se puede apreciar que :



La distancia que hay por ejemplo del punto 6 al origen es 6 y que la distancia que hay del punto -6 al origen es también $6 = -(-6)$. En forma más general, la distancia que hay del número real x al número real Ø es igual a x si $x \geq Ø$ y es igual a -x si x es menor que cero ($x < Ø$). Este concepto se conoce como el valor absoluto de un número Real x y se nota por $|x|$, es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq Ø \\ -x & \text{si } x < Ø \end{cases}$$

El valor absoluto de x, puede también definirse por $|x| = \sqrt{x^2}$, entendiéndose que cuando se escribe $\sqrt{a}$ se está haciendo referencia al número real positivo tal que $b^2=a$, mientras que para referirnos al número negativo -b tal que $(-b)^2=a$, se escribirá $-\sqrt{a}$. El símbolo $\pm\sqrt{a}$ hace referencia a las dos opciones.

Ejemplo

$|2| = 2$; ya que $2 \geq Ø$ y $|-4| = -(-4) = 4$ ya que $-4 < Ø$.

Algunas propiedades

1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo cual resulta evidente de la definición del valor absoluto de x.

2. $|x| = y \leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \\ x = y \text{ ó } x = -y \end{cases}$

Demostración

De la propiedad anterior, se sabe que $|x| \geq 0$, por lo tanto $|x| = y$ requiere que $y \geq 0$. Además de la definición: $|x| = y \leftrightarrow (-x = y \text{ ó } x = y)$, por consiguiente $(x = -y \text{ ó } x = y)$.

Ejemplo

Resolver la ecuación $|x-2| = 3x-9$.

$$|x-2| = 3x-9 \leftrightarrow \begin{cases} 3x-9 \geq 0 \\ y \\ x-2 = 3x-9 \text{ ó } x-2 = -(3x-9) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \\ x = 7/2 \text{ ó } x = 11/4 \end{cases}$$

Por lo tanto puesto que 11/4 no es mayor que 3

$\{x / |x-2| = 3x-7\} = \{7/2\}$.

3. $|x| = |y| \leftrightarrow (x = y \text{ ó } x = -y)$.

Demostración

Si $y \geq 0$, se tiene que $|y|=y$ y el resultado se obtiene inmediatamente de la propiedad anterior. Si $y<0$, entonces $|y|=-y$ y $|x|=|y|=-y \leftrightarrow (-x=-y$ ó $x=-y) \leftrightarrow x=y$ ó $x=-y$.

Ejemplo

Solucionar la ecuación $|2x-6|=|4-5x|$.

$2x-6=4-5x$ ó $2x-6=-(4-5x)$ y si se resuelven las ecuaciones se obtiene que $x=10/7$ ó que $x=-2/3$, es decir, el conjunto solución es $\{10/7, -2/3\}$.

4. $|x|=0 \leftrightarrow x=0$.

Demostración (Ejercicio)

Ejemplos

i) $|x-2|=0$ equivale a $x-2=0$, es decir, $x=2$.

ii) $|x^2-5x+6|=0$ equivalente a $x^2-5x+6=0 \leftrightarrow (x-3)(x-2)=0 \leftrightarrow$ $x=2$ ó $x=3 \leftrightarrow x \in \{2,3\}$.

5. $-|x| \leq x \leq |x|$.

Demostración

Demostrar que $-|x| \leq x \leq |x|$ es equivalente a demostrar las desigualdades $-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$. Se demostrará que $x \leq |x|$. Si

$x \geq 0$, $|x|=x$; como $x \leq x$ entonces $x \leq |x|$; Si $x<0$; $|x|=-x$; como $x<0$, $-x>0$, luego $x<-x=|x|$. En forma análoga se demuestra que $-|x| \leq x$. (Ejercicio).

Ejemplo

$-|5| \leq 5 \leq |5|$; $-|-3| \leq -3 \leq |-3|$.

6. $|x|^2=x^2$.

Demostración (Ejercicio).

Ejemplo

$|5|^2=5^2=25$; $|-3|^2=(-3)^2=9$.

7. $|xy|=|x||y|$.

Demostración

Se deben considerar las opciones posibles según que x o y sean positivos o negativos.

- Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$; $|x|=x$ y $|y|=y$; como $xy \geq 0$, entonces $|xy|=xy=|x||y|$.
- Si $x<0$ y $y<0$; $|x|=-x$ y $|y|=-y$; como $(-x)(-y)>0$ entonces $|xy|=xy = (-x)(-y)=|x||y|$.
- Si $x<0$ y $y \geq 0$, $|x|=-x$ y $|y|=y$; como $-xy>0$ entonces $|xy|=-xy = (-x)y = |x||y|$.

  En forma análoga si $x \geq 0$ y $y<0$.

Ejemplo

a) $|5*4|=|5||4|$; $|5*(-3)|=|5||-3|$; $|(-3)*(-6)|=|-3||-6|$.

b) $|x^2|=|x*x|=|x||x| = |x|^2=x^2$

c) $|-x|=|-1*x| = |-1||x|=|x|$

d) $|a-b|=|-1*(b-a)|=|-1||b-a|=|b-a|$

8. $|x/y|=|x|/|y|$.

Demostración (Ejercicio) e ilustrarla con un ejemplo.

9. Si $K\geq 0$; $|x|\leq k \leftrightarrow -k\leq x\leq k$.

Demostración.

i) Supóngase que $|x|\leq k$, y se verá que $-k\leq x\leq k$. (o sea que $-k\leq x$ y $x\leq k$). Se supone que $x\geq 0$; es decir; $|x|=x$, pero como $|x|\leq k$, se tiene que $x=|x|\leq k$, luego $x\leq k$. Además como $x\geq 0$, $-x<0$ y como $k\geq 0$ entonces $-x\leq 0\leq k$, es decir, $-x\leq k$, luego $x\geq -k$.

En forma análoga se demuestra el caso para $x<0$.

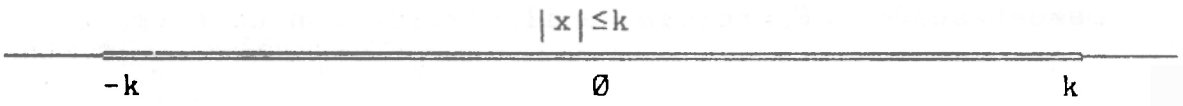
ii) Ahora se supone que $-k\leq x\leq k$ y se demostrará que $|x|\leq k$.

Si $x\geq 0$, $|x|=x$; como $x\leq k$, se tiene que $x=|x|\leq k$.

Si $x<0$, $|x|=-x$; como $x\geq -k$ se tiene que $-x\leq k$ y asi

$-x=|x|\leq k$.

Cuando se consideran los x tales que $|x|\leq k$, se hace referencia a todos los números reales x, cuya distancia al cero es menor o igual que k, o sea, los números reales x que se encuentran entre -k y k, que coincide con el intervalo cerrado [-k,k]



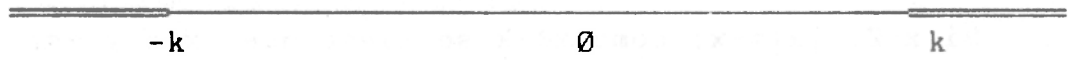
Ejemplo

1. $|x|\leq 3 \leftrightarrow -3\leq x\leq 3$ ó sea $x\in[-3,3]$
2. $|x-2|<1 \leftrightarrow -1<x-2<1 \leftrightarrow 2-1<x<2+1$ o sea $x\in(1,3)$.

1Ø. Si $k\geq 0$; $|x|\geq k \leftrightarrow x\leq -k$ ó $x\geq k$.

Demostración (Ejercicio)

Cuando se consideran los x tales que $|x|\geq k$, se hace referencia a todos los números reales x cuya distancia a cero es mayor o igual que k o sea los números reales que son mayores o iguales que k o los números reales que son menores o iguales que -k, que coincide con la reunión de los intervalos $(-\infty,-k]$ con $[k,+\infty)$.



Ejemplo 1

1. $|x| \geq 4 \leftrightarrow x \geq 4$ ó $x \leq -4$ o sea $x \in [4,+\infty) \cup (-\infty,-4]$
2. $|x-2| > 1 \leftrightarrow x-2 > 1$ ó $x-2 < -1$ o sea $x > 3$ ó $x < 1$, es decir, $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$.

Nota

Observe la diferencia entre los ejemplos de las propiedades 9 y 10; mientras que en los ejemplos de la propiedad 9 se trabajó con la intersección, en los ejemplos de la propiedad 10 se trabajó con la unión.

11. $|x+y| \leq |x|+|y|$ (Desigualdad triangular).

Demostración.

De la propiedad 5; $-|x| \leq x \leq |x|$; $-|y| \leq y \leq |y|$ y sumando miembro a miembro estas desigualdades, se tiene $-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$, es decir, $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$ y por la propiedad 9 (haciendo $k=|x|+|y|$) se concluye que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Ejemplos

1. $|5+3| \leq |5|+|3|$
2. $|-2-3| \leq |-2|+|-3|$
3. $|-3+5| \leq |-3|+|5|$

12. $|x-y| \leq |x|+|y|$.

Demostración (Ejercicio) e ilustrar con ejemplos

13. $|x-y| \geq |x|-|y|$ y $|x-y| \geq |y|-|x|$.

Demostración

$|x|=|x+0|=|x-y+y| \leq |x-y|+|y|$, por propiedad 11, es decir, $|x|-|y| \leq |x-y|$.

En forma análoga se demuestra la otra parte.

Ejemplo

1. $|5-2| \geq |5|-|2|$
2. $|5-2| \geq |2|-|5|$

En los siguientes ejemplos se ilustrará como se utilizan estas propiedades y el concepto de valor absoluto en la solución de algunas ecuaciones y desigualdades.

1. Solucionar la ecuación $|x-7|=10$.

   $|x-7|=\pm(x-7)=10$; luego $x-7=10$ ó $-(x-7)=10$, es decir $x=17$ ó $x=-3$.

2. Hallar el conjunto solución de $|x-4| \leq 1$.

$|x-4|\leq 1 \leftrightarrow -1\leq x-4\leq 1 \leftrightarrow 3\leq x\leq 5$, es decir $x\in[3,5]$.

3. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $|x^2-4|\leq 1$.

   Sea $y=x^2$, luego $|x^2-4|=|y-4|\leq 1 \leftrightarrow 3\leq y\leq 5$ (Ejemplo anterior), como $y=x^2$ se tiene que $3\leq x^2\leq 5$ y asi $x^2\geq 3$ y $x^2\leq 5$ cuyos conjuntos soluciones son $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$ y $[-\sqrt{5},5]$ respectivamente, y así la solución de la desigualdad $|x^2-4|\leq 1$ es el intervalo

$$(-\infty,-\sqrt{3}]\bigcup(\sqrt{3},+\infty)\bigcap[-\sqrt{5},\sqrt{5}] = [-\sqrt{5},-\sqrt{3}]\bigcup[\sqrt{3},\sqrt{5}]$$

4. Solucionar la ecuación $x^2-2|x|-3=0$.

   i) Si $x\geq 0$, $x^2-2|x|-3 \leftrightarrow x^2-2x-3=0 \leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$ entonces $x=3$ ó $x=-1$; como $x\geq 0$, se tiene que $x=3$ es una solución.

   ii) Si $x<0$; $x^2-2|x|-3 \leftrightarrow x^2+2x-3 \leftrightarrow (x+3)(x-1)=0 \leftrightarrow x=-3$ ó $x=1$; como $x<0$, se tiene que $x=-3$ es otra solución.

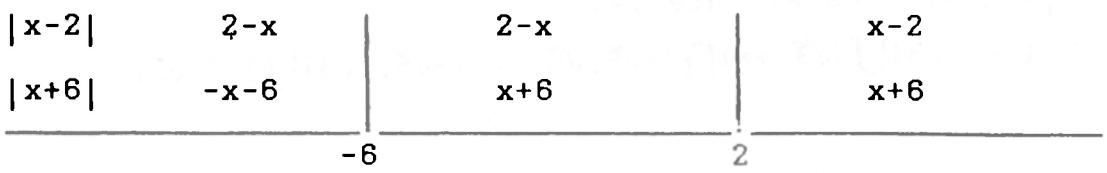
   Asi, la solución total es $x=\pm 3$.

5. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $|x-2|-|x+6|\leq 3$.

   En desigualdades de este tipo, primero se divide la recta en intervalos determinados por los valores de x donde

$|x-2|=\emptyset$ y $|x+6|=\emptyset$, luego se analiza la desigualdad en cada intervalo. Como $|x-2|=\emptyset \leftrightarrow x=2$ y $|x+6|=\emptyset \leftrightarrow x=-6$; los intervalos son $(-\infty,-6]$,$(-6,2]$, $[2,+\infty)$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 2 \\ 2-x & \text{si } x<2 \end{cases} \qquad \text{y} \quad |x+6| = \begin{cases} x+6 & \text{si } x\geq -6 \\ -x-6 & \text{si } x<-6 \end{cases}$$



i) Si $x<-6$, $|x-2|-|x+6|=(2-x)+x+6\leq 3 \leftrightarrow 8\leq 3$ (absurdo), luego no hay solución en este intervalo.

ii) Si $-6<x<2$; $|x-2|-|x+6|=2-x-(x+6)=-2x-4\leq 3 \leftrightarrow -7\leq 2x \leftrightarrow x\geq -7/2$, así que la solución es $(-6,2)\cap[-7/2,+\infty)=[-7/2,2)$, pues hay que considerar el hecho de que $-6<x<2$, es decir, $x\in(-6,2)$.

iii) Si $x>2$, $|x-2|-|x+6|=(x-2)-(x+6)=-4\leq 3$, que es una desigualdad verdadera para todo R, asi, la solución en este intervalo es $(2,+\infty)\cap(-\infty,+\infty)=(2,+\infty)$.

Faltaría por analizar si $x=-6$, $x=2$ son soluciones y para ello se reemplaza en la ecuación $|x-2|-|x+6|\leq 3$, así: para $x=-6$; $|-6-2|-8\leq 3$ absurdo y para $x=2$ $|2-2|-|2+6|\leq 3$ verdadero, luego $x=2$ es solución.

La solución total es $[-7/2,2)\cup(2,+\infty)\cup\{2\}=[-7/2,+\infty)$.

6. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $(|x|-2)(|x-1|-3)\geq 0$.

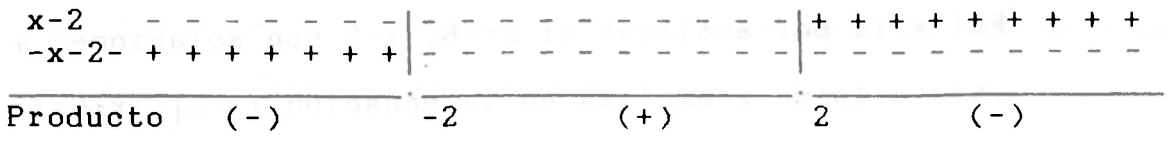
$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ 1-x & \text{si } x<1 \end{cases}$$

$|x|=0 \leftrightarrow x=0$ y $|x-1|=0 \leftrightarrow x=1$.

$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	$1-x$	$x-1$
	0	1	

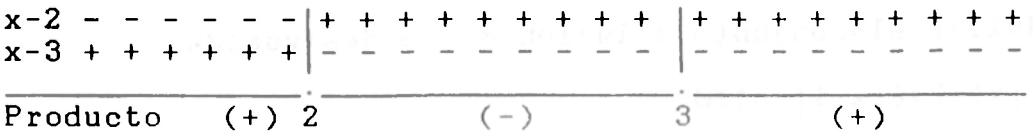
i) Si $x<0$; $(|x|-2)(|x-1|-3)=(-x-2)(1-x-3)=(-x-2)(-x-2)\geq 0 \leftrightarrow (-1)^2(x+2)^2\geq 0$, que se cumple para todo número real, luego la solución en i) es $(-\infty,0)\cap(-\infty,+\infty)=(-\infty,0)$.

ii) Si $0<x<1$; $(|x|-2)(|x-1|-3)=(x-2)(1-x-3)=(x-2)(-x-2)\geq 0$



y así el producto es positivo en el intervalo (Ø2,2), luego la solución en ii) es (Ø,1)∩(-2,2)=(1,2).

iii) Si x>1; (|x|-2)(|x-1|-2)=(x-2)(x-1-2)=(x-2)(x-3)≥Ø



y el producto es positivo en {(-∞,2)U(3,+∞)}, así que la solución en iii) es {(-∞,2)U(3,+∞)}∩(1,+∞)=(1,2)U(3,+∞).

Además se puede verificar que en los extremos de los intervalos: Ø,1,2,3, también se satisface la desigualdad por tanto la solución total es : (-∞.Ø]U[1,2]U[3,+∞).

7. El conjunto solución de la desigualdad $|x^{18}|+x^2+4\geq 0$ es el conjunto de los números Reales y el conjunto solución de la desigualdad $\frac{|x+3|+5}{x^4+1}<0$ es vacía. (¿Por qué?).

EJERCICIOS

1. Hallar el conjunto solución de las desigualdades:

   a. $|2x-7|=2x$ b. $|x-3|+|x-4|+|x|-5\leq 0$

   c. $|x-2|=|5-3x|$ d. $x^2-5|x|+8=0$

   e. $|x|^2+1\geq 0$ f. $|x|^2>0$

   g $\left|\dfrac{x-3}{x+5}\right|\leq 2$ h. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$

   i. $(\sqrt{(x+4)^2}-25)(\sqrt{x^2}-8)\leq 0$

   j. $x^2-5\geq 0$

2. Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas:

   a) $|x^n|=|x|^n$ b) $|x+y+z|\geq|x|+|y|+|z|$

   c) $\sqrt{(x-4)^2}=x-4$ d) $\sqrt{(x+5)^2}=|x+5|$

3. Demuestre que la distancia entre dos números reales x e y es $|x-y|$.

1.5.5. LA COMPLETEZ DE LOS NÚMEROS REALES

Al observar el sistema de los números Racionales y el sistema de los números Reales junto con las operaciones de suma y producto definidos para cada uno de estos conjuntos, se puede apreciar que en los dos casos se satisfacen las propiedades algebraicas fundamentales (asociativa, conmutativa, etc). Además, las propiedades fundamentales de orden que se dieron para los números Reales son válidas también para los números Racionales, o sea que si se pretende construir en forma axiomática un conjunto numérico a partir de estas propiedades algebraicas y de orden se podrá llegar tanto al conjunto de los números Racionales como al conjunto de los números Reales.

Entonces, ¿en qué se diferencian fundamentalmente estos dos conjuntos?. La diferencia radica en una propiedad llamada ***Axioma de Completez***, que se cumple para los números Reales más no para los números Racionales. A continuación se verá en que consiste esta propiedad; pero antes es necesario introducir algunas definiciones:

Definición 1

Sea A un subconjunto de R, diferente de vacío, un número Real b es el máximo de A, si b es el mayor de todos los elementos de A y además b pertenece a A. Análogamente se define el mínimo de un conjunto. (Ejercicio).

Ejemplos

1. A=[Ø,6]; 6 es el máximo de A
2. B=[5,7); B no tiene máximo. ¿Por qué 7 no es máximo de B?.

Definición 2

Sea A un subconjunto de R, diferente de vacío. A se dice acotado superiormente, si existe un número Real α (llamado una cota superior de A) tal que $\alpha \geq a$ para todo $a \in A$. En forma análoga se define una cota inferior de A. (Ejercicio). ¿Que diferencia fundamental se encuentra entre las dos definiciones anteriores?.

Ejemplo 1

A=[-5,2Ø). 2Ø es una cota superior de A; también lo son 21,23,24,28,...,etc. Observe que en general, un conjunto acotado superiormente tiene infinitas cotas superiores. Para A; cotas inferiores son -5, -1Ø, -15, -25, -28.3, ...,etc.

Definición 3

Si para un conjunto A diferente de vacío, existe una cota superior de A más pequeña que todas las demás cotas superiores, a ésta, se llama la mínima cota superior de A ó supremo de A y se nota por supA. En forma análoga se define la máxima cota inferior de A o ínfimo de A y se nota por InfA, a la más grande de todas las cotas inferiores del conjunto A.

Ejemplo 1

A=(30,40); SupA=40; InfA=30. ¿Existe el maximo de (30,40)?

Ejemplo 2

B={1,1/2,1/3,...,1/n,...} SupB=1=máximo de B; infB=0. ¿Existe el mínimo de B?.

Con estas definiciones se puede enunciar la propiedad:

Axioma de Completez: Todo subconjunto no vacío de números Reales, acotado superiormente tiene sup en R.

También se puede dar un axioma análogo con conjuntos acotados inferiormente.

Se puede apreciar que esta propiedad no la satisfacen los números Racionales, ya que es posible encontrar subconjuntos de números Racionales acotados superiormente que no tengan Sup en Q; por ejemplo sea A el conjunto formado por el uno, seguido de las diferentes cifras decimales de $\sqrt{2}$ en forma progresiva o sea; el primer elemento de A es $\sqrt{2}$ sin cifras decimales, es.decir 1, el segundo elemento es $\sqrt{2}$ con una cifra decimal, es decir 1.4; el tercero con dos cifras decimales es 1.41 o sea A={1,1.4,1.41,1.414,1.4142,...}.

Es evidente que A es un subconjunto de números Racionales, pues cada elemento tiene un número finito de cifras decimales, además A es acotado superiormente, pues por ejemplo todos sus elementos son más pequeños que 2, pero este conjunto no tiene sup en Q, pues su minima cota superior es $\sqrt{2}$ que no pertenece a Q.

EJERCICIOS

1. Dados los siguientes subconjuntos de R $A=\{\frac{1}{n+1}\}$;

   $B=\{1+\frac{1}{n}\}$; C= el conjunto de los enteros pares positivos; D=[0,1]U[4,10)U(20,30); E=(-10,10); F=Q (racionales); G=Z^+. Hallar (si existe) Sup; Inf; max, mínimo para cada conjunto.

2. Ilustrar con otro ejemplo (distinto al expuesto) que el axioma de completez no se cumple en Q.

3. ¿Puede existir entre $A \subset R$, $A \neq \phi$ y β=SupA un número Real que no esté en A?.

1.5.6 EL CONJUNTO R^2

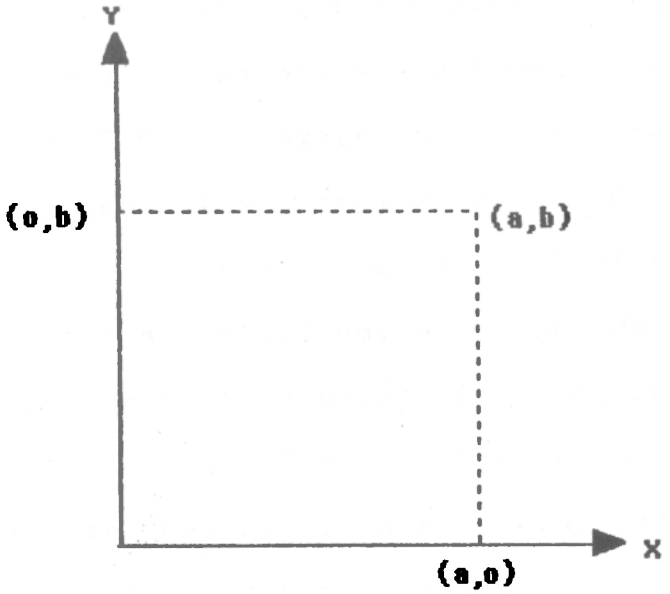
De gran importancia en la representación gráfica de curvas planas y en la interpretación geométrica de los números complejos, es el producto cartesiano del conjunto de los números Reales consigo mismo, es decir:

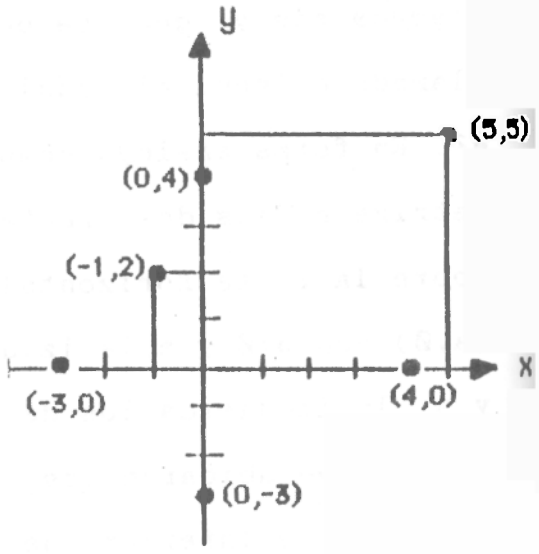
$RxR=R^2=\{(x,y)\,|\,x\in R \text{ y } y\in R\}$.

Gráficamente este conjunto se representa como el conjunto de todos los puntos en el plano, que llamaremos plano cartesiano, asociando unívocamente a cada uno de estos puntos, un elemento de R^2 y recíprocamente. Para ello se toman 2 rectas, una horizontal llamada eje x y otra vertical llamada eje y, que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen, al cual le asignaremos el elemento $(\emptyset,\emptyset)$ de R^2. En forma análoga como se hizo con la recta real, una vez metrizadas las dos rectas, a la derecha del elemento $(\emptyset,\emptyset)$ sobre la recta horizontal se ubican los elementos de la forma $(a,\emptyset)$ con $a>\emptyset$ y a la izquierda los de la forma $(a,\emptyset)$ con $a>\emptyset$; y a la izquierda los de la forma $(a,\emptyset)$ con $a<\emptyset$; y en forma similar se ubicarán los puntos $(\emptyset,a)$ con $a>\emptyset$, en las partes superior e inferior de la recta vertical respectivamente. Ahora para representar cualquier punto $(x,y)\in R^2$, con $x\neq\emptyset$, $y\neq\emptyset$, se localizan los puntos $(x,\emptyset)$ y $(\emptyset,y)$ y se trazan por

estos puntos rectas paralelas a los ejes y y x respectivamente, y al punto de corte de estas dos rectas se le asignará el elemento (x,y) de R^2. Con argumentos similares se puede mostrar que reciprocamente, a cualquier elemento de R^2, se le puede asignar un punto en el plano. Gráficamente se puede apreciar la anterior con los siguientes ejemplos.

Localizar los elementos siguientes: (a,b), (Ø,4), (-1,2), (-3,Ø), (Ø,-3), (4,Ø) y (5,5)





EJERCICIOS

1. En un solo diagrama ubicar los siguientes puntos:

   $(\sqrt{2}, \pi)$, $(\frac{1}{2}, 3)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $(7,9)$, $(-5,6)$, $(4, 2\sqrt{3})$.

2. Localizar en el plano cartesiano los siguientes subconjuntos de R^2:

   i) $\{(x,y) | y>0\}$

   ii) $\{(x,y) | y=0\}$

   iii) $\{(x,y) | y<x\}$

   iv) $\{(x,y) | y=x^2\}$

3. Localizar todos los puntos de R^2 cuya distancia al origen sea una constante $R\emptyset$

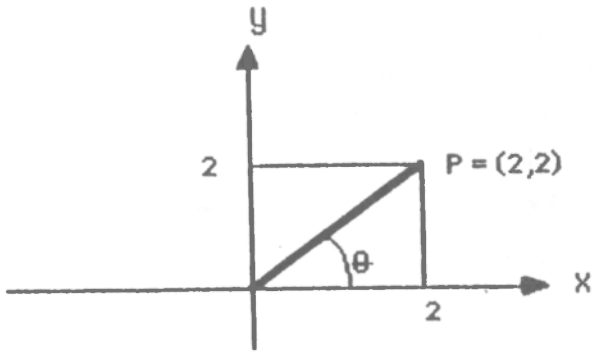
4. Localizar todos los puntos cuya distancia al eje x sea una constante k.

1.5.7. REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES

Además de la representación de los puntos en el plano en coordenadas cartesianas existe otra, llamada representación en coordenada polares, que consiste en determinar un punto en el plano mediante la distancia que hay del punto al origen del sistema de coordenadas cartesianas y que se notará por r, y por un ángulo que forma el eje positivo de las x con el segmento de recta que une el punto con el origen (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj). Se dice un ángulo ya que si nos referimos a θ como dicho ángulo, también tiene sentido considerar en su lugar a $\theta+2k\pi$ $\forall k=1,2,3,....$

Ejemplo

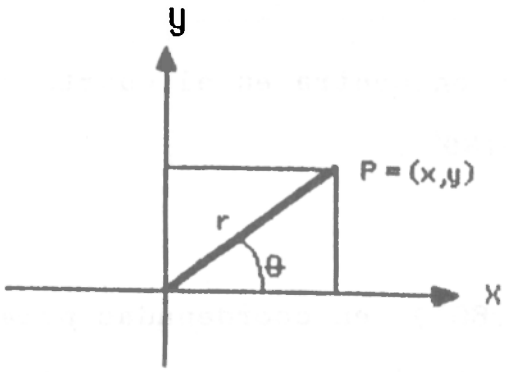
Considere al punto P=(2,2).



Como se puede apreciar de la figura anterior, este punto queda determinado por la distancia de P al origen, la cual por el teorema de Pitágoras es $r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ y por el ángulo θ que en este caso es de 45° o por 45°+360° o por 45°+4(360°) etc.

La pregunta que surge ahora es: ¿Cómo pasar un punto de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y viceversa? es decir, ¿Qué relación existe entre las componentes x e y de la representación de P en coordenadas cartesianas y las componentes r,θ de la representación del mismo P en coordenadas polares?.

Para responder esta pregunta, observe en la figura siguiente que:



$Sen\theta=\frac{y}{r} \rightarrow y=rSen\theta$ y $Cos\theta=\frac{x}{r} \rightarrow x=rCos\theta$ es decir, con estas dos fórmulas se pasa de coordenadas polares a coordenadas cartesianas. Además con las fórmulas $Tan\theta=\frac{y}{x}$ y y $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (por el teorema de Pitágoras) se pasa de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Es preciso aclarar que para determinmar θ es necesario tener en cuenta en qué cuadrante se encuentra ubicado el punto, ya que $ArcTan\frac{y}{x}$ siempre dará un ángulo entre -90° y 90°, más exactamente:

a) Si el punto se encuentra en el primer cuadrante

$\theta = ArcTan\frac{y}{x}$.

b) Si el punto se encuentra en el segundo cuadrante

$\theta = ArcTan\frac{y}{x}+180°$.

c) Si el punto se encuentra en el tercer cuadrante

$\theta = ArcTan\frac{y}{x}+180°$.

d) Si el punto de encuentra en el cuarto cuadrante

$\theta = ArcTan\frac{y}{x}+180°$.

Ejemplos

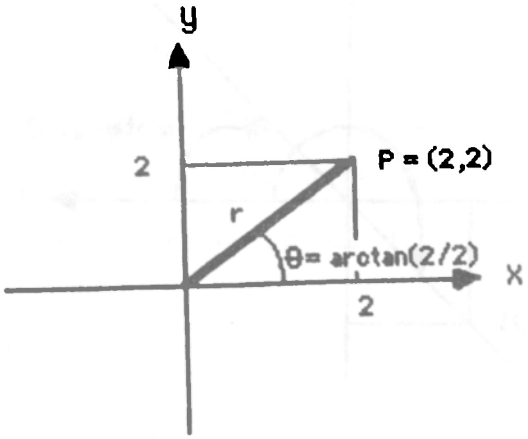
Dado el punto (2,60°) en coordenadas polares, representarlo en coordenadas cartesianas.

De las ecuaciones $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{Sen}\theta$ se tiene que $x=2\cos 60^\circ=2.\frac{1}{2}=1$ y $y=2\operatorname{Sen}60^\circ=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, luego al punto $(2,60^\circ)$ en coordenadas polares le corresponde $(1,\sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas.

Dados los puntos $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$ en coordenadas cartesianas representarlos en coordenadas polares.

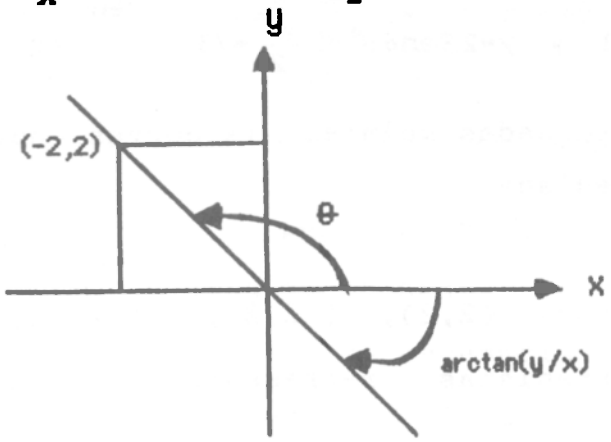
i) Para el punto $(2,2)$, $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$ y $\theta=\operatorname{ArcTan}\frac{y}{x}$ ya que el punto $(2,2)$ se encuentra en el primer cuadrante, luego

$$\theta=\operatorname{ArcTan}\frac{2}{2}=\operatorname{ArcTan}1=45^\circ$$



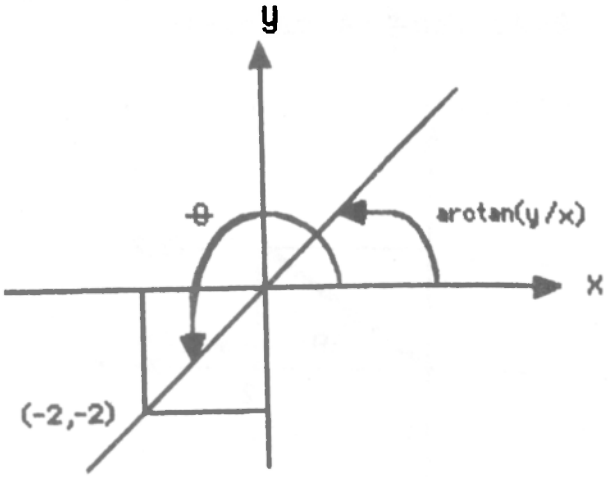
ii) Para el punto $(-2,2)$ se tiene que $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$ y puesto que $(-2,2)$ se encuentra en el segundo cuadrante entonces

$$\theta = ArcTan\frac{y}{x} + 180^\circ = ArcTan\left(\frac{2}{-2}\right) + 180^\circ = -45^\circ + 180^\circ = 135^\circ$$



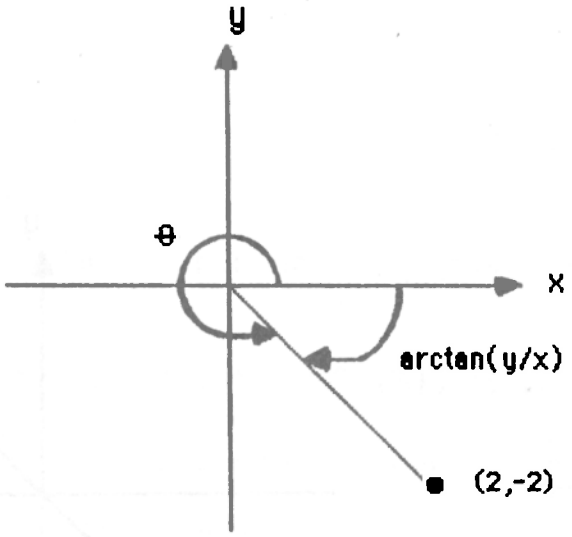
iii) Para el punto (-2,-2) se tiene que $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ y puesto que (-2,-2) está en el tercer cuadrante;

$$\theta = ArcTan\frac{y}{x} + 180^\circ = ArcTan\left(\frac{-2}{-2}\right) + 180^\circ = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ \ :$$



iv) Para el punto (2,-2) se tiene que $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ y puesto que (2,-2) está en el cuarto cuadrante;

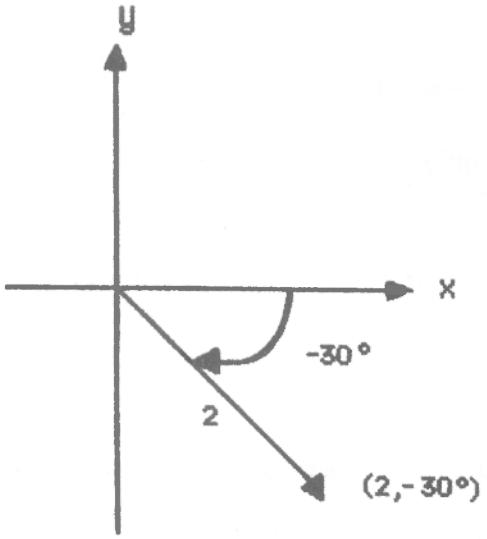
$$\theta = ArcTan\frac{y}{x} + 360^\circ = ArcTan\left(\frac{-2}{2}\right) + 360^\circ = -45^\circ + 360^\circ = 315^\circ \ :$$

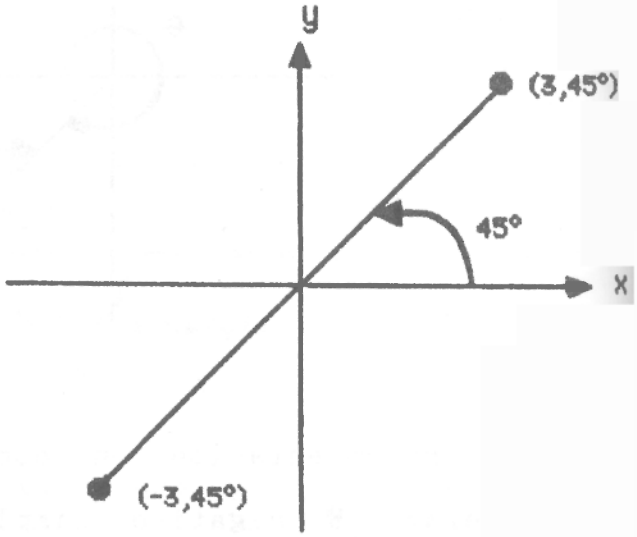


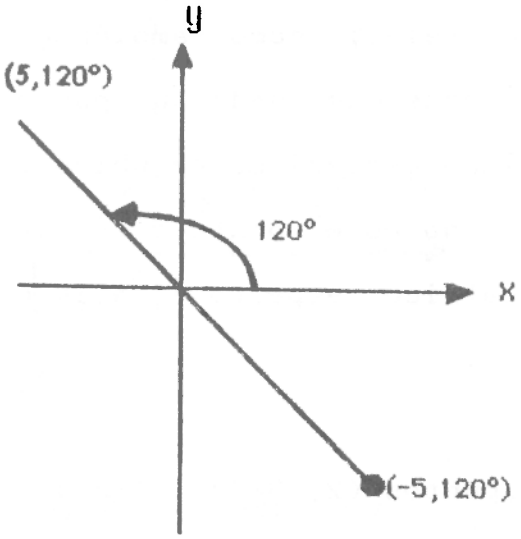
En la representación en coordenadas polares es posible considerar a θ negativo, simplemente midiendo el ángulo que forma el eje positivo de las x, con el segmento de recta que va del punto al origen pero en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj; como también es posible considerar a r negativo, en este caso dado un punto (r,θ) con $r<0$ para ubicarlo en el plano cartesiano se ubica el punto $(-r,\theta)$ $(-r>0)$ y se toma no este punto como la representación de (r,θ) sino su simétrico respecto al origen.

Ejemplos

Representar los puntos $(2,-30°)$; $(-3,45°)$, $(-5,120°)$ en el plano.


y
x
-30°
2
(2,-30°)


y
(3,45°)
45°
x
(-3,45°)


y
(5,120°)
120°
x
(-5,120°)

EJERCICIOS

1. Pasar los siguientes puntos de coordenadas cartesianas a polares

   $(\sqrt{3},1)$, $(\sqrt{3},-1)$, $(0,5)$, $(\sqrt{2},\sqrt{6})$, $(-\sqrt{3},1)$, $(-\sqrt{3},-1)$

2. Pasar los siguientes puntos de coordenadas polares a coordenadas cartesianas:

   $(-1,\frac{2\pi}{3})$, $(-7,\frac{-\pi}{3})$ $(\frac{1}{2},7\frac{\pi}{4})$, $(\sqrt{3},-11\frac{\pi}{6})$.

3. Hallar una ecuación en coordenadas polares cuya gráfica sea igual a la de la ecuación cartesiana dada:

   $y=5$; $y=7x$; $x+1=0$; $y^2=-4x+4$; $x^2+y^2=36$; $x^2-y^2=25$; $x+y=6$. (Indicación: $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{Sen}\theta$).

1.6. NUMEROS COMPLEJOS (C)

1.6.1. CONSTRUCCIÓN Y OPERACIONES

Una de las características que tienen los números reales es que todo número Real elevado al cuadrado es siempre mayor o igual que cero, o sea que expresiones como $x^2=-1$ ó $x^2=-9$ no tienen sentido si se está trabajando con los números Reales como universo. Si se quiere trabajar en un universo donde ésto tenga sentido, necesariamente debe ser diferente al de los números Reales. Para "construír" este universo inicialmente se debe crear un número cuyo cuadrado sea igual a -1, el cual se llamará unidad imaginaria y se notará por la letra i (este "Número" no puede ser Real) y según esto $i^2=-1$. En este universo que se quiere construír se hace necesario que aparezcan los números Reales, pues son los números que se conocen, de esta forma, de este conjunto se conocen los números Reales y el nuevo número i.

Pero es preciso que se trate de conservar en este universo, si no todas, por lo menos una buena parte de las propiedades fundamentales que se conocen de los números, una de ellas por ejemplo, la propiedad clausurativa para el producto nos "obliga" a considerar también como elemento de este conjunto,

los que resultan de multiplicar los número Reales por el nuevo número i; es decir; números de la forma bi con b$\in$**R**, que se llamarán imaginarios puros y se caracterizan porque al elevarlos al cuadrado siempre dan un número menor o igual que cero, ya que respetando ciertas propiedades conocidas del producto, $(bi)^2=b^2i^2=b^2(-1)=-b^2$. Con ésto se pueden hallar números cuyo cuadrado sea igual a -c, con c>Ø, éstos serán $\sqrt{c}i$ y $-\sqrt{c}i$ (es evidente que estos imaginarios puros no son Reales). Si se quiere mantener en este nuevo conjunto la propiedad clausurativa para la suma, se deben aceptar en él, "números" que se obtengan al sumar cualquier número Real a con cualquier número imaginario puro bi, es decir se introduce a este conjunto, números de la forma a+bi. Realmente todos los números que se han aceptado en este nuevo conjunto se pueden expresar en la forma Z=a+bi con a,b números Reales (a "a" se le llama la parte Real de Z y a "b" la parte imaginaria), ya que si α es Real, es de la forma $\alpha=\alpha+Øi$ y si es imaginario puro βi es de la forma $\beta i=Ø+\beta i$. A este conjunto así construído se llamará el conjunto de los números complejos y se nota **C**, o sea que **C** estará formado por los números Reales a+Øi y por los números a+bi, b$\neq$Ø llamados números imaginarios.

Se desprende de esta construcción, que para respetar el concepto de igualdad de números Reales, se debe definir la igualdad de números complejos en la forma más natural, es decir, dos números complejos son iguales si lo son sus partes reales entre si y sus partes imaginarias, es decir, $a+bi=c+di \leftrightarrow a=c$ y $b=d$. Es preciso también, para que se cumpla la propiedad clausurativa de la suma y producto en todo **C**, definir de alguna forma adecuada la suma y producto de cualquier par de números de la forma a+bi, como se procederá a continuación: La forma más natural de definir la "suma" de dos números complejos a+bi, c+di, teniendo en cuenta que se desea que la suma de dos números Reales es un número Real y que la suma de dos imaginarios puros, sea un número imaginario puro, es sumando las partes Reales, que será la parte Real de la suma y sumando las partes imaginarias que será la parte imaginaria de la suma, es decir:
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

Para definir el producto es necesario hacerlo de tal forma que la multiplicación de números Reales, sea un número Real y que $i^2=-1$, esto hace que el producto no se pueda definir de la forma natural (producto de partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí), sino que se tenga que definir de la siguiente forma así parezca un poco extraño:

(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. Esta suma y este producto satisfacen las mismas propiedades algebraicas fundamentales que satisfacen los números Reales. (conmutativa, asociativa,...,etc), teniendo en cuenta que los números Reales o y 1 (que también son complejos), seguirán siendo los módulos para esta suma y este producto respectivamente. El inverso aditivo de Z=a+bi es el complejo W=-Z=-a-bi, pues W+(Z)=(-a-bi)+(a+bi)=(-a+a)+(-b+b)i=Ø+Øi=Ø y el inverso para el producto de Z=a+bi, Z≠Ø, es $W=\frac{1}{Z}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$, ya que

$$Z*W=(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(-\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)i=1+Øi=1.$$

Es evidente, teniendo en cuenta como se construyó el conjunto **C**, que propiedades de orden en **R**, como el que todo número elevado al cuadrado sea mayor o igual que cero, no se satisfarán en ∞, ya que se partió del hecho de que $i^2=-1<Ø$, por tanto no se "Considerará" orden en **C** como se hizo en **R**. Aquí no tiene sentido decir que a+bi es mayor que c+di (a menos que a+bi y c+di sean números Reales); así, es absurdo decir que 5i>3i ó 1+i<2Ø+3i.

Ejemplos

a) Sumar (3+4i) con -5+8i.

(3+4i)+(-5+8i)=(3-5)+(4i+8i)=-2+12i.

b) Multiplicar (2+3i) con (3-5i).

(2+3i)(3-5i)=(6+15)+(9-10)i=(21-i).

c) Multiplicar 3+4i con 2i.

(2i)*(3+4i)=(0+2i)(3+4i)=((0)(3)-8)+(2*3-0*4)i=-8+6i.

d) Hallar x,y tal que (2-3i)+(x+iy)=4+3i.

(2-3i)+(x+yi)=(2-x)+(y-3)i=4+3i entonces 2-x=4 y y-3=3, así que x=4-2=2 y y=3+3=6.

e) Hallar i^{501}, i^{1000}.

Observe que $i^0=1$; $i^1=i$; $i^2=-1$; $i^3=i*i^2=-i$; $i^4=i^2*i^2=-1*-1=1$. $i^5=i^4*i=i$ y el ciclo empieza a repetirse. Ahora

$i^{501}=i^{500}*i=(i^2)^{250}*i = (-1)^{250}*i=i$.

$i^{1000}=(i^2)^{1000/2} = (i^2)^{500}=-1^{500}=1$.

f) Escribir el complejo $\frac{1-i}{i}$ en la forma a+bi.

$i^2=-1$; $i*i=-1$; $-i=i^{-1} = \frac{1}{i}$,

luego $\frac{1-i}{i} = -i(1-i)=(\emptyset-i)(1-i)=1+i$.

EJERCICIOS

1. Si $Z_1=3+5i$, $Z_2=5i$, $Z_3=8-i$, hallar el valor de:

   a) Z_1+Z_2 b) Z_2-Z_1 c) Z_2*Z_1 d) $(Z_3-Z_2)+Z_1$

   e) Z_1^1 f) $(Z_1*Z_2)^{-1}$.

2. Hallar el valor de x e y tal que:

   a) $(3+5i)(x+iy)=1$ b) $(3+5i)(x+iy)=1-i$

3. Hallar el valor de $(x+iy)(x-iy)$. ¿Es siempre Real?.

4. Si $Z_1=1+3i$. $Z_2=4-2i$, $Z_3=-i$, verifique que :

   $Z_1(Z_2+Z_3)=Z_1Z_2+Z_1Z_3$ y que $(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3)$.

5. Hallar el inverso de $\frac{(1+i)(1-i)}{i(2-3i)}$

6. Hallar el valor de $(2-2i)^4$

7. Hallar números reales x e y tales que $3x+2iy-ix+5y=7+5i$

8. Cuáles de los números i, 1-i, 1+i, 2-3i satisfacen la ecuación $Z^2+(2i-3)Z+5-i=0$.