



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DEL TIPO BENJAMIN-ONO

**César Augusto Ibáñez Lara**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas  
Bogotá D.C., Colombia

2016

# EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DEL TIPO BENJAMIN-ONO

César Augusto Ibáñez Lara

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magíster en Matemáticas**

Director:  
Ph.D, Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas  
Bogotá D.C., Colombia  
2016

**A mi familia**



# Agradecimientos

Agradezco enormemente al Profesor Guillermo Rodríguez Blanco quien con su acertada orientación me permitió llevar a feliz término el presente trabajo, también al profesor Omar Duque, quien siempre estuvo atento y dispuesto a resolver cualquier duda que me resultara en la lectura de su trabajo.



## Resumen

En este trabajo se estudia el problema de valor inicial asociado a la ecuación del tipo *Benjamin - Ono*, presentado resultados de buen planteamiento local y global en el espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s \geq 1/2$  de la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = \mu\partial_x^2 u \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (0-1)$$

donde  $t, x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > 0$  y  $\mathcal{H}$  corresponde a la transformada de Hilbert. Dicha ecuación es una regularización de tipo parabólico de la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = 0 \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (0-2)$$

La cual es una ecuación del tipo *Benjamin-Ono* y fue obtenida Akers y Milewski en [10] en el caso bidimensional. Además se extiende el buen planteamiento a espacios de Sobolev con índices negativos, que se limitan a  $s \in (-1, 1)$ , y resultados en espacios de Sobolev con pesos enteros, son obtenidos.

**Palabras clave:** Problema de Cauchy. Transformada de Hilbert. Ecuación Benjamin - Ono. Espacio de Sobolev. Buen planteamiento Local. Buen Planteamiento Global.

## Abstract

In this work, we study the initial value problem associated to the Benjamin-Ono's type equation. Here, we obtain results over local and global well posedness in the sobolev spaces  $H^s(\mathbb{R})$  with  $s > 1/2$  for the equation:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = \mu\partial_x^2 u \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

where  $t, x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > 0$  and  $\mathcal{H}$  corresponds to the Hilbert transform, that is one parabolic regularized of the equation

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

This equation was obtained for Akers and Milewski in [10] for the bidimensional case. In addition we obtain well posedness results in space with index negative, in this case for  $s \in (-1, 1)$ , and results in Sobolev space with whole weight.

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
<b>2 TEORÍA LOCAL</b>	<b>8</b>
2.0.1 Existencia . . . . .	8
2.1 Buen planteamiento local del problema regularizado . . . . .	12
2.1.1 Unicidad . . . . .	16
2.1.2 Dependencia Continua . . . . .	18
<b>3 BUEN PLANTEAMIENTO GLOBAL EN <math>H^s(\mathbb{R})</math> con <math>s \geq 1/2</math></b>	<b>20</b>
<b>4 Índices Negativos</b>	<b>25</b>
<b>5 Continuación única y Espacios con pesos enteros</b>	<b>37</b>
5.1 Problema lineal con $\mu = 0$ . . . . .	37
5.2 Problema no lineal con $\mu = 0$ . . . . .	42
5.3 Problema lineal con $\mu > 0$ . . . . .	47
5.4 Problema no lineal con $\mu > 0$ . . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>57</b>

# Introducción

Este trabajo plantea el análisis del problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo Benjamin-Ono, realizando una reducción en la dimensión espacial con respecto a lo desarrollado en [3], estudiando el buen planteamiento y la continuación única de la solución al problema de valor inicial 0-4 en ciertos espacios de Sobolev usando una regularización parabólica dada por la ecuación 0-3

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = \mu\partial_x^2 u \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (0-3)$$

con  $t, x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > 0$  dicha ecuación es una regularización de tipo parabólico de la ecuación:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (0-4)$$

donde  $\mathcal{H}f = (-i\operatorname{sgn}\xi f)^\vee$  representa la transformada de Hilbert con  $x \in \mathbb{R}$ .

El contexto histórico de este tipo de ecuaciones se remonta a la décadas del sesenta y setenta, cuando Thomas Benjamin, físico y matemático inglés y Hiroakira Ono, matemático japonés, respectivamente describieron ondas internas entre dos fluidos homogéneos con diferentes densidades, este modelo para ondas longitudinales unidimensionales en fluidos ha sido extensamente estudiado para datos iniciales en diversos espacios de sobolev  $H^s$  con  $s \geq 0$ , ver por ejemplo [1], [2], [14], [5], [6], [11], [12] siempre buscando el buen planteamiento local y global de la solución a la ecuación de Benjamin-Ono o variaciones, así como la continuación única.

Este trabajo se divide en cinco capítulos, el primero desarrolla los preliminares; el segundo trata la teoría local demostrando el buen planteamiento local en  $H^s(\mathbb{R})$  con  $s > 1/2$  para el problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H}\partial_x^2 u - \frac{3}{2}u\partial_x u = \mu\partial_x^2 u \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

Estableciendo la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución del problema 0-3, mediante la ecuación integral asociada

$$u(t) = \mathbb{V}_\mu \varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')dt',$$

con  $\mathbb{V}_\mu$  el semigrupo asociado a la parte lineal de la ecuación en cuestión; En el tercer capítulo se estudia el buen planteamiento global del problema 0-3 en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 1/2$  considerando  $u \in ([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ , obteniendo las estimativas a priori  $\|u(t)\|_0 \leq \|\varphi\|_0$  y  $\|\partial_x(t)\|_0^2 \leq \|\varphi\| \exp(C_\epsilon \|\varphi\|_0 T)$ ; En el cuarto capítulo se analiza el buen planteamiento local del problema 0-3 con  $\mu > 0$  en espacios de Sobolev con índices negativos  $s \in (-1, 1)$ , considerando los espacios

$$\mathcal{X}_T^s = \left\{ u : C([0, T]; H^s(\mathbb{R})); \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} < \infty \right\},$$

donde

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T^s} = \sup_{t \in (0, T]} \{ \|u(t)\|_s + t^{|s|/2} \|u(t)\|_0 \}$$

Finalmente, se presentan resultados en espacios de Sobolev con pesos enteros  $\tilde{F}_{s,m}$  para  $m \in \mathbb{Z}^+$ , definidos por

$$\tilde{F}_{s,m} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in F_{s,m}; \quad \partial_\xi^j \widehat{\varphi}(0) = 0 \\ j = 0, 1, \dots, m-1, \end{array} \right.$$

donde  $\|\varphi\|_{\tilde{F}_{s,m}}^2 = \|\varphi\|_s^2 + \|w^m \varphi\|_0^2$ ,  $w^m = (1 + \xi^2)^{m/2}$  y

$$F_{s,m} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(w^{2m} dx).$$

Estos resultados son obtenidos siguiendo las ideas de R. Iório en [10] y [8].

**Palabras clave:** Problema de Cauchy. Transformada de Hilbert. Ecuación Benjamin - Ono. Espacio de Sobolev. Buen planteamiento Local. Buen Planteamiento Global. Espacios con peso. Continuación única.

# 1 Preliminares

En esta sección se abordarán algunos de los resultados que serán usados a lo largo de este trabajo, así como la notación y algunas definiciones previas, las cuales son tomadas de [10],

## Definición 1.1.

$C_\infty(\mathbb{R})$  corresponde al espacio de funciones definidas en  $\mathbb{R}$  a valor complejo, que tienden a cero en el infinito, es decir

$$C_\infty(\mathbb{R}) := \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \varphi \text{ es continua y } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0\}$$

## Definición 1.2.

Se define el espacio de Schwartz, como aquel espacio de funciones  $C^\infty$  y sus derivadas decaen más rápidamente que cualquier polinomio, es decir

$$S(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad \forall k, \alpha \in \mathbb{N}\}$$

La topología de este espacio está generada por las seminormas

$$P_{k,\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^k \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta \varphi(x)|$$

## Definición 1.3.

Sea  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ , se define la transformada de Fourier  $\wedge : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$  por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$$

## Definición 1.4.

El espacio de distribuciones temperadas  $S'(\mathbb{R})$  es el dual topológico del espacio de Schwartz.

## Definición 1.5.

para  $s \in \mathbb{R}$  se define el espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  como

$$H^s(\mathbb{R}) := \{\varphi \in S'(\mathbb{R}); (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

con el producto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi$$

**Teorema 1.1** (Lema de Sobolev).

Sea  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  con  $s > \frac{n}{2}$ , entonces  $\varphi$  es una función continua en  $\mathbb{R}^n$  y

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq C_s \|\varphi\|$$

Con lo que se tiene  $H^s(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$  una inmersión continua.

**Demostración 1.1.**

Ver [13].

**Teorema 1.2** (Teorema generalizado de Sobolev).

Sea  $s > r + \frac{n}{2}$ , entonces  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty^r(\mathbb{R}^n)$  es una inmersión continua donde  $C_\infty^r(\mathbb{R}^n)$  corresponde al espacio de funciones con  $r$  derivadas continuas que se anulan en el infinito.

$$\|\varphi\|_{C^r} \leq C_s \|\varphi\|_s$$

**Demostración 1.2.**

Ver[13].

**Teorema 1.3** (Desigualdad de Gronwall).

Sean  $f, g, h : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ . Si

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(t') f(t') dt'$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(t') g(t') \exp\left(\int_s^t h(u) du\right) dt'$$

en caso que  $g$  sea constante entonces

$$f(t) \leq g \exp\left(\int_a^t h(t') dt'\right)$$

**Demostración 1.3.**

Ver[13].

**Teorema 1.4** (Desigualdad de Kato-Ponce).

Sean  $s > 0$  y  $1 < p < \infty$ , entonces  $L_s^p \cap L^\infty$  es una álgebra de Banach. Además

$$|fg|_{s,p} \leq c(\|f\|_{L^\infty} |g|_{s,p} + |f|_{s,p} \|g\|_{L^\infty})$$

**Definición 1.6** (Desigualdad de Young).

Sean  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ . Entonces  $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ . Mas aún,

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Teorema 1.5** (Desigualdad de Gagliardo - Nirenberg).

Si  $f \in H^k(\mathbb{R})$  donde  $k$  es un entero positivo, entonces existe  $C > 0$  tal que:

$$\|\partial_x^n f\|_{L^p} \leq C \|\partial_x^m f\|_{L^q}^\theta \|f\|_{L^r}^{1-\theta},$$

donde  $n < m \leq k$ ,  $C = C(n, m, p, q, r)$ ,  $\theta \in [\frac{n}{m}, 1]$  y

$$\frac{1}{p} - n = \theta \left( \frac{1}{q} - m \right) + (1 - \theta) \frac{1}{r}.$$

**Definición 1.7.**

La transformada de Hilbert definida por

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y} dy,$$

para  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ , satisface:

$$\widehat{\mathcal{H}\varphi}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$$

y

$$\mathcal{H}\partial_x \varphi = \partial_x \mathcal{H}\varphi$$

**Definición 1.8.**

Se define  $L_s^p := L_s^p(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s} L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $\|\cdot\|_{L_s^p} = \|\cdot\|_{s,p}$  y  $\Lambda^s = (1 - \Delta)^{s/2}$  conocido como el potencial de Bessel de orden  $-s$

**Definición 1.9** (Espacios de Sobolev).

Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$  se define el espacio de Sobolev como

$$L_s^p = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \Lambda^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

**Definición 1.10** (Pesos).

Los espacios  $X^s(\omega^{2m})$  y  $F_{s,m} = H^s(\omega^{2m})$  se definen como sigue: para  $s \in \mathbb{R}$  y  $m > 0$

$$X^s(\omega^{2m} dx) :$$

$$X^s(\omega^{2m} dx) = X^s(\mathbb{R}) \cup L^2(\omega^{2m} dx)$$

con la norma  $\|\varphi\|_{X^s(\mathbb{R})} = (\|\varphi\|_{X^s}^2 + \|\omega^m \varphi\|_0^2)^{1/2}$ .

$$F_{s,m}$$

$$F_{s,m} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(w^{2m} dx) \tag{1-1}$$

*Con la norma*

$$\|\varphi\|_{F_{s,m}} = (\|\varphi\|_s^2 + \|w^m \varphi\|_0^2)^{1/2} \tag{1-2}$$

## 2 TEORÍA LOCAL

El principal interés de esta sección será demostrar el buen planteamiento local en el espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  con  $s > 1/2$ , mediante una regularización parabólica de la ecuación (0-2), para esto se debe mostrar la existencia, la unicidad de la solución y la dependencia continua.

Primero se analiza el problema lineal asociado al problema (0-3) con  $\mu > 0$ , para esto se define el operador

$$A_\mu = \mathcal{H}(1 - \partial_x^2) + \mu \partial_x^2$$

por lo que el problema lineal asociado al problema (0-3) para  $\mu > 0$  queda definido por

$$\begin{cases} \partial_t u + A_\mu u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (2-1)$$

cuya única solución viene dada por:

$$\mathbb{V}_\mu(t)\varphi = \exp(-tA_\mu)\varphi = (V_\mu(t)\widehat{\varphi})^\vee \quad (2-2)$$

con:

$$V_\mu(t, \xi) = e^{-\mu t \xi^2 - i|\xi|\xi t + it \operatorname{sgn}(\xi)} = e^{-\mu t \xi^2 + it \operatorname{sgn}(\xi)(1 + \xi^2)} \quad (2-3)$$

### Teorema 2.1.

El problema 0-3 es localmente bien planteado en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 1/2$ .

Para la prueba de estos teoremas se consideran los siguientes tres lemas, en los que se toma el problema en su parte lineal y no lineal, los cuales tienen como fin controlar la norma de la solución del problema regularizado, involucrando las desigualdades de regularización asociadas al semigrupo  $\{\mathbb{V}_\mu(t)\}_{t>0}$  y  $\mu > 0$ . Y que permiten controlar la norma  $H^s(\mathbb{R})$  de la solución del problema 2-1. Dividiendo esta sección en existencia, unicidad y dependencia continua.

### 2.0.1. Existencia

Para la demostración de los siguientes lemas se usan ideas similares a las usadas en [9] y en [7]

**Lema 2.1.**

Sea  $\mu > 0$  fijo,  $\mathbb{V}_\mu$  define un  $C_0$  semigrupo de contracción en el espacio  $H^s(\mathbb{R})$ . Además, si  $\mu > 0$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces para todo  $t > 0$  se cumple que  $\mathbb{V}_\mu \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}); H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$  y existen  $C_\lambda, C_s$  constantes positivas tales que:

$$\|\mathbb{V}_\lambda(t)\varphi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{\mu t} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right] \|\varphi\|_s \quad (2-4)$$

$$\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{\mathcal{D}^s} \leq C_s \left[ \frac{1}{\mu t} \right]^{\frac{s+1}{2}} \left( \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^{-1}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \quad (2-5)$$

*Nota:* Si  $\mu = 0$ , el semigrupo puede ser extendido a todo  $\mathbb{R}$  definiendo un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo.

**Demostración 2.1.**

Claramente  $\mathbb{V}_\mu(0) = 1$ ,  $\mathbb{V}_\mu(t+t')\varphi = \mathbb{V}_\mu(t)\mathbb{V}_\mu(t')\varphi$  y

$$\lim_{t' \rightarrow t} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \mathbb{V}_\mu(t')\varphi\|_s = 0$$

Además

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{s+\lambda} &= \int (1 + \xi^2)^{s+\lambda} |\widehat{\mathbb{V}_\mu(t)\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int (1 + \xi^2)^{s+\lambda} \exp(-\mu t \xi^2) |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_\lambda \left\{ 1 + \sup_{\xi} \xi^{2(s+\lambda)} \exp(-\mu t \xi^2) \right\} \|\varphi\|_s \\ &= C_\lambda \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{\mu t} \right)^{\lambda/2} \right] \|\varphi\|_s \end{aligned}$$

Y como

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{\frac{\lambda}{2}} \exp(-\mu t \xi^2) \leq C_\lambda \left[ 1 + \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right]$$

y para  $s > 0$  se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s \exp(-2\mu t \xi^2) d\xi \leq C_s \left[ \frac{1}{\mu t} \right]^{\frac{s+1}{2}}$$

Se obtiene la desigualdad indicada en 2-5

**Lema 2.2.**

La aplicación  $[\epsilon, \infty) \mapsto \mathbb{V}_\mu(t)$  con  $\mu > 0$  es uniformemente continuo con respecto a la norma de  $H^{r+\lambda}(\mathbb{R})$  con  $\lambda \geq 0$  y  $\epsilon > 0$

$$\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \mathbb{V}_\mu(\tau)\varphi\|_{r+\lambda} \leq k|t - \tau|^2 \|\varphi\|_r \quad (2-6)$$

**Demostración 2.2.**

Para esto se considera el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Considerando sin pérdida de generalidad  $t > \tau$  se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \mathbb{V}_\mu(\tau)\varphi\|_{s+\lambda}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s+\lambda} |exp(-t\mu\xi^2) - exp(-\tau\mu\xi^2)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\xi} (1 + \xi^2)^\lambda |1 - exp((t - \tau)\mu\xi^2)|^2 \|\varphi\|_s^2 \\ &\leq K|t - \tau|^2 \|\varphi\|_s^2 \end{aligned}$$

**Lema 2.3.**

Sean  $u, v \in C((0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ ,  $s \geq 1$ ,  $\mu > 0$ ,  $T > 0$ ,  $M_u = \sup_{t \in [0, t]} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}$ ,  $M_v = \sup_{t \in [0, t]} \|v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}$  y  $M = \max\{M_u, M_v\}$ . Entonces existe  $C_s > 0$  constante independiente de  $\mu$  tal que para todo  $t' \in [0, t)$  se satisfacen

a.

$$\|\mathbb{V}_\mu(t - t')u(t')\partial_x u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_s \left[ 1 + \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{1/2} \right] \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \quad (2-7)$$

b.

