



# **Una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente**

**Miguel Ángel Mancera Romero**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Bogotá, Colombia

2022

# **Una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente**

**Miguel Ángel Mancera Romero**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

Doctor en Matemáticas

Claudio Rodríguez Beltrán

Profesor asociado

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2022



*(Dedicatoria o lema)*

*A Dios, a mi esposa, al profesor Claudio Rodríguez por su sabiduría, paciencia y el tiempo dedicado, y a todas las personas que me han acompañado con sus oraciones durante todo el proceso.*

## **Declaración de obra original**

Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

A handwritten signature in black ink that reads "Miguel Angel Mancera R." The signature is written in a cursive style.

MIGUEL ANGEL MANCERA ROMERO

Fecha 05/05/2020

## **Agradecimientos**

Agradezco a Dios y la virgen María por darme la fortaleza y el ánimo para concluir este proceso.

A la Universidad Nacional de Colombia, específicamente a la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, al profesor Claudio Rodríguez Beltrán, profesor asociado de la Universidad Nacional de Colombia, por su sabiduría y por el tiempo dedicado al seguimiento de este trabajo de grado. También agradezco a todos los profesores que me formaron con sus conocimientos y experiencia.

A la institución educativa Escuela Sol Naciente, por permitirme el espacio para desarrollar la estrategia didáctica. A los estudiantes del grado octavo por su colaboración y disposición, que aún en tiempo de pandemia, se concedieron la oportunidad de adquirir nuevos conocimientos y me permitieron crecer en mi quehacer docente.

A todas las personas que con sus oraciones me han permitido seguir adelante y no desfallecer: mi esposa, familia, amigos y conocidos que me apoyaron incondicionalmente.

## Resumen

### **Una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente**

Históricamente el desempeño de los estudiantes en las *Pruebas Saber 11 y Saber 9*, del colegio “Escuela Sol Naciente”, específicamente los resultados asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos, no han sido satisfactorios. Se seleccionaron algunos de estos contenidos para plantear una estrategia didáctica que fortalece el pensamiento espacial de los estudiantes de grado octavo. La estrategia se basa en dar a los estudiantes, técnicas y herramientas de representación de los objetos tridimensionales, en vez de presentar fórmulas y ejercicios de aplicación como se hace de forma tradicional, también dando mayor importancia a los contenidos de la geometría espacial que usualmente vienen relegados hacia el final del año.

La metodología utilizada para la estrategia didáctica es constructivista, puesto que el estudiante a través de actividades de diseño, trazado, construcciones geométricas, aplicaciones lúdicas, planteamiento y resolución de problemas en grupo, tiene un ambiente propicio para fortalecer las habilidades espaciales y generar un aprendizaje significativo.

Primero se hizo una revisión bibliográfica sobre el desarrollo de la geometría y el pensamiento espacial. Para realizar la intervención inicialmente se aplicó una prueba diagnóstica para medir las habilidades espaciales de los estudiantes, posteriormente se aplicaron ocho sesiones de clase entre talleres, ejercicios y clases teórico-prácticas, para fortalecer las habilidades espaciales que fueron seleccionadas para la estrategia. Por último, se aplicó una prueba final para determinar el progreso en dichas habilidades.

**Palabras clave:** Enseñanza de la matemática, geometría, pensamiento espacial, estrategia didáctica, representación de objetos tridimensionales.

## **Abstract**

### **A didactic strategy to strengthen the spatial thinking of the students of the eighth level of the Escuela Sol Naciente.**

Historically, the performance of students in the Saber 11 and Saber 9 Tests of the “Escuela Sol Naciente” school, specifically the results associated with spatial thinking and geometric systems have not been satisfactory. Some of these contents were selected to propose a didactic strategy that strengthens the spatial thinking of eighth level students. The strategy is based on giving students techniques and tools for representing three-dimensional objects, instead of presenting formulas and application exercises as is done in a traditional way, also giving greater importance to the contents of spatial geometry that usually come relegated towards the end of the year.

The methodology used for the didactic strategy is constructivist, since the student, through activities of design, layout, geometric constructions, playful applications, to statement problems and solve them in groups, has a conducive environment to strengthening spatial skills and generating meaningful learning.

First, a bibliographic review was made on the development of geometry and spatial thinking. To carry out the intervention, a diagnostic test was initially applied to measure the spatial abilities of the students, later eight class sessions were applied between workshops, exercises and theoretical-practical classes, to strengthen the spatial abilities that were selected for the strategy. Then, a final test was applied to determine the progress in these skills.

**Keywords: Mathematics teaching, geometry, spatial thinking, teaching strategy, representation of three-dimensional objects.**

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen</b> .....	<b>VII</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>XIII</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Aspectos preliminares</b> .....	<b>5</b>
1.1 Planteamiento del problema .....	5
1.1.1 Descripción del problema .....	5
1.1.2 Pregunta problema .....	6
1.2 Justificación.....	6
1.3 Objetivos .....	11
1.3.1 Objetivo General.....	11
1.3.2 Objetivos específicos.....	11
<b>2. Marco referencial</b> .....	<b>12</b>
2.1 Marco Histórico .....	12
2.1.1 Geometría.....	12
2.1.2 Razonamiento espacial.....	16
2.2 Marco teórico .....	20
2.2.1 Componente pedagógico.....	20
2.2.2 Pensamiento espacial.....	23
2.2.3 Habilidades espaciales a tener en cuenta.....	28
2.2.4 Representaciones planas .....	29
2.3 Marco Disciplinar.....	31
2.4 Marco Legal .....	39
2.5 Antecedentes .....	41
<b>3. Diseño metodológico</b> .....	<b>43</b>
3.1 Tipo de investigación.....	43
3.2 Metodología .....	44
3.3 Contexto de desarrollo y aplicación la propuesta .....	51
<b>4. Desarrollo de la metodología</b> .....	<b>56</b>
4.1 Prueba diagnóstico.....	58
4.2 Segunda sesión .....	63

4.3	Tercera sesión .....	64
4.4	Cuarta sesión.....	68
4.5	Quinta sesión.....	70
4.6	Sexta sesión .....	72
4.7	Séptima sesión .....	73
4.8	Octava sesión .....	75
4.9	Novena sesión .....	77
4.10	Prueba Final .....	79
4.11	Análisis de resultados .....	82
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>85</b>
5.1	Conclusiones .....	85
5.2	Recomendaciones .....	86
<b>A.</b>	<b>Anexo: prueba diagnóstica .....</b>	<b>89</b>
<b>B.</b>	<b>Anexo: prueba final .....</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliografía .....</b>	<b>105</b>

## Lista de figuras

	Pág.
Figura 1-1: Cilindro.....	2
Figura 1-2: Cinta de Moebius. ....	3
Figura 1-3: Toroide.....	3
Figura 1-4: Botella de Klein. ....	3
Figura 1-1: Portada cartilla Prueba Saber 9 2015-1.....	7
Figura 1-2: Ejercicio 62 cartilla Prueba Saber 9 2015-1.....	7
Figura 1-3: Ejercicio 73 cartilla Prueba Saber 9 2015-1.....	8
Figura 1-4: Ejercicio 80 cartilla Prueba Saber 9 2015-1.....	8
Figura 1-5: Resultado Prueba Saber 11 E.S.N. matemáticas. ....	9
Figura 1-6: Reporte de la excelencia 2018 E.S.N. ....	10
Figura 2-1: Relaciones espaciales J. Piaget. ....	16
Figura 2-2: Aprendizajes por recepción y por descubrimiento en un continuo separado del aprendizaje por repetición y el aprendizaje significativo. ....	22
Figura 2-3: Los tres estratos de Carroll ..... 26	26
Figura 2-4: Representaciones planas de un módulo multicubo.....	30
Figura 2-5: Papel isométrico.....	31
Figura 2-6: Pirámide regular pentagonal.....	34
Figura 2-9: Postulado de Cavalieri.....	35
Figura 2-7: Tronco de pirámide pentagonal. ....	36
Figura 2-8: Prisma pentagonal. ....	37
Figura 2-10: Cilindro.....	38
Figura 2-11: Cono. ....	38
Figura 2-12: Esfera.....	39
Figura 3-1: Puntos en papel isométrico y trazo de aristas. ....	47
Figura 3-2: Rotación de figuras en papel isométrico.....	48
Figura 3-3: Objeto con vistas.....	48
Figura 3-4: Pantallazos de la App Isometric. ....	49
Figura 3-5: Cubo desplegado y pirámide plegada. ....	50
Figura 3-6: Software cubetest.....	50
Figura 3-7: Descomposición de la figura compuesta. ....	51
Figura 3-8: Representación gráfica del problema. ....	51
Figura 4-1: Salón de clase.....	56
Figura 4-2: Ambiente de trabajo. ....	57
Figura 4-3: Ambiente de trabajo de los estudiantes.....	57

Figura 4-4: Ambiente de trabajo de los estudiantes 2.....	58
Figura 4-5: Imágenes correspondientes al ejercicio 9. ....	59
Figura 4-6: Gráficas resultados prueba diagnóstica. ....	60
Figura 4-7: Figuras sobre el papel isométrico.....	63
Figura 4-8: Figuras sobre el papel isométrico 2.....	63
Figura 4-9: Figuras sobre el papel isométrico 3.....	64
Figura 4-10: Sólidos sobre el papel isométrico.....	65
Figura 4-11: Explicación sobre la circunferencia .....	66
Figura 4-12: Representación de sólidos sobre el papel isométrico.....	66
Figura 4-13: Actividad complementaria. ....	67
Figura 4-14: Actividad complementaria sólidos compuestos. ....	67
Figura 4-15: Explicación cuarta sesión.....	68
Figura 4-16: Realizar las vistas a partir del sólido. ....	68
Figura 4-17: Explicación para realizar el sólido a partir de sus vistas. ....	69
Figura 4-18: Trabajo realizado por los estudiantes en la cuarta sesión. ....	69
Figura 4-19: Explicación quinta sesión. ....	70
Figura 4-20: Actividad realizada por los estudiantes en la quinta sesión.....	70
Figura 4-21: Otras imágenes del trabajo realizado por los estudiantes en la quinta sesión. .....	71
Figura 4-22: Trabajo realizado por los estudiantes con la APP Isometric.....	72
Figura 4-23: Explicación sexta sesión. ....	72
Figura 4-24: Actividad realizada por los estudiantes en la sexta sesión. ....	73
Figura 4-25: Actividad realizada por los estudiantes en la séptima sesión. ....	74
Figura 4-26: Otras imágenes de la actividad realizada por los estudiantes en la séptima sesión. ....	74
Figura 4-27: Explicación e indicaciones octava sesión.....	75
Figura 4-28: Estudiantes trabajando en la actividad de la séptima sesión.....	75
Figura 4-29: Actividades de la séptima sesión. ....	76
Figura 4-30: Actividad complementaria y libre de la octava sesión.....	77
Figura 4-31: Actividades novena sesión.....	78
Figura 4-32: Graficas resultados prueba final.....	79
Figura 4-33: Elementos prueba T-student.....	84

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
Tabla 1-1: Resultados primera y segunda sesión E.S.N.....	10
Tabla 2-1: Definiciones.....	32
Tabla 3-1: Actividades por sesión.....	45
Tabla 3-2: Objetivos y habilidades por sesión .....	45
Tabla 3-3: Habilidades a fortalecer por sesión.....	46
Tabla 3-4: Cambio de horario .....	52
Tabla 3-5: Cronograma de sesiones.....	53
Tabla 4-1: Prueba t para medias de dos muestras emparejadas.....	83
Tabla 4-2: Prueba t para medias de dos muestras emparejadas (Sin puntos 2, 3 y 5). ..	84



# Introducción

La enseñanza de la geometría es un eje fundamental para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes. Hay dos problemas en la enseñanza de esta área, el primero es que el docente no domina los conceptos y las técnicas para representar los objetos geométricos y, el segundo que en los programas académicos la enseñanza de la geometría se posterga al finalizar el año escolar. Destinando el tiempo restante luego de enseñar las otras temáticas y entre los temas específicos el de geometría espacial se deja para el final y se presenta solo el contenido temático y sus fórmulas, sin hacer énfasis en ejercicios de pensamiento espacial.

El ICFES (Instituto Colombiano para la evaluación de la educación) estableció los lineamientos generales para la presentación del examen de estado saber 11°.

Allí se evidencian algunos elementos que son fundamentales en el desarrollo de habilidades matemáticas; uno de los pensamientos que se evalúa es el pensamiento espacial a través de tres competencias: interpretación y representación, allí se tendrá en cuenta la habilidad para comprender y transformar la información presentada en tablas, gráficos, conjuntos de datos, diagramas, esquemas, etc. así como la capacidad de utilizar estos tipos de representación para extraer información relevante, formulación y ejecución, es decir, la capacidad de plantear y diseñar estrategias para solucionar los problemas provenientes de diversos contextos, se relaciona también con la habilidad o destreza para solucionar y verificar la pertinencia de soluciones propuestas a problemas determinados y analizar desde diferentes ángulos estrategias de solución, argumentación, con el desarrollo de esta competencia se espera que el estudiante justifique la aceptación o el rechazo de afirmaciones, interpretaciones y estrategias de solución basándose en propiedades, teoremas o resultados matemáticos, o verbalizando procedimientos matemáticos. (ICFES, 2015).

Cuando se afronta un problema matemático o de un contexto diferente es necesario establecer varias estrategias para resolver el problema y, cuando se obtiene una solución es importante que el estudiante cuente con herramientas que le permitan expresar la solución de diferentes formas eligiendo la más adecuada.

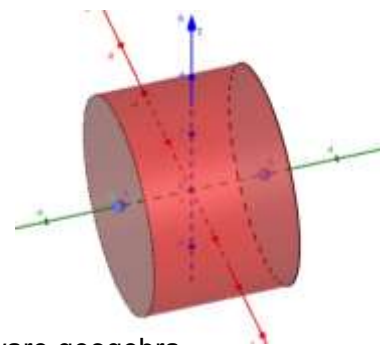
Todos los individuos cuentan con pensamiento espacial, algunos tienen la capacidad de ordenar y posicionar objetos, ubicarse y movilizarse de acuerdo a una dirección, comparar distancias, proyectar los objetos sólidos en diferentes planos, imaginarlos en posiciones distintas y trasladarse a diferentes lugares del objeto, entre otros, no todas las personas tienen las mismas habilidades, ni con el mismo nivel de desarrollo.

Para fortalecer algunas de esas habilidades se enseñaran técnicas para proyectar objetos en distintos planos (dibujar las vistas de objetos), construir y manipular sólidos y hacer sus respectivas construcciones.

El desarrollo de habilidades del pensamiento espacial no solo es importante en sí misma, sino que enriquece el pensamiento matemático ya que para resolver un problema de geometría o de la vida cotidiana se necesita observar los objetos desde diferentes perspectivas y determinar que propiedades matemáticas están involucradas para resolver el problema.

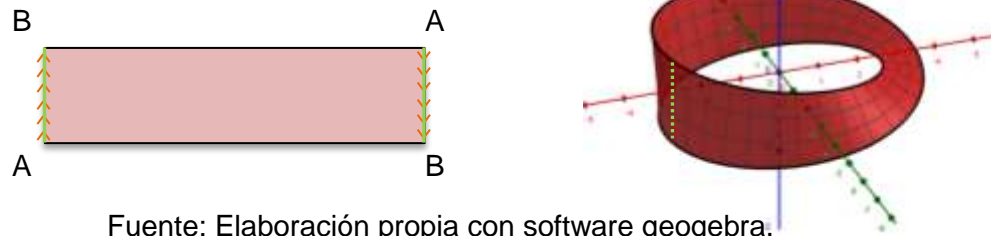
La vida del ser humano está rodeada por objetos tridimensionales que en su mayoría vienen presentados como bidimensionales, solo este aspecto limita el punto de vista que les generamos a nuestros estudiantes, entonces tratemos de manejar la realidad tal y como está en el universo. A continuación algunas imágenes de objetos de la ciencia que están representados en dos dimensiones, pero que usualmente se estudian en todas sus dimensiones.

Figura 1-1: Cilindro.



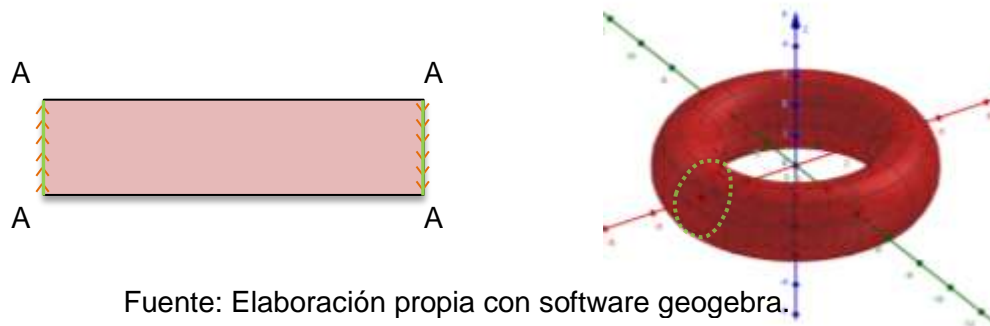
Fuente: Elaboración propia con software geogebra.

Figura 1-2: Cinta de Moebius.



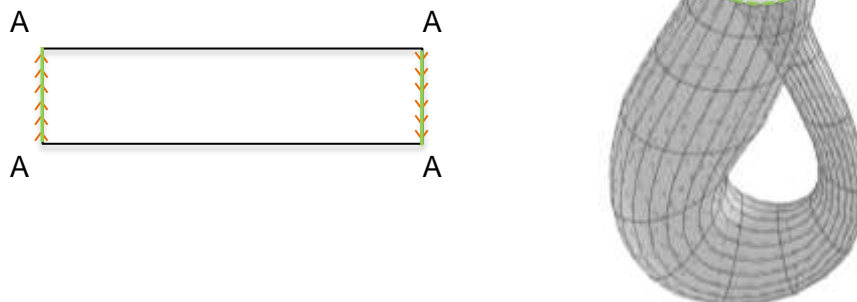
Fuente: Elaboración propia con software geogebra.

Figura 1-3: Toroide.



Fuente: Elaboración propia con software geogebra.

Figura 1-4: Botella de Klein.



Fuente: Elaboración propia con software geogebra.

Este proyecto busca fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes mediante la construcción y manipulación de propiedades y características de la geometría sólida.



# 1. Aspectos preliminares

## 1.1 Planteamiento del problema

### 1.1.1 Descripción del problema

La enseñanza de la geometría es un eje fundamental para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes de primaria, bachillerato y media académica. Existen algunos problemas en la enseñanza de esta área, uno de ellos es que el docente no domina los conceptos y las técnicas para representar los objetos tridimensionales en dos dimensiones, situación que por consecuencia deja a los estudiantes sin las herramientas necesarias para realizar este tipo de situaciones problema.

Nuestro mundo está determinado en su mayoría por objetos tridimensionales y para desenvolverse en él, en un ambiente laboral o académico en educación superior (diseño, arquitectura, topografía, ingeniería y otros), es necesario establecer relaciones con las figuras geométricas y esto a su vez implica tener unas habilidades espaciales mínimas para que en la mente pueda darse el proceso de imaginar y transformar las imágenes u objetos que posteriormente se reflejarán en el papel.

Otro problema que surge es que en la estructura académica de la enseñanza de la geometría y específicamente la correspondiente al pensamiento espacial, se encuentra hacia el final del año escolar en bachillerato, de hecho en la mayoría de los textos escolares se evidencia esta información, permitiendo en muchas ocasiones que no se destine el tiempo correcto para el desarrollo de los contenidos o en el peor de los casos no se tenga en cuenta. (Gutiérrez, 1998)

El mismo autor menciona que la enseñanza de la geometría estaba influenciada por la formalización de las matemáticas y cuenta además una anécdota en la que un famoso matemático, medía la calidad del libro de geometría si no contenía ninguna figura,

minimizando el valor de las figuras, dibujos, diagramas, etc. que facilitan la comprensión de situaciones problema y conceptos matemáticos.

También surgen inconvenientes en la finalidad de la enseñanza de la matemática y la geometría, ya que estas deben dar a los estudiantes las herramientas necesarias para enfrentar las situaciones problema de la vida cotidiana, como menciona Arboleda (2011) a continuación:

El proceso de enseñanza de la geometría ha enfrentado serios problemas, ya que su instrucción se ha realizado en forma abstracta, y la metodología utilizada no ha sido la más adecuada, y se ha constituido en la repetición de conocimientos, aplicación de formas mecánicas que no permiten llegar al resultado correcto. Esto ha traído como consecuencia el desperdicio de la capacidad de razonamiento y la virtud creadora del estudiante, lo cual se evidencia en su poca capacidad de resolver algún problema que se le presente de forma diferente o no familiar a la que está acostumbrado.(p. 2)

### **1.1.2 Pregunta problema**

¿Qué estrategias se pueden utilizar para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes de grado octavo en la escuela Sol Naciente de Tocancipá?

## **1.2 Justificación**

La enseñanza de la geometría en la educación básica secundaria se ha venido delegando a la educación superior y en especial a profesiones relacionadas con ciencias exactas, ingeniería, arquitectura, diseño o aquellas relacionadas con la pedagogía.

Es importante que el docente cree propuestas didácticas, apoyadas por los textos escolares, y que pueda profundizar en las temáticas. Sin embargo, algunos docentes enseñan solo lo que las editoriales plasman en los textos y, descuidan muchos aspectos importantes.

En ocasiones se dedica la mayor parte del tiempo de estudio de la geometría a la enseñanza de la geometría plana (Euclidiana) y su representación bidimensional,

descuidando la parte tridimensional que es donde se desenvuelven la mayoría de sucesos de la vida del ser humano.

Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es útil para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. (Ministerio de Educación Nacional - MEN, 1998).

Algunos problemas de la geometría espacial son concretos, para solucionarlos se requiere ser consciente del entorno de los objetos, entonces su estudio es una experiencia para el estudiante en la que tiene que imaginar objetos desde otras perspectivas (visuales) para solucionar un problema, esto puede contribuir a que el estudiante mejore la capacidad de transformar un problema en uno equivalente.

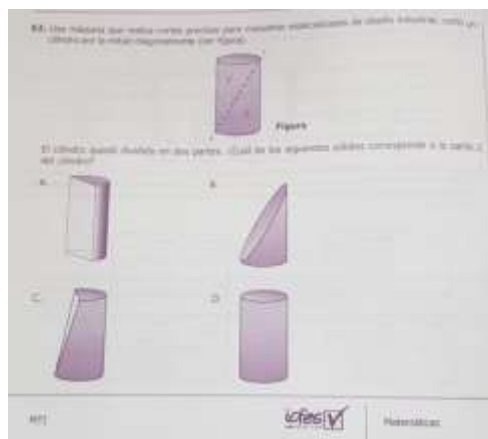
A continuación se presentan algunos ejercicios propuestos en la Prueba Saber 9 del año 2015-1, en el que se evidencia el tipo de ejercicios relacionados con las habilidades espaciales.

Figura 1-1: Portada cartilla Prueba Saber 9 2015-1.



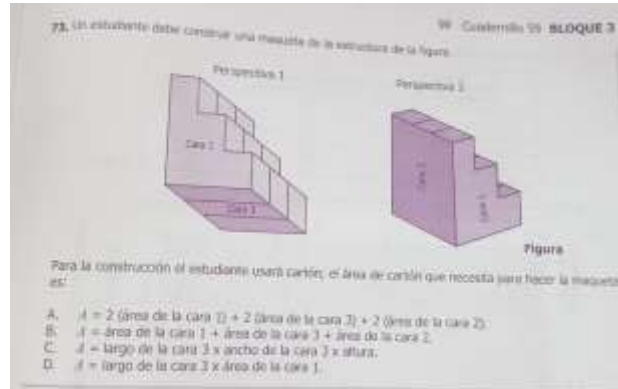
Fuente: Prueba Saber 9 2015-1

Figura 1-2: Ejercicio 62 cartilla Prueba Saber 9 2015-1.



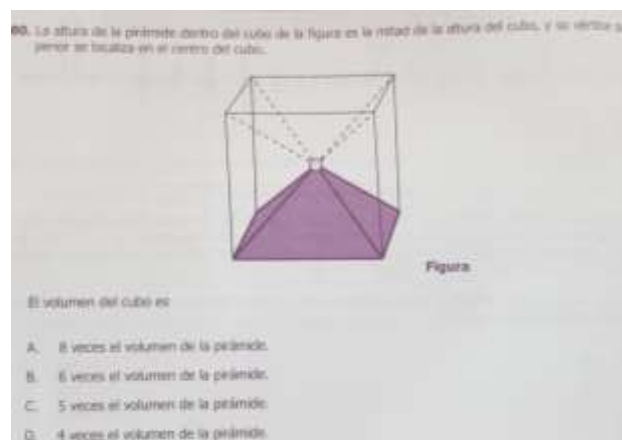
Fuente: Prueba Saber 9 2015-1

Figura 1-3: Ejercicio 73 cartilla Prueba Saber 9 2015-1



Fuente: Prueba Saber 9 2015-1

Figura 1-4: Ejercicio 80 cartilla Prueba Saber 9 2015-1.



Fuente: Prueba Saber 9 2015-1

Este trabajo pretende que los estudiantes de grado octavo de la institución educativa escuela Sol Naciente adquieran más herramientas, así como mayores competencias que les permita afrontar, ampliar y encontrar soluciones a los problemas que se les puedan presentar en ámbitos académicos y cotidianos. La institución busca la formación de líderes que se puedan desempeñar en cualquier área, esto debido a que se ubica en un municipio industrial y en continuo crecimiento,

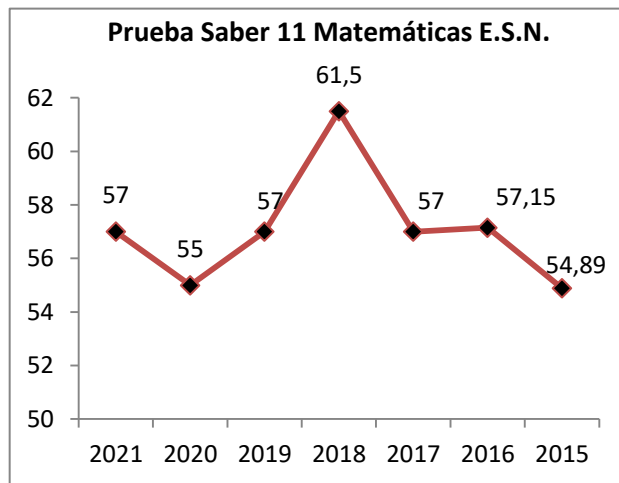
El municipio de Tocancipá pasó de 24.154 habitantes en el 2005 a 39.996 en el 2018, según el análisis de la situación poblacional Sabana Centro 2018 del observatorio Sabana Centro Cómo Vamos.

Además cuenta con cerca de 1000 empresas que generan un sin número de posibilidades de empleo.<sup>1</sup>

La Escuela Sol Naciente (E.S.N.) se ubicó en el puesto 1687 a nivel nacional con 55,308 en el promedio ponderado del año 2020, con un puntaje global de 277 y específicamente en matemáticas con 55 puntos, de acuerdo con el informe presentado por la organización Milton Ochoa.<sup>2</sup>

Figura 1-5: Resultado Prueba Saber 11 E.S.N. matemáticas.

Año	Promedio en matemáticas
2021	57
2020	55
2019	57
2018	61,5
2017	57
2016	57,15
2015	54,89



Fuente: Resultados ICFES.

Así mismo en el informe presentado por el grupo educativo Helmer Pardo en una prueba realizada al interno de la institución educativa Sol Naciente en el año 2021, a través de dos sesiones, se evidencian algunas dificultades específicamente en los componentes geométrico-métricos, como se puede ver en la Tabla 1-1. En cinco de las seis preguntas de la primera sesión se puede notar que el porcentaje de respuestas incorrectas es mayor al 47,6%. Solo uno de estas está en 28,6%. Así mismo en la segunda sesión el porcentaje de respuestas incorrectas es mayor al 52,4% en las tres preguntas.

<sup>1</sup> <https://guiaempresas.universia.net.co/localidad/TOCANCIPA/?qPagina=31> Tomado el 28 de junio 2021

<sup>2</sup> [https://miltonochoa.com.co/web/Ranking/Ranking%20Calendario%20AB%20\(2020\)/A/Ponderado2020A.pdf](https://miltonochoa.com.co/web/Ranking/Ranking%20Calendario%20AB%20(2020)/A/Ponderado2020A.pdf) Tomado el 28 de junio 2021

Tabla 1-1: Resultados primera y segunda sesión E.S.N.

Fuente: Resultados Helmer Pardo de la E.S.N.

Por otro lado en el reporte de la excelencia, específicamente para el grado noveno en matemáticas se presenta un desempeño entre mínimo y satisfactorio, aunque si el porcentaje de insuficiencia aumento un 9% para el cuatrienio.

Figura 1-6: Reporte de la excelencia 2018 E.S.N.



Fuente: Reporte día de la excelencia (MEN).

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

Desarrollar una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Escuela Sol Naciente de Tocancipá.

### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Realizar un diagnóstico que permita determinar dificultades que se presentan en la solución de problemas de pensamiento espacial.
- Analizar estrategias para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente.
- Elaborar y aplicar la estrategia didáctica en los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Escuela Sol Naciente.
- Evaluar la estrategia didáctica mediante una prueba que mida el desempeño en los estudiantes en algunas habilidades del pensamiento espacial, de tal forma que permita definir si cumple el objetivo propuesto.

## **2.Marco referencial**

### **2.1 Marco Histórico**

#### **2.1.1 Geometría**

Por tratarse de un estudio sobre pensamiento espacial, es pertinente discutir someramente algo sobre el desarrollo de la geometría, sin ser el objetivo profundizar en los detalles de cada uno de los aportes hechos por los científicos que citaremos a continuación, más bien sirve como una guía al lector que desee profundizar en estas teorías. La línea de tiempo que se presenta a continuación permite hacerse una idea del desarrollo de algunas ideas importantes de la geometría y asociarlas con sus principales exponentes.

La siguiente línea de tiempo fue elaborada por el autor en canva. (<https://www.canva.com>).





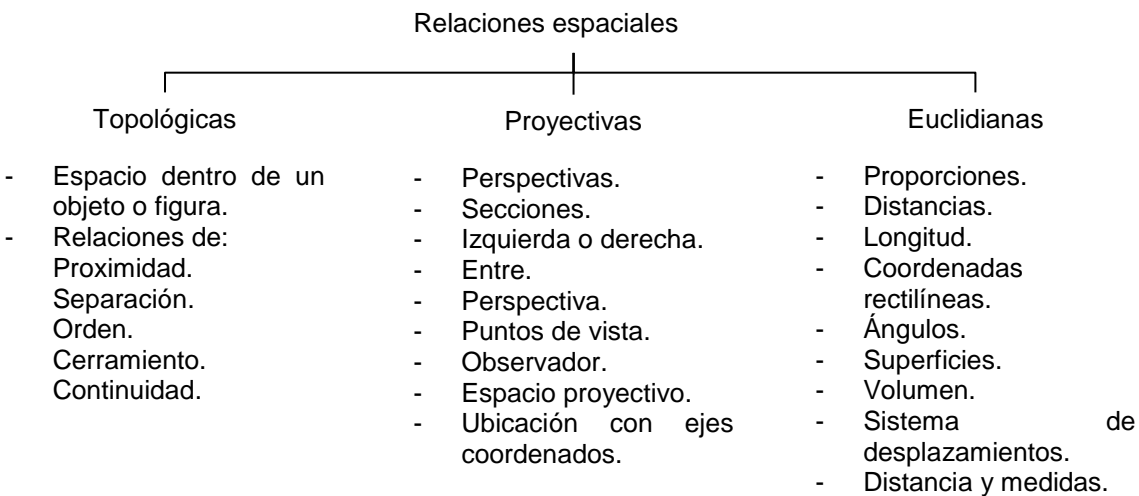


## 2.1.2 Razonamiento espacial

En esta sección no se pretende realizar un recuento histórico sobre los autores que han realizado estudios sobre el razonamiento espacial, en cambio se presentan algunas ideas que plantean algunos investigadores que influenciaron el estudio del presente trabajo, así como algunas concepciones sobre el pensamiento espacial que fueron de utilidad para la planeación de las actividades y el desarrollo de las sesiones. Uno de los textos abarcados es el artículo publicado en la revista, estudios de psicología, por Ochaíta (1983), en la que hace un análisis del libro la representación del espacio en el niño de Piaget e Inhelder, siendo este un libro profundo de psicología cuya lectura y análisis amerita un estudio independiente.

Según Ochaíta en Piaget & Inhelder (1947) se explica cómo surgen las relaciones espaciales y su clasificación Figura 2-1.

Figura 2-1: Relaciones espaciales J. Piaget.



Fuente: Elaboración propia.

Ellos además sugieren que el espacio no viene totalmente concebido por el niño sino que parte de una actividad sensoriomotriz, es decir que en la medida en que se tiene experiencias con los sentidos y movimientos del propio cuerpo se van desarrollando estas habilidades espaciales. Posteriormente se van transformando en operaciones, relaciones cerebrales que van permitiendo identificar objetos, lugares, movimientos,

establecer sistemas de referencia etc. es un proceso evolutivo que se da desde el nacimiento hasta la adolescencia.

Piaget además de establecer los estadios del desarrollo cognitivo estableció tres estadios para el desarrollo del conocimiento espacial.

El primer estadio que va desde el nacimiento hasta los dos años aproximadamente, el niño se va acercando a los objetos visualmente sin tener una presión adecuada, luego va identificando el tamaño y forma, permitiendo un progreso en la manipulación de los objetos. Posteriormente iniciará a relacionar unos objetos con otros, a ubicarlos en un espacio determinado, desplazarlos, así mismo llegar a un objetivo por distintos caminos, retroceder o regresar al punto de partida y hacer repeticiones.

El segundo estadio que va desde los dos años a los doce años aproximadamente, tendrá la capacidad de modificar continuamente aquello que ya percibió con sus relaciones topológicas, dando lugar a las relaciones proyectiva y euclidiana. Con ellas vendrán las expresiones gráficas de su entorno.

En el tercer y último estadio que va desde los doce años y culmina en la adolescencia, el sujeto tendrá la capacidad de concebir el espacio separados de la acción real, es decir podrá moverse por lugares de forma mental, además comprenderá la infinitud del espacio.

Estos elementos ya mencionados permiten identificar en qué etapa se encuentra el estudiante y las posibles actividades que se pueden hacer para fortalecer el pensamiento espacial.

Otro investigador que influenció este trabajo es Howard Gardner. Él hace un estudio sobre la inteligencia y una clasificación de esta. En el momento en el cual escribe su libro Gardner (1983), él menciona que la concepción que se tiene sobre la inteligencia es la capacidad de resolver problemas, o de crear productos, que sean válidos en uno o más ambientes culturales. Esta definición es muy general, más bien, Gardner considera que el ser humano posee ocho inteligencias:

- Inteligencia lógico-matemática.
- Inteligencia Lingüística.
- Inteligencia espacial.

- Inteligencia musical.
- Inteligencia corporal-cinética.
- Inteligencia naturalista.
- Inteligencia interpersonal.
- Inteligencia intrapersonal.

También propone un modelo donde la inteligencia se comporta como un conjunto de habilidades que se pueden mejorar y desarrollar mediante entrenamiento. (Gardner, 1993)

El mismo autor define que la inteligencia espacial es la capacidad para formarse un modelo mental de un mundo espacial y para maniobrar y operar usando este modelo. Las personas que tienen una inteligencia espacial altamente desarrollada se desenvuelven en la navegación, ingeniería, pintura, escultura, entre otros.

Ahora describiremos algunas de las habilidades espaciales dadas por el autor al inicio de sus estudios en este campo: la visualización de un objeto visto desde un ángulo diferente, por ejemplo predecir los movimientos de un juego de ajedrez, otra es el uso del espacio, por ejemplo las artes visuales y por último cómo orientarse en un lugar, establecer puntos de referencia, reconocer caras, escenas y apreciar pequeños detalles.

A continuación mencionaremos otras ideas que complementan lo ya mencionado sobre la inteligencia espacial y que fueron ampliadas por el mismo autor en su libro Estructuras de la mente, la teoría de las inteligencias múltiples. (Gardner, 1983)

- Menciona que los problemas que se sirven de las capacidades espaciales también se pueden expresar en forma exclusivamente verbal.
- Las capacidades para percibir con exactitud el mundo visual, para realizar transformaciones y modificaciones a las percepciones iniciales propias y para recrear aspectos de la experiencia visual propia, incluso en ausencia de estímulos físicos apropiados son centrales para la inteligencia espacial.
- Gardner complementa su teoría diciendo que un individuo puede ser agudo en la percepción visual y al mismo tiempo tener poca habilidad para dibujar, imaginar o

transformar un mundo ausente. Lo cual indica que dichas habilidades pueden estar separadas y ser independientes unas de otras.

- Además menciona que la inteligencia espacial no está ligada estrictamente al ámbito visual-espacial es posible que personas ciegas tengan desarrollada su inteligencia espacial.

Posteriormente y después de profundizar su teoría inicial propone y amplía las habilidades espaciales que sirven para identificar qué tipo de habilidades se pueden tener en cuenta en este trabajo:

- Percibir una forma u objeto. Para identificar si existe alguna dificultad se propone reproducir el objeto observado, para el caso de los videntes, o reproducir el objeto después de manipularlo para los invidentes.
- Girar el objeto e identificarlo desde otro punto de vista en un espacio determinado.
- Para reconocer instancias del mismo elemento.
- Para transformar o reconocer una transformación de un elemento en otro.
- De evocar la imaginación mental y luego transformarla.
- De producir una semejanza gráfica de información espacial.

Dichas habilidades se relacionan entre sí, es decir que mientras se desarrolla una, en paralelo se pueden desarrollar otras.

Hay otros usos de las capacidades espaciales más abstractos como lo son, en perspectiva, los puntos de fuga que se quieren resaltar en una pintura o en una escultura.

Así mismo la relación de imágenes existentes para representar objetos inexistentes o no visibles humanamente, como la representación de un átomo, como un sistema solar pequeño.

Otros autores que influenciaron la elaboración de esta propuesta didáctica son Martínez y Rivaya que respaldan la enseñanza obligatoria de la geometría en el bachillerato o escuela secundaria debido a los múltiples usos del pensamiento geométrico en el quehacer diario, laboral y académico. No es una posición exclusiva de ellos, es una idea que el autor de este trabajo comparte y que también es respaldada por el MEN (1998).

En Martínez & Rivaya (1998) se justifica la enseñanza obligatoria por las siguientes razones:

- Se utiliza en varios ambientes productivos, como la topografía, diseño de estructuras, arquitectura, automotrices y en general en la industria.
- En la naturaleza se encuentran algunos elementos que se pueden abordar desde campo.
- Desde el arte, puesto que durante la historia se han realizado obras con muchas características geométricas que aún son materia de estudio.
- De acuerdo a las habilidades que se adquieren a través de esta como son: la orientación, estimaciones sobre formas y distancias; para realizar cálculos del espacio que ocupan los objetos.

## **2.2 Marco teórico**

Esta parte teórica la abordaremos inicialmente describiendo los componentes pedagógicos utilizados, luego se ilustraran varios autores que se refieren al pensamiento espacial y las habilidades que están involucradas, posteriormente daremos el significado y las definiciones correspondientes para la estrategia y por último hablaremos de perspectiva y algunos conceptos que están involucrados en el proyecto.

### **2.2.1 Componente pedagógico**

El constructivismo consiste en que el conocimiento se va adquiriendo progresivamente como interacción entre las dimensiones cognitiva y social. Es el mismo sujeto que interactúa con la realidad obteniendo información la relaciona con aquello que ya sabe y la convierte en un nuevo conocimiento.

Según la teoría de Piaget, el desarrollo cognoscitivo es un proceso de equilibración que se produce dentro de una serie de etapas o estadios que van permitiendo una reestructuración constante en las capacidades cognitivas.

El proceso de equilibración se presenta a través de dos procesos, el primero es la asimilación o incorporación de un elemento exterior o autoprovocado y el segundo es el de acomodación.

Algunos de los principios generales del pensamiento piagetiano mencionados por Pedronzo (2012) y que se relacionan con el proyecto son:

- Los objetivos pedagógicos deben, además de estar centrados en el niño, partir de las actividades del alumno.
- Los contenidos, no se conciben como fines, sino como instrumentos al servicio del desarrollo evolutivo natural.
- El principio básico de la metodología piagetiana es la primacía del método de descubrimiento.
- El aprendizaje es un proceso de reorganización.
- En el desarrollo del aprendizaje son importantes los conflictos cognitivos o contradicciones cognitivas.
- La experiencia física supone una toma de conciencia de la realidad que facilita la solución de problemas e impulsa el aprendizaje.
- Las experiencias de aprendizaje deben estructurarse de manera que se privilegie la cooperación, la colaboración y el intercambio de puntos de vista en la búsqueda conjunta del conocimiento (Aprendizaje interactivo).

El aprendizaje significativo por recepción descrito por Ausubel, parte de la estructura cognitiva previa y prosigue con la integración de un nuevo conocimiento, así mismo el material se le presenta al estudiante en su forma final. También es importante reconocer que los estudiantes ya tienen unas experiencias y conocimientos que se pueden aprovechar para relacionar los conocimientos que se quieren impartir.

La primera distinción dada por Ausubel sobre los tipos de aprendizaje es por recepción o por descubrimiento, luego está el aprendizaje por repetición y significativo.

En el aprendizaje por recepción el contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al alumno en su forma final, el alumno no realiza ningún descubrimiento.

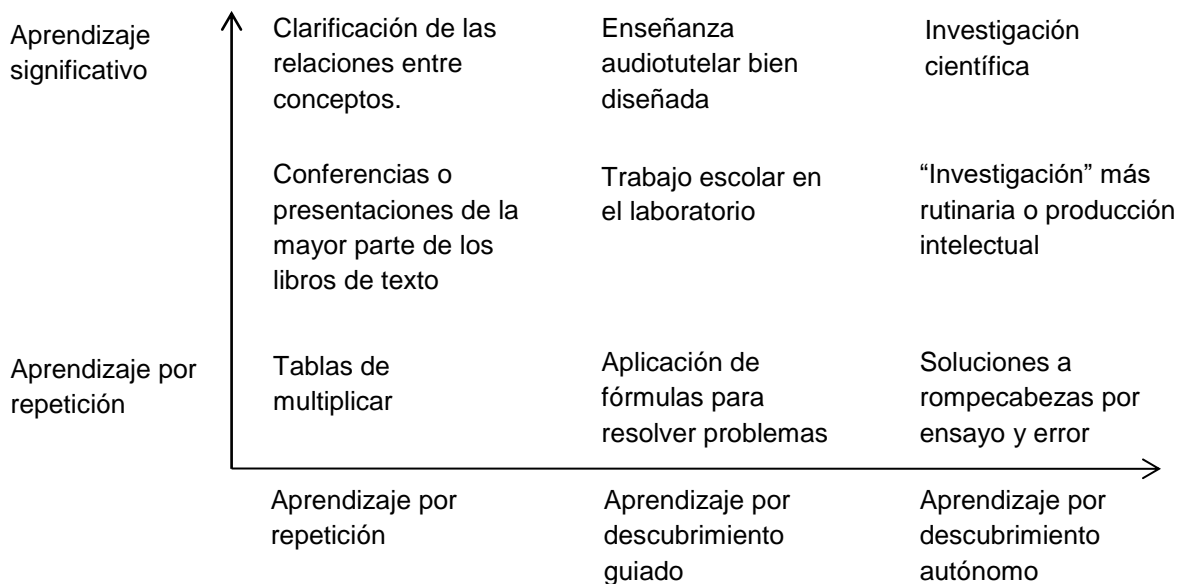
- En el aprendizaje por recepción significativo, el material potencialmente significativo es comprendido o hecho significativo durante el proceso de internalización.

- En el aprendizaje por recepción y repetición, el material de aprendizaje no es ni potencialmente significativa ni tampoco convertida en tal durante el proceso de internalización.

El aprendizaje por descubrimiento sea de formación de conceptos o de solucionar problemas, es que el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el alumno antes de que pueda incorporar lo significativo del material a su estructura cognoscitiva.

- El alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognoscitiva existente, y reorganizarla o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el producto final deseado o se descubra la relación entre medios y fines que hacía falta.
- Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento, el contenido descubierto se hace significativo de la misma manera que el contenido presentado se hace significativo en el aprendizaje por recepción.

Figura 2-2: Aprendizajes por recepción y por descubrimiento en un continuo separado del aprendizaje por repetición y el aprendizaje significativo.



Fuente: Tomado de Ausubel, Novak, & Hanesian (1998)

A continuación expresaremos algunas características del aprendizaje significativo que se relacionan con la estrategia metodológica:

- Los nuevos conocimientos se relacionan con la estructura cognitiva que ya posee el alumno. Asimilación.
- El aprendizaje requiere que el estudiante participe de forma activa y se da de forma personal, pues cada uno tiene su propia estructura.
- Se parte de que el estudiante quiere y tiene una buena actitud para aprender los conocimientos nuevos porque los considera valiosos. Hay autonomía.
- Favorece la retención y la memoria a largo plazo de los nuevos conocimientos, ya que reacomoda al estructura cognitiva.
- Se emplean materiales y se plantean situaciones con significado, que logren despertar interés por el alumno. Situadas en el ambiente sociocultural.
- El docente debe ser un mediador entre el conocimiento y el estudiante, además de generar un ambiente adecuado para el aprendizaje.
- Se debe favorecer el la opinión, el debate y el intercambio de ideas.
- Hay tres tipos de aprendizaje significativo: por representaciones, de conceptos y proposiciones.

### **2.2.2 Pensamiento espacial**

Para hablar de pensamiento espacial tomaremos algunas ideas del artículo realizado por Mataix, León, & Montes (2014) así como el de Arrieta (2006) y luego tomaremos algunas ideas expresadas en varios documentos por parte del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN).

La primera relación entre habilidad espacial e inteligencia se debe a Thorndike en 1922, desde este momento muchos han tratado de definirla, por ejemplo Lohman (1979) la define como “La habilidad de generar, retener y manipular imágenes visuales abstractas”. La habilidad espacial se puede englobar en dos categorías fundamentales:

- Visualización espacial: fue definida por McGEE (1979) como la capacidad de formar imágenes mentales y poder manipularlas en el pensamiento o la habilidad de manipular, rotar o invertir mentalmente objetos a partir de representaciones gráficas.

- Orientación espacial: Aptitud para imaginar un objeto desde otra perspectiva o como lo refiere French (1951) la habilidad de no confundirse en las variadas orientaciones en que puede presentarse una figura espacial.

Otros autores Guay y Mc Daniel (1977); Bishop (1983); Tartre (1990) consideran la capacidad espacial como un conjunto de subcapacidades más específicas como la visualización, la orientación espacial, las relaciones espaciales o la percepción espacial. También Linn & Petersen (1985) hablan de visualización, rotación espacial y percepción.

Además, Bishop (1983) habla de estos mismos conceptos pero los encuadra en dos grupos más amplios:

- Capacidad de procesamiento visual, que comprende visualización y traslación de relaciones abstractas e información no figural en términos visuales, incluidas la manipulación y la transformación de representaciones visuales. Es una capacidad de proceso no relacionada con la forma del estímulo presentado.
- Capacidad para interpretar información figural, que comprende lectura, comprensión e interpretación de representaciones visuales y vocabulario espacial usado en trabajos geométricos, gráficos, diagramas. Es una capacidad de contenido relacionada con la forma del estímulo presentado.

Los primeros en describir pruebas específicas relacionadas con la capacidad espacial como el reconocimiento de objetos por su imagen, la discriminación de formas, el doblado de papel y otras, fueron dados por Terman & Merrill (1937).

El estudio de la capacidad espacial se relaciona con el estudio de la inteligencia, para analizar estas capacidades Thurstone (1938) propuso siete factores independientes: comprensión verbal, fluidez verbal, aptitud numérica, memoria, rapidez perceptiva, visualización espacial y razonamiento inductivo, donde la visualización espacial implicaba visualización de formas, reconocer la identidad de un objeto cuando se ve desde ángulos distintos, rotación de objetos, imaginar el movimiento o desplazamiento interno entre las partes de una configuración y por último las relaciones espaciales, la orientación corporal del observador es parte esencial del problema.

Así mismo otros autores como (Burt, 1949) que organizó la estructura de la inteligencia en cinco niveles: inteligencia general, relaciones, asociaciones, percepciones y sensaciones, también Vernon (1950) sugirió cuatro niveles: general, verbal, educativo y cinemático-mecánico que comprende aptitudes menos generales como las aptitudes psicomotriz, perceptiva, espacial y mecánica y por último Guilford (1967) propuso tres categorías que se interceptan: cinco operaciones mentales (cognición, memoria, producción convergente, producción divergente y evaluación), cinco tipos de contenido (visual, auditivo, simbólico semántico y conductual) y seis productos (unidades, clases, relaciones, sistemas, transformaciones e implicaciones).

Posteriormente Cattell (1971) definió tres niveles de generalidad: Inteligencia general, inteligencia fluida-cristalizada y aptitudes primarias, comenta que en la medida que la persona se expone a una realidad social su inteligencia cristalizada hace surgir otras aptitudes más específicas como las capacidades espacial, verbal, numérica, etc. Luego Lohman (1979) encontró tres factores espaciales principales: relaciones espaciales, orientación espacial y visualización; y otros tres secundarios: velocidad de clausura, flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

Algunas de las habilidades que puede tener la percepción espacial son las proporcionadas por Del Grande (1990).

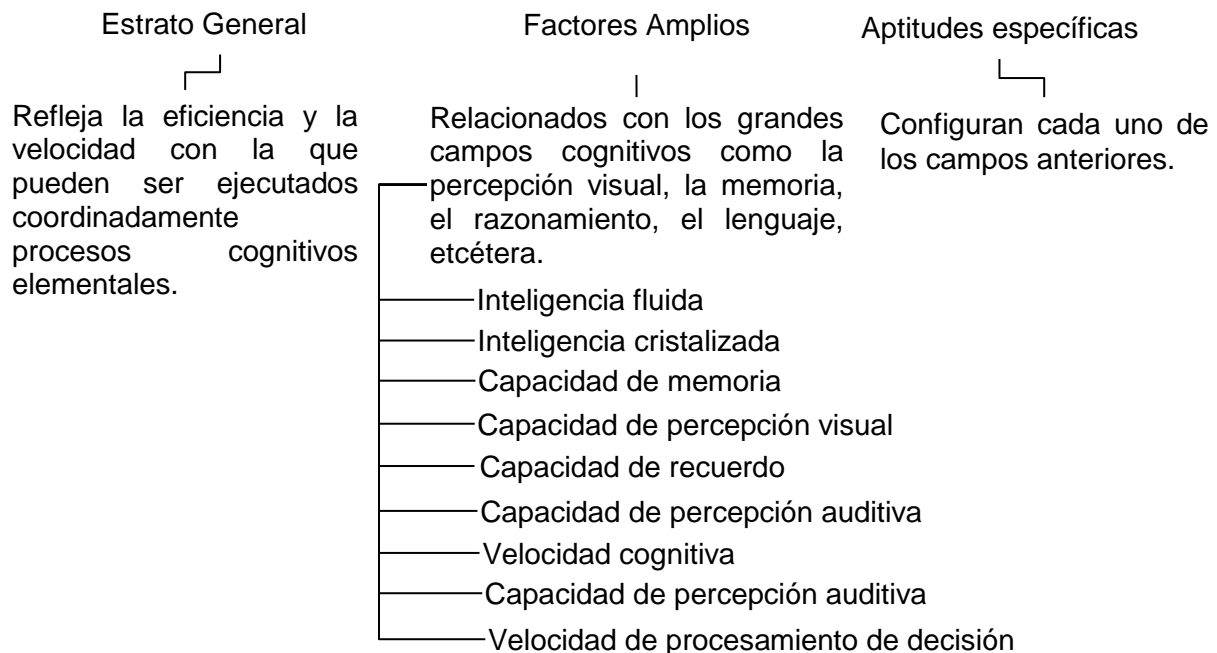
- Coordinación motriz de los ojos. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- Identificación visual. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.
- Conservación de la percepción. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.
- Reconocimiento de posiciones en el espacio. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observado) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.
- Reconocimiento de las relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos

situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc.

- Discriminación visual. Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
- Memoria visual. Es la habilidad para recordad las características visuales y de posición que tenía en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Considerada como la síntesis de muchas investigaciones realizadas después de Spearman se presenta el modelo de los tres niveles o estratos de Carroll (1993): general, factores amplios y aptitudes específicas elementales.

Figura 2-3: Los tres estratos de Carroll



Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de la capacidad de percepción visual se relaciona con las aptitudes relacionadas con el rastreo del campo visual, la aprehensión de formas, configuraciones y posiciones de objetos percibidos visualmente, formando representaciones y la manipulación mental de tales representaciones. Implica visualización, relaciones espaciales, velocidad y flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

De acuerdo con las investigaciones hechas en educación matemática se propone el término capacidad espacial y se define como: la capacidad para formar, reconocer y manipular imágenes, figuras y objetos mentalmente. Comprende cinco factores específicos independientes: Visualización, relaciones espaciales, velocidad de clausura, flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva.

- Visualización: capacidad para reestructurar (componer, descomponer, plegar, desarrollar, etc.) mentalmente patrones visuales en 2D o 3D.
- Relaciones espaciales: Capacidad para rotar mentalmente patrones visuales simples en 2D y 3D.
- Velocidad de clausura: es la rapidez para unificar en una única percepción un campo perceptual aparentemente dispar.
- Flexibilidad de clausura: aptitud para mantener una percepción o configuración visual en la mente con la finalidad de distinguirla de otras percepciones bien definidas.
- Velocidad perceptiva: rapidez para encontrar un patrón visual conocido o para comparar con precisión uno o más patrones en un campo visual donde los patrones no se deterioran o enmascaran.

Según Bressan, Bogisic, & Crego (2000) hay siete habilidades que están relacionadas con la visualización:

- Coordinación visomotora, es considerada la habilidad para coordinar la visión con el movimiento de cuerpo.
- Percepción figura-fondo, es aquella habilidad de identificar una figura (el foco) en un dibujo más amplio (fondo).
- Constancia perceptual o constancia forma, tamaño y posición, es la habilidad de reconocer que un objeto posee propiedades invariantes a pesar de que su imagen cambia al mirarlo desde otra posición.
- Percepción de la posición en el espacio, es la habilidad de relacionar un objeto o imagen mental con el mismo observador.
- Percepción de relaciones espaciales entre objetos, es la habilidad para ver dos o más objetos, pinturas y/o imágenes mentales simultáneamente en relación con el observador y entre sí.

- Discriminación visual, es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí.
- Memoria visual es la habilidad de recordar con exactitud un objeto que no permanece a la vista y relacionar sus características con otros objetos presentes o no.

El MEN dice que existen cinco procesos generales de la matemática, formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para este trabajo hablaremos de modelar procesos y fenómenos de la realidad puesto que se pretende que los estudiantes al fortalecer el pensamiento espacial estén en la capacidad de estructurar una situación problema de forma mental y plantear estrategias para darle solución. Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que se reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. (Ministerio de Educación Nacional - MEN, 2006)

En los lineamientos curriculares que establece el MEN, hay cinco tipos de pensamiento matemático: (1) el pensamiento numérico y los sistemas numéricos; (2) el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; (3) el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas; (4) el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; (5) el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

En estos lineamientos se define el pensamiento espacial como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales.

### **2.2.3 Habilidades espaciales a tener en cuenta**

Desde mi punto de vista el pensamiento espacial es la capacidad intelectual de analizar cierta información en la mente, desde varias perspectivas, expandiendo los elementos allí contenidos de tal manera que pueda manipularlos, tener una mayor comprensión de la misma y que le sirva para tomar decisiones.

El pensamiento espacial se presenta mediante ciertas habilidades: Habilidades innatas, percepción espacial, plasticidad, rotación mental, representación, percepción visual y procesamiento visual.

- **Habilidades innatas:** son las capacidades generales que no han tenido ningún tipo de estímulo cognitivo.
- **Percepción espacial:** La capacidad de orientación y ubicación, mediante puntos de referencia e indicadores gravitacionales y kinestésicos.
- **Plasticidad:** Capacidad de construir un módulo físico a partir de una representación plana del módulo. A partir del módulo físico, dibujar su representación en el plano. Relacionar dos representaciones planas del módulo sin construir el módulo físico. Plegar y desplegar figuras tridimensionales e identificar las relaciones respectivas.
- **Rotación mental:** Capacidad de girar objetos en dos o tres dimensiones. Desarrollo de sólidos. (Movimiento de las figuras sobre todo rotaciones)
- **Representación:** Capacidad de traducir imágenes en un boceto, esquema o dibujo, que están relacionadas con el lenguaje escrito, auditivo, imaginativo o que hayan sido manipuladas mentalmente. En un cubo indicar en el desarrollo del plano las aristas correspondientes al módulo tridimensional reconstruido.
- **Percepción visual:** Reconocer, manipular, clasificar imágenes, figuras u objetos en el pensamiento, establecer relaciones espaciales con figuras ya conocidas. Un ejemplo puede ser identificar qué tipo de figura es, las características que tiene, el comportamiento que puede tener, número de vértices, aristas, caras. Su descomposición. Características del objeto, dimensiones, vistas y detalles que pueda percibir.
- **Procesamiento visual:** Capacidad para identificar y predecir imágenes desconocidas después de un movimiento. Vistas en un edificio, cantidad de cubos faltantes, proyecciones ortogonales. Área y volumen. Determinar cómo queda el objeto después de realizar un cambio o transformación.

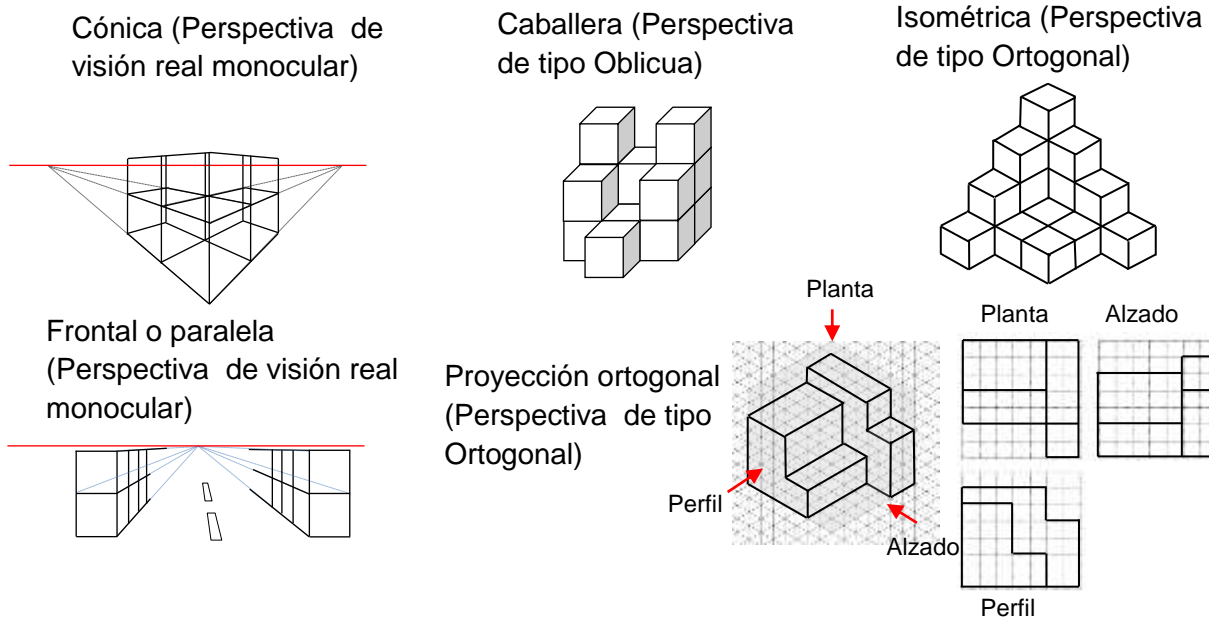
### 2.2.4 Representaciones planas

Existen varias formas de representar cuerpos tridimensionales según las características que se deseen resaltar del objeto o la posición desde la cual se ve, en geometría por

ejemplo se utilizan las proyecciones en perspectiva cónica, caballera, isométrica, frontal, ortogonal. (Gaulin & Puchalska, 1987).

El dibujo en perspectiva cónica o frontal resalta la profundidad que se percibe con la visión, considerando un punto de fuga desde o hacia el cual convergen ciertas rectas paralelas del paisaje u objetos que se están retratando. Esto permite que aquellos objetos que están más lejos del observador se verán más pequeños que los que están más cerca.

Figura 2-4: Representaciones planas de un módulo multicubo.



Fuente: Elaboración propia

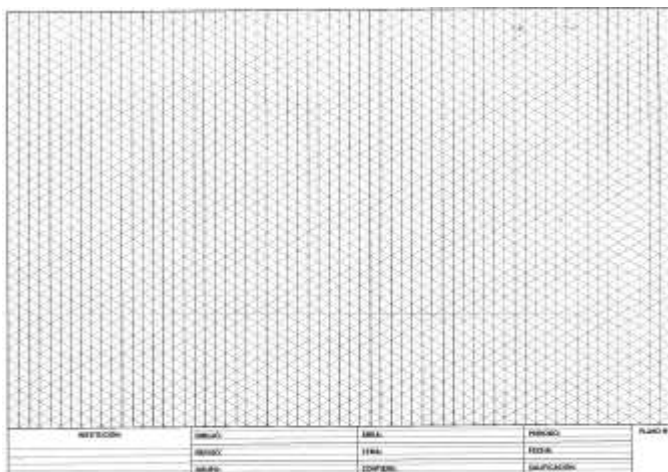
Para explicar otras formas de representar los objetos, voy a tomar una agrupación de cubos como en la Figura 2-4. Sin embargo, para una explicación más general vea (González, 2017). La proyección paralela (caballera) es similar a la perspectiva, pero conserva el paralelismo entre las aristas, además los planos en los que se desarrolla la figura están a  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  y  $135^\circ$ , no obstante, se distorsiona la visión real del objeto.

La proyección isométrica es similar a la proyección paralela, pero se diferencia de esta, en que las aristas de los cubos conservan la misma longitud (sin importar su profundidad)

y la figura se ubica en tres planos cada uno de 120°. La proyección ortogonal se forma al proyectar cada una de las vistas del objeto en un espacio con tres paredes perpendiculares entre sí, al iluminar cada cara se genera una proyección en la pared, por consiguiente, cada imagen es una proyección ortogonal y al extraer las tres imágenes se puede reconstruir el sólido.

Para este trabajo se utilizará el papel isométrico como guía para representar las figuras tridimensionales en dos dimensiones. Esta hoja tiene una cuadrícula compuesta por triángulos equiláteros y los tres planos en los que se desarrollan las figuras están a 120° respectivamente, es decir, que los sólidos en este papel se representan en proyección isométrica.

Figura 2-5: Papel isométrico.



Fuente: Elaboración propia

### 2.3 Marco Disciplinar

De acuerdo con Clemens, Phares G., & Thomas J. (1989) un poliedro es un objeto tridimensional formado por regiones poligonales denominadas caras, los lados y vértices de las caras reciben los nombres de aristas y vértices del poliedro. Además, cada arista es frontera de exactamente dos caras. Si dos caras se intersecan, lo hacen en una arista o en un vértice.

En la Tabla 2-1, se muestran los conceptos relacionados con algunas de las figuras expuestas previamente a la intervención.

Tabla 2-1: Definiciones

DEFINICIÓN	Regular Polytopes (Coxeter, 1948)	Geometría (Rich, 1991)	Geometría (Alexander & Koeberlein, 2013)	Geometría plana y de espacio con una introducción a la trigonometría (Baldor, 2004)	Geometría Descriptiva (Coppetti, 2000)	Geometría moderna (Moise & Downs, 1966)
Poliedro	Poliedros. Un poliedro puede definirse como un conjunto finito y conectado de polígonos planos, de modo que cada lado de cada polígono pertenezca también a otro polígono, con la condición de que los polígonos que rodean cada vértice formen un solo circuito (para excluir anomalías como dos pirámides con un ápice común). Los polígonos se denominan caras y sus lados bordes. Hasta el capítulo VI insistimos en que los rastros no se crucen. Así, el poliedro forma una sola superficie cerrada y descompone el espacio en dos regiones, una de las cuales, llamada interior, es finita. A menudo encontraremos conveniente considerar que el poliedro consta de su interior, así como de sus caras $N_2$ , aristas $N_1$ y $N_0$ vértices. El caso más importante es cuando ninguno de los planos delimitadores penetra en el interior. Entonces tenemos un poliedro convexo, que puede describirse (en términos de coordenadas cartesianas) mediante un sistema de desigualdades. Las desigualdades deben ser consistentes pero no redundantes, y deben proporcionar el rango para una integral finita.	Un sólido es la porción de espacio comprendida entre superficies planas y curvas.  Un poliedro es un sólido acotado únicamente por superficies planas. Así la pirámide y el cubo son poliedros.  Poliedros regulares Los poliedros regulares son sólidos que tienen polígonos regulares como caras, de manera que en cada vértice se intersecta el mismo número de caras. Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro	Un poliedro es un sólido delimitado por regiones del plano. Los polígonos forman las caras del sólido, y los segmentos comunes a esos polígonos son las aristas del poliedro. Los puntos extremos de las aristas son los vértices del poliedro.	Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y los ángulos poliedros tienen el mismo número de caras.	Se llama poliedro a la parte del espacio limitada por polígonos planos.  Los poliedros pueden clasificarse por el número de sus caras, o por la naturaleza de sus ángulos diédricos y poliédricos, o por su forma espacial, etc.  Por el número de sus caras se clasifican en: tetraedros (poliedros de cuatro caras), pentaedros (poliedros de cinco caras), hexaedros (poliedros de seis caras), octaedros (poliedros de ocho caras), dodecaedros (poliedros de doce caras), icosaedros (poliedros de veinte caras), y el dos demás casos, no se les da nombre especial y se dice poliedro de tantas caras.  Por su forma, los poliedros pueden clasificarse en regulares e irregulares. Se llaman poliedros regulares aquellos cuyas caras son todos polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son todos iguales.	
Ángulo diedro			Cuando dos planos se intersecan el ángulo formado por los dos planos medios con una arista común (la recta de intersección) es un ángulo diedro.			
Poliedro convexo			Cuando un poliedro es <b>convexo</b> cada cara determina un plano para el cual todas las caras restantes se encuentran en el mismo lado de dicho plano. Un poliedro regular es convexo y sus caras son polígonos regulares congruentes acomodados de manera que las caras adyacentes forman ángulos diedros congruentes.	Poliedro convexo es el cuerpo limitado por polígonos, llamados caras, de manera que el plano de cada cara deja a un mismo lado a la figura.	Por la naturaleza de sus ángulos diédricos y poliédricos se clasifican en cóncavos y convexos. Los poliedros convexos son aquellos en los cuáles, si se supone prolongada indefinidamente una de sus caras, todo el poliedro queda a un solo lado del plano de dicha cara, lo que no se cumple para los poliedros cóncavos.	
Prisma		Un prisma es un poliedro en el cual dos de sus caras son polígonos paralelos y las caras restantes son paralelogramos.	Un prisma recto es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección.	Se llama prisma al poliedro limitado por varios paralelogramos y dos polígonos iguales cuyos planos son paralelos.	Se llama prisma al poliedro limitado por dos polígonos iguales, situados en planos paralelos, y por tantos paralelogramos como lados tenga uno de aquellos polígonos.	Sean $E_1$ y $E_2$ dos planos paralelos, $R$ una región poligonal en $E_1$ y $L$ una recta que interseque a $E_1$ y a $E_2$ , pero no a $R$ . Por cada punto $P$ de $R$ , sea $\overline{PP'}$ un segmento paralelo a $L$ y que una el punto $P$ con un punto $P'$ de $E_2$ . La reunión de todos los segmentos $\overline{PP'}$ se llama prisma.

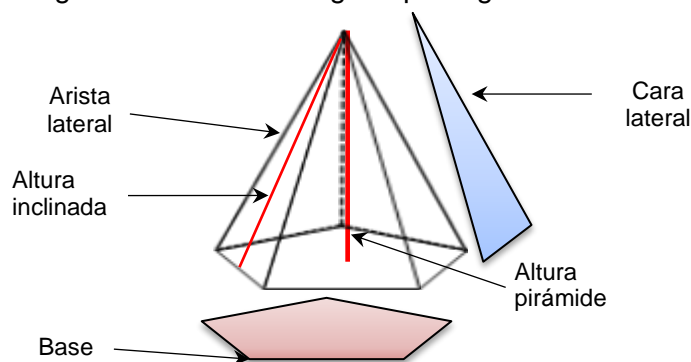
DEFINICIÓN	Regular Polytopes (Coxeter, 1948)	Geometría (Rich, 1991)	Geometría (Alexander & Koeberlein, 2013)	Geometría plana y de espacio con una introducción a la trigonometría (Baldor, 2004)	Geometría Descriptiva (Coppetti, 2000)	Geometría moderna (Moise & Downs, 1966)
Paralelepípedo		Un paralelepípedo es un prisma acotado por seis paralelogramos.		Paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelogramos.		Un paralelepípedo es un prisma cuya base es una región paralelogramática. Un paralelepípedo rectangular es un prisma rectangular recto.
Cubo		Un cubo es un sólido rectangular acotado por seis cuadrados.	Un cubo es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes.	Cubo es el ortoedro que tiene iguales todas sus aristas	El cubo es el poliedro regular formado por seis caras cuadradas y que tres a tres concurren a un vértice. Tiene doce aristas y ocho vértices.	Un cubo es un paralelepípedo rectangular cuyas aristas son todas congruentes.
Pirámide		Una pirámide es un poliedro cuya base es un polígono y cuyas otras caras se encuentran en un punto, su vértice.	Una pirámide regular tiene por base un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.	Pirámide es el poliedro que tiene una cara llamada base, que es un polígono cualquiera y otras, llamadas caras laterales, son triángulos que tienen un vértice común, llamado vértices o cúspide de la pirámide.	Se llama pirámide al poliedro en que una de las caras es un polígono cualquiera y las otras son triángulos que tienen por bases respectivas los diferentes lados de la cara poligonal y como vértice común, un punto exterior a dicha cara.	
Cono, cilindro y esfera		Un cono circular es un sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral termina en un punto.  Un cilindro circular es un sólido cuyas bases son círculos paralelos y cuyas secciones transversales paralelas a las bases también son círculos.  Una esfera es un sólido tal que cualquier punto de su superficie equidista de un punto fijo, su centro.	En el espacio la esfera se caracteriza de tres formas: 1. Una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos a una distancia fija $r$ de un punto dado $O$ . Al punto $O$ se le conoce como centro de la esfera, aun cuando no es parte de la superficie esférica. 2. Una esfera es la superficie determinada cuando un círculo (o semicírculo) rota alrededor de su diámetro. 3. Una esfera es la superficie que representa el límite teórico de un poliedro regular "inscrito" cuyo número de caras aumenta sin ningún límite.	Superficie de revolución es la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje.  Cilindro, se llama cilindro de revolución o cilindro circular recto a la porción de espacio limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares al eje. Las secciones producidas por dichos planos, son dos círculos llamados bases del cilindro.  Cono, es la porción de espacio limitada por una superficie cónica de revolución y un plano perpendicular al eje, se llama cono circular recto o cono de revolución.  La superficie esférica es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de uno interior llamado centro. Se llama esfera al conjunto formado por todos los puntos de una superficie esférica y los interiores a la misma.	Cono y cilindro de revolución. Superficies engendradas por la rotación de una recta alrededor de un eje que la corta (cono) o que le es paralelo (cilindro).  Esfera. Superficie engendrada por la rotación de una circunferencia alrededor de una de sus diámetros.	
Otras definiciones			Tetraedro regular, que tiene 4 caras (triángulos equiláteros congruentes) Hexaedro regular (o cubo), que tiene 6 caras (cuadrados congruentes) Octaedro regular, que tiene ocho caras (triángulos equiláteros congruentes) Dodecaedro regular, que tiene 12 caras (pentágonos regulares congruentes) Icosaedro regular, que tiene 20 caras (triángulos equiláteros congruentes)	Ortoedro es un paralelepípedo recto con sus aristas laterales perpendiculares a las bases.  Romboedro es el paralelepípedo cuyas bases son rombos.	Tetraedro regular es el poliedro regular formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros iguales y que tres a tres concurren a un vértice. Tiene seis aristas y cuatro vértices.	

Fuente: Elaboración propia.

A continuación describiremos con mayor detalle las definiciones y características de las figuras expuestas a los estudiantes previamente a la estrategia didáctica, que hacen parte de los contenidos regulares de la asignatura de Matemáticas. Además son teoremas que se aplican para resolver problemas de aplicación y que no vienen demostrados con los estudiantes de manera formal.

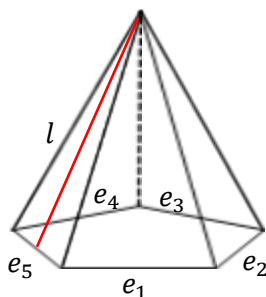
Una **pirámide** es un poliedro en el cual todas las caras, menos una tiene un vértice común. Ese vértice común es el vértice de la pirámide, y la cara que no contiene al vértice es la base de la pirámide.

Figura 2-6: Pirámide regular pentagonal.



Fuente: Elaboración propia.

El área total de una pirámide es igual a la suma de las áreas de las caras laterales más el área de la base.



Considérese una pirámide regular con base pentagonal, altura inclinada  $l$  igual para todos los triángulos, y aristas de la base de longitudes  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5$ .

Suma de las áreas de las caras laterales  $= \frac{1}{2}e_1l + \frac{1}{2}e_2l + \frac{1}{2}e_3l + \frac{1}{2}e_4l + \frac{1}{2}e_5l$ .

$$= \frac{1}{2}l(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$$

**Teorema 1.** Área de una pirámide

Dada una pirámide regular con altura inclinada  $l$ , área de la base  $B$  y perímetro  $p$ , el área  $S$  se encuentra con la fórmula

$$S = \frac{1}{2}lp + B.$$

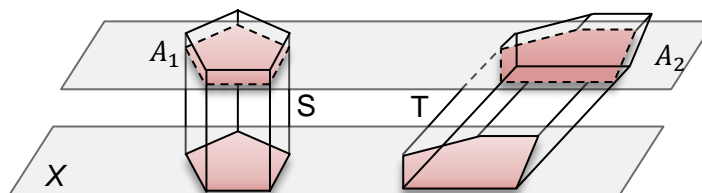
**Teorema 2.** Volumen de una pirámide.

Dada una pirámide de altura  $h$  y área de la base  $B$ , el volumen se encuentra por la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}hB.$$

Una **sección transversal** de un sólido es una región común al sólido y a un plano que interseca al sólido.

Figura 2-7: Postulado de Cavalieri.



Fuente: Elaboración propia.

**Postulado de Cavalieri**

Sean  $S$  y  $T$  dos sólidos y  $X$  un plano que interseca a  $S$  y  $T$ . Si todo plano paralelo a  $X$  que también interseca a  $S$  y  $T$ , en una sección transversal, produciendo áreas iguales  $A_1 = A_2$ , entonces la suma de todas las áreas correspondientes a las todas las secciones de los planos paralelos a  $X$  corresponden a los volúmenes de cada sólido, por consiguiente:

$$\text{Volumen } S = \text{Volumen } T.$$

**Teorema 3.** Dos pirámides con alturas iguales y bases de igual área tienen el mismo volumen.

Suponga que el área de la base de la pirámide  $P_1$  es  $Ab_1$  y su altura  $h_1$  y el área de la segunda pirámide es  $Ab_2$  y tiene altura  $h_2$ . Si las bases tienen la misma área, es decir  $Ab_1 = Ab_2$ , y tienen la misma altura  $h_1 = h_2$  entonces:

$$V_1 = \frac{1}{3}h_1Ab_1 = \frac{1}{3}h_2Ab_2 = V_2.$$

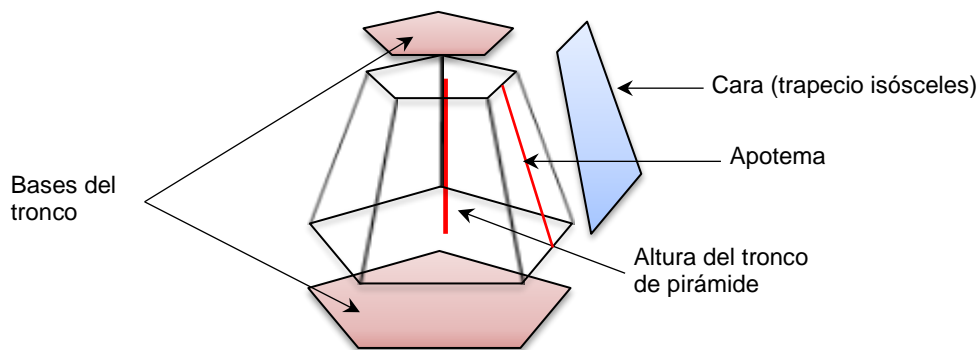
**Teorema 4.** Área de una pirámide

Dada una pirámide regular con altura inclinada  $l$ , área de la base  $B$  y perímetro  $p$ , el área  $S$  se encuentra con la fórmula:

$$S = \frac{1}{2}lp + B.$$

Un **tronco de pirámide** es el sólido geométrico que se forma al intersecar una pirámide regular con un plano paralelo a la base que corta a las aristas laterales.

Figura 2-8: Tronco de pirámide pentagonal.



Fuente: Elaboración propia.

#### Teorema 5. Área de un tronco de pirámide

El área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular, es igual al semiproducto de la suma de las medidas de los perímetros de sus bases, por la medida de la apotema.

$$S_l = \frac{p + p'}{2} \times a$$

$$A_{TP} = S_l + A_{b1} + A_{b2}$$

#### Teorema 6. Volumen de un tronco de pirámide

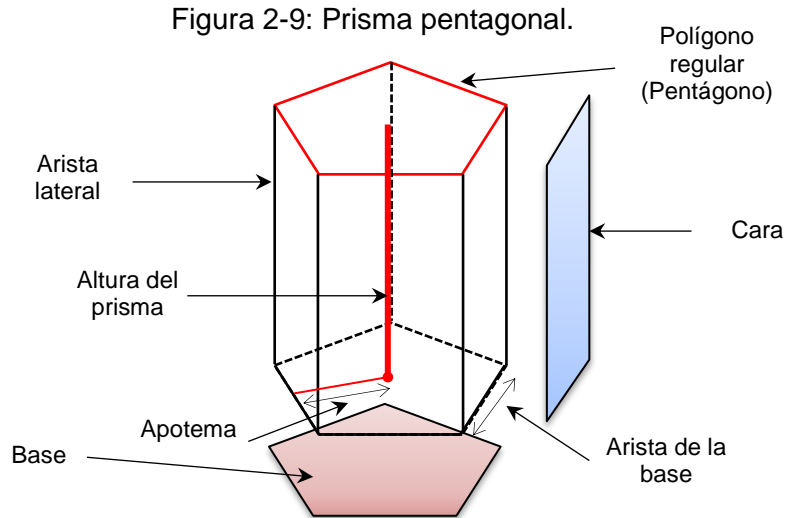
El volumen de un tronco se obtiene sumando las áreas de las bases y la raíz cuadrada de su producto, multiplicando el total obtenido por la medida de la altura del tronco, y dividiendo el producto por tres.

$$V = \frac{(A + A' + \sqrt{A \times A'}) \times h}{3}$$

Un **prisma** es un poliedro que satisface estas condiciones:

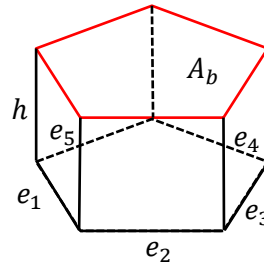
Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (bases).

Todas las demás caras son paralelogramos.



Fuente: Elaboración propia.

Considérese un prisma de altura  $h$ , con caras laterales rectangulares y bases pentagonales.



Si el área de cada base es  $A_b$  y las aristas de la base tienen longitudes  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{Área de las caras laterales} &= e_1h + e_2h + e_3h + e_4h + e_5h \\ &= h(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \\ &= hp, \text{ donde } p \text{ es el perímetro de la base.} \end{aligned}$$

**Teorema 7.** Área de un prisma

Dado un prisma con caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es  $h$  y las bases tienen área  $A_b$  y perímetro  $p$ , entonces el área  $S$  se encuentra con la fórmula:

$$S = hp + 2A_b.$$

**Teorema 8.** Volumen de un prisma

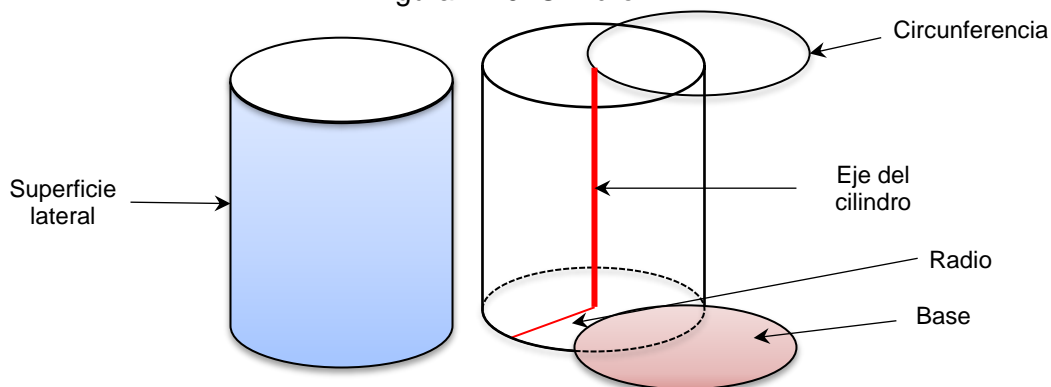
El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la longitud de una altura  $h$  por el área de la base  $A_b$ :

$$V = hA_b.$$

Un **cilindro** es como un prisma en el sentido de que tiene bases congruentes en un par de planos paralelos. Las bases son regiones circulares congruentes.

Un cilindro puede considerarse como un prisma con un número infinito de lados.

Figura 2-10: Cilindro.



Fuente: Elaboración propia.

### Teorema 9. Área de un cilindro

Dado un cilindro circular recto de altura  $h$ , si la circunferencia de la base es  $C$  y el área de la base es  $A_b$ , el área  $S$  está dada por la fórmula:

$$S = Ch + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

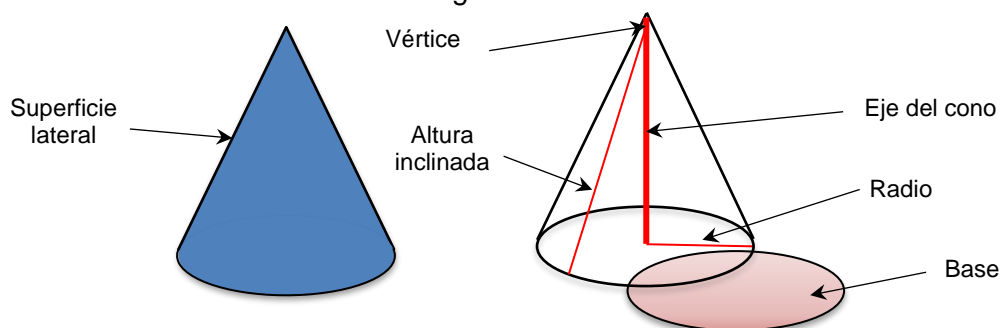
### Teorema 10. Volumen de un cilindro

Dado un cilindro circular recto con área de la base  $B$  y altura  $h$ , su volumen está dado por la fórmula:

$$V = Bh = \pi r^2 h.$$

Un **cono** puede considerarse como una pirámide con un número infinito de caras laterales.

Figura 2-11: Cono.



Fuente: Elaboración propia.

### Teorema 11. Área de un cono

Dado un cono circular recto con altura inclinada  $l$ , si la circunferencia de su base es  $C$  y el área de la base  $B$ , entonces el área  $S$  está dada por la fórmula:

$$S = \frac{1}{2}lC + B = \pi rl + \pi r^2.$$

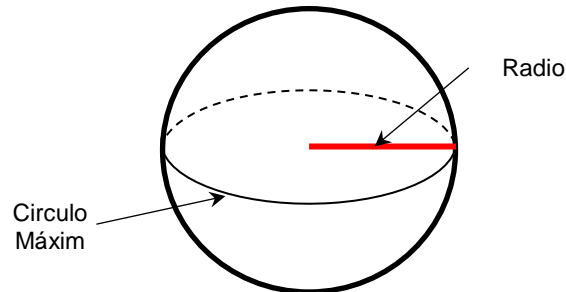
**Teorema 12.** Volumen de un cono

Dado un cono circular recto con altura  $h$  y área de la base  $B$ , el volumen está dado por la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

La **esfera** es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia dada de un punto dado.

Figura 2-12: Esfera.



**Teorema 13.** Área de una esfera Fuente: Elaboración propia.

Dada una esfera de radio  $r$ , el área  $S$  se encuentra con la fórmula:

$$S = 4\pi r^2.$$

**Teorema 14.** Volumen de una esfera

Dada una esfera de radio  $r$ , el volumen se encuentra con la fórmula:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## 2.4 Marco Legal

Existen algunos documentos legales que sustentan esta propuesta y que se relacionan con las temáticas a tratar, están regidos por las leyes que rigen la educación en Colombia.

En la Constitución Política de Colombia en el artículo 67 de 1991 menciona que “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura”.

En la ley 115 de 1994 en su artículo 22 que corresponde a los objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria en el inciso c menciona “El desarrollo de las

capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y la observación experimental”.

El ministerio de educación nacional en los lineamientos curriculares de matemáticas del año 1998, menciona “La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bi y tridimensionales, la comprensión y uso de propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional. ”

El ministerio de educación nacional en los estándares básicos de competencias en matemáticas del año 2006, menciona los siguientes indicadores para medir el desarrollo el pensamiento espacial y los sistemas geométricos al terminar el grado noveno:

- Conjeturar y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplicar y justificar criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

El ministerio de educación también en los derechos básicos de aprendizaje del año 2013 para matemáticas del grado octavo al finalizar los estudiantes deberán:

- Realiza construcciones geométricas usando regla y compás.
- Usa representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para solucionar problemas geométricos.
- Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico.
- Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras ciencias.

## 2.5 Antecedentes

En el contexto nacional hay varios trabajos sobre el pensamiento espacial, como el trabajo de grado para maestría de Gómez Muñoz & Reyes Henao (2018) que lleva como título “Fortalecimiento del pensamiento matemático espacial a través de la representación y visualización de figuras tridimensionales en estudiantes de grado quinto de primaria”, que se enfoca en la representación y visualización de las figuras tridimensionales, identificar sus nombres, sus características, su clasificación y hallar el área y volumen. Desde otro punto de vista analiza algunas de las habilidades espaciales pero de acuerdo a la edad en la que se desarrolló la propuesta, es decir grado quinto.

Otro trabajo elaborado por Gutiérrez Uribe & Bulla Afanador (2013) que lleva como título “Desarrollo del pensamiento espacial: una propuesta de aula en el campo de la geometría descriptiva”, allí se trabajan algunas categorías básicas del pensamiento espacial para los estudiantes del grado quinto, trabajando conceptos de perspectiva, proyecciones y dibujo técnico, así como identificar las características de las figuras geométricas.

El siguiente trabajo elaborado por Bermúdez (2017), que lleva como título “Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo del municipio de la Virginia Risaralda mediado por las situaciones problema”, se afronta el tema desde las figuras planas y sus características, mediante una secuencia didáctica y mediante el modelo de Van Hiele para la resolución de problemas.

En un contexto latinoamericano está el trabajo elaborado por Navas Loma (2011), que lleva como título “El Razonamiento espacial y la resolución de problemas geométricos en

los estudiantes de décimo año de educación básica del colegio Nacional mixto Aída Gallegos De Moncayo”, realiza una indagación sobre los aspectos cognitivos relacionados con el método de aprendizaje del razonamiento espacial y una serie de pruebas para medir esta capacidad.

Por último está el trabajo elaborado por Villa (2016), que lleva como título “Desarrollo y evaluación de las habilidades espaciales de los estudiantes de Ingeniería”. Actividades y estrategias de resolución de tareas espaciales, allí se ha hecho una indagación sobre los materiales, cursos o herramientas para potenciar el desarrollo de habilidades espaciales, además se han evaluado tres habilidades espaciales (plegado mental, rotación mental y corte por un plano) y se ha hecho un seguimiento previo y posterior a la asignatura Expresión Gráfica, donde a través del software CAD 3D y el uso de la tecnología han logrado tener un progreso en dicha habilidad, dando como resultado y confirmando que el estudio de la geometría espacial es fundamental para potenciar el desarrollo del razonamiento y la habilidad espacial.

## **3. Diseño metodológico**

### **3.1 Tipo de investigación**

Para este trabajo se utilizará la investigación de tipo cuantitativo pre experimental.

Es un tipo de investigación que usualmente se aplica en el ámbito de la educación. Se diseña un experimento para aplicar a un grupo de individuos. Para medir el impacto del experimento se combinan varias modalidades. Se puede considerar uno o dos grupos de aplicación, uno experimental y otro de control, y la aplicación de pruebas de desempeño, prueba inicial (pre-test) y prueba posterior al experimento (pos-test). Por ejemplo, una estrategia puede ser tomar un único grupo de personas y aplicar pre-test seguido del experimento y luego pos-test, en este caso el impacto se mide por la diferencia entre los resultados del pos-test y el pre-test. Otra estrategia es tomar dos grupos, uno experimental y otro de control, se aplica la metodología al grupo experimental y luego se aplica el pos-test a ambos grupos, el impacto está directamente relacionado con la diferencia entre los dos pos-test. Otra estrategia es aplicar la metodología a un solo grupo y luego aplicar el pos-test, este podría ser el caso cuando los individuos no han tenido contacto previamente con el experimento o no han tenido experiencia con uno similar.

Esta investigación es de tipo pre-experimental, se consideró un solo grupo de individuos y, para medir el impacto de la estrategia didáctica se realizaron dos pruebas, un pre-test y un pos-test. Sin embargo, los resultados que se obtienen en este tipo de pruebas no indican las causas determinantes del desempeño del grupo ante el experimento, pero pueden dar indicios de las habilidades o características que tuvieron mayor o menor impacto. Se pueden conjeturar algunas causas pero deben ser corroboradas con una investigación de otro tipo.

---

Grupo	Asignación	Pre-test	Tratamiento	Pos-test
Estudiantes grado octavo	Total	$O_1$	Estrategia didáctica	$O_2$

Este diseño funciona aplicándole una prueba previa al tratamiento experimental, luego el tratamiento y posteriormente una prueba final. Aunque del pre-experimento no se obtengan inferencias causales importantes, no hay grupos de comparación y es posible que actúen varias fuentes de invalidación interna, si es muy útil para generar una idea, que posteriormente pueda ser probada con otros diseños que tengan en cuenta más características de estudios experimentales propiamente dichos.

Hernández, Fernández, & Baptista (2006) mencionan que pueden existir otros factores que generen cambios además del tratamiento experimental como son la historia, es decir el lapso de tiempo entre ambas mediciones, así mismo que entre  $O_1$  y  $O_2$  se presente la maduración (fatiga, aburrimiento, etc.), también se puede elegir un grupo atípico o que no se encuentre en su estado normal al momento de realizar el experimento.

### 3.2 Metodología

El plan de la estrategia es el siguiente, se realizan diez sesiones, las cuales tiene como objetivo fortalecer el pensamiento y habilidades espaciales de los estudiantes. La primera sesión es una prueba diagnóstica que permite comprender el tipo de habilidades espaciales que poseen los estudiantes de la institución educativa Sol Naciente de Tocancipá. Las siguientes ocho sesiones son actividades prácticas que tienen como objetivo fortalecer algunas de las habilidades espaciales y la décima sesión es una prueba final que evalúa el progreso de los estudiantes.

Cada sesión está planeada para ser aplicada en un tiempo estimado entre una hora y media y dos horas. Las sesiones se pueden aplicar de forma remota sincrónica o presencial. En algunas sesiones se requiere que los estudiantes cuenten con una tableta o celular y tengan acceso a internet.

La Tabla 3-1, muestra una descripción breve de las actividades que se desarrollan.

Tabla 3-1: Actividades por sesión

<b>Primera sesión</b>	<b>Segunda sesión</b>	<b>Tercera sesión</b>	<b>Cuarta sesión</b>	<b>Quinta sesión</b>
Prueba diagnóstico con 12 ejercicios.	Figuras con papel isométrico. Pasos iniciales sobre trazado de puntos, rectas paralelas, circunferencias. - Figuras geométricas - Perspectivas - Objetos	Movimiento de figuras isométricas. Se propone realizar un plano de un ambiente del lugar donde habita.	Vistas de los cubos y su composición.	App Isometric
<b>Sexta sesión</b>	<b>Séptima sesión</b>	<b>Octava sesión</b>	<b>Novena sesión</b>	<b>Décima sesión</b>
Explicación de algunos criterios para los ejercicios de composición de sólidos y cubos. (Cubo de ejemplo y la pirámide como ejercicio en casa)	Aplicación web para vistas de cubos. Software Cubtest	Vistas y perspectiva de cubos. Área y volumen.	Ejemplos de problemas que necesiten de representación y su importancia.  Problemas de áreas y volumen de sólidos huecos o figuras compuestas.	Prueba final

Fuente: Elaboración propia.

Las sesiones se distribuyen de esta manera para que los estudiantes puedan manejar de forma gradual el papel isométrico que permite generar una técnica de representación de los objetos en tres dimensiones. La Tabla 3-2 muestra de forma breve las actividades y su relación con la habilidad a fortalecer.

Tabla 3-2: Objetivos y habilidades por sesión

<b>SESIONES</b>	<b>OBJETIVO</b>	<b>HABILIDAD</b>
<b>Primera sesión</b> Realizar la prueba diagnóstica.	Identificar como están los estudiantes en cuanto al pensamiento espacial.	La prueba se hará para identificar el rendimiento en las habilidades de <b>plasticidad, rotación mental, representación, percepción visual y procesamiento visual.</b>
<b>Segunda sesión</b> Trazos sobre papel isométrico	Realizar trazos de cubos en perspectiva.	Representación
<b>Tercera sesión</b> Movimiento de figuras en isometría.	Realizar movimientos a las figuras en perspectiva.	Rotación mental y representación.
<b>Cuarta sesión</b> Vistas de los cubos y composición.	Identificar las relaciones entre vistas y el objeto compuesto.	Percepción visual y representación.
<b>Quinta Sesión</b> App Isometric.	Ejercitar las vistas de cubos.	Percepción visual y plasticidad.

<b>Sexta sesión</b> Explicación de algunos criterios para los ejercicios de composición de figuras.	Realizar la composición de figuras con imágenes.	Plasticidad y procesamiento visual.
<b>Séptima sesión</b> Cubetest	Ejercitar la relación entre imágenes del objeto ubicadas en distintas posiciones.	Rotación mental y percepción visual.
<b>Octava Sesión</b> Vistas y perspectiva de cubos. Área y volumen.	Resolver problemas de área y volumen.	Procesamiento visual.
<b>Novena Sesión</b> Problemas de áreas y volumen con sólidos geométricos huecos o sólidos geométricos compuestos.	Comprender la importancia de hacer una representación que ayude a la resolución de problemas con figuras geométricas.  Ejercitar la representación para solucionar problemas con figuras geométricas.	Representación y procesamiento visual.
<b>Décima sesión</b> <b>Prueba final</b>	Identificar cuál ha sido el progreso después de las sesiones.	La prueba se hace para identificar el rendimiento en las habilidades de <b>plasticidad, rotación mental, representación, percepción visual y procesamiento visual.</b>

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 3-3, muestra las habilidades que se trabajan y se desean fortalecer entre la segunda y novena sesión. Observe que hay sesiones y ejercicios que involucran más de una habilidad.

Tabla 3-3: Habilidades a fortalecer por sesión

	Plasticidad	Rotación mental	Representación	Percepción visual	Procesamiento visual
Segunda sesión: Trazos sobre papel Isométrico.			x		
Tercera sesión: Realizar movimientos a las figuras en perspectiva.		x	x		
Cuarta sesión: Identificar las relaciones entre las vistas y el objeto compuesto.			x	x	
Quinta sesión: Ejercitar las vistas de figuras contenidas en el cubo.			x	x	
Sexta sesión: Realizar la composición de figuras con imágenes.	x				x
Séptima sesión: Ejercitar la relación entre imágenes del objeto ubicadas en distintas posiciones.		x		x	
Octava sesión: Resolver problemas de área y volumen de figuras en el papel isométrico.	x				x
Novena sesión: Representación de un objeto que está en un problema. Área y volumen.			x		x

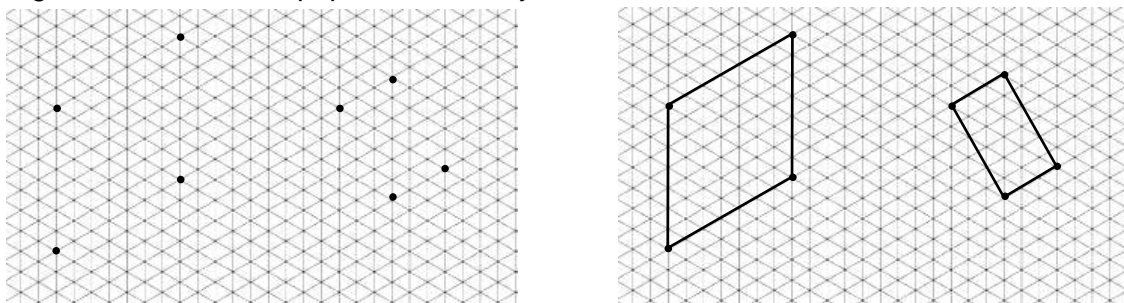
Fuente: Elaboración propia.

A continuación se explica con mayor detalle cada sesión, su objetivo y la(s) habilidad(es) que se quiere(n) fortalecer.

En la **segunda sesión** se trabaja principalmente la habilidad de representación. Esta sesión consiste en hacer bosquejos de figuras planas (bidimensionales) en perspectiva, en los diferentes planos que propone el papel isométrico, entonces el estudiante debe girar los objetos mentalmente y representarlos en distintas posiciones del espacio. Los ejercicios de esta sesión también le dan elementos al estudiante para que pueda hacer las representaciones en una hoja cuadriculada o blanca. Tenga en cuenta que el estudiante y el profesor se deben adaptar a los recursos disponibles, pero lo ideal es el papel isométrico porque las líneas guías facilitan que la representación del objeto quede en proyección isométrica.

El primer paso es identificar los vértices de la figura y representarlos en el papel isométrico, el segundo paso es trazar las aristas, como se muestra en Figura 3-1. Posteriormente se realizan otros ejercicios de este tipo, con circunferencias, rectángulos, rombos, flechas etc. Para el caso de figuras curvas, se relacionan con figuras poligonales, por ejemplo en el caso del círculo, la indicación es, primero dibujar el cuadrado y luego inscribir el círculo.

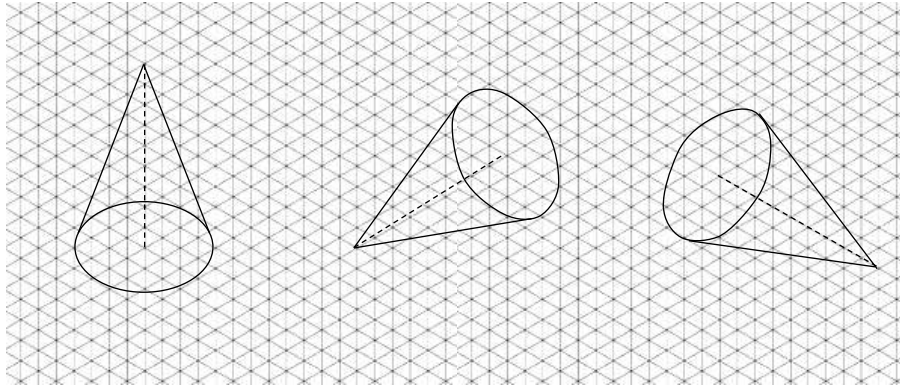
Figura 3-1: Puntos en papel isométrico y trazo de aristas.



Fuente: Elaboración propia.

En la **tercera sesión** la habilidad que se fortalece principalmente es la rotación mental aunque también se trabaja la representación. En esta sesión se orienta y se le dan técnicas de trazado al estudiante para que realice el bosquejo de algunos sólidos (tridimensionales) en las diferentes posiciones que propone el papel isométrico. Primero el estudiante debe realizar el ejercicio en su mente y posteriormente representar su respectiva rotación.

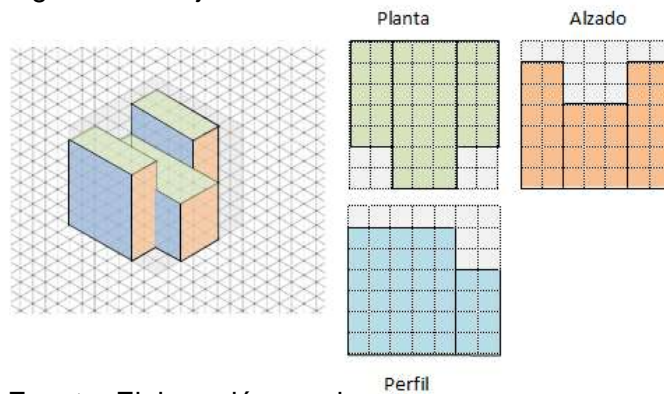
Figura 3-2: Rotación de figuras en papel isométrico



Fuente: Elaboración propia.

En la **cuarta sesión** la habilidad que se quiere fortalecer es la percepción visual ya que se pretende que el estudiante analice y trabaje en su mente las vistas del objeto y a través de estas pueda determinar y representar la figura original así mismo a partir de la figura pueda determinar sus vistas correspondientes. Como una estrategia para que el estudiante clasifique las caras del sólido, se le indica que asigne colores a las caras que corresponden a la misma proyección. Así mismo se dispone de un plano de siete por siete cuadros para delimitar y facilitar el desarrollo del sólido.

Figura 3-3: Objeto con vistas.

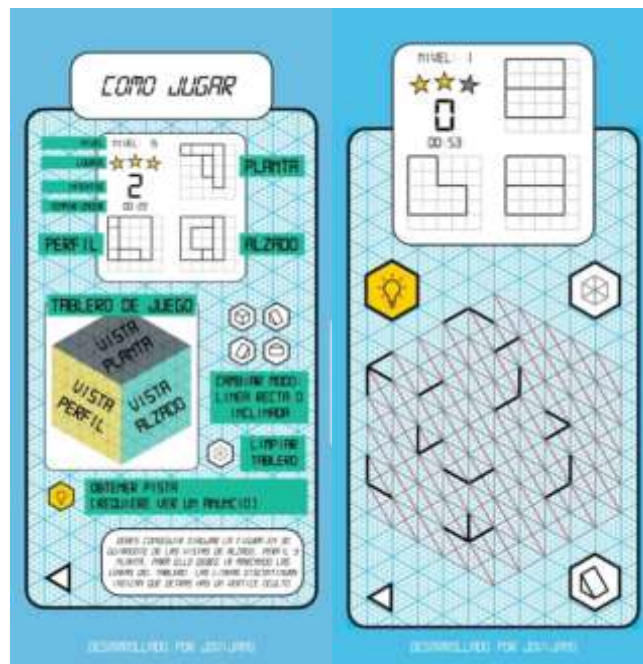


Fuente: Elaboración propia.

En la **quinta sesión** la habilidad que se quiere fortalecer es la percepción visual y representación, ya que al desarrollar las actividades de la APP Isometric se debe analizar la figura y visualizarla mentalmente para luego representar el espacio ocupado por la misma. A partir de las tres vistas presentadas en cada nivel se identifican las características del sólido y se dibuja cada línea correspondiente a la representación isométrica. Este juego permite poner en práctica lo aprendido en la sesión cuatro.

En el eventual caso en que el estudiante no pueda representar las líneas del sólido, la APP, presenta la opción de obtener una pista con publicidad, que corresponde a una línea del sólido, además tiene la posibilidad de agregar al plano isométrico otras líneas guías que podrían ayudar al estudiante en el desarrollo, también presenta el tiempo que se empleó en cada nivel y su respectiva puntuación, así mismo en la medida que se superen los niveles se incrementa el nivel de complejidad de los ejercicios. Otra ventaja de utilizar la APP es que se pueden realizar muchos más ejercicios de los que el profesor podría plantear en clase y que cada estudiante avanza a su propio ritmo.

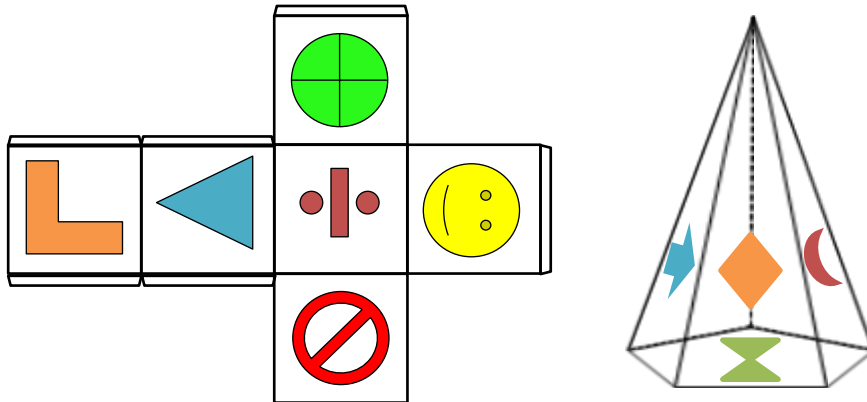
Figura 3-4: Pantallazos de la App Isometric.



Fuente: App Isometric.

En la **sexta sesión** la habilidad que se ejercita principalmente es la plasticidad ya que los problemas que se plantean cuestionan al estudiante sobre la correspondencia entre el sólido construido y su modelo bidimensional desplegado, pero también se agrega un nivel de complejidad adicional, ya que en el modelo desplegado se dibujan imágenes con marcas distintivas y se pregunta sobre la disposición de estas en el modelo tridimensional, y en sentido inverso, se presenta el modelo tridimensional con las imágenes y se pregunta su disposición en el modelo desplegado, para hacer este ejercicio el estudiante está ejercitando además su procesamiento visual, ya que debe realizar un ejercicio mental al rotar, comparar y relacionar las imágenes que se van en cada lugar.

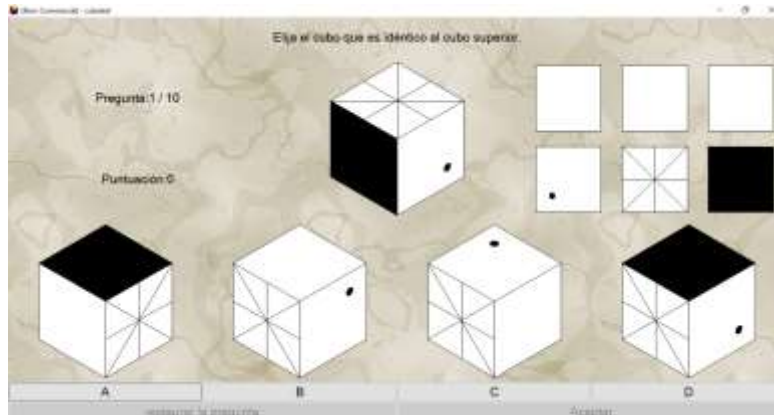
Figura 3-5: Cubo desplegado y pirámide plegada.



Fuente: Elaboración propia.

En la **séptima sesión** la habilidad que se quiere trabajar es rotación mental ya que a través del software cubetest se pretende que el estudiante ejercite la capacidad mental de identificar las características del objeto y realizar una rotación. Este ejercicio se presenta de forma lúdica, ya que se presenta una prueba de diez preguntas, en cada una se presenta un cubo en perspectiva con tres caras distintas, el estudiante debe identificar aquellas características particulares y compararlo con los que están en las respuestas y elegir el que corresponde al original.

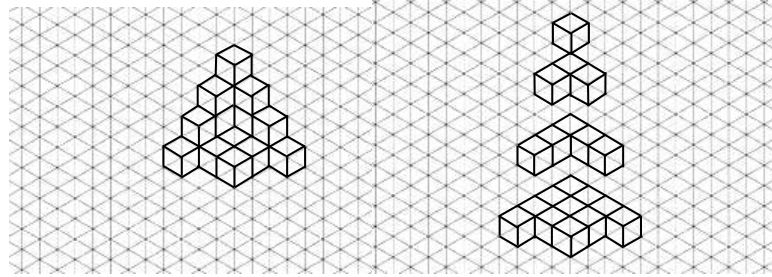
Figura 3-6: Software cubetest.



Fuente: Aplicación cubetest.

En la **octava sesión** la habilidad que se quiere fortalecer es el procesamiento visual ya que se quiere que el estudiante identifique como están compuestas las figuras espacialmente y qué lugar ocupan. En la actividad los estudiantes deben identificar la superficie total del sólido y el volumen correspondiente, para esto se les pide que pinten y posteriormente cuenten los cuadros de cada una de las tres vistas que tiene el sólido. También para el volumen se les sugiere que descompongan el sólido por niveles o plantas y puedan contar con facilidad el número de cubos.

Figura 3-7: Descomposición de la figura compuesta.

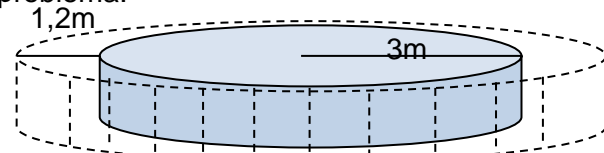


Fuente: Elaboración propia.

En la **novena sesión** se pretende que el estudiante use la representación como herramienta para comprender mejor algunos problemas cotidianos y los pueda resolver eficientemente. Esta actividad se realiza en grupos y cada uno debe elegir un ejercicio de aplicación y uno con figuras geométricas, de una lista. Antes de resolver el ejercicio los estudiantes deben realizar un bosquejo o imagen de la situación presentada. Posteriormente deben resolver el problema y comparar la respuesta obtenida con aquella presentada en cada ejercicio.

Alrededor de una fuente circular que tiene un radio 3 m, se construye una barandilla que dista 1,2 m del borde de la fuente. ¿Cuál es la longitud de la barandilla y cuánto se gastó para construirlo si el metro vale \$ 87.500? (26,376 m; \$ 2'307.900).

Figura 3-8: Representación gráfica del problema.



Fuente: Elaboración propia.

### 3.3 Contexto de desarrollo y aplicación la propuesta

La planeación y el desarrollo de la metodología se contextualizan en un periodo de emergencia sanitaria declarada por el ministerio de salud y protección social bajo la resolución 385 del 12 de marzo de 2020 en todo el territorio nacional de Colombia. Dicha emergencia se prorrogó en las resoluciones 844, 1462, 2230 de 2020 y 222, 738, 1315 y 1913 de 2021, y 304 de 2022 hasta el 30 de abril de 2022.

La preparación del material correspondiente se realizó entre enero y septiembre de 2021, en el que la institución educativa Sol Naciente se encontraba en aislamiento preventivo obligatorio o cuarentena, no obstante que existiese la posibilidad de un retorno, gradual, progresivo y seguro a las aulas, no se contaba con los protocolos de bioseguridad necesarios y que junto con los padres de familia se decidió continuar el proceso educativo en acceso remoto desde casa.

Situación que me llevó a realizar las actividades pensando en dicha modalidad, aunque también considerando la posibilidad de estar en alternancia o presencialidad, debido a las cambiantes directrices dadas por el ministerio de educación nacional de Colombia, además esta situación generó cambios en el cronograma, ya que los horarios habían cambiado en la institución como se puede evidenciar en la Tabla 3-4.

Durante la modalidad de acceso remoto el tiempo destinado para cada clase se redujo significativamente, además de reducirse en 15 minutos, la dinámica en clase cambió, el inicio de sesión en la plataforma, algunas veces había dificultades de conectividad, luego se tomaba asistencia, conexión de dispositivos (durante la alternancia), cierre de clase y también la poca participación de los estudiantes, situación que me llevó a destinar dos espacios de clase para cada sesión de la propuesta didáctica, es decir, 90 minutos por sesión, como se ve en la Tabla 3-5.

Tabla 3-4: Cambio de horario

Espacios de clase	Antes de la emergencia.		Emergencia Sanitaria
	Lunes a jueves	Viernes	Lunes a viernes
1	(7:00 a 8:00)	(7:00 a 7:50)	(8:00 a 8:45)
2	(8:00 a 9:00)	(7:50 a 8:40)	(8:50 a 9:35)
3	(9:00 a 10:00)	(8:40 a 9:30)	(9:40 a 10:25)
4	(10:30 a 11:30)	(10:00 a 10:50)	(11:00 a 11:45)
5	(11:30 a 12:30)	(10:50 a 11:40)	(11:50 a 12:35)
6	(13:15 a 14:00)	(12:10 a 13:00)	(13:10 a 13:55)
7	(14:00 a 14:15)	(13:00 a 14:50)	(14:00 a 14:45)

Fuente: Elaboración propia.

Desde finales de julio de 2021, las directivas de la institución insinuaron que hay la posibilidad de un retorno en modalidad de alternancia en algún momento del segundo semestre académico. Esto postergó la aplicación de la estrategia hasta el inicio de la alternancia, para que se aplicara en una sola modalidad. Además, la alternancia obligó a dividir el grupo de estudiantes en tres subgrupos, el A que asistía presencialmente lunes y miércoles, el B que asistía presencialmente martes y jueves, y el C en acceso remoto sincrónico, como se muestra en la Tabla 3-5. Esto llevó a distribuir una sesión el lunes y martes, y otra, miércoles y jueves, con el fin de mantener el mismo formato de los

estudiantes que están en alternancia. Los viernes se utilizaron para aplicar actividades complementarias o alguna sesión particular que se facilitara dictar en modalidad remota.

La aplicación de la estrategia inició el 24 de septiembre y terminó el 3 de noviembre de 2021, un poco más de un mes y se destinaron 20 días escolares. Durante la aplicación hubo dos días festivos (ambos lunes), además la institución desarrolló una actividad cultural y otra académica que interfirieron con los días de clase y también se tuvo la semana de receso entre el 11 y 18 de octubre. Posterior a la semana de receso la institución determinó que las clases en esta semana fuesen en acceso remoto sincrónico para evitar posibles contagios. Esas fueron las causas que extendieron el periodo de aplicación de la estrategia. A pesar de las interrupciones se mantuvo el equilibrio de las sesiones.

Los grupos se conformaron de la siguientes manera: grupo A (8 estudiantes) que asistieron al colegio lunes y miércoles, grupo B (9 estudiantes) martes y jueves y el grupo C (6 estudiantes) que permanecen en acceso remoto de forma sincrónica de lunes a viernes, esto debido a las restricciones de aforo permitidas por la secretaría de salud de Tocancipá y el gobierno Nacional.

Tabla 3-5: Cronograma de sesiones

Alternancia (A y B) y acceso remoto sincrónico (C)				Remoto sincrónico
Lunes (A)	Martes (B)	Miércoles (A)	Jueves (B)	Viernes
				24-09-2021 Prueba Diagnóstico
27-09-2021 sesión 2	28-09-2021 sesión 2	29-09-2021 sesión 3	30-09-2021 sesión 3	01-10-2021 Actividad objeto compuesto.
Figuras en 2D papel isométrico		Sólidos en 2D papel isométrico		
04-10-2021 Sesión 4	05-10-2021 Sesión 4	06-10-2021 Sesión 5	07-10-2021 Sesión 5	08-10-2021 Sesión 6 Cons.
Vistas del cubo		APP Isometric		Sólidos
<b>RECESO ESCOLAR 11-10-2021 AL 18-10-2021</b>				
18-10-2021 Lunes festivo	19-10-2021 English Day	20-10-2021 Corte de Notas	21-10-2021 Sesión 6	22-10-2021 Sesión 7
			Construcción de sólidos	CUBTEST
25-10-2021 Sesión 8	26-10-2021 Sesión 8	27-10-2021 Sesión 9	28-10-2021 Sesión 9	29-10-2021 Sesión 9
Área y volumen de cubos		Problemas de aplicación		
		03-11-2021 Prueba Final		

Fuente: Elaboración propia.

Para el regreso al colegio de forma alternada, la institución debió adaptar los salones de clase para un aforo adecuado, así mismo cada salón debía contar con las herramientas tecnológicas necesarias para garantizar el desarrollo de las clases de forma simultánea a los tres grupos. Por esta razón se instaló una conexión a internet en cada salón de forma cableada y se dotó con un computador que tiene una cámara web y micrófono integrado, también un televisor con un cable HDMI que permite proyectar audiovisualmente el contenido que se esté usando en el computador.

En mi clase específicamente utilice mi celular con un soporte especial, esto con el fin de no utilizar el tablero de pared sino un block de notas en blanco que cumplía las mismas funciones.

Para las clases se utilizaba la plataforma de conferencias TEAMS de Microsoft, que permite que los estudiantes que están en acceso remoto se conecten y accedan al contenido de la clase, así mismo permite interactuar con el docente a través del chat o levantando la mano. Esta herramienta me permitía conectar además del computador el celular con el mismo usuario, de tal forma que en la pantalla del computador podía ver e interactuar con los estudiantes en acceso remoto y a través del celular junto con el block de notas (tablero) daba las indicaciones necesarias para el desarrollo de la clase. De esta forma los estudiantes que se encontraban en el salón de clases seguían la explicación a través del televisor, garantizando el acceso a la información para todos los estudiantes.

Este sistema en el que se imparten las clases generó ciertas dificultades para los estudiantes que estaban en acceso remoto, ya que al estar siempre en casa y no interactuar con sus compañeros su participación disminuyó notablemente, la retroalimentación tomaba más tiempo de lo normal, ya sea por el audio o por la atención del docente que se concentraba en aquellos que tenía en clase. Anímicamente se notaba que los estudiantes en acceso remoto estaban agotados y cansados de no tener las mismas condiciones que los que estaban en forma presencial.

La prueba diagnóstica se aplicó en acceso remoto y sincrónico con todos los estudiantes, mientras que la prueba final se aplicó a casi todos los estudiantes que participaron en el estudio, únicamente dos lo realizaron de forma remota sincrónica con su cámara

encendida. La prueba final coincidió con la semana de exámenes finales de la institución, por lo cual se dispusieron dos salones, en el mismo horario, para el grupo de estudiantes.

El hecho de realizar la prueba final de forma presencial y sincrónica, además que los estudiantes tuviesen el tiempo necesario para prepararse, permitió realizar un mejor control en el tiempo, las herramientas utilizadas, garantizar que fuese individual, así que estas situaciones aseguran la confiabilidad de la prueba.

## 4.Desarrollo de la metodología

A continuación, se muestra el espacio de trabajo en el que se desarrollan las sesiones y los materiales utilizados para la aplicación.

Durante el desarrollo de las sesiones se trabajaron con tres grupos distintos, dos grupos que asistían en alternancia al colegio y un grupo que permaneció en casa recibiendo las indicaciones de forma sincrónica. Esta situación requería que se trabajase y se diesen las indicaciones al mismo tiempo.

El salón de clases cuenta con un computador con cámara web y un televisor.

Figura 4-1: Salón de clase.



Fuente: Elaboración propia.

Para permitir que todos los estudiantes recibiesen la información correspondiente y desarrollasen las actividades, de forma simultánea se proyectaba en el televisor lo que el celular capturaba, ya que la plataforma TEAMS permitía tener dos dispositivos conectados con el mismo usuario.

Figura 4-2: Ambiente de trabajo.



Fuente: Elaboración propia.

De esta forma se logra que los estudiantes realicen las actividades propuestas en las sesiones, además que las sesiones se desarrollaron en dos horas de clase, lo cual permite realizar las correcciones pertinentes a los estudiantes que asisten en alternancia.

Figura 4-3: Ambiente de trabajo de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-4: Ambiente de trabajo de los estudiantes 2.



Fuente. Elaboración propia.

## 4.1 Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica (ver Anexo A), se efectuó en modalidad acceso remoto de forma sincrónica, puesto que aún estábamos con restricciones de aforo, la prueba se envió en formato PDF y Word, para facilitar el acceso. La prueba consta de 13 puntos y lo que se pretende es analizar cómo están los estudiantes en las habilidades ya delimitadas anteriormente en el capítulo 2, sección 2.3.

Cada punto de la prueba evalúa una o dos habilidades espaciales como se muestra a continuación:

- 1, 2, 3 y 13 plasticidad y percepción visual.
- 4 y 5 rotación.
- 6, 7 y 8 percepción visual.
- 9 y 10 procesamiento visual.
- 11 y 12 representación.

Al iniciar la prueba los estudiantes se enfrentaron a ejercicios que no habían visto previamente en clase y la forma de las opciones de las respuestas eran desconocidos y les tomo tiempo para comprender el estilo de las respuestas.

Además los estudiantes al querer realizar los ejercicios de forma correcta dedicaron más tiempo a los primeros ejercicios y dejando un tiempo más corto para los últimos, entonces los resultados se pueden ver afectados por esta razón.

En los ejercicios 1, 2 y 3 predomina la habilidad de la plasticidad, pero también tiene en cuenta la percepción visual, puesto que para elegir la respuesta se debe identificar y comparar algunas características de la figura original.

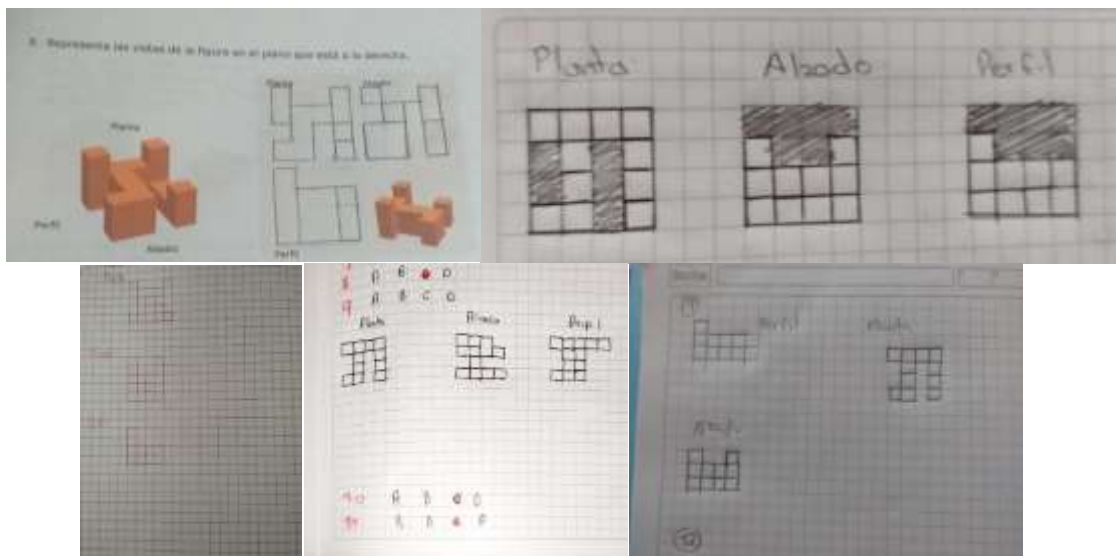
Por otra parte en el ejercicio 4 de rotación, presentaron dificultades al posicionarse y realizar el ejercicio mentalmente, de acuerdo a las preguntas realizadas también se encontraron algunos inconvenientes al momento de realizar el movimiento en sentido horario o antihorario sin tener el objeto físico.

Otro aspecto en el que presentaron dificultad fue el en ejercicio 6, en el que debían contar los cubos que tienen tres caras pintadas, al parecer identificar las caras pintadas sin tener el objeto físico y al ser un ejercicio mental pues les generó dificultad para realizarlo mentalmente.

En los ejercicios 7 y 8 no presentaron mayores dificultades puesto que lograron posicionarse bien y determinar las vistas correspondientes, los factores diferenciadores de cada respuesta eran claros.

En el ejercicio 9 fue similar a los anteriores, lograron realizar la representación correspondiente de las vistas del objeto y los ejercicios anteriores facilitaron la realización de este ejercicio, no obstante algunos sí presentaron dificultades puesto que no habían desarrollado ningún ejercicio de este tipo.

Figura 4-5: Imágenes correspondientes al ejercicio 9.



Fuente: Actividad práctica del ejercicio 9 de la prueba diagnóstica.

Respecto al tiempo los estudiantes tuvieron 40 minutos aproximadamente para desarrollar la prueba, pero manifestaron que la prueba es larga y debían realizar un análisis que les tomaba mucho tiempo.

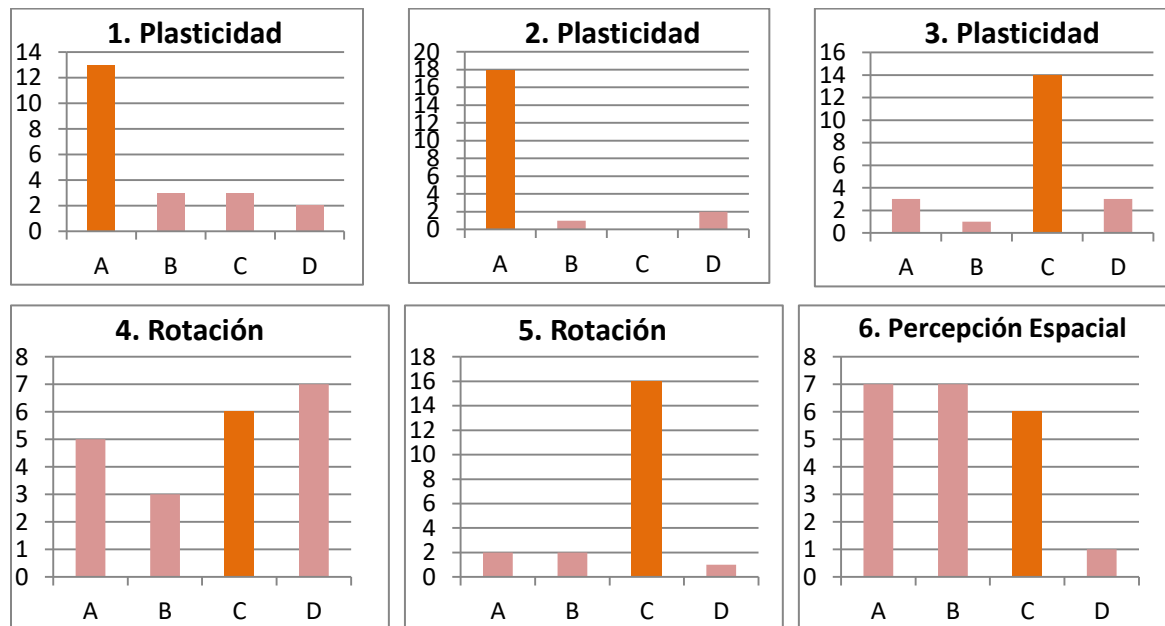
Se habló con el docente correspondiente de la siguiente hora y se les dio 20 minutos más para un tiempo total de 60 minutos, que para algunos fue suficiente, para otros no. Al no estar familiarizados con estos ejercicios les tomo más tiempo de lo previsto.

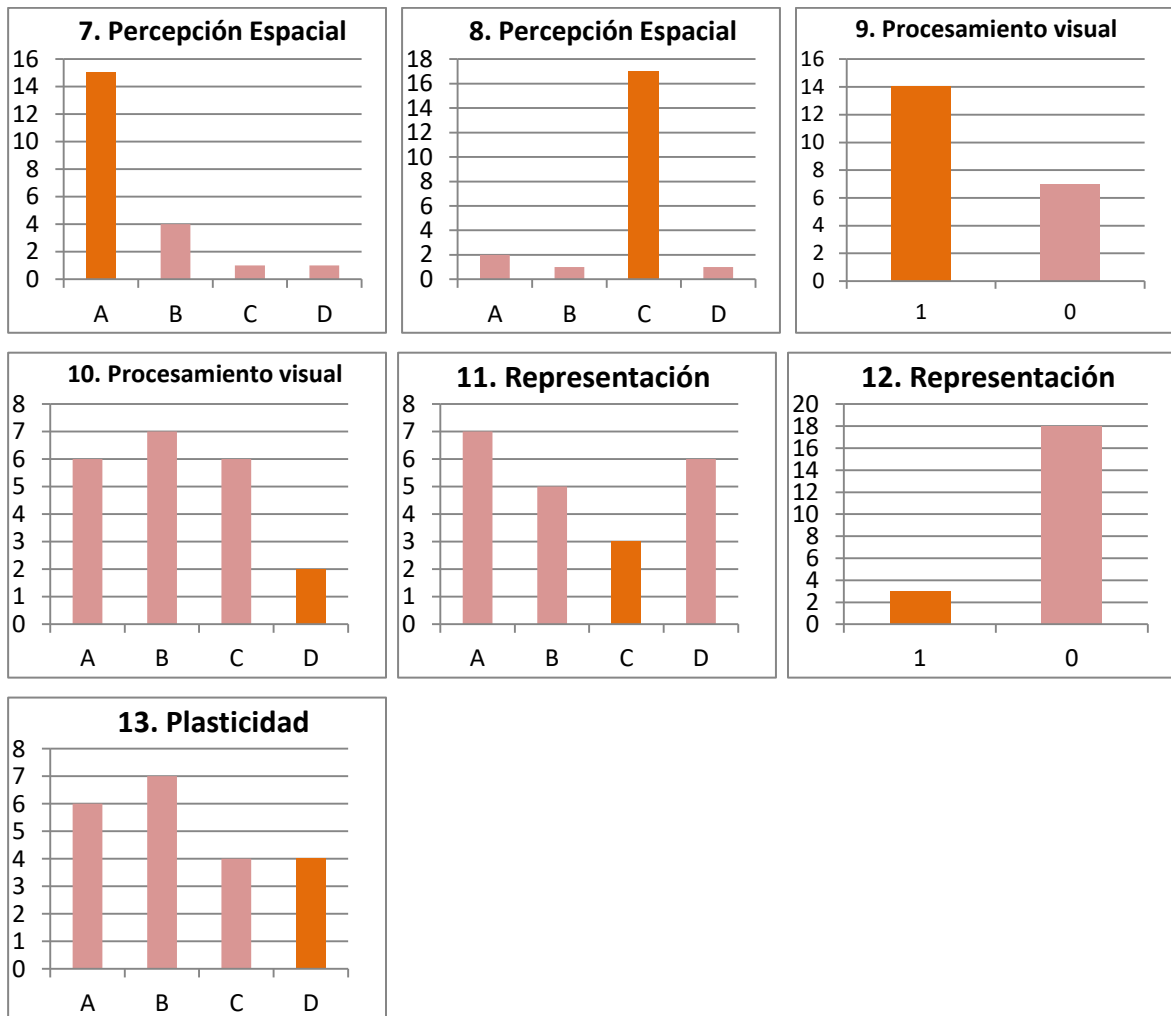
En los ejercicios 10 y 11 si presentaron algunas dificultades puesto que no tuvieron en cuenta las medidas o porque ya estaban agotados en el desarrollo de los primeros ejercicios. Así mismo en el ejercicio 12 en el que debían realizar una representación, la mayoría no la realizo y se evidenció incomprensión en el lenguaje.

Para el ejercicio 13, que parecería un ejercicio sencillo, los estudiantes presentaron dificultades, al parecer no tuvieron presente los factores diferenciadores y al trabajar la plasticidad cerebral indica que tienen dificultades al realizar movimientos mentalmente con la respectiva figura.

A continuación veremos las gráficas correspondientes de los resultados obtenidos por cada pregunta, el color naranja oscuro representa la respuesta correcta.

Figura 4-6: Gráficas resultados prueba diagnóstica.

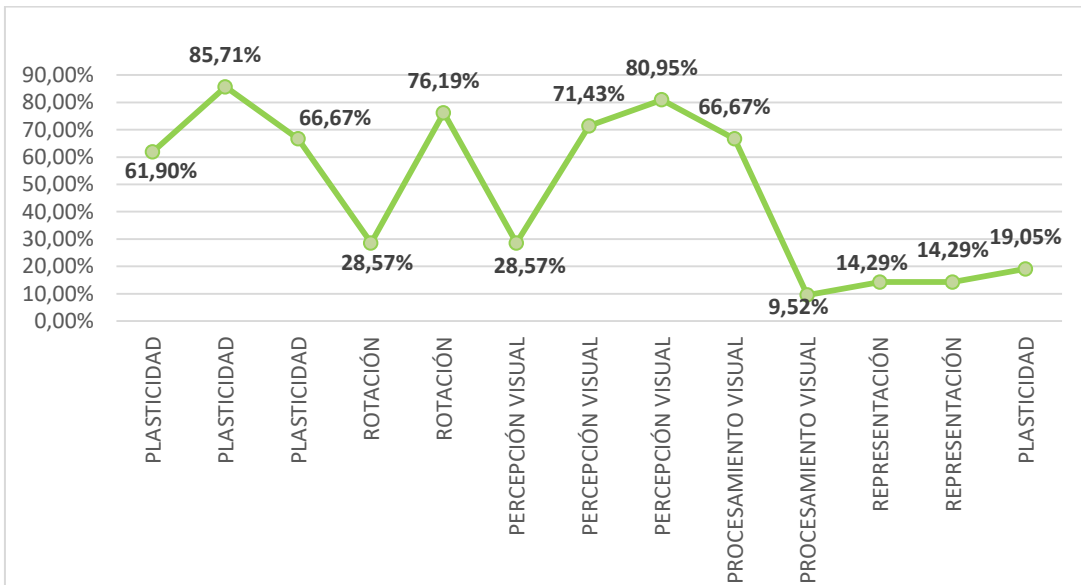




Fuente: Elaboración propia.

El resumen del porcentaje de respuestas correctas se puede evidenciar en la Gráfica 4-1, las mayores dificultades se evidencian en los ejercicios que evalúan la habilidad de representación. Para el caso de los ejercicios que evalúan la habilidad de rotación (ejercicios 4 y 5), se evidencia una diferencia significativa aunque se evalúa la misma habilidad. En el caso de los ejercicios 6, 7 y 8 que evalúan la habilidad de percepción visual, los estudiantes presentaron dificultad en el ejercicio 6, el sólido que aparece en este ejercicio oculta algunos cubos que lo componen, a diferencia de los sólidos de los ejercicios 7 y 8.

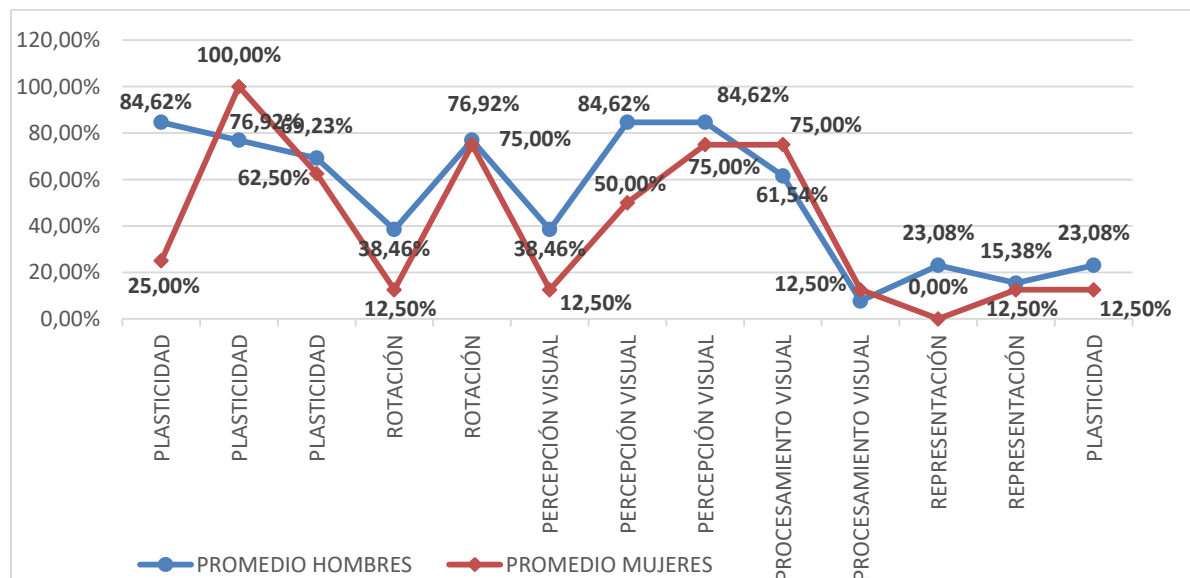
Gráfica 4-1: Porcentaje de estudiantes con respuestas correctas por habilidad en la prueba inicial.



Fuente: Elaboración propia.

También se presenta el resultado entre hombres y mujeres en la prueba diagnóstico, allí se puede evidenciar que los hombres presentan un rendimiento levemente mayor en las habilidades de percepción visual y representación, no obstante que los resultados sean muy similares.

Gráfica 4-2: Porcentaje de respuestas correctas hombres vs mujeres en la prueba inicial.



Fuente: Elaboración propia.

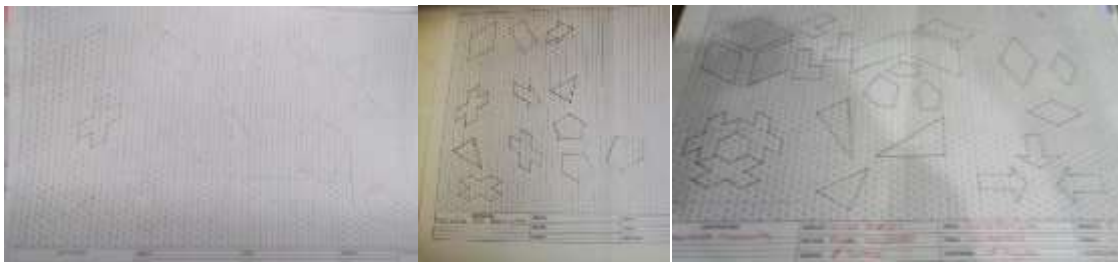
## 4.2 Segunda sesión

En la segunda sesión la habilidad que se quiere trabajar es la de representación, puesto que se realizan trazos y se ejercita los movimientos de figuras en diferentes posiciones.

Se dieron las indicaciones del papel isométrico y el significado de este, así mismo se explicó el concepto de perspectiva sobre las figuras que se trabajaron. La clase se desarrolló de forma presencial para seis estudiantes y en acceso remoto de forma sincrónica los demás. Los estudiantes que estaban en el aula de clase lograron realizar mejor las figuras correspondientes, aunque algunos presentaron inconvenientes al representar las figuras en tres dimensiones en el papel isométrico.

La mayoría de los estudiantes realizaron el ejercicio sin dificultad como se puede evidenciar en las siguientes imágenes:

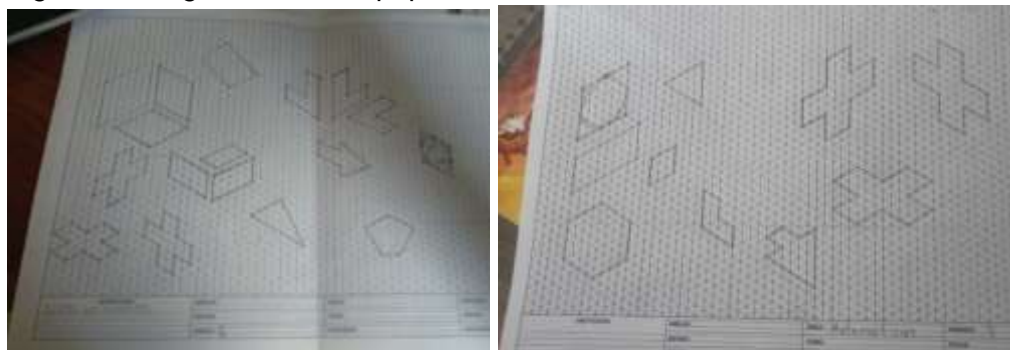
Figura 4-7: Figuras sobre el papel isométrico.



Fuente: Actividad práctica segunda sesión.

No obstante con algunas figuras se presentaron inconvenientes por ejemplo en la imagen que está a la derecha en la imagen anterior tiene las flechas y a la izquierda en la siguiente imagen el pentágono no está en ninguno de los planos correspondientes del papel isométrico, de la misma forma en la imagen de la derecha la flecha no conserva la dirección en para el plano correspondiente.

Figura 4-8: Figuras sobre el papel isométrico 2.

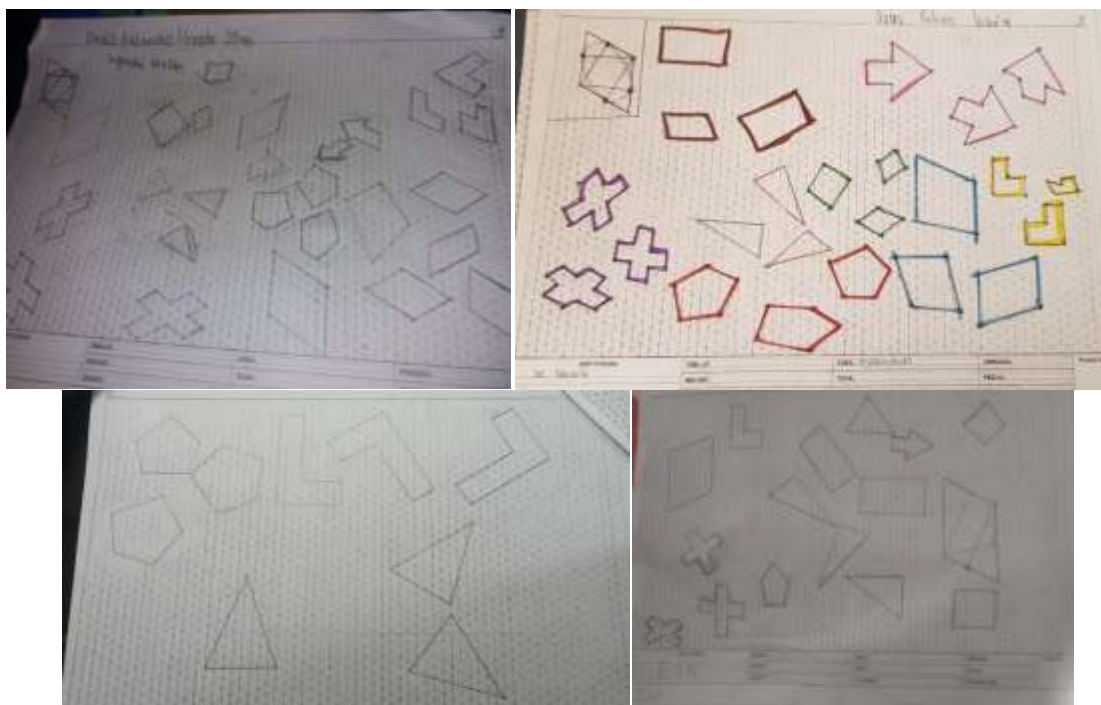


Fuente: Actividad práctica segunda sesión.

Algunos estudiantes al no utilizar los instrumentos adecuados no realizaron correctamente los ejercicios y otros simplemente realizaron las figuras en tres posiciones diferentes pero sin tener en cuenta los planos del papel isométrico.

Para la elaboración de la circunferencia se debe realizar inicialmente un cuadrado y luego marcar algunos puntos y líneas estratégicas que permitirán realizarla en perspectiva. Se presentaron algunos inconvenientes en el proceso pero no obstante la mayoría logro realizarla.

Figura 4-9: Figuras sobre el papel isométrico 3.



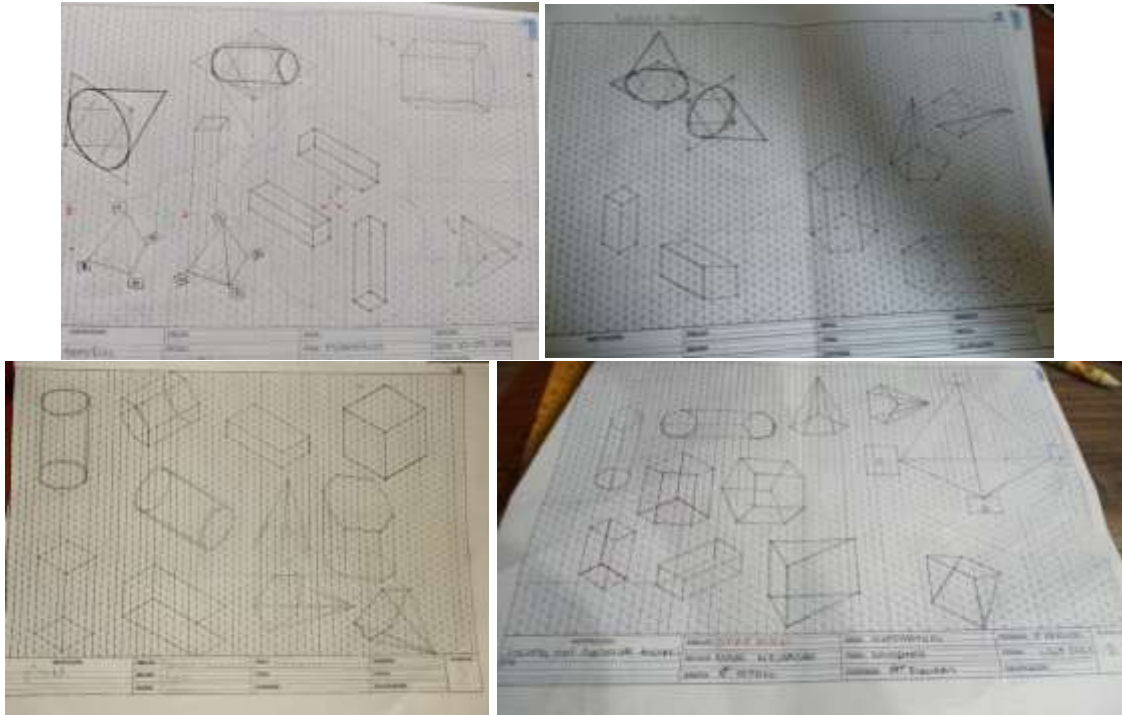
Fuente: Actividad práctica segunda sesión.

### 4.3 Tercera sesión

En la tercera sesión se pretende que los estudiantes continúen trabajando en el papel isométrico y fortaleciendo las habilidades de representación y rotación mental. Para esto se propone que realicen algunos sólidos geométricos y posteriormente los roten en alguno de los planos. Además se les propone realizar dos rotaciones de un tetraedro, una con el eje horizontal y otra con el eje vertical.

A continuación veremos las imágenes de los trabajos de los estudiantes que realizaron correctamente el ejercicio y que tuvieron en cuenta aquellos detalles para realizar la rotación correspondiente.

Figura 4-10: Sólidos sobre el papel isométrico.



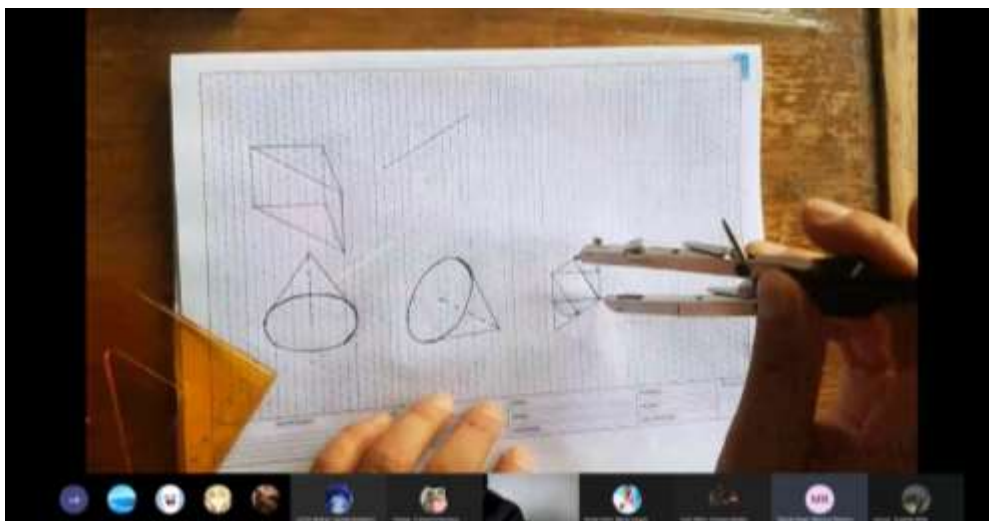
Fuente: Actividad práctica tercera sesión.

Algunos estudiantes tuvieron dificultades al momento de realizar la actividad, no definieron los puntos claves de las figuras correspondientes, permitiendo que la rotación les quedara fuera de los planos propuestos por el papel isométrico. En el momento de dibujar el cono algunos estudiantes tuvieron dificultades, porque primero trazaban las aristas, la estrategia que les sugerí, fue realizar primero la base circular, luego ubicar el vértice y por último dibujar las aristas. Estas dudas se resolvieron durante el espacio de clase tanto a los estudiantes presenciales y los de acceso remoto.

Las figuras presentes en el documento de guía se encontraban en forma horizontal y vertical, permitiendo que los estudiantes trataran de realizarlas de esa misma forma en el papel isométrico, sin tener en cuenta los planos respectivos.

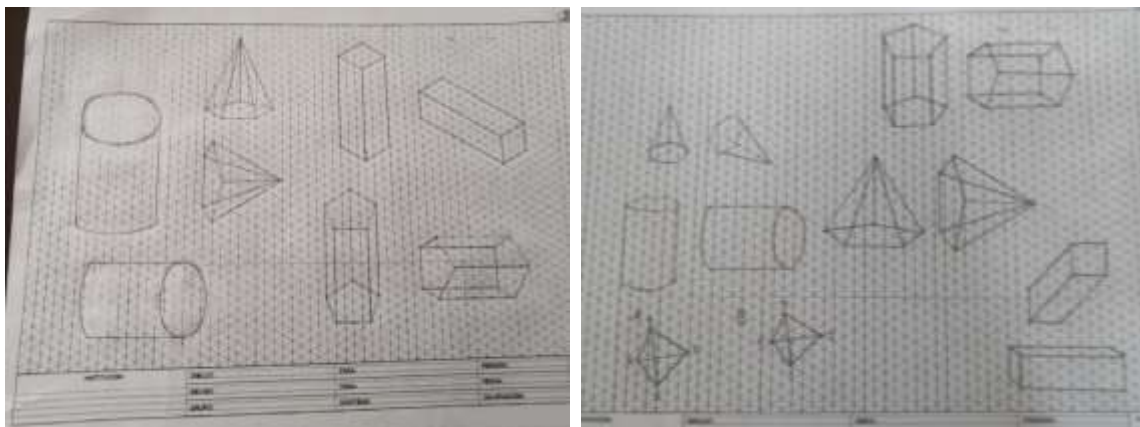
Con los estudiantes que estaban en el salón de clases se logró realizar la corrección y el debido seguimiento de las actividades, con los estudiantes en acceso remoto se dieron las indicaciones, pero fue más complejo responder las dudas presentadas.

Figura 4-11: Explicación sobre la circunferencia



Fuente: Actividad práctica tercera sesión.

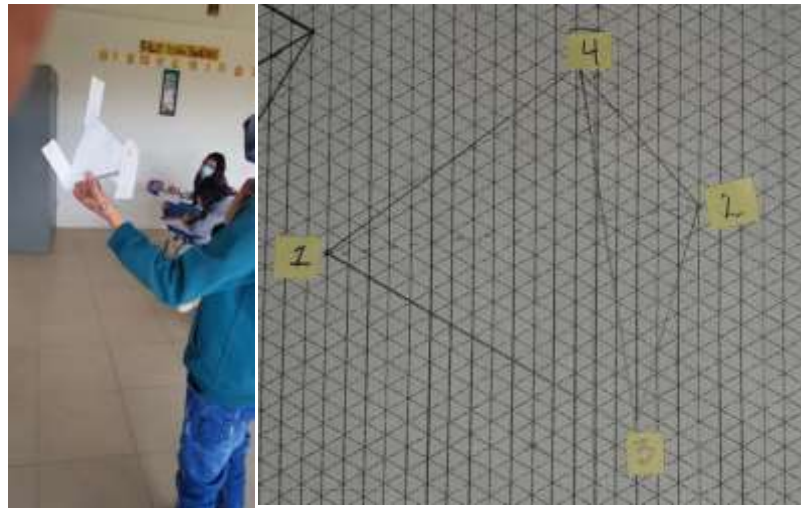
Figura 4-12: Representación de sólidos sobre el papel isométrico.



Fuente: Actividad práctica tercera sesión.

Se elaboró el sólido del tetraedro correspondiente al ejercicio propuesto para que los estudiantes tuviesen la posibilidad de realizar la rotación con el objeto físico, marcado los vértices y así obtener el resultado final después de las transformaciones propuestas. Así mismo para los que estaban en acceso remoto se nombraron los vértices correspondientes y se explicó el paso a paso con el objeto en 3D proyectado.

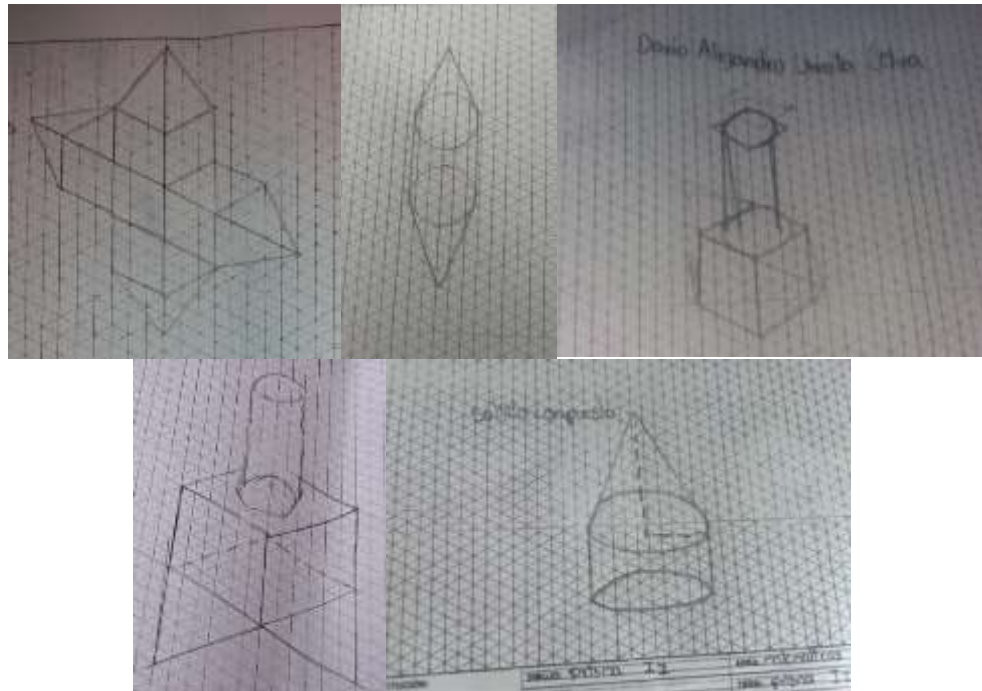
Figura 4-13: Actividad complementaria.



Fuente: Actividad complementaria tercera sesión.

En esta sesión se les dejó un trabajo extra y voluntario para que lo desarrollaran en casa y consistía en realizar figuras compuestas, para esto se les hizo ver la crucifixión de Dali, que también es llamada el hiper cubo, que se encuentra en el siguiente link <https://www.thedaliuniverse.com/es/corpus-hypercubus-salvador-dali-pintura> esta actividad les llamo la atención por su relación con el arte, a continuación veremos algunas imágenes de las figuras que realizaron algunos estudiantes.

Figura 4-14: Actividad complementaria sólidos compuestos.



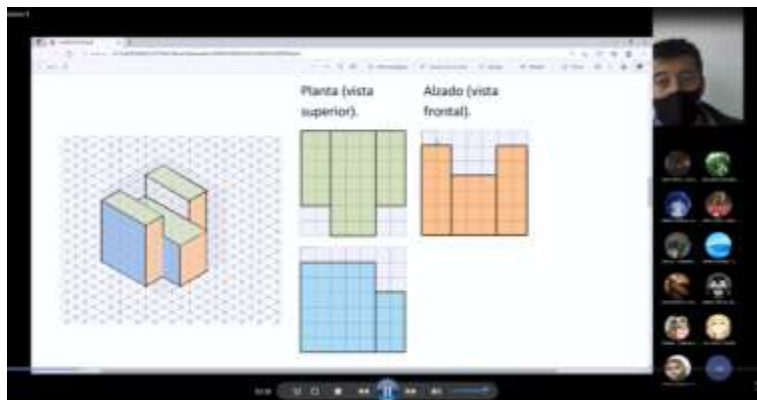
Fuente: Actividad complementaria tercera sesión.

## 4.4 Cuarta sesión

En la cuarta sesión las habilidades a trabajar son percepción visual y representación puesto que los estudiantes deben identificar las vistas correspondientes del sólido propuesto y representarlas en los planos, así mismo a partir de las vistas representar el sólido contenido en ellas. Se delimitó el cubo a las dimensiones de siete por siete para lograr realizar en los respectivos planos las vistas.

La siguiente imagen representa un instante de la grabación correspondiente a la explicación dada en la cuarta sesión.

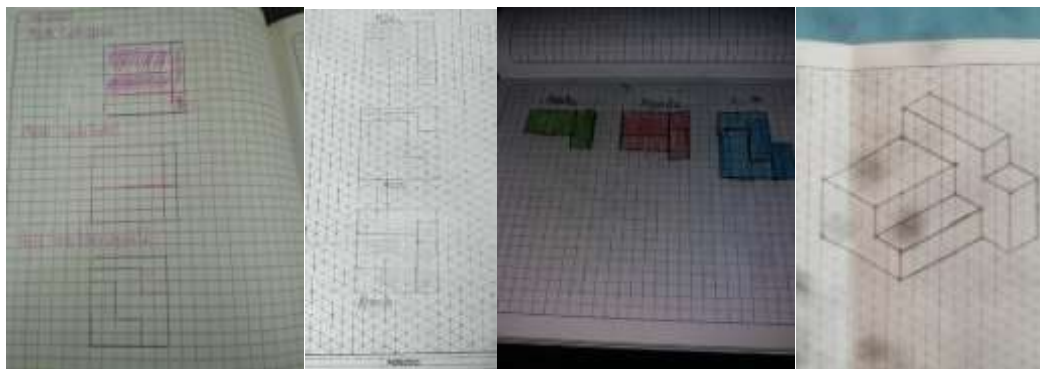
Figura 4-15: Explicación cuarta sesión.



Fuente: Elaboración propia

Para identificar las vistas los estudiantes no presentaron mayores inconvenientes, en la medida que se familiarizaban con el lenguaje lograban identificar y relacionar la imagen correspondiente. No obstante algunos estudiantes si tenían dificultades para identificar las imágenes correspondientes y representarlas en los planos.

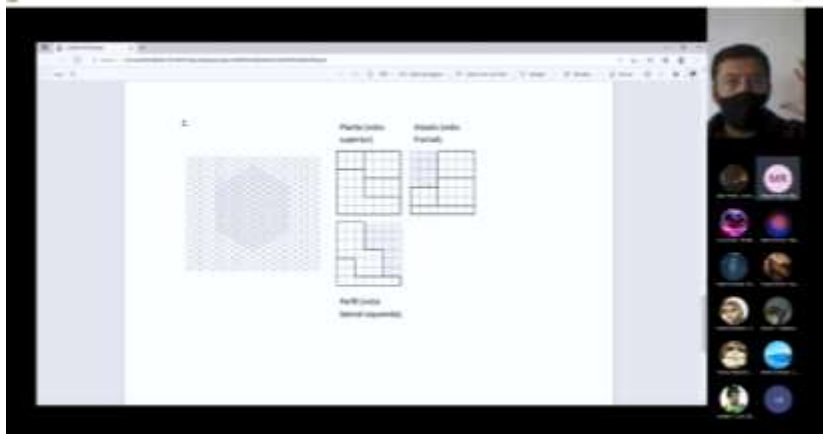
Figura 4-16: Realizar las vistas a partir del sólido.



Fuente: Actividad cuarta sesión.

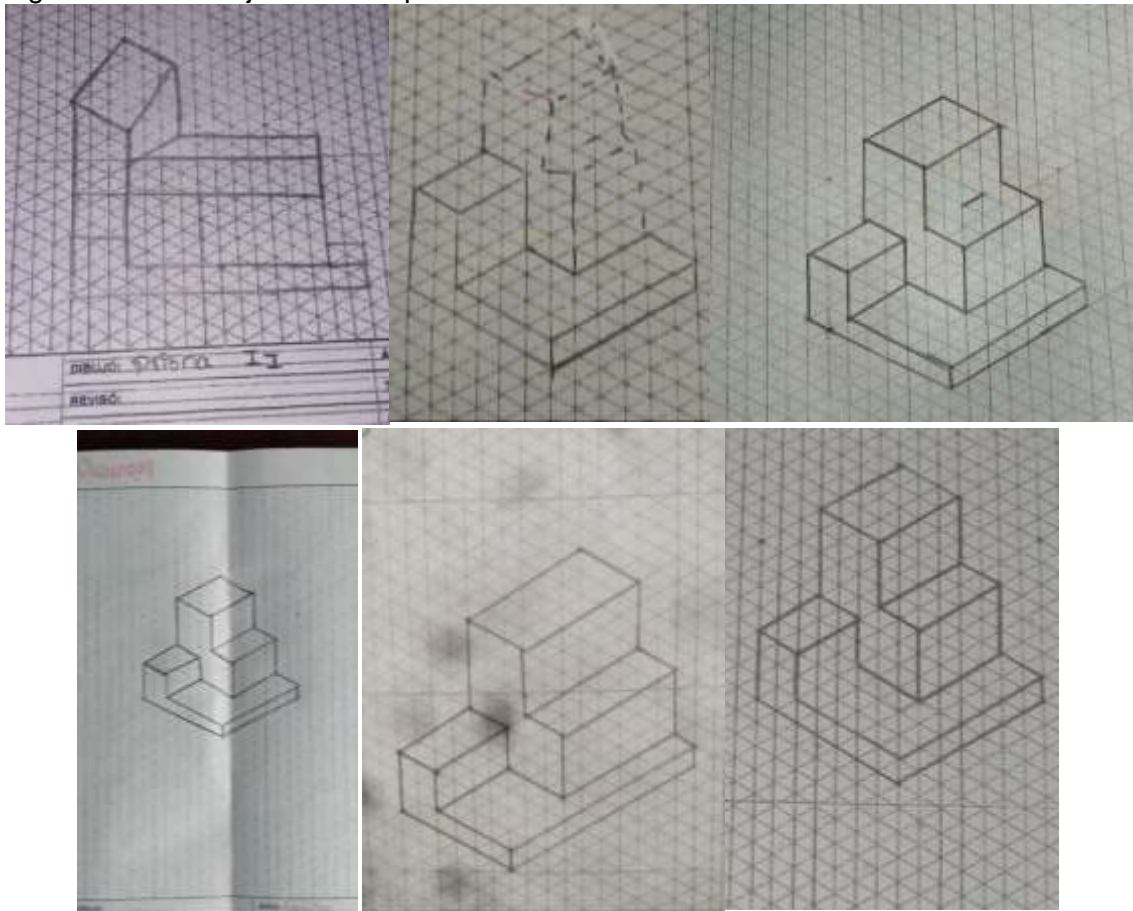
Al momento de realizar el sólido presentaron algunos inconvenientes en la profundidad y con las dimensiones correspondientes para realizar el sólido, al ver esta dificultad se les sugirió algunas líneas guía y al final lograron realizarlo de forma correcta.

Figura 4-17: Explicación para realizar el sólido a partir de sus vistas.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-18: Trabajo realizado por los estudiantes en la cuarta sesión.

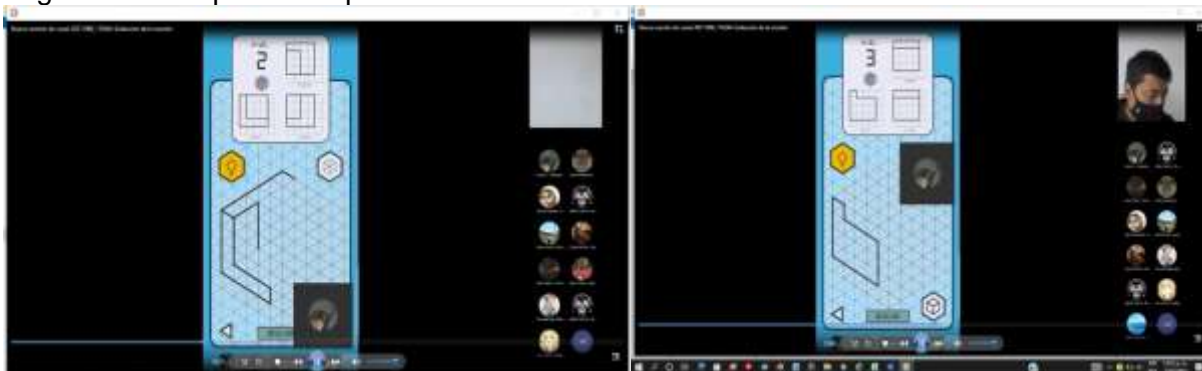


Fuente: Actividad cuarta sesión.

## 4.5 Quinta sesión

En la quinta sesión las habilidades trabajadas fueron, percepción visual y representación. Se utilizó la APP Isometric para ejercitar lo que se presentó en la sesión anterior de forma dinámica y práctica. Utilizar el dispositivo celular les generó motivación. La mayoría de los estudiantes lograron avanzar rápidamente por los mundos de la aplicación.

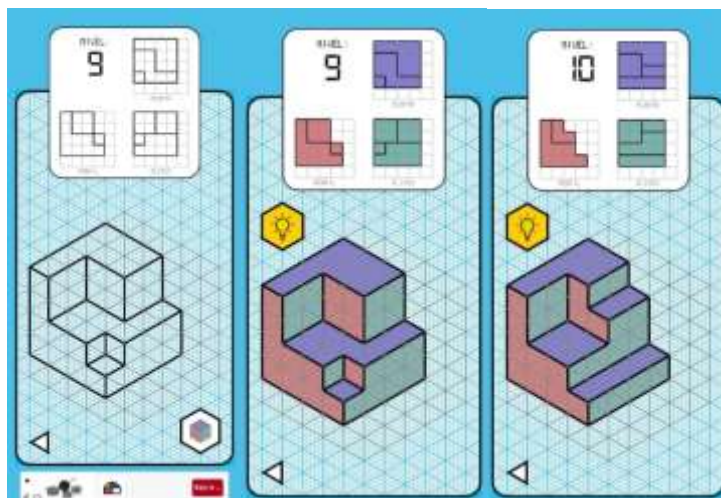
Figura 4-19: Explicación quinta sesión.



Fuente: Elaboración propia.

A continuación algunas imágenes de la actividad realizada por los estudiantes.

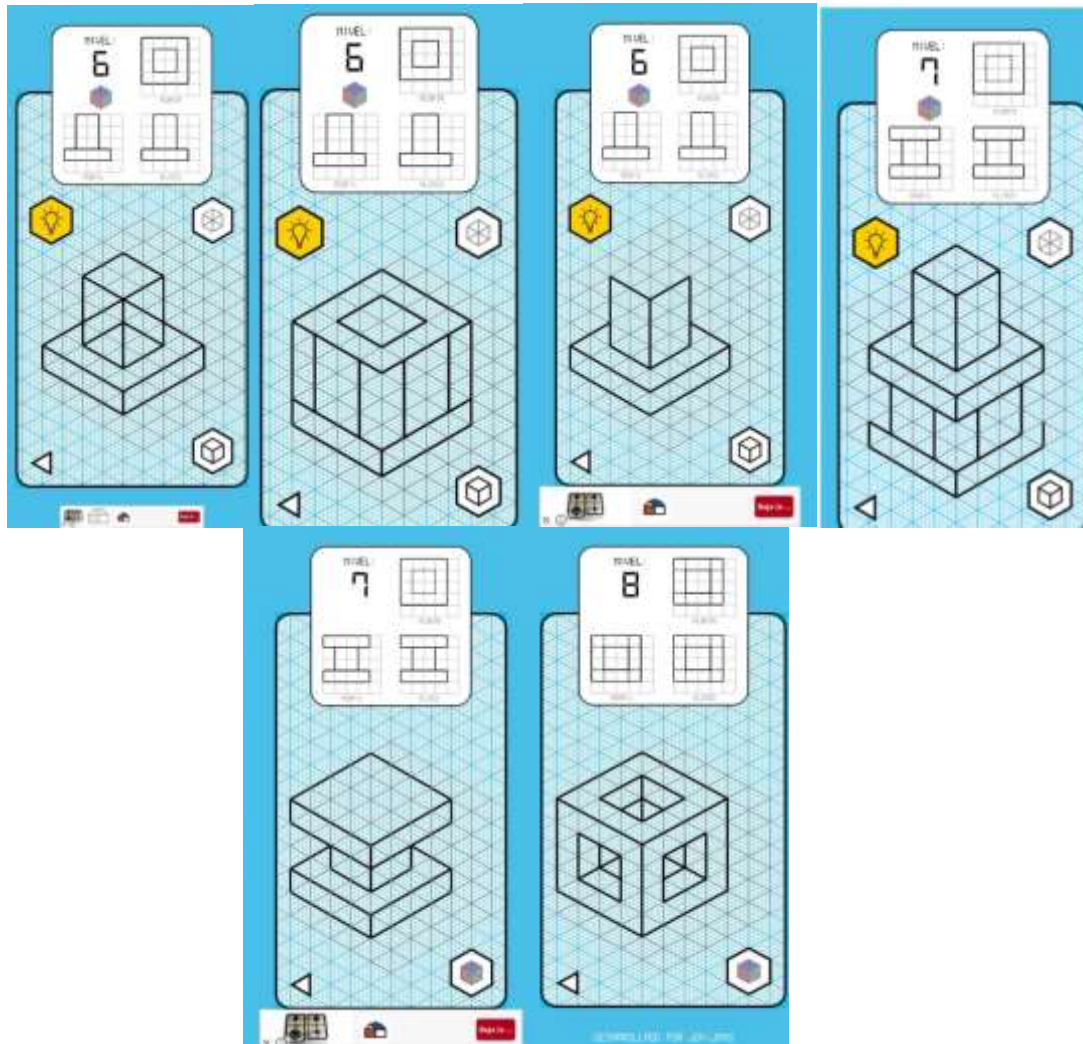
Figura 4-20: Actividad realizada por los estudiantes en la quinta sesión.



Fuente: App Isometric.

En algunos casos los estudiantes presentaron inconvenientes porque la figura tenía varias secciones y planos, lo que comportaba realizar una interpretación un poco más elaborada a la hora de resolver el ejercicio.

Figura 4-21: Otras imágenes del trabajo realizado por los estudiantes en la quinta sesión.



Fuente: App Isometric.

En general los estudiantes lograron realizar la actividad sin mayores inconvenientes, no obstante algunos mundos si eran más complejos que otros e hizo que los estudiantes asumieran el reto de completar cada mundo que se les proponía. La actividad permitió que los estudiantes trabajaran en grupo y que pudieran intercambiar sus opiniones respecto a lo que llevaban, se corrigieran y encontraran el método para resolver los respectivos ejercicios.

Figura 4-22: Trabajo realizado por los estudiantes con la APP Isometric.

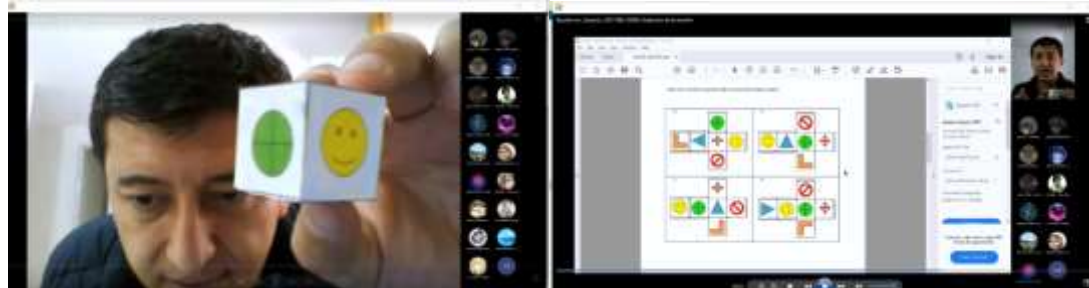


Fuente: Actividad quinta sesión.

## 4.6 Sexta sesión

Para la sesión seis la habilidad a trabajar es la plasticidad, puesto que se pretende que los estudiantes construyan dos sólidos y peguen en cada cara la figura correspondiente, para que luego al rotarlo y manipularlo físicamente puedan encontrar la respuesta del problema planteado. Para esto se les envió a los estudiantes una plantilla con el plano de las figuras y ellos debían recortarlo y realizar la respectiva construcción. Esta sesión se desarrolló en forma sincrónica, lo cual permitió que los estudiantes realizaran el ejercicio totalmente en casa.

Figura 4-23: Explicación sexta sesión.



Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan algunas imágenes de las figuras trabajadas por los estudiantes.

Figura 4-24: Actividad realizada por los estudiantes en la sexta sesión.



Fuente: Actividad sexta sesión.

La actividad se llevó a cabo sin mayores inconvenientes, cada estudiante construyó su sólido y resolvió los problemas planteados. Los estudiantes estaban motivados, es muy interesante ver la dedicación de cada uno al desarrollar este tipo de ejercicios. No obstante algunos tuvieron dificultades a la hora de pegar el sólido, ya que el tamaño no era lo suficientemente grande.

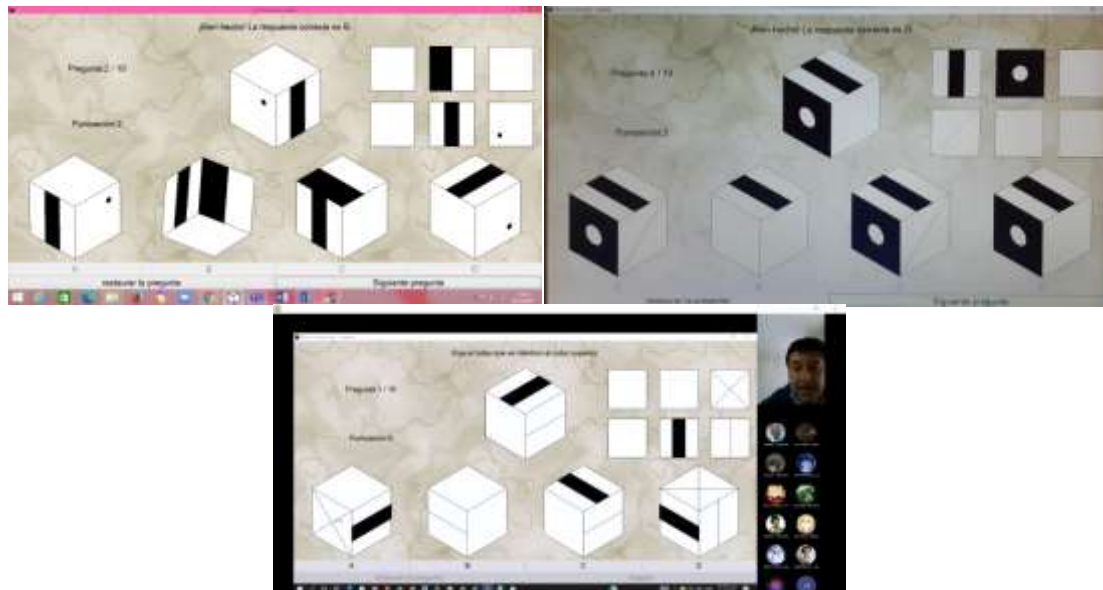
## 4.7 Séptima sesión

En la séptima sesión la habilidad que se quiere trabajar es la rotación mental, ya que a través del software cubtest los estudiantes pueden ejercitar el tema visto en la sesión seis de una forma más lúdica así mismo lo que se quiere es que los estudiantes se ejerciten en identificar características del cubo plegado a través de las caras presentadas y encontrar la respuesta correcta.

La prueba consta de 10 ejercicios, en los cuáles se encuentra un cubo principal y sus seis caras correspondientes, la idea es que sin mover el cubo los estudiantes elijan la respuesta correcta de cuatro opciones que tienen.

A continuación veremos algunas imágenes de los niveles desarrollados por los estudiantes.

Figura 4-25: Actividad realizada por los estudiantes en la séptima sesión.



Fuente: Actividad séptima sesión.

A pesar de que los estudiantes tienen la opción de girar los cubos la idea es que puedan identificar el cubo original sin realizar la rotación respectiva. También existen tres niveles de dificultad, así como tres estilos diferentes, si prefieren con imágenes u objetos en blanco y negro.

Figura 4-26: Otras imágenes de la actividad realizada por los estudiantes en la séptima sesión.



Fuente: Actividad séptima sesión.

Esta sesión se desarrolló de forma sincrónica en acceso remoto porque se aplicó el día viernes. Entonces, cada estudiante hizo el ejercicio en su propio computador. A pesar de las condiciones la mayoría de los estudiantes realizaron la actividad de forma correcta.

## 4.8 Octava sesión

Las habilidades que se quieren trabajar con esta sesión son procesamiento visual y plasticidad, en esta sesión se quiere que los estudiantes encuentren la superficie y el volumen de un sólido compuesto por cubos.

Se dan las indicaciones y los procesos correspondientes para encontrar la respectiva área y el volumen.

Por ejemplo para encontrar la superficie se pintan las caras correspondientes que ya se conocen de acuerdo a las vistas.

Figura 4-27: Explicación e indicaciones octava sesión.



Fuente: Elaboración propia.

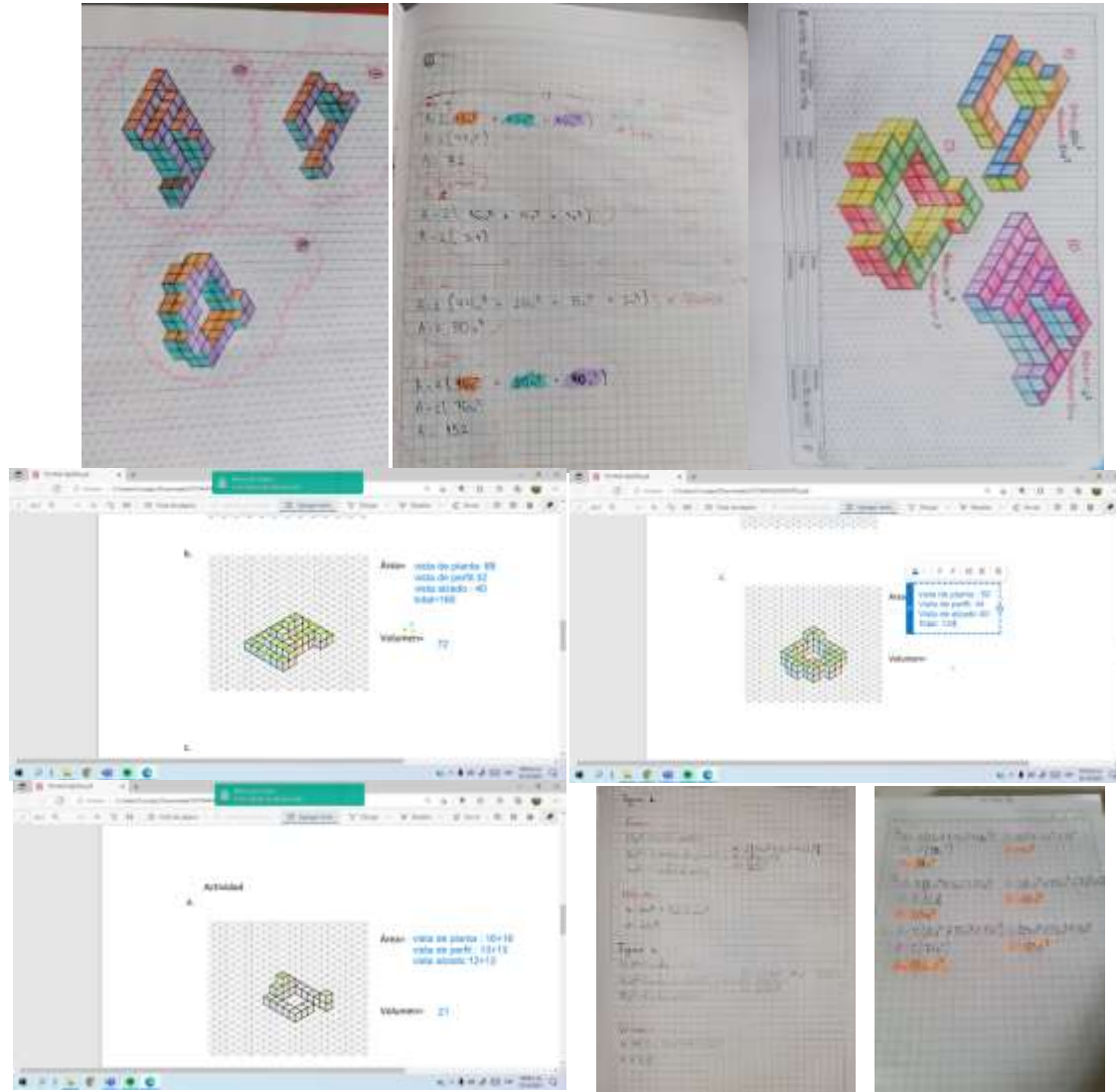
Algunos estudiantes tomaron más tiempo de lo previsto para realizar la actividad, pero se explico nuevamente y lograron comprender bien el proceso, varios estudiantes pintaron y utilizaron el método propuesto para encontrar la superficie y el volumen, otros lo resolvieron rapidamente. También al realizar el ejercicio prefirieron realizarlo en el papel isométrico para ver la figura y así determinar sus características a través de este método.

Figura 4-28: Estudiantes trabajando en la actividad de la séptima sesión.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-29: Actividades de la séptima sesión.

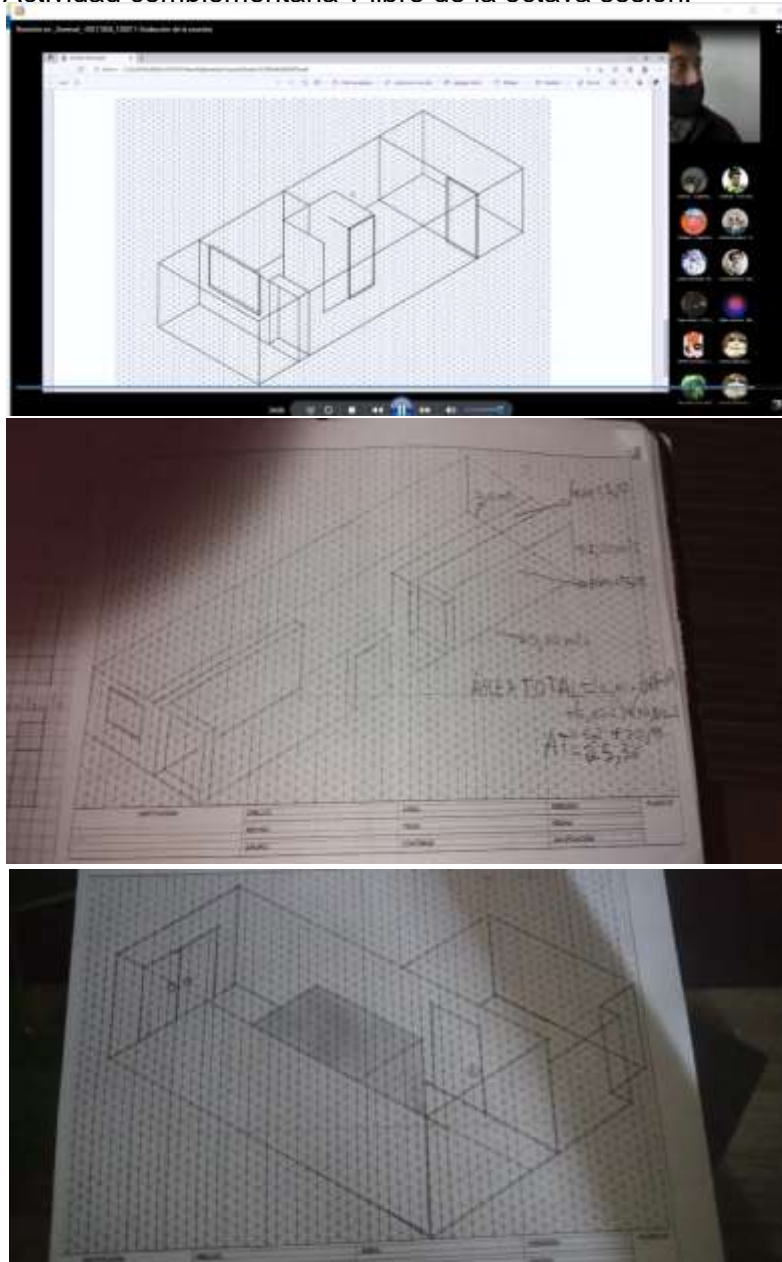


Fuente: Elaboración propia.

Se propusieron tres ejercicios con diferentes grados de complejidad, no obstante los estudiantes lograron en su mayoría realizar la actividad correctamente.

Como actividad complementaria y voluntaria se les propuso realizar el bosquejo de una de las plantas de su casa en papel isométrico y en la medida de lo posible utilizando una escala real correspondiente. Algunos estudiantes la realizaron correctamente y además encontraron el área y el volumen correspondientes.

Figura 4-30: Actividad complementaria v libre de la octava sesión.



Fuente: Elaboración propia.

## 4.9 Novena sesión

La habilidad que se quiere trabajar es representación, puesto que se presentan una serie de problemas que se presentan de forma escrita y no traen ningún bosquejo o figura que represente la situación. Cada grupo debe entender si necesita una representación de la situación y resolverlo.

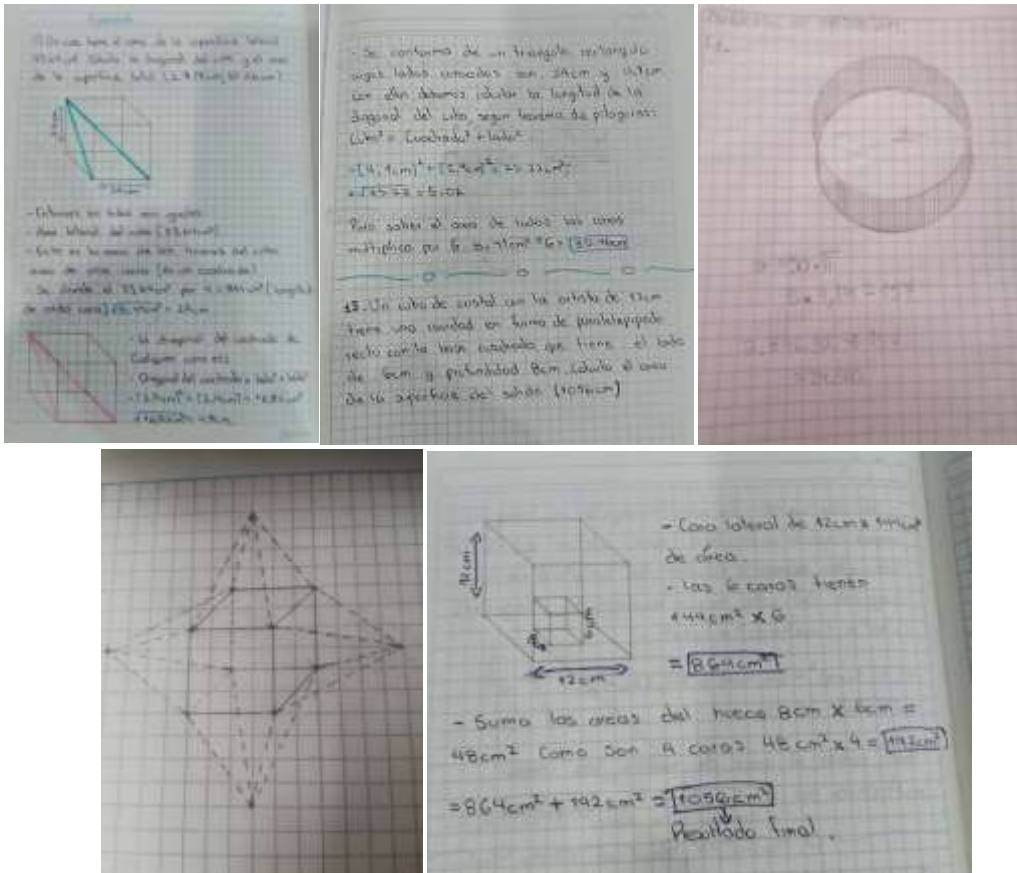
Para la sesión nueve el trabajo se desarrolló en dos sesiones, la primera sesión fue en acceso remoto, a través de la plataforma Microsoft Teams se conformaron salas en las que los estudiantes pudiesen interactuar de acuerdo a los grupos. Esto implicó establecer bien los canales de comunicación y cada vez que los grupos lo solicitaban, entrar en la sala respectiva y resolver las dudas correspondientes.

Otra situación importante que se dio es que tanto las preguntas, como las respuestas que se daban eran en un lenguaje netamente matemático, esto permite a los estudiantes familiarizarse con los términos correspondientes a las temáticas trabajadas.

Los estudiantes debían seleccionar dos de los ejercicios propuestos, uno con mayor complejidad que el otro.

Estas son algunas de las representaciones y los cálculos realizados de los ejercicios que desarrollaron los estudiantes en esta sesión.

Figura 4-31: Actividades novena sesión.



Fuente: Elaboración propia.

Esta actividad fue importante para comprender si las representaciones de las situaciones ayudan a resolver los problemas.

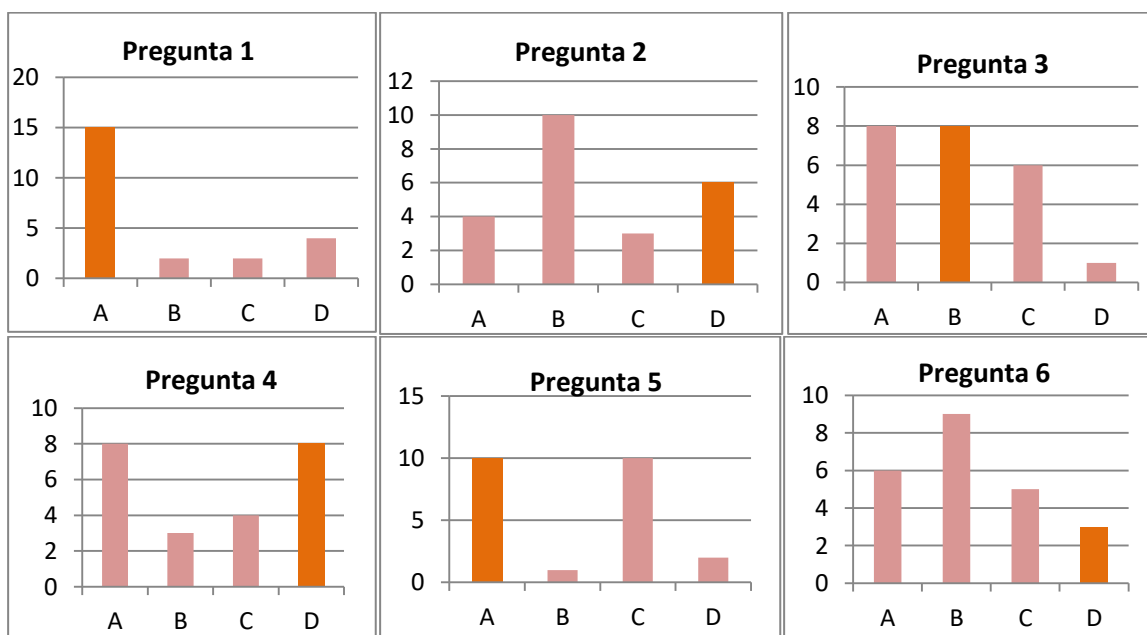
### 4.10 Prueba Final

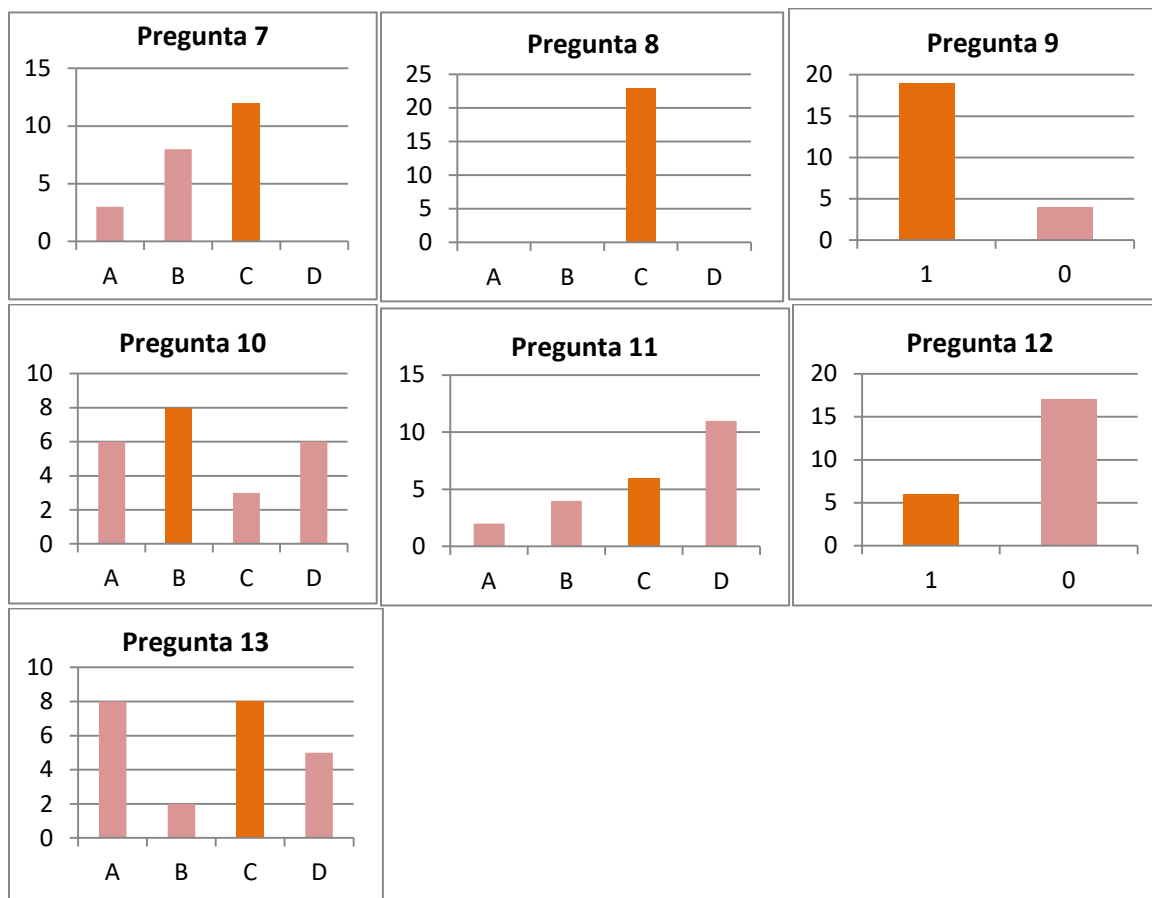
En la última sesión se desarrolla la prueba final (ver anexo B) en la que se analizan nuevamente las habilidades trabajadas en las correspondientes sesiones. La prueba consta de 13 ejercicios con tematicas similares a la prueba inicial. 21 estudiantes desarrollaron la prueba de forma presencial en la institución divididos en dos grupos y dos estudiantes la realizaron de forma sincrónica en acceso remoto con su respectiva cámara activada.

La prueba se descompone en varios puntos con sus respectivas habilidades espaciales:

- 1, 2, 3 y 13 plasticidad y percepción visual.
- 4 y 5 rotación.
- 6, 7 y 8 percepción visual.
- 9 y 10 procesamiento visual.
- 11 y 12 representación.

Figura 4-32: Graficas resultados prueba final.





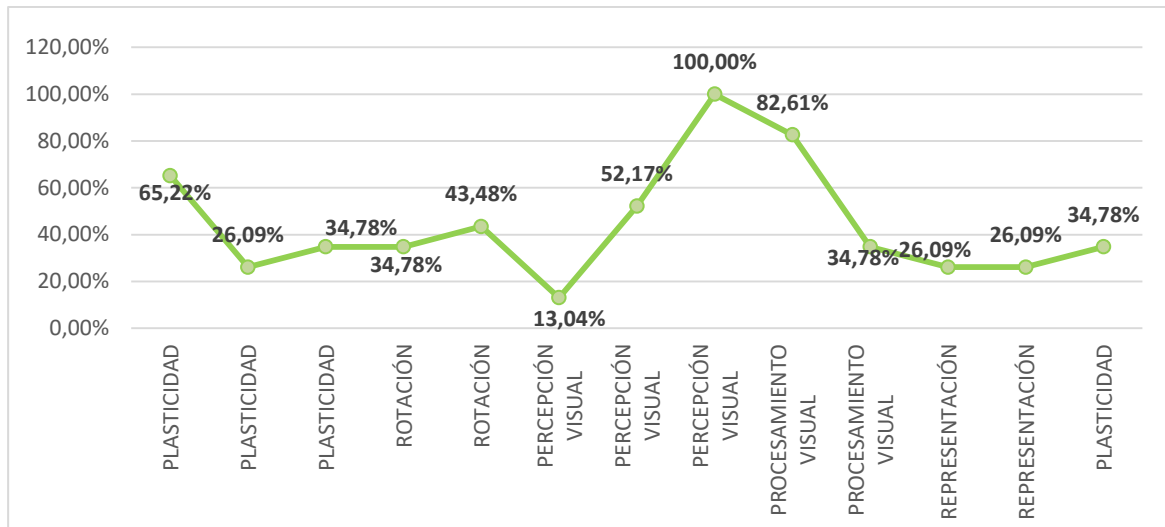
Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a los resultados de la prueba inicial, se realizaron algunas variaciones en la prueba final, sobre todo en las respuestas, a continuación especificaremos aquellos cambios:

- Se cambió el orden de las respuestas para que la respuesta correcta no estuviese dentro de las primeras opciones.
- Se modificaron algunos elementos distractores sobre las respuestas de algunos ejercicios.
- Algunos ejercicios tenían un grado de dificultad mayor, aunque si conservaban el mismo tipo, respecto a la prueba inicial.
- Se modificó la dirección de las vistas de las respuestas.

La Gráfica 4-3 muestra los resultados de la prueba final en el que se evidencian aún algunas diferencias en algunas habilidades.

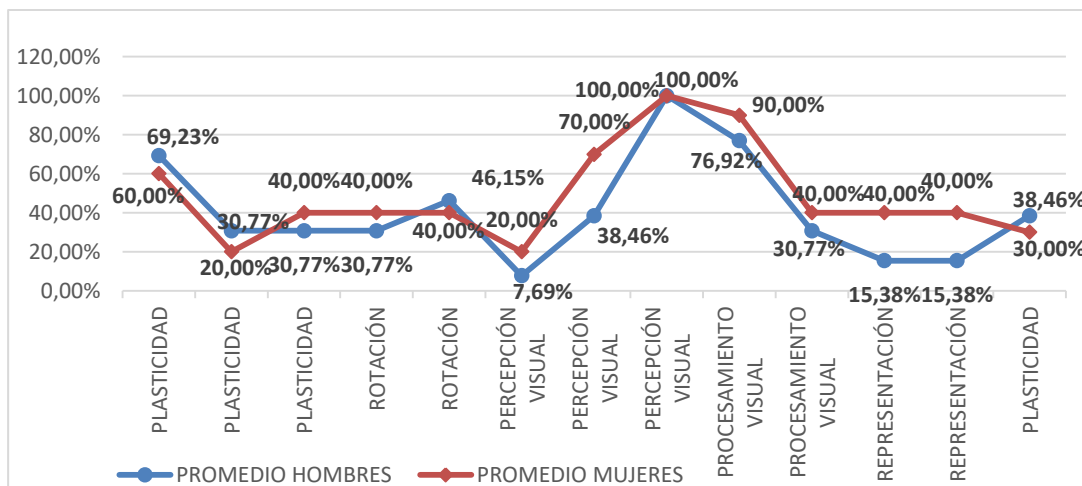
Gráfica 4-3: Porcentaje de estudiantes con respuestas correctas por habilidad en la prueba final.



Fuente: Elaboración propia

Realizando el analisis comparativo entre hombres y mujeres en la prueba final, se puede evidenciar que las mujeres tuvieron un mayor rendimiento respecto a la prueba inicial en la que los hombres superaron a las mujeres, se podría interpretar que ellas desarrollaron con mayor agilidad las habilidades espaciales que los hombres después de la intervención.

Gráfica 4-4: Promedio de respuestas correctas hombres vs mujeres en la prueba final.

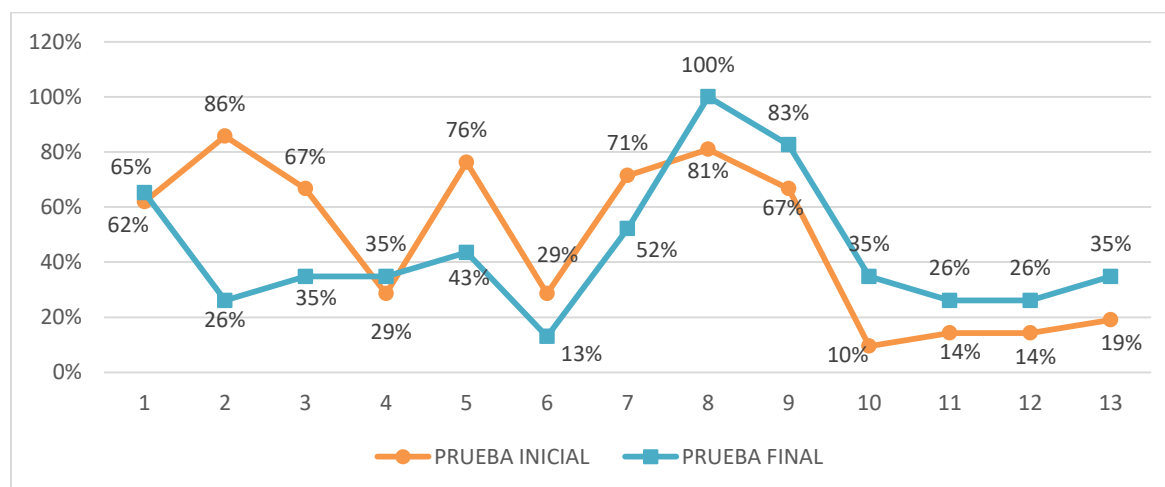


Fuente: Elaboración propia

Respecto al análisis comparativo entre la prueba inicial y final se obtiene el siguiente gráfico, en el que se pueden evidenciar algunos aspectos.

- En las preguntas 8, 9, 10, 11, 12, 13 se evidencia una mejoría proporcional en cuanto a las pruebas inicial y final.
- En las preguntas 1, 4 también hubo una mejoría y respecto a las modificaciones hechas en las respuestas estos ejercicios no presentaron una modificación significativa respecto a la prueba inicial.
- En los ejercicios 2, 3, 5, 6 y 7, los resultados fueron mejor en la primera prueba, es probable que se deba a los cambios hechos en cuanto a la estructura de las respuestas.

Gráfica 4-5: Prueba inicial vs prueba final.



## 4.11 Análisis de resultados

Se tiene en cuenta para el análisis de las pruebas inicial y final que se le aplicó a los estudiantes del grado 8° el método preexperimental, por medio de la prueba t student, que determina la diferencia significativa entre la media de dos grupos (en este caso pretest y posttest); por lo tanto se asume con esta estadística deductiva que las variables dependientes tienen una distribución normal, tomando una muestra de  $n = 23$  estudiantes, un intervalo de confianza del 95% y nivel de significancia del  $\alpha = 0.05$ .

Definición de variables.

Hipótesis nula ( $H_0$ ): No existen diferencias significativas en las medias de los grupos, con un nivel de confianza del 95%. (No se fortaleció el pensamiento espacial de los estudiantes del grado 8°).

$$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$$

Hipótesis Alternativa ( $H_a$ ): Existen diferencias significativas en las medias de los grupos, con un nivel de confianza del 95%. (Se fortaleció el pensamiento espacial de los estudiantes del grado 8°).

$$H_a: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$$

Interpretación:

- *si valor|t| > valor critico : Se rechaza  $H_0$*
- *si valor|t| < valor critico : No se rechaza  $H_0$ .*

Además,

- *si valor|P| <  $\alpha$  : Se rechaza  $H_0$*
- *si valor|P| >  $\alpha$  : No se rechaza  $H_0$ .*

Para esto se toma el número de respuestas correctas de cada estudiante del pretest y luego el postest para comparar las medias, utilizando la herramienta de análisis de datos en Excel que arrojó la Tabla 4-1 presentada a continuación:

Tabla 4-1: Prueba t para medias de dos muestras emparejadas.

	<i>Pretest</i>	<i>Postest</i>
Media	5,695652174	5,73913043
Varianza	7,584980237	4,83794466
Observaciones	23	23
Coefficiente de correlación de Pearson	0,331463351	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	22	
<b>Estadístico t</b>	<b>-0,07191386</b>	
P(T<=t) una cola	0,47166012	
Valor crítico de t (una cola)	1,717144374	
P(T<=t) dos colas	0,943320239	
<b>Valor crítico de t (dos colas)</b>	<b>2,073873068</b>	

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta el cuadro anterior, se puede decir que el valor  $|0,071| < 2,073$ ; por tanto, no se rechaza la  $H_0$  con un nivel de significancia del 5% y se concluye que no se fortaleció el pensamiento espacial de los estudiantes del grado 8°.

Sin embargo, se vuelve hacer el análisis de los datos excluyendo los puntos 2, 3 y 5 debido a cambios en la estructura de la respuesta para tener un mejor ajuste a la información obtenida por los estudiantes. A continuación, se adjunta el cuadro:

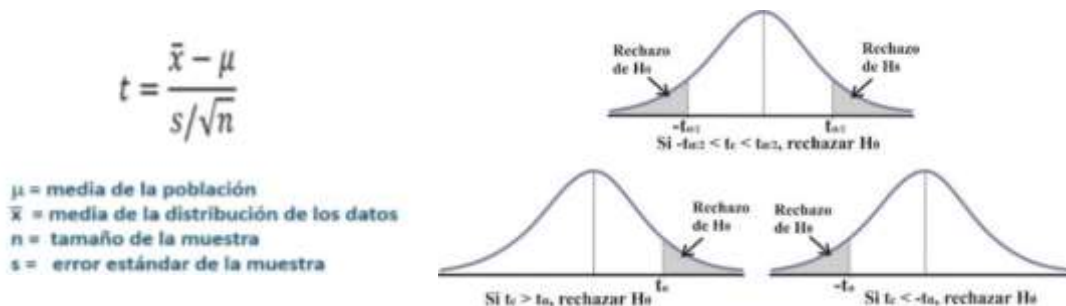
Tabla 4-2: Prueba t para medias de dos muestras emparejadas (Sin puntos 2, 3 y 5).

	Pretest	Postest
Media	3,608695652	4,69565217
Varianza	3,43083004	2,58498024
Observaciones	23	23
Coefficiente de correlación de Pearson	0,187141616	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	22	
<b>Estadístico t</b>	<b>-2,35464537</b>	
P(T<=t) una cola	0,013938633	
Valor crítico de t (una cola)	1,717144374	
P(T<=t) dos colas	0,027877266	
<b>Valor crítico de t (dos colas)</b>	<b>2,073873068</b>	

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados obtenidos en la tabla, se puede decir que el valor  $|2,354| > 2,073$ ; por tanto, se rechaza la  $H_0$  con un nivel de significancia del 5% y se concluye que se fortaleció el pensamiento espacial de los estudiantes del grado 8°. El valor de P es de 0,02, el cual está por debajo del nivel de significancia del 5%.

Figura 4-33: Elementos prueba T-student



Fuente: Tomado de <http://estadisticando.blogspot.com/2016/04/prueba-t-student-para-dos-muestras.html>.

# **5. Conclusiones y recomendaciones**

## **5.1 Conclusiones**

Este proyecto nace de la experiencia, de la observación y sobre todo de las exigencias de los estudiantes en cuanto a la enseñanza de la geometría, además me permitió indagar en la literatura y enriquecer mis conocimientos en cuanto al pensamiento espacial, así mismo al adentrarse en este tema se evidencia que hay una variedad de definiciones, habilidades y características, lo cual me permitió generar una definición propia de cada una de estas y estructurar las habilidades de acuerdo a mi percepción y experiencia, para posteriormente analizar en qué situación se encuentran los estudiantes.

De acuerdo con el análisis presentado en la sección 11 del capítulo 4, y las consideraciones allí mencionadas, se puede concluir que hubo un fortalecimiento de las habilidades espaciales, posterior a la aplicación de la estrategia didáctica.

Al realizar la prueba diagnóstica, que se desarrolló de forma remota y sincrónica, se evidenció que los estudiantes en su mayoría tienen desarrolladas algunas habilidades espaciales. Sin embargo, los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba inicial no reflejaron completamente su desempeño observado en las primeras sesiones. Esto llevó a hacer una revisión de la prueba inicial y replantear la forma de algunas opciones de respuesta (distractores) a algunas preguntas de selección múltiple. En conclusión, se debe seguir trabajando en la evaluación, las pruebas diagnóstico y final elaboradas aquí son un punto de partida, sin embargo se deben complementar con otros ejercicios (y opciones de respuesta), aplicar a otros grupos de estudiantes con el fin de encontrar la forma adecuada de indagar estas habilidades.

Realizar las pruebas y las sesiones fue todo un desafío personal, puesto que el material que existe se enfoca más hacia la psicología y otras ciencias, y para medir aspectos en el coeficiente intelectual, entonces es un campo no muy trabajado en el ámbito educativo matemático, así mismo no existe un material estandarizado para el trabajo de estas habilidades, situaciones que me permitieron realizar cambios en mi quehacer como docente y reinventar la forma en cómo se guía el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados de la prueba final evidencian que los estudiantes en las preguntas 2, 3, 5, 6, y 7 no tuvieron mejoría, por el contrario, su rendimiento disminuyó respecto a la prueba inicial. La primera diferencia es que la prueba final se realizó en un ambiente completamente controlado por el profesor, al ser de forma presencial se respetó el límite de tiempo, el trabajo individual, no se permitieron los apoyos virtuales, textos ni apuntes. También se revisaron con mayor detalle las respuestas distractoras de las preguntas 2, 3, 5 y 7, evitando que las figuras involucradas tuvieran detalles que indujeran o hicieran más evidente la respuesta correcta o descartar las opciones incorrectas. En próximas aplicaciones de la estrategia didáctica, se debe procurar realizar la prueba diagnóstico y final en las mismas condiciones.

Al ser un contenido que no se trabaja comúnmente, siento la necesidad de seguir adelante en el proceso de investigación, indagar más sobre las pruebas estandarizadas que existen, para mejorar la estrategia didáctica y de ser posible generar más herramientas que colaboren al fortalecimiento de las habilidades espaciales en más generaciones de estudiantes.

## **5.2 Recomendaciones**

Recomiendo a quien tome este proyecto que realice cinco ejercicios por habilidad espacial, ya que facilita el análisis de los datos, si se tiene un mayor número de preguntas. Así mismo se puede verificar nuevamente el planteamiento y grado de dificultad de las respuestas, puesto que se puede presentar, como se evidencio en este proyecto un efecto contrario al esperado.

Otra recomendación es que a la hora de realizar la intervención se tenga un grupo de control y de ser posible realizar la intervención en dos grupos, ya que se evidenció que es importante a la hora de realizar una investigación contar con más elementos para comprobar las hipótesis presentadas y este es uno de ellos.

También recomiendo que se asigne más tiempo para el desarrollo de las pruebas, ya que en el desarrollo de estas se evidenció que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de ejercicios, al menos en cuanto a la prueba inicial, además hay algunos estudiantes que por tener diferentes habilidades dedican más tiempo al desarrollo de algunos ejercicios.

En cuanto a la estructura de las pruebas también sugiero que las preguntas y las respuestas se redacten o se enfoquen de forma alternada, es decir que no todos tengan la misma estructura de selección múltiple con única respuesta.

En cuanto al papel isométrico, también recomiendo que después de utilizar este, se realicen bosquejos similares a los realizados en el papel isométrico en hojas blancas o cuadriculadas, es un nivel de dificultad mayor ya que no cuenta con las líneas guía y pone en práctica las habilidades adquiridas.

Respecto a la sesión nueve sugiero dividir está en dos o tres sesiones, una donde se pueda trabajar el diseño previo del problema, es decir realizar un bosquejo e identificar los elementos que se dan y que se piden, otra sesión que permita definir qué formulas debemos utilizar y el proceso que se debe aplicar y por último otra sesión en la que se resuelvan los problemas. Recomiendo que se realicen tres ejercicios con diferentes grados de complejidad y aplicación.

Ampliar el banco de preguntas abiertas y cerradas de selección múltiple (con sus respectivas opciones) para realizar test, talleres en clase, ejercicios. Mejorar las preguntas (y las opciones de respuesta en el caso de preguntas cerradas). Enriquecer las clases con más ejemplos.

Por último sugiero que se considere realizar estas pruebas de forma longitudinal y analizar el comportamiento de los estudiantes al pasar el tiempo y ver qué cambios se dan en cuanto a su formación o madurez cognoscitiva.

# A. Anexo: prueba diagnóstica



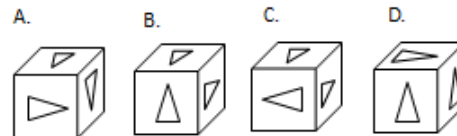
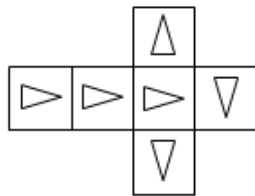
Institución Educativa Sol Naciente  
Área: matemáticas  
Docente: Miguel Ángel Mancera Romero  
Asignatura: geometría  
Grado: Octavo  
Año 2021

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

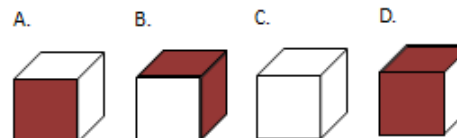
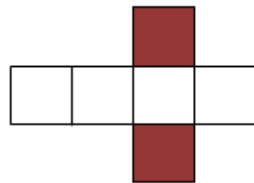
Conocimiento básico: Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

La siguiente prueba sirve como **diagnóstico** para determinar la capacidad espacial que tienen los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Sol Naciente.

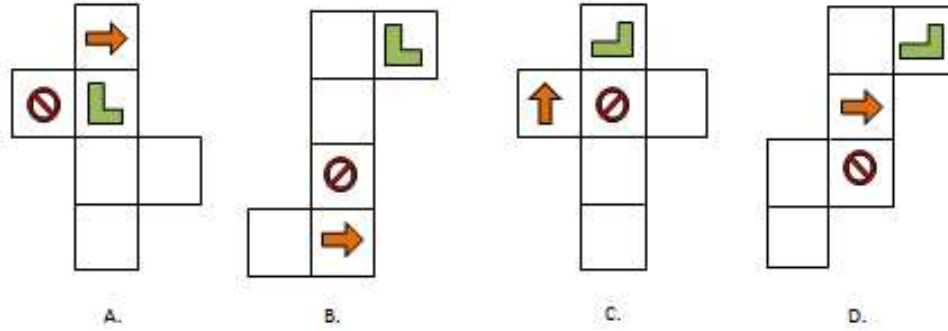
1. Selecciona el cubo que representa la figura desplegada.



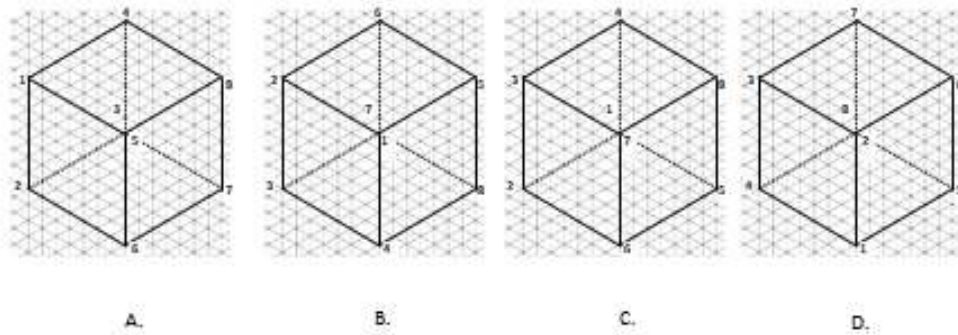
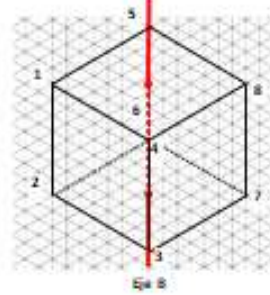
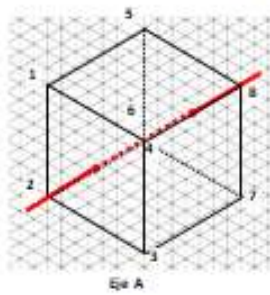
2. Selecciona el cubo que representa la figura desplegada.



3. Selecciona el cubo que representa la figura plegada.



4. Selecciona la figura que representa la imagen después de realizar una rotación de  $90^\circ$  en sentido anti horario con eje A y luego realizar una rotación de  $90^\circ$  en sentido horario con eje B.



5. ¿Cuál es la figura distinta?



A.



B.

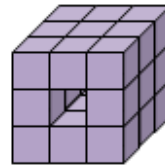


C.



D.

6. ¿Cuántos cubos tienen tres caras pintadas?



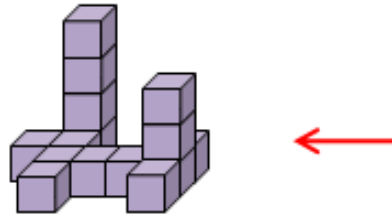
A. 12

B. 20

C. 16

D. 14

7. El siguiente sólido representa un módulo hecho de cubos.

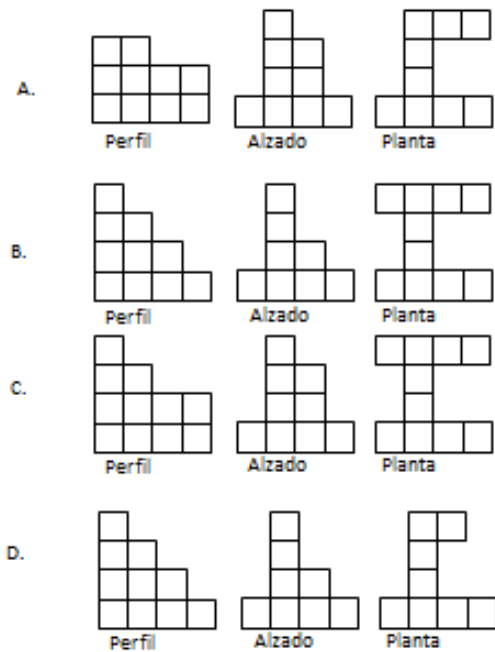


¿Cuál de las siguientes imágenes representa el modelo en su vista ALZADO (Lateral derecha)?

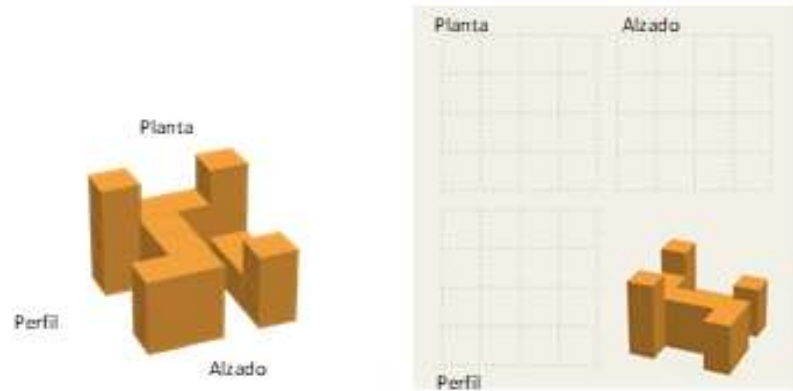


A. B. C. D.

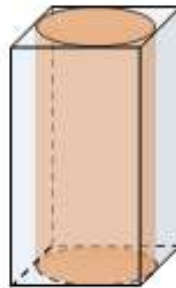
8. El siguiente sólido representa un módulo hecho de cubos. Selecciona las vistas que lo representan.



9. Representa las vistas de la figura en el plano que está a la derecha.

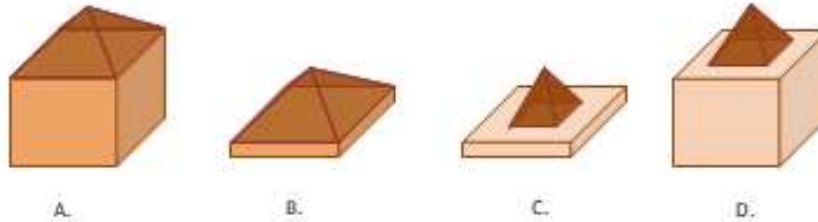


10. Si la figura representa un modelo para un molde que contiene un cilindro hueco de lado a lado, ¿cuál de las siguientes opciones representa el área que tendría este objeto?

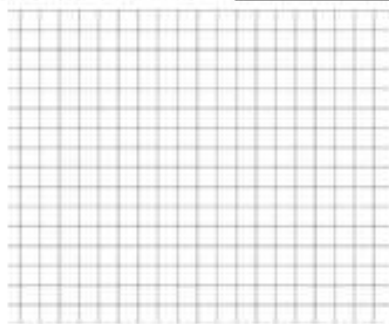
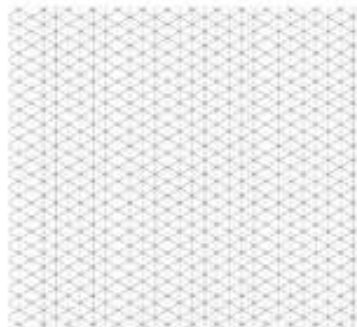


- A. Área total del paralelepípedo más el área total del cilindro menos el área de una circunferencia.
- B. Área lateral del paralelepípedo más área lateral del cilindro más el área de una circunferencia.
- C. Área lateral del cilindro más área del paralelepípedo más dos veces el área de la circunferencia.
- D. Área lateral del cilindro más área total del paralelepípedo menos dos veces el área de la circunferencia.

11. Un sólido está constituido de un paralelepípedo recto con base cuadrada, alto 12 cm y con una arista de base de 90 cm de longitud, sobrepuesta hay una pirámide regular cuadrangular con una altura de 56 cm y que tiene una arista de base de 66 cm de longitud. Elige la figura que representa correctamente la situación.



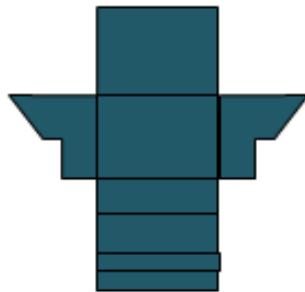
12. Elige el plano que desees y represente la situación.  
El sólido que se obtiene de eliminar una sección cilíndrica de un cubo de arista 8 cm.  
Dicha sección es la intersección del cubo de arista 8 cm con un cilindro de altura 8 cm y radio 4 cm cuya generatriz coincide con una arista del cubo y el eje del cilindro está contenido en una cara lateral del cubo.



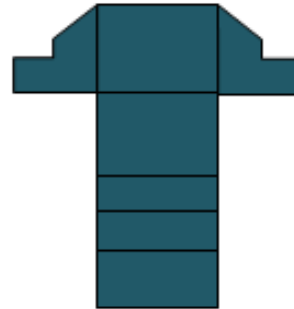
13.El siguiente sólido es una caja de chocolates cerrada.



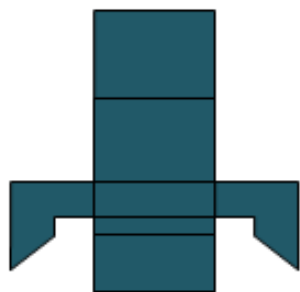
¿Cuál de las siguientes imágenes muestra el sólido desplegado?



A.



B.



C.



D.

RESPUESTAS

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (A) (B) (C) (D)
8. (A) (B) (C) (D)
- 9.
10. (A) (B) (C) (D)
11. (A) (B) (C) (D)
- 12.
13. (A) (B) (C) (D)



## B. Anexo: prueba final



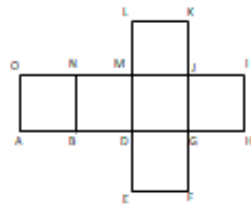
Institución Educativa Sol Naciente  
Área: matemáticas  
Docente: Miguel Angel Mancera Romero  
Asignatura: geometría  
Grado: Octavo  
Año 2021

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

Conocimiento básico: Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

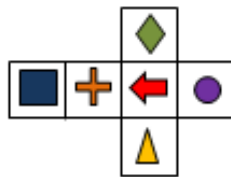
La siguiente prueba sirve como **prueba final** para determinar el progreso en la capacidad espacial que tienen los estudiantes del grado octavo de la institución educativa Sol Naciente después de la intervención de algunas sesiones.

1. La siguiente imagen representa el despliegue de un cubo. ¿Cuándo se pliegue el cubo que borde se une con  $LK$ ?

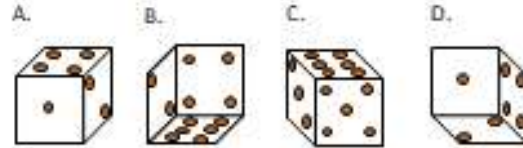
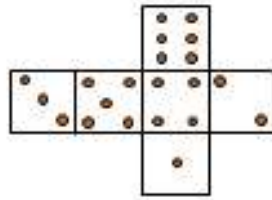


- A.  $NO$   
B.  $EF$   
C.  $MN$   
D.  $AO$

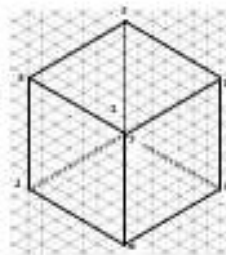
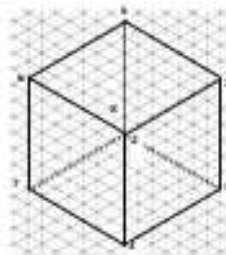
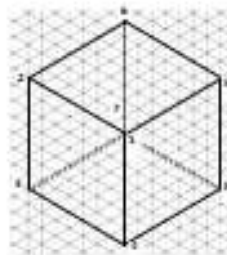
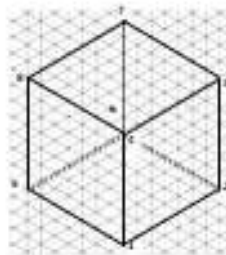
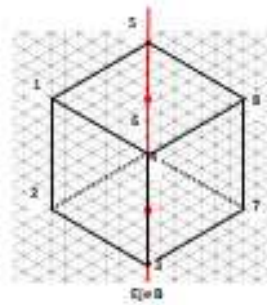
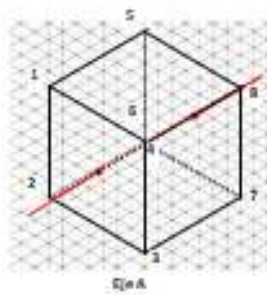
2. Selecciona el cubo que representa la figura desplegada.



3. Selecciona el cubo que representa la figura desplegada.



4. Selecciona la figura que representa la imagen después de realizar una rotación de  $90^\circ$  en sentido antihorario con eje A y luego realizar una rotación de  $90^\circ$  en sentido horario con eje B.



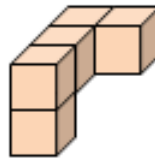
A.

B.

C.

D.

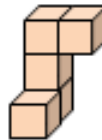
5. El siguiente sólido representa un módulo hecho de cubos.



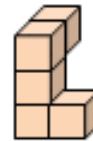
¿Cuál de los siguientes sólidos representa el mismo modelo anterior?



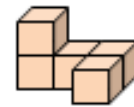
A.



B.

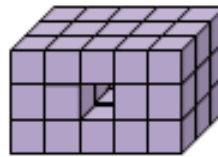


C.



D.

6. ¿Cuántos cubos tienen solo dos caras pintadas?



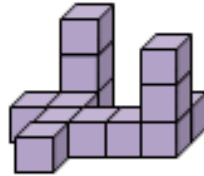
A 16

B 18

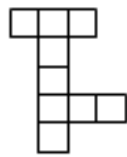
C 20

D 22

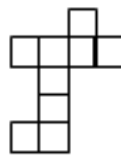
7. El siguiente sólido representa un módulo hecho de cubos.



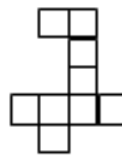
¿Cuál de las siguientes imágenes representa el modelo en su vista PLANTA?



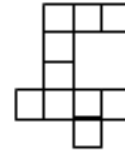
A.



B.



C.

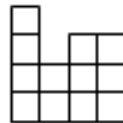


D.

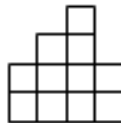
8. El siguiente sólido representa un módulo hecho de cubos. Selecciona las vistas que lo representan.



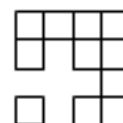
A.



Perfil

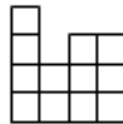


Alzado

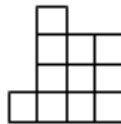


Planta

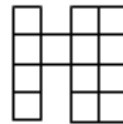
B.



Perfil

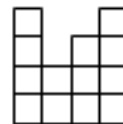


Alzado

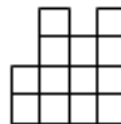


Planta

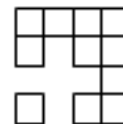
C.



Perfil

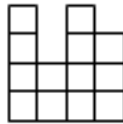


Alzado

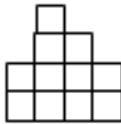


Planta

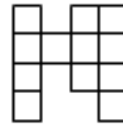
D.



Perfil

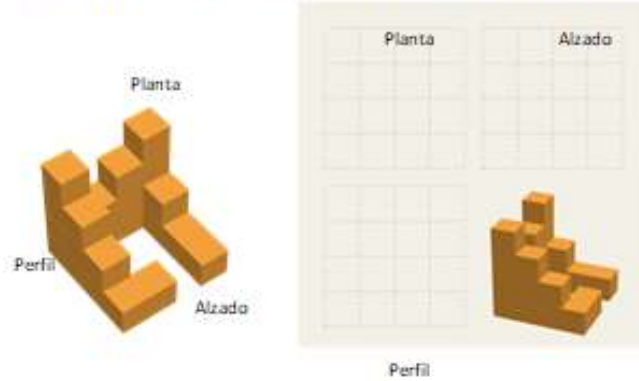


Alzado

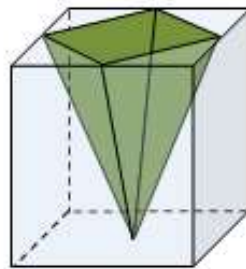


Planta

9. Representa las vistas de la figura en el plano que está a la derecha.

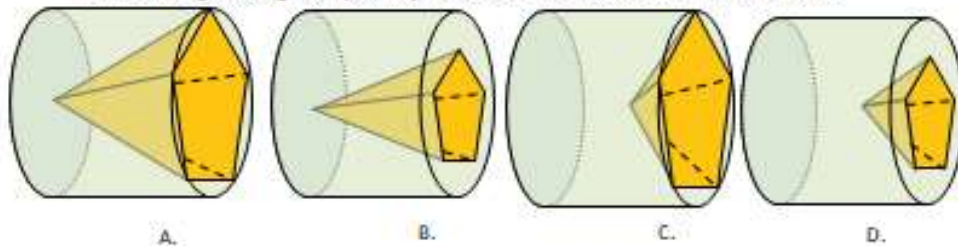


10. Si la figura representa un modelo para un molde que contiene una pirámide hueca de base cuadrada, ¿cuál de las siguientes opciones representa el área que tendría este objeto?



- A. Área total del paralelepípedo más el área total de la pirámide
- B. Área lateral de la pirámide más área total del paralelepípedo menos el área de la base de la pirámide.
- C. Área lateral del paