UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Principios de Continuación Única en Ecuaciones Dispersivas

Eddye Alejandro Bustamante Monsalve

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias
Posgrado en Matemáticas

Abril 2011

Medellín, 14 de junio de 2011

Señores
Biblioteca Efe Gómez
La Sede

Apreciados Señores,

Como uno de los directores de la tesis doctoral "Principios de continuación única en ecuaciones dispersivas" del estudiante Eddye Bustamante Monsalve, certifico que la versión que él está enviando a la biblioteca en medio electrónico es la versión definitiva.
Cordial saludo,

Jorge Enrique Mejía L.

Jorge Mejía Laverde
Profesor Titular
Escuela de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín

Principios de Continuación Única en Ecuaciones Dispersivas

Por:
Eddye Alejandro Bustamante Monsalve

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Directores:
Pedro Isaza Jaramillo
Jorge Mejía Laverde

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias
Posgrado en Matemáticas

Abril 2011

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS, a través del contrato No. 574-2009, código 111848925101, y del programa de formación doctoral Francisco José de Caldas (convocatoria 494 de 2009) en la modalidad de doctorados en Colombia.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a los profesores Pedro Isaza y Jorge Mejía por su apoyo y gran compromiso en la dirección de este trabajo, por su paciencia y todas sus enseñanzas. A los profesores Jorge Cossio, Felipe Linares y Gustavo Ponce por leer detalladamente la tesis, realizar las correcciones y aportar tan valiosas sugerencias.

Mi más sincera gratitud a mi amigo y profesor Carlos Vélez quien fue fundamental en la preparación del examen de calificación. A mi gran amigo José Manuel Jiménez por su hospitalidad en la ciudad de Rio de Janeiro. A mis demás amigos, en especial a John Bayron Baena, José Manuel Gómez y Juan Carlos Díaz quienes, en compañía de los dos primeros que menciono en este párrafo y de mis familiares, lograron mantenerme siempre de buen ánimo y con ganas de culminar mis estudios.

Desde luego tengo que mencionar a mi novia, María Isabel Arias, por estar a mi lado durante la realización del doctorado, por soportarme, por comprenderme incondicionalmente y animarme en todo momento. A ella quiero agradecerle... simplemente por ser como es.

Finalmente a mis padres, quienes han compartido mis alegrías académicas y personales desde que era un niño, quienes me han enseñado a corregir el camino cuando me he equivocado y a quienes quiero dedicar muy emotivamente el resultado de los últimos cuatro años y medio: este doctorado es de ustedes dos.

Resumen

En el presente trabajo consideramos las ecuaciones de Zakharov-Kuznetsov

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u + u \partial_x u = 0, \quad u = u(x,y,t), \text{ con } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R},$$

y la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u + u \partial_x u = 0, \quad u = u(x,t), \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ y } t \in [0,1].$$

Para estas dos ecuaciones demostramos los siguientes principios de continuación única:

1. Si $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ es una solución de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov tal que, para cierto $B > 0$,

   $$supp\ u(0) \subseteq [-B,B] \times [-B,B] \ y\ supp\ u(1) \subseteq [-B,B] \times [-B,B],$$

   entonces $u \equiv 0$.

2. Sean $u_1, u_2 \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}) \cap L^2((1+x_+^2)^{2\alpha} dx)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ para algún $\alpha > 1$, tales que $\partial_x^{-1} u_1(t)$, $\partial_x^{-1} u_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0,1]$. Si u_1, u_2 son soluciones de la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva y además se cumple que

   (i) $u_1(0) - u_2(0),\ u_1(1) - u_2(1) \in L^2(e^{a x_+^{3/2}} dx)$, para todo $a > 0$;

   (ii) para todo $\beta > 0$, $e^{\beta x}(u_1 - u_2)$ es una función acotada del intervalo $[0,1]$ en $L^2(\mathbb{R})$,

   entonces $u_1 \equiv u_2$.

Palabras Clave

Principios de continuación única, ecuaciones de evolución dispersivas, Ostrovsky, Zakharov-Kuznetsov, estimativos de tipo Carleman, estimativos inferiores, estimaciones a priori.

Abstract

In this work we consider the Zakharov-Kuznetsov equation

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u + u \partial_x u = 0, \quad u = u(x, y, t), \text{ with } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ and } t \in \mathbb{R},$$

and the Ostrovsky equation with positive dispersion

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u + u \partial_x u = 0, \quad u = u(x, t), \text{ with } x \in \mathbb{R} \text{ and } t \in [0, 1].$$

We prove the following unique continuation principles for this two equations:

1. If $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ is a solution of the Zakharov-Kuznetsov equation such that, for some $B > 0$,

   $$\textit{supp } u(0) \subseteq [-B, B] \times [-B, B] \textit{ and supp } u(1) \subseteq [-B, B] \times [-B, B],$$

   then $u \equiv 0$.

2. Let $u_1, u_2 \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}) \cap L^2((1 + x_+^2)^{2\alpha} dx)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ for some $\alpha > 1$, such that $\partial_x^{-1} u_1(t)$, $\partial_x^{-1} u_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$, for all $t \in [0,1]$. If u_1, u_2 are solutions of the Ostrovsky equation with positive dipersion and

   (i) $u_1(0) - u_2(0)$, $u_1(1) - u_2(1) \in L^2(e^{a x_+^{3/2}} dx)$, for all $a > 0$;

   (ii) for all $\beta > 0$, $e^{\beta x}(u_1 - u_2)$ is bounded from $[0,1]$ in $L^2(\mathbb{R})$,

   then $u_1 \equiv u_2$.

Keywords

Unique continuation principles, evolution dispersive equations, Ostrovsky, Zakharov-Kuznetsov, estimates of Carleman type, lower estimates, a priori estimates.

Tabla de Contenido

Resumen **i**

Abstract **ii**

Nomenclatura **iv**

Introducción **vi**

1 Soporte de soluciones de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov **1**
1.1 Estimativos a priori 2
1.2 Estimativo de tipo Carleman 7
1.3 Demostración del resultado principal (teorema 1) 11

2 Principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva **14**
2.1 Estimativos de tipo Carleman 15
2.1.1 Estimativo tipo Carleman para la función y la antiderivada (prueba del teorema 5) 16
2.1.2 Estimativo tipo Carleman para la primera y la segunda derivadas (prueba del teorema 6) 18
2.2 Estimativo inferior 35
2.3 Demostración del resultado principal (teorema 4) 45

Bibliografía **57**

Nomenclatura

1. Espacios L^2 con peso exponencial.

   Para $\beta > 0$ decimos que $u \in L^2(e^{2\beta x}dx)$ si se cumple que $\|e^{\beta x}u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$.

2. Espacios H^k con peso exponencial.

   Para $k \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$ decimos que $u \in H^k(e^{2\beta x}dx)$ si se cumple que $\|e^{\beta x}\partial_x^j u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$, para todo $0 \leq j \leq k$.

3. Para $x \in \mathbb{R}$ definimos x_+ por

$$x_+ := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

4. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ al espacio de distribuciones temperadas definidas en $\mathbb{R}^n$.

5. Decimos que $u \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^n)$ si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y su transformada de Fourier $\widehat{u}$ está representada por una función.

6. Para $u \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$, tal que $\dfrac{\widehat{u}(\xi)}{i\xi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, definimos la antiderivada de u por

$$\partial_x^{-1}u := \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{u}(\xi)}{i\xi}\Big) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

   donde $\mathcal{F}^{-1}$ denota la transformada inversa de Fourier. (Algunas veces se denota a la transformada inversa de fourier de u por $u^\vee$).

7. Para un conjunto A, denotamos por χ_A a la función característica del conjunto A, definida por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}.$$

8. Producto interno en L^2.

   Para $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, denotamos el producto interno en el espacio L^2 por

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)}dx.$$

9. Si f es una función de la variable x, con frecuencia escribiremos $f(\cdot_x)$ para denotar la aplicación $x \mapsto f(x)$.

10. Para $D := \mathbb{R} \times [0,1]$ consideramos las siguientes normas de tipo $L^p_t L^q_x(D)$ y $L^p_x L^q_t(D)$.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty_t L^2_x(D)} &:= \operatorname*{essup}_{t\in[0,1]} \|u(\cdot_x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_x)}, \\
\|u\|_{L^1_t L^2_x(D)} &:= \int_0^1 \|u(\cdot_x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} dt, \\
\|u\|_{L^\infty_x L^2_t(D)} &:= \operatorname*{essup}_{x\in\mathbb{R}} \|u(x, \cdot_t)\|_{L^2_t([0,1])}, \\
\|u\|_{L^1_x L^2_t(D)} &:= \int_{\mathbb{R}} \|u(x, \cdot_t)\|_{L^2_t([0,1])} dx.
\end{aligned}$$

11. A lo largo de este trabajo la letra C denotará diversas constantes positivas que pueden variar de una línea a otra y que dependen de parámetros que están claramente establecidos en cada caso. En ocasiones usamos un parámetro como subíndice en la constante C para indicar que ella depende de dicho parámetro.

Introducción

Las ecuaciones de evolución dispersivas son ecuaciones de la forma

$$\partial_t u - im(D)u = F(u)\,, \tag{0.1}$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (variable espacial), $t \in \mathbb{R}$ (variable temporal), $m(D)$ es un operador lineal definido a través de la transformada de Fourier espacial por medio de un multiplicador $m(\zeta)$ de valor real y F es un operador no lineal.

Estas ecuaciones han cobrado gran importancia debido al papel que juegan en la formulación de modelos matemáticos para la descripción de fenómenos de las ciencias físicas y naturales y han sido estudiadas en los últimos años en el contexto de espacios de Sobolev.

Además del estudio del buen planteamiento del problema de Cauchy asociado a esta ecuación, un aspecto que se ha venido examinando recientemente con bastante atención es el relacionado con los principios de continuación única.

Los principios de continuación única consisten en la determinación de condiciones suficientes de carácter local, en las variables espacio-temporales, bajo las cuales dos soluciones de una misma ecuación dispersiva son idénticamente iguales.

Estos principios han sido estudiados de manera sistemática para las ecuaciones de Schrödinger y de Korteweg-de Vries (KdV), entre otras. Con relación a la ecuación KdV,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0, \tag{0.2}$$

donde $u = u(x,t)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, en [2] Bourgain introdujo un método, basado en análisis complejo, que permite demostrar que si para todo t en un intervalo no trivial del tiempo el soporte de $u(\cdot_x, t)$ permanece dentro de cierto compacto fijo, entonces u es idénticamente nula.

La idea general en el trabajo de Bourgain está basada en el hecho de que la transformada de Fourier de una función de soporte compacto tiene una extensión entera de tipo exponencial. A partir de ello Bourgain utiliza las propiedades de las funciones enteras para estimar la solución obtenida por la fórmula de Duhamel, que puede ser vista como una perturbación de la solución de la ecuación linealizada.

Previamente, Saut y Scheurer [20] habían probado un resultado para una clase general de ecuaciones dispersivo-disipativas que incluye la ecuación KdV. Este resultado afirma que si

una solución suficientemente suave $u = u(x,t)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, de este tipo de ecuaciones, se anula en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, entonces u se anula en todas las componentes horizontales de Ω, es decir, u se anula en $\mathbb{R}^n \times \{t : \exists x \ (x,t) \in \Omega\}$. En particular, si $u = u(x,t)$ es una solución suficientemente suave de la ecuación KdV que se anula en una semibanda de la forma $[R,\infty) \times [0,1]$, entonces u es idénticamente nula.

Observemos que en el caso de la ecuación KdV el resultado de Saut y Scheurer es más fuerte que el resultado de Bourgain.

Para la ecuación KdV en [12] Kenig, Ponce y Vega probaron que si una solución suficientemente suave de la ecuación KdV es tal que, para algún $B \in \mathbb{R}$ y dos tiempos distintos t_1 y t_2,

$$supp\, u(\cdot_x, t_1), supp\, u(\cdot_x, t_2) \subset (-\infty, B],$$

entonces $u \equiv 0$. Para ello se utilizó un estimativo de tipo Carleman con el fin de demostrar que esta solución es cero en una semibanda $[R,\infty) \times [t_1, t_2]$, lo cual permite aplicar el resultado de Saut y Scheurer.

Utilizando el mismo método del anterior trabajo pero con una desigualdad de tipo Carleman más sofisticada, en [13] Kenig, Ponce y Vega generalizaron el anterior resultado demostrando que si dos soluciones u_1 y u_2 coinciden en dos semirrectas $x \geq B$ en dos tiempos distintos, entonces $u_1 \equiv u_2$.

En [4] Escauriaza, Kenig, Ponce y Vega probaron una versión más fuerte de principio de continuación única para la ecuación KdV que la establecida en [13]. En realidad, en [4] se afirma que si la diferencia de dos soluciones de la ecuación KdV tiene cierto decaimiento exponencial para $x > 0$ en dos tiempos distintos entonces dichas soluciones coinciden. Este resultado se obtiene de contrastar un estimativo de tipo Carleman más refinado que los utilizados en sus trabajos anteriores, con un estimativo de tipo inferior, motivado en un artículo previo de Isakov [7].

En el presente trabajo establecemos principios de continuación única para la ecuación de Zakharov-Kuznetsov y para la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva. La primera de estas ecuaciones es una generalización bidimensional de la ecuación KdV mientras que la segunda es una perturbación de la ecuación KdV con un término no local.

La ecuación de Zakharov-Kuznetsov

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u + u \partial_x u = 0,$$

donde $u = u(x,y,t)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $t \in \mathbb{R}$ es un modelo matemático para describir la propagación de ondas ion-acústicas no lineales en un plasma magnetizado (véase [21]).

La ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^{-1} u + u \partial_x u = 0,$$

donde $u = u(x,t)$, con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, fue deducida en [18] como un modelo de ondas largas débilmente no lineales en un sistema de referencia en rotación, que describe la propagación de ondas superficiales en el océano.

El término no local $\partial_x^{-1}u$ de la ecuación de Ovstrosky con dispersión positiva se define como sigue.

Si $u \in \mathcal{S}'_{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ es tal que $\dfrac{\widehat{u}(\xi)}{i\xi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, definimos

$$\partial_x^{-1}u := \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{u}(\xi)}{i\xi}\Big) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

donde $\mathcal{F}^{-1}$ denota la transformada inversa de Fourier.

Puede probarse que si $u \in L^2(\mathbb{R})$ y $\dfrac{\widehat{u}(\xi)}{i\xi} \in L^2(\mathbb{R}_\xi)$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} u(x')dx' = 0$ (integral impropia) y $\partial_x^{-1}u$ tiene un representante continuo dado por

$$\partial_x^{-1}u(x) = \int_{-\infty}^{x} u(x')dx' = -\int_{x}^{\infty} u(x')dx'.$$

Con respecto a la ecuación de Zakharov-Kuznetsov, Panthee en [19] demostró, usando el método de Bourgain en [2], que si u es una solución suficientemente suave de esta ecuación y existe $B > 0$ tal que $supp\, u(\cdot_x, \cdot_y, t) \subset [-B,B] \times [-B,B]$ para todo t en un intervalo no trivial del tiempo, entonces u es idénticamente nula.

Usando la metodología del artículo de Kenig, Ponce y Vega [12] en este trabajo mejoramos esencialmente el resultado de Panthee. Más precisamente en el capítulo 1 probamos que si una solución suficientemente suave de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov tiene soporte espacial compacto en dos tiempos distintos entonces dicha solución es idénticamente nula (para una formulación precisa véase el enunciado del teorema 1 al comienzo del capítulo 1). Resultados relativos a la existencia, unicidad y regularidad de soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Zakharov-Kuznetsov pueden ser consultados en [6], [1], [16], [17] y [15]

Con respecto a la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva probamos en el capítulo 2 que si la diferencia de dos soluciones suficientemente suaves de esta ecuación decae espacialmente para $x > 0$ como $e^{-ax^{3/2}}$ para todo $a > 0$, en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ y decae espacialmente para $x > 0$ como $e^{-\beta x}$ para todo $\beta > 0$ en todos los tiempos intermedios entre 0 y 1, entonces dichas soluciones coinciden en $\mathbb{R} \times [0,1]$ (para una formulación precisa véase el enunciado del teorema 4 al comienzo del capítulo 2). Este resultado mejora un principio de continuación única anterior obtenido en [11] en el cual $u_2 = 0$ y en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ u_1 está soportada en un intervalo espacial de la forma $(-\infty, B]$. Resultados relativos a la existencia, unicidad y regularidad de soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva se encuentran en [8] y [9].

Es importante anotar que para la ecuación de Ostrovsky con dispersión negativa

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - \partial_x^{-1}u + u\partial_x u = 0,$$

(véase [10]), mediante estimaciones a priori sobre la ecuación, el decaimiento exponencial para $x > 0$ de la diferencia de dos soluciones $u_1(t) - u_2(t)$ para $t \in (0, 1]$ se sigue del decaimiento exponencial de esta diferencia en $t = 0$. En el caso de la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva debimos suponer como hipótesis este decaimiento exponencial para todo $t \in (0, 1)$.

La prueba del teorema 4 está basada en el artículo [4] y representa la parte central del trabajo. En la demostración se hace un gran esfuerzo para simplificar la presentación de los estimativos de tipo Carleman con condiciones de frontera no nulas sugeridos en [4] (véanse los comentarios después del enunciado del teorema 4 al inicio del capítulo 2 y la formulación del teorema 6 de la sección 2.1).

Terminamos esta introducción describiendo la estructura del trabajo. Esta tesis consta de dos capítulos organizados como sigue.

El capítulo 1, dedicado a la ecuación de Zakharov-Kuznetsov, está dividido en tres secciones. En la sección 1.1 se llevan a cabo estimaciones a priori sobre la ecuación que nos permiten concluir que las hipótesis de decaimiento exponencial en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ son heredadas por todos los tiempos intermedios. En la sección 1.2, mediante el uso de la transformada de Fourier espacial en las variables x y y, se establecen los estimativos de tipo Carleman y en la sección 1.3 se prueba el principio de continuación única para la ecuación.

El capítulo 2, dedicado a la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva, está dividido en tres secciones. La sección 2.1 está dedicada a los estimativos de tipo Carleman con condiciones de frontera no nulas y consta de dos subsecciones. En la subsección 2.1.1, con métodos elementales de transformada de Fourier en la variable espacial, se demuestra un estimativo en la norma $L_t^\infty L_x^2$ para una función y su antiderivada en espacios con peso exponencial. En la subsección 2.1.2 se realizan estimativos de tipo Carleman en la norma $L_x^\infty L_t^2$ para la primera y segunda derivadas espaciales de una función en espacios con pesos exponenciales. En la sección 2.2 se establece un estimativo inferior siguiendo las ideas del trabajo [4] y en la sección 2.3 se prueba el principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva.

Capítulo 1

Soporte de soluciones de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov

En este capítulo consideramos la ecuación de Zakharov-Kuznetsov. Esta ecuación es una generalización bidimensional de la ecuación KdV y constituye un modelo matemático para describir la propagación de ondas ion-acústicas no lineales en un plasma magnetizado (véase [21]).

Nuestro objetivo es probar que soluciones suficientemente suaves de esta ecuación que tienen soporte compacto en dos tiempos distintos son idénticamente nulas.

En forma precisa el resultado central de este capítulo se formula como sigue.

Teorema 1 *Sea* $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ *una solución de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov*

$$u'(t) + \partial_x^3 u(t) + \partial_x \partial_y^2 u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1], \tag{0.1}$$

tal que, para cierto $B > 0$,

$$supp\ u(0) \subseteq [-B,B] \times [-B,B] \ y\ supp\ u(1) \subseteq [-B,B] \times [-B,B].$$

Entonces $u \equiv 0$.

La prueba del teorema 1 utiliza un resultado previo de Panthee en [19], y sigue las ideas de Kenig, Ponce y Vega en [12]. En [19] Panthee demostró que si $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2))$ es una solución de (0.1) tal que para algún $B > 0$,

$$supp\, u(t) \subset [-B,B] \times [-B,B], \forall t \in [0,1],$$

entonces $u \equiv 0$.

En primer lugar demostramos que si las soluciones de la ecuación (0.1) tienen decaimiento exponencial para $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ en el tiempo $t = 0$, y decaimiento exponencial para $x < 0$ y $y \in \mathbb{R}$ en el tiempo $t = 1$, entonces estas soluciones tienen decaimiento exponencial cuando $|x| + |y| \to \infty$ en todos los tiempos $t \in [0,1]$. Este hecho permite utilizar un estimativo

Carleman de tipo $L^2 - L^2$, con el fin de establecer que para la función u del teorema 1 existe $B > 0$ tal que $supp\, u(t) \subset [-B, B] \times [-B, B]$ para todo $t \in [0, 1]$. De esta manera, por el resultado de Panthee, $u \equiv 0$.

En la sección 1.1, mediante estimaciones a priori llevadas a cabo sobre la ecuación (0.1), probamos el decaimiento exponencial de las soluciones cuando $|x| + |y| \to \infty$ para todo tiempo $t \in [0, 1]$.

En la sección 1.2 establecemos el estimativo Carleman de tipo $L^2 - L^2$ mencionado antes y, finalmente, en la sección 1.3 presentamos la demostración del teorema 1.

1.1 Estimativos a priori

Usando estimaciones a priori sobre la ecuación (0.1), en esta sección probamos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sea $u \in C([0, 1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, 1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ solución de (0.1) tal que para todo $\beta > 0$, $u(0) \in L^2(e^{2\beta x} e^{2\beta|y|} dxdy)$, y $u(1) \in L^2(e^{-2\beta x} e^{2\beta|y|} dxdy)$. Entonces u es una función acotada de $[0, 1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta|x|} e^{2\beta|y|} dxdy)$ para todo $\beta > 0$.*

En la prueba del teorema 2 requeriremos los lemas 1, 2 y 3.

El lema 1 es un resultado de interpolación que nos dice que si una función de $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 0$ tiene cierto decaimiento exponencial para $x > 0$, entonces las derivadas de orden s' de esta función con $s' \in (0, s)$ también presentan un decaimiento exponencial para $x > 0$. La prueba de este lema, que no haremos aquí, se lleva a cabo usando el teorema de las tres líneas. La formulación de este lema es como sigue.

Lema 1 *Para $s > 0$ y $\beta > 0$ sea $f \in H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(e^{2\beta x} dxdy)$. Entonces, para $\theta \in [0, 1]$, se tiene que*

$$\|J^{\theta s}(e^{(1-\theta)\beta x} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|J^s f\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|e^{\beta x} f\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.1}$$

donde $[J^s f]\widehat{\ }(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)$ y $C = C(s, \beta)$.

Similarmente, si $f \in H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(e^{2(\beta x + \beta y) dxdy})$. Entonces, para todo $\theta \in [0, 1]$, se sigue que

$$\|J^{\theta s}(e^{(1-\theta)(\beta x + \beta y)} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|J^s f\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|e^{\beta x + \beta y} f\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.2}$$

En este trabajo el lema 1 será aplicado en el caso cuando s es un entero positivo y el producto θs es un entero positivo menor que s. En este caso particular el lema 1 puede demostrarse de manera similar a como se demuestran los lemas 11 y 12 del capítulo 3.

El decaimiento exponencial que estableceremos en el teorema 2 se obtiene en dos pasos. En el primer paso (lema 2) establecemos el acotamiento de $u(t)$ en el espacio $H^3(e^{2\beta x} dxdy)$, y luego, usando este hecho, probamos en el lema 3 el acotamiento de $u(t)$ en el espacio $H^3(e^{2\beta x} e^{2\beta|y|} dxdy)$. Finalmente, el decaimiento de $u(t)$ afirmado en el teorema 2 se sigue de este último acotamiento y de las propiedades de simetría de la ecuación (0.1).

A continuación enunciamos y demostramos estos dos lemas y concluimos la sección con la prueba del teorema 2.

Lema 2 *Sea* $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ *solución de* (0.1) *tal que para todo* $\beta > 0$, $u(0) \in L^2(e^{2\beta x}dxdy)$. *Entonces* u *es una función acotada de* $[0,1]$ *con valores en* $H^3(e^{2\beta x}dxdy)$ *para todo* $\beta > 0$.

Prueba.
En primer lugar probemos que para todo $\beta > 0$, u es acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\beta x}dxdy)$.

Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función decreciente tal que $\varphi(x) = 1$ si $x < 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $x > 10$. Para $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\phi_n(x) := e^{2\beta\theta_n(x)},$$

donde $\theta_n(x) := \int_0^x \varphi(\frac{x'}{n})dx'$.

Entonces puede verse que, para cada n, ϕ_n es creciente, $\phi_n(x) = e^{2\beta x}$ si $x \leq n$, y $\phi_n(x) \equiv d_n \leq e^{20\beta n}$ si $x > 10n$. De otra parte, $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ para cada n y para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $C_{j,\beta} > 0$ tal que

$$|\phi_n^{(j)}(x)| \leq C_{j,\beta}\phi_n(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Al multiplicar la ecuación (0.1) por $u\phi_n(x)$ e integrar en $\mathbb{R}^2$ con respecto a las variables x y y obtenemos que

$$\int u'u\phi_n + \int (\partial_x^3 u)u\phi_n + \int (\partial_x\partial_y^2 u)u\phi_n + \int u(\partial_x u)u\phi_n = 0. \tag{1.3}$$

Puede probarse, en forma sencilla, que

$$\int u'u\phi_n = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2\phi_n. \tag{1.4}$$

Además, aplicando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\int (\partial_x^3 u)u\phi_n &= -\int (\partial_x^2 u)(\partial_x u)\phi_n - \int (\partial_x^2 u)u\phi_n' \\ &= -\int \partial_x(\frac{1}{2}(\partial_x u)^2)\phi_n + \int (\partial_x u)^2\phi_n' + \int (\partial_x u)u\phi_n'' \\ &= \frac{1}{2}\int (\partial_x u)^2\phi_n' + \int (\partial_x u)^2\phi_n' + \int \partial_x(\frac{1}{2}u^2)\phi_n'' = \frac{3}{2}\int (\partial_x u)^2\phi_n' - \frac{1}{2}\int u^2\phi_n'''.\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\int (\partial_x\partial_y^2 u)u\phi_n &= -\int (\partial_y^2 u)(\partial_x u)\phi_n - \int (\partial_y^2 u)u\phi_n' = \int (\partial_y u)(\partial_y\partial_x u)\phi_n + \int (\partial_y u)^2\phi_n' \\ &= \int \partial_x(\frac{1}{2}(\partial_y u)^2)\phi_n + \int (\partial_y u)^2\phi_n' = -\frac{1}{2}\int (\partial_y u)^2\phi_n' + \int (\partial_y u)^2\phi_n' \\ &= \frac{1}{2}\int (\partial_y u)^2\phi_n'.\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\int u(\partial_x u)u\phi_n = \int \partial_x(\frac{1}{3}u^3)\phi_n = -\frac{1}{3}\int u^3\phi_n'. \tag{1.7}$$

Luego, reemplazando (1.4) a (1.7) en (1.3), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2\phi_n + \frac{3}{2}\int(\partial_x u)^2\phi_n' - \frac{1}{2}\int u^2\phi_n''' + \frac{1}{2}\int(\partial_y u)^2\phi_n' - \frac{1}{3}\int u^3\phi_n' = 0,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int u^2\phi_n &= -3\int(\partial_x u)^2\phi_n' + \int u^2\phi_n''' - \int(\partial_y u)^2\phi_n' + \frac{2}{3}\int u^3\phi_n' \leq \int u^2\phi_n''' + \frac{2}{3}\int u^3\phi_n' \\ &\leq \int u^2 C_{3,\beta}\phi_n + \frac{2}{3}\int |u|u^2 C_{1,\beta}\phi_n \leq C_{3,\beta}\int u^2\phi_n + \frac{2}{3}C\|u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}\int u^2\phi_n.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\frac{d}{dt}\int u^2\phi_n \leq K\int u^2\phi_n,$$

donde

$$K := C_{3,\beta} + \frac{2}{3}C\|u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}.$$

Se sigue entonces que para $t \in [0,1]$

$$\int u(t)^2\phi_n \leq e^{Kt}\int u(0)^2\phi_n \leq e^K\int u(0)^2\phi_n.$$

Ahora, aplicando el teorema de la convergencia monótona, para $t \in [0,1]$ obtenemos que

$$\int u(t)^2 e^{2\beta x} \leq e^K\int u(0)^2 e^{2\beta x},$$

es decir,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(e^{2\beta x}dxdy)} \leq e^K\|u(0)\|^2_{L^2(e^{2\beta x}dxdy)} < \infty, \tag{1.8}$$

o sea, u es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\beta x}dxdy)$.

Como este acotamiento es válido para todo $\beta > 0$ y además $u \in C([0,1], H^4(\mathbb{R}^2))$, entonces aplicando la desigualdad (1.1) del lema 1 con $s = 4$ y $\theta = \frac{3}{4}$, concluimos que $t \mapsto u(t)$ es acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}dxdy)$, lo cual completa la prueba del lema. ■

Lema 3 *Sea $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$ una solución de (0.1). Si $u(0) \in L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, entonces u es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}e^{2\beta|y|}dxdy)$.*

Prueba. En un primer paso probaremos que u es acotada de $[0,1]$ en $L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta y}dxdy)$.

Como $u(0) \in L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta|y|}dxdy)$, entonces $u(0) \in L^2(e^{2\beta x}dxdy)$, y en consecuencia, por el lema 2, u es acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}dxdy)$ para todo $\beta > 0$.

Definamos $v(t) := e^{\beta x}u(t)$.

Como u es solución de (0.1), entonces se cumple que

$$e^{\beta x}u' - \beta^3 v + 3\beta^2\partial_x v - 3\beta\partial_x^2 v + \partial_x^3 v - \beta\partial_y^2 v + \partial_x\partial_y^2 v + u(-\beta v + \partial_x v) = 0,$$

y como $u(t) \in H^3(e^{2\beta x}dxdy)$ entonces todos los términos del lado izquierdo de la ecuación anterior se encuentran en el espacio $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Para $n \in \mathbb{N}$, definamos $\phi_n(y) := e^{2\beta\theta_n(y)}$, donde la función θ_n es la misma función definida en la prueba del lema 2.

Multipliquemos la ecuación anterior por $v\phi_n(y)$ e integremos en $\mathbb{R}^2$.

$$\int e^{\beta x}u'v\phi_n - \beta^3\int v^2\phi_n + 3\beta^2\int(\partial_x v)v\phi_n - 3\beta\int(\partial_x^2 v)v\phi_n + \int(\partial_x^3 v)v\phi_n - \beta\int(\partial_y^2 v)v\phi_n$$
$$+\int(\partial_x\partial_y^2 v)v\phi_n - \beta\int uv^2\phi_n + \int u(\partial_x v)v\phi_n = 0. \tag{1.9}$$

Probemos que la función $t \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\beta x}u(t)v(t)\phi_n(y)dxdy = \int v^2\phi_n$ es absolutamente continua en $[0,1]$ y que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int v^2\phi_n = \int e^{\beta x}u'v\phi_n \ c.t.p.\ t \in [0,1]. \tag{1.10}$$

En efecto, como $u \in C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}^2))$ y para $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ $\phi_k(\cdot_x)\phi_n(\cdot_y) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \phi_k(\cdot_x)\phi_n(\cdot_y)u(t)\rangle = 2\int u'(t)(x,y)\phi_k(x)\phi_n(y)u(t)(x,y)dxdy \quad \forall t \in [0,1].$$

Por lo tanto, del teorema fundamental del cálculo integral se sigue que

$$\int u(t)\phi_k(x)\phi_n(y)u(t) - \int u(0)\phi_k(x)\phi_n(y)u(0) = 2\int_0^t\Big(\int u'(\tau)\phi_k(x)\phi_n(y)u(\tau)dxdy\Big)d\tau.$$

Como u y u' están en $L^\infty([0,1];L^2(e^{2\beta x}dxdy))$ y ϕ_n es acotada, se sigue que $u(t)^2e^{2\beta x}\phi_n(\cdot_y)$ y $u(0)^2e^{2\beta x}\phi_n(\cdot_y)$ están en $L^1(\mathbb{R}^2)$ y $u'(\cdot_\tau)e^{2\beta x}\phi_n(\cdot_y)u(\cdot_\tau) \in L^1(\mathbb{R}^2\times[0,t])$, y por tanto una fácil aplicación del teorema de la convergencia dominada implica, cuando k tiende a ∞, que

$$\int u(t)e^{2\beta x}\phi_n(y)u(t) - \int u(0)e^{2\beta x}\phi_n(y)u(0) = 2\int_0^t\Big(\int u'(\tau)e^{2\beta x}\phi_n(y)u(\tau)dxdy\Big)d\tau,$$

de lo cual se sigue que $t \mapsto \int v(t)^2\phi_n$ es absolutamente continua en $[0,1]$ y que la igualdad (1.10) es válida *c.t.p.* en $[0,1]$.

Además, teniendo presente que en este procedimiento ϕ_n es una función de y, mediante integración por partes obtenemos

$$\int(\partial_x v)v\phi_n = 0, \tag{1.11}$$

$$\int(\partial_x^2 v)v\phi_n = -\int(\partial_x v)^2\phi_n, \tag{1.12}$$

$$\int(\partial_x^3 v)v\phi_n = 0, \tag{1.13}$$

$$\int (\partial_y^2 v) v \phi_n = -\int (\partial_y v)^2 \phi_n - \int (\partial_y v) v \phi_n' = -\int (\partial_y v)^2 \phi_n + \frac{1}{2}\int v^2 \phi_n'', \tag{1.14}$$

$$\int (\partial_x \partial_y^2 v) v \phi_n = -\int (\partial_x \partial_y v)(\partial_y v)\phi_n - \int (\partial_x \partial_y v) v \phi_n' = \int (\partial_y v)(\partial_x v)\phi_n', \tag{1.15}$$

$$\int u(\partial_x v) v \phi_n = -\frac{1}{2}\int v^2 (\partial_x u)\phi_n, \tag{1.16}$$

Entonces, reemplazando (1.10) a (1.16) en (1.9), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int v^2\phi_n - \beta^3\int v^2\phi_n + 3\beta\int (\partial_x v)^2\phi_n + \beta\int (\partial_y v)^2\phi_n - \frac{1}{2}\beta\int v^2\phi_n'' \\ + \int (\partial_y v)(\partial_x v)\phi_n' - \beta\int u v^2 \phi_n - \frac{1}{2}\int v^2(\partial_x u)\phi_n = 0,\ c.t.p.\ t\in[0,1],\end{aligned}$$

y como $|\phi_n'(y)| = |2\beta\theta_n'(y)\phi_n(y)| \le 2\beta\phi_n(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int v^2\phi_n \le& 2\beta^3\int v^2\phi_n - 2\beta\int ((\partial_x v)^2 - 2|\partial_x v||\partial_y v| + (\partial_y v)^2)\phi_n + \beta C_{2,\beta}\int v^2\phi_n \\ &+ 2\beta C\|u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}\int v^2\phi_n + C\|\partial_x u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}\int v^2\phi_n \\ \le& (2\beta^3 + \beta C_{2,\beta} + 2\beta C\|u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))} + C\|\partial_x u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))})\int v^2\phi_n \\ \le& K\int v^2\phi_n,\ c.t.p.\ t\in[0,1],\end{aligned}$$

donde

$$K := 2\beta^3 + \beta C_{2,\beta} + 2\beta C\|u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))} + C\|\partial_x u\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}.$$

De esta manera, usando el lema de Gronwall y el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int v(t)^2 e^{2\beta y} \le e^K \int v(0)^2 e^{2\beta y},$$

es decir

$$\int u(t)^2 e^{2\beta x} e^{2\beta y} \le e^K \int u(0)^2 e^{2\beta x} e^{2\beta y}.$$

Luego, para todo $t\in[0,1]$

$$\|u(t)\|^2_{L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta y}dxdy)} \le e^K \|u(0)\|^2_{L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta y}dxdy)} < \infty,$$

es decir, u es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta y}dxdy)$. Esto, junto con el hecho de que $u\in C([0,1];H^4(\mathbb{R}^2))$ y la desigualdad de interpolación (1.2) del lema 1, con $s=4$ y $\theta=\frac{3}{4}$, implican que u es acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}e^{2\beta y}dxdy)$, para todo $\beta>0$.

Finalmente, si definimos $\tilde{u}(x,y,t) := u(x,-y,t)$, entonces $\tilde{u}$ también es una solución de (0.1) con $\tilde{u}(0)\in L^2(e^{2\beta x}e^{2\beta|y|}dxdy)$ y por lo tanto $\tilde{u}$ es acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}e^{2\beta y})$

para todo $\beta > 0$, es decir, u es acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta x}e^{-2\beta y}dxdy)$; lo cual prueba el lema. ■

Prueba del teorema 2
Si tenemos en cuenta que la función definida por $(x,y,t) \mapsto u(-x,y,1-t)$ también es solución de (0.1) y satisface las hipótesis del lema 3, entonces el teorema 2 se sigue inmediatamente del lema 3.

1.2 Estimativo de tipo Carleman

Mediante técnicas sencillas de transformada de Fourier en las variables espaciales x y y en esta sección establecemos el siguiente estimativo de tipo Carleman.

Teorema 3 *Sea $w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$, tal que para todo $\beta > 0$*

(i) w es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$, y

(ii) $w' \in L^1([0,1]; L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy))$.

Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{\lambda x}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x\partial_y^2 w)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \tag{2.1}$$

y

$$\|e^{\lambda y}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda y}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda y}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda y}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x\partial_y^2 w)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}. \tag{2.2}$$

En la prueba del teorema 3 empleamos el lema 4, el cual justifica el cálculo formal de la derivada temporal de $\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi)$ y de $\widehat{e^{\lambda y}w(t)}(\xi)$.

Lema 4 *Sea $w \in C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$, tal que para todo $\beta > 0$, w es acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ y supongamos que $w' \in L^1([0,1]; L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy))$. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, las funciones $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi)$ y $t \mapsto \widehat{e^{\lambda y}w(t)}(\xi)$ son absolutamente continuas en $[0,1]$ con derivadas $\widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi)$ y $\widehat{e^{\lambda y}w'(t)}(\xi)$ c.t.p. $t \in [0,1]$, respectivamente.*

Prueba. En primer lugar, veamos que $e^{\lambda x}w(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$para todo $t \in [0,1]$ y todo $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |e^{\lambda x}w(t)(x,y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda|x|}e^{-\lambda|y|}e^{\lambda|x|}e^{\lambda x}e^{\lambda|y|}|w(t)(x,y)|dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda|x|}e^{-\lambda|y|}e^{2\lambda|x|}e^{\lambda|y|}|w(t)(x,y)|dxdy \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\lambda|x|}e^{-2\lambda|y|}dxdy\Big)^{1/2}\|w(t)\|_{L^2(e^{4\lambda|x|}e^{2\lambda|y|}dxdy)} \\
&= \frac{C}{\lambda}\|w(t)\|_{L^2(e^{4\lambda|x|}e^{2\lambda|y|}dxdy)} < \infty.
\end{aligned}$$

En forma análoga, puede verse que $e^{\lambda x}w' \in L^1(\mathbb{R}^2 \times [0,1])$ para todo $\lambda > 0$.

Ahora, si denotamos por χ_R a la función característica del cuadrado $[-R,R] \times [-R,R]$, entonces, para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ y $R > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w(t)(x,y) dxdy = \left\langle w(t), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{2.3}$$

y como $w \in C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$, entonces de la continuidad del producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene que

$$t \mapsto \left\langle w(t), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$$

con derivada

$$t \mapsto \left\langle w'(t), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \in C([0,1]; \mathbb{C}).$$

Luego

$$\begin{aligned} \left\langle w(t), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_0^t \left\langle w'(\tau), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &\quad + \left\langle w(0), e^{ix\xi_1} e^{iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Entonces, de (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w(t)(x,y) dxdy &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w'(\tau)(x,y) dxdyd\tau \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w(0)(x,y) dxdy. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Además,

$$|e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w(t)(x,y)| \leq |e^{\lambda x} w(t)(x,y)| \quad c.t.p. (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$|e^{-ix\xi_1} e^{-iy\xi_2} e^{\lambda x} \chi_R(x,y) w'(\tau)(x,y)| \leq |e^{\lambda x} w'(\tau)(x,y)| \quad c.t.p. (x,y,\tau) \in \mathbb{R}^2 \times [0,t].$$

Como $e^{\lambda x} w(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $t \in [0,1]$ y $e^{\lambda x} w' \in L^1(\mathbb{R}^2 \times [0,t])$, entonces, por el teorema de la convergencia dominada aplicado con $R \to \infty$, de (2.5) se sigue que

$$\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) = \int_0^t \widehat{e^{\lambda x} w'(\tau)}(\xi) d\tau + \widehat{e^{\lambda x} w(0)}(\xi).$$

Luego, $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi)$ es una función absolutamente continua para todo $\lambda > 0$ y

$$\frac{d}{dt} \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) = \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi), \ c.t.p. \ t \in [0,1].$$

Si $\lambda < 0$, la hipótesis $w' \in L^1([0,1]; L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy))$, para todo $\beta > 0$, hace que la demostración sea similar.

El resultado para $e^{\lambda y}w(t)$ se sigue con un procedimiento análogo al anterior. ■

Prueba del teorema 3

Por el lema 4, para $\xi \in \mathbb{R}^2$ fijo, la función $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi)$ es absolutamente continua en $[0,1]$ y $\frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi) = \widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi)$, *c.t.p.* $t \in [0,1]$.

Definamos $g(t) := e^{\lambda x}w(t)$ y $h(t) := e^{\lambda x}(w'(t) + \partial_x^3 w(t) + \partial_x\partial_y^2 w(t))$. Entonces, se cumple que

$$e^{\lambda x}w' - \lambda^3 g + 3\lambda^2\partial_x g - 3\lambda\partial_x^2 g + \partial_x^3 g - \lambda\partial_y^2 g + \partial_x\partial_y^2 g = h. \tag{2.6}$$

Como $w(t) \in H^3(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, y $t \in [0,1]$ y $w'(t) \in L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, *c.t.p.* $t \in [0,1]$, con un procedimiento similar al empleado en el lema 4, puede verse que $h(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, *c.t.p.* $t \in [0,1]$. Luego, tomando transformada de Fourier en las variables espaciales en la ecuación (2.6) y teniendo en cuenta el lema 4, se obtiene, *c.t.p.* $t \in [0,1]$, que

$$\begin{aligned}
\widehat{h(t)}(\xi) =& \widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2\widehat{\partial_x g(t)}(\xi) - 3\lambda\widehat{\partial_x^2 g(t)}(\xi) + \widehat{\partial_x^3 g(t)}(\xi) \\
&- \lambda\widehat{\partial_y^2 g(t)}(\xi) + \widehat{\partial_x\partial_y^2 g(t)}(\xi) \\
=& \widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi) - \lambda^3\widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2 i\xi_1\widehat{g(t)}(\xi) - 3\lambda(i\xi_1)^2\widehat{g(t)}(\xi) + (i\xi_1)^3\widehat{g(t)}(\xi) \\
&- \lambda(i\xi_2)^2\widehat{g(t)}(\xi) + (i\xi_1)(i\xi_2)^2\widehat{g(t)}(\xi) \\
=& \frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi) + [-im_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]\widehat{g(t)}(\xi),
\end{aligned}$$

donde

$$m_\lambda(\xi) := -3\lambda^2\xi_1 + \xi_1^3 + \xi_1\xi_2^2,$$

y

$$a_\lambda(\xi) := \lambda^3 - 3\lambda\xi_1^2 - \lambda\xi_2^2.$$

Así, *c.t.p.* $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widehat{g(t)}(\xi) + [-im_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]\widehat{g(t)}(\xi) =& \widehat{h(t)}(\xi), \\
\frac{d}{dt}(e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]t}\widehat{g(t)}(\xi)) =& e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]t}\widehat{h(t)}(\xi).
\end{aligned}$$

Como $t \mapsto e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]t}\widehat{g(t)}(\xi)$ es absolutamente continua en $[0,1]$ por ser el producto de funciones absolutamente continuas, entonces

- Si $a_\lambda(\xi) \leq 0$, escribimos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{g(\tau)}(\xi))d\tau &= \int_0^t e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau, \\
e^{-im_\lambda(\xi)t}e^{-a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) - \widehat{g(0)}(\xi) &= \int_0^t e^{-im_\lambda(\xi)\tau}e^{-a_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau,
\end{aligned}$$

$$\widehat{g(t)}(\xi) = e^{im_\lambda(\xi)t}e^{a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(0)}(\xi) + \int_0^t e^{im_\lambda(\xi)(t-\tau)}e^{a_\lambda(\xi)(t-\tau)}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau,$$

y por lo tanto,

$$|\widehat{g(t)}(\xi)| \leq |\widehat{g(0)}(\xi)| + \int_0^t |\widehat{h(\tau)}(\xi)|d\tau. \tag{2.7}$$

- Mientras que si $a_\lambda(\xi) \geq 0$, preferimos escribir

$$\int_t^1 \frac{d}{d\tau}(e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{g(\tau)}(\xi))d\tau = \int_t^1 e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau,$$

$$e^{-im_\lambda(\xi)}e^{-a_\lambda(\xi)}\widehat{g(1)}(\xi) - e^{-im_\lambda(\xi)t}e^{-a_\lambda(\xi)t}\widehat{g(t)}(\xi) = \int_t^1 e^{-im_\lambda(\xi)\tau}e^{-a_\lambda(\xi)\tau}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau,$$

$$\widehat{g(t)}(\xi) = e^{-im_\lambda(\xi)(1-t)}e^{-a_\lambda(\xi)(1-t)}\widehat{g(1)}(\xi) - \int_t^1 e^{-im_\lambda(\xi)(\tau-t)}e^{-a_\lambda(\xi)(\tau-t)}\widehat{h(\tau)}(\xi)d\tau,$$

y por lo tanto,

$$|\widehat{g(t)}(\xi)| \leq |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_t^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|d\tau. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) es claro entonces que, para cualquier valor de $a_\lambda(\xi)$,

$$|\widehat{g(t)}(\xi)| \leq |\widehat{g(0)}(\xi)| + |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|d\tau. \tag{2.9}$$

Luego, usando la desigualdad triangular en L^2 y la desigualdad integral de Minkowski se tiene que

$$\begin{aligned}\|\widehat{g(t)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq & \|\widehat{g(0)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\widehat{g(1)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \Big[\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)|d\tau\Big)^2 d\xi\Big]^{1/2} \\ \leq & \|\widehat{g(0)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\widehat{g(1)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{h(\tau)}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} d\tau.\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el teorema de Plancherel se tiene que

$$\|g\|_{L_t^\infty L_{xy}^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|h\|_{L_t^1 L_{xy}^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])},$$

de lo cual se sigue que

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])},$$

es decir,

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq & \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & + \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x\partial_y^2 w)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}.\end{aligned}$$

Definamos ahora $\overline{g}(t) := e^{\lambda y}w(t)$ y $\overline{h}(t) := e^{\lambda y}(w'(t) + \partial_x^3 w(t) + \partial_x\partial_y^2 w(t))$. Entonces, se cumple que

$$e^{\lambda y}w' + \partial_x^3\overline{g} + \lambda^2\partial_x\overline{g} - 2\lambda\partial_x\partial_y g + \partial_x\partial_y^2\overline{g} = \overline{h}. \tag{2.10}$$

Como $w(t) \in H^3(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$ y $t \in [0,1]$ y $w'(t) \in L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, *c.t.p.* $t \in [0,1]$, $\overline{h}(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *c.t.p.* $t \in [0,1]$. Luego, tomando transformada de Fourier en las variables espaciales, en la ecuación (2.10) y teniendo en cuenta el lema 4, se obtiene, *c.t.p.* $t \in [0,1]$, que:

$$\begin{aligned}\widehat{\overline{h}(t)}(\xi) =& \widehat{e^{\lambda y}w'(t)}(\xi) - i\xi_1^3\widehat{\overline{g}(t)}(\xi) + i\lambda^2\xi_1\widehat{\overline{g}(t)}(\xi) + 2\lambda\xi_1\xi_2\widehat{\overline{g}(t)}(\xi) - i\xi_1\xi_2^2\widehat{\overline{g}(t)}(\xi)\\ =& \frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda y}w(t)}(\xi) + [-i\overline{m}_\lambda(\xi) - \overline{a}_\lambda(\xi)]\widehat{g(t)}(\xi),\end{aligned}$$

donde

$$\overline{m}_\lambda(\xi) := \xi_1^3 - \lambda^2\xi_1 + \xi_1\xi_2^2,$$

y

$$\overline{a}_\lambda(\xi) := -2\lambda\xi_1\xi_2.$$

Entonces, siguiendo el mismo procedimiento que para $e^{\lambda x}w(t)$, se concluye que

$$\|e^{\lambda y}w\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda y}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda y}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|e^{\lambda y}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x\partial_y^2 w)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}.$$

1.3 Demostración del resultado principal (teorema 1)

Sea $\widetilde{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ no decreciente tal que $\widetilde{\phi}(x) = 0$ si $x < 0$ y $\widetilde{\phi}(x) = 1$ si $x > 1$ y sea $\phi(x) \equiv \phi_R(x) := \widetilde{\phi}(x - R)$ para $R > B$.

Definamos $w_1 \equiv w_{1R}$ y $w_2 \equiv w_{2R}$ por

$$w_1(t)(x,y) := \phi(x)u(t)(x,y), \ y \ w_2(t)(x,y) := \phi(y)u(t)(x,y),$$

para $t \in [0,1]$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Inicialmente verifiquemos que w_1 y w_2 satisfacen las hipótesis del teorema 3.

Como $u \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$, entonces $w_1, w_2 \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}^2))$. Además, como $u(0)$ y $u(1)$ tienen soporte compacto en $\mathbb{R}^2$, entonces u satisface las hipótesis del teorema 2 y en consecuencia, u es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $H^3(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, y por la definición de w_1 y w_2 lo mismo puede afirmarse para w_1 y w_2. De otra parte, utilizando la ecuación (0.1), concluimos que u' es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy)$ para todo $\beta > 0$, de lo cual se sigue fácilmente que $w_1', w_2' \in L^1([0,1]; L^2(e^{2\beta|x|}e^{2\beta|y|}dxdy))$. De esta manera, w_1 y w_2 satisfacen las hipótesis del teorema 3.

Aplicamos ahora el teorema 3 a w_1.

Puesto que $R > B$, $w_1(0) = 0$ y $w_1(1) = 0$, y así, utilizando el estimativo (2.1) del teorema 3 se tiene que

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x} w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq & \|e^{\lambda x}(w_1' + \partial_x^3 w_1 + \partial_x \partial_y^2 w_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \\ = & \|e^{\lambda x}(\phi u' + \phi \partial_x^3 u + \phi \partial_x \partial_y^2 u + \phi''' u + 3\phi'' \partial_x u \\ & \qquad + 3\phi' \partial_x^2 u + \phi' \partial_y^2 u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \\ \leq & \|e^{\lambda x} \phi u \partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} + \|e^{\lambda x} F_{1\phi,u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])},\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$F_{1\phi,u} := \phi''' u + 3\phi'' \partial_x u + 3\phi' \partial_x^2 u + \phi' \partial_y^2 u.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}|F_{1\phi,u}| \leq & 3(|\phi'''| + |\phi''| + |\phi'|)(|u| + |\partial_x u| + |\partial_x^2 u| + |\partial_y^2 u|) \\ \leq & C\chi_{[R,R+1]}(x)(|u| + |\partial_x u| + |\partial_x^2 u| + |\partial_y^2 u|).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x} F_{1\phi,u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq & C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_R^{R+1} e^{2\lambda x}(|u| + |\partial_x u| + |\partial_x^2 u| + |\partial_y^2 u|)^2 dxdydt \\ \leq & Ce^{2\lambda(R+1)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_R^{R+1} (|u| + |\partial_x u| + |\partial_x^2 u| + |\partial_y^2 u|)^2 dxdydt \\ \leq & Ce^{2\lambda(R+1)} \|u\|^2_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}^2))}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\|e^{\lambda x} F_{1\phi,u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq Ce^{\lambda(R+1)} \tag{3.2}$$

donde C no depende ni de λ ni de R.

Estimemos ahora $\|e^{\lambda x} \phi u \partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}$.

Como del lema 2 $e^x \partial_x u \in L^\infty([0,1]; H^2(\mathbb{R}^2))$ y $H^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$ y todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|e^x \partial_x u(t)(x,y)| \leq C_1.$$

Por lo tanto, teniendo presente que $\phi = 0$ en $(-\infty, R]$ observamos que

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x} \phi u \partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq & C\|e^{\lambda x} \phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \|\partial_x u\|_{L^\infty([R,\infty)\times[0,1])} \\ \leq & C_1 e^{-R} \|e^{\lambda x} \phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces, de (3.1) a (3.3) se sigue que

$$\|e^{\lambda x} w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq C_1 e^{-R} \|e^{\lambda x} \phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} + Ce^{\lambda(R+1)}. \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta que u es una función acotada de $[0,1]$ con valores en $L^2(e^{2\lambda x} dxdy)$, entonces $\|e^{\lambda x} \phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} < \infty$. Si tomamos $R > B$ tal que $C_1 e^{-R} < \dfrac{1}{2}$ entonces, el primer

término del lado derecho de (3.4) puede ser absorbido por el lado izquierdo de (3.4) y por lo tanto

$$\|e^{\lambda x}w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq 2Ce^{\lambda(R+1)}. \tag{3.5}$$

Además,

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}\phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} =&\Big(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda x}|\phi(x)u(t)(x,y)|^2 dxdydt\Big)^{1/2}\\ \geq&\Big(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{2R}^{\infty} e^{2\lambda x}|\phi(x)u(t)(x,y)|^2 dxdydt\Big)^{1/2}\\ \geq& e^{2\lambda R}\Big(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{2R}^{\infty} |u(t)(x,y)|^2 dxdydt\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Luego, de (3.5) y (3.6) tenemos que

$$e^{2\lambda R}\Big(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{2R}^{\infty} |u(t)(x,y)|^2 dxdydt\Big)^{1/2} \leq \|e^{\lambda x}\phi u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq 2Ce^{\lambda(R+1)}.$$

Entonces, como $2R > R+1$, tomando $\lambda \to \infty$, concluimos que

$$\Big(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \int_{2R}^{\infty} |u(t)(x,y)|^2 dxdydt\Big)^{1/2} = 0.$$

Por lo tanto, $u \equiv 0$ en $[2R,\infty)\times\mathbb{R}\times[0,1]$.

Razonando ahora en forma similar con w_2 se concluye que $u \equiv 0$ en $\mathbb{R}\times[2R,\infty)\times[0,1]$.

Nuevamente por el teorema 3 y teniendo en cuenta que $w_2(0) = 0$ y $w_2(1) = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda y}w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} \leq&\|e^{\lambda y}(w_2' + \partial_x^3 w_2 + \partial_x\partial_y^2 w_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}\\ =&\|e^{\lambda y}\phi u' + \phi\partial_x^3 u + \phi\partial_x\partial_y^2 u + 2\phi'\partial_x\partial_y u + \phi''\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])}\\ \leq&\|e^{\lambda y}\phi u\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])} + \|e^{\lambda y}F_{2\phi,u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2\times[0,1])},\end{aligned}$$

donde

$$F_{2\phi,u} := 2\phi'\partial_x\partial_y u + \phi''\partial_x u.$$

Además

$$\begin{aligned}|F_{2\phi,u}| \leq&2|\phi'||\partial_x\partial_y u| + 2|\phi''||\partial_x u|\\ \leq&2(|\phi'| + |\phi''|)(|\partial_x\partial_y u| + |\partial_x u|) \leq C\chi_{[R,R+1]}(y)(|\partial_x\partial_y u| + |\partial_x u|).\end{aligned}$$

El resto del razonamiento para concluir que $u \equiv 0$ en $\mathbb{R}\times[2R,\infty)\times[0,1]$ es el mismo empleado con w_1 para obtener que $u \equiv 0$ en $[2R,\infty)\times\mathbb{R}\times[0,1]$.

Finalmente, si se considera $\widetilde{u}(\cdot_x,\cdot_y,\cdot_t) := u(\cdot_{-x},\cdot_{-y},\cdot_{1-t})$, entonces $\widetilde{u}$ cumple las hipótesis del teorema 2, por lo tanto, $\widetilde{u} \equiv 0$ en $[2R,\infty)\times\mathbb{R}\times[0,1]$ y en $\mathbb{R}\times[2R,\infty)\times[0,1]$; es decir, $u \equiv 0$ en $(-\infty,-2R]\times\mathbb{R}\times[0,1]$ y en $\mathbb{R}\times(-\infty,-2R]\times[0,1]$.

Se ha probado entonces que *supp* $u(t) \subseteq [-2R,2R]\times[-2R,2R]$, para todo $t \in [0,1]$. Luego, por el resultado de Panthee, se sigue que $u \equiv 0$.

Capítulo 2

Principio de continuación única para la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva

En el presente capítulo consideramos dos soluciones u_1 y u_2 suficientemente suaves con decaimiento polinomial en la variable espacial de la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva. Probamos que si para todo $a > 0$ la diferencia de estas soluciones tiene decaimiento exponencial para $x > 0$ del orden de $e^{-ax^{3/2}}$, en dos tiempos diferentes y, adicionalmente, esta diferencia decae como e^{-ax}, uniformemente en t, para todos los tiempos intermedios, entonces dichas soluciones son iguales.

Esta condición adicional es necesaria porque no se cuenta con estimaciones a priori sobre la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva que permitan demostrar que el decaimiento exponencial en dos tiempos diferentes implica el decaimiento exponencial en todos los tiempos intermedios, fundamental para los métodos utilizados en la prueba.

En forma precisa el resultado central de este capítulo se formula como sigue.

Teorema 4 *Sean $u_1, u_2 \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}) \cap L^2((1+x_+^2)^{2\alpha}dx)) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ para algún $\alpha > 1$, tales que $\partial_x^{-1}u_1(t)$, $\partial_x^{-1}u_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0,1]$. Si u_1, u_2 son soluciones de la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva*

$$u'(t) + \partial_x^3 u(t) + \partial_x^{-1}u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0, \ \forall t \in [0,1], \tag{0.1}$$

y además se cumple que

(i) $u_1(0) - u_2(0),\ u_1(1) - u_2(1) \in L^2(e^{ax_+^{3/2}}dx)$, *para todo* $a > 0$;

(ii) para todo $\beta > 0$, $e^{\beta x}(u_1 - u_2)$ *es una función acotada del intervalo* $[0,1]$ *en* $L^2(\mathbb{R})$,

entonces $u_1 \equiv u_2$.

La demostración del teorema 4 resulta de confrontar un estimativo de tipo Carleman con un estimativo inferior. Ambos tipos de estimativos expresan propiedades de continuidad del operador inverso de la parte lineal de la ecuación en espacios de tipo $L_x^p L_t^q$ y $L_t^p L_x^q$ con pesos

exponenciales.

En la sección 2.1 nos ocupamos del estimativo tipo Carleman. Este estimativo está inspirado en los artículos de Kenig, Ponce y Vega [13] y de Escauriaza, Kenig, Ponce y Vega [4]. En algunos pasajes hemos simplificado la prueba presentada en estos artículos. En efecto, los espacios L^pL^q que hemos utilizado se han mantenido con índices p y q más sencillos y hemos aplicado sólo métodos elementales de transformada de Fourier que evitan el uso de herramientas como desigualdades de tipo Strichartz y descomposiciones de Littlewood-Paley.

En la sección 2.2 probamos un estimativo inferior que permite encontrar cotas inferiores para la norma en H^3 de la antiderivada espacial de la diferencia $u_1 - u_2$ en un rectángulo de la forma $[R-1, R]\times[0,1]$ para R suficientemente grande. Esta prueba sigue las líneas del trabajo de Isakov [7] y de la referencia [4].

Finalmente, en la sección 2.3, se lleva a cabo la prueba del teorema 4.

2.1 Estimativos de tipo Carleman

En esta sección descomponemos el estimativo tipo Carleman en dos teoremas. En el teorema 5 se demuestra en forma simple un estimativo para una función w y otro para su antiderivada $\partial_x^{-1}w$ en espacios de tipo $L_t^\infty L_x^2$ con peso exponencial de exponente lineal. En el teorema 6 se establecen estimativos para $\partial_x w$ y $\partial_x^2 w$ en espacios de tipo $L_x^\infty L_t^2$ con el mismo peso exponencial.

Formulamos estos teoremas a continuación y daremos su demostración en las subsecciones 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente.

Teorema 5 *Sean $D := \mathbb{R}\times[0,1]$ y $w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ tal que para algún $M > 0$,*

$$supp\, w(t) \subset [-M, M] \ \text{ y } \int_{-M}^{M} w(t)(x)dx = 0, \ \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{1.1}$$

Entonces, para todo $\lambda > 2$,

$$\|e^{\lambda x}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} \le \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L_t^1 L_x^2(D)}, \tag{1.2}$$

y

$$\|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} \le \frac{1}{\lambda}\Big(\|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L_t^1 L_x^2(D)}\Big). \tag{1.3}$$

Notemos que las hipótesis sobre w garantizan que, para $t \in [0,1]$, $\partial_x^{-1}w(t)$ es una función continua dada por

$$\partial_x^{-1}w(t)(x) = \int_{-\infty}^{x} w(t)(x')dx' = -\int_{x}^{\infty} w(t)(x')dx', \ \text{para } x \in \mathbb{R},$$

tal que $supp\, \partial_x^{-1}w(t) \subset [-M, M]$.

Teorema 6 *Sean $D := \mathbb{R} \times [0,1]$ y $w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ tal que para algún $M > 0$,*

$$supp\, w(t) \subset [-M, M] \text{ y } \int_{-M}^{M} w(t)(x)dx = 0, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Entonces, existe $C > 0$, independiente de w y de M, tal que para todo $\lambda > 2$,

$$\begin{aligned} \|e^{\lambda x}\partial_x w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} \leq & C\lambda^2(\|e^{\lambda x}w(0)\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L_x^2(\mathbb{R})}) \\ & + C\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)\|_{L_x^1 L_t^2(D)}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} \leq & C\lambda^2(\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \|J(e^{\lambda x}w(1))\|_{L_x^2(\mathbb{R})}) \\ & + C\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)\|_{L_x^1 L_t^2(D)}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $Jg(x) = ((1+\xi^2)^{1/2}\widehat{g})^\vee$.

Observemos que las hipótesis sobre w permiten ver que $e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)$ se puede identificar con una función $h \in L^2(D)$ con $supp\, h \subset [-M, M] \times [0,1]$; es decir, ambos objetos con extensiones adecuadas a $\mathbb{R}^2$ inducen la misma distribución temperada en $\mathbb{R}^2$. Lo anterior garantiza la buena definición de la norma $L_x^1 L_t^2(D)$ del lado derecho de (1.4) y (1.5).

2.1.1 Estimativo tipo Carleman para la función y la antiderivada (prueba del teorema 5)

La prueba del teorema 5 que presentamos aquí hace uso solamente de la transformada de Fourier en la variable espacial y es particularmente simple; sin embargo, este teorema también se puede demostrar empleando un método similar al empleado en la prueba del teorema 6.

El siguiente lema justifica el cálculo formal de la derivada temporal de $\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi)$ empleado en la prueba del teorema 5.

Lema 5 *Sea $w \in C^1([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ y supongamos que existe $R > 0$ tal que $supp\, w(t) \subset [-R, R]$ para todo $t \in [0,1]$, entonces, para todo $\lambda > 0$ y todo $\xi \in \mathbb{R}$, la función $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi)$ es una función de clase $C^1([0,1])$ con derivada $\widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi)$ para todo $t \in [0,1]$.*

Prueba. Como $supp\, w(t) \subset [-R, R]$ para todo $t \in [0,1]$, entonces $e^{\lambda x}w(t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,1]$ y todo $\lambda > 0$. Luego, para todo $\xi \in \mathbb{R}$, la función de la variable t dada por

$$\widehat{e^{\lambda x}w(t)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{\lambda x}w(t)(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle w(t), e^{ix\xi}e^{\lambda x}\chi_{[-R,R](\cdot_x)}\rangle,$$

es de clase C^1 en el intervalo $[0,1]$ y su derivada es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle w'(t), e^{ix\xi}e^{\lambda x}\chi_{[-R,R](\cdot_x)}\rangle = \widehat{e^{\lambda x}w'(t)}(\xi),$$

pues $w'(t)$ también está soportada en $[-R, R]$ para todo $t \in [0,1]$. ■

Prueba del Teorema 5

Por el lema 5, para $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, la función $t \mapsto \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi)$ es de clase C^1 y $\frac{d}{dt}\widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) = \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi)$, para todo $t \in [0,1]$.

Definamos, para $t \in [0,1]$, $g(t) := e^{\lambda x} w(t)$ y $h(t) := e^{\lambda x}[w'(t) + \partial_x^3 w(t) + \partial_x^{-1} w(t)]$. Entonces se cumple que

$$h = e^{\lambda x} w' - \lambda^3 g + 3\lambda^2 \partial_x g - 3\lambda \partial_x^2 g + \partial_x^3 g + e^{\lambda x} \partial_x^{-1}(e^{-\lambda x} g). \tag{1.6}$$

Observemos que

$$e^{\lambda x} \partial_x^{-1}(e^{-\lambda x} g(t))(x) = -e^{\lambda x} \int_x^\infty e^{-\lambda x'} g(t)(x') dx' = [E_\lambda * g(t)](x), \tag{1.7}$$

donde $E_\lambda(y) := -e^{\lambda y} \chi_{(-\infty,0]}(y)$.

Notemos que, de las hipótesis de regularidad de w, de (1.1) y del hecho de que $E_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ se sigue que todos los términos del lado derecho de (1.6) están en $L^1(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,1]$.

Tomando transformada de Fourier en la variable espacial en la ecuación (1.6) se obtiene, para todo $t \in [0,1]$ y todo $\xi \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned}
\widehat{h(t)}(\xi) &= \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi) - \lambda^3 \widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2 \widehat{\partial_x g(t)}(\xi) - 3\lambda \widehat{\partial_x^2 g(t)}(\xi) + \widehat{\partial_x^3 g(t)}(\xi) + \widehat{E_\lambda * g(t)}(\xi) \\
&= \widehat{e^{\lambda x} w'(t)}(\xi) - \lambda^3 \widehat{g(t)}(\xi) + 3\lambda^2 i\xi \widehat{g(t)}(\xi) - 3\lambda (i\xi)^2 \widehat{g(t)}(\xi) + (i\xi)^3 \widehat{g(t)}(\xi) \\
&\quad + \sqrt{2\pi} \widehat{E_\lambda}(\xi) \widehat{g(t)}(\xi).
\end{aligned}$$

Y como

$$\widehat{E_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\xi - \lambda} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda + i\xi}{\lambda^2 + \xi^2} \tag{1.8}$$

entonces, teniendo en cuenta el lema 5, podemos escribir

$$\widehat{h(t)}(\xi) = \frac{d}{dt} \widehat{e^{\lambda x} w(t)}(\xi) + [-i m_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)] \widehat{g(t)}(\xi),$$

donde

$$m_\lambda(\xi) := -3\lambda^2 \xi + \xi^3 + \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2},$$

y

$$a_\lambda(\xi) := \lambda^3 - 3\lambda \xi^2 + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}.$$

Así, para todo $t \in [0,1]$,

$$\frac{d}{dt} \widehat{g(t)}(\xi) + [-i m_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)] \widehat{g(t)}(\xi) = \widehat{h(t)}(\xi),$$

$$\frac{d}{dt}(e^{[-i m_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]t} \widehat{g(t)}(\xi)) = e^{[-i m_\lambda(\xi) - a_\lambda(\xi)]t} \widehat{h(t)}(\xi).$$

Como $t \mapsto e^{[-im_\lambda(\xi)-a_\lambda(\xi)]t}\widehat{g(t)}(\xi)$ es una función de clase C^1 en $[0,1]$, entonces procediendo de manera similar a como se hizo para obtener (2.9) en la demostración del teorema 3 del capítulo 1, concluimos que

$$|\widehat{g(t)}(\xi)| \leq |\widehat{g(0)}(\xi)| + |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)| d\tau, \tag{1.9}$$

de donde fácilmente se sigue que

$$\|g\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} \leq \|g(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h\|_{L_t^1 L_x^2(D)},$$

lo cual prueba (1.2).

De otra parte, de (1.7) y (1.8) se sigue que

$$[e^{\lambda x}\partial_x^{-1} w(t)]^{\wedge_x}(\xi) = \frac{\widehat{g(t)}(\xi)}{-\lambda + i\xi}.$$

Por lo tanto, de (1.9) obtenemos que

$$\begin{aligned} |[e^{\lambda x}\partial_x^{-1} w(t)]^{\wedge_x}(\xi)| &\leq \frac{1}{|-\lambda + i\xi|}\left(|\widehat{g(0)}(\xi)| + |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)| d\tau\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(|\widehat{g(0)}(\xi)| + |\widehat{g(1)}(\xi)| + \int_0^1 |\widehat{h(\tau)}(\xi)| d\tau\right), \end{aligned}$$

y esto implica que

$$\|e^{\lambda x}\partial_x^{-1} w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} \leq \frac{1}{\lambda}\Big(\|e^{\lambda x} w(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x} w(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)\|_{L_t^1 L_x^2(D)}\Big),$$

con lo cual también queda probado (1.3).

2.1.2 Estimativo tipo Carleman para la primera y la segunda derivadas (prueba del teorema 6)

La prueba del teorema 6 está basada en varios lemas previos. Los lemas 6, 8 y 9 expresan propiedades de acotamiento de los operadores T_0, $(\partial_x - \lambda)T_0$, y $(\partial_x - \lambda)^2 T_0$, respectivamente, donde T_0 es el operador inverso de $g \mapsto e^{\lambda x}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x^{-1})e^{-\lambda x} g$, y está definido por el multiplicador

$$m_0(\xi, \tau) := \frac{1}{i\tau + (i\xi - \lambda)^3 + \dfrac{1}{i\xi - \lambda}}.$$

El lema 7 es un lema técnico y estudia propiedades de las raíces del denominador del multiplicador m_0 que nos permiten acotar los coeficientes de las descomposiciones en fracciones parciales llevadas a cabo en las pruebas de los lemas 8 y 9.

De otra parte, en el lema 10 probamos una versión de un resultado presentado por Coifman y Meyer en [3] (página 26). Este resultado muestra que cierto operador pseudodiferencial es acotado de L^2 en L^2 y su prueba se basa en las propiedades del operador maximal asociado a la transformada inversa de Fourier dadas en el trabajo de Kenig y Tomas [14]. El lema 10 es un sustituto del teorema de Plancherel en la demostración de un efecto regularizante local que aparece en la prueba del teorema 6 para establecer los estimativos (1.69) y (1.83).

Lema 6 *Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|h\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)} < \infty$. Si definimos*

$$m_0(\xi,\tau) := \frac{1}{i\tau + (i\xi-\lambda)^3 + \dfrac{1}{i\xi-\lambda}} = \frac{-i}{\tau + a(\xi) + ib(\xi)},$$

donde

$$a(\xi) := 3\lambda^2\xi - \xi^3 - \frac{\xi}{\lambda^2+\xi^2}, \qquad b(\xi) := \lambda^3 - 3\lambda\xi^2 + \frac{\lambda}{\lambda^2+\xi^2},$$

entonces, para todo $\lambda > 0$, $m_0\widehat{h} \in S'(\mathbb{R}^2)$ y es tal que $[m_0\widehat{h}]^\vee = [m_0\widehat{h}]^{\vee_\tau\vee_\xi}$ y define una función acotada de $\mathbb{R}_t$ con valores en $L^2_x(\mathbb{R})$ y

$$\|[m_0\widehat{h}]^\vee(\cdot_x,t)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^2)} \le \|h\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $\widehat{\ }$ y $^\vee$ denotan, respectivamente, la transformada de Fourier y su inversa en $S'(\mathbb{R}^2)$.

Prueba.
Probaremos inicialmente que $[m_0\widehat{h}]^{\vee_\tau\vee_\xi} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbb{R}^2)$ con $\|[m_0\widehat{h}]^{\vee_\tau\vee_\xi}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbb{R}^2)} \le \|h\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)}$.

En primer lugar, observemos que como $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces, para ξ fijo,

$$\widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^x(\xi) \in L^1(\mathbb{R}_t) \text{ y } \widehat{h}(\xi,\tau) = [\widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^x(\xi)]\widehat{\ }^t(\tau). \tag{1.10}$$

Para ξ fijo, con $b(\xi) \neq 0$, y $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$[m_0(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, e^{-ita(\xi)}e^{tb(\xi)}\chi_{(0,+\infty)}(t) & \text{si } b(\xi) < 0 \\ -\sqrt{2\pi}\, e^{-ita(\xi)}e^{tb(\xi)}\chi_{(-\infty,0)}(t) & \text{si } b(\xi) > 0 \end{cases}.$$

De lo anterior, es claro que, $[m_0(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(\cdot\, t) \in L^1(\mathbb{R}_t) \cap L^\infty(\mathbb{R}_t)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $b(\xi) \neq 0$.

Entonces, usando (1.10), para ξ fijo, con $b(\xi) \neq 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} [m_0(\xi,\cdot_\tau)\widehat{h}(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[[m_0(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau} *_t \widehat{h(\cdot_x,\cdot_t)}^x(\xi)\Big](t) \\ &= \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}_s} e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)}\widehat{h(\cdot_x,s)}^x(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s)ds & \text{si } b(\xi) < 0 \\ -\int\limits_{\mathbb{R}_s} e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)}\widehat{h(\cdot_x,s)}^x(\xi)\chi_{(-\infty,0)}(t-s)ds & \text{si } b(\xi) > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

De la expresión anterior podemos observar que, para todo ξ con $b(\xi) \neq 0$, se tiene que,

$$|[m_0(\xi,\cdot_\tau)\widehat{h}(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(t)| \le \int\limits_{\mathbb{R}_s} |\widehat{h(\cdot_x,s)}^x(\xi)|ds.$$

Entonces, teniendo en cuenta que dado $\lambda > 0$, $\{\xi \in \mathbb{R} : b(\xi) = 0\}$ es un conjunto finito, se sigue, aplicando el teorema de Plancherel y la desigualdad integral de Minkowski, que,

$$\|[m_0\widehat{h}]^{\vee_\tau\vee_\xi}(\cdot_x, t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} = \|[m_0(\cdot_\xi, \cdot_\tau)\widehat{h}(\xi, \cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(t)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \leq \|\int_{\mathbb{R}_s} |\widehat{h(\cdot_x, s)}^x(\xi)|ds\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_s} \|\widehat{h(\cdot_x, s)}^x\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}ds = \int_{\mathbb{R}_s} \|h(\cdot_x, s)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}ds = \|h\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Finalmente, para ver que $[m_0\widehat{h}]^\vee = [m_0\widehat{h}]^{\vee_\tau\vee_\xi} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^2)$ se usan funciones de prueba y las propiedades de h. ■

Lema 7 *Existe $\delta > 0$ tal que si $\tau > 0$ con $|\tau - \frac{4}{3^{3/4}}| \geq 1$ y si $r \in \mathbb{C}$ con $r(1 - r^3) = \frac{1}{\tau^{4/3}}$, entonces $|r^3 - \frac{1}{4}| \geq \delta$.*

Prueba. Equivalentemente, probemos que existe $\delta > 0$ tal que si $|r^3 - \frac{1}{4}| < \delta$ y $r(1 - r^3) = \frac{1}{\tau^{4/3}}$, entonces $|\tau - \frac{4}{3^{3/4}}| < 1$.

Sea $\sqrt[3]{\cdot}$ la rama de la función multivaluada compleja raíz cúbica definida en el disco V de centro $\frac{1}{4}$ y radio $\frac{1}{4}$ tal que en $V \cap \mathbb{R}$ coincide con la función de variable real raíz cúbica.

Por la continuidad de $\sqrt[3]{z}(1 - z)$ en $z = \frac{1}{4}$; dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ ($\delta < \frac{1}{4}$) tal que si $|z - \frac{1}{4}| < \delta$ entonces,

$$|\sqrt[3]{z}(1 - z) - \frac{3}{4^{4/3}}| < \eta. \tag{1.12}$$

Veamos que si $|r^3 - \frac{1}{4}| < \delta$ y $r(1 - r^3) = \frac{1}{\tau^{4/3}} > 0$ entonces,

$$|\frac{1}{\tau^{4/3}} - \frac{3}{4^{4/3}}| < \eta. \tag{1.13}$$

En realidad, como el argumento principal de $1-r^3$, $Arg(1-r^3)$, está cerca de cero y $Arg(r(1-r^3)) = 0$, necesariamente r es una raíz cúbica de r^3 tal que $Arg(r)$ está cerca de cero, o sea que $r = \sqrt[3]{r^3}$ y por lo tanto, de (1.12) se sigue que,

$$|\frac{1}{\tau^{4/3}} - \frac{3}{4^{4/3}}| = |\sqrt[3]{r^3}(1 - r^3) - \frac{3}{4^{4/3}}| < \eta.$$

De otra parte, por la continuidad de la función real $\frac{1}{y^{3/4}}$ en $y_0 = \frac{3}{4^{4/3}}$, existe $\eta > 0$ tal que si $|y - \frac{3}{4^{4/3}}| < \eta$ entonces,

$$|\frac{1}{y^{3/4}} - \frac{4}{3^{3/4}}| < 1. \tag{1.14}$$

De (1.13) y (1.14) podemos concluir entonces que existe $\delta > 0$ tal que si $r \in \mathbb{C}$ cumple que $|r^3 - \frac{1}{4}| < \delta$ y $r(1-r^3) = \frac{1}{\tau^{4/3}} > 0$, entonces $|\tau - \frac{4}{3^{3/4}}| < 1$. ■

Observación: con un procedimiento similar también puede probarse el resultado del lema 7 para $\tau < 0$ y $|\tau + \frac{4}{3^{3/4}}| \geq 1$.

Lema 8 *Sean $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} < \infty$ y*

$$m_1(\xi,\tau) := \frac{i\xi - \lambda}{i\tau + (i\xi-\lambda)^3 + \dfrac{1}{i\xi-\lambda}} = \frac{(\xi + i\lambda)}{\tau + a(\xi) + ib(\xi)}.$$

donde $a(\cdot_\xi)$ y $b(\cdot_\xi)$ se definen como en el lema 6.
Entonces, $m_1\widehat{h} \in S'(\mathbb{R}^2)$ y es tal que $[m_1\widehat{h}]^\vee = [m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi \vee_\tau} \in L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)$ y existe $C > 0$, independiente de h y de $\lambda > 2$, tal que

$$\|[m_1\widehat{h}]^\vee\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)}.$$

Prueba.
Probaremos inicialmente que $\|[m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi \vee_\tau}\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)}$.
Observemos que

$$m_1(\xi,\tau) := -\frac{(\xi+i\lambda)^2}{(\xi+i\lambda)^4 - \tau(\xi+i\lambda) + 1}. \tag{1.15}$$

Definamos, para $\tau \neq 0$,

$$v := \frac{\xi + i\lambda}{\tau^{1/3}}. \tag{1.16}$$

Entonces, tenemos que

$$m_1(\xi,\tau) = -\frac{v^2}{\tau^{2/3}(v^4 - v + \frac{1}{\tau^{4/3}})}. \tag{1.17}$$

Fácilmente puede comprobarse que el polinomio $p(v) := v^4 - v + \frac{1}{\tau^{4/3}}$ sólo tiene raíces repetidas en el caso $|\tau| = 4 \times 3^{-3/4}$. Por lo tanto, si suponemos que $\tau \neq 0$ y $|\tau| \neq 4 \times 3^{-3/4}$, podemos emplear fracciones parciales en (1.17), para obtener

$$m_1(\xi,\tau) = -\frac{1}{\tau^{2/3}} \sum_{j=1}^{4} \frac{A_j(\tau)}{v - r_j(\tau)}, \tag{1.18}$$

donde,

$$A_j(\tau) = \lim_{v \to r_j(\tau)} \frac{(v - r_j(\tau))v^2}{v^4 - v + \dfrac{1}{\tau^{4/3}}}.$$

Usando la regla de L'Hopital para calcular este límite se tiene que

$$A_j(\tau) = \frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3 - 1}, \ j = 1,2,3,4. \tag{1.19}$$

Entonces, de (1.18) y (1.19) podemos escribir,

$$m_1(\xi,\tau) = -\frac{1}{\tau^{2/3}}\sum_{j=1}^{4}\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}\cdot\frac{1}{v-r_j(\tau)},\ \tau\neq 0\ y\ |\tau|\neq 4\times 3^{-3/4}.$$

Y si tenemos presente (1.16), entonces, para $\tau\neq 0$ y $|\tau|\neq 4\times 3^{-3/4}$,

$$\begin{aligned} m_1(\xi,\tau) &= -\frac{1}{\tau^{2/3}}\sum_{j=1}^{4}\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}\cdot\frac{1}{\frac{\xi+i\lambda}{\tau^{1/3}}-r_j(\tau)} \\ &= -\frac{1}{\tau^{1/3}}\sum_{j=1}^{4}\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}\cdot\frac{1}{\xi-\tau^{1/3}Re[r_j(\tau)]-i[\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda]}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Puede probarse que para $\lambda>0$ el conjunto $\{\tau:\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda=0,\ \text{para algún } j\}$ es finito. Para $\lambda>0$ fijo, $j\in\{1,2,3,4\}$, y $\tau\neq 0$ tal que $|\tau|\neq 4\times 3^{-3/4}$ y $\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda\neq 0$, definamos

$$f_j(x)\equiv f_{j,\tau}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{i}\chi_{(0,\infty)}(x)e^{-[\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda]x} & \text{si } \tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda>0, \\ \\ -\dfrac{\sqrt{2\pi}}{i}\chi_{(-\infty,0)}(x)e^{-[\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda]x} & \text{si } \tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda<0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Claramente para todo j, f_j es acotada y está definida excepto en un número finito de valores de τ. Además,

$$\widehat{f_j}(\xi) := \frac{-1}{\xi-i[\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda]}\quad \text{si } \tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda\neq 0, \tag{1.22}$$

Por lo tanto, de (1.20), (1.21) y (1.22), se tiene que

$$[m_1(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(x) = \frac{1}{\tau^{1/3}}\sum_{j=1}^{4}\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}\,e^{i\tau^{1/3}Re[r_j(\tau)]x}f_j(x), \tag{1.23}$$

si $\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)]-\lambda\neq 0$, para todo j.

Supongamos que $|\tau|>3$. Como $|\tau-\frac{4}{3^{3/4}}|>1$ y $r_j(\tau)(1-r_j(\tau)^3)=\frac{1}{\tau^{4/3}}$, por el lema 7 existe $\delta>0$, independiente de τ, tal que $|4r_j(\tau)^3-1|\geq 4\delta$, para todo j.

Si $|r_j(\tau)|\leq 1$ entonces

$$|\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}|\leq\frac{1}{4\delta}. \tag{1.24}$$

Y si $|r_j(\tau)|>1$ entonces,

$$|\frac{r_j(\tau)^2}{4r_j(\tau)^3-1}|\leq\frac{|r_j(\tau)^2|}{|4r_j(\tau)^3|-1}\leq\frac{|r_j(\tau)^2|}{|4r_j(\tau)^3|-|r_j(\tau)^3|}\leq\frac{1}{3|r_j(\tau)|}\leq\frac{1}{3}. \tag{1.25}$$

Por lo tanto, de (1.23), (1.24) y (1.25), teniendo en cuenta que las funciones f_j están acotadas por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ para $j = 1, 2, 3, 4$, se sigue que existe $C > 0$ tal que para casi todo τ, con $|\tau| > 3$, y para todo $\lambda > 0$,

$$\|[m_1(\cdot_\xi, \tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq C. \tag{1.26}$$

Notemos además de (1.23) que, salvo para un número finito de valores de τ, con $|\tau| > 3$,

$$[m_1(\cdot_\xi, \tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x) \in L^1(\mathbb{R}_x) \cap L^2(\mathbb{R}_x). \tag{1.27}$$

Consideremos ahora el caso $|\tau| \leq 3$.

De (1.15) tenemos que

$$|m_1(\xi, \tau)| = \frac{|\xi + i\lambda|^2}{|(\xi + i\lambda)^4 - \tau(\xi + i\lambda) + 1|} \leq \frac{|\xi + i\lambda|^2}{||(\xi + i\lambda)^4 + 1| - |\tau||\xi + i\lambda||}.$$

Supongamos que $\lambda > 2$. Entonces $1 \leq \frac{1}{16}|\xi + i\lambda|^4$ y por lo tanto

$$|(\xi + i\lambda)^4 + 1| \geq |\xi + i\lambda|^4 - 1 \geq \frac{15}{16}|\xi + i\lambda|^4.$$

Además,

$$|\tau||\xi + i\lambda| \leq 3|\xi + i\lambda| = 3\frac{|\xi + i\lambda|^4}{|\xi + i\lambda|^3} < \frac{3}{8}|\xi + i\lambda|^4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} ||(\xi + i\lambda)^4 + 1| - |\tau||\xi + i\lambda|| &= |(\xi + i\lambda)^4 + 1| - |\tau||\xi + i\lambda| \geq |\xi + i\lambda|^4 - 1 - |\tau||\xi + i\lambda| \\ &> \frac{15}{16}|\xi + i\lambda|^4 - \frac{3}{8}|\xi + i\lambda|^4 = \frac{9}{16}|\xi + i\lambda|^4. \end{aligned}$$

Luego, para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$, se sigue que

$$|m_1(\xi, \tau)| \leq \frac{|\xi + i\lambda|^2}{\frac{9}{16}|\xi + i\lambda|^4} = \frac{16}{9}\frac{1}{|\xi + i\lambda|^2}. \tag{1.28}$$

Y entonces, para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$,

$$\begin{aligned} |[m_1(\cdot_\xi, \tau)]^{\vee_\xi}(x)| &= |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{ix\xi} m_1(\xi, \tau) d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(-1,1)^c} e^{ix\xi} m_1(\xi, \tau) d\xi| \\ &\leq \int_{-1}^{1} \frac{16}{9}\frac{1}{|\xi + i\lambda|^2} d\xi + \int\limits_{(-1,1)^c} \frac{16}{9}\frac{1}{\xi^2} d\xi \leq \int_{-1}^{1} \frac{16}{9}\frac{1}{4} d\xi + \frac{32}{9} = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Es decir, para $\lambda > 2$ y $|\tau| \leq 3$,

$$\|[m_1(\cdot_\xi, \tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \frac{40}{9}. \tag{1.29}$$

De esta forma, de (1.26) y (1.29), podemos concluir que existe $C > 0$, tal que para todo $\lambda > 2$, y para todo $\tau \in \mathbb{R}$ (salvo un número finito),

$$\|[m_1(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x\,)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq C. \tag{1.30}$$

Notemos además que de (1.28), para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$, $m_1(\cdot_\xi, \tau) \in L^1(\mathbb{R}_\xi) \cap L^2(\mathbb{R}_\xi)$ y por tanto

$$[m_1(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x\,) \in C_b(\mathbb{R}_x) \cap L^2(\mathbb{R}_x). \tag{1.31}$$

Definamos, para $\lambda > 2$,

$$M_1(x,\tau) := [m_1(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(x),\ \ c.t.p.\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

Por lo tanto (1.30) se convierte en

$$\|M_1(\cdot_x, \tau)\|_{L^\infty_x(\mathbb{R})} \leq C,\ \forall \lambda > 2,\ \ c.t.p.\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.33}$$

Entonces, de (1.27) y (1.31) y del hecho de que $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ se sigue, salvo para un número finito de valores de τ, que

$$(M_1(\cdot_x\,,\tau) *_x [h(\cdot_x\,,\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau))^{\wedge_x} = \sqrt{2\pi}\ m_1(\cdot_\xi\,,\tau)\widehat{h}(\cdot_\xi\,,\tau),$$

y además que dicha convolución define una función continua y acotada de la variable x.

De esta forma,

$$[m_1(\cdot_\xi\,,\tau)\widehat{h}(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_1(\cdot_x\,,\tau) *_x [h(\cdot_x\,,\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau). \tag{1.34}$$

Luego, empleando el teorema de Plancherel en la variable t, (1.34), (1.33) y la desigualdad integral de Minkowski, se sigue que, para todo $\lambda > 2$ y todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|[m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}(x,\cdot_t\,)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} &= \|[m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi}(x,\cdot_\tau\,)\|_{L^2_\tau(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\tau} |(M_1(\cdot_x\,,\tau) *_x [h(\cdot_x\,,\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau))(x)|^2 d\tau\Big]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\tau} \|M_1(\cdot_x\,,\tau)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \|[h(\cdot_x\,,\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau)\|^2_{L^1(\mathbb{R}_x)} d\tau\Big]^{1/2} \\
&\leq C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\tau}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_{x'}} |[h(x',\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau)| dx'\Big)^2 d\tau\Big]^{1/2} \\
&\leq C\int\limits_{\mathbb{R}_{x'}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_\tau} |[h(x',\cdot_t\,)]^{\wedge_t}(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} dx' = C\int\limits_{\mathbb{R}_{x'}} \|[h(x',\cdot_t\,)]^{\wedge_t}\|_{L^2_\tau(\mathbb{R})} dx' \\
&= C\int\limits_{\mathbb{R}_{x'}} \|h(x',\cdot_t\,)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} dx' = C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|[m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Finalmente, para ver que $[m_1\widehat{h}]^\vee = [m_1\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}$ se usan funciones de prueba y las propiedades de h. Con esto queda probado el lema 8. ■

Lema 9 *Sean $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} < \infty$ y*

$$m_2(\xi,\tau) := \frac{(i\xi-\lambda)^2}{i\tau + (i\xi-\lambda)^3 + \dfrac{1}{i\xi-\lambda}} = \frac{i(\xi+i\lambda)^2}{\tau + a(\xi) + ib(\xi)}.$$

donde $a(\cdot_\xi)$ y $b(\cdot_\xi)$ se definen en la misma forma que en el lema 6.
Entonces, $m_2\widehat{h} \in S'(\mathbb{R}^2)$ y es tal que $[m_2\widehat{h}]^\vee = [m_2\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau} \in L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)$ y existe $C > 0$, independiente de h y de $\lambda > 2$, tal que

$$\|[m_2\widehat{h}]^\vee\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)}.$$

Prueba.
Probaremos inicialmente que $\|[m_2\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq \|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)}$.

En primer lugar, observemos que

$$m_2(\xi,\tau) := -\frac{i(\xi+i\lambda)^3}{(\xi+i\lambda)^4 - \tau(\xi+i\lambda)+1}. \tag{1.35}$$

Definamos, para $\tau \neq 0$,

$$v := \frac{\xi+i\lambda}{\tau^{1/3}}. \tag{1.36}$$

Entonces, tenemos que

$$m_2(\xi,\tau) = -\frac{iv^3}{\tau^{1/3}(v^4 - v + \frac{1}{\tau^{4/3}})}. \tag{1.37}$$

Procediendo de modo similar a como se hizo para establecer (1.23) en la prueba del lema 8 y con las mismas funciones f_j definidas allí, obtenemos que

$$[m_2(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(x) = i\sum_{j=1}^{4} \frac{r_j(\tau)^3}{4r_j(\tau)^3-1}\, e^{i\tau^{1/3}Re[r_j(\tau)]x} f_j(x), \tag{1.38}$$

para $\tau \neq 0$, $|\tau| \neq 4\times 3^{-3/4}$ y τ tal que $\tau^{1/3}Im[r_j(\tau)] - \lambda \neq 0$, para todo j.

Supongamos que $|\tau| > 3$. Entonces $|\tau - \dfrac{4}{3^{3/4}}| > 1$ y, como en la prueba del lema 8, una aplicación del lema 7 nos permite afirmar que

$$|\frac{r_j(\tau)^3}{4r_j(\tau)^3-1}| \leq \max\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4\delta}\},$$

para concluir que existe $C > 0$ tal que para casi todo τ, con $|\tau| > 3$, y para todo $\lambda > 0$,

$$\|[m_2(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq C, \tag{1.39}$$

y que, salvo para un número finito de valores de τ, con $|\tau| > 3$,

$$[m_2(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x) \in L^1(\mathbb{R}_x) \cap L^2(\mathbb{R}_x). \tag{1.40}$$

Consideremos ahora el caso $|\tau| \leq 3$.

Supongamos que $\lambda > 2$. Entonces, como se vio en la prueba del lema 8,

$$|(\xi + i\lambda)^4 - \tau(\xi + i\lambda) + 1| \geq \frac{9}{16}|\xi + i\lambda|^4. \tag{1.41}$$

Por lo tanto, de (1.35) y (1.41), para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$, se sigue que

$$\begin{aligned}
|m_2(\xi,\tau) - \frac{-i}{\xi + i\lambda}| &= |\frac{i(\xi + i\lambda)^3}{(\xi + i\lambda)^4 - \tau(\xi + i\lambda) + 1} - \frac{i}{\xi + i\lambda}| \\
&= |\frac{i\tau(\xi + i\lambda) - i}{(\xi + i\lambda)[(\xi + i\lambda)^4 - \tau(\xi + i\lambda) + 1]}| \leq \frac{16}{9}\frac{|i\tau(\xi + i\lambda) - i|}{2|\xi + i\lambda|^4} \\
&\leq \frac{8}{9}\Big(\frac{3|\xi + i\lambda|}{|\xi + i\lambda|^4} + \frac{1}{|\xi + i\lambda|^4}\Big) \leq \frac{8}{9}\Big(\frac{3}{|\xi + i\lambda|^3} + \frac{1}{|\xi + i\lambda|^3}\Big) \leq \frac{32}{9}\frac{1}{|\xi + i\lambda|^3}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$m_2(\xi,\tau) = \frac{-i}{\xi + i\lambda} + A(\xi,\tau), \tag{1.42}$$

donde,

$$|A(\xi,\tau)| \leq \frac{32}{9}\frac{1}{|\xi + i\lambda|^3}. \tag{1.43}$$

Y entonces, para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$,

$$\begin{aligned}
|[m_2(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(x)| &\leq \left|\Big(\frac{-i}{\xi + i\lambda}\Big)^{\vee_\xi}(x)\right| + |[A(\cdot_\xi,\tau)]^{\vee_\xi}(x)| \\
&= \sqrt{2\pi}e^{\lambda x}\chi_{(-\infty,0]}(x) + |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix\xi}A(\xi,\tau)d\xi| \\
&\leq \sqrt{2\pi} + \int\limits_{[-1,1]} |A(\xi,\tau)|d\xi + \int\limits_{[-1,1]^c} |A(\xi,\tau)|d\xi \\
&\leq \sqrt{2\pi} + \frac{32}{9}\int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{|\xi + i\lambda|^3}d\xi + \frac{32}{9}\int\limits_{[-1,1]^c} \frac{1}{|\xi + i\lambda|^3}d\xi \\
&\leq \sqrt{2\pi} + \frac{32}{9}\int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{8}d\xi + \frac{32}{9}\int\limits_{[-1,1]^c} \frac{1}{|\xi|^3}d\xi = \sqrt{2\pi} + \frac{40}{9}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $|\tau| \leq 3$ y $\lambda > 2$,

$$\|[m_2(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq \sqrt{2\pi} + \frac{40}{9}. \tag{1.44}$$

De esta forma, de (1.39) y (1.44), podemos concluir que existe $C > 0$, tal que para todo $\lambda > 2$, y para todo $\tau \in \mathbb{R}$ (salvo un número finito),

$$\|[m_2(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \leq C. \tag{1.45}$$

Observemos además que, para $|\tau| \leq 3$, de (1.42) y (1.43) se sigue que

$$[m_2(\cdot_\xi\,,\tau)]^{\vee_\xi}(\cdot_x\,) \in L^2(\mathbb{R}_x). \tag{1.46}$$

Si definimos, para $\lambda > 2$,

$$M_2(x,\tau) := [m_2(\cdot_x\,,\tau)]^{\vee_\xi}(x),\ \textit{c.t.p.}\ \tau \in \mathbb{R},$$

y usamos (1.40), (1.45) y (1.46), concluimos que $M_2(\cdot_x,\tau) \in L^\infty(\mathbb{R}_x) \cap L^2(\mathbb{R}_x)$ c.t.p. $\tau \in \mathbb{R}$ y podemos proceder con M_2 de la misma manera como se hizo con M_1 en la prueba del lema 8, para concluir que

$$\|[m_2\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Finalmente, para ver que $[m_2\widehat{h}]^\vee = [m_2\widehat{h}]^{\vee_\xi\vee_\tau}$ se usan funciones de prueba y las propiedades de h. Con esto queda probado el lema 9. ■

Lema 10 *Para $t \in \mathbb{R}$ sea $G(t) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz}\psi(z,t)\widehat{g}(z)dz$, donde $g \in S(\mathbb{R})$ (espacio de Schwartz) y $\psi(\cdot_z\,,t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función con supp $\psi(\cdot_z\,,t) \subset [\xi_0,\infty)$ para algún $\xi_0 \in \mathbb{R}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que $\psi(\cdot_z\,,t)|_{[\xi_0,\infty)}$ es de clase C^1. Supongamos además que*

$$\lim_{z\to\infty} \psi(z,t) = 0 \ \textit{y}\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\xi_0}^{\infty} |D_1\psi(z,t)|dz \leq C. \tag{1.47}$$

Entonces

$$\|G\|_{L^2_t(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^2_x(\mathbb{R})},$$

con C independiente de g.

Prueba.
En primer lugar, observemos que

$$\psi(z,t) = -\int_z^\infty D_1\psi(z',t)dz'$$

para $z \geq \xi_0$ y $t \in \mathbb{R}$.
Teniendo esto en cuenta, si $t \in \mathbb{R}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
|G(t)| &= |\int_{\xi_0}^\infty e^{itz}(\int_z^\infty D_1\psi(z',t)dz')\widehat{g}(z)dz| \\
&= |\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[\xi_0,+\infty)}(z)e^{itz}(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[z,\infty)}(z')D_1\psi(z',t)dz')\widehat{g}(z)dz| \\
&= |\int\limits_{\mathbb{R}} [\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz}\widehat{g}(z)\chi_{[\xi_0,+\infty]}(z)\chi_{[z,+\infty)}(z')dz]D_1\psi(z',t)dz'| \\
&= |\int\limits_{\mathbb{R}} [\int_{\xi_0}^{z'} e^{itz}\widehat{g}(z)dz]D_1\psi(z',t)dz'| \leq \sup_{z'\in\mathbb{R}} |\int_{\xi_0}^{z'} e^{itz}\widehat{g}(z)dz| \int\limits_{\mathbb{R}} |D_1\psi(z',t)|dz' \\
&\leq C(S^*g)(t),
\end{aligned}$$

donde, $(S^*g)(t) := \sup_{z'\in\mathbb{R}} |\int_{\xi_0}^{z'} e^{itz}\widehat{g}(z)dz|$.

Por lo tanto, utilizando el resultado de Kenig y Tomas en [14], que afirma que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $g \in S(\mathbb{R})$ se tiene que $\|S^*g\|_{L_t^2(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L_x^2(\mathbb{R})}$ concluimos que

$$\|G\|_{L_t^2(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L_x^2(\mathbb{R})}.$$

■

Prueba del Teorema 6

Demostración del estimativo (1.4)

Para $(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2$, sean $m_0(\xi,\tau)$ y $m_1(\xi,\tau)$ como en los lemas 6 y 8 respectivamente.

Además, para $\epsilon \in (0, 1/4)$, sea $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\eta_\epsilon(t) = 1$, si $t \in [2\epsilon, 1-2\epsilon]$, $supp\,\eta_\epsilon \subset [\epsilon, 1-\epsilon]$, η_ϵ creciente en $[\epsilon, 2\epsilon]$ y decreciente en $[1-2\epsilon, 1-\epsilon]$.

Definamos para $t \in \mathbb{R}$

$$w_\epsilon(t) := \eta_\epsilon(t)w(t), \tag{1.48}$$

donde la función w que aparece en el lado derecho de la igualdad (1.48) es en realidad la extensión de w que es cero fuera de $[0,1]$.