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t - t') \{u(t')\partial_x u(t') - v(t')\partial_x v(t')\}\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \\ C_s \left( \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} \right) \|u(t') - v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} &\left( 1 + \left( \frac{1}{\mu(t - t')} \right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (2-8)$$

c.

$$\int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t - t')u(t')\partial_x u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \leq C_s M_u^2 \left( T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \right) \quad (2-9)$$

d.

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t - t') \{u(t')\partial_x u(t') - v(t')\partial_x v(t')\}\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' &\leq \\ C_s M \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &\left[ T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2-10)$$

### Demostración 2.3.

La prueba se divide en dos casos, el primero para  $s > 1$  y el segundo para  $s = 1$ .

Para  $s > 1$ , de la desigualdad 2-4 se obtiene la desigualdad 2-7, como sigue

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq C_s \left[ 1 + \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{1/2} \right] \|u(t')\partial_x u(t')\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} \\ &\leq C_s \left[ 1 + \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{1/2} \right] \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Además de la desigualdad 2-7, y haciendo  $M_u = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' &\leq C_s \int_0^t \left[ 1 + \left( \frac{1}{\mu t'} \right)^{1/2} \right] \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 dt' \\ &\leq C_s M_u^2 \left[ T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad 2-9. Y

$$\begin{aligned} \|u\partial_x u - v\partial_x v\|_{\mathcal{X}^{s-1}} &= \frac{1}{2} \|\partial_x (u^2 - v^2)\|_{\mathcal{X}^{s-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \|\partial_x (u^2 - v^2)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 + \|u^2 - v^2\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} C_s \|u^2 - v^2\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq C_s \left( \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})} \right) \|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Desigualdad de la cual se deducen las desigualdades 2-9 y 2-10.

Para el caso  $s = 1$ , de la desigualdad 2-5 se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')\|_{X^1} &\leq C \left[ \frac{1}{\mu(t-t')} \right] \left( \|u(t')\partial_x u(t')\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u^2(t')\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) \\ &\leq C \frac{1}{\mu(t-t')} \|u(t')\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

la cual permite deducir las desigualdades 2-7 y 2-9. Y de las desigualdades de Cauchy-Schwartz, y Holder

$$\begin{aligned} \|\partial_x (u^2(t) - v^2(t))\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x (u(t) - v(t))| |u(t) + v(t)| dt + \int_{\mathbb{R}} |u(t) - v(t)| |\partial_x (u(t) + v(t))| dt \\ &\leq \|\partial_x (u(t) - v(t))\|_{H^0} \|u(t) + v(t)\|_{H^0} + \|u(t) - v(t)\|_{H^0} \|\partial_x (u(t) + v(t))\|_{H^0} \\ &\leq 2 (\|u(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{H^1}) \|u(t) - v(t)\|_{H^1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^{-1}\partial_x(u^2 - v^2)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \|u^2 - v^2\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u(t) - v(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u(t) + v(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \\
&= \|u - v\|_{H^0} \|u + v\|_{H^0} \\
&\leq (\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}) \|u - v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

mezclado con la desigualdad 2-5 se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{V}_\mu(t - t') \{u(t')\partial_x u(t') - v(t')\partial_x v(t')\}\|_{H^s} &\leq \\
\frac{1}{2}C_s \left[ \frac{1}{\mu t} \right]^{\frac{s+1}{2}} \left( \|\partial_x(u^2 - v^2)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^{-1}\partial_x(u^2 - v^2)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2} &\leq \\
C_s \left[ \frac{1}{\mu t} \right]^{\frac{s+1}{2}} (\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}) \|u - v\|_{H^1} &
\end{aligned}$$

Lo que muestra las desigualdades 2.3 y 2-10.

## 2.1. Buen planteamiento local del problema regularizado

A continuación se establece el buen planteamiento local del problema regularizado 0-3, lo cual se hace en los dos siguientes lemas, el primero establece la equivalencia entre la ecuación 0-3 con la ecuación integral asociada y el segundo determina una contracción en  $\mathcal{Y} \subset C([0, T]; H^s)$ , donde la ecuación integral asociada está dada por

$$u(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t - t')u(t')\partial_x u(t')dt' \quad (2-11)$$

y

$$\mathcal{Y} = \left\{ v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})); \sup_{t \in [0, T]} \|v(t) - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{X^s} \leq 1 \right\} \quad (2-12)$$

### Lema 2.4.

Sean  $s > 1/2$ ,  $\mu > 0$ ,  $T > 0$  y  $u_\mu \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  entonces la ecuación 2-11 es equivalente al problema 0-3.

**Demostración 2.4.**

Primero se supone que dada  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  y satisface la igualdad 2-11; se mostrará que se tiene la igualdad

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + A_\mu u(t) - \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t) \right\|_{s-2} = 0 \quad (2-13)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbb{V}_\mu(t+h) - \mathbb{V}(t)) \varphi \\ &+ \frac{3}{2} \int_0^t \{ \mathbb{V}_\mu(t+h-t') - \mathbb{V}_\mu(t-t') \} u(t') \partial_x u(t') dt' \\ &+ \frac{3}{2} \int_t^{t+h} \mathbb{V}_\mu(t+h-t') u(t') \partial_x u(t') dt' \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

De la igualdad

$$A_\mu = \mathcal{H} \{1 - \partial_x^2\} + \mu \partial_x^2$$

Se obtiene que el problema lineal regularizado puede ser escrito como

$$u_t = -A_\mu u(t)$$

Entonces, por teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$I = -A_\mu \mathbb{V}_\mu(t) \varphi$$

$$II = -\frac{3}{2} A_\mu \int_0^t \mathbb{V}(t-t') u(t') \partial_x u(t') dt'$$

Y por teorema del valor medio para integrales

$$III = \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t)$$

Lo que permite concluir la igualdad 2-13 y además  $u \in C^1([0, T]; H^{s-2}(\mathbb{R}))$

Recíprocamente, si se supone verdadera la igualdad 2-13, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{V}(t-t') u(t') &= A_\mu \mathbb{V}_\mu(t-t') u(t') + \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_{t'} u(t') \\ &= \mathbb{V}_\mu \{ \partial_{t'} u(t') + A_\mu u(t') \} \\ &= \frac{3}{2} \mathbb{V}_\mu(t-t') u(t') \partial_x u(t') \end{aligned}$$

que se cumple para todo  $t \in [0, T]$  con  $t'$  satisfaciendo  $0 \leq t - t' \leq T$ , e integrando ambos lados de la anterior desigualdad se obtiene

$$u(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')dt'$$

Finalizando la prueba.

**Lema 2.5.**

Sean  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ ,  $s > 1/2$  y  $\mu > 0$ . Entonces existe una constante  $T = T(\mu, s, \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}) > 0$  tal que la función  $\mathcal{G}$  define una contracción sobre el conjunto  $\mathcal{Y}$ , donde

$$\mathcal{G}v(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')v(t')\partial_x v(t')dt' \quad (2-14)$$

**Demostración 2.5.**

La prueba se divide en dos partes, la primera muestra que  $\mathcal{G}v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  y la segunda muestra la existencia de una constante  $T = T(\mu, s, \|\varphi\|_{H^s}) > 0$  que define una contracción en  $\mathcal{Y}$ .

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}v(t+h) - \mathcal{G}v(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \|(\mathbb{V}_\mu(t+h) - \mathbb{V}_\mu(t))\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_0^t \|[\mathbb{V}_\mu(h) - 1] \mathbb{V}_\mu(t-t')v(t')\partial_x v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_t^{t+h} \|(\mathbb{V}_\mu(t+h-t')v(t')\partial_x v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

Donde

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} I = 0$$

por la desigualdad 2-10 se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} II &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \|\mathbb{V}_\mu(h) - 1\|_{H^s(\mathbb{R})} \|\mathbb{V}(t-t')v(t')\partial_x v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &= \frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathbb{V}_\mu(h) - 1\|_{H^s(\mathbb{R})} \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t-t')v(t')\partial_x v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &\leq \frac{3}{2} CM^2 \left[ T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \right] \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathbb{V}_\mu - 1\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y claramente por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} III = 0$$

Lo anterior permite concluir que la función  $\mathcal{G}$  es continua en el intervalo  $[0, T)$ , de manera análoga se muestra la continuidad por la izquierda de  $T$ .

A continuación se muestra que  $\mathcal{G}$  es efectivamente una contracción en el conjunto  $\mathcal{Y}$ . Por hipótesis se tiene

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

Por definición y las desigualdades 2-7 y 2-9 se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}u(t) - \mathbb{V}_\mu \varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \frac{3}{2} \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &\leq \frac{3}{2} C_s M^2 \left[ T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \right] \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C_s M^2 \left[ T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \right] (1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})})^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}v(t) - \mathbb{V}_\mu \varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \frac{3}{2} \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t-t')v(t')\partial_x v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &\leq \frac{3}{2} C_s M^2 \left[ T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \right] \|v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C_s M^2 \left[ T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \right] (1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})})^2, \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\mathcal{G}v(t) - \mathcal{G}v\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_s (1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})})^2 \left( T + \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \right)$$

Además

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}v(t) - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \frac{3}{2}C_s M^2 \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t-t') \{u(t')\partial_x u(t') - v(t')\partial_x v(t')\}\|_{H^s(\mathbb{R})} dt' \\ &\leq \frac{3}{2}C_s M \left[ T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2} \right] \sup_{t' \in [0, T]} \|u(t') - v(t')\|_{H^s(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Por lo cual, al considerar la función creciente y continua

$$f(T) = T + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{1/2}$$

Se tiene garantizada la existencia de las constantes positivas que dependen de  $\mu$ ,  $s$  y  $\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}$

$$T_1 = \frac{1}{C_s(1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})})^2} \quad (2-15)$$

y

$$T_2 = \frac{1}{2C_s(1 + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})})^2} \quad (2-16)$$

Con lo cual al considerar  $T = \min \{T_1, T_2\}$  se deduce que  $\mathcal{G}$  define una contracción en  $\mathcal{Y}$ , como quería probarse.

Así, la solución al problema 0-3 depende continuamente del dato inicial, es decir, la función  $\varphi \mapsto u_\mu$  es continua en el siguiente sentido: Sean  $\{\varphi_n\}_n \subset H^s(\mathbb{R})$  tales que  $\varphi_n \rightarrow f$  en  $H^s(\mathbb{R})$  y  $\{u_{\mu,n}\}_n \subset C([0, T_n]; H^s(\mathbb{R}))$  las correspondientes soluciones de la ecuación integral. Entonces las soluciones pueden ser extendidas al intervalo  $[0, T]$  para  $T \in (0, T_\infty)$ . Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s = 0$$

Con los anteriores lemas se puede establecer la dependencia continua y la unicidad de la solución del problema 0-3 en el conjunto  $H^s(\mathbb{R})$ , como se muestra en las siguientes líneas.

### 2.1.1. Unicidad

La solución al problema (0-3) es única.

Sean  $u_\mu, v_\mu \in C([0, T_\mu]; H^s(\mathbb{R}))$  dos soluciones del problema 0-3 con dato inicial  $\varphi$  entonces  $u_\mu = v_\mu$ , en efecto

$$\begin{aligned}
\|u_\mu - v_\mu\|_s &= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(u(t')\partial_x u(t') - v(t')\partial_x v(t')) dt' \right\|_s \\
&= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-t') \left\{ \frac{1}{2} \partial_x u^2(t') - \frac{1}{2} \partial_x v^2(t') \right\} dt' \right\|_s \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-t') \left\{ \frac{1}{2} \partial_x u^2(t') - \frac{1}{2} \partial_x v^2(t') \right\} dt' \right\|_s \\
&\leq C_s \int_0^t \left( 1 + \left( \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (\|u(t')\|_s + \|v(t')\|_s) (\|u(t') - v(t')\|_s) dt' \\
&\leq 2MC_s \int_0^t \left( 1 + \left( \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (\|u(t')\|_s - \|v(t')\|_s) dt'
\end{aligned}$$

En la última desigualdad haciendo

$$M = \sup_{t' \in [0, T_\mu]} \{\|u(t')\|_s, \|v(t')\|_s\}$$

Se sabe además que existe  $T_1 > 0$  el cual satisface

$$2MC_s \int_0^{T_1} 1 + \frac{1}{(\mu(t-t'))^{\frac{1}{2}}} dt' < 1$$

Con dos condiciones sobre  $T_1$

i. Si  $T_1 > T_\mu$ . Para  $t \in [0, T_\mu]$  se satisface:

$$\|u_\mu - v_\mu\|_s \leq 2MC_s \left\{ \int_0^t 1 + \frac{1}{(\mu(t-t'))^{\frac{1}{2}}} dt' \right\} \sup_{\xi \in [0, T_1]} \|u(t') - v(t')\|_s \quad (2-17)$$

por lo cual

$$\|u_\mu - v_\mu\|_s \leq \sup_{t \in [0, T_1]} \|u(t') - v(t')\|_s$$

entonces  $u_\mu = v_\mu$  en  $C([0, T_1] : H^s(\mathbb{R}))$

ii. Si  $T_1 < T_\mu$ . Se analizan dos casos, el primero para  $t \in [T_1, T_\mu]$  siempre que  $T_\mu \leq 2T_1$ , donde además, para  $t \in [0, T_1]$  se satisface  $u_\mu = v_\mu$  para  $u_\mu, v_\mu \in C([0, T_1] : H^s(\mathbb{R}))$ , y haciendo el cambio de variable  $t' = r + T_1$

$$\begin{aligned}
\|u_\mu - v_\mu\|_s &\leq 2MC_s \int_0^t \left\{ 1 + \frac{1}{(\mu(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \|u(t') - v(t')\|_s \right\} dt' \\
&= 2MC_s \int_{T_1}^t \left\{ 1 + \frac{1}{(\mu(t-t'))^{\frac{1}{2}}} \right\} \|u(t') - v(t')\|_s dt' \\
&= 2MC_s \int_0^{t-T_1} \left\{ 1 + \frac{1}{(\mu(t-r-T_1))^{\frac{1}{2}}} \right\} \|u(r+T_1) - v(r+T_1)\|_s dr
\end{aligned}$$

lo cual cae en el caso antes analizado, por lo cual

$$\|u_\mu - v_\mu\|_s \leq \sup_{t \in [T_1, t]} \|u(t') - v(t')\|_s$$

entonces  $u_\mu = v_\mu$  en  $C([T_1, T_\mu] : H^s(\mathbb{R}))$

El segundo caso cuando  $T_\mu > 2T_1$  se repite el procedimiento realizado en el primer caso, obteniendo por tanto  $u_\mu = v_\mu$  en  $C([0, 2T_1] : H^s(\mathbb{R}))$ , y si  $T_\mu \leq 3T_1$  la prueba ha finalizado, en caso contrario se repite el proceso y como el intervalo  $[0, T_\mu]$  es compacto se tendrá un número finito de pasos. Quedando demostrada la unicidad en la solución al problema 0-3

### 2.1.2. Dependencia Continua

Para esto se considera  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subset H^s(\mathbb{R})$  con  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $H^s(\mathbb{R})$  con sus respectivas soluciones  $u_{\mu,n} \in C([0, T_n]; H^s(\mathbb{R}))$  al problema 0-3 y los tiempos de existencia respectivos  $T_n = T_n(\mu, s, \|\varphi_n\|_s)$  garantizados por el lema 2.5, donde

$$0 < T_n = \min \{T_{1,n}, T_{2,n}\} \tag{2-18}$$

los cuales satisfacen 2-15 y 2-16 respectivamente, de manera que dado  $T' \in (0, T)$  existe  $N$  tal que para  $n > N$  se tiene  $T_n \geq T'$  y  $u_{\mu,n}, u_\mu \in C([0, T']; H^s(\mathbb{R}))$ ; y considerando

$$M_n = \sup_{t \in [0, T']} \{ \|u_{\mu,n}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_\mu\|_{H^s(\mathbb{R})} \}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\nabla_\mu(t-t') \{u_{\mu,n}(t') \partial_x u_{\mu,n}(t') - u_\mu(t') \partial_x u_\mu(t')\}\|_s dt' \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s \\
&\quad + C_s \int_0^t \{\|u_{\mu,n}(t')\|_s + \|u_\mu(t')\|_s\} \|u_{\mu,n}(t') - u_\mu(t')\|_s \left(1 + \left(\frac{1}{\mu t'}\right)^{1/2}\right) dt' \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + C_s M_n \int_0^t \|u_{\mu,n}(t') - u_\mu(t')\|_s \left\{1 + \left(\frac{1}{\mu t'}\right)^{1/2}\right\} dt' \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + C_s M_n \left\{T' + \left(\frac{1}{\mu T'}\right)^{1/2}\right\} \int_0^t \|u_{\mu,n}(t') - u_\mu(t')\|_s dt'
\end{aligned}$$

y por desigualdad de Gronwall se concluye

$$\|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s \leq \|\varphi_n - \varphi\|_s e^{C_s M_n \left[T' + \left(\frac{1}{\mu T'}\right)^{1/2}\right]} e$$

Para quitar la dependencia de  $M_n$  en la anterior desigualdad, se considera el conjunto

$$\mathcal{Y} = \left\{ u_{\mu,n} \in C([0, T']; H^s(\mathbb{R})); \sup_{t \in [0, T']} \|u_{\mu,n}(t) - \nabla_\mu(t) \varphi_n\|_s \leq 1 \right\} \quad (2-19)$$

en tal caso  $\|u_{\mu,n}(t)\|_s \leq 1 + \|\varphi_n\|_s \leq C + \|\varphi_n\|_s$ , entonces

$$\begin{aligned}
M_n &= \sup_{t \in [0, T']} \{\|u_{\mu,n}(t)\|_s + \|u_\mu(t)\|_s\} \\
&\leq \sup_{t \in [0, T']} C + \|\varphi\|_s + \sup_{t \in [0, T']} \|u_\mu(t)\|_s \\
&= M
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_s \leq \|\varphi_n - \varphi\|_s e^{C_s M \left[T' + \left(\frac{1}{\mu T'}\right)^{1/2}\right]} T'$$

probando la dependencia continua.

### Nota 2.1.

Para  $\mu = 0$ , se siguen las ideas expuestas en [10] capítulo 8, y se concluye que el problema 0-3 es localmente bien planteado en el espacio  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 3/2$ .

# 3 BUEN PLANTEAMIENTO GLOBAL EN $H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq 1/2$

En esta sección se obtiene el resultado global para el problema 0-3.

## Teorema 3.1.

El problema 0-3 está bien planteado globalmente en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 1/2$  con  $\mu > 0$ .

## Demostración 3.1.

La prueba se divide en dos partes, para la primera se considera  $s = 1$  y para la segunda se considera  $s > 1$ , en esta última se hará uso de la desigualdad de regularización; y luego se extiende para  $1/2 < s < 1$ .

- Caso  $s = 1$ . Se considera  $u \in ([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$  la solución del problema 0-3 con dato inicial  $\varphi$ . Haciendo uso del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  se obtiene

$$\langle u_t, u \rangle_0 + \langle \mathcal{H}u, u \rangle_0 - \langle \mathcal{H}u_{xx}, u \rangle_0 - \frac{3}{2} \langle uu_x, u \rangle_0 = \mu \langle u_{xx}, u \rangle_0$$

Donde

- $\langle u_t, u \rangle_0 = \frac{1}{2} \partial_t \|u\|_0^2$
- Por antisimetría del operador  $\mathcal{H}$ ,  $\langle \mathcal{H}u, u \rangle_0 = \langle \mathcal{H}u_{xx}, u \rangle_0 = 0$
- Integrando por partes  $\langle uu_x, u \rangle_0 = 0$
- $\mu \langle u_{xx}, u \rangle_0 = \mu \int u_{xx}u = -\mu \int u_x u_x = -\mu \|u_x\|_0^2$

Obteniendo

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u\|_0^2 = -\mu \|u_x\|_0^2$$

Integrando en ambos lados de la anterior igualdad

$$\|u(t)\|_0^2 + 2\mu \int_0^t \|u_x(t')\|_0^2 dt' = \|\varphi\|_0^2$$

Lo que permite concluir que para  $\mu > 0$ ,  $2\mu \int_0^t \|u_x(t')\|_0^2 dt'$  está controlado, y además obtener la primera estimativa

$$\|u(t)\|_0 \leq \|\varphi\|_0 \quad (3-1)$$

El siguiente paso consiste en acotar la norma  $\|u_x(t)\|_0$ , para esto se considera el problema

$$\begin{cases} \partial_t u_x + \mathcal{H}u_x - \mathcal{H}\partial_x^2 u_x - \frac{3}{2}u_x \partial_x u_x = \mu \partial_x^2 u_x \\ u_x(0) = \varphi' \end{cases} \quad (3-2)$$

Derivando la ecuación 0-3 con respecto a la variable  $x$ , haciendo  $v = u_x$ , la anterior ecuación se transforma en

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathcal{H}v - \mathcal{H}\partial_x^2 v - \frac{3}{2}v \partial_x v = \mu \partial_x^2 v \\ v(0) = \varphi' \end{cases} \quad (3-3)$$

Multiplicando por  $v$  y calculando el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  se obtiene

$$\langle v_t, v \rangle_0 + \langle \mathcal{H}v, v \rangle_0 - \langle \mathcal{H}v_{xx}, v \rangle_0 - \frac{3}{2} \langle v^2, v \rangle_0 - \frac{3}{2} \langle uv_x, v \rangle_0 = \mu \langle v_{xx}, v \rangle_0$$

Donde

- $\langle v_t, v \rangle_0 = \frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2$
- Por antisimetría del operador  $\mathcal{H}$ ,  $\langle \mathcal{H}v, v \rangle_0 = \langle \mathcal{H}v_{xx}, v \rangle_0 = 0$
- $\langle v^2, v \rangle_0 = \int v^3 = -\frac{1}{2} \int uvv_x$
- $\mu \langle v_{xx}, v \rangle_0 = \mu \int v_{xx}v = -\mu \int v_x v_x = -\mu \|v_x\|_0^2$

Obteniendo

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 + 2\mu \|v_x\|_0^2 = \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} u(t)v(t)v_x(t)dt$$

Aplicando valor absoluto, desigualdad de Cauchy - Schwarz y Desigualdad de Gagliardo - Nirenberg con  $p = \infty$ ,  $q = r = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  y desigualdad de Young con

$a = \epsilon \|v_x\|_0^{\frac{3}{2}}$ ,  $b = \frac{1}{\epsilon} \|v\|_0^{\frac{1}{2}}$ ,  $p = \frac{4}{3}$  y  $p' = 4$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \|v\|_0^2 + 2\mu \|v_x\|_0^2 &\leq \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(t)| |v(t)| |v_x(t)| dt \\ &\leq \frac{3}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |v(t)| \int_{\mathbb{R}} |u(t)| |v_x(t)| dt \\ &= \frac{3}{2} \|v\|_{L^\infty} \|u\|_0 \|v_x\|_0 \\ &\leq \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2 \|v\|_0^{\frac{1}{2}} \|v_x\|_0^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{3}{2} \left\{ \frac{3}{4\epsilon^{\frac{4}{3}}} \|v_x\|_0^2 + \frac{\epsilon^4}{4} \|v\|_0^2 \right\} \|\varphi\|_0 \end{aligned}$$

De manera que

$$\partial_t \|v\|_0^2 + \left\{ 2\mu - \frac{9}{8\epsilon^{\frac{4}{3}}} \|\varphi\|_0 \right\} \|v_x\|_0^2 \leq C_\epsilon \|\varphi\|_0 \|v\|_0^2$$

Eligiendo  $\epsilon$  tal que

$$2\mu - \frac{9}{8\epsilon^{\frac{4}{3}}} \|\varphi\|_0 > 0$$

Se obtiene

$$\partial_t \|v\|_0^2 \leq C_\epsilon \|\varphi\|_0 \|v\|_0^2$$

Integrando a ambos lados de la anterior desigualdad y aplicando desigualdad de Gronwall, se obtiene

$$\|v(t)\|_0^2 = \|u_x\|_0^2 \leq \|\varphi'\|_0^2 \exp(C_\epsilon \|\varphi\|_0 T)$$

Lo que permite concluir que para  $\mu > 0$ ,  $2\mu \int_0^t \|u_x(t')\|_0^2 dt'$  está controlado, y además obtener la segunda estimativa

$$\|u_x(t)\|_0^2 \leq \|\varphi'\|_0^2 \exp(C_\epsilon \|\varphi\|_0 T) \tag{3-4}$$

- *Caso  $s > 1$ , Para esto se considera la ecuación integral*

$$u(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + C \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t' - \tau)u(t')\partial_x u(t')dt'$$

con  $\varphi \in H^{1+\theta}$  para  $0 < \theta < 1$ , de manera que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{1+\theta} &\leq \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{1+\theta} + \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t' - \tau)u(t')\partial_x u(t')\|_{1+\theta} dt' \\ &\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t' - \tau)\partial_x u^2(t')\|_{1+\theta} dt' \end{aligned}$$

sabiendo que  $\|\cdot\|_{s+\lambda} \leq \|\cdot\|_s$ , haciendo  $s = 0$  y  $\lambda = 1 + \theta$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu u(t')u(t')\partial_x u(t')\|_{1+\theta} &\leq \|\mathbb{V}_\mu(t' - \tau)u'(t)u(t')\partial_x u(t')\|_0 \\ &\leq \left(1 + \left(\frac{1}{2\mu(t' - \tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{2}}\right) \|\partial_x u^2(t')\|_0 \end{aligned}$$

Obteniendo

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{1+\theta} &\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + \int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{4\mu(t' - \tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{2}}\right) \|\partial_x u^2(t')\|_0 dt' \\ &\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + \int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{4\mu(t' - \tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{2}}\right) \|u(t')\|_1^2 dt' \\ &\leq \|\varphi\|_{1+\theta} + C_{\mu,T} \int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{4\mu(t' - \tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{2}}\right) dt' \end{aligned}$$

La tercera desigualdad se tiene debido a la acotación  $\|u(t)\|_1 < C_{\mu,T}$ . Donde la integral

$$\int_0^t \left(1 + \left(\frac{1}{4\mu(t' - \tau)}\right)^{\frac{1+\theta}{2}}\right) dt'$$

existe siempre que  $\frac{1-\theta}{2} < 1$ , en tal caso  $0 < \theta < 1$ , obteniendo

$$\|u(t)\|_{s+\theta} \leq C_{\mu,T,\varphi} \quad (3-5)$$

Lo que permite concluir con el buen planteamiento global en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $1 \leq s < 2$ .

Se desarrolla un proceso análogo al anterior, considerando  $\varphi \in H^{s+\theta}$  con  $1 < s < 2$  y  $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{s+\theta} &\leq \|\varphi\|_{s+\theta} + \int_0^t \|\mathbb{V}_\mu(t' - \tau) \partial_x u(t')\|_{s+\theta} dt' \\ &\leq \|\varphi\|_{s+\theta} + \int_0^t \left( 1 + \left( \frac{1}{4\mu(t' - \tau)} \right)^{\frac{1+\theta}{2}} \right) \|\partial_x u^2(t')\|_{(s-1)+(\theta+1)} dt' \\ &\leq \|\varphi\|_{s+\theta} + \int_0^t \left( 1 + \left( \frac{1}{4\mu(t' - \tau)} \right)^{\frac{1+\theta}{2}} \right) \|u(t')\|_s^2 dt' \end{aligned}$$

Donde  $\|u\|_s \leq C_{\mu,\varphi,T}$  para  $1 \leq s < 2$  como se vio anteriormente. Lo que permite concluir que

$$\|u(t)\|_{s+\theta} \leq \|\varphi\|_s + C_{\mu,\varphi,T} \int_0^t 1 + \left( \frac{1}{4\mu(t' - \tau)} \right)^{\frac{1+\theta}{2}} dt' \quad (3-6)$$

integral que existe si  $0 < \theta < 1$ . Lo que permite concluir con el buen planteamiento global en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $1 \leq s < 3$ . Iterando el procedimiento anterior se obtiene el buen planteamiento global en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s \geq 1$ .

A continuación se prueba un resultado más fuerte, el cual consiste en determinar el buen planteamiento global para  $\frac{1}{2} < s < 1$ . Para esto se considera el hecho que, para  $t \in (0, T]$  se tiene  $u \in H^\infty(\mathbb{R})$ , con lo cual se tiene y

$$\sup_{t \in [0, T_s]} \|u(t)\|_s < \infty$$

Al considerar  $\epsilon > 0$  se obtiene

$$\|u(t)\|_s \leq \sup_{t \in [0, \epsilon]} \|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t \in [\epsilon, T]} \|u(t)\|_{H^1} \quad (3-7)$$

donde el primer sumando es finito y el segundo es acotado, concluyendo que la solución es global como quería probarse.

## 4 Índices Negativos

Se establece el buen plantamiento local de la ecuación 0-3 en espacios de Sobolev con índices negativos. Para lo cual se define, al igual que en [3], para  $T > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\mathcal{X}_T^s = \left\{ u : C([0, T]; H^s(\mathbb{R})); \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} < \infty \right\} \quad (4-1)$$

donde

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T^s} = \sup_{t \in (0, T]} \left\{ \|u(t)\|_s + t^{|s|/2} \|u(t)\|_0 \right\}$$

Como principal objetivo en esta sección, se establece el siguiente teorema.

### Teorema 4.1.

Para  $\mu > 0$ ,  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  y  $-1 < s < 1$ , existen  $T = T(\|\varphi\|_s) > 0$  y  $u \in \mathcal{X}_T^s$  que satisface el problema 0-3, adicional a esto,  $u \in C((0, T); H^r(\mathbb{R}))$  para  $r > 0$ , y la aplicación  $H^s(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto u \in \mathcal{X}_T^s$  es continua.

La prueba de este teorema es consecuencia directa de la aplicación del teorema de punto fijo de Banach y los siguientes seis lemas, estructurados por estimativas de la norma en  $\mathcal{X}_T^s$  de la solución del problema 0-3, regularidad de la solución, contracción en un subconjunto adecuado de  $\mathcal{X}_T^s$  para la aplicación  $\mathcal{G}$ , y finalmente existencia, unicidad y dependencia continua.

### Lema 4.1.

Si  $\mu > 0$ ,  $0 < t \leq T$  y  $s \in (-1, 1)$ , entonces existe  $C_s > 0$  tal que

1.

$$t^{|s|/2} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_0 \leq C_s (t^{|s|/2} + \mu^{-|s|/2}) \|\varphi\|_s \quad (4-2)$$

2.

$$\left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x(uv) dt' \right\|_s \leq C_s (\mu^{-1/4} t^{3/4} + \mu^{(-2s-1)/4} t^{(4-3|s|)/4}) \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \|v\|_{\mathcal{X}_T^s} \quad (4-3)$$

3.

$$t^{|s|/2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x(uv) dt' \right\|_0 \leq C_s \mu^{-1/2} t^{(4-3|s|)/4} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \|v\|_{\mathcal{X}_T^s} \quad (4-4)$$

**Demostración 4.1.** 1. Se sabe que

$$\begin{aligned} t^{|s|/2} \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_0 &= t^{|s|/2} \left\| \left\{ (1 + \xi^2)^{-s/2} \exp(-\mu t \xi^2) \right\} (1 + \xi^2)^{s/2} |\widehat{\varphi}| \right\|_0^2 \\ &\leq t^{|s|/2} \sup_{\xi} \left\{ (1 + \xi^2)^{-s} \exp(-2\mu t \xi^2) \right\} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= t^{|s|/2} \left\| (1 + \xi^2)^{-s/2} \exp(-2\mu t \xi^2) \right\|_{L^\infty} \|\varphi\|_s \end{aligned}$$

y como

$$\left\| (1 + \xi^2)^{-s} \exp(-2\mu t \xi^2) \right\|_{L^\infty} \leq \left\| (1 + \xi^2)^{|s|} \exp(-2\mu t \xi^2) \right\|_{L^\infty}$$

y

$$\sup_{\xi} (1 + \xi^2)^{|s|/2} \exp(-2\mu t \xi^2) \leq 1 + C_s \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{|s|/2}$$

se concluye

$$\begin{aligned} t^{|s|/2} \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_0 &\leq t^{|s|/2} \left( 1 + C_s \left( \frac{1}{\mu t} \right)^{|s|/2} \right) \|\varphi\|_s \\ &= C_s (t^{|s|/2} + \mu^{-|s|/2}) \|\varphi\|_s \end{aligned}$$

*Determinando*

$$t^{\frac{|s|}{2}} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_0 \leq C_s (t^{|s|/2} + \mu^{-|s|/2}) \|\varphi\|_s$$

2. Se consideran dos casos, el primero para  $-1 < s < 0$  y el segundo para  $0 \leq s < 1$

Para el primer caso se sabe que:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t - t') \partial_x(uv)\|_s^2 &= \left\| (1 + \xi^2)^{s/2} \xi \exp(-\mu(t - t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\| \widehat{u * v} \right\|_2 \\ &\leq \left\| \xi^{(s+1)/2} \exp(-\mu(t - t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\| \widehat{u * v} \right\|_2 \\ &= \left\| \xi^{s+1} \exp(-\mu(t - t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\| \widehat{u * v} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C_s \{2\mu(t - t')\}^{-\frac{s}{2}} \left\| \widehat{u * v} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

obteniendo de lo anterior y de la desigualdad de Young las desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \nabla_\mu(t-t') \partial_x(uv) dt' \right\|_s &\leq \int_0^t \left\| (1+\xi^2)^{(s+1)/2} \exp(-\mu(t-t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left\| \widehat{u * v} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} dt' \\
&\leq \frac{C_s}{(2\mu)^{\frac{s}{4}}} \int_0^t \frac{1}{(t-t')^{-\frac{s}{4}}} \|\widehat{u}(t')\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widehat{v}(t')\|_{L^2(\mathbb{R})} dt' \\
&\leq C_s \int_0^t (t')^{-|s|} (t-t')^{-\frac{-s}{4}} t'^{|s|/2} \|u(t')\|_{L^2} t'^{|s|/2} \|v(t')\|_{L^2} dt' \\
&\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \int_0^t (t')^{-|s|} (t-t')^{-\frac{s}{4}} dt' \\
&\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} t^{-|s|-\frac{s}{4}+1} \int_0^1 \theta^{-|s|} (1-\theta)^{-\frac{s}{4}} d\theta \\
&\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} t^{\frac{4-3|s|}{4}} \mathcal{B}\left(1-|s|, 1-\frac{s}{4}\right)
\end{aligned}$$

En la penultima desigualdad se considera el cambio de variable  $t' = t\theta$ , lo cual permite hacer uso de la función beta.

Para el segundo caso se sabe que:

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 \exp(2\mu(t-t')\xi^2) d\xi \right\}^{1/2} \leq C_s \left\{ (\mu(t-t'))^{-1/4} + (\mu(t-t'))^{\frac{-2s-1}{4}} \right\}$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \nabla_\mu(t-t') \partial_x(uv) dt' \right\|_s &\leq \int_0^t \left\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \xi \exp(\mu(t-t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u(t')\|_s \|v(t')\|_s dt' \\
&\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \int_0^t (\mu(t-t'))^{-1/4} + (\mu(t-t'))^{\frac{-2s-1}{4}} dt' \\
&= C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \left\{ \mu^{-1/4} t^{3/4} + \mu^{\frac{-2s-1}{4}} t^{\frac{3-2|s|}{4}} \right\} \\
&\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \left\{ \mu^{-1/4} t^{3/4} + \mu^{\frac{-2s-1}{4}} t^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\}
\end{aligned}$$

3. Se sabe que

$$\left\| \xi \exp(-\mu(t-t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(2\mu(t-t'))^{-1/2} \tag{4-5}$$

entonces

$$\begin{aligned}
t^{\frac{|s|}{2}} \left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x(uv) dt' \right\|_0^2 &\leq t^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t \left\| \exp(-\mu(t-t')\xi^2) \widehat{\partial_x uv}(t') \right\|_{L^2(\mathbb{R})} dt' \\
&= t^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t \left\| \xi \exp(-\mu(t-t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widehat{u}(t')\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widehat{v}(t')\|_{L^2(\mathbb{R})} dt' \\
&\leq t^{\frac{|s|}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \int_0^t \left\| \xi \exp(-\mu(t-t')\xi^2) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} t'^{-|s|} dt' \\
&\leq C \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \frac{t^{\frac{|s|}{2}}}{(2\mu)^{1/2}} \int_0^t t'^{-|s|} (t-t')^{-1/2} dt' \\
&= C \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} \frac{t^{\frac{4-3|s|}{2}}}{(2\mu)^{1/2}} \int_0^1 \theta^{-|s|} (1-\theta)^{-1/2} d\theta \\
&= C \|u\|_{\mathcal{X}_s^T} \|v\|_{\mathcal{X}_s^T} t^{\frac{4-3|s|}{2}} \mu^{-1/2} \mathcal{B} \left( 1-|s|, \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

**Lema 4.2.**

Sean  $\mu \geq 0$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $s \in (-1, 1)$  y  $k \in [0, 1 - |s|)$  entonces la aplicación

$$\tilde{\mathcal{G}}u(t) = \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x u^2(t') dt' \in C([0, T]; H^{s+k}(\mathbb{R})), \quad (4-6)$$

para todo  $u \in \mathcal{X}_s^T$ .

*Prueba:*

Del lema 4.1 y de la hipótesis  $s \in (-1, 1)$ , cambiando  $s$  por  $s+k$  se cumple

$$\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-t') \partial_x(u) dt' \right\|_{s+k} \leq C_s \left( \mu^{-1/4} t^{3/4} + \mu^{(-2(s+k)+1)/4} t^{(4-3|s+k|)/4} \right) \|u\|_{\mathcal{X}_s^T}^2 \quad (4-7)$$

Por tanto  $\tilde{\mathcal{G}}u(t) \in H^{s+k}(\mathbb{R})$  para  $t \in [0, T]$ . Para la continuidad se consideran  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , sin pérdida de generalidad se supone  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  y se prueba

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \left\| \tilde{\mathcal{G}}u(t_1) - \tilde{\mathcal{G}}u(t_2) \right\|_{s+k} = 0 \quad (4-8)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}u(t_2) - \mathcal{G}u(t_1)\|_{s+k} &\leq \int_0^{t_1} \|\{\mathbb{V}_\mu(t_2 - t') - \mathbb{V}_\mu(t_1 - t')\} \partial_x u^2(t')\|_{s+k} dt' \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|\{\mathbb{V}_\mu(t_2 - t')\} \partial_x u^2(t')\|_{s+k} dt' \\ &= I + II \end{aligned}$$

Se acotará cada una de las anteriores integrales, para  $I$ , se hace uso de las desigualdades

$$\sup_{\xi} (1 + \xi^2)^{\lambda/2} \exp(-\mu t \xi^2) \leq C_s \left(1 + (\mu t)^{-\lambda/2}\right) \quad (4-9)$$

y

$$\|(1 + \xi^2)^{s/2} \xi \exp(-\mu(t - t') \xi^2)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_s \{2\mu(t - t')\}^{\frac{-s+1}{2}} \quad (4-10)$$

Dividiendo la prueba en dos partes, la primera considerando  $s \in (-1, 0)$  y la segunda parte considerando  $s \in [0, 1)$ .

i. Para  $s \in (-1, 0)$ , con  $\omega = \mu\xi^2 + i\xi|\xi| - i\text{sgn}(\xi)$  se tiene

$$\begin{aligned} &\|\{\mathbb{V}_\mu(t_2 - t') - \mathbb{V}_\mu(t_1 - t')\} \partial_x u^2(t')\|_{s+k} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s+k} e^{-(t_1-t')\omega} (e^{-(t_2-t_1)\omega} - 1) \xi^2 |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{(t_1-t')\omega}{2}} (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{(t_1-t')\omega}{2}} (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} t^{-|s|/2} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \end{aligned}$$

Donde

$$\left\| (1 + \xi^2)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{(t_1-t')\omega}{2}} (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left\| (1 + \xi^2)^k e^{-\frac{(t_1-t)\omega}{4}} \xi^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-\frac{(t_1-t)\omega}{2}} \xi^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Usando lo anterior, junto con las desigualdades 4-9 y 4-10 junto con la sustitución  $t' = t_1\theta$  y la función Beta, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \left\| \{ \mathbb{V}_\mu(t_2 - t') - \mathbb{V}_\mu(t_1 - t') \} \partial_x u^2(x) \right\|_{s+k} dt' \leq \\
& \leq C_{k,s} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \int_0^{t_1} (t')^{-|s|/2} \left\{ 1 + (\mu(t_1 - t'))^{-k/2} \right\} \{ \mu(t_1 - t') \}^{-\frac{s+1}{2}} dt' \\
& = C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \left( \frac{t_1}{\mu} \right)^{\frac{s+1}{2}} \int_0^1 (1 + (\mu t_1(1 - \theta))^{-k/2}) \theta^{-|s|/2} (1 - \theta)^{-\frac{s+1}{2}} d\theta \\
& = C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \left( \frac{t_1}{\mu} \right)^{\frac{s+1}{2}} \left\{ \int_0^1 \theta^{-\frac{|s|}{2}} (1 - \theta)^{-\frac{s+1}{2}} d\theta + \int_0^1 (\mu t_1)^{-\frac{k}{2}} \theta^{-\frac{|s|}{2}} (1 - \theta)^{-\frac{|k|}{2} - \frac{s+1}{2}} d\theta \right\} \\
& \leq C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \left( \frac{t_1}{\mu} \right)^{\frac{s+1}{2}} \left\{ \mathcal{B} \left( 1 - \frac{|s|}{2}, 1 - \frac{s+1}{2} \right) + (\mu t_1)^{-k/2} \mathcal{B} \left( 1 - \frac{|s|}{2}, 1 - \frac{k+s+1}{2} \right) \right\} \\
& \leq C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \left( \frac{t_1}{\mu} \right)^{\frac{s+1}{2}} \left\{ 1 + (\mu t_1)^{-k/2} \right\}
\end{aligned}$$

ii. Para  $s \in [0, 1)$ , sabiendo que

$$\left\| (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-\frac{\mu}{2}(t-t')\xi^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_s \left( (\mu(t_1 - t'))^{-1/2} + (\mu(t_1 - t'))^{-(s+1)} \right) \quad (4-11)$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \left\| \{ \mathbb{V}_\mu(t_2 - t') - \mathbb{V}_\mu(t_1 - t') \} \partial_x u^2(t') \right\|_{s+k} \leq \\
& \leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 t^{-|s|/2} \int_0^{t_1} \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{s+k+1}{2}} e^{-\frac{\mu(t_1-t')}{2}\xi^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} dt' \\
& \leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 (t')^{-s/2} \int_0^{t_1} \left( (\mu(t_1 - t'))^{-1/2} + (\mu(t_1 - t'))^{-(s+k+1)/2} \right) dt' \\
& \leq C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 (t')^{-|s|/2} \left\{ \mu^{-1/2} t_1^{1/2} + \mu^{-(s+k+1)} t_1^{\frac{1-s-k}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

Y por teorema de convergencia dominada de Lebesgue se obtiene

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \int_0^{t_1} \left\| \{ \mathbb{V}_\mu(t_2 - t') - \mathbb{V}_\mu(t_1 - t') \} \partial_x u^2(t') \right\|_{s+k} dt' = 0 \quad (4-12)$$

Concluyendo la acotación de la integral  $I$  para  $-1 < s < 1$ .

Continuando con la integral II, usando las desigualdades 4-9 y 4-10 se tiene

i. Para  $-1 < s < 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{V}_\mu(t_2 - t')\partial_x u^2(t')\|_{s+k} &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s+k} e^{\mu(t_2-t')\xi^2} |\widehat{\partial_x u^2}(\xi)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{s+k} e^{\mu(t_2-t')\xi^2} |i\xi|^2 |\widehat{u^2}(t')|^2 d\xi \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \int_{\mathbb{R}} |t'|^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} (1 + \xi^2)^{k/2} e^{-\mu(t_1-t')\xi^2} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} d\xi \end{aligned}$$

Por tanto, haciendo  $t' = (t_2 - t_1)\theta + t_1$

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \|\mathbb{V}_\mu(t_2 - t')\partial_x u^2(t')\|_{s+k} dt' \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |t'|^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2)^{\frac{s+1}{2}} (1 + \xi^2)^{k/2} e^{-\frac{\mu(t_1-t')\xi^2}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} dt' \right\}^{1/2} \\ &\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |t'|^{-\frac{|s|}{2}} (\mu(t_2 - t'))^{-\frac{s+1}{2}} (1 + (\mu(t_2 - t'))^{-k/2}) dt' \right\}^{1/2} \\ &\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} (t_2 - t_1)^{-\frac{s-1}{4}} \mu^{-s+1} \left\{ \int_0^1 (t_2 - t_1)^{-\frac{|s|}{2}} (1 - \theta)^{-\frac{s+1}{2}} (1 + (\mu(t_2 - t_1)(1 - \theta))^{-\frac{k}{2}}) d\theta \right\}^{1/2} \\ &\leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} (t_2 - t_1)^{-\frac{2s-1}{4}} \mu^{-s+1} \left\{ \int_0^1 \theta^{\frac{s}{2}} (1 - \theta)^{-\frac{s+1}{2}} + (\mu(t_2 - t_1))^{-k/2} \theta^{s/2} (1 - \theta)^{-\frac{k+s+1}{2}} d\theta \right\}^{1/2} \\ &= C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} (t_2 - t_1)^{-\frac{2s-1}{4}} \mu^{-s+1} \left\{ \mathcal{B}\left(\frac{s}{2} + 1, 1 - \frac{s+1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. (\mu(t_2 - t_1))^{-k/2} \mathcal{B}\left(\frac{s}{2} + 1, 1 - \frac{k+s+1}{2}\right) \right\}^{1/2} \\ &= C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} (t_2 - t_1)^{-\frac{2s-1}{4}} \mu^{-s+1} \left[ 1 + (\mu(t_2 - t_1))^{-k/2} \right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4-13}$$

ii. Para  $0 \leq s < 1$  usando nuevamente la desigualdad 4-10 y tomando la sustitución  $t' = (t_2 - t_1)\theta + t_1$ , se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbb{V}_\mu(t_2 - t') \partial_x u^2\|_{s+k} dt' \\
& \leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} (\mu(t_2 - t'))^{-\frac{1}{2}} + (\mu(t_2 - t_1))^{-\frac{s+k-1}{2}} dt' \right\}^{1/2} \\
& = C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \left\{ \mu^{-\frac{1}{2}}(t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{s+k+1}{2}}(t_2 - t_1) \right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Por las desigualdades 4-13 y 4-14 y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se concluye que

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbb{V}_\mu(t_2 - t') \partial_x u^2\|_{s+k} dt' = 0$$

Lo que permite determinar la continuidad de la función  $\mathcal{G}u(t)$  en  $H^{s+k}(\mathbb{R})$  para todo  $u \in \mathcal{X}_T^s$ .

**Lema 4.3.**

Para  $\mu > 0$ ,  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  con  $s \in (-1, 1)$ ,  $\|\varphi\|_s > 0$  existen constantes  $M = M(\mu, s, \|\varphi\|_s) > 0$  y  $T = T(\mu, s, \|\varphi\|_s) \in (0, 1]$  tales que la aplicación

$$\mathcal{G}u(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t - t') \partial_x u^2(t') dt' \tag{4-15}$$

Resulta ser una contracción en la bola cerrada

$$\mathcal{X}_T^s(M) = \{u \in \mathcal{X}_T^s; \|u\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq M\}$$

**Demostración 4.2.**

Usando el lema 4.2 con  $k = 0$  se prueba  $\mathcal{G}u(t) \in H^s(\mathbb{R})$  para  $s \in (-1, 1)$  y además la continuidad de dicha función, lo que permite concluir que  $\mathcal{G}u \in C([0, T]; H^s(\mathcal{R}))$  para  $T > 0$ . Por definición se sabe que

$$\|\mathcal{G}u(t)\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 = \sup_{t \in [0, T]} \{ \|\mathcal{G}u(t)\|_s + t^{|s|/2} \|\mathcal{G}u(t)\|_0 \} \tag{4-16}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s + \frac{3}{2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t - t') \partial_x u^2(t') dt' \right\|_s + t^{|s|/2} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_0 \right. \\
\left. + \frac{3t^{|s|/2}}{2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t - t') \partial_x u^2(t') dt' \right\|_0 \right\}
\end{aligned}$$

Donde, por el lema 4.1 se tiene

$$\begin{aligned}
& \bullet \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_s \\
& \bullet \frac{3}{2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-t') \partial_x u^2(t') dt' \right\|_s \leq \frac{3}{2} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \left( \mu^{1/4} t^{3/4} + \mu^{-\frac{2s-1}{4}} t^{\frac{4-3|s|}{4}} \right) \\
& \bullet t^{|s|/2} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_0 \leq C_s \left( t^{|s|} + \left( \frac{t}{\mu} \right)^{\frac{|s|}{2}} \right) \|\varphi\|_s \\
& \bullet \frac{3t^{|s|/2}}{2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x u^2(t') dt' \right\|_0 \leq C_s \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2 \mu^{-1/2} t^{\frac{1-|s|}{2}}
\end{aligned}$$

Obteniendo

$$\|\mathcal{G}u(t)\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq \left\{ 1 + C_s \left\{ T^{|s|} + \left( \frac{T}{\mu} \right)^{\frac{|s|}{2}} \right\} \right\} \|\varphi\|_s + \frac{3}{2} C_s \left\{ \mu^{-\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{4}} + (\mu^{-\frac{2s-1}{4}} + \mu^{-\frac{1}{2}}) T^{\frac{2-|s|}{2}} \right\} \|u\|_{\mathcal{X}_T^s}^2$$

Ahora para  $u, v \in \mathcal{X}_T^s$  con condición inicial  $\varphi$ , se prueba la acotación de  $\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\|_{\mathcal{X}_T^s}$ , donde por la desigualdad 4-3 se obtiene

$$\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\|_s \leq \frac{3}{2} C_s \left( \mu^{-\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{4}} + \mu^{-\frac{2s+1}{4}} T^{\frac{4-3|s|}{4}} \right) \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s},$$

y, por la desigualdad 4-4

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\|_0 & \leq \frac{3}{2} \left\| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t') \partial_x \{(u(t') - v(t'))(u(t') + v(t'))\} dt' \right\|_s \\
& \leq C_{s,\mu} \mu^{-\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{4}} + \mu^{-\frac{2s+1}{4}} T^{\frac{4-3|s|}{4}} \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s} \\
& \leq C_{s,\mu} \left( T^{\frac{3}{4}} + T^{\frac{4-3|s|}{4}} \right) \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s},
\end{aligned}$$

Ahora, al tomar la función  $F(T) = T^{\frac{3}{4}} + T^{\frac{4-3|s|}{4}}$  y eligiendo  $M = 2C\|\varphi\|_s$  y  $T^*$  tal que

$$F(T^*) = \frac{1}{4CM} = \frac{1}{8C^2\|\varphi\|_s}$$

Concluyendo  $\mathcal{G}u(t)$  define una contracción en el conjunto  $\mathcal{X}_T^s(M)$  para  $T \in (0, T')$  con  $T' = \min\{1, T^*\}$

$$\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq C_{s,\mu} \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s} \left\{ T + T^{-\frac{s-1}{2}} + T^{\frac{2-3|s|}{4}} \right\}$$

Con lo cual, haciendo  $\tilde{T} = \min\{1, T^*\}$  se concluye

$$\|\mathcal{G}u - \mathcal{G}v\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq \frac{1}{4\|\varphi\|_s} \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s}$$

Mostrando así que la aplicación definida en la ecuación 4-15 determina una contracción en la bola cerrada definida.

Por último se probará la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución

**Lema 4.4.**

Sean  $\mu > 0$ ,  $s \in (-1, 1)$ ,  $\|\varphi\|_s > 0$  para  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ , existen constantes  $M > 0$  y  $T \in (0, 1]$  y una única función  $u \in \mathcal{X}_T^s(M) \subset \mathcal{X}_T^s$  la cual satisface el problema 0-3.

La prueba se reduce del lema 4.3 y del teorema del punto fijo de Banach.

**Lema 4.5.**

Sean  $\mu > 0$ ,  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  con  $s \in (-1, 1)$ . Si  $u, v \in \mathcal{X}_T^s$  son soluciones del problema 0-3, con  $u(0) = v(0) = \varphi$ , entonces  $u = v$  en  $\mathcal{X}_T^s$

Por ser  $u, v$  soluciones del problema 0-3, entonces al igual que el lema 4.2 se obtiene la desigualdad

$$\|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \leq C_{\mu, s} \left\{ T^{3/4} + T^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u - v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s}$$

Además existe  $T_1 > 0$  para el cual se satisface

$$C_{\mu, s} \left\{ T_1^{3/4} + T_1^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s} < 1$$

donde se pueden presentar las posibilidades  $T \leq T_1$  y  $T > T_1$ ; para la primera se obtiene inmediatamente la desigualdad

$$C_{\mu, s} \left\{ T^{3/4} + T^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s} < 1$$

lo que permite concluir  $u = v$  en el espacio  $\mathcal{X}_T^s$ . Para la segunda se tiene

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{\mathcal{X}_{T_1}^s} &\leq C_{\mu, s} \left\{ T_1^{3/4} + T_1^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u + v\|_{\mathcal{X}_{T_1}^s} \|u - v\|_{\mathcal{X}_{T_1}^s} && \text{omar} \\ &\leq C_{\mu, s} \left\{ T_1^{3/4} + T_1^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u + v\|_{\mathcal{X}_T^s} \|u - v\|_{\mathcal{X}_{T_1}^s} && \text{omar} \\ &\leq \|u - v\|_{\mathcal{X}_{T_1}^s} \end{aligned}$$

Lo cual permite concluir que  $u = v$  en el espacio  $\mathcal{X}_{T_1}^s$ .

A continuación se extiende el anterior resultado al espacio  $\mathcal{X}_T^s$ , para esto se considera el conjunto

$$\mathcal{A} = \{T' \in (0, T]; u = v \text{ en } \mathcal{X}_{T'}^s\}.$$

Finalizando la prueba cuando se muestre que  $T = \sup(\mathcal{A})$  y además  $T \in \mathcal{A}$ .

El primer paso es suponer que  $T^* = \sup(\mathcal{A}) < T$ ; la existencia de constantes  $N \in \mathbb{N}$ ,  $T' \in \mathcal{A}$  para las cuales se cumplen las siguientes desigualdades

- i.  $0 < T^* - T' < \frac{1}{N}$
- ii.  $T^* + \frac{1}{N} < T$
- iii.  $C_{\mu,s} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^{3/4} + \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|u + v\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} < 1$

ya al considerar  $t \in (0, T - T']$  y las funciones  $\tilde{u}(t) = u(t + T')$  y  $\tilde{v}(t) = v(t + T')$  tales que  $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{X}_{T-T'}^s$  y además soluciones al problema 4.2, con  $\tilde{u}(0) = u(T')$  y  $\tilde{v}(0) = v(T')$ , se obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{\mathcal{X}_{\frac{1}{N}}^s} &\leq C_{\mu,s} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^{3/4} + \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{\mathcal{X}_{\frac{1}{N}}^s} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{\mathcal{X}_{\frac{1}{N}}^s} \\ &\leq C_{\mu,s} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^{3/4} + \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{4-3|s|}{4}} \right\} \|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{\mathcal{X}_{\frac{1}{N}}^s} \end{aligned}$$

de la cual se concluye  $\tilde{u} = \tilde{v}$  en  $\mathcal{X}_{\frac{1}{N}}^s$ , y por tanto  $u = v$  en el conjunto  $\mathcal{X}_{\frac{1}{N}+T'}^s$ , donde  $\frac{1}{N} + T' > T^* = \sup(\mathcal{A})$  lo cual es contradictorio por la definición de supremo, el último paso es hacer uso del lema 4.2 en el cual se obtiene  $u, v \in C((0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  para  $|s| < 1$ .

#### Lema 4.6.

La aplicación  $\varphi \mapsto u$  con  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  y  $u \in \mathcal{X}_T^s$  donde  $u$  es solución del problema 0-3 dada en el lema inmediatamente anterior es continua.

Para probar este lema se debe mostrar la desigualdad

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \leq C \|\varphi_n - \varphi\|_s \tag{4-17}$$

donde para  $u > 0$ ,  $s \in (-1, 1)$  con  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $H^s(\mathbb{R})$ ,  $u_n \in \mathcal{X}_{T_n}^s$ ,  $u \in \mathcal{X}_T^s$  son soluciones de ?? con datos iniciales  $\varphi_n$  y  $\varphi$  respectivamente.

Para iniciar con la demostración de la desigualdad 4-17, se consideran  $T, T_n$  tiempos de existencia asociados a las soluciones del problema 0-3 y sus respectivos datos iniciales  $\varphi, \varphi_n$ , entonces por el lema 4.3 se tiene garantizada la existencia de  $T \in (0, \min\{1, T^*\})$  y  $T^* \in (0, \min\{1, T_n^*\})$ , tiempos que satisfacen las desigualdades

$$F(T^*) = (T^*)^{\frac{4-3|s|}{4}} + (T^*)^{3/4} = \frac{1}{8C^2 \|\varphi\|_s}$$

y

$$F(T_n^*) = (T_n^*)^{\frac{4-3|s|}{4}} + (T_n^*)^{3/4} = \frac{1}{8C^2 \|\varphi_n\|_s}$$

Y al igual que en la prueba del lema 4.3 se obtiene

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} &\leq C \left\{ \|\varphi_n - \varphi\|_s + \left[ (T')^{3/4} + (T')^{\frac{4-3|s|}{4}} \right] \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \right\} \\ &\leq C \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} + CF(T') \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \|u_n + u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \\ &\leq C \|\varphi_n - \varphi\|_s + 2C^2 F(T^*) \left( \|u_n\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} + \|u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \right) \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \\ &= C \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{2C^2}{8C^2 \|\varphi\|_s} (\|u_n\|_s + \|u\|_s) \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \end{aligned}$$

Como  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $H^s(\mathbb{R})$  entonces para  $T' \in (0, T)$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  se satisface que  $u_n \in \mathcal{X}_{T'}^s$  y  $\|\varphi_n\|_s \leq 2\|\varphi\|_s$ , de manera que

$$\frac{\|\varphi_n\|_s + \|\varphi\|_s}{4\|\varphi\|_s} \leq \frac{3}{4}.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} &\leq C \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{(\|\varphi_n\|_s + \|\varphi\|_s) \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s}}{4\|\varphi\|_s} \\ &\leq C \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{3}{4} \|u_n - u\|_{\mathcal{X}_{T'}^s} \end{aligned}$$

Logrando así la desigualdad 4-17, lo cual permite concluir que la aplicación  $\varphi \mapsto u$  es continua.

#### Nota 4.1.

La regularidad garantiza que el problema es globalmente bien planteado en  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > -1$ .

## 5 Continuación única y Espacios con pesos enteros

Nuevamente se considera el problema 0-3 con  $\mu > 0$  pero con dato inicial  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m}$  para  $m \in \mathbb{Z}^+$ , siguiendo las ideas expuestas en [10] y [8], determinando bajo que condiciones la solución al problema planteado es idénticamente cero; donde

$$F_{s,m} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(w^{2m}dx) \quad (5-1)$$

con  $w^m = (1 + \xi^2)^{m/2}$ ,  $\|\varphi\|_{F_{s,m}}^2 = \|\varphi\|_s^2 + \|w^m\varphi\|_0^2$  y

$$\tilde{F}_{s,m} = \begin{cases} \varphi \in F_{s,m}; & \partial_\xi^j \hat{\varphi}(0) = 0 \\ j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (5-2)$$

se tomará nuevamente el problema 0-3 con  $\mu \geq 0$ , donde se determinaran condiciones adecuadas bajo las cuales la solución al problema de Cauchy asociado a la ecuación de Benjamin-Ono con dato inicial  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m}$ , para  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

$$\partial_t u + \mathcal{H} \partial_x^2 u + u \partial_x u = 0 \quad (5-3)$$

Resulta ser idénticamente cero.

### 5.1. Problema lineal con $\mu = 0$

En esta sección se probará que la solución  $u$  en el espacio  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 1$  del problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H} \partial_x^2 u + u \partial_x u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (5-4)$$

pertenece al espacio  $F_{s,1}$  para  $t \in [0, \infty)$  si y sólo si  $\varphi \in \tilde{F}_{s,1}$ .

A continuación se menciona un lema que permite probar el teorema objetivo de esta sección.

**Lema 5.1.**

Sean  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $s \in \mathbb{R}$  con  $s \geq m$ . Si  $j, k \in \mathbb{Z}^+$  tales que  $0 \leq j + k \leq m$ , existe una constante  $C_{j,k} > 0$  la que se satisface la desigualdad

$$\|\xi^j \partial_\xi^k \widehat{\varphi}\|_0 \leq C_{j,k} \|\varphi\|_{F_{s,m}}. \quad (5-5)$$

*Dem.* Ver [10].

En el siguiente teorema se considera el problema 2-1 en  $H^s(\mathbb{R})$  con  $s \geq 1$ ; se ve en particular que la solución al problema lineal con  $\mu = 0$  pertenece al espacio  $F_{s,1}$  en todo tiempo si el dato inicial satisface  $\varphi \in \widetilde{\varphi}_{s,1}$ . La condición  $s \geq m$  se da por el efecto regularizante del semigrupo  $\mathbb{V}$ .

**Teorema 5.1.**

Sean  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $s \geq m$  y  $u \in C([0, \infty), H^s(\mathbb{R}))$  solución del problema lineal 2-1 con  $\mu = 0$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a.  $u(t) \in F_{s,m}$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ .
- b.  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,m}$ .
- c.  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,m}$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ .
- d. Existen  $t_0 < t_1$  en  $[0, \infty)$  tales que  $u(t_j) \in F_{s,m}$ .

**Demostración 5.1.**

La prueba de este teorema se realiza por inducción sobre  $m$

Sabiendo que  $\widehat{u}(t) = V_0(t)\widehat{\varphi} = e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]}\widehat{\varphi}$  se calcula la derivada distribucional  $\partial_\xi \widehat{u}(t)$  derivando por partes

$$\begin{aligned} \partial_\xi (\widehat{u}, \psi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]} \widehat{\varphi} \partial_\xi \psi(\xi) d\xi \\ &= (-e^{-it} + e^{it}) \widehat{\varphi}(0)\psi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} [2itsgn(\xi)\xi\widehat{\varphi} + \partial_\xi \widehat{\xi}] e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]} \psi(\xi) d\xi \\ &= 2i\sin(t)\widehat{\varphi}(0)\psi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} [2itsgn(\xi)\xi\widehat{\varphi} + \partial_\xi \widehat{\xi}] e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

De manera que

$$\partial_\xi \widehat{u}(t) = 2i\sin(t)\widehat{\varphi}(0)\delta_\xi [2itsgn(\xi)\xi\widehat{\varphi} + \partial_\xi \widehat{\xi}] V_0(t). \quad (5-6)$$

Para la segunda derivada distribucional integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} & \partial_\xi (\partial_\xi \widehat{u}, \psi) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} 2itsgn(\xi)\xi\widehat{\varphi}V_0(t)\partial_\xi\psi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\xi\widehat{\varphi}V_0(t)\partial_\xi\psi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} 2isin(t)\widehat{\varphi}(0)\delta_\xi\partial_\xi\psi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi^2 \widehat{u}(t) &= [\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}(\xi) + 4itsgn(\xi)\xi\partial_\xi \widehat{\varphi}(\xi)] V_0(t) \\ &+ [2itsgn(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) + [2itsgn(\xi)\xi]^2 \widehat{\varphi}(\xi)] V_0(t) \\ &+ 2isin(t)\partial_\xi \widehat{\varphi}\delta_\xi + 2isin(t)\widehat{\varphi}(0)\delta'_\xi \quad (5-7) \end{aligned}$$

Para calcular la  $m$ -ésima derivada distribucional  $\partial_\xi^m \widehat{u}(t)$ , en la cual aparece siempre el factor  $V_0(t) = e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]}$ , el cual tiene como derivada

$$\partial_\xi (V_0(t), \Psi) = - (V_0(t), \partial_\xi \Psi) = 2isin(t)\Psi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} 2itsig(\xi)\xi e^{itsgn(\xi)[1+\xi^2]}\Psi(\xi)d\xi \quad (5-8)$$

Para  $j = 1$

$$\partial_\xi V_0(t) = Q_1 V_0(t) + R_1$$

donde  $Q_1 = 2itsgn(\xi)\xi$  y  $R_1 = 2isin(t)\delta_\xi$

Para  $j = 2$

$$\partial_\xi^2 V_0(t) = Q_2 V_0(t) + R_2$$

donde  $Q_2 = [2itsgn(\xi)]^2 \xi^2 + [2itsgn(\xi)]$  y  $R_2 = 2isin(t)\delta'_\xi$

De manera general para  $j \geq 3$

$$\partial_\xi^j V_0(t) = Q_j V_0(t) + R_j \quad (5-9)$$

donde

$$Q_j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} C_k [2itsgn(\xi)]^{j-k} \xi^{j-2k} \quad (5-10)$$

y

$$R_j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} C_k (2it)^k [e^{it} + (-1)^{k+1} e^{-it}] \delta_\xi^{(j-[2k+1])} \quad (5-11)$$

Lo cual permite concluir que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^m (V_0(t)\widehat{\varphi}) &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \partial_\xi^j V_0(t) \partial_\xi^{m-j} \widehat{\varphi} \\ &= \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \partial_\xi^j V_0(t) \partial_\xi^{m-j} \widehat{\varphi}\end{aligned}\quad (5-12)$$

Y además por el lema 5.1 se obtiene la desigualdad

$$\left\| \left[ \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} Q_j \partial_\xi^{m-j} \widehat{\varphi} \right] V_0(t) \right\|_0 \leq p_m(t) \|\varphi\|_{F_{s,m}} \quad (5-13)$$

Donde

$$p_m(t) = 1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^{2i} \binom{m}{j} 2^j t^i$$

Con lo anterior se procede a iniciar con la prueba.

Caso  $m = 1$

a)  $\rightarrow$  b) Por hipótesis para  $t \in [0, \infty)$  se tiene  $u \in F_{s,1}$ , lo cual implica que  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$ , y haciendo  $t = 0$  en la ecuación 5-6 se obtiene  $\partial_\xi \widehat{\varphi} \in L_\xi^2$  y por tanto  $\varphi \in F_{s,1}$ , lo siguiente es mostrar que  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , para esto se considera la desigualdad 5-13, con la cual se obtiene la desigualdad

$$\left\| [\partial_\xi \widehat{\varphi} + 2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi}] V_0(t) \right\|_0 \leq (1 + 2t) \|\varphi\|_{F_{s,1}}$$

Y de la igualdad

$$\partial_\xi \widehat{u} = [\partial_\xi \widehat{\varphi} + 2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi}] V_0(t) + 2i \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi \quad (5-14)$$

Se tiene que  $\partial_\xi \widehat{\varphi} \in L_\xi^2$  y  $2i \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi \in L_\xi^2$  para  $t \in [0, \infty)$ , y gracias a la continuidad de la función  $\widehat{\varphi}$ , lo cual permite concluir que  $\widehat{\varphi}(0) = 0$  y por consiguiente  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$ .

b)  $\rightarrow$  c) Por hipótesis  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$  entonces  $\varphi \in F_{s,1}$  y  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , y usando 5-6, 5-14 se obtiene  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$  para  $t \in [0, t)$  y por tanto  $u \in F_{s,1}$ , además  $\widehat{u}(t) = V_0(t) \widehat{\varphi}$ , lo cual implica que  $\widehat{u}(0) = \widehat{\varphi}$  y por tanto  $\widehat{u}(0) = 0$ , y así probando que  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1}$ .

c)  $\rightarrow$  d) De la contención  $\tilde{F}_{s,1} \subset F_{s,1}$  se obtiene lo deseado.

d)  $\rightarrow$  a) Por hipótesis se tiene garantizada la existencia de reales  $0 \geq t_0 < t_1$  con  $u(t_1) \in F_{s,1}$  que satisfacen 5-6 y 5-14, desigualdades que prueban que  $\varphi(0) = 0$  y por tanto  $u(t) \in F_{s,m}$  para todo  $t \in [0, \infty)$ .

Caso  $m = 2$

a)  $\rightarrow$  b) Primero se muestra que  $\hat{\varphi}(0) = 0$  y  $\partial_\xi \hat{\varphi}(0) = 0$ . Por hipótesis  $u(t) \in F_{s,2}$ , con lo cual  $u \in F_{s,1}$  y  $\hat{\varphi}(0) = 0$ , y como  $\partial_\xi \hat{u}(t) \in L_\xi^2$  y haciendo  $t = 0$  en 5-7 se obtiene  $\partial_\xi^2 \hat{u}(0) = \partial_\xi^2 \hat{\varphi}(0)$  lo cual implica que  $\partial_\xi^2 \hat{\varphi} \in L_\xi^2$  y por tanto  $\varphi \in F_{s,2}$ , además de la desigualdad 5-13 se tiene

$$\left\| \partial_\xi^2 \hat{\varphi}(\xi) + 4i \operatorname{sgn}(\xi) \xi \partial_\xi \hat{\varphi} + [2i \operatorname{sgn}(\xi) + \{2i \operatorname{sgn}(\xi) \xi\}^2 \hat{\varphi}(\xi)] V_0(t) \right\|_0 \leq p_m(t) \|\varphi\|_{F_{s,2}}$$

Junto con 5-7, permiten concluir que  $2i \sin(t) \partial_\xi \hat{\varphi}(0) \delta_\xi \in L_\xi^2$  para  $t \in [0, \infty)$ , y por tanto  $\partial_\xi \hat{\varphi}(0) = 0$ . Por último de manera que se prueba que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,2}$  como quería probarse.

b)  $\rightarrow$  c) Se inicia la prueba mostrando que  $\hat{u}(0) = 0$ , lo cual se tiene ya que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,2}$ , lo cual determina que  $u \in \tilde{F}_{s,2}$  para  $t \in [0, \infty)$  por lo cual para  $t \in [0, \infty)$  se obtiene que  $\partial_\xi \hat{u} \in L_\xi^2$  y por tanto  $\hat{u}(0) = \hat{\varphi}(0)$ . Ahora considerado 5-7 se tiene que  $\partial_\xi^2 \hat{u} \in L_\xi^2$  y por tanto  $u \in F_{s,2}$ , finalmente de 5-6 se obtiene  $\partial_\xi \hat{u}(0) = 0$  para  $t \in [0, \infty)$ , lo cual permite concluir que  $u(t) \in \tilde{F}_{s,2}$ .

c)  $\rightarrow$  d) Al igual que en el caso  $m = 1$  se tiene  $\tilde{F}_{s,2} \subset F_{s,2}$ , y por tanto  $u(t_j) \in F_{s,m}$  para  $t_j \in [0, \infty)$ .

d)  $\rightarrow$  a) Como  $u(t) \in F_{s,1}$  para  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $\hat{\varphi} \in \tilde{F}_{s,1}$  y  $\hat{\varphi}(0) = 0$ , y de 5-7 y 5-13 con  $m = 2$  con  $t = 0$  se obtiene  $\partial_\xi \hat{\varphi}(0) = 0$  por lo cual  $\varphi \in \tilde{F}_{s,2}$  y  $u \in \tilde{F}_{s,2}$ , de manera  $u \in F_{s,2}$ .

Caso  $m \geq 3$

a)  $\rightarrow$  b) Se supone verdadera la implicación para  $m - 1$ , de manera que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m-1}$  y por tanto  $\varphi \in F_{s,m-1}$  y  $\partial_\xi^j \hat{\varphi}(0) = 0$  para  $0 \leq j \leq m - 2$ , con lo cual basta mostrar que  $\partial_\xi^m \hat{\varphi} \in L_\xi^2$  y  $\partial_\xi^{m-1} \hat{\varphi}(0) = 0$ .

Como  $\partial_\xi^m \hat{u}(t) \in L_\xi^2$  para  $\partial_\xi^m \hat{\varphi} \in L_\xi^2$ , entonces al considerar  $t = 0$  en la ecuación 5-12 se obtiene  $\partial_\xi^m \hat{u}(0) \in L_\xi^2$  lo que permite concluir que  $\varphi \in F_{s,m}$ . Por último se muestra que  $\partial_\xi^j \hat{\varphi}(0) = 0$  para  $j = m - 1$ , lo cual se obtiene de 5-12 ya que por hipótesis de inducción  $\partial_\xi^j \hat{\varphi}(0) = 0$  se obtiene que para  $t \in [0, \infty)$

$$\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \partial_{\xi}^{m-j} \widehat{\varphi}|_{0R_j}$$

esta en el conjunto  $L_{loc}^2$ , lo cual permite concluir lo esperado.

b)  $\rightarrow$  c) Por hipótesis de inducción sobre  $m - 1$  se tiene  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,m-1}$  para  $t \in [0, \infty)$ , lo que implica que  $\partial_{\xi}^j \widehat{u}(t) \in L_{\xi}^2$  con  $0 \leq j \leq m - 1$ , junto con la igualdad  $\widehat{u}(t) = V_0(t) \widehat{\varphi}$  se tiene la igualdad  $\partial_{\xi}^j \widehat{u}(t) = 0$  para  $1 \leq j \leq m - 2$ . Por lo que basta mostrar que  $\partial_{\xi}^m \widehat{u}(t) \in L_{\xi}^2$  y  $\partial_{\xi}^{m-1} \widehat{u}(0) = 0$ . De 5-9 se obtienen ambas igualdades, la primera gracias a que  $\partial_{\xi}^m \widehat{u}(t) = \partial_{\xi}^m \{V_0 \widehat{\varphi}\}$  y la segunda al hacer  $t = 0$ .

c)  $\rightarrow$  d) Al igual que los casos anteriormente desarrollados, la prueba se tiene de inmediato gracias a que  $\widetilde{F}_{s,m} \subset F_{s,m}$ .

d)  $\rightarrow$  a) Por hipótesis de inducción se tiene  $u(t) \in F_{s,m-1}$  para  $t \in [0, \infty)$ , de manera que  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,m-1}$  y  $\partial_{\xi}^j \widehat{\varphi}(0) = 0$  para  $1 \leq j \leq m - 2$ , de 5-9 se obtiene  $\partial_{\xi}^{m-1} \widehat{\varphi}(0) = 0$ , además de la acotación 5-13 y  $\varphi \in F_{s,m}$  entonces  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,m}$ , lo cual permite concluir que  $u(t) \in F_{s,m}$ .

## 5.2. Problema no lineal con $\mu = 0$

En esta sección se considera el problema no lineal

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}u - \mathcal{H} \partial_x^2 u - \frac{3}{2} u \partial_x u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (5-15)$$

Con  $\mu = 0$  y solución  $u \in H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 3/2$  (por lema de Sobolev) siguiendo las ideas desarrolladas por Iorio R. en [9]; En esta sección se muestra qué si se tiene  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,2}$  para  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $u$  debe ser idénticamente nula.

El siguiente lema permite mostrar que la propiedad  $\widehat{\varphi}(t, 0) = 0$  es preservada por la solución del problema 0-3 durante todo el tiempo de existencia.

### Lema 5.2.

Sean  $s > \frac{3}{2}$ ,  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución del problema 5-15, si  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$  entonces  $\widehat{u}(t, 0) = 0$  para  $t \in [0, T]$

### Demostración 5.2.

Se considera

$$u(t) = \mathbb{V}_0(t) \varphi + \frac{3}{2} \int_0^t \mathbb{V}_0(t-t') u(t') \partial_x u(t') dt' \quad (5-16)$$

por continuidad de la función  $\varphi$  con respecto a la variable  $\xi$ , se obtiene

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t)| &\leq |V_0(t)\widehat{\varphi}| + \frac{3}{2} \left| \int_0^t V_0(t-t') i\xi \widehat{u}^2(t') dt' \right| \\ &\leq \frac{3}{2} |\xi| \int_0^t |\widehat{u}(t')|^2 dt' \\ &\leq \frac{3}{2} |\xi| \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2 \end{aligned}$$

Por tanto  $\widehat{u}(t, 0) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$

**Teorema 5.2.**

Sean  $s > \frac{3}{2}$ ,  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  con  $\mu = 0$  solución al problema 5-15, si  $u \in C([0, T]; F_{s,1})$  entonces  $u(t) \in \tilde{F}_{s,1}$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**Demostración**

Para mostrar que  $u(t) \in \tilde{F}_{s,1}$ , se debe mostrar que  $u \in F_{s,1}$  y  $\widehat{u}(t, 0) = 0$ . Por hipótesis  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$  para todo  $t$ , para probar que  $\widehat{u}(0, t) = 0$  se usa el lema 5.2 probando que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,1}$ , considerando nuevamente la ecuación 5-16 de manera que

$$\widehat{u}(t) = V_0(t)\widehat{\varphi} + \frac{3}{2} \int_0^t V_0(t-t') \widehat{u \partial_x u}(t') dt'$$

Por lo que se procede a calcular la derivada  $\partial_\xi \widehat{u}(t)$

$$\begin{aligned} \partial_\xi (\widehat{u}(t), \psi) &= -(\widehat{u}(t), \partial_\xi \psi) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} V_0(t)\widehat{\varphi} \partial_\xi \psi d\xi - \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t V_0(t-t') \widehat{u \partial_x u}(t') dt' \partial_\xi \psi d\xi \\ &= I + II \end{aligned}$$

Recordando que  $V_0(t)\widehat{\varphi} = e^{it \operatorname{sgn}(\xi)[1+\xi^2]}$ . Para I integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V_0(t)\widehat{\varphi}(\xi) \partial_\xi \psi d\xi &= \int_{-\infty}^0 e^{-it[1+\xi^2]} \widehat{\varphi}(\xi) \partial_\xi \psi d\xi + \int_0^{\infty} e^{it[1+\xi^2]} \widehat{\varphi}(\xi) \partial_\xi \psi d\xi \\ &= (e^{-it} - e^{it}) \widehat{\varphi}(0) \widehat{\psi}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} [2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \widehat{\varphi}(\xi)] V_0(t) \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Por lo cual

$$I = 2it \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi + [2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi} + \partial_\xi \widehat{\varphi}] V_0(t) \quad (5-17)$$

Para II, nuevamente integrando por partes, haciendo  $w = u\partial_x u$  y  $\tau = t - t'$ , donde

$$-\frac{3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau \operatorname{sgn}(\xi)[1+x^2]} \widehat{w}(t') \partial_{\xi} \psi(\xi) d\xi = 2it \sin(\tau) \widehat{w}(t') \psi(0) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} [2i\tau \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{w}(t') + \partial_{\xi} \widehat{w}(t')] V_0(t) \psi(\xi) d\xi$$

Con lo cual

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau \operatorname{sgn}(\xi)[1+\xi^2]} \widehat{w}(t') \partial_{\xi} \psi(\xi) d\xi = \int_0^t 2i \sin(\tau) \widehat{w}(t') \delta_{\xi} dt' \\ + \int_0^t [2i\tau \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{w}(t') + \partial_{\xi} \widehat{w}(t')] V_0(t) dt'$$

Concluyendo que

$$\partial_{\xi} \widehat{w}(t) = 2it \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_{\xi} + [2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi} + \partial_{\xi} \widehat{\varphi}] V_0(t) + \frac{3}{2} \int_0^t 2i \sin(\tau) \widehat{w}(t') \delta_{\xi} dt' \\ + \frac{3}{2} \int_0^t [2i\tau \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{w}(t') + \partial_{\xi} \widehat{w}(t')] V_0(t') dt' \quad (5-18) \\ = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$$

Analizando cada sumando por separado

$$\|\mathcal{A}_1\|_0 \leq \|2it \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{\varphi} V_0(t)\|_0 + \|\partial_{\xi} \widehat{\varphi} V_0(t)\|_0 \\ \leq 2t \|\xi \widehat{\varphi}(\xi)\|_0 + \|\partial_{\xi} \widehat{\varphi}\|_0 \\ \leq (1 + 2T) \|1 + 2T\|_{F_{s,1}} \quad (5-19)$$

Como  $w = u\partial_x u$ , y  $\widehat{w} = \frac{i\xi}{2} \widehat{u}^2$  se tiene

$$\|\mathcal{A}_3\|_0 = 0 \quad (5-20)$$

Para  $\mathcal{A}_4$  se tiene

$$\|2i\tau \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{w}(t') V_0(t')\|_0 = \|\xi \widehat{w}(t')\|_0 \\ \leq \|w(t')\|_{s-1} \\ = \tau \|\partial_x u^2(t')\|_{s-1} \\ \leq \tau \|u(t')\|_s^2 \quad (5-21)$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_\xi \widehat{w}(t') V_0(t')\|_0 &= \|\partial_\xi \widehat{w}(t')\|_0 \\
&= \|xw(t')\|_0 \\
&= \|xu(t') \partial_\xi u(t')\|_0 \\
&\leq \|\partial_x u(t')\|_0 \|xu(t')\|_0 \\
&\leq C_s \|\partial_x u(t')\|_{s-1} \|u(t')\|_{F_{s,1}} \\
&\leq C_s \|u(t')\|_{F_{s,1}} \|u(t')\|_{F_{s,1}} \\
&= C_s \|u(t')\|_{F_{s,1}}^2
\end{aligned} \tag{5-22}$$

Y de 5-21 y 5-22, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_4\| &\leq \int_0^t \tau \|u(t')\|_s^2 + C_s \|u(t')\|_{F_{s,1}} dt' \\
&\leq \tau \sup_{t' \in [0, T]} \|u(t')\|_s^2 + C_s \sup_{t' \in [0, T]} \|u(t')\|_{F_{s,1}}^2 \\
&\leq \tau C_s \|u(t')\|_{F_{s,1}}
\end{aligned} \tag{5-23}$$

Y por 5-19, 5-20 y 5-23 se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_1\|_0 &\leq \|\mathcal{A}_2\|_0 + \|\partial_\xi \widehat{u}(t)\|_0 + \|\mathcal{A}_3\|_0 + \|\mathcal{A}_4\|_0 \\
&\leq (1 + 2T) \|\varphi\|_{F_{s,1}} + \|\partial_\xi \widehat{u}(t)\|_0 + \tau C_s \|u(t)\|_{F_{s,1}}
\end{aligned}$$

Lo cual permite concluir que  $\|2it \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi\|_0 = 0$  y por tanto  $\|\widehat{\varphi}(0)\| = 0_0$  y  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , concluyendo que  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$ , y por lema 5.2 se concluye  $\widehat{u}(t) = 0$  para  $t \in [0, T]$  y junto con  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$  se concluye que  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1}$  para todo  $t \in [0, T]$ .

En el siguiente teorema se pide una condición adicional a la solución  $u$  del problema 5-15, la cual es que  $\partial_\xi \widehat{u}(0) = 0$ , esto para que la solución  $u$  sea idénticamente nula.

El siguiente teorema hace referencia al concepto de continuación única, bajo ciertas condiciones extras sobre la solución  $u$  del problema 5-15 en el espacio peso  $\widetilde{F}_{s,2}$ .

**Teorema 5.3.**

Sean  $s \geq 2$ ,  $u \in (C[0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución de 5-15, si  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,2}$  para  $t \in [0, T]$ , entonces  $u \equiv 0$ .

Para la prueba se tiene presente que  $\partial_\xi \widehat{u}, \widehat{t}(0) = \widehat{u}, \widehat{t}(0) = 0$  para todo tiempo, y tomando ?? con  $\mu = 0$ , se obtiene

$$\partial_t u(t) = \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t) - A_0 u(t)$$

donde  $A_0 = \mathcal{H}(1 - \partial_x^2)$ , haciendo uso de la transformada de Fourier se tiene para todo  $t \in [0, T]$  la igualdad

$$i\partial_\xi \widehat{u}(t, 0) = \int_{\mathbb{R}} xu(t) = 0$$

De manera que al derivar con respecto a la  $t$  bajo el signo de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} x\partial_t u(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \left\{ \frac{3}{2}u(t)\partial_x u(t) - \mathcal{H}u(t) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t) \right\} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \{x\mathcal{H}u\}^\wedge &= \partial_\xi \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{u} \\ &= 2\delta_\xi \widehat{u} + \operatorname{sgn}(\xi)\partial_\xi \widehat{u}, \end{aligned} \tag{5-24}$$

$$\begin{aligned} \{x\mathcal{H}\partial_x^2 u\}^\wedge &= -\partial_\xi \{ \operatorname{sgn}(\xi)\xi^2 \widehat{u} \} \\ &= -\operatorname{sgn}(\xi)\xi [2\widehat{u} + \xi\partial_\xi \widehat{u}] \end{aligned} \tag{5-25}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} xA_0 u(t) &= \int_{\mathbb{R}} x \{ \mathcal{H}u(t) - \mathcal{H}\partial_x^2 u(t) \} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5-26}$$

por lo tanto, para todo  $t \in [0, T]$  se tiene

$$0 = \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} x \{ u(t)\partial_x u(t) \} = \frac{3}{2} \|u(t)\|_0^2$$

de manera que  $u \equiv 0$  como quería probarse.

#### Teorema 5.4.

(Ver [4]) Sean  $s > \frac{3}{2}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ ,  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución de 5-15, si  $u \in C([0, T]; \tilde{F}_{s,1})$  y existen  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$  números tales que  $u(t_j) \in \tilde{F}_{s,2}$  para  $j = 0, 1$ , entonces  $u(t) = 0$  para  $t \in [0, T]$ .

Para la prueba se supone sin pérdida de generalidad  $t_0 = 0$ , entonces por hipótesis se tiene  $u(0), u(t_1) \in \tilde{F}_{s,2}$ , por lo cual  $\partial_\xi \hat{u}(t_1, 0) = 0$ ,  $\hat{u}(t_1, 0) = 0$ ,  $\partial_\xi \hat{\varphi}(0) = 0$ ,  $\hat{\varphi}(0) = 0$  y  $\varphi \in \tilde{F}_{s,2}$ . Considerando la derivada  ${}_\xi \hat{u}(t)$  dada en 5-18

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left| \int_0^{t_1} 2i(t_1 - t') \operatorname{sgn}(\xi) \xi \hat{w}(t') V_0(t_1 - t') \right| &\leq \frac{3}{2} |\xi| T \int_0^{t_1} \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{u}^2(\xi)| d\xi dt' \\ &\leq \frac{3}{2} |\xi| T \int_0^{t_1} \|u(t')\|_s dt'^2 \\ &\leq \frac{3}{2} |\xi| T \|u(t')\|_{F_{s,1}}, \end{aligned} \quad (5-27)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left| \int_0^{t_1} \partial_\xi \hat{w}(t') V_0(t_1 - t') dt' \right| &\leq \frac{3}{2} \int_0^{t_1} \|xu(t')\|_0 \|\partial_x u(t')\|_0 dt' \\ &\leq \frac{3}{2} T \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{F_{s,1}}^2 \end{aligned} \quad (5-28)$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} V_0(t_1 - t') \partial_\xi \hat{w}(t') &= e^{i(t_1 - t')} \partial_\xi \hat{w}(t', 0) \\ &= -ie^{i(t_1 - t')} \int_{\mathbb{R}} xu(t') \partial_x u(t') dt' \\ &= \frac{ie^{i(t_1 - t')}}{2} \|u(t')\|_0^2 \end{aligned} \quad (5-29)$$

junto con el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se garantiza la existencia de  $t^* \in [0, t_1]$  para el cual

$$t_1 e^{i(t_1 - t^*)} \|u(t^*)\|_0^2 = 0$$

y por tanto para  $t \in [0, T]$  se cumple

$$\|u(t^*)\|_0 = \|u(t)\|_0 = 0$$

### 5.3. Problema lineal con $\mu > 0$

Los resultados que se presentan en esta sección con respecto a la sección correspondiente al problema lineal con  $\mu = 0$ , se diferencian por la condición  $s \geq m$  del teorema 5.1, la cual ya no es necesaria, esto gracias a la condición regularizante del semi grupo  $\mathbb{V}_\mu$ .

**Teorema 5.5.**

Sean  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{R}))$  solución del problema 2-1 con  $s \in (-1, 1)$  y  $\mu > 0$ . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

- a.  $u(t) \in F_{s,m}$  para  $t \in [0, \infty)$ .
- b.  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m}$ .
- c.  $u(t) \in \tilde{F}_{s,m}$ .
- d.  $\varphi \in F_{s,m}$  y existe  $t_1 > 0$  tal que  $u(t_1) \in F_{s,m}$ .

**Demostración 5.3.**

La prueba de este teorema se realiza por inducción sobre  $m$ , suponiendo en cada caso verdadero para  $m - 1$ .

Antes de iniciar la prueba se recuerda que

$$\hat{u}(t) = V_\mu(t)\hat{\varphi} = e^{-\mu t\xi^2 + it\operatorname{sgn}(\xi) - it|\xi|} \hat{\varphi} \quad (5-30)$$

y se calcula  $\partial_\xi \hat{u}(t)$ , inicialmente se prueba el teorema para  $m = 1$  y luego para  $m \geq 2$ .

Caso  $m = 1$  Para prueba al igual que la elaborada en el teorema 5.1 se calcula la derivada distribucional  $\partial_\xi \hat{u}(t)$ , Donde

$$\begin{aligned} (\partial_\xi \hat{u}, \psi) &= - \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-\mu t\xi^2 - it(i-\xi^2)} \hat{\varphi}(\xi) \partial_\xi \psi(\xi) d\xi + \int_0^\infty e^{-\mu t\xi^2 + it(i-\xi^2)} \hat{\varphi}(\xi) \partial_\xi \psi(\xi) d\xi \right] \\ &= - [I + II] \end{aligned} \quad (5-31)$$

En ambos casos se integra por partes, obteniendo

$$I = e^{-it} \hat{\varphi}(0) \psi(0) - \int_{-\infty}^0 [2\mu t\xi - 2it\xi] \hat{\varphi}(\xi) V_\mu \psi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^0 \partial_\xi \hat{\varphi}(\xi) V_\mu \psi(\xi) d\xi$$

y

$$II = e^{it} \hat{\varphi}(0) \psi(0) - \int_0^\infty [-2\mu t\xi + 2it\xi] \hat{\varphi}(\xi) V_\mu \psi(\xi) d\xi - \int_0^\infty \partial_\xi \hat{\varphi}(\xi) V_\mu \psi(\xi) d\xi \quad (5-32)$$

Por lo cual se obtiene

$$\partial_\xi \hat{u}(t) = 2i \sin(t) \hat{\varphi}(0) \delta_\xi + V_\mu(t) [(2\mu t\xi - 2it\operatorname{sgn}(\xi)) \xi \hat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \hat{\varphi}(\xi)] \quad (5-33)$$

Y recordando que

$$\left\| V_\mu(t)\varphi \right\|_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} \leq C_s \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{t\mu} \right)^{\lambda/2} \right] \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} \quad (5-34)$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} \left\| 2t\xi\widehat{\varphi}V_\mu(t) \right\|_0 &\leq 2\mu \left\| V_\mu(t)\varphi \right\|_{H^1} \\ &\leq C_s [t\mu + (t\mu)^{1/2}] \|\varphi\|_0 \end{aligned} \quad (5-35)$$

y

$$\begin{aligned} \left\| 2it\operatorname{sgn}(\xi)\xi\widehat{\varphi}(t)V_\mu(t) \right\|_0 &\leq 4|t| \left\| V_\mu(t)\varphi \right\|_{H^1} \\ &\leq C_s [t + t^{1/2}\mu^{-1/2}] \|\varphi\|_0 \end{aligned}$$

a)  $\rightarrow$  b) Por hipótesis, para  $t \in [0, \infty)$  se tiene  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$ . Se deben probar las siguientes condiciones:  $\varphi \in F_{s,1}$  y  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ .

De la derivada 5-33 se obtiene

$$2i \sin(t)\widehat{\varphi}(0)\delta = \partial_\xi \widehat{u}(t) - \partial_\xi \widehat{\varphi} - [2it\operatorname{sgn}(\xi)\xi - 2\mu t] \widehat{\varphi}V_\mu(t)$$

Lo cual permite concluir junto con las igualdades 5-34 y 5-35 que  $2it \sin(t)\widehat{\varphi}(0)\delta_\xi \in L_\xi^2$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , con lo cual  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , y por tanto  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$ .

b)  $\rightarrow$  c) Bajo la suposición que  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$ , se sabe que  $\partial_\xi \widehat{\varphi} \in L_\xi^2$  y  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , y por 5-33, 5-34 y 5-35 se obtiene inmediatamente que  $\partial_\xi \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$  para todo  $t \in [0, \infty)$  y por tanto  $u \in F_{s,1}$ , y como  $\widehat{u}(t) = V_\mu(t)\widehat{\varphi}$  por tanto  $\widehat{u}(t, 0) = 0$ , lo cual permite concluir que  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1}$ .

c)  $\rightarrow$  d) La prueba es análoga a la hecha para el caso  $\mu = 0$ , pues al suponer  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1}$  para todo  $t \in [0, \infty)$  se tiene  $u \in F_{s,1}$  y  $\widehat{u}(0) = 0$ , además existen  $t_0 < t_1$  positivos tales que  $u(t_1) \in F_{s,1}$  pues  $\widetilde{F}_{s,1} \subset F_{s,1}$ .

d)  $\rightarrow$  a) Por hipótesis se tiene  $\varphi \in F_{s,1}$  y  $u(t_1) \in F_{s,1}$ , con lo cual  $\partial_\xi \widehat{\varphi}, \partial_\xi \widehat{u}(t_1) \in L_\xi^2$  y por 5-33, 5-34 y 5-35 se obtiene con  $t = t_1$  que  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , con lo cual  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,1}$  y  $\widehat{u}(0) = 0$ , por tanto  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1} \subset F_{s,1}$ .

Ahora para la prueba del caso  $m \geq 2$ , primero se calcula la derivada  $\partial_\xi^m \widehat{u}(t)$ , la cual se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^m \widehat{u}(t) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi}) \partial_\xi^k V_\mu(t) \\
&= V_\mu(t) \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (\partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi}) \partial_\xi^k (e^{-\mu t \xi^2} V_0(t)) \\
&= V_\mu(t) \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} \left\{ \partial_\xi^k e^{-\mu t \xi^2} V_0(t) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \partial_\xi^{k-j} e^{-\mu t \xi^2} \partial_\xi^j V_0(t) \right\} \\
&= V_\mu(t) \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} \left\{ \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} c_{j,k} (-2\mu t)^{k-j} \xi^{k-2j} e^{-\mu t \xi^2} \right\} V_0(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \partial_\xi^{k-j} e^{-\mu t \xi^2} \partial_\xi^j V_0(t)
\end{aligned}$$

Recordando que  $\partial_\xi^j V_0(t) = Q_j V_0(t) + R_j$  con  $Q_j$  y  $R_j$  dados por 5-10 y 5-11 respectivamente, y haciendo

$$P_k = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} c_{j,k} (-2\mu t)^{k-j} \xi^{k-2j} e^{-\mu t \xi^2} \quad (5-36)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^m \widehat{u}(t) &= V_\mu(t) \partial_\xi^m \widehat{\varphi} + V_\mu(t) \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} P_k \\
&\quad + V_\mu(t) \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} Q_j P_{k-j} + e^{-\mu t \xi^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} R_j P_{k-j}
\end{aligned} \quad (5-37)$$

La prueba de cada una de las implicaciones se hace por inducción sobre  $m$ .

a)  $\rightarrow$  b) Por hipótesis de inducción sobre  $m-1$  se tiene  $u(t) \in F_{s,m-1}$  para  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $\varphi \in \widetilde{F}_{s,m-1}$  y por tanto para  $j = 0, 1, 2, \dots, m-2$  se tiene  $\partial_\xi^j \widehat{\varphi}(0) = 0$  y además  $\varphi \in F_{s,m-1}$ . Así para tener (b) se debe probar  $\varphi \in F_{s,m}$  y  $\partial_\xi^{m-1} \widehat{\varphi}(0) = 0$ , la primera se tiene de inmediato pues  $u(0) = \varphi \in F_{s,m}$ , para la segunda se considera 5-37 analizando por separado cada uno de sus sumandos, como sigue:

$$\begin{aligned}
\left\| V_\mu \partial_\xi^m \widehat{\varphi} \right\|_0 &\leq C_s \|\partial_\xi^m \widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq C_s \|\varphi\|_{F_{s,m}}
\end{aligned} \quad (5-38)$$

$$\begin{aligned}
\left\| V_\mu \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (\partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi}) P_k \right\|_0 &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} c_{k,j} \binom{m}{k} \left\| (-2\mu t)^{k-j} V_\mu(t) (\partial_\xi^{m-k}) \widehat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} c_{k,j,s} [(2\mu t)^{k-j} + (2\mu t)^{k/2}] \|\varphi\|_{F_{s,m}} \quad (5-39)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} (\partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi}) Q_j P_{k-j} V_\mu(t) \right\|_0 &\leq \\
&\leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-j-1}{2} \rceil} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} c_{j,k,i,m} \left\| V_\mu(t) \partial_\xi^{m-k} \widehat{\varphi} (2itsgn(\xi))^{j-r} \xi^{j-2r+k-j-2} (-2\mu t)^{k-j-i} \right\|_0 \\
&\leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-j-1}{2} \rceil} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} c_{j,k,i,m} [1 + (t\mu)^{-1/2}] \|\varphi\|_{F_{s,m}} (2t)^{j-r} (2\mu t)^{k-j-i} \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-j-1}{2} \rceil} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} c_{j,k,i,m,s} \left[ (2\mu t)^{k-j-i} + (2\mu t)^{\frac{k-2j-2i}{2}} \right] (2t)^{j-r} \|\varphi\|_{F_{s,m}} \quad (5-40)
\end{aligned}$$

con

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} c_{k,j,s} [(2\mu t)^{k-j} + (2\mu t)^{k/2}] = 0$$

y

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-j-1}{2} \rceil} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} c_{j,k,i,m,s} \left[ (2\mu t)^{k-j-i} + (2\mu t)^{\frac{k-2j-2i}{2}} \right] (2t)^{j-r} = 0$$

en  $t = 0$ ; por lo que  $e^{-\mu t \xi^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \binom{m}{k} \binom{k}{j} P_{k-j} R_j \in L_\xi^2$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , donde

$$\binom{m}{1} \binom{1}{1} (\partial_\xi^{m-1} \widehat{\varphi} c \sin(t) \delta_\xi)$$

y por tanto  $\partial_\xi^{m-1} \widehat{\varphi}(0) = 0$ , concluyendo que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m}$  como quería mostrarse.

b)  $\rightarrow$  c) Por hipótesis de inducción se tiene  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m-1}$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , lo cual implica que para  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$  y  $t \in [0, \infty)$  que se cumpla  $\partial_\xi^j \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$  y  $\widehat{u}(t) \in F_{s,m}$ ; por lo tanto basta probar que  $\partial_\xi^m \widehat{u}(0) = 0$  y  $\partial_\xi^m \widehat{u}(t) \in L_\xi^2$ , lo primero se tiene por la igualdad 5-37,

y por las desigualdades 5-38, 5-39 y 5-40 se obtiene la segunda pertenencia, con lo cual se concluye que  $u(t) \in \tilde{F}_{s,m}$  como quería mostrarse.

c)  $\rightarrow$  d) Se deduce nuevamente de la contención  $\tilde{F}_{s,m} \subset F_{s,m}$ .

d)  $\rightarrow$  a) Por hipótesis de inducción se tiene  $u(t) \in F_{s,m-1}$ , además existe  $t_1 > 0$  tal que  $u(t_1) \in F_{s,m-1}$ , de manera que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m-1}$  y  $\partial_\xi^j \varphi(0) = 0$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, m-2$ , por 5-37 se tiene  $\partial_\xi^{m-1} \widehat{\varphi}(0) = 0$  y como  $\varphi \in F_{s,m}$ , se concluye por 5-38, 5-39 y 5-40 que  $\varphi \in \tilde{F}_{s,m}$ , concluyendo que  $u \in F_{s,m}$  como quería probarse.

## 5.4. Problema no lineal con $\mu > 0$

En esta sección se analiza el problema 0-3 con  $\mu > 0$ , donde nuevamente no es necesaria la condición  $s \geq m$ . El siguiente teorema pone en evidencia la estabilidad de la solución  $u$  para todo  $t \in [0, T]$ .

### Teorema 5.6.

Sean  $s > 1/2$ ,  $\mu > 0$  y  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución del problema 0-3. Si  $\varphi \in \tilde{F}_{s,1}$  entonces para  $t \in [0, T]$  se tiene  $\widehat{u}(t, 0) = 0$ .

Considerando

$$u(t) = V_\mu(t)\varphi + \frac{3}{2} \int_0^t V_\mu(t-t')u(t')\partial_x u(t')dt' \quad (5-41)$$

Haciendo  $\tau = t - t'$  y  $w = \partial_x u(t')$  entonces

$$\widehat{u}(t) = V_\mu \widehat{\varphi} + \frac{3}{4} \int_0^t V_\mu(\tau) i\xi \widehat{w(t')} dt'$$

donde

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t V_\mu(\tau) i\xi \widehat{w(t')} dt' \right| &\leq |\xi| \int_0^t |\widehat{w(t')}| dt' \\ &\leq |\xi| \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2 \end{aligned}$$

y como

$$|\widehat{u}(t)| \leq |V_\mu(t)| + \frac{3}{4} |\xi| \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2$$

Lo cual permite concluir que para  $t \in [0, T]$  se cumple  $|\widehat{u}(t, 0)| = 0$  y por tanto  $\widehat{u}(t, 0) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**Teorema 5.7.**

Sean  $s > 1/2$ ,  $\mu > 0$ ,  $T = T_{\mu, \varphi, s}$  y  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución al problema 0-3. Si  $u \in C([0, T]; F_{s,1})$  entonces  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,1}$  para  $t \in [0, T]$ .

Considerando 5-41 y procediendo de manera análoga a la igualdad 5-33, la derivada  $\partial_\xi \widehat{u}(t)$  está dada por

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \widehat{u}(t) &= 2i \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi + \{[2\mu t(\xi) + 2i\tau \operatorname{sgn}(\xi)\xi] \widehat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \widehat{\varphi}(\xi)\} V_\mu(t) \\
&\quad + \partial_\xi \left( \frac{3}{4} \int_0^t V_\mu(\tau) \widehat{w}(t') dt' \right) \\
&= 2i \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi + V_\mu(t) \{[2\mu\tau \operatorname{sgn}(\xi) + 2i\tau \operatorname{sgn}(\xi)] \widehat{\varphi}(\xi) + \partial_\xi \widehat{\varphi}\} \\
&\quad + \frac{3}{4} \int_0^t V_\mu(t) [\partial_\xi \widehat{w}(t') + [2i\tau \operatorname{sgn}(\xi)\xi - 2\xi\mu\tau] \partial_w(t')] dt \\
&\quad \quad \quad + \frac{3}{4} i \int_0^t \tau(1 + \xi^2) \delta_\xi V_\mu(t) \widehat{w}(t') dt' \quad (5-42)
\end{aligned}$$

Donde se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\| V_\mu(t) \{2\mu\tau \operatorname{sgn}(\xi) + 2i\tau \operatorname{sgn}(\xi)\xi\} \widehat{\varphi} \right\|_0 &\leq C_s [1 + (\mu t)^{-1/2}] 2\mu t \|\varphi\|_{F_{s,1}} + C_s [1 + (\mu T)^{-1/2}] t \|\varphi\|_{F_{s,1}} \\
&= \leq_s [2\mu T + (2\mu T)^{1/2} + (1 + (\mu T)^{-1/2})] \|\varphi\|_{F_{s,1}} \quad (5-43)
\end{aligned}$$

y como

$$\left\| V_\mu(t) \partial_\xi \widehat{w}(t') \right\|_0 \leq c_s [1 + (\mu t)^{-1/2}] \|\partial_x u^2(t')\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

$$\left\| V_\mu(t) 2i\tau \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{w}(t') \right\|_0 \leq 2t [1 + (\mu t)^{1/2}] \|\widehat{w}(t')\|_{s-1}$$

y

$$\left\| V_\mu(t) 2\xi\mu \widehat{w}(t') \right\|_0 \leq 2\mu t [1 + (\mu t)^{-1/2}]$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{3}{4} \int_0^t V_\mu(t) [\partial_\xi \widehat{w}(t') + [2i\tau \operatorname{sgn}(\xi)\xi - 2\xi\mu\tau] \widehat{w}(t')] dt' \right\|_0 \\
& \leq C_s [T + \mu^{-1/2}T^{1/2} + T^2 + \mu^{-1/2}T^{3/2}] \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2 \\
& \quad + 2C_s \mu \left[ T^2 + \mu^{-1/2}T^{3/2} \right] \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{F_{s,1}} \quad (5-44)
\end{aligned}$$

y como  $\widehat{w}(t, 0) = 0$ , se deduce que  $2i \sin(t) \widehat{\varphi}(0) \delta_\xi \in L_\xi^2$  y por tanto  $\widehat{\varphi}(0) = 0$ , y al hacer la transformada de Fourier en 5-41 se obtiene  $\widehat{u}(t, 0) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ , lo que permite concluir la prueba.

En los siguientes dos teoremas se realiza el mismo procedimiento que el realizado en el caso no lineal con  $\mu = 0$ , estableciendo propiedades de persistencia en el espacio con peso  $\widetilde{F}_{s,2}$  para así obtener un principio de continuación única.

**Teorema 5.8.**

Sean  $s > 1/2$ ,  $\mu > 0$  y  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución de 0-3. Si  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,2}$  para todo  $t$ , entonces  $u \equiv 0$ .

Como  $u(t) \in \widetilde{F}_{s,2}$  entonces para todo  $t \in [0, \infty)$  se tiene  $\partial_\xi \widehat{u}(t, 0) = 0$ , con lo cual

$$i\partial_\xi \widehat{u}(t, 0) = \int_{\mathbb{R}} xu(t) \equiv 0$$

Al igual que el teorema 5.3, al derivar con respecto a  $t$  bajo el signo de la integral, se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t \int_{\mathbb{R}} xu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \left\{ \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t) - A_\mu u(t) \right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \left\{ \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t) - \mathcal{H} u(t) + \mathcal{H} \partial_x^2 u(t) - \mu \partial_x^2 u(t) \right\}
\end{aligned}$$

De manera que al integral por partes y por 5-26 se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} x \{ A_0 u(t) - \mu \partial_x^2 u(t) \} = 0$$

Por tanto  $u \equiv 0$  ya que  $0 = \int x \{ \frac{3}{2} u(t) \partial_x u(t) \} = \frac{3}{2} \|u(t)\|_0^2$

**Teorema 5.9.**

Sean  $s > 1/2$ ,  $\mu > 0$ ,  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  y  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  solución al problema 0-3. Si

$u(t) \in C([0, T]; \tilde{F}_{s,1})$  y existen  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$  con  $u(t_j) \in \tilde{F}_{s,2}$  para  $j = 0, 1$ . Entonces existe  $t^* \in [t_0, t_1]$  tal que  $u(t, 0) = 0$  para todo  $t \in [t^*, T]$ .

Para la prueba se puede suponer sin perdida de generalidad que  $u(t) = 0$ , por tanto  $u(0), u(t_1) \in \tilde{F}_{s,2}$ , pero como  $u(0) = \varphi$  entonces se cumple

$$\widehat{\varphi}(0) = 0, \quad \partial_\xi \widehat{\varphi}(0) = 0, \quad u(t_1, 0) = 0 \quad \partial_\xi \widehat{u}(t_1, 0) = 0$$

Y usando la igualdades 5-41 y 5-29 se obtiene

$$\frac{3}{2} \left| \int_0^{t_1} 2i(t_1 - t') \operatorname{sgn}(\xi) \xi \widehat{w}(t') V_0(t_1 - t') dt' \right| \leq \frac{3}{2} |\xi| T^2 \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_0^{t_1} |2\xi\mu T \widehat{w}(t') V_0(\tau)| dt' &\leq \frac{3}{2} \xi\mu T \int_0^{t_1} |\widehat{w}(t')| dt' \\ &\leq \frac{3}{2} \xi\mu T^2 \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_s^2 \end{aligned}$$

Y como  $0 = \partial_\xi \widehat{u}(t_1) = \frac{3}{4} \int_0^{t_1} V_1(\tau) \partial_\xi \partial_\xi \widehat{w}(t')$ , y

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} V_0(t_1 - t') \partial_\xi \widehat{w}(t', \xi) &= -ie^{i(t_1 - t')} \int_{\mathbb{R}} xw(t) \\ &= \frac{e^{i(t_1 - t')}}{2} \|u(t)\|_0^2 \end{aligned}$$

Con lo cual

$$0 = \int_0^{t_1} V_\mu(t_1 - t) \partial_\xi \widehat{w}(t') dt' = \int_0^{t_1} e^{i(t_1 - t')} \|u(t')\|_0^2 dt'$$

Lo que garantiza la existencia de  $t^* \in [0, t_1]$  tal que  $\|u(t^*)\|_0 = 0$ , y como

$$\|\varphi\|_0^2 = \|u(t)\|_0^2 + 2\mu \int_0^t \|\partial_x^2 u(t')\|_0^2 dt'$$

Entonces para  $t = t_1$  se cumple

$$\|\varphi\|_0^2 = 2\mu \int_0^{t^*} \|\partial_x^2 u(t')\|_0^2 dt'$$

Por lo cual, para  $t \geq t^*$  se concluye  $\|u(t)\|_0 = 0$  como quería probarse.

# Bibliography

- [1] C. KENIG, G. P. ; VEGA, L.: *Well-posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation*. En: arXiv:1010.5404v1 (2010)
- [2] CUNHA, A. ; PASTOR, A.: *The IVP for Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsow equation in weighted Sobolev space*. En: J. Math. Anal. Appl (2014)
- [3] DUQUE, Omar: *Sobre una versión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono generalizada*. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de Doctorado, 2014
- [4] FONSECA, G. ; PONCE, G.: *The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev Spaces*. (2010)
- [5] GINIBRE, J. ; VELO, G.: *Smoothing properties and existence o solutions for the generalized Benjamin-Ono equation*. (1991), p. 150–232
- [6] IONESCU, A. ; KENIG, C.: *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low-regularity space*. (2007), p. 753–798
- [7] IÓRIO, Jr. R. J.: *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono Equation*. En: An partial differential equation (1986)
- [8] IÓRIO, Jr. R. J.: *The Benjamin-Ono Equation in Weighted Sobolev Space*. Rio de Janeiro : J. Math. Anal. Appl, 1991
- [9] IÓRIO, Jr. R. J.: *KDV,BO and friends in weighted Sobolev spaces*. En: Instituto de Matemática Puras e Aplicada (1991), p. 105–121
- [10] IÓRIO, Jr. R. J. ; DE MAGALHÃES IÓRIO, V.: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001
- [11] IÓRIO, R. J.: *The Benjamin-Ono Equation in weighted Sobolev space*. En: J. Math. Anal. Appl. (1991)
- [12] IÓRIO, R. J.: *Unique continuation principles for the Benjamin-Ono equation*. En: Diff. and Int. Eqs (2003)
- [13] LINARES, F. ; PONCE, G.: *Introduccion to Nonlinear Dispersive Equations*. New York : Springer, 2000

- [14] PONCE, G.: *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation. En: Diff. Int Equ. (1991)*

# Index

*Índices negativos, 25*

*índice negativo, 25*

*Buen planteamiento global en  $H^s(\mathbb{R})$  con  
 $s > 1/2$ , 20*

*Buen planteamiento local del problema re-  
gularizado, 12*

*Continuación única y espacios con peso, 38*

*Desigualdad de Gronwall, 4*

*Desigualdad de Kato-Ponce, 5*

*Espacios de Sobolev, 5*

*Pesos, 5*

*Primer teorema de Sobolev, 4*

*Primera estimativa, 21*

*Problema regularizado, 7*

*Problema regularizado lineal, 7*

*Segunda estimativa, 22*

*Semigrupo operador, 7*

*Teoría local, 7*

*Teorema generalizado de Sobolev, 4*