

Sobre el buen planteamiento de la ecuación de Benjamin-Zakharov-Kuznetsov regularizada

Fabián Ramos Hernández

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

Sobre el buen planteamiento de la ecuación de Benjamin-Zakharov-Kutznelsov regularizada

Michael Fabián Ramos Hernández

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en ciencias matemáticas

Director:
Ph.D., Doctor, Matemático. Guillermo Rodríguez Blanco

Línea de Investigación:
Análisis matemático
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
Año 2015

Resumen

La teoría de ecuaciones dispersivas ha tomado recientemente importancia de estudio, entre los autores se destacan Iorio, Linares y Ponce (Ver [1] y [2]). Este documento presenta el buen planteamiento local y global sobre los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ del siguiente problema de valor inicial

Plantemiento del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + u_{xxx} + Hu_{xx} + u_{xyy} + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = -\Delta^2 u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

En principio se realiza la regularización para la ecuación que denominamos BZK (Benjamin Zakharov Kuznetsov) para $s \geq 1$, en el siguiente capítulo deducimos un $T > 0$ para que la ecuación tenga un buen planteamiento local, en el capítulo tres extendemos el buen planteamiento local para espacios de baja regularidad de Sobolev con $s > -2$, por último realizamos el buen planteamiento global.

Palabras Clave

Análisis de Fourier, Benjamin Zakharov Kuznetsov, Buen planteamiento local y global, Ecuaciones diferenciales parciales, Espacios de Sobolev.

Abstract

The nonlinear high dimensional dispersive models had certainly been sparked by authors such as Iorio and Linares ([1] and [2]). In this work, we study on the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$ the following initial value problem.

Initial value problem

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + u_{xxx} + Hu_{xx} + u_{xyy} + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = -\Delta^2 u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

We called this the BZK problem (Benjamin Zakharov Kuznetsov equation), At first we work about the local well posedness and then we extend to global well posedness. Our main results concern the existence, uniqueness and continuous dependence on the initial data.

Keywords

Benjamin Zakharov Kuznetsov equation, Equation differential partial, Fourier Analysis Sobolev spaces, Well-posedness.

Índice general

Resumen	3
1. Introducción	5
2. Preliminares	7
3. El problema lineal	11
4. Buen planteamiento local	14
4.1. Existencia	16
4.2. Unicidad	19
4.3. Dependencia continua	20
5. Planteamiento local para $s \in (-2, 2)$	22
5.1. Existencia	22
5.2. Unicidad	28
6. Buen planteamiento global	30
7. Referencias	35

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este trabajo es tratar el buen planteamiento sobre los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ el problema de valor inicial.

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + u_{xxx} + Hu_{xx} + u_{xyy} + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = -\Delta^2 u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (1.1)$$

Donde Δ^2 es el operador bilaplaciano y H es la transformada de Hilbert dada por la siguiente expresión.

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x} * f = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < \epsilon} \frac{f(y)}{x - y} dy \quad (1.2)$$

La ecuación que aparece en (1.1) es una generalización bidimensional regularizada de la ecuación de Benjamin (ver [3] y [4]) y la ecuación de Zakharov-Kuznetsov ([6] y [7]), la denominaremos la ecuación B-Z-K (Benjamin-Zakharov-Kuznetsov regularizada).

Los problemas cuasilineales de evolución en el caso de dimensiones superiores han tomado un gran interés recientemente (ver [6],[7],[10] y [13]), por tal razón decidimos abordar el buen planteamiento de (1.1) sobre los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, utilizando técnicas semejantes a las usadas en [6],[7],[9] y [13].

Algunas de las áreas en las cuales se aplican los modelos cuasilineales de evolución son los siguientes, la física del plasma, la física óptica, y la geoquímica. Un problema que modela las ondas internas en fluidos estratificados profundos es descrito por la ecuación de Benjamin-Ono en [5].

$$u_t + Hu_{xx} + uu_x = 0 \tag{1.3}$$

Otro problema relevante que trata la dinámica de fluidos geofísicos en conjuntos isotrópicos y ondas acústicas iónicas en plasmas magnéticos, se describe mediante la ecuación Zakharov-Kuznetsov en [6], [7] y [12].

$$u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x - u_t = 0 \tag{1.4}$$

El estudio del buen planteamiento local y global del problema mencionado en (1.4) sobre dos dimensiones puede verse en [6], la discusión sobre el buen planteamiento del problema (1.4) con baja regularidad es descrito en [13].

En este trabajo trataremos el buen planteamiento local y global sobre los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ del problema que aparece en (1.1), la razón para ello es que hasta donde conocemos dicho problema no ha sido estudiado (1.1)

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo mostraremos algunas definiciones y resultados previos a la teoría que vamos a tratar, como por ejemplo definir la transformada de Fourier, transformada de Hilbert, los espacios de Schwartz, los espacios de Sobolev y algunas desigualdades como las desigualdades de Young, Nirenberg-Galiardo y otras.

El sustento teórico se incorpora desde los documentos de Iorio, Linares y Esfahani [1],[2],[9]. El primer documento presenta las series de Fourier, las distribuciones periódicas, los espacios de Sobolev y ecuaciones no lineales de evolución y la ecuación KDV, el segundo documento se estudia la noción de lo que es una ecuación de tipo dispersivo, La ecuación KDV y de Schrödinger, el último documento descrito es la tesis doctoral del matemático Esfahani Seyed Amin y trata sobre modelos no lineales en dimensiones mayores a uno, es importante para este trabajo porque describe los espacios de Sobolev con baja regularidad.

Teorema del punto fijo de Banach Sea X un espacio métrico completo y supongamos que $\Psi : X \rightarrow X$ es una contracción estricta, entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$, es decir existe un único punto $x_0 \in X$ tal que $\Psi(x_0) = x_0$.

Ver demostración en [14]

Definición 1 El espacio de Schwartz notado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f\|_{\alpha\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad (2.1)$$

Ver definición en [14]

TRANSFORMADAS DE FOURIER Y HILBERT

Definición 2 Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de la función f se define como

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx \quad (2.2)$$

Donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$ indica el producto interno usual. Además, se verifica (ver [1]).

$$\left| \hat{f} \right| \leq \left\| \hat{f} \right\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

Definición 3 Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformada inversa de Fourier de φ es la función

$$\check{\varphi}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \exp(i\xi \cdot x) d\xi \quad (2.4)$$

Donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$ indica el producto interno usual. Además se verifica

$$\check{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

Definición 4 Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Hilbert esta dada por:

$$\sigma f(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x} * f = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| < \epsilon} \frac{f(y)}{x - y} dy \quad (2.6)$$

Las siguientes son algunas de sus propiedades [12].

La transformada de Fourier de la transformada de Hilbert verifica

$$\hat{\sigma} f(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Además, la transformada de Hilbert σ aplica a $H^s(\mathbb{R}^n)$ sobre el mismo y es un operador unitario.

ESPACIOS DE SOBOLEV

Definición 5 Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de las distribuciones temperadas $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir que, \hat{f} es medible y además

$$\|f\|_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \hat{f} \right|^2 d\xi < \infty \quad (2.8)$$

Proposición 1 Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, con respecto al producto interno

$$(f|g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \quad (2.9)$$

Demostración Ver [1], capítulo 7.

Lema de Sobolev Si $s > 1$, entonces $H^s(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$ y $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_s$ para todo $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$.

Proposición 2 $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach para todo $s > \frac{n}{2}$, en particular existe una constante $C_s > 0$ tal que

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad (2.10)$$

Demostración Ver [1], capítulo 7.

DESIGUALDADES UTILIZADAS

Proposición 3 (Desigualdad de Young) Sean $p, q, r \in [1, \infty]$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ además,

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (2.11)$$

Demostración Ver [1], capítulo 7.

Proposición 4 (Desigualdad de Galiardo-Nirenberg) Si h es medible en \mathbb{R}^2 . Entonces para $1 \leq p, q, r \leq \infty$ existe $C \geq 0$, tal que

$$\sum_{|a|=j} \|D^a h\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq C \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \sum_{|a|=m} \|D^a h\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^\theta \quad (2.12)$$

Donde $\frac{j}{m} < \theta < 1$ y $\frac{1}{r} = \frac{j}{2} + \theta(\frac{1}{q} - \frac{m}{2}) + (1 - \alpha)\frac{1}{p}$

Demostración Ver [15].

Proposición 5 Sean $\beta, \gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a, b \geq 0$, y g una función no negativa tal que $t^{\gamma-1}g(t)$ es integrable localmente sobre $0 \leq t \leq T$, y suponga que

$$g(t) \leq a + b \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \tau^{\gamma-1} g(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

en $(0, T)$, entonces

$$g(t) \leq aE_{\beta, \gamma}(b\Gamma(\beta)^{1/\nu}t) \quad (2.14)$$

donde $v = \beta + \gamma - 1 > 0$, $E_{\beta,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{mv}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(mv+\gamma)}{\Gamma(mv+\gamma+\beta)}$ para $m \geq 0$ y Γ la función Gama.

Demostración Ver [11] lemma 7.1.2

Teorema 0 (Plancherel) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y se verifica

$$\|f\|_0 = \|\hat{f}\|_0 \quad (2.15)$$

Demostración Ver [1], capítulo 7.

Proposición 6 (Desigualdad de Gronwall) Sea $g \in C([a, b], \mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq g(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x g(s) ds \quad (2.16)$$

entonces

$$g(x) \leq \alpha \exp(\beta t) \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.17)$$

Demostración Ver [1], apéndice A1.

Capítulo 3

El problema lineal

En este capítulo estudiaremos el problema lineal asociado a (1.1), es decir estudiaremos el problema de valor inicial.

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + u_{xxx} + Hu_{xx} + u_{xyy} = -\Delta^2 u \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (3.1)$$

Por simplicidad, escribimos (1.1) en la forma

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + Au = 0 \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde $A = -\partial_x^3 - H\partial_x^2 - \partial_x\partial_{yy} - \Delta^2$ y $u(0) = \phi$

Observe que $u(t) = e^{-At}\phi = \mathbb{V}(t)\phi$ es la única solución de (3.2)

Teorema 1 (*Estimativa de regularización*) Sean $\phi \in H^r$, $r \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ y $t > 0$. Entonces existe una constante $K_\lambda > 0$ tal que,

$$\|\exp(-At)\phi\|_{\lambda+r} \leq K_\lambda [1 + t^{-\lambda/2}]^{1/2} \|\phi\|_r \quad (3.3)$$

Demostración Empleamos la definición de norma para espacios de Sobolev

$$\begin{aligned}
 \|exp(-At)\phi\|_{\lambda+r}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{r+\lambda} |exp(-\Delta^2(\xi, \eta)t)|^2 |\hat{\phi}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^\lambda exp(-2t(\xi^2 + \eta^2)^2) (1 + \xi^2 + \eta^2)^r |\hat{\phi}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\
 &\leq \sup_{\xi, \eta} (1 + \xi^2 + \eta^2)^\lambda exp(-2t(\xi^2 + \eta^2)^2) \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^r |\hat{\phi}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\
 &\leq \sup_{\xi, \eta} (1 + \xi^2 + \eta^2)^\lambda exp(-2t(\xi^2 + \eta^2)^2) \|\phi\|_r^2
 \end{aligned}$$

Hacemos $\alpha^2 = \xi^2 + \eta^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|exp(-At)\phi\|_{\lambda+r}^2 &\leq \sup_{\alpha} (1 + \alpha^2)^\lambda exp(-2t\alpha^4) \|\phi\|_r^2 \\
 &\leq C_\lambda [1 + \sup_{\alpha} \alpha^{2\lambda} exp(-2t\alpha^4)] \|\phi\|_r^2
 \end{aligned}$$

Sea $m(\alpha) = \alpha^{2\lambda} exp(-2t\alpha^4)$, derivando $m'(\alpha) = (2\lambda\alpha^{2\lambda-1} - 8t\alpha^{2\lambda+3}) exp(-2t\alpha^4)$ igualando a cero $m'(\alpha) = 0$, $\lambda\alpha^{2\lambda-1} - 4t\alpha^{2\lambda+3} = 0$, despejando α .

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4t}} \text{ Es un punto crítico}$$

Calculando la segunda derivada.

$$m''(\alpha) = (2\lambda(2\lambda - 1)\alpha^{2\lambda-2} - 8t(2\lambda + 3)\alpha^{2\lambda+2} - 8t\alpha^3(2\lambda\alpha^{2\lambda-1} - 8t\alpha^{2\lambda+3})) exp(-2t\alpha^4)$$

Reemplazando en α_0 tenemos $m''(\alpha) < 0$ y por el criterio de la segunda derivada α_0 es máximo. Esto implica la desigualdad.

$$\begin{aligned}
 \|exp(-At)\phi\|_{\lambda+r}^2 &\leq C_\lambda [1 + \sup_{\alpha} m(\alpha)] \|\phi\|_r^2 \\
 &\leq C_\lambda [1 + m(\alpha_0)] \|\phi\|_r^2 \\
 &\leq C_\lambda [1 + (\lambda/4t)^{\lambda/2} exp(-\lambda/2)] \|\phi\|_r^2 \\
 &\leq C_\lambda [1 + (\lambda/4t)^{\lambda/2}] \|\phi\|_r^2 \\
 &\leq K_\lambda [1 + t^{-\lambda/2}] \|\phi\|_r^2
 \end{aligned}$$

Al aplicar raíz cuadrada en ambas partes se completa la prueba

De otra parte si $s = 1$, se tiene que

Teorema 2 Sean $\phi \in H^s$, $s \geq 1$ y $t > 0$. Entonces existe una función $K_s(t)$ tal que

$$\|exp(-At)\phi\|_s \leq CK_s(t) \|\phi\|_{L_1} \tag{3.4}$$

Demostración Empleamos la definición de norma para espacios de Sobolev

$$\begin{aligned} \|\exp(-At)\phi\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s |\exp(\Delta^2(\xi, \eta)t)|^2 |\hat{\phi}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \\ &\leq \|\hat{\phi}(\xi, \eta)\|_{\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s \exp(-2t(\xi^2 + \eta^2)^2) d\xi d\eta \end{aligned}$$

Hacemos $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\exp(-At)\phi\|_s^2 &\leq 2\pi \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \int_0^\infty r(1 + r^2)^s \exp(-2tr^4) dr \\ \|\exp(-At)\phi\|_s^2 &\leq C_\lambda \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \left[\int_0^\infty \exp(-2tr^4) r dr + \int_0^\infty r^{2s+1} \exp(-2tr^4) dr \right] \end{aligned}$$

Realizamos la sustitución $z = 2tr^4$ y escribimos las anteriores integrales en términos de la función gamma.

$$\begin{aligned} \|\exp(-At)\phi\|_s^2 &\leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \left[C_1 t^{-1/2} \int_0^\infty z^{-1/2} \exp(-z) dz + C_2 t^{-(\frac{s+1}{2})} \int_0^\infty z^{\frac{s-1}{2}} \exp(-z) dz \right] \\ &\leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \left[C_1 t^{-1/2} \Gamma(1/2) + C_2 t^{-(\frac{s+1}{2})} \Gamma(\frac{s+1}{2}) \right] \end{aligned}$$

Por último aplicamos raíz cuadrada

$$\|\exp(-At)\phi\|_s \leq CK_s(t) \|\phi\|_{L^1}$$

Donde $K_s(t) = \sqrt{C_1 t^{-1/2} \Gamma(1/2) + C_2 t^{-(\frac{s+1}{2})} \Gamma(\frac{s+1}{2})}$.

Capítulo 4

Buen planteamiento local

Por comodidad escribimos el problema dado en (1.1) de la siguiente forma

$$\begin{cases} u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + Au = F(u) \\ u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (4.1)$$

Donde $A = -\partial_x^3 - H\partial_x^2 - \partial_x\partial_{yy} - \Delta^2$ y $F(u) = u\partial_x u$

Observe que (4.1) es equivalente a

$$\psi(u(t)) = e^{-At}\phi - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \quad (4.2)$$

Teorema 3 Si la función $u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ es solución de la ecuación integral (4.2), entonces u satisface (4.1) en el siguiente sentido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Au(t) - F(u) \right\|_{s-4} = 0$$

Donde $F(u) = \partial_x u^2$

Demostración En efecto, supongamos que u es solución de la ecuación integral

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-At}\phi - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \\ \partial_t u(t) &= -Ae^{-At}\phi - \frac{1}{2} \partial_t \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \end{aligned}$$

Definimos

$$v(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(u(\tau)) d\tau$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= -\frac{1}{2h} \left[\int_0^{t+h} e^{-A(t+h-\tau)} F(u(\tau)) d\tau - \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(u(\tau)) d\tau \right] \\ \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= -\frac{1}{2h} \left[\int_0^t (e^{-A(t+h-\tau)} - e^{-A(t-\tau)}) F(u(\tau)) d\tau + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-\tau)} F(u(\tau)) d\tau \right] \end{aligned}$$

En virtud del teorema del valor medio para integrales de Bochner

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-\tau)} F(u(\tau)) d\tau - F(u(t)) \right\|_{s-4} = 0$$

Para la otra integral hacemos uso del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_0^t (e^{-A(t+h-\tau)} - e^{-A(t-\tau)}) F(u(\tau)) d\tau &= -\frac{1}{2h} \int_0^t \lim_{h \rightarrow 0} (e^{-A(t+h-\tau)} - e^{-A(t-\tau)}) F(u(\tau)) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t \partial_t e^{-A(t-\tau)} F(u(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t A e^{-A(t-\tau)} F(u(\tau)) d\tau \\ &= A(e^{-A(t-\tau)} \phi - u(t)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Implica

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -Ae^{-At} \phi - Au(t) + Ae^{-At} + F(u) \\ \partial_t u &= -Au(t) + AF(u) \end{aligned}$$

Para finalizar

$$\begin{aligned} u(0) &= e^{-A0} \phi - \frac{1}{2} \int_0^0 e^{-A(t-\tau)} F(u(\tau)) d\tau \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

4.1. Existencia

Teorema 4 Si $s \geq 1$, $u \in C([0, T]; H^s)$ y u como aparece en (4.2), entonces $\psi(u) \in C([0, T]; H^s)$

Demostración Aplicando la norma H^s a (4.2) y aplicando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} \|\psi(u)\|_s &= \left\| e^{-At}\phi - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s \\ &\leq \|e^{-At}\phi\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_s d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, el teorema 2 con $r = s - 1$ y $\lambda = 1$ implica que,

$$\|\psi(u)\|_s \leq \|\phi\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \right]^{\frac{1}{2}} \|\partial_x u^2\|_{s-1} d\tau \quad (4.5)$$

Como el operador $\partial_x : H^s \rightarrow H^{s-1}$ es lineal continuo, H^s es un álgebra de Banach para $s > 1$, entonces (4.5) se transforma en

$$\begin{aligned} \|\psi(u)\|_s &\leq \|\phi\|_s + K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u^2\|_s d\tau \\ &\leq \|\phi\|_s + K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u\|_s^2 d\tau \\ &\|\phi\|_s + K \sup_{[0, T]} \|u(t)\|_s^2 \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como $u \in C([0, T]; H^s)$ y el hecho de que la integral es convergente entonces se tiene $\psi(u) \in C([0, T]; H^s)$. La continuidad en $[0, T]$ es consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el hecho de ser e^{-At} un semigrupo fuertemente continuo

Para el caso $s = 1$ utilizamos la regularización que se realizó con $s = 1$, es decir, el teorema 3

$$\begin{aligned} \|\psi(u)\|_1 &= \left\| e^{-At}\phi - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_1 \\ &\leq \|e^{-At}\phi\|_1 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_1 d\tau \\ &\leq \|e^{-At}\phi\|_1 + C \int_0^t K(t) \|\partial_x u^2\|_{L^1} d\tau \\ &\leq \|e^{-At}\phi\|_1 + C \int_0^t K(t) \|u\|_0 \|u_x\|_0 d\tau \\ &\leq \|e^{-At}\phi\|_1 + C \|u\|_{1, \infty} \int_0^t CK(t) d\tau \end{aligned} \quad (4.7)$$

Esta última desigualdad y la hipótesis $u \in C([0, T]; H^1)$ implica $\psi(u) \in H^1$

Teorema 5 Sean $M > 0$, $T > 0$ y $s > 1$ definimos en el conjunto

$$\Lambda_s(T, M) = \{u \in C([0, T]; H^s) : \|u(t) - e^{-At}\phi\|_s \leq M, \forall t \in [0, T]\} \quad (4.8)$$

La métrica,

$$d_{\infty, s}(u, v) = \sup_{[0, T]} \|u(t) - v(t)\|_s \quad (4.9)$$

Entonces, $(\Lambda_s(T, M), d_{\infty, s})$ es completo

Demostración En efecto, este es un espacio métrico $C([0, 1], H^s)$. La completitud de $\Lambda_s(T, M)$ es consecuencia de ser $\Lambda_s(T, M)$ cerrado en $C([0, T], H^s)$

Entonces $u(t) \in \Lambda_s(T, M)$, luego $(\Lambda_s(T, M), d_{\infty})$ es completo

Teorema 6 Sea $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \geq 1$, entonces existe un $T_0 > 0$ y un único $u \in (\Lambda_s(T_0, M), d_{\infty})$ que satisface la ecuación (1.1).

Demostración

Veremos que la función ψ es una contracción en el espacio $(\Lambda_s(T_0, M), d_{\infty})$ y en seguida aplicamos el teorema del punto fijo de Banach. En efecto, la desigualdad triangular, el teorema de inmersión de Sobolev y el hecho que H^s es un álgebra de Banach para $s \geq 1$, implican que

$$\begin{aligned} \|\psi(u(t)) - e^{-At}\phi\|_s &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2\|_s d\tau \\ &\leq C \int_0^t [1 + (t-\tau)^{\frac{1}{4}}] \|\partial_x u^2\|_{s-1} d\tau \\ &\leq C \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u^2\|_s d\tau \\ &\leq C \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u\|_s^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.10)$$

La desigualdad anterior junto con el hecho que $u \in \Lambda_s(T_0, M)$ transforma (4.10) en

$$\begin{aligned} \|\psi(u(t)) - e^{-At}\phi\|_s &\leq K(M + \|\phi\|_s)^2 \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] d\tau \\ &\leq K(M + \|\phi\|_s)^2 (T + \frac{4}{3}T^{\frac{3}{4}}) \\ &\leq K(M + \|\phi\|_s)^2 T \end{aligned} \quad (4.11)$$

Elegimos $T_1 > 0$ tal que $T_1 = M(K(M + \|\phi\|_s)^2)^{-1}$. Se tiene que $\psi : \Lambda_s(T_1, M) \rightarrow \Lambda_s(T_1, M)$

Para deducir que ψ es una contracción, tomamos dos elementos en Λ , sean $u, v \in \Lambda_s(T, M)$

$$\begin{aligned}
\|\psi(u(t)) - \psi(v(t))\|_s &\leq \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \|\partial_x(u^2 - v^2)\| d\tau \\
&\leq \frac{K_1}{2} \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|\partial_x(u^2 - v^2)\|_{s-1} d\tau \\
&\leq K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u^2 - v^2\|_s d\tau \\
&\leq K(M + \|\phi\|_s) \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{4}}] \|u - v\|_s d\tau \\
&\leq K(M + \|\phi\|_s)(T + \frac{4}{3}T^{3/4})d_\infty(u, v) \\
&\leq K(M + \|\phi\|_s)Td_\infty(u, v)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Elegimos $T_2 > 0$ tal que $T_2 = (K(M + \|\phi\|_s))^{-1}$

Sea $T_0 = \min\{T_1, T_2\}$. El teorema del punto fijo de Banach implica el resultado.

Para el caso $s = 1$ utilizamos la desigualdad (pendiente) del teorema número 3 con $s = 1$

$$\begin{aligned}
\|\psi(u(t)) - e^{-At}\phi\|_1 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_1 d\tau \\
&\leq C \int_0^t K(t) \|u\|_1 \|u_x\|_1 d\tau \\
&\leq C \|u\|_{1,\infty}^2 \int_0^t K(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Se tiene $u \in \Lambda(T_0, M)$, implicando $\|u\|_1 \leq M + \|\phi\|_1$

$$\begin{aligned}
\|\psi(u(t)) - e^{-At}\phi\|_1 &\leq C(M + \|\phi\|_1)^2 \int_0^t K(\tau) d\tau \\
&\leq C(M + \|\phi\|_1)^2 P(t) \\
&\leq C(M + \|\phi\|_1)^2 T
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Tomamos $T_1 > 0$ tal que $T_1 = (C(M + \|\phi\|_1)^2)^{-1}$

Para deducir la contracción procedemos análogamente al caso $s > 1$, escogiendo un T_1 adecuado, pero involucramos el teorema número 3.

4.2. Unicidad

Proposición Sean $\beta, \gamma > 0$, $\beta + \gamma > 1$, $a, b \geq 0$, y g una función no negativa tal que $t^{\gamma-1}g(t)$ es integrable localmente sobre $0 \leq t \leq T$, y suponga que

$$g(t) \leq a + b \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \tau^{\gamma-1} g(\tau) d\tau \quad (4.15)$$

en $(0, T)$, entonces

$$g(t) \leq a E_{\beta, \gamma}(b \Gamma(\beta)^{1/v} t) \quad (4.16)$$

donde $v = \beta + \gamma - 1 > 0$, $E_{\beta, \gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{mv}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(mv + \gamma)}{\Gamma(mv + \gamma + \beta)}$ para $m \geq 0$ y Γ la función Gama.

Demostración Revisar [7] lemma 7.1.2

Teorema 7 Existe $T_0 > 0$ tal que el problema de valor inicial dado por (1.1) tiene solución única en el intervalo $[0, T_0]$

Demostración Sean $s > 1$, H y G con condiciones iniciales $H(0) = \phi$ y $G(0) = \varphi$, entonces

$$\begin{aligned} \|H(t) - G(t)\|_s &\leq \|e^{-At}(\phi - \varphi)\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)} \partial_x (H^2 - G^2) d\tau \right\|_s \\ &\leq \|e^{-At}(\phi - \varphi)\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left[1 + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \right]^{\frac{1}{2}} \|\partial_x (H^2 - G^2)\|_{s-1} d\tau \\ &\leq \|\phi - \varphi\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-1/4}] \|\partial_x (H^2 - G^2)\|_{s-1} d\tau \end{aligned} \quad (4.17)$$

Elegimos T_0 tal que $(t - \tau)^{-1/4} \geq 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \|H(t) - G(t)\|_s &\leq \|\phi - \varphi\|_s + \frac{1}{2} \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-1/4}] \|\partial_x (H^2 - G^2)\|_{s-1} d\tau \\ &\leq \|\phi - \varphi\|_s + K \sup_{[0, T]} \|H + G\|_s \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-1/4}] \|H - G\|_s d\tau \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora aplicamos la proposición anterior

$$\|H(t) - G(t)\|_s \leq \|\phi - \varphi\|_s E(K \sup_{[0, T]} \|H + G\|_s \Gamma(\frac{3}{4})^{4/3} t) \quad (4.19)$$

donde $E_{\beta, \gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{3m/4}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(3m/4 + 1)}{\Gamma(3m/4 + 7/4)}$ para $m \geq 0$ y Γ la función Gama. El resultado se obtiene cuando hacemos $\phi \rightarrow \varphi$.

4.3. Dependencia continua

Teorema 8 Dada ϕ_n una sucesión de datos iniciales para el problema dado en (1.1), tales que $\phi_n \rightarrow \phi$ en H^s con $s \geq 1$. Existe $T > 0$ y $u_n \in C[0, T]; H^s(\mathbb{R}^2)$, soluciones correspondientes a cada ϕ_n , además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s = 0 \quad (4.20)$$

Demostración En efecto, para $s > 1$, teniendo en cuenta los teoremas anteriores se verifica que T es una función continua de $\|\phi\|_s$, consecuentemente existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $T_n > T$, para todo $n \leq N$, entonces u_n está definido en $[0, T]$. Ahora bien, como u_n es solución del problema dado en (1.1), con $u_n(0) = \phi_n$, se verifica que

$$\|u_n(t)\|_s \leq \|\phi_n\|_s + M \quad (4.21)$$

Para todo $n > N$, entonces

$$\|u_n(t)\|_s \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\|_s + M \quad (4.22)$$

Involcrando técnicas utilizadas anteriormente y sustituyendo $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\|_s$ afirmamos que:

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s + K(L + M) \int_0^\infty (t - \tau)^{-1/4} \|u_n(\tau) - u_\infty(\tau)\|_s d\tau \quad (4.23)$$

Ahora aplicamos la proposición de la página anterior

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_s E(K(L + M)\Gamma(\frac{3}{4})^{\frac{4}{3}}t) \quad (4.24)$$

Donde $E_{\beta, \gamma}(s) = \sum_{m=0}^\infty c_m s^{3m/4}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(3m/4+1)}{\Gamma(3m/4+7/4)}$ para $m \geq 0$ y Γ la función Gama.

El resultado se obtiene al hacer $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$

Por otra parte si $L_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\|_1$ entonces para $s = 1$ se tiene que

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_1 \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_1 + K(L_1 + M) (\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n(\tau) - u_\infty(\tau)\|_1) \int_0^\infty K(t) \|u_n(\tau) - u_\infty(\tau)\|_1 d\tau \quad (4.25)$$

Ahora aplicamos la proposición de la página anterior

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_1 \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_1 E(K(L_1 + M) (\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n(\tau) - u_\infty(\tau)\|_1) \Gamma(\frac{3}{4})^{\frac{4}{3}}t) \quad (4.26)$$

Donde $E_{\beta,\gamma}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m s^{3m/4}$ con $c_0 = 1$ y $\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\Gamma(3m/4+1)}{\Gamma(3m/4+7/4)}$ para $m \geq 0$ y Γ la función Gama.

El resultado se obtiene al hacer $\phi_n \rightarrow \phi_{\infty}$

Teorema 9 Si $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$, $s \geq 1$ con $u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ es solución de (1.1). Entonces $u \in C([0, T], H^{\infty}(\mathbb{R}^2))$

Demostración Elegimos $\lambda \in (1, 2)$. El teorema 2 (con $r = s-1$) implica que $e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 \in H^{s-1+\lambda} \hookrightarrow H^s$ consecuencia de que $(s-1+\lambda > s)$. Además

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s-1+\lambda} &= \left\| e^{-At} \phi - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_{s-1+\lambda} \leq \|\phi\|_{s-1+\lambda} + K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\lambda/4}] \|\partial_x u^2\|_{s-1} d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{s-1+\lambda} + K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\lambda/4}] \|u^2\|_s d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{s-1+\lambda} + K \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\lambda/4}] \|u\|_s^2 d\tau \\
&\leq \|\phi\|_{s-1+\lambda} + K \sup_{[0, T]} \|u(t')\|_s^2 \int_0^t [1 + (t-\tau)^{-\lambda/4}] d\tau
\end{aligned} \tag{4.27}$$

De esta manera la integral al lado derecho de (4.2) tiene sentido en la norma $H^{s-1+\lambda}$, de otra parte $e^{-At} \phi \in H^{\infty}$ para todo $t > 0$. estos hechos implican que $u \in C([0, T], H^{s-1+\lambda}(\mathbb{R}^2))$. Repitiendo este argumento con $u(t') \in H^{s-1+\lambda}(\mathbb{R}^2)$, $t' \in (0, t)$. Concluimos que $u(t') \in H^{s+2(\lambda-1)}(\mathbb{R}^2)$. continuando con esta repetición se tiene que $u(t') \in H^{s+j(\lambda-1)}(\mathbb{R}^2)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, por tanto $u \in C([0, T], H^{\infty}(\mathbb{R}^2))$.

Capítulo 5

Planteamiento local para $s \in (-2, 2)$

Hasta aquí hemos tratado la ecuación (1.1) localmente para índices $s \geq 1$, en esta sección extenderemos el buen planteamiento para $s \in (-2, 2)$.

El procedimiento que emplearemos será análogo al presentado anteriormente, es decir, utilizando una contracción y el teorema del punto fijo de Banach.

En principio se presentan unos espacios adaptados para el tratamiento que presentaremos, en seguida se exhibe el teorema principal de esta sección. Los siguientes párrafos incorporan la teoría que fundamentan su demostración.

5.1. Existencia

De acuerdo con Dix (ver [8] y [9]), quien utilizó estos espacios en el tratamiento de la ecuación de Burgers.

Para $0 < T \leq 1$ y $u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2))$, definimos la norma:

$$\|u\|_{X_T^s} = \sup_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_s + t^{\frac{|s|}{4}} \|u(t)\|_{L^2}) \quad (5.1)$$

Los espacios X_T^s son definidos como

$$X_T^s = \left\{ u \in C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) : \|u\|_{X_T^s} < \infty \right\} \quad (5.2)$$

Teorema 10 *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ y $s > -2$, entonces existen $T_0 > 0$ que depende de $\|\phi\|_s$ y una única solución de (1.1).*

$$u \in X_T^s \hookrightarrow C([0; T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \quad (5.3)$$

La demostración se realizará al final de la sección.

Ahora bien, procedemos a estimar la parte lineal y posteriormente la parte no lineal.

Teorema 11 Sea $0 < T \leq 1$, $s \in (-2, 2)$ y $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e^{-At} \phi\|_s \leq K \|\phi\|_s \quad (5.4)$$

Además, se verifica

$$\sup_{t \in [0, T]} t^{\frac{|s|}{4}} \|e^{-At} \phi\|_{L^2} \leq K [1 + t^{\frac{|s|}{4}}] \|\phi\|_s \quad (5.5)$$

Demostración Para obtener la primer desigualdad reemplazamos en el teorema 2, $\lambda = 0$. Para probar la segunda desigualdad involucramos el teorema de Plancherel y se deduce que

$$\begin{aligned} t^{\frac{|s|}{4}} \|e^{At} \phi\|_{L^2} &\leq \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{s}{2}} e^{-2t(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\phi}(\xi, \eta) \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{s}{2}} e^{-2t(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L_{\xi, \eta}^\infty} \|\phi(\xi, \eta)\|_s \\ &\leq \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{|s|}{2}} e^{-2t(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L_{\xi, \eta}^\infty} \|\phi(\xi, \eta)\|_s \end{aligned} \quad (5.6)$$

En consecuencia $e^{-At} \phi \in X_T^s$, para obtener la desigualdad (5.5), utilizamos el teorema 2. Ahora procedemos a estimar la parte no lineal.

Teorema 12 Sea $0 \leq t \leq T \leq 1$ y $s \in (-2, 0]$, entonces

$$\left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s \leq K \|u\|_{X_T^s}^2 (t^{\frac{2-|s|}{4}} + t^{\frac{3}{4}}) \quad (5.7)$$

$$|t|^{\frac{|s|}{4}} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_{L^2} \leq K \|u\|_{X_T^s}^2 t^{\frac{2-|s|}{4}} \quad (5.8)$$

Demostración Desde el hecho que $s \leq 0$, se tiene que $(1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} \leq (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s &\leq \int_0^t \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2(t-\tau)(\xi^2 + \eta^2)^2} u(\tau)^2(\xi, \eta) \right\|_{L^2} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2(t-\tau)(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} \left\| u(\tau)^2(\xi, \eta) \right\|_{L^\infty} d\tau \end{aligned} \quad (5.9)$$

La desigualdad de Young implica que

$$\left\| u(\tau)^2(\xi, \eta) \right\|_{L^\infty} \leq |\tau|^{-\frac{|s|}{2}} \|u\|_{X_T^s}^2 \quad (5.10)$$

Reemplazando este resultado y tomando un cambio de variable se obtiene

$$\left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s \leq \|u\|_{X_T^s}^2 \int_0^t \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2\tau(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} |t - \tau|^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \quad (5.11)$$

Para calcular la integral de la derecha, utilizamos el cambio de variable adecuado.

$$\left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2\tau(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} = \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2\tau(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} \leq K |\tau|^{-\frac{1}{8}(s+2)} \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta lo anterior y reemplazando

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s &\leq K \|u\|_{X_T^s}^2 \int_0^t |\tau|^{-\frac{1}{8}(s+2)} |t - \tau|^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K T^{\frac{6-3|s|}{8}} \|u\|_{X_T^s}^2 \int_0^1 |\tau|^{-\frac{1}{8}(s+2)} |1 - \tau|^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \beta(1 - \frac{s+2}{8}; 1 - \frac{|s|}{2}) t^{\frac{6-3|s|}{8}} \|u\|_{X_T^s}^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para $0 \leq s \leq 2$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s &\leq \int_0^t \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} e^{-2(t-\tau)(\xi^2 + \eta^2)^2} u(\tau)^2(\xi, \eta) \right\|_{L^2} d\tau \\ &\leq \int_0^t \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+1}{2}} e^{-2\tau(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} \|u(\tau)\|_s^2 d\tau \end{aligned} \quad (5.14)$$

Eligiendo $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ y utilizando el teorema 3 se tiene,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s &\leq K \|u\|_{X_T^s}^2 \int_0^t \tau^{-\frac{1}{4}(s+2)} + \tau^{-\frac{1}{4}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s}^2 (t^{\frac{2-s}{4}} + t^{\frac{3}{4}}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

La siguiente parte se deduce utilizando argumentos similares a los utilizados anteriormente,

$$\begin{aligned} |t|^{\frac{|s|}{4}} \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_{L^2} &\leq |t|^{\frac{|s|}{4}} \int_0^t \left\| e^{-2(t-\tau)(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} \|u(\tau)^2(\xi, \eta)\|_{L^\infty} d\tau \\ &\leq \|u\|_{X_T^s}^2 |t|^{\frac{|s|}{4}} \int_0^t \left\| e^{-2\tau(\xi^2 + \eta^2)^2} \right\|_{L^2} |t - \tau|^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s}^2 |t|^{\frac{|s|}{4}} \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}} |t - \tau|^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s}^2 t^{\frac{2-|s|}{4}} \int_0^1 |\tau|^{-\frac{1}{2}} |1 - \tau|^{-\frac{s}{2}} d\tau \\ &\leq K \beta(\frac{1}{2}; 1 - \frac{|s|}{2}) \|u\|_{X_T^s}^2 t^{\frac{2-|s|}{4}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Teorema 13 Sea $0 \leq t \leq T \leq 1$, $s \in (-2, 2)$ y $k \in [0, s+2)$ entonces

$$\mathbb{V} : t \rightarrow \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \quad (5.17)$$

Pertenece a $C([0; T]; H^{s+k}(\mathbb{R}^2))$ para todo $u \in X_T^s$

Demostración Sean $t_0, t_1 \in [0, T]$ fijos tal que $t_0 < t_1$, entonces por la desigualdad de Minkowsky se tiene

$$\|\mathbb{V}(t_0) - \mathbb{V}(t_1)\|_{s+k} \leq \mathbb{V}_1(t_0, t_1) + \mathbb{V}_2(t_0, t_1) \quad (5.18)$$

Donde

$$\mathbb{V}_1(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_{s+k} d\tau \quad (5.19)$$

$$\mathbb{V}_2(t_0, t_1) = \int_0^{t_0} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} - e^{-A(t_0-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_{s+k} d\tau \quad (5.20)$$

Realizando la sustitución adecuada se verifica

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_{s+k} d\tau \\ &\leq \|u\|_{X_T^s} \int_{t_0}^{t_1} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_1-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^2} \tau^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq \|u\|_{X_T^s} \int_{t_0}^{t_1} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{k}{2}} e^{-2(t_1-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L_{\xi,\eta}^\infty} \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} e^{-2(t_1-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^2} \tau^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s} \int_{t_0}^{t_1} (1 + (t_1 - \tau)^{-\frac{k}{8}}) (t_1 - \tau)^{-\frac{s+2}{4}} \tau^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s} |t_1 - t_0|^{\left(\frac{s+2}{4}\right)} \int_0^1 [(1 + t_1 - t_0)(1 - \tau)]^{-\frac{k}{8}} (1 - \tau)^{-\frac{s+2}{4}} \tau^{-\frac{|s|}{2}} d\tau \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s} |t_1 - t_0|^{\left(\frac{s+2}{4}\right)} \left[\beta\left(1 - \frac{|s|}{2}; 1 - \frac{s+2}{4}\right) + (t_1 - t_0)^{-\frac{k}{8}} \beta\left(1 - \frac{|s|}{2}; 1 - \frac{s+k+2}{4}\right) \right] \\ &\leq K \|u\|_{X_T^s} |t_1 - t_0|^{\left(\frac{s+2}{4}\right)} (1 + (t_1 - t_0)^{-\frac{k}{4}}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para $0 \leq s < 2$, se usa el teorema 3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_1(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_{s+k} d\tau \\
&\leq \|u\|_{X_T^s} \int_{t_0}^{t_1} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_1-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} \int_{t_0}^{t_1} \left((t_1 - \tau)^{-\frac{s+k+2}{4}} + (t_1 - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} \left((t_1 - t_0)^{\frac{2-s-k}{4}} + (t_1 - t_0)^{-\frac{3}{4}} \right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Tomando el límite

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \|\mathbb{V}_1(t_0, t_1)\|_{s+k} = 0$$

Ahora observamos la función \mathbb{V}_2

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_2(t_0, t_1) &= \int_0^{t_0} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} - e^{-A(t_0-\tau)} \partial_x u^2 \right\|_{s+k} d\tau \\
&\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} \left\| e^{-A(t_1-\tau)} - e^{-A(t_0-\tau)} \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} [e^{-2(t_0-t_1)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} - 1] \right\|_{L^2} d\tau
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Donde $\varsigma = i(\xi^3 + \xi^2\eta + \xi|\xi|)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_2(t_0, t_1) &\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} [e^{-2(t_0-t_1)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} - 1] \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^\infty} \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} (1 + (t_0 - t_1)^{-\frac{k}{16}}) (t_0 - t_1)^{-\frac{s+2}{4}} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} t_0^{\frac{s+2}{4}} \int_0^1 \tau^{-\frac{|s|}{2}} (1 + [t_0(1-\tau)]^{-\frac{k}{16}}) (1-\tau)^{-\frac{s+2}{4}} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} t_0^{\frac{s+2}{4}} \left[\beta(1 - \frac{|s|}{2}; 1 - \frac{s+2}{4}) + t_0^{-\frac{k}{16}} \beta(1 - \frac{|s|}{2}; 1 - \frac{4s+k+8}{16}) \right] \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} t_0^{\frac{s+2}{4}}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Para $0 \leq s < 2$, se usa el teorema 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_2(t_0, t_1) &\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \tau^{-\frac{|s|}{2}} \left\| (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} [e^{-2(t_0-t_1)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} - 1] \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} \left\| (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \right\|_{L^2} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} \int_0^{t_0} (t_0 - \tau)^{-\frac{s+k+2}{16}} + (t_0 - \tau)^{-\frac{1}{4}} d\tau \\
&\leq K \|u\|_{X_T^s} \left((t_0 - \tau)^{-\frac{8-s-k}{16}} + (t_0 - \tau)^{-\frac{3}{4}} \right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Definimos la función f como

$$f(t_0, t_1, \tau, \xi, \eta) = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_1-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} - (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} \tag{5.26}$$

Donde $\varsigma = i(\xi^3 + \xi^2\eta + \xi|\xi|)$

Ahora bien, cuando $|t_1 - t_0|$ tiende a cero entonces $\tau \in [0, t_0]$ y la función $f(t_0, t_1, \tau, \xi, \eta)$ tiende a cero en casi toda parte para $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{t_1-t_0 \rightarrow 0} (e^{-2(t_1-t_0)(\xi^2+\eta^2)^2+\varsigma} - 1) = 0$$

La función f se puede acotar de la siguiente manera

$$|f(t_0, t_1, \tau, \xi, \eta)| \leq (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{s+k}{2}} e^{-2(t_0-\tau)(\xi^2+\eta^2)^2} \tag{5.27}$$

Por último observamos que cuando $t_1 \rightarrow t_0$, entonces $\|f(t_0, t_1, \tau, \xi, \eta)\| \rightarrow 0$ aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se concluye que $\mathbb{V}_2(t_0, t_1) \rightarrow 0$ y con esto se completa la demostración.

Habiendo incorporado a la teoría los anteriores teoremas se procede a de mostrar el teorema principal de esta sección

Demostración teorema 10

Mostraremos que el operador ψ definido en (2.2) es una contracción sobre una bola cerrada en el espacio X_T^s . referenciando los teoremas 10 y 11 argumentamos que existen una constante K que depende de s y una función F tales que se verifica

$$\|\psi(u)\|_{X_T^s} \leq K(\|\phi\|_s + F(T) \|u\|_{X_T^s}^2) \tag{5.28}$$

Por otra parte

$$\|\psi(u) - \psi(v)\|_{X_T^s} \leq KF(T) \|u - v\|_{X_T^s} \|u + v\|_{X_T^s} \tag{5.29}$$

Justificado por

$$\begin{aligned} \|\psi(u)\|_{X_T^s} &\leq \sup_{[0, T]} \left\{ \|e^{-At}\phi\|_s + \frac{1}{2} \left\| \int_0^\infty e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_s + t^{|s|/4} \|e^{-At}\phi\|_{L^2} + \frac{t^{-|s|/4}}{2} \left\| \int_0^\infty e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_{L^2} \right\} \\ &\leq K_1(2 + T^{|s|/4}) \|\phi\|_s + K_2(t^{\frac{6-3|s|}{8}} + t^{-\frac{2-|s|}{4}} + t^{\frac{3}{4}}) \|u\|_{X_T^s} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq t \leq T \leq 1$

$$\|\psi(u)\|_{X_T^s} \leq C(\|\phi\|_s + (T^{\frac{6-3|s|}{8}} + T^{-\frac{2-|s|}{4}} + T^{\frac{3}{4}}) \|u\|_{X_T^s}) \quad (5.31)$$

Para $u, v \in X_T^s$ se tiene,

$$\|\psi(u) - \psi(v)\|_{X_T^s} \leq C(T^{\frac{6-3|s|}{8}} + T^{-\frac{2-|s|}{4}} + T^{\frac{3}{4}}) \|u - v\|_{X_T^s} \|u + v\|_{X_T^s} \quad (5.32)$$

Consecuentemente elegimos $M = 2C \|\phi\|_s$ y T^* tal que

$$(T^{\frac{6-3|s|}{8}} + T^{-\frac{2-|s|}{4}} + T^{\frac{3}{4}}) = \frac{1}{2CM} = \frac{1}{4C^2 \|\phi\|_s} \quad (5.33)$$

Eligiendo $T_0 = \min\{1, T^*\}$, definimos y generamos la bola dada por $X_{T_0}^s(M) = \{u \in X_T^s : \|\psi(u)\|_{X_{T_0}^s} < M\}$. Afirmamos que ψ es una contracción sobre el espacio $X_{T_0}^s(M)$, coherente con las desigualdades (5.28) (5.29). Invocamos el teorema del punto fijo de Banach para deducir la existencia de una única solución u asociada al problema de valor inicial (1.1) sobre el espacio $X_{T_0}^s(M)$.

El mapeo $t \rightarrow$ es continuo sobre el intervalo $(0, T]$ con respecto a la topología de $H^\infty(\mathbb{R}^2)$ debido a que $u \in X_T^s$, se deduce desde el teorema 10 que existe un $k > 0$ tal que

$$\mathbb{V} \in C([0, T] : H^{s+k}(\mathbb{R}^2)) \quad (5.34)$$

$$u \in C((0, T] : H^{s+k}(\mathbb{R}^2)) \quad (5.35)$$

Involucrando que el intervalo de existencia depende solamente de la norma $H^s(\mathbb{R}^2)$ de los datos iniciales, entonces

$$u \in C((0, T] : H^\infty(\mathbb{R}^2)) \quad (5.36)$$

5.2. Unicidad

Trataremos en esta sección la unicidad del problema de valor inicial que hemos venido desarrollando.

Teorema 14 *En las condiciones anteriores el problema de valor inicial (1.1) tiene solución única*

Demostración Sean u, v soluciones del problema dado en (1.1), entonces se verifica

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{X_T^s} &\leq \left\| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \partial_x u^2 d\tau \right\|_{X_T^s} \\ &\leq KF(T) \|u - v\|_{X_T^s} \|u + v\|_{X_T^s} \\ &\leq MF(T) \|u - v\|_{X_T^s} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Donde $M = K \|u + v\|_{X_T^s}$ y $F(T) = T^{\frac{6-3|s|}{8}} + T^{-\frac{2-|s|}{4}} + T^{\frac{3}{4}}$

En principio notamos que $F(0) = 0$ y $\lambda = MF(T)$ afirmamos que existe $\bar{T} > 0$ tal que $0 < \lambda < 1$ y esto implica

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{X_T^s} &\leq \lambda \|u - v\|_{X_T^s} \\ \|u - v\|_{X_T^s} &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Si $T < \bar{T}$ entonces $u = v$ en X_T^s , de lo contrario si $T > \bar{T}$, entonces $u = v$ en X_T^s por las siguientes afirmaciones. Dado $P \neq \emptyset$

$$P = \{T_p \in (0, T] : u = v \text{ en } X_{T_p}^s\} \quad (5.39)$$

Probaremos que $\sup P = T \in P$ suponemos que $\hat{T} < \bar{T}$, por las propiedades del supremo existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y $T_p \in P$ tales que

- I) $0 < \hat{T} - \bar{T} < \frac{1}{n_1}$
- II) $\hat{T} + \frac{1}{n_1} < T$
- III) $\left(\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{6-3|s|}{8}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{-\frac{2-|s|}{4}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{3}{4}}\right) \|u + v\|_{X_{\hat{T}}^s} < 1$

Ahora bien, consideramos las funciones $\tilde{u} = u(t + T_p)$ y $\tilde{v} = v(t + T_p)$ con $t \in [0, T - T_p]$ las cuales estan en $X_{T-T_p}^s$ y son soluciones de (??). Ademas se verifica

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_{1/n_1}^s} &\leq \left[\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{6-3|s|}{8}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{-\frac{2-|s|}{4}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{3}{4}} \right] \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_{1/n_1}^s} \|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{X_{1/n_1}^s} \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{6-3|s|}{8}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{-\frac{2-|s|}{4}} + \left(\frac{1}{n_1}\right)^{\frac{3}{4}} \right] \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_T^s} \|\tilde{u} + \tilde{v}\|_{X_{1/n_1}^s} \end{aligned} \quad (5.40)$$

El literal III, nos indica que $\tilde{u} = \tilde{v}$ en X_{1/n_1}^s . Esto implica $u = v$ en X_{T_p+1/n_1}^s y esto sería una contradicción con el hecho que $\hat{T} = \sup P$. Por otra parte el teorema 13 implica que $u, v \in C((0; T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ para todo $s < 2$, en particular $u, v \in C((0; T] : L^2(\mathbb{R}^2))$, entonces $T \in P$.

Capítulo 6

Buen planteamiento global

Teorema 15 Sea $u \in C([0, T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ la solución local del problema dado en (1.1), entonces

$$\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0 \quad (6.1)$$

$$\|u_x\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 e^{K\|\phi\|_0^4 t} \quad (6.2)$$

$$\|u_y\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 e^{K\|\phi\|_0^4 t} \quad (6.3)$$

Demostración Para empezar demostraremos (5.1), en este sentido multiplicamos la ecuación que aparece en el problema dado en (1.1) por u

$$uu_t + uu_{xxx} + uHu_{xx} + uu_{xyy} + \frac{1}{2}u\partial_x u^2 = -u\Delta^2 u \quad (6.4)$$

Integrando sobre \mathbb{R}^2

$$\int_{\mathbb{R}^2} uu_t dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} uu_{xxx} dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} uHu_{xx} dx dy + \int_{\mathbb{R}^2} uu_{xyy} dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u\partial_x u^2 dx dy = - \int_{\mathbb{R}^2} u\Delta^2 u dx dy$$

Involucramos la definición del producto interior asociado

$$\langle u, u_t \rangle_0 + \langle u, u_{xxx} \rangle_0 + \langle u, Hu_{xx} \rangle_0 + \langle u, u_{xyy} \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle u^2, u_x \rangle_0 = - \langle u, \Delta^2 u \rangle \quad (6.5)$$

Considerando que

$$\langle u, u_{xxx} \rangle_0 = \langle u, Hu_{xx} \rangle_0 = \langle u, u_{xyy} \rangle_0 = \langle u^2, u_x \rangle_0 = 0 \quad (6.6)$$

Se tiene

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u\|_0^2 = - \langle u, \Delta^2 u \rangle_0 \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u\|_0^2 = - \|\Delta u\|_0^2 \quad (6.8)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \|u\|_0^2 &= \|\phi\|_0^2 - \int_0^t \|\Delta u(t')\|_0^2 dt' \\ \|u\|_0 &\leq \|\phi\|_0 \end{aligned}$$

Para la desigualdad (5.2) derivamos la ecuación dada en(1.1) con respecto a x

$$u_{tx} + u_{xxxx} + H u_{xxx} + u_{xxyy} + (u_x)^2 + u u_{xx} = -\Delta^2 u_x \quad (6.9)$$

Tomando $w = u_x$

$$w_t + w_{xxx} + H w_{xx} + w_{xyy} + w^2 + u w_x = -\Delta^2 w \quad (6.10)$$

Multiplicando por w e integrando sobre \mathbb{R}^2

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 = -\langle w, w_{xxx} \rangle_0 - \langle w, H w_{xx} \rangle_0 - \langle w, w_{xyy} \rangle_0 - \langle w, w^2 \rangle_0 - \langle w, u w_x \rangle_0 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.11)$$

Usando que $2 \langle w, u w_x \rangle_0 = -\langle w, w^2 \rangle_0$ y el hecho que $\langle w, w_{xxx} \rangle_0 = \langle w, H w_{xx} \rangle_0 = \langle w, w_{xyy} \rangle_0 = 0$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 = \langle w, u w_x \rangle_0 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.12)$$

Aplicando Cauchy-Schwartz al término $\langle w, u w_x \rangle_0$ y que $\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 \leq \|w\|_\infty \|\phi\|_0 \|w_x\|_0 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.13)$$

A partir de la proposición 4, desigualdad de Gagliardo-Nirenberg se deduce que que

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 \leq \|w\|_0^{1/2} \|\Delta w\|_0^{1/2} \|\phi\|_0 \|w_x\|_0 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 \leq \|w\|_0^{1/2} \|\Delta w\|_0^{3/2} \|\phi\|_0 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.15)$$

Involucrando la proposición 3, desigualdad de Young

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 \leq \frac{1}{4\epsilon^4} (\|w\|_0^{1/2} \|\phi\|_0)^4 + \frac{3\epsilon^{4/3}}{4} \|\Delta w\|_0^2 - \|\Delta w\|_0^2 \quad (6.16)$$

Tomamos $\epsilon > 0$ equivalente a $\epsilon^{4/3} = 4/3$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|w\|_0^2 \leq K \|w\|_0^2 \|\phi\|_0^4 \quad (6.17)$$

Integrando de 0 a t se tiene

$$\|w\|_0^2 \leq \|\phi_x\| + K \|\phi\|_0^4 \int_0^t \|w(t')\|_0^2 dt' \quad (6.18)$$

Involucrando la proposición 6, desigualdad de Gronwall deducimos que

$$\|u_x\|_0^2 \leq \|\phi_x\|_0^2 e^{K\|\phi\|_0^4 t} \quad (6.19)$$

Para la desigualdad (5.3), derivamos (1.1) con respecto a y

$$u_{ty} + u_{xxy} + H u_{xxy} + u_{xyy} + u_y u_x + u u_{xy} = -\Delta^2 u_y \quad (6.20)$$

Sustituimos $v = u_y$

$$v_t + v_{xxx} + H v_{xx} + v_{xyy} + v u_x + u v_x = -\Delta^2 v \quad (6.21)$$

Multiplicando por w e integrando sobre \mathbb{R}^2

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 = -\langle v, v_{xxx} \rangle_0 - \langle v, H v_{xx} \rangle_0 - \langle v, v_{xyy} \rangle_0 - \langle w, v^2 \rangle_0 - \langle u, v v_x \rangle_0 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.22)$$

Usando que $2 \langle u, v v_x \rangle_0 = -\langle w, v^2 \rangle_0$ y el hecho que $\langle v, v_{xxx} \rangle_0 = \langle v, H v_{xx} \rangle_0 = \langle v, v_{xyy} \rangle_0 = 0$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 = \langle u, v v_x \rangle_0 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.23)$$

Aplicando Cauchy-Schwartz al término $\langle u, v v_x \rangle_0$ y que $\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 \leq \|v\|_\infty \|\phi\|_0 \|v_x\|_0 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.24)$$

A partir de la proposición 4, desigualdad de Gagliardo-Nirenberg se deduce que

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 \leq \|v\|_0^{1/2} \|\Delta v\|_0^{1/2} \|\phi\|_0 \|v_x\|_0 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.25)$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 \leq \|w\|_0^{1/2} \|\Delta v\|_0^{3/2} \|\phi\|_0 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.26)$$

Involucrando la proposición 3, desigualdad de Young

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 \leq \frac{1}{4\epsilon^4} (\|v\|_0^{1/2} \|\phi\|_0)^4 + \frac{3\epsilon^{4/3}}{4} \|\Delta v\|_0^2 - \|\Delta v\|_0^2 \quad (6.27)$$

Tomamos $\epsilon > 0$ equivalente a $\epsilon^{4/3} = 4/3$

$$\frac{1}{2} \partial_t \|v\|_0^2 \leq K \|v\|_0^2 \|\phi\|_0^4 \quad (6.28)$$

Integrando de 0 a t se tiene

$$\|v\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 + K \|\phi\|_0^4 \int_0^t \|v(t')\|_0^2 dt' \quad (6.29)$$

Involucrando la proposición 6, desigualdad de Gronwall deducimos que

$$\|u_x\|_0^2 \leq \|\phi_y\|_0^2 e^{K\|\phi\|_0^4 t} \quad (6.30)$$

Teorema 16 *El problema (1.1) esta globalmente bien planteado sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq 1$*

Demostración En efecto, de acuerdo al teorema 14, el problema (1.1) esta globalmente bien planteado sobre $H^1(\mathbb{R}^n)$. Tomando $0 < \vartheta < 2$ y utilizando la estimativa de regularización realizada en el capítulo dos se tiene

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{1+\vartheta} &\leq \|e^{-At}\phi\|_{1+\vartheta} + \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)}uu_x \right\|_{1+\vartheta} d\tau \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{1+\vartheta} e^{-2t(\xi^2+\eta^2)^2} \|uu_x\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} d\xi d\eta \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 + r^2)^{1+\vartheta} r e^{-2tr^4} \|u\|_0 \|u_x\|_0 dr d\theta \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + C \|u\|_1^2 \int_0^\infty (r e^{-2tr^4} + r^{2(1+\vartheta)+1} e^{-2tr^4}) dr
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Hacemos la sustitución $z = 2tr^4$ e involucramos la función gamma

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{1+\vartheta} &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + K \|u\|_1^2 \int_0^\infty C_1 t^{-1/4} \Gamma(1/2) + C_2 t^{-(\frac{2+\vartheta}{2})} \Gamma(\frac{2+\vartheta}{2}) dt \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + C \|u\|_1^2 [t^{3/4} + t^{\frac{2-\vartheta}{4}}]
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad anterior y que el teorema 14 implica que $\|u\|_1$ es acotada, entonces afirmamos que $\|u\|_{1+\vartheta}$ es acotada. Ahora bien, si $0 < \rho < 1$ entonces

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{1+\vartheta+\rho} &\leq \|e^{-At}\phi\|_{1+\vartheta} + \int_0^t \left\| e^{-A(t-\tau)}uu_x \right\|_{1+\vartheta+\rho} d\tau \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + K_\vartheta \int_0^t [1 + t^{\frac{-(1+\rho)}{2}}] \|\partial_x u^2\|_\vartheta d\tau \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + K_\vartheta \int_0^t [1 + t^{\frac{-(1+\rho)}{2}}] \|u^2\|_{1+\vartheta} d\tau \\
 &\leq \|\phi\|_{1+\vartheta} + K_\vartheta \int_0^t [1 + t^{\frac{-(1+\rho)}{2}}] \|u\|_{1+\vartheta}^2 d\tau
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

En consecuencia $\|u\|_{1+\vartheta+\rho}$ es acotada. Continuando con este procedimiento afirmamos que el problema de valor inicial dado en (1.1) esta globalmente bien planteado sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \geq 1$.

Teorema 17 *Dado $s \in (-2, 1)$, entonces el problema (1.1) esta bien planteado globalmente sobre el espacio X_T^s*

Demostración Sea $T_p \in (0, T]$ y $u \in X_T^s$ la solución al problema (1.1) descrita en el teorema 10, entonces $\|u\|_{X_{T_p}^s}$ es finita. De otra parte el teorema 13 implica que $u(T_p) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ y el teorema 16 afirma que la solución \hat{u} del problema (1.1) con dato inicial $u(T_p)$ es global en el tiempo. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{X_T^s} &\leq \|u\|_{X_{T_p}^s} + \|u(T_p + t)\|_{X_{T-T_p}^s} \\
 &\leq \|u\|_{X_{T_p}^s} + \|\tilde{u}\|_{X_{T-T_p}^s} \\
 &\leq \|u\|_{X_{T_p}^s} + \sup_{(0, T-T_p)} (\|\tilde{u}\|_1 + t^{|s|/4} \|\tilde{u}\|_0) \\
 &\leq \|u\|_{X_{T_p}^s} + [1 + (T - T_p)]^{|s|/4} \sup_{(0, T-T_p)} \|\tilde{u}\|_1
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Capítulo 7

Referencias

- [1] Jr. R. J. Iório y V. de Magalhaes Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Vol. 70, Cambridge studies in advanced mathematics, (2001).
- [2] LINARES Felipe, PONCE Gustavo *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations* U.S.A. (2008)
- [3] R. J. Iorio, Jr., On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono Equation, *Comm. PDE*, 11, (1986), pp. 1031-1081.
- [4] R. Pastrán, El problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación de Benjamin Ono, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2005.
- [5] Benjamin, T. (1967). *waves of permanent form in fluids of great depth*, en *J. Fluid Mech*, Vol 29. 559-562.
- [6] Linares, F.; Ademir, P. (2009). *Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation*, en *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 41, No. 4. 1323-1339.
- [7] Linares, F.; Ademir, P. (2011). *and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation*, en *Journal Functional Analysis*, Vol 260, No 4 . 1060-1085.
- [8] Dix, D. B., *Nonuniqueness and uniqueness in the initial-value problem for Burger's equation*, *SIAM J. Math. Anal.* 27, (1996), no 3.
- [9] ESFAHANI Seyed Amin *High Dimensional Nonlinear Dispersive Models*, IMPA, December
- [10] CAMPOS Juvitsa, DUQUE Omar, RODRÍGUEZ Guillermo, *El problema de Cauchy asociado a*

una ecuación del tipo Kuramoto-Sivashinsky bidimensional periódica, Revista colombiana de matemáticas, Vol 45, (2011).

[11] D. Henry *Geometric Theory of Semilinear Parabolic equation* Lectures, Notes in Mathematics, (1957).

[12] Biagioni, H.; Linares, F. (2003). *Well-posedness results for the modified Zakharov-Kuznetsov equation*, en Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.; Vol 54. 181-189..

[13] Iorio R. J., On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation, Communications in P.D.E. 11(10), (1986), pp.1031-1081

[14] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, (1991)

[15] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, United States (1976).