Observemos que si $h_\epsilon := e^{\lambda x}(\partial_t w_\epsilon + \partial_x^3 w_\epsilon + \partial_x^{-1} w_\epsilon)$, entonces

$$h_\epsilon = \eta_\epsilon' e^{\lambda x} w + \eta_\epsilon e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w) \equiv \eta_\epsilon' e^{\lambda x} w + h_0, \tag{1.49}$$

donde $h_0 \equiv h_{0\epsilon} := \eta_\epsilon e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)$.

Puede verse que $h_0, h_\epsilon \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$, que $supp\, h_0(t)$, $supp\, h_\epsilon(t)$ están contenidos en $[-M, M]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y que $supp\, h_0$, $supp\, h_\epsilon$ están contenidos en $[\epsilon, 1-\epsilon]$. Luego, h_0 y h_ϵ se pueden identificar, vía el teorema de representación de Riesz, con funciones de $L^2(\mathbb{R}^2)$ que seguiremos denotando por h_0 y h_ϵ.

Fácilmente puede verse que $e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon = (m_1 \widehat{h}_\epsilon)^\vee$. Teniendo en cuenta este hecho y (1.49), se sigue para $D := \mathbb{R} \times [0,1]$ que

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} &= \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} = \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)(m_1\widehat{h}_\epsilon)^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1(\widehat{\eta_\epsilon' e^{\lambda x} w})]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} + \|[m_1\widehat{h}_0]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Como $h_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, de las propiedades del soporte de h_0 se sigue también que $\|h_0\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$. Así, por el lema 8, si $\lambda > 2$, para el segundo término del lado derecho de (1.50) se tiene que

$$\|[m_1\widehat{h}_0]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h_0\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)} = C\|\eta_\epsilon e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1} w)\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.51}$$

Ahora estimemos el primer sumando del lado derecho de la desigualdad (1.50).

Para $\lambda > 2$, sea $\theta_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta_\lambda(\xi) = 1$, si $|\xi| \leq 2\lambda$, $supp\,\theta_\lambda \subset \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 3\lambda\}$, $0 \leq \theta_\lambda(\xi) \leq 1$ y $|\theta'_\lambda(\xi)| \leq \dfrac{C}{\lambda} \leq C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces, si definimos $h_1 \equiv h_{1\epsilon} \in S'(\mathbb{R}^2)$ y $h_2 \equiv h_{2\epsilon} \in S'(\mathbb{R}^2)$, por

$$\widehat{h}_1 := \theta_\lambda(\cdot_\xi)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w}), \tag{1.52}$$

$$\widehat{h}_2 := (1 - \theta_\lambda(\cdot_\xi))(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w}), \tag{1.53}$$

obtenemos

$$\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w})]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1\widehat{h}_1]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)} + \|[m_1\widehat{h}_2]^\vee\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.54}$$

Para estimar el primer término del lado derecho de la anterior desigualdad definamos g_1 por

$$\widehat{g}_1 := i(\xi + i\lambda)\widehat{h}_1 = i(\xi + i\lambda)\theta_\lambda(\cdot_\xi)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w}). \tag{1.55}$$

Luego, $[m_1\widehat{h}_1]^\vee = [m_0\widehat{g}_1]^\vee$. Aplicaremos el lema 6 a la función g_1. Para ello probaremos inicialmente que $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|g_1\|_{L_t^1 L_x^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$.

Como $supp\, w(t) \in [-M, M]$ y $w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$ entonces $e^{\lambda x} w \in C([0,1]; H^3(\mathbb{R}))$. Por tanto, de la definición de g_1, teniendo en cuenta que θ_λ tiene soporte compacto, se tiene que $g_1 \in C(\mathbb{R}_t; H^3(\mathbb{R}))$ con $supp\, g_1 \subset [0,1]$. Así, $\|g_1\|_{L_t^1 L_x^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$ y g_1 define una función continua en $\mathbb{R}^2$ con soporte contenido en D.

De otra parte, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|g_1(t)\|_{L_x^1(\mathbb{R})} \leq & C\|\widehat{g_1(t)}^x\|_{H_\xi^1(\mathbb{R})} \leq C\|\widehat{g_1(t)}^x\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + C\|\ \frac{d}{d\xi}\widehat{g_1(t)}^x\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
= & C\|\eta'_\epsilon(t)(\xi + i\lambda)\theta_\lambda \widehat{e^{\lambda x} w(t)}^x\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + C\|\ \frac{d}{d\xi}[\eta'_\epsilon(t)(\xi + i\lambda)\theta_\lambda]\widehat{e^{\lambda x} w(t)}^x\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
& + C\|\ \eta'_\epsilon(t)(\xi + i\lambda)\theta_\lambda \frac{d}{d\xi}\widehat{e^{\lambda x} w(t)}^x\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
\leq & |\eta'_\epsilon(t)|[C\lambda\|e^{\lambda x} w(t)\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + C\lambda\|x e^{\lambda x} w(t)\|_{L_x^2(\mathbb{R})}] \\
\leq & |\eta'_\epsilon(t)|[C\lambda + C\lambda M]\|e^{\lambda x} w(t)\|_{L_x^2(\mathbb{R})} \leq C_{\lambda,w}|\eta'_\epsilon(t)|,
\end{aligned} \tag{1.56}$$

lo cual implica que $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Aplicándole ahora el lema 6 a g_1, se sigue que $[m_0\widehat{g}_1]^\vee = [m_0\widehat{g}_1]^{\vee_\tau \vee_\xi}$. Observemos que para cada $t \in \mathbb{R}$, empleando el teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned}
&\|\chi_{[0,1]}(t)[m_0\widehat{g}_1]^\vee(\cdot_x, t)\|_{H_x^1(\mathbb{R})} \\
&\qquad = \|(1 + \xi^2)^{1/2}\chi_{[0,1]}(t)[m_0\widehat{g}_1]^{\vee_\tau}(\cdot_\xi, t)\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad = \|(1 + \xi^2)^{1/2}\chi_{[0,1]}(t)\theta_\lambda(\cdot_\xi)[(\xi + i\lambda)m_0(\cdot_\xi, \cdot_\tau)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w})]^{\vee_\tau}(\cdot_\xi, t)\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad \leq C\lambda\|\chi_{[0,1]}(t)[(\xi + i\lambda)\theta_\lambda(\cdot_\xi)m_0(\cdot_\xi, \cdot_\tau)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x} w})]^{\vee_\tau}(\cdot_\xi, t)\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad = C\lambda\|\chi_{[0,1]}(t)[m_0\widehat{g}_1]^\vee(\cdot_x, t)\|_{L_x^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

De esta forma, para todo $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, empleando el teorema de Plancherel, obtenemos que

$$|\chi_{[0,1]}(t)[m_1\widehat{h}_1]^\vee(x,t)|\leq C\|\chi_{[0,1]}(t)[m_0\widehat{g}_1]^\vee(\cdot_x,t)\|_{H^1_x(\mathbb{R})}\leq C\lambda\|\chi_{[0,1]}(t)[m_0\widehat{g}_1]^\vee(\cdot_x,t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}.$$

Por lo tanto,

$$\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1\widehat{h}_1]^\vee(x,\cdot_t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})}\leq C\lambda\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_0\widehat{g}_1]^\vee\|_{L^2_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}\leq C\lambda\|[m_0\widehat{g}_1]^\vee\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbb{R}^2)},$$

y así, empleando nuevamente el lema 6 y el teorema de Plancherel, obtenemos

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1\widehat{h}_1]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}&\leq C\lambda\|[m_0\widehat{g}_1]^\vee\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}\leq C\lambda\|g_1\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}\\&=C\lambda\|[i(\xi+i\lambda)\theta_\lambda(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w})]^\vee\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}\\&=C\lambda\|[(\xi+i\lambda)\theta_\lambda(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w})]^{\vee\tau}\|_{L^1_tL^2_\xi(\mathbb{R}^2)}\\&=C\lambda\|(\xi+i\lambda)\theta_\lambda(\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w)^{\wedge_x}\|_{L^1_tL^2_\xi(\mathbb{R}^2)}\\&\leq C\lambda^2\|(\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w)^{\wedge_x}\|_{L^1_tL^2_\xi(\mathbb{R}^2)}\leq C\lambda^2\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}\tag{1.57}$$

Procedamos ahora a estimar el segundo término del lado derecho de (1.54).

Observemos que

$$m_1\widehat{h}_2=m_0(\xi,\lambda)i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w})=m_0\widehat{g}_2,$$

donde

$$\widehat{g}_2:=i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w})=(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(\partial_x-\lambda)(e^{\lambda x}w)]^\wedge.$$

Como $w\in C([0,1];H^3(\mathbb{R}))$ y $supp\, w(t)\subset[-M,M]$ para todo $t\in[0,1]$, vemos que g_2 se puede identificar con un elemento de $C(\mathbb{R}_t;H^2(\mathbb{R}))$ cuyo soporte está contenido en $(0,1)$. Además, mediante un procedimiento similar al que se hizo en la cadena de desigualdades (1.56), tenemos que, para todo $t\in\mathbb{R}$,

$$\|g_2(t)\|_{L^1_x(\mathbb{R})}\leq C|\eta'_\epsilon(t)|(\lambda+M\lambda)\|e^{\lambda x}w(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}.\tag{1.58}$$

Por lo tanto, $g_2\in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|g_2\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}<\infty$, y así, por el lema 6, $[m_1\widehat{h}_2]^\vee=[m_0\widehat{g}_2]^{\vee_\tau\vee_\xi}$.

Observemos que, para $\lambda>1$ y $|\xi|\geq 2\lambda$,

$$b(\xi):=\lambda^3-3\lambda\xi^2+\frac{\lambda}{\lambda^2+\xi^2}\leq\lambda^3-12\lambda^3+\frac{1}{5\lambda}=\frac{1-55\lambda^4}{5\lambda}<0.$$

De esta forma, de (1.11), en la prueba del lema 6, se sigue que

$$\begin{aligned}[m_1\widehat{h}_2]^{\vee_\tau}(\xi,t)&:=[m_1(\xi,\cdot_\tau)\widehat{h}_2(\xi,\cdot_\tau)]^{\vee_\tau}(t)\\&=[m_0\widehat{g}_2]^{\vee_\tau}(\xi,\tau)\\&=\int_{\mathbb{R}_s}e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)}\widehat{g_2(s)}^x(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s)ds\\&=\int_{\mathbb{R}_s}e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)}i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s)ds.\end{aligned}$$

Veamos que podemos aplicar la fórmula de inversión de la transformada de Fourier en la variable espacial a $[m_1\widehat{h}_2]^{\vee\tau}$ para obtener $[m_1\widehat{h}_2]^{\vee}$. En efecto, observemos que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}_\xi} |\widehat{g_2(s)}^x(\xi)| d\xi \leq C\|g_2(s)\|_{H^1_x(\mathbb{R})} \leq C, \tag{1.59}$$

y por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_\xi} |[m_1\widehat{h}_2]^{\vee\tau}(\xi,t)| d\xi \leq & \int_{\mathbb{R}_\xi}\int_0^1 |\widehat{g_2(s)}^x(\xi)| ds d\xi = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_\xi} |\widehat{g_2(s)}^x(\xi)| d\xi ds \\ \leq & C\int_0^1 \|g_2(s)\|_{H^1_x(\mathbb{R})} ds < \infty.\end{aligned}$$

Luego, por la fórmula de inversión de la transformada, se tiene para todo $(x',t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}&[m_1\widehat{h}_2]^{\vee}(x',t) = \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_s}\int_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix'\xi}e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)} i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s) d\xi ds.\end{aligned}$$

De esta forma, empleando la desigualdad integral de Minkowski,

$$\|[m_1\widehat{h}_2]^{\vee}(x',\cdot_t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}_s} \|A_s(x',\cdot\, t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} ds, \tag{1.60}$$

donde,

$$\begin{aligned}A_s(x',t) := & \int_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix'\xi}e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)} i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s) d\xi \\ = & \int_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix'\xi}e^{-i(t-s)a(\xi)}e^{(t-s)b(\xi)} i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)\chi_{(0,+\infty)}(t-s)\chi_{\{|\xi|\geq 2\lambda\}}(\xi) d\xi.\end{aligned} \tag{1.61}$$

Notemos que por (1.59), la anterior integral está bien definida para todo $x', t, s \in \mathbb{R}$ y

$$|A_s(x',t)| \leq C, \tag{1.62}$$

donde C es independiente de x', t y s.

Realizando en (1.61) el cambio de variable $z = \xi^3$, teniendo presente que

$$a(\xi) = -\xi^3 + 3\lambda^2\xi - \frac{\xi}{\lambda^2+\xi^2},$$

y definiendo

$$\psi_s(z,t) := e^{-it[3\lambda^2\xi - \xi/(\lambda^2+\xi^2)]}e^{(t-s)b(\xi)}\chi_{(0,+\infty)}(t-s)\chi_{\{|\xi|\geq 2\lambda\}}(\xi), \tag{1.63}$$

$$f(z) \equiv f_{x'}(z) := \frac{e^{ix'\xi}e^{isa(\xi)}}{3\xi^2} i(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi), \tag{1.64}$$

podemos escribir

$$A_s(x',t) = \int\limits_{\mathbb{R}_z} e^{itz} f_{x'}(z)\psi_s(z,t)dz. \tag{1.65}$$

Aplicaremos el lema 10 en (1.65) usando dualidad. Con este fin, definamos, para $\phi \in S(\mathbb{R})$,

$$G_\phi(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz}\psi_s(z,t)\phi(t)dt, \tag{1.66}$$

y verifiquemos que la función $(t,z) \mapsto \psi_s(z,t)$ satisface las hipótesis del lema 10.

En efecto, de (1.63), para z fijo, $supp\,\psi_s(z,\cdot_t) \subset [s,+\infty)$; $\psi_s(z,\cdot_t)|_{[s,+\infty)} \in C^1(\mathbb{R})$ y $\lim_{t\to\infty}\psi_s(z,t) = 0$. Veamos ahora que $sup_{z\in\mathbb{R}}\int_s^{+\infty}|D_2\psi_s(z,t)|dt < \infty$.

Observemos que, como $b(\xi) < 0$, entonces $|\psi_s(z,t)| \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned}\int_s^\infty |D_2\psi_s(z,t)|dt &= |b(\xi) - i(3\lambda^2\xi) + i\frac{\xi}{\lambda^2+\xi^2}|\int_s^\infty e^{(t-s)b(\xi)}\chi_{\{|\xi|\geq 2\lambda\}}(\xi)dt \\ &= |b(\xi) - i(3\lambda^2\xi) + i\frac{\xi}{\lambda^2+\xi^2}|\Big(-\frac{1}{b(\xi)}\Big)\chi_{\{|\xi|\geq 2\lambda\}}(\xi).\end{aligned}$$

Como para $|\xi| \geq 2\lambda$ y $\lambda > 1$

$$|3\lambda^2\xi + \frac{\xi}{\lambda^2+\xi^2}| \leq 3\lambda^2|\xi| + 1 \leq 4\lambda^2|\xi|,$$

y

$$|b(\xi)| \equiv |3\lambda\xi^2 - \lambda^3 - \frac{\lambda}{\xi^2+\lambda^2}| \geq 3\lambda\xi^2 - \lambda\frac{\xi^2}{4} - 1 \geq 3\lambda\xi^2 - \lambda\frac{\xi^2}{4} - \lambda\xi^2 \geq \lambda\xi^2,$$

entonces

$$\int_s^\infty |D_2\psi_s(z,t)|dt \leq 1 + \frac{4\lambda^2|\xi|}{\lambda\xi^2} \leq 1 + 4\frac{\lambda}{|\xi|} \leq 3.$$

Entonces, aplicando el lema 10 a G_ϕ en (1.66), se tiene que $\|G_\phi\|_{L^2_z(\mathbb{R})} \leq C\|\phi\|_{L^2_t(\mathbb{R})}$.

Luego, aplicando el teorema de Fubini y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\begin{aligned}|\int\limits_{\mathbb{R}_t} A_s(x',t)\phi(t)dt| &= |\int\limits_{\mathbb{R}_t}\int\limits_{\mathbb{R}_z} e^{itz}f(z)\psi_s(z,t)\phi(t)dzdt| \\ &= |\int\limits_{\mathbb{R}_z}\int\limits_{\mathbb{R}_t} e^{itz}f(z)\psi_s(z,t)\phi(t)dtdz| = |\int\limits_{\mathbb{R}_z} f(z)G_\phi(z)dz| \\ &\leq \|f\|_{L^2_z(\mathbb{R})}\|G_\phi\|_{L^2_z(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2_z(\mathbb{R})}\|\phi\|_{L^2_t(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{1.67}$$

El teorema de Fubini se puede aplicar en el anterior razonamiento porque usando las definiciones de ψ_s y f dadas en (1.63) y (1.64), el cambio de variable $z \mapsto \xi$ y (1.59) se tiene que

$$\int |\phi(t)| \int |f(z)\psi_s(z,t)| dz dt \leq \int |\phi(t)| \int |\widehat{g_2(s)}(\xi)| d\xi dt \leq C\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C.$$

Concluimos así, de (1.67) y (1.64), el cambio de variable $z \mapsto \xi$ y el teorema de Plancherel, que

$$\begin{aligned}
\|A_s(x',\cdot\, t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} &\leq C\|f\|_{L^2_z(\mathbb{R})} \\
&= C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_z} \frac{|e^{ix'\xi}e^{isa(\xi)}|^2}{3\xi^2 3\xi^2}|(\xi+i\lambda)(1-\theta_\lambda(\xi))|^2|[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)|^2 dz\Big]^{1/2} \\
&\leq C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\xi} \frac{\xi^2}{3\xi^2}|[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{1/2} = C\|[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \\
&= C\|\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}. \qquad (1.68)
\end{aligned}$$

De (1.60) y (1.68), obtenemos, para todo $x' \in \mathbb{R}$,

$$\|[m_1\widehat{h}_2]^\vee(x',\cdot_t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} \leq C\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)},$$

y por lo tanto

$$\|[m_1\widehat{h}_2]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}. \qquad (1.69)$$

Luego, de (1.54), (1.57) y (1.69), teniendo en cuenta que $\lambda > 2$, se sigue que

$$\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_1(\widehat{\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w})]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\lambda^2\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}. \qquad (1.70)$$

En consecuencia, de (1.50), (1.51) y (1.70) obtenemos

$$\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon\|_{L^\infty_xL^2_t(D)} \leq C\lambda^2\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} + C\|\eta_\epsilon e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.71)$$

Para pasar al límite cuando $\epsilon \to 0^+$ observemos que

$$\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}\partial_x w_\epsilon - e^{\lambda x}\partial_x w\|_{L^\infty_xL^2_t(D)} &= \|e^{\lambda x}\partial_x w(\eta_\epsilon - 1)\|_{L^\infty_xL^2_t(D)} \\
&= \sup_{x\in[-M,M]}\Big[\int_0^1 e^{2\lambda x}(\partial_x w(t)(x))^2(\eta_\epsilon(t)-1)^2 dt\Big]^{1/2} \\
&\leq e^{\lambda M}\|w\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R}))}\Big[\int_0^{2\epsilon} dt + \int_{1-2\epsilon}^1 dt\Big]^{1/2} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0. \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

Con respecto al primer término del lado derecho de la desigualdad (1.71), observemos que

$$\begin{aligned}
\|\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} &= \int\limits_{\mathbb{R}_t} |\eta'_\epsilon(t)|\|e^{\lambda x}w(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}dt \\
&= \int_\epsilon^{2\epsilon} \eta'_\epsilon(t)\|e^{\lambda x}w(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}dt - \int_{1-2\epsilon}^{1-\epsilon} \eta'_\epsilon(t)\|e^{\lambda x}w(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}dt \\
&= \int_\epsilon^{2\epsilon} \eta'_\epsilon(t)(\|e^{\lambda x}w(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} - \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2_x(\mathbb{R})})dt + \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} \\
&\quad - \int_{1-2\epsilon}^{1-\epsilon} \eta'_\epsilon(t)(\|e^{\lambda x}w(t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} - \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2_x(\mathbb{R})})dt + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2_x(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

y como $e^{\lambda x}w \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$, es claro, de la anterior igualdad que

$$\|\eta_\epsilon' e^{\lambda x}w\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} \|e^{\lambda x}w(0)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} + \|e^{\lambda x}w(1)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}. \tag{1.73}$$

Finalmente, para el último término del lado derecho de la desigualdad (1.71), teniendo en cuenta que $supp\, w(t) \in [-M,M]$, para todo $t \in \mathbb{R}$, por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)(\eta_\epsilon - 1)\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \\ \leq (2M)^{1/2}e^{\lambda M}\|(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)(\eta_\epsilon - 1)\|_{L^2_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0.\end{aligned} \tag{1.74}$$

En consecuencia de (1.71) a (1.74), se sigue la desigualdad (1.4).

Demostración del estimativo (1.5)

Para probar la desigualdad (1.5) procedemos de manera similar a como lo hicimos en la prueba de la desigualdad (1.4).

Fácilmente puede verse que $e^{\lambda x}\partial_x^2 w_\epsilon = (m_2\widehat{h}_\epsilon)^\vee$, donde m_2 se define como en el lema 9. Por lo tanto,

$$\|e^{\lambda x}\partial_x^2 w_\epsilon\|_{L^\infty_xL^2_t(D)} \leq \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_2(\widehat{\eta_\epsilon' e^{\lambda x}w})]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} + \|[m_2\widehat{h}_0]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.75}$$

donde, como en (1.49) , $h_0 := \eta_\epsilon e^{\lambda x}[\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w]$.

Por el lema 9, para $\lambda > 2$ se tiene que

$$\|[m_2\widehat{h}_0]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|h_0\|_{L^1_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.76}$$

De otra parte, definamos h_1 y h_2 como en (1.52) y (1.53), de tal modo que $\eta_\epsilon' e^{\lambda x}w = h_1 + h_2$. Entonces

$$\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_2(\widehat{\eta_\epsilon' e^{\lambda x}w})]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq \|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)[m_2\widehat{h}_1]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} + \|[m_2\widehat{h}_2]^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.77}$$

Si definimos una nueva g_1 por $\widehat{g}_1 := -(\xi + i\lambda)^2\widehat{h}_1$ entonces $(m_2\widehat{h}_1)^\vee = (m_0\widehat{g}_1)^\vee$. Por lo tanto, como en la demostración de (1.4),

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)(m_2\widehat{h}_1)^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} &\leq C\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)J[(m_2\widehat{h}_1)^\vee]\|_{L^2_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} \leq C\|J[(m_2\widehat{h}_1)^\vee]\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} \\ &= C\|J[(m_0\widehat{g}_1)^\vee]\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} = C\|[(m_0\widehat{Jg_1})^\vee]\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Procediendo de modo similar a como se hizo para obtener (1.56) puede verse que $Jg_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|Jg_1\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} < \infty$ y así, por el lema 6, podemos concluir que

$$\|\chi_{[0,1]}(\cdot_t)(m_2\widehat{h}_1)^\vee\|_{L^\infty_xL^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|Jg_1\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)} \leq C\lambda^2\|\eta_\epsilon' J(e^{\lambda x}w)\|_{L^1_tL^2_x(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.78}$$

Si definimos un nuevo g_2 por $\widehat{g}_2 := -(\xi+i\lambda)^2\widehat{h}_2$, puede verse, procediendo como se hizo para obtener (1.56) y (1.58), que $g_2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $\|g_2\|_{L^1_t H^1_x(\mathbb{R}^2)} < \infty$, lo cual permite como antes probar que, para todo $x' \in \mathbb{R}$

$$\|[m_2\widehat{h}_2]^\vee(x',\cdot_t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} \leq \int\limits_{\mathbb{R}_s} \|A_s(x',\cdot\, t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} ds, \tag{1.79}$$

donde la nueva $A_s(x',t)$ se obtiene al cambiar en la definición de $A_s(x',t)$ dada en (1.61), $i(\xi+i\lambda)$ por $-(\xi+i\lambda)^2$.

Razonando similarmente a como se hizo en la demostración del estimativo Carleman (1.4) para $e^{\lambda x}\partial_x w$ puede verse que

$$\|A_s(x',\cdot\, t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2_z(\mathbb{R})}, \tag{1.80}$$

donde la nueva f está definida por

$$f(z) \equiv f_{x'}(z) := \frac{e^{ix'\xi}e^{isa(\xi)}}{3\xi^2}[-(\xi+i\lambda)^2](1-\theta_\lambda)[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi), \text{ y } \xi = z^{1/3}. \tag{1.81}$$

De esta manera, de (1.80) y (1.81) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|A_s(x',\cdot\, t)\|_{L^2_t(\mathbb{R})} &\leq C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_z} \frac{|e^{ix'\xi}e^{isa(\xi)}|^2}{3\xi^2 3\xi^2}|(\xi+i\lambda)^2(1-\theta_\lambda(\xi))|^2|[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)|^2 dz\Big]^{1/2} \\
&= C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\xi} \frac{|\xi+i\lambda|^4|(1-\theta_\lambda(\xi))|^2}{3\xi^2}|[\eta'_\epsilon e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{1/2} \\
&\leq C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_\xi} (1+\xi^2)|[\eta'_\epsilon(s)e^{\lambda x}w(s)]^{\wedge_x}(\xi)|^2 d\xi\Big]^{1/2} = C\|[\eta'_\epsilon(s)J(e^{\lambda x}w(s))\|_{L^2_x(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

En consecuencia, de (1.79) y (1.82) se tiene que

$$\|[m_2\widehat{h}_2]^\vee\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\eta'_\epsilon J(e^{\lambda x}w)\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.83}$$

De (1.75) a (1.78) y de (1.83) obtenemos que existe $C>0$ tal que para $\lambda > 2$

$$\|e^{\lambda x}\partial_x^2 w_\epsilon\|_{L^\infty_x L^2_t(D)} \leq C\lambda^2\|\eta'_\epsilon J(e^{\lambda x}w)\|_{L^1_t L^2_x(\mathbb{R}^2)} + C\|\eta_\epsilon e^{\lambda x}(\partial_t w + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L^1_x L^2_t(\mathbb{R}^2)}.$$

Pasando al límite cuando $\epsilon \to 0^+$ en la anterior desigualdad, y razonando de manera análoga a como se hizo en la prueba del estimativo (1.4), obtenemos el estimativo (1.5).

2.2 Estimativo inferior

En esta sección estudiamos propiedades de la diferencia $u_1 - u_2$ de dos soluciones de la ecuación de Ostrovsky con dispersión positiva. Siguiendo las ideas de los artículos [7] y [4], probamos en el teorema 7 una propiedad de acotamiento del operador inverso de la parte lineal de esta

ecuación en un espacio L^2 con peso e^{ψ}, donde el exponente ψ depende de x, de t y de un parámetro libre α. Esta dependencia se escoge de forma adecuada con el fin de obtener en el teorema 8, para la norma H^3 de $\partial_x^{-1}(u_1-u_2)$ en un rectángulo $[R-1,R]\times[0,1]$ con $R>>1$, una cota inferior en términos de la norma L^2 de u_1-u_2 en un rectángulo Q situado cerca de $x=0$.

A continuación formulamos y demostramos estos teoremas.

Teorema 7 *Sean $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función C^∞ y $D:=\mathbb{R}\times[0,1]$. Supongamos que $R>1$. Entonces existe $C=max(\|\phi'\|_{L^\infty},\|\phi''\|_{L^\infty},1)>0$ tal que la desigualdad*

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\alpha(\frac{x}{R}+\phi(t))^2}g\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\alpha(\frac{x}{R}+\phi(t))^2}\partial_x g\|_{L^2(D)}\leq\sqrt{2}\|e^{\alpha(\frac{x}{R}+\phi(t))^2}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x^{-1})g\|_{L^2(D)} \tag{2.1}$$

se cumple cuando $\alpha>CR^{3/2}$ y $g\in C([0,1];H^3(\mathbb{R}))\cap C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ es tal que

(i) $g(0)=g(1)=0$;

(ii) Existe $M>0$ tal que $supp\, g(t)\subset[-M,M]$ para todo $t\in[0,1]$;

(iii) $\int_{-M}^{M} g(t)(x)dx=0$ *para todo $t\in[0,1]$;*

(iv) $supp\,\partial_x^{-1}g(\cdot_t)(\cdot_x)\subset\{(x,t):|\frac{x}{R}+\phi(t)|\geq 1\}$.

Observemos que, de (iv), también se tiene que $supp\, g(\cdot_t)(\cdot_x)\subset\{(x,t):|\frac{x}{R}+\phi(t)|\geq 1\}$.

Prueba. Definamos $\psi\equiv\psi_{\alpha,R}(x,t):=\alpha(\frac{x}{R}+\phi(t))^2$ y $f:=e^{\psi}g$. Para establecer (2.1) es suficiente probar que

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|f\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|\partial_x f-\psi_x f\|_{L^2(D)}\leq\sqrt{2}\|Tf\|_{L^2(D)}, \tag{2.2}$$

donde $Tf:=e^{\psi}(\partial_t+\partial_x^3+\partial_x^{-1})e^{-\psi}f$.

Como $supp\, g(t)\subset[-M,M]$ para todo $t\in[0,1]$ entonces $f\in C^1([0,1];H^3(\mathbb{R}))$.

Teniendo en cuenta que $e^{\psi}\partial_x^3e^{-\psi}f=(\partial_x-\psi_x)^3f$ y $e^{\psi}\partial_t(e^{-\psi}f)=(\partial_t-\psi_t)f$ se puede ver que

$$Tf=-\psi_t f+\partial_t f+3\partial_x(-\psi_x\partial_x f)+3\psi_x^2\partial_x f+3\psi_x\psi_{xx}f+(-\psi_{xxx}-\psi_x^3)f+\partial_x^3 f+e^{\psi}\partial_x^{-1}(e^{-\psi}f). \tag{2.3}$$

Definamos los siguientes operadores:

$$S := -3\partial_x(\psi_x\partial_x\cdot\,)-\psi_x^3\cdot-\psi_t\cdot \tag{2.4}$$
$$A := \partial_x^3\cdot+3\psi_x^2\partial_x\cdot+3\psi_x\psi_{xx}\cdot+\partial_t\cdot \tag{2.5}$$
$$L := e^{\psi}\partial_x^{-1}(e^{-\psi}\cdot\,), \tag{2.6}$$

entonces, si tenemos en cuenta que $\psi_{xxx}=0$, de (2.3) a (2.6) se sigue que $Tf=Sf+Af+Lf$.

Fácilmente puede comprobarse que S es un operador simétrico y que A es un operador antisimétrico. Luego, si denotamos por $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ al producto interno en el espacio de Hilbert $L^2(D) \equiv L^2$, tenemos que

$$\|Tf\|_{L^2}^2 \geq 2\langle Sf, Af\rangle + 2\langle Lf, Sf\rangle. \tag{2.7}$$

Ahora, teniendo en cuenta que Sf y Af son funciones de valor real, las propiedades de regularidad de f, junto con las condiciones de frontera y el hecho de que $\psi_{xxx} = 0$, nos permiten concluir, después de aplicar integración por partes, que

$$2\langle Sf, Af\rangle = 9\int_D \psi_{xx}(\partial_x^2 f)^2 + \int_D (18\psi_x^2\psi_{xx} - 6\psi_{xt})(\partial_x f)^2 + \int_D (9\psi_x^4\psi_{xx} - 3\psi_{xx}^3 + 6\psi_{xt}\psi_x^2 + \psi_{tt})f^2. \tag{2.8}$$

Debemos aclarar que la integración por partes en los términos donde aparece $\partial_t f$, debe realizarse inicialmente para una regularización de f, f_n, que le dé sentido en L^2 a términos que aparecen en los pasos intermedios, como $\partial_t(\partial_x f_n)$, y luego se razona con un argumento de densidad.

De otra parte, teniendo en cuenta que,

$$\frac{1}{2}\partial_x(Lf)^2 = Lf\partial_x(Lf) = Lf(f + \psi_x Lf) = fLf + \psi_x(Lf)^2,$$

y que por lo tanto,

$$fLf = \frac{1}{2}\partial_x(Lf)^2 - \psi_x(Lf)^2,$$

y nuevamente que $\psi_{xxx} = 0$, un procedimiento de integración por partes nos permite afirmar que

$$2\langle Lf, Sf\rangle = \int_D (6\psi_{xx}^2 + 24\psi_x^2\psi_{xx} + 8\psi_x^4 + \psi_{xt} + 2\psi_t\psi_x)(Lf)^2 + \int_D (-6\psi_x^2 - 3\psi_{xx})f^2. \tag{2.9}$$

Por lo tanto, si reemplazamos (2.8) y (2.9) en (2.7), obtenemos,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L^2(D)}^2 \geq & 9\int_D \psi_{xx}(\partial_x^2 f)^2 + \int_D (18\psi_x^2\psi_{xx} - 6\psi_{xt})(\partial_x f)^2 \\ & + \int_D (9\psi_x^4\psi_{xx} - 3\psi_{xx}^3 + 6\psi_{xt}\psi_x^2 + \psi_{tt} - 6\psi_x^2 - 3\psi_{xx})f^2 \\ & + \int_D (6\psi_{xx}^2 + 24\psi_x^2\psi_{xx} + 8\psi_x^4 + \psi_{xt} + 2\psi_t\psi_x)(Lf)^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definamos $C := \max\{\|\phi'\|_{L^\infty}, \|\phi''\|_{L^\infty}, 1\}$. Entonces, teniendo en cuenta que

$$\psi_x = \frac{2\alpha}{R}(\frac{x}{R} + \phi(t)); \qquad \psi_{xx} = \frac{2\alpha}{R^2}; \qquad \psi_t = 2\alpha(\frac{x}{R} + \phi(t))\phi'(t);$$
$$\psi_{tt} = 2\alpha(\frac{x}{R} + \phi(t))\phi''(t) + 2\alpha(\phi'(t))^2; \quad \psi_{xt} = \frac{2\alpha}{R}\phi'(t),$$

se sigue, en los puntos (x,t) donde $|\frac{x}{R}+\phi(t)|\geq 1$, que

$$18\psi_x^2\psi_{xx}-6\psi_{xt}\geq 144\frac{\alpha^3}{R^4}-12\frac{\alpha}{R}C, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&9\psi_x^4\psi_{xx}-3\psi_{xx}^3+6\psi_{xt}\psi_x^2+\psi_{tt}-6\psi_x^2-3\psi_{xx}\\
&\quad\geq 288\frac{\alpha^5}{R^6}-24\frac{\alpha^3}{R^6}-48\frac{\alpha^3}{R^3}C-2\alpha C-24\frac{\alpha^2}{R^2}-6\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha^3}{R^4}(\psi_{xx}+\psi_x^2)-\frac{\alpha^3}{R^4}(\psi_{xx}+\psi_x^2)\\
&\quad\geq 288\frac{\alpha^5}{R^6}-24\frac{\alpha^3}{R^6}-48\frac{\alpha^3}{R^3}C-2\alpha C-24\frac{\alpha^2}{R^2}-6\frac{\alpha}{R^2}+\frac{\alpha^3}{R^4}(\psi_{xx}+\psi_x^2)-2\frac{\alpha^4}{R^6}-4\frac{\alpha^5}{R^6}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$6\psi_{xx}^2+24\psi_x^2\psi_{xx}+8\psi_x^4+\psi_{xt}+2\psi_t\psi_x\geq 128\frac{\alpha^4}{R^4}-2\frac{\alpha}{R}C-8\frac{\alpha^2}{R}C. \tag{2.13}$$

Ahora, si $\alpha>CR^{3/2}>1$, se tiene que

$$\frac{\alpha^3}{R^4}>\frac{\alpha}{R}C;\qquad \frac{\alpha^5}{R^6}>\frac{\alpha^3}{R^6};\qquad \frac{\alpha^5}{R^6}>\frac{\alpha^4}{R^6};\qquad \frac{\alpha^5}{R^6}>\frac{\alpha^3}{R^3}C;\qquad \frac{\alpha^5}{R^6}>C\alpha;$$
$$\frac{\alpha^5}{R^6}>\frac{\alpha^2}{R^2};\qquad \frac{\alpha^5}{R^6}>\frac{\alpha}{R^2};\qquad \frac{\alpha^4}{R^4}>\frac{\alpha}{R}C;\qquad \frac{\alpha^4}{R^4}>\frac{\alpha^2}{R}C.$$

Entonces, de (2.11) a (2.13), para $\alpha>CR^{3/2}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
18\psi_x^2\psi_{xx}-6\psi_{xt}&\geq 132\frac{\alpha^3}{R^4},\\
-3\psi_{xx}^3+9\psi_x^4\psi_{xx}+6\psi_{xt}\psi_x^2+\psi_{tt}-6\psi_x^2-3\psi_{xx}&\geq 178\frac{\alpha^5}{R^6}+\frac{\alpha^3}{R^4}(\psi_{xx}+\psi_x^2),\\
6\psi_{xx}^2+24\psi_x^2\psi_{xx}+8\psi_x^4+\psi_{xt}+2\psi_t\psi_x&\geq 118\frac{\alpha^4}{R^4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como los soportes de $\partial_x f$, f y Lf están contenidos en $\{(x,t):|\frac{x}{R}+\phi(t)|\geq 1\}$, los tres estimativos anteriores nos permiten ver que de (2.10) se sigue, para $\alpha>CR^{3/2}$, que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^2(D)}^2&\geq 132\frac{\alpha^3}{R^4}\int_D(\partial_x f)^2+178\frac{\alpha^5}{R^6}\int_D f^2+\frac{\alpha^3}{R^4}\int_D(\psi_{xx}+\psi_x^2)f^2+118\frac{\alpha^4}{R^4}\int_D(Lf)^2\\
&\geq \frac{\alpha^3}{R^4}\int_D(\partial_x f)^2+\frac{\alpha^3}{R^4}\int_D\psi_{xx}f^2+\frac{\alpha^3}{R^4}\int_D\psi_x^2f^2+\frac{\alpha^5}{R^6}\int_D f^2\\
&\geq \frac{\alpha^3}{R^4}\Big[\int_D(\partial_x f)^2-\int_D\psi_x 2f\partial_x f+\int_D\psi_x^2f^2\Big]+\frac{\alpha^5}{R^6}\int_D f^2\\
&=\frac{\alpha^3}{R^4}\int_D(\partial_x f-\psi_x f)^2+\frac{\alpha^5}{R^6}\int_D f^2=\frac{\alpha^3}{R^4}\|\partial_x f-\psi_x f\|_{L^2(D)}^2+\frac{\alpha^5}{R^6}\|f\|_{L^2(D)}^2\\
&\geq \frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|\partial_x f-\psi_x f\|_{L^2(D)}+\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|f\|_{L^2(D)}\Big)^2,
\end{aligned}$$

con lo cual queda probado (2.2). ■

Teorema 8 *Sean* u_1, $u_2 \in C([0,1];H^3(\mathbb{R}))\cap C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ *con* $\partial_x^{-1}u_1(t)$, $\partial_x^{-1}u_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$ *para todo* $t \in [0,1]$, *soluciones de*

$$u'(t) + \partial_x^3 u(t) + \partial_x^{-1}u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}) \ \forall t \in [0,1]. \tag{2.14}$$

Sean $\delta > 0$, $r \in (0,1/2)$, $Q := [0,1]\times[r,1-r]$ *y* $v := u_1 - u_2$. *Para* $R > 2$, *definamos*

$$A_R(v) := \Big(\int_0^1 \int_{R-1}^R (|v|^2 + |\partial_x v|^2 + |\partial_x^2 v|^2 + |\partial_x^{-1}v|^2)dxdt\Big)^{1/2}. \tag{2.15}$$

Si $\|v\|_{L^2(Q)} \geq \delta$ *entonces existen constantes*

$$\overline{C} = \overline{C}(r, \|u_1\|_{C([0,1];H^1)}, \|u_2\|_{C([0,1];H^2)}, \|\partial_x^{-1}v\|_{C([0,1];H^3)}, \|v'\|_{C([0,1];L^2)}, \delta) > 0,$$

y

$$C_1 = C_1(\|u_1\|_{C([0,1];H^1)}, \|u_2\|_{C([0,1];H^2)}, \|\partial_x^{-1}v\|_{C([0,1];H^3)}, \|v'\|_{C([0,1];L^2)}) > 0,$$

tales que

$$\frac{\alpha^{5/2}}{R^{7/2}}\|v\|_{L^2(Q)} \leq C_1 e^{9\alpha} A_R(v), \ \forall \alpha \geq \overline{C}R^{3/2}. \tag{2.16}$$

Prueba.
Sean $\phi \in C^\infty([0,1])$ tal que $\phi = 0$ en $[0,r/2]\cup[1-r/2,1]$, $\phi = 4$ en $[r,1-r]$, ϕ creciente en $[r/2,r]$ y decreciente en $[1-r,1-r/2]$. Sea $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función creciente con $\mu = 0$ en $(-\infty,2]$ y $\mu = 1$ en $[3,\infty)$. Consideremos además $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\eta \geq 0$, $supp\,\eta \subset (-1,0)$, $\int \eta = 1$ y θ definido por $\theta(x) := \tilde{\theta}(x-R)$, donde $\tilde{\theta} \in C^\infty(\mathbb{R})$ es una función decreciente con $\tilde{\theta} = 1$ en $(-\infty,-1]$ y $\tilde{\theta} = 0$ en $[0,\infty)$.

Aplicaremos el teorema 7 a la función

$$g(t)(x) := \mu(\frac{x}{R} + \phi(t))\theta(x)v(t)(x) - \eta(x + R\phi(t) - 2R)\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\frac{x'}{R} + \phi(t))\theta(x')v(t)(x')dx',$$

donde $v(t)(x) := u_1(t)(x) - u_2(t)(x)$.

Notemos que por las propiedades de los soportes de θ y μ, la integral de la expresión anterior es igual a la integral en el intervalo compacto $[-2R,R]$.

Por simplicidad, escribiremos

$$g = \mu\theta v - \eta\int_{-2R}^{R} \mu\theta v dx' \equiv \mu\theta v - \eta b_R(t). \tag{2.17}$$

Veamos que g satisface las hipótesis del teorema 7:

Claramente la función $t \mapsto g(t)$ pertenece a $C([0,1];H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$, y de la definición de g se sigue que

(i) $g(0) = g(1) = 0$;

(ii) $supp\, g(t) \subset [-2R-1, R] \subset [-(2R+1), 2R+1]$ para todo $t \in [0,1]$;

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)(x')dx' = 0$.

De (iii) es claro que

$$\partial_x^{-1} g(t)(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)(x')dx' = -\int_{x}^{\infty} g(t)(x')dx'.$$

Observemos que si $\frac{x}{R} + \phi(t) \leq 2 - \frac{1}{R}$, entonces $\mu(\frac{x}{R} + \phi(t)) = 0$ y $\eta(x + R\phi(t) - 2R) = 0$. Luego $g(t)(x) = 0$, para $\frac{x}{R} + \phi(t) \leq 2 - \frac{1}{R}$. Por tanto,

$$supp\, g(\cdot_t)(\cdot_x) \subset \{(x,t) : |\frac{x}{R} + \phi(t)| \geq 2 - \frac{1}{R}\} \subset \{(x,t) : |\frac{x}{R} + \phi(t)| \geq 1\}.$$

De modo similar, si $\frac{x}{R} + \phi(t) \leq 2 - \frac{1}{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \partial_x^{-1} g(t)(x) &= \int_{-\infty}^{x} [\mu(\frac{x'}{R} + \phi(t))\theta(x')v(t)(x') - \eta(x' + R\phi(t) - 2R)b_R(t)]dx' \\ &= \int_{-\infty}^{x} [0 \cdot \theta(x') \cdot v(t)(x') - 0 \cdot b_R(t)]dx' = 0, \end{aligned}$$

y así,

(iv) $supp\, \partial_x^{-1} g(\cdot_t)(\cdot_x) \subset \{(x,t) : |\frac{x}{R} + \phi(t)| > 2 - \frac{1}{R}\} \subset \{(x,t) : |\frac{x}{R} + \phi(t)| \geq 1\}$.

De esta manera g satisface las hipótesis del teorema 7.

Calculemos ahora $\partial_t g$ y $\partial_x^3 g$.

$$\partial_t g = \mu\theta\partial_t v + \mu'\phi'\theta v - R\eta'\phi' b_R - \eta b_R', \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \partial_x^3 g &= \mu\theta\partial_x^3 v + 3\frac{1}{R}\mu'\theta\partial_x^2 v + 3\mu\theta'\partial_x^2 v + 3\frac{1}{R^2}\mu''\theta\partial_x v + 6\frac{1}{R}\mu'\theta'\partial_x v + 3\mu\theta''\partial_x v \\ &\quad + \frac{1}{R^3}\mu'''\theta v + \frac{3}{R^2}\mu''\theta' v + \frac{3}{R}\mu'\theta'' v + \mu\theta''' v - \eta''' b_R. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observemos que como u_1 y u_2 son soluciones de (2.14), entonces $v = u_1 - u_2$ cumple la ecuación diferencial

$$\partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x^{-1} v + u_1\partial_x v + (\partial_x u_2)v = 0. \tag{2.20}$$

Por lo tanto, de (2.18), (2.19) y (2.20) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t g + \partial_x^3 g + \partial_x^{-1} g &= -\mu\theta u_1\partial_x v - \mu\theta(\partial_x u_2)v + (\partial_x^{-1} g - \mu\theta\partial_x^{-1} v) + \mu(3\theta'\partial_x^2 v + 3\theta''\partial_x v + \theta''' v) \\ &\quad + \frac{3}{R}\mu'\theta\partial_x^2 v + (\frac{3}{R^2}\mu''\theta + \frac{6}{R}\mu'\theta')\partial_x v + (\frac{1}{R^3}\mu'''\theta + \frac{3}{R^2}\mu''\theta' + \frac{3}{R}\mu'\theta'' \\ &\quad + \mu'\phi'\theta)v - R\eta'\phi' b_R - \eta b_R' - \eta''' b_R. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Calculemos ahora $\partial_x^{-1}g-\mu\theta\partial_x^{-1}v$. Para tal efecto dividiremos la región en $\mathbb{R}^2$ donde la función $\partial_x^{-1}g-\mu\theta\partial_x^{-1}v$ no se anula, en los siguientes cuatro conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \{(x,t) : 3 \leq \frac{x}{R} + \phi(t);\ x \leq R-1\},\\
A_{12} &= \{(x,t) : 3 \leq \frac{x}{R} + \phi(t);\ R-1 < x \leq R\},\\
A_2 &= \{(x,t) : 2 \leq \frac{x}{R} + \phi(t) < 3;\ x \leq R\},\\
A_3 &= \{(x,t) : 2 - \frac{1}{R} \leq \frac{x}{R} + \phi(t) < 2;\ x \leq R\}.
\end{aligned}$$

$$\partial_x^{-1}g-\mu\theta\partial_x^{-1}v = \begin{cases}
0, & \text{si } x > R\\
-\int_{R-1}^{R}\theta(x')v(t)(x')dx' - \partial_x^{-1}v(t)(R-1), & \text{si } (x,t)\in A_{11}\\
-\int_{x}^{R}\theta(x')v(t)(x')dx' + \theta(x)\int_{x}^{\infty}v(t)(x')dx', & \text{si } (x,t)\in A_{12}\\
-\int_{x}^{R}\mu(\frac{x'}{R}+\phi(t))\theta(x')v(t)(x')dx' & \\
\qquad -\mu(\frac{x}{R}+\phi(t))\theta(x)\partial_x^{-1}v(t)(x), & \text{si } (x,t)\in A_2\\
-b_R(t)\int_{2R-1-R\phi(t)}^{x}\eta(x'+R\phi(t)-2R)dx', & \text{si } (x,t)\in A_3\\
0, & \text{si } \frac{x}{R}+\phi(t) < 2-\frac{1}{R}
\end{cases} \tag{2.22}$$

Por lo tanto, de (2.21) y (2.22) se sigue que

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x^{-1})g &= -\mu\theta u_1\partial_x v - \mu\theta(\partial_x u_2)v + \mu(3\theta'\partial_x^2 v + 3\theta''\partial_x v + \theta''' v)\\
&+ [-\int_{R-1}^{R}\theta v\,dx' - \partial_x^{-1}v(t)(R-1)]\chi_{A_{11}} + [-\int_{x}^{R}\theta v\,dx' - \theta\partial_x^{-1}v]\chi_{A_{12}}\\
&+ \frac{3}{R}\mu'\theta\partial_x^2 v + [\frac{3}{R^2}\mu''\theta + \frac{6}{R}\mu'\theta']\partial_x v + [\frac{1}{R^3}\mu'''\theta + \frac{3}{R^2}\mu''\theta' + \frac{3}{R}\mu'\theta'' + \mu'\phi'\theta]v\\
&+ [-\int_{x}^{R}\mu\theta v\,dx' - \mu\theta\partial_x^{-1}v]\chi_{A_2} - R\eta'\phi' b_R - \eta b_R' - \eta''' b_R - b_R[\int_{2R-1-R\phi(t)}^{x}\eta]\chi_{A_3}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Con el fin de acotar $\|e^{\psi}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x^{-1})g\|_{L^2(D)}$, donde $D = \mathbb{R}\times[0,1]$ y ψ se define como en el teorema 7, estimemos la contribución a esta norma de cada uno de los términos del lado derecho de (2.23).

$$\|e^{\psi}\mu\theta u_1\partial_x v\|_{L^2(D)} \leq \|u_1\|_{L^\infty(D)}\|e^{\psi}\mu\theta\partial_x v\|_{L^2(D)}, \tag{2.24}$$

$$\|e^{\psi}\mu\theta(\partial_x u_2)v\|_{L^2(D)} \leq \|\partial_x u_2\|_{L^\infty(D)}\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)}, \tag{2.25}$$

Teniendo en cuenta que θ, θ' y θ'' tienen soporte en $[R-1,R]$ y que para $t \in [0,1]$ y $x \in [R-1,R]$ se tiene que $|\frac{x}{R}+\phi(t)| \leq 5$, observamos que

$$\begin{aligned}&\|e^{\psi}\mu(3\theta'\partial_x^2 v + 3\theta''\partial_x v + \theta''' v)\|_{L^2(D)}\\ &\qquad \leq Ce^{25\alpha}(\int_0^1\int_{R-1}^R [|v(t)(x)|^2 + |\partial_x v(t)(x)|^2 + |\partial_x^2 v(t)(x)|^2]dxdt)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

También, usando el hecho de que $A_{11} \subset [-R,R-1]\times[0,1]$, se sigue que

$$\|e^{\psi}(\int_{R-1}^R \theta v)\chi_{A_{11}}\|_{L^2(D)} \leq CR^{1/2}e^{25\alpha}(\int_0^1\int_{R-1}^R |v(t)(x)|^2 dxdt)^{1/2}. \tag{2.27}$$

De otra parte, usando la inmersión $H^1((R-1,R)) \hookrightarrow C([R-1,R])$, tenemos que

$$\|e^{\psi}\partial_x^{-1}v(t)(R-1)\chi_{A_{11}}\|_{L^2(D)} \leq CR^{1/2}e^{25\alpha}(\int_0^1\int_{R-1}^R [|\partial_x^{-1}v(t)(x)|^2 + |v(t)(x)|^2]dxdt)^{1/2}. \tag{2.28}$$

Para los términos soportados en A_{12} observamos que

$$\|e^{\psi}(\int_x^R \theta v)\chi_{A_{12}}\|_{L^2(D)} \leq e^{25\alpha}(\int_0^1\int_{R-1}^R |v(t)(x)|^2 dxdt)^{1/2}, \tag{2.29}$$

$$\|e^{\psi}\theta\partial_x^{-1}v\chi_{A_{12}}\|_{L^2(D)} \leq e^{25\alpha}(\int_0^1\int_{R-1}^R |\partial_x^{-1}v(t)(x)|^2 dxdt)^{1/2}. \tag{2.30}$$

Teniendo en cuenta que los términos con μ', μ'' y μ''' están soportados en $\{(x,t) : |\frac{x}{R}+\phi(t)| \leq 3\}$, obtenemos que

$$\|e^{\psi}\frac{3}{R}\mu'\theta\partial_x^2 v\|_{L^2(D)} \leq C\frac{e^{9\alpha}}{R}\|\partial_x^2 v\|_{L^2(D)}, \tag{2.31}$$

$$\|e^{\psi}[\frac{3}{R^2}\mu''\theta + \frac{6}{R}\mu'\theta']\partial_x v\|_{L^2(D)} \leq Ce^{9\alpha}[\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}]\|\partial_x v\|_{L^2(D)}, \tag{2.32}$$

$$\|e^{\psi}[\frac{1}{R^3}\mu'''\theta + \frac{3}{R^2}\mu''\theta' + \frac{3}{R}\mu'\theta'' + \mu'\phi'\theta]v\|_{L^2(D)} \leq Ce^{9\alpha}[\frac{1}{R^3}+\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}+1]\|v\|_{L^2(D)}. \tag{2.33}$$

Como $\mu(\frac{x}{R}+\phi(t))\theta(x)$ está soportada en $[-2R,R]\times[0,1]$ y A_2 está contenido en este mismo conjunto, obtenemos que

$$\|e^{\psi}(\int_x^R \mu\theta v)\chi_{A_2}\|_{L^2(D)} \leq CRe^{9\alpha}\|v\|_{L^2(D)}. \tag{2.34}$$

También,

$$\|e^{\psi}\mu\theta\partial_x^{-1}v\chi_{A_2}\|_{L^2(D)} \leq e^{9\alpha}\|\partial_x^{-1}v\|_{L^2(D)}. \tag{2.35}$$

Usando el hecho de que los términos con η, η' y η'' están soportados en $\{(x,t) : 2 - \frac{1}{R} \leq \frac{x}{R} + \phi(t) \leq 2\}$ y teniendo en cuenta la definición de $b_R(t)$ dada en (2.17),

$$\begin{aligned}
&\|e^{\psi}(R\eta'\phi' b_R + \eta b_R' + \eta''' b_R)\|_{L^2(D)} \\
&\qquad \leq Ce^{4\alpha} R(\sup_{t\in[0,1]} |b_R(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |b_R'(t)|)(\|\eta\|_{L^2(D)} + \|\eta'\|_{L^2(D)} + \|\eta'''\|_{L^2(D)}) \\
&\qquad \leq Ce^{4\alpha} R^{3/2}(\|v\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))} + \|v'\|_{C([0,1];L^2(\mathbb{R}))})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

y

$$\|e^{\psi} b_R(\int_{2R-1-R\phi(t)}^{x} \eta)\chi_{A_3}\|_{L^2(D)} \leq CR^{1/2}e^{4\alpha}\|v\|_{L^2(D)}. \tag{2.37}$$

Observemos ahora que

$$\|u_1\|_{L^\infty(D)}\|e^{\psi}\mu\theta\partial_x v\|_{L^2(D)} \leq C\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta v)\|_{L^2(D)} + C\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta)v\|_{L^2(D)}, \tag{2.38}$$

y además que

$$\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta)v\|_{L^2(D)} \leq Ce^{9\alpha}\|v\|_{L^2(D)}. \tag{2.39}$$

Entonces, de (2.23) a (2.39), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\|e^{\psi}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x^{-1})g\|_{L^2(D)} \\
&\quad \leq C\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta v)\|_{L^2(D)} + C\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} + CR^{1/2}e^{25\alpha}A_R(v) + CRe^{9\alpha} + CR^{3/2}e^{4\alpha},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

donde $C = C(\|u_1\|_{C([0,1];H^1)}, \|u_2\|_{C([0,1];H^2)}, \|\partial_x^{-1}v\|_{C([0,1];H^3)}, \|v'\|_{C([0,1];L^2)})$.

Ahora, teniendo en cuenta que los soportes de las funciones $\mu(\frac{x}{R}+\phi(t))$ y $\eta(x+R\phi(t)-2R)$ son disjuntos, si aplicamos el teorema 7 a la función g, obtenemos una constante $C_0 = C_0(r) > 0$ tal que si $\alpha \geq C_0 R^{3/2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta v)\|_{L^2(D)} &\leq \frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}g\|_{L^2(D)} + \frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\psi}\partial_x g\|_{L^2(D)} \\
&\leq \sqrt{2}\|e^{\psi}(\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x^{-1})g\|_{L^2(D)} \\
&\leq C_1\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta v)\|_{L^2(D)} + C_1\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} \\
&\quad + C_1 R^{1/2}e^{25\alpha}A_R(v) + 2C_1 R^{3/2}e^{9\alpha},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

donde $C_1 := \sqrt{2}C$.

Si tomamos $\alpha \geq max\{C_0, (2C_1)^{2/5}, (2C_1)^{2/3}\}R^{3/2} \equiv \tilde{C}R^{3/2}$, entonces

$$C_1 \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^{15/4}} \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3},$$

y

$$C_1 \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{3/2}}{R^{9/4}} \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}.$$

Luego, para $\alpha \geq \tilde{C}R^{3/2}$, de (2.41), se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} &\leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^{3/2}}{R^2}\|e^{\psi}\partial_x(\mu\theta v)\|_{L^2(D)} \\ &\leq C_1 R^{1/2}e^{25\alpha}A_R(v) + 2C_1R^{3/2}e^{9\alpha}.\end{aligned}$$

Definamos $Q := [0,1]\times[r,1-r]$. Como $\mu\theta = 1$ y $\psi \geq 16\alpha$ en Q, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}e^{16\alpha}\|v\|_{L^2(Q)} \leq &\frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}v\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{2}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}\|e^{\psi}\mu\theta v\|_{L^2(D)} \\ \leq &C_1R^{1/2}e^{25\alpha}A_R(v) + 2C_1R^{3/2}e^{9\alpha}. \qquad (2.42)\end{aligned}$$

La prueba del teorema estará completa si encontramos una constante $\overline{C} \geq \tilde{C}$ tal que para $\alpha > \overline{C}R^{3/2}$ y $R > 2$, podamos absorber el término $2C_1R^{3/2}e^{9\alpha}$ del lado derecho de (2.42) con el término del lado izquierdo de (2.42).

Buscamos entonces una constante $\overline{C}$ tal que si $\alpha > \overline{C}R^{3/2}$ y $R > 2$,

$$2C_1R^{3/2}e^{9\alpha} \leq \frac{1}{4}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}e^{16\alpha}\|v\|_{L^2(Q)}. \qquad (2.43)$$

Por tanto, será suficiente hallar $\overline{C}$ tal que

$$2C_1R^{3/2} \leq \frac{1}{4}\frac{(\overline{C}R^{3/2})^{5/2}}{R^3}e^{7\overline{C}R^{3/2}}\delta,$$

es decir, tal que

$$C_1 \leq \frac{1}{8}\overline{C}^{5/2}\frac{e^{7\overline{C}R^{3/2}}}{R^{3/4}}\delta.$$

Notemos que la función $R \mapsto \dfrac{e^{aR^{3/2}}}{R^{3/4}}$ es creciente para $R \geq 1$ (en particular para $R \geq 2$) si $a \geq \dfrac{1}{2}$. De esta manera, si tomamos $\overline{C} \geq \dfrac{1}{14}$, entonces $\dfrac{e^{7\overline{C}R^{3/2}}}{R^{3/4}} \geq \dfrac{e^{7\overline{C}}}{1}$ para $R > 1$ y así, si $\overline{C} \geq \dfrac{1}{14}$ y además $C_1 \leq \dfrac{1}{8}\dfrac{\delta}{(14)^{5/2}}e^{7\overline{C}}$ se cumplirá (2.43) para $\alpha > \overline{C}R^{3/2}$, $R > 2$.

Basta entonces tomar $\overline{C} \geq \max\{\dfrac{1}{14}, \dfrac{1}{7}\ln[\dfrac{8(14)^{5/2}C_1}{\delta}], \tilde{C}\}$, para obtener la constante $\overline{C}$ deseada y concluir que si $\alpha > \overline{C}R^{3/2}$, entonces

$$\frac{1}{4}\frac{\alpha^{5/2}}{R^3}e^{16\alpha}\|v\|_{L^2(Q)} \leq C_1R^{1/2}e^{25\alpha}A_R(v), \qquad (2.44)$$

con lo cual queda probado el teorema 8. ■

2.3 Demostración del resultado principal (teorema 4)

En esta sección se demuestra el teorema 4. La prueba de este teorema está precedida por dos lemas de interpolación (lema 11 y lema 12) que muestran que la hipótesis de decaimiento polinomial para u_1 y u_2 y la hipótesis (i) de decaimiento exponencial para $u_1(0) - u_2(0)$ y $u_1(1) - u_2(1)$ del teorema 4 son heredadas por la derivada de orden 1, debido al grado de regularidad de estas funciones.

Lema 11 *Sean $\alpha > 0$ y $f \in H^2(\mathbb{R})$ tal que $(1 + x_+^2)^\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$\|(1 + x_+^2)^{\alpha/2} f\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_\alpha(\|(1 + x_+^2)^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}). \tag{3.1}$$

Prueba.
Para $\beta > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos $\psi_\beta(x) := (1 + x_+^2)^\beta$. Entonces

$$|\psi_\beta'(x)| = |2\beta x_+(1 + x_+^2)^{\beta-1}| \leq C_\beta(1 + x_+^2)^\beta = C_\beta \psi_\beta(x),$$

y, para $x \neq 0$

$$|\psi_\beta''(x)| = |2\beta\chi_{(0,\infty)}(x)(1 + x_+^2)^{\beta-1} + 4\beta(\beta - 1)x_+^2(1 + x_+^2)^{\beta-2}| \leq C_\beta(1 + x_+^2)^\beta = C_\beta\psi_\beta(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|(1 + x_+^2)^{\alpha/2} f\|_{H^1(\mathbb{R})} &= \|\psi_{\alpha/2} f\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq C\|\psi_{\alpha/2} f\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\|\psi_{\alpha/2}' f\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\|\psi_{\alpha/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C_\alpha\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\|\psi_{\alpha/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Para estimar $\|\psi_{\alpha/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ definamos una función par, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, de tal forma que $\varphi(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ si $x \geq 2$ y φ es decreciente si $1 < x < 2$. Además, para $n \in \mathbb{N}$, definamos $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$. De esta forma, se tiene que φ_n' y φ_n'' son acotadas para todo $n \in \mathbb{N}$ y la cota no depende de n.

Entonces, observando que $\psi_\alpha\varphi_n \in H^2(\mathbb{R})$, una aplicación de la fórmula de integración por partes y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, implica que

$$\begin{aligned}
&\|\psi_{\alpha/2}\partial_x f\varphi_n^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \psi_\alpha\varphi_n\partial_x f\partial_x f = -\int_{\mathbb{R}} (\psi_\alpha\varphi_n)'(\partial_x f)f - \int_{\mathbb{R}} \psi_\alpha\varphi_n(\partial_x^2 f)f \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\psi_\alpha''\varphi_n + 2\psi_\alpha'\varphi_n' + \psi_\alpha\varphi_n'')f^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad \leq C_\alpha\|\psi_{\alpha/2} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad \leq C_\alpha\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces, tomando límite $n \to \infty$ en el lado izquierdo de (3.3) y aplicando el teorema de la convergencia monótona obtenemos

$$\|\psi_{\alpha/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_\alpha\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.4}$$

De esta forma, de (3.2) y (3.4), se sigue que

$$\begin{aligned}\|(1+x_+^2)^{\alpha/2}f\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq C_\alpha^2\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C\|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leq C_\alpha^2(\|\psi_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2),\end{aligned}$$

lo cual prueba el lema. ■

Lema 12 *Sea $f \in L^2(e^{ax_+^{3/2}}dx) \cap H^2(\mathbb{R})$ para algún $a > 0$. Entonces $\partial_x f \in L^2(e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}}dx)$.*

Prueba. Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos $\psi_a(x) := e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}}$. Entonces,

$$|\psi_a'(x)| = \frac{3}{4}ax_+^{1/2}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} \leq \frac{3}{4}a(1+x_+^{3/2})e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} \leq \frac{3}{2}e^{\frac{a}{2}(1+x_+^{3/2})}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} = C_a\psi_{2a}(x)$$

y para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}|\psi_a''(x)| &= \frac{3}{8}ax_+^{-1/2}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} + \frac{9}{16}a^2x_+e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} \leq \frac{3}{8}ax_+^{-1/2}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} + \frac{9}{16}a^2(1+x_+^{3/2})e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}}\\ &\leq \frac{3}{8}ax_+^{-1/2}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} + \frac{9}{8}ae^{\frac{a}{2}(1+x_+^{3/2})}e^{\frac{a}{2}x_+^{3/2}} \leq C_a(x_+^{-1/2}\psi_a(x) + \psi_{2a}(x)).\end{aligned}$$

Para estimar $\|\psi_{a/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ definamos φ como en el lema 11 y para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definamos $\varphi_n(x) := 1 - \varphi(x)$, si $|x| \leq 2$ y $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$, si $|x| > 2$. De esta forma, se tiene que φ_n' y φ_n'' son acotadas para todo $n \in \mathbb{N}$ y la cota no depende de n.

Entonces, como $\psi_a\varphi_n \in H^2(\mathbb{R})$, procediendo como en la desigualdad (3.3), obtenemos para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}&\|\psi_{a/2}\partial_x f\varphi_n^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\ &\qquad\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\psi_a''\varphi_n + 2\psi_a'\varphi_n' + \psi_a\varphi_n'')f^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\qquad\leq C_a\int_{\mathbb{R}} x_+^{-1/2}\psi_a\varphi_n f^2 + C_a\int_{\mathbb{R}}\psi_{2a}f^2 + C\|\psi_{a/2}f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\qquad\leq C_a\int_1^\infty \psi_a\varphi_n f^2 + C_a\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\qquad\leq C_a\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\psi_{a/2}\partial_x f(\varphi+\varphi_n)^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\psi_{a/2}\partial_x f\varphi^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\psi_{a/2}\partial_x f\varphi_n^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\ &= \|e^{ax_+^{3/2}}\partial_x f\varphi^{1/2}\|_{L^2([-2,2])}^2 + \|\psi_{a/2}\partial_x f\varphi_n^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\ &\leq e^{4a\sqrt{2}}\|\partial_x f\|_{L^2([-2,2])}^2 + \|\psi_{a/2}\partial_x f\varphi_n^{1/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\ &\leq C_a\|\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_a\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\psi_a f\|_{L^2(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, hemos usado el estimativo (3.5).

Como $\varphi + \varphi_n = \varphi(\cdot/n)$, del teorema de la convergencia monótona, concluimos que

$$\|\psi_{a/2}\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty.$$

■

Prueba del teorema 4

Sea $v := u_1 - u_2$. Como u_1 y u_2 satisfacen la ecuación (0.1), entonces v satisface la siguiente ecuación

$$v'(t) + \partial_x^3 v(t) + \partial_x^{-1} v(t) + u_1(t)\partial_x v(t) + \partial_x u_2(t) v(t) = 0, \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Mostremos que para todo $t \in [0,1]$, $\partial_x^{-1} v(t) \in L^2(e^{2x}dx)$ y que existe $C > 0$ tal que

$$\|\partial_x^{-1} v(t)\|_{L^2(e^{2x}dx)} \leq C \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{3.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x^{-1} v(t)(x)|^2 e^{2x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_x^{\infty} v(t)(x')dx' \right|^2 e^{2x} dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} e^x \Big(\int_x^{\infty} e^{\frac{3}{4}x'} e^{-\frac{1}{4}x'} |v(t)(x')| dx' \Big)^2 dx + \int_0^{\infty} \Big(\int_x^{\infty} e^{2x'} e^{-x'} |v(t)(x')| dx' \Big)^2 dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} e^x \Big(\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' \Big) \Big(\int_x^{\infty} e^{\frac{3}{2}x'} |v(t)(x')|^2 dx' \Big) dx \\
&\quad + \int_0^{\infty} \Big(\int_x^{\infty} e^{-2x'} dx' \Big) \Big(\int_x^{\infty} e^{4x'} |v(t)(x')|^2 dx' \Big) dx \\
&\leq 2 \Big(\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{1}{2}x} dx \Big) \|v(t)\|^2_{L^2(e^{\frac{3}{2}x}dx)} + \frac{1}{2} \Big(\int_0^{\infty} e^{-2x} dx \Big) \|v(t)\|^2_{L^2(e^{4x}dx)} \\
&\leq C \Big(\|v(t)\|^2_{L^2(e^{\frac{3}{2}x}dx)} + \|v(t)\|^2_{L^2(e^{4x}dx)} \Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la hipótesis (ii), se sigue (3.7), y entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\partial_x^{-1} v \in L^\infty([0,1]; L^1([0,+\infty))). \tag{3.8}$$

De la hipótesis (ii), del hecho de que $v \in C([0,1]; H^4(\mathbb{R}))$, del lema de interpolación 1 del capítulo 1 y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puede verse también que $\partial_x^3 v$, $u_1 \partial_x v$, $(\partial_x u_2) v$ son funciones acotadas de $[0,1]$ con valores en $L^1([0,+\infty))$.

Teniendo en cuenta esto, de (3.6) y (3.8), se sigue que

$$v' \in L^\infty([0,1]; L^1([0,+\infty))). \tag{3.9}$$

Sean $R > 2$ y $N \in \mathbb{N}$, $N > 4R$ y sea $\phi_{RN} \equiv \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\phi(x) = 0$ si $x \leq R$, ϕ es creciente si $R < x \leq R+1$, $\phi(x) = 1$ si $R+1 < x \leq N$, ϕ es decreciente si $N < x \leq N+1$ y

$\phi(x) = 0$ si $x > N+1$. Las ϕ_{RN} pueden fácilmente construirse con la propiedad de que ϕ_{RN} y $\phi_{R(N+1)}$ coincidan en $(-\infty, N]$ y de que $|\phi_{RN}^{(j)}(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con C independiente de $j \in \{0,1,2,3\}$, R y N.

Sea $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $supp\, \tilde{\eta} \subset (-1,0)$ tal que $\tilde{\eta} \geq 0$ y $\int \tilde{\eta} = 1$, y definamos $\eta_R \equiv \eta := \tilde{\eta}(\cdot - R)$.

Definamos

$$a_R(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x')v(t)(x')dx' = \int_R^{N+1} \phi(x')v(t)(x')dx',\ t \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y teniendo en cuenta la hipótesis (ii) con $\beta = 1$, tenemos que

$$\|a_R\|_{L^\infty([0,1])} \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^{+\infty} |v(t)(x')|dx' \leq C\|v\|_{L^\infty([0,1];L^2(e^{2x}dx))}, \tag{3.11}$$

con C independiente de R y de N.

Como $a_R(t) = \langle v(t), \phi\rangle$ entonces $a_R \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ con $a_R'(t) = \langle v'(t), \phi\rangle$; es decir,

$$a_R'(t) = \int_R^{N+1} \phi(x')v'(t)(x')dx',$$

y así,

$$\|a_R'\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|v'\|_{L^\infty([0,1];L^1([0,\infty)))}. \tag{3.12}$$

Definamos también

$$w \equiv w_{RN}(t)(x) := \phi(x)v(t)(x) - a_R(t)\eta(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]. \tag{3.13}$$

De la definición de w y de las propiedades de a_R obtenidas, es claro que $w \in C([0,1];H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,1];L^2(\mathbb{R}))$. De otra parte, para todo $t \in [0,1]$,

$$supp\, w(t) \subset [R-1, N+1] \text{ y } \int_{R-1}^{N+1} w(t)(x)dx = 0.$$

De esta manera, w satisface las hipótesis de los estimativos tipo Carleman para la función, la antiderivada, la primera y la segunda derivada (teoremas 5 y 6). Por lo tanto, aplicando estos resultados a w, teniendo en cuenta que

$$\|e^{\lambda x}w(j)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|J(e^{\lambda x}w(j))\|_{L^2(\mathbb{R})},\ j = 0,1,$$

y que para $D := \mathbb{R} \times [0,1]$,

$$\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L_t^1 L_x^2(D)} \leq \|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L^2(D)},$$

entonces, si $\lambda > 2$ obtenemos que

$$\|e^{\lambda x}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}$$
$$\leq C\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} + C\lambda^2(\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \|J(e^{\lambda x}w(1))\|_{L_x^2(\mathbb{R})}), \tag{3.14}$$

donde $\|\cdot\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} := \|\cdot\|_{L^2(D)} + \|\cdot\|_{L_x^1 L_t^2(D)}$.

Además, como los soportes de η y ϕ son disjuntos, entonces

$$\|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2(D)} \leq \|e^{\lambda x}w\|_{L^2(D)} \leq \|e^{\lambda x}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)},$$

y

$$\|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} \leq \|e^{\lambda x}\partial_x w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)},$$

y por lo tanto, de (3.14), se sigue que

$$\|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}$$
$$\leq C\|e^{\lambda x}(w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w)\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} + C\lambda^2(\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \|J(e^{\lambda x}w(1))\|_{L_x^2(\mathbb{R})}). \tag{3.15}$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.13) y (3.6), se sigue que

$$\begin{aligned} w' + \partial_x^3 w + \partial_x^{-1}w \\ &= \phi v' - a_R'\eta + \phi''' v + 3\phi''\partial_x v + 3\phi'\partial_x^2 v + \phi\partial_x^3 v - a_R\eta''' + \partial_x^{-1}w \\ &= \phi(v' + \partial_x^3 v + \partial_x^{-1}v) - \phi\partial_x^{-1}v + \partial_x^{-1}w + \phi''' v + 3\phi''\partial_x v + 3\phi'\partial_x^2 v - a_R'\eta - a_R\eta''' \\ &= -u_1\partial_x(\phi v) - \phi(\partial_x u_2)v - \phi\partial_x^{-1}v + \partial_x^{-1}w - a_R'\eta - a_R\eta''' + F, \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde,

$$F := \phi''' v + 3\phi''\partial_x v + 3\phi'\partial_x^2 v + \phi' u_1 v. \tag{3.17}$$

Además, teniendo en cuenta (3.10) y (3.13), se obtiene que

$$\begin{aligned} -\phi(x)\partial_x^{-1}v(t)(x) + \partial_x^{-1}w(t)(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < R-1 \\ a_R(t)(\int_x^R \eta(x')dx' - 1) & \text{si } R-1 \leq x < R \\ \int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x) - \phi(x')]dx' & \text{si } R \leq x < N+1 \\ 0 & \text{si } x \geq N+1 \end{cases} \\ &= a_R(t)\Big(\int_x^R \eta(x')dx' - 1\Big)\chi_{[R-1,R)}(x) \\ &\quad + \int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x) - \phi(x')]dx'\chi_{[R,N+1)}(x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por lo tanto, de (3.15), (3.16) y (3.18), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} \\
&\quad \leq C\|e^{\lambda x}u_1\partial_x(\phi v)\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} + C\|e^{\lambda x}\phi(\partial_x u_2)v\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} && \text{(I)} \\
&\qquad + C\|e^{\lambda x}\Big[a_R\Big(\int_x^R \eta(x')dx' - 1\Big)\chi_{[R-1,R)} - a_R'\eta - a_R\eta'''\Big]\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} && \text{(II)} \\
&\qquad + C\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R,N+1)}\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} && \text{(III)} \\
&\qquad + C\|e^{\lambda x}F\|_{L^2(D)\cap L_x^1 L_t^2(D)} && \text{(IV)} \\
&\qquad + C\lambda^2(\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L_x^2(\mathbb{R})} + \|J(e^{\lambda x}w(1))\|_{L_x^2(\mathbb{R})}) && \text{(V)} \\
&\qquad \equiv \text{I+II+III+IV+V}. && (3.19)
\end{aligned}
$$

A continuación estimaremos cada uno de los términos del lado derecho de la desigualdad (3.19).

Estimación de I:

Observemos que para $R > 2$, si

$$v_1^R(t)(x) := \chi_{[R,\infty)}(x)u_1(t)(x); \quad v_2^R(t)(x) := \chi_{[R,\infty)}(x)\partial_x u_2(t)(x), \quad \text{para } (x,t) \in D,$$

entonces

$$
\begin{aligned}
C\|e^{\lambda x}u_1\partial_x(\phi v)\|_{L^2(D)} &\leq C\|v_1^R\|_{L_x^2 L_t^\infty(D)}\|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}, && (3.20)\\
C\|e^{\lambda x}\phi(\partial_x u_2)v\|_{L^2(D)} &\leq C\|v_2^R\|_{L_x^\infty L_t^\infty(D)}\|e^{\lambda x}\phi v\|_{L_x^2 L_t^2(D)}, && (3.21)\\
C\|e^{\lambda x}u_1\partial_x(\phi v)\|_{L_x^1 L_t^2(D)} &\leq C\|v_1^R\|_{L_x^1 L_t^\infty(D)}\|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}, && (3.22)\\
C\|e^{\lambda x}\phi(\partial_x u_2)v\|_{L_x^1 L_t^2(D)} &\leq C\|v_2^R\|_{L_x^2 L_t^\infty(D)}\|e^{\lambda x}\phi v\|_{L_x^2 L_t^2(D)}. && (3.23)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que las normas de v_1^R y v_2^R que aparecen en (3.20) a (3.23) tienden a 0 cuando $R \to \infty$. En efecto,

$$\|v_1^R\|_{L_x^2 L_t^\infty(D)} = \Big[\int_R^\infty (\sup_{t\in[0,1]} |u_1(t)(x)|)^2 dx\Big]^{1/2}.$$

Como, para $t \in [0,1]$, se tiene que $(1+x_+^2)^\alpha u_1(t) \in L^2(\mathbb{R}_x)$, entonces, por el lema 11,

$$\|(1+x_+^2)^{\alpha/2}u_1(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_\alpha(\|(1+x_+^2)^\alpha u_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x^2 u_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}).$$

Y por la inmersión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ se tiene que

$$|u_1(t)(x)| \leq K\frac{C_\alpha\|u_1\|_{C([0,1];H^2(\mathbb{R})\cap L^2((1+x_+'^2)^{2\alpha}dx'))}}{(1+x_+^2)^{\alpha/2}} \leq \frac{C}{(1+x_+^2)^{\alpha/2}}, \text{ para todo } (x,t) \in D,$$

con C independiente de R.

Luego,

$$\|v_1^R\|_{L_x^2 L_t^\infty(D)} \leq C\Big[\int_R^\infty \frac{1}{(1+x_+^2)^\alpha}dx\Big]^{1/2} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \tag{3.24}$$

ya que $2\alpha > 2 > 1$.

Y en forma similar, empleando el lema 11, se obtiene que

$$\begin{aligned}\|v_2^R\|_{L_x^\infty L_t^\infty(D)} &= \sup_{\substack{x\geq R\\ t\in[0,1]}} |\partial_x u_2(t)(x)| \\ &\leq \sup_{\substack{x\geq R\\ t\in[0,1]}} K\frac{C_\alpha(\|(1+x_+^2)^{\alpha/2}\partial_x u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x^3 u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})})}{(1+x_+^2)^{\alpha/4}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pero, aplicando nuevamente el lema 11, se sigue que

$$\begin{aligned}\|(1+x_+^2)^{\alpha/2}\partial_x u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|\partial_x[(1+x_+^2)^{\alpha/2}u_2(t)]\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\alpha(1+x_+^2)^{\alpha/2-1}x_+u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C_\alpha(\|(1+x_+^2)^\alpha u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x^2 u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por lo tanto, de (3.25) y (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}\|v_2^R\|_{L_x^\infty L_t^\infty(D)} &\leq KC_\alpha\|u_2\|_{C([0,1];H^3(\mathbb{R})\cap L^2((1+x_+^2)^{2\alpha}dx))} \sup_{\substack{x\geq R\\ t\in[0,1]}} \frac{1}{(1+x_+^2)^{\alpha/4}} \\ &= \frac{C}{(1+R^2)^{\alpha/4}} \xrightarrow{R\to\infty} 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

En forma análoga a (3.24) y (3.27), usando el hecho de que para $\alpha > 1$,

$$\int_R^\infty \frac{1}{(1+x_+^2)^{\alpha/2}}dx \to 0$$

cuando $R\to\infty$, se obtiene que

$$\|v_1^R\|_{L_x^1 L_t^\infty(D)} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \tag{3.28}$$

y

$$\|v_2^R\|_{L_x^2 L_t^\infty(D)} \xrightarrow{R\to\infty} 0. \tag{3.29}$$

Por lo tanto, de (3.20) a (3.24) y (3.27) a (3.29), se sigue que existe $R_0 > 2$, tal que si $R > R_0$,

$$\mathrm{I} \leq \frac{1}{2}\|e^{\lambda x}\phi v\|_{L_x^2 L_t^2(D)} + \frac{1}{2}\|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}. \tag{3.30}$$

Como $\phi(\cdot_x)$ es una función de soporte compacto, entonces

$$\|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} < \infty \;\; y \;\; \|e^{\lambda x}\phi v\|_{L_x^2 L_t^2(D)} < \infty,$$

y entonces, si $R > R_0$, el término I puede ser absorbido por el primer y tercer términos del lado izquierdo de (3.19).

Estimación de II:

Teniendo en cuenta (3.11) y (3.12), tenemos que, para $(x,t) \in D$,

$$
\begin{aligned}
|a_R(t)\Big(\int_x^R \eta(x')dx' - 1\Big)\chi_{[R-1,R]}(x) - a_R'\eta(x) - a_R\eta'''(x)| \\
&\leq \Big(|a_R(t)| + |a_R'(t)\eta(x)| + |a_R(t)\eta'''|\Big)\chi_{[R-1,R]}(x) \\
&\leq C\chi_{[R-1,R]}(x),
\end{aligned}
$$

de donde se sigue fácilmente que

$$
\mathrm{II} \leq Ce^{\lambda R}, \tag{3.31}
$$

Estimación de III:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R,N+1)}\|_{L^2(D)} \leq \\
&\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R,R+1)}\|_{L^2(D)} \\
&+ \|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R+1,N)}\|_{L^2(D)} \\
&+ \|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[N,N+1)}\|_{L^2(D)}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Para estimar cada uno de los términos del lado derecho de la anterior desigualdad tendremos en cuenta la hipótesis (ii) del teorema 4 y la inmersión $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ para obtener una constante K_β tal que para todo $(x,t) \in D$,

$$
|v(t)(x)| \leq K_\beta e^{-\beta x}. \tag{3.33}
$$

Usando (3.33), con $\beta = 1$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R,R+1)}\|_{L^2(D)} \leq & e^{\lambda(R+1)}K_1\|\int_x^\infty e^{-x'}dx'\chi_{[R,R+1)}\|_{L^2(D)} \\
\leq & e^{\lambda(R+1)}K_1\|e^{-x}\chi_{[R,R+1)}\|_{L^2(D)} \\
\leq & e^{\lambda(R+1)}K_1e^{-R} \\
\leq & K_1e^{\lambda(R+1)}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Con $\beta = 2\lambda$ en (3.33), teniendo en cuenta que $\phi(x) - \phi(x') = 0$ para $x, x' \in [R+1, N)$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[R+1,N)}\|_{L^2(D)} \leq & \|e^{\lambda x}\int_N^\infty v(t)(x')dx'\chi_{[R+1,N)}\|_{L^2(D)} \\
\leq & \frac{K_{2\lambda}}{2\lambda}\|e^{\lambda x}e^{-2\lambda N}\chi_{[R+1,N)}\|_{L^2(D)} \\
\leq & C_\lambda e^{-2\lambda N}\|e^{\lambda x}\chi_{[R+1,N)}\|_{L^2(D)} \\
\leq & C_\lambda e^{-\lambda N},
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

y

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')[\phi(x)-\phi(x')]dx'\chi_{[N,N+1)}\|_{L^2(D)} &\leq e^{\lambda(N+1)}K_{2\lambda}\|\int_x^\infty e^{-2\lambda x'}dx'\chi_{[N,N+1)}\|_{L^2(D)}\\ &\leq e^{\lambda(N+1)}\frac{K_{2\lambda}}{2\lambda}e^{-2\lambda N}\|\chi_{[N,N+1)}\|_{L^2(D)}\\ &\leq C_\lambda e^{-\lambda N}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Fácilmente puede verse que se tienen las mismas estimaciones (3.34), (3.35) y (3.36) para la norma $\|\cdot\|_{L^1_xL^2_t(D)}$. Por lo tanto, de (3.32), de (3.34) a (3.36), y de las estimaciones correspondientes para la norma $\|\cdot\|_{L^1_xL^2_t(D)}$, se sigue que

$$\text{III} \leq Ce^{\lambda(R+1)} + C_\lambda e^{-\lambda N}. \tag{3.37}$$

Estimación de IV:

Como ϕ', ϕ'' y ϕ''' están soportadas en $[R,R+1]\cup[N,N+1]$, entonces

$$\begin{aligned}|F| =&|\phi'''v+3\phi''\partial_x v+3\phi'\partial_x^2 v+\phi' u_1 v|\\ \leq&3(|\phi'''|+|\phi''|+|\phi'|)(|v|+|\partial_x v|+|\partial_x^2 v|+|u_1 v|)\\ \leq&C(\chi_{[R,R+1]}+\chi_{[N,N+1]})(|v|+|\partial_x v|+|\partial_x^2 v|+|u_1 v|). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Como $u_1,u_2\in C([0,1];H^3(\mathbb{R}))$, entonces existe una constante $C>0$ que depende de u_1 y de v, tal que, para todo $(x,t)\in D$,

$$(|v(t)(x)|+|\partial_x v(t)(x)|+|\partial_x^2 v(t)(x)|+|u_1(t)(x)v(t)(x)|)\leq C. \tag{3.39}$$

Además, similarmente a la obtención de (3.33), empleando la hipótesis (ii) del teorema 4, el lema de interpolación 1 del capítulo 1 y la inmersión de $H^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$, podemos afirmar que existe una constante $C_\lambda>0$, tal que para $(x,t)\in D$, se tiene que

$$(|v(t)(x)|+|\partial_x v(t)(x)|+|\partial_x^2 v(t)(x)|+|u_1(t)(x)v(t)(x)|)\leq C_\lambda e^{-2\lambda x}. \tag{3.40}$$

Luego de (3.38), (3.39) y (3.40) se sigue que

$$|F|\leq C\chi_{[R,R+1]}+C_\lambda e^{-2\lambda x}\chi_{[N,N+1]},$$

de lo cual se concluye que,

$$\text{IV} \leq Ce^{\lambda(R+1)} + C_\lambda e^{-\lambda N}. \tag{3.41}$$

Estimación de V:

Teniendo en cuenta que $0 \leq \phi \leq 1$, $|\phi'| < C$ y que $\lambda > 2$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lambda^2\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R})} =& \lambda^2\|e^{\lambda x}w(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
\leq& C\lambda^3\|e^{\lambda x}\phi v(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\lambda^2\|e^{\lambda x}\phi' v(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + C\lambda^2\|e^{\lambda x}\phi\partial_x v(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ C\lambda^3\|e^{\lambda x}a_R(0)\eta\|_{L^2([R-1,R])} + C\lambda^2\|e^{\lambda x}a_R(0)\eta'\|_{L^2([R-1,R])} \\
\leq& C\lambda^3\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + C\lambda^2\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} \\
&+ C\lambda^2\|e^{\lambda x}\partial_x v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + C\lambda^3|a_R(0)|\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|e^{\lambda x}\|_{L^2([R-1,R])} \\
&+ C\lambda^2|a_R(0)|\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|e^{\lambda x}\|_{L^2([R-1,R])} \\
\leq& C\lambda^3\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + C\lambda^2\|e^{\lambda x}\partial_x v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + C\lambda^3|a_R(0)|\frac{e^{\lambda R}}{\sqrt{2\lambda}}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Pero, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la definición (3.10), para $a_R(0)$,

$$|a_R(0)| \leq \frac{e^{-\lambda R}}{(2\lambda)^{1/2}}\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} \leq e^{-\lambda R}\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))}.$$

Luego, de (3.42) se sigue que

$$\lambda^2\|J(e^{\lambda x}w(0))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\lambda^3\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + \lambda^2\|e^{\lambda x}\partial_x v(0)\|_{L^2([R,\infty))}).$$

Razonando en forma análoga con $J(e^{\lambda x}w(1))$, tenemos que

$$\mathrm{V} \leq H_R(\lambda), \tag{3.43}$$

donde H_R no depende de N y está definida por

$$\begin{aligned}
H_R(\lambda) :=& C(\lambda^3\|e^{\lambda x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + \lambda^2\|e^{\lambda x}\partial_x v(0)\|_{L^2([R,\infty))} \\
&+ \lambda^3\|e^{\lambda x}v(1)\|_{L^2([R,\infty))} + \lambda^2\|e^{\lambda x}\partial_x v(1)\|_{L^2([R,\infty))}).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

De esta forma, de la desigualdad (3.19) y de las estimaciones obtenidas para los términos I-V, obtenidas en (3.30), (3.31), (3.37), (3.41) y (3.43), se sigue, para $R > R_0$, que

$$\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)} \\
\leq Ce^{\lambda(R+1)} + C_\lambda e^{-\lambda N} + H_R(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Como $N \geq 4R$, si $x \in [4R-1, 4R]$, entonces $\phi v = v = w$ y

$$\|e^{\lambda x}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} = \|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda x}(\phi v)\|_{L^2(D)}, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\|e^{\lambda x}\partial_x v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} =& \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \\
\leq& \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda x}\partial_x(\phi v)\|_{L_x^\infty L_t^2(D)},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

y similarmente,

$$\|e^{\lambda x}\partial_x^2 v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \leq \|e^{\lambda x}\partial_x^2 w\|_{L_x^\infty L_t^2(D)}. \tag{3.48}$$

Además, como para $x' \geq 4R-1$, $w(t)(x') = \phi(x')v(t)(x')$, entonces

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}\int_x^\infty -\phi(x')v(t)(x')dx'\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} =&\|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ \leq&\|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L^2(D)} \leq \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}w\|_{L_t^\infty L_x^2(D)}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Luego de (3.45) a (3.49) se sigue que

$$\begin{aligned}&\|e^{\lambda x}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\int_x^\infty -\phi(x')v(t)(x')dx'\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &+ \|e^{\lambda x}\partial_x v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \leq Ce^{\lambda(R+1)} + C_\lambda e^{-\lambda N} + H_R(\lambda).\end{aligned} \tag{3.50}$$

A continuación tomaremos límite $N \to \infty$ en la desigualdad (3.50), manteniendo R y λ fijos.

Usando la existencia de una constante C_λ, tal que $|v(t)(x)| \leq C_\lambda e^{-2\lambda x}$, para $(x,t) \in D$, se sigue, para λ fijo, que

$$\begin{aligned}&\|e^{\lambda x}\int_x^\infty -\phi(x')v(t)(x')dx' - e^{\lambda x}\partial_x^{-1}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &\qquad =\|e^{\lambda x}\int_x^\infty v(t)(x')(1-\phi(x'))dx'\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &\qquad \leq\|e^{\lambda x}\int_N^\infty |v(t)(x')|dx'\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &\qquad \leq\frac{C_\lambda}{2\lambda}e^{-2\lambda N}\|e^{\lambda x}\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &\qquad \leq\frac{C_\lambda}{2\lambda}e^{-2\lambda N}\frac{e^{4R\lambda}}{\sqrt{2\lambda}} \xrightarrow{N\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando límite en (3.50) cuando $N \to \infty$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|e^{\lambda x}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\partial_x v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ + \|e^{\lambda x}\partial_x^2 v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} \leq Ce^{\lambda(R+1)} + H_R(\lambda).\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta la definición de $A_R(v)$ dada en (2.15), concluimos que para $R > R_0$,

$$\begin{aligned}e^{(4R-1)\lambda}A_{4R}(v) \leq&\Big(\int_0^1\int_{4R-1}^{4R}(|e^{\lambda x}v|^2 + |e^{\lambda x}\partial_x v|^2 + |e^{\lambda x}\partial_x^2 v|^2 + |e^{\lambda x}\partial_x^{-1}v|^2)dxdt\Big)^{1/2}\\ \leq&\|e^{\lambda x}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\partial_x v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ &+ \|e^{\lambda x}\partial_x^2 v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])} + \|e^{\lambda x}\partial_x^{-1}v\|_{L^2([4R-1,4R]\times[0,1])}\\ \leq&Ce^{\lambda(R+1)} + H_R(\lambda).\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para $a > 2$, $R > R_0$ y $\lambda := aR^{1/2}$, de (3.51) se sigue que

$$e^{3aR^{3/2}} A_{4R}(v) = e^{(3R)aR^{1/2}} A_{4R}(v) \leq e^{(4R-1)aR^{1/2}} A_{4R}(v) \leq Ce^{2aR^{3/2}} + H_R(aR^{1/2}). \quad (3.52)$$

Pero de (3.44)

$$\begin{aligned} H_R(aR^{1/2}) =& C(a^3R^{3/2}\|e^{aR^{1/2}x}v(0)\|_{L^2([R,\infty))} + a^2R\|e^{aR^{1/2}x}\partial_x v(0)\|_{L^2([R,\infty))} \\ &+ a^3R^{3/2}\|e^{aR^{1/2}x}v(1)\|_{L^2([R,\infty))} + a^2R\|e^{aR^{1/2}x}\partial_x v(1)\|_{L^2([R,\infty))}). \end{aligned}$$

Para $x > R > 1$, tenemos que $R < R^{3/2} < x^{3/2} < e^{x^{3/2}}$ y además que $e^{aR^{1/2}x} < e^{ax^{3/2}}$. Teniendo en cuenta que por las hipótesis del teorema 4 $v(0)$ y $v(1)$ están en $L^2(e^{ax_+^{3/2}}) \cap H^2(\mathbb{R})$ para todo $a > 0$, entonces del lema 12 se sigue que

$$\begin{aligned} H_R(aR^{1/2}) \leq& C(a^3\|e^{(a+1)x_+^{3/2}}v(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + a^2\|e^{(a+1)x_+^{3/2}}\partial_x v(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &+ a^3\|e^{(a+1)x_+^{3/2}}v(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + a^2\|e^{(a+1)x_+^{3/2}}\partial_x v(1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_a < \infty. \end{aligned} \quad (3.53)$$

De (3.52) y (3.53), para $a > 2$ y $R > R_0$, se sigue que

$$\begin{aligned} e^{3aR^{3/2}} A_{4R}(v) \leq Ce^{2aR^{3/2}} + C_a \leq C_a e^{2aR^{3/2}}, \\ A_{4R}(v) \leq C_a e^{-aR^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para probar la afirmación del teorema 4 razonemos por el absurdo. Supongamos que v no es idénticamente cero. Entonces, existe un rectángulo $Q_0 := [x_0, x_0+1] \times [r, 1-r]$, con $r \in (0, 1/2)$ tal que $\|v\|_{L^2(Q_0)} > 0$. Si definimos $\widetilde{v}(t)(x) := v(t)(x + x_0)$, puede verse que $\widetilde{v}$ satisface las hipótesis del teorema 8 con $\delta := \|\widetilde{v}\|_{L^2(Q)} = \|v\|_{L^2(Q_0)} > 0$, donde $Q := [0, 1] \times [r, 1 - r]$. Por lo tanto, existen $\overline{C}$ y C_1, tales que, para todo $\alpha \geq \overline{C}(4R)^{3/2}$,

$$\frac{\alpha^{5/2}}{(4R)^{7/2}}\|\widetilde{v}\|_{L^2(Q)} \leq C_1 e^{9\alpha} A_{4R}(\widetilde{v}). \quad (3.55)$$

Sean $\widetilde{u}_1(t)(x) := u_1(t)(x + x_0)$ y $\widetilde{u}_2(t)(x) := u_2(t)(x + x_0)$. Entonces $\widetilde{u}_1$ y $\widetilde{u}_2$ satisfacen las hipótesis del teorema 4, y por lo tanto, el procedimiento anterior en la prueba de este teorema aplicado a $\widetilde{v} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, nos permite afirmar que para $a > 2$ y $R > R_0$ se tiene que

$$A_{4R}(\widetilde{v}) \leq C_a e^{-aR^{3/2}}. \quad (3.56)$$

Entonces, si tomamos $\alpha := \overline{C}(4R)^{3/2} = 8\overline{C}R^{3/2}$, $a > 2$ y $R > R_0$, tenemos de (3.55) y (3.56) que

$$\frac{(8\overline{C}R^{3/2})^{5/2}}{(4R)^{7/2}}\|\widetilde{v}\|_{L^2(Q)} \leq C_1 e^{72\overline{C}R^{3/2}} A_{4R}(\widetilde{v}) \leq C_a e^{72\overline{C}R^{3/2}} e^{-aR^{3/2}},$$

y por lo tanto, dado que $\|\widetilde{v}\|_{L^2(Q)} = \|v\|_{L^2(Q_0)}$, se tiene que

$$\overline{C}^{5/2}\|v\|_{L^2(Q_0)} \leq C_a R^{-1/4} e^{(72\overline{C}-a)R^{3/2}}. \quad (3.57)$$

Si escogemos $a > \max\{2, 72\overline{C}\}$ y tomamos en (3.57) límite cuando $R \to \infty$ obtenemos que $\|v\|_{L^2(Q_0)} = 0$, lo cual contradice el hecho de que $\|v\|_{L^2(Q_0)} > 0$. De esta manera $v \equiv 0$, con lo cual finalizamos la prueba del teorema 4.

Bibliografía

[1] Biagioni, H., Linares, F., *Well-posedness results for the modified Zakharov-Kuznetsov equation,* Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **54** (2003), 181-189.

[2] Bourgain, J., *On the compactness of the support of solutions of dispersive equations,* IMRN, International Mathematics Research Notices **9** (1997), 437-444.

[3] Coifman, R., Meyer, Y., *Au delà des opérateurs pseudodifférentiels,* Astérisque **57** (1973).

[4] Escauriaza, L., Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On uniqueness properties of solutions of the k-generalized KdV equations,* J. Funct. Anal. **244** (2007), 504-535.

[5] Escauriaza, L., Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *Convexity of free solutions of Schrödinger equations with Gaussian decay,* Preprint.

[6] Faminskii, A., *The Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation,* Differential Equations **31** (6) (1995), 1002-1012.

[7] Isakov, V., *Carleman type estimates in anisotropic case and applications,* J. Differential Equations **105** (1993), 217-238.

[8] Isaza, P., Mejía, J., *Global Cauchy problem for the Ostrovsky equation,* Nonlinear Anal. **67** (2007), 1482-1503.

[9] Isaza, P., Mejía, J., *Local Well-posedness and quantitive ill-posedness for the Ostrovsky equation,* Nonlinear Anal. **70** (2009), 2306-2316.

[10] Isaza, P., Mejía, J., *On the support of solutions to the Ostrovsky equation with negative dispersion,* J. Differential Equations **247** (2009), 1851-1865.

[11] Isaza, P., Mejía, J., *On the support of solutions to the Ostrovsky equation with positive dispersion,* Nonlinear Analysis **72** (2010), 4016-4029.

[12] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On the support of solutions to the g-KdV equation,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19** (2002), 191-208.

[13] Kenig, C., Ponce, G., Vega, L., *On unique continuation of solutions to the generalized KdV equation,* Math. Res. Lett. **10** (2003), 833-846.

[14] Kenig, C., Tomas, P., *Maximal operators defined by Fourier multipliers*, Studia Math. **68** (1980), 79-83.

[15] Linares, F., Pastor, A., **Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov-Kuztnesov equation**, preprint (2009).

[16] Linares, F., Pastor, A., *Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation,* SIAM J. Math. Anal. **41** (2009), 1323-1339.

[17] Linares, F., Pastor, A., Saut, J.C., **Well-Posedness for the ZK Equation in a Cylinder and on the Background of a KdV Soliton,** Communications in Partial Differential Equations, **35** (2010), 1674-1689.

[18] Ostrovsky, L., *Nonlinear internal waves in a rotating ocean,* Okeanologia **18** (2) (1978), 181-191.

[19] Panthee, M., *A note on the unique continuation property for Zakharov-Kuznetsov equation*, Nonlinear Analysis **59** (2004), 425-438.

[20] Saut, J., Scheurer, B., *Unique continuation for some evolution equations,* J. Differential Equations **66** (1987), 118-139.

[21] Zakharov, V., Kuznetsov, E., *On three-dimensional solitons,* Soviet Phys. JETP **39** (1974), 285-286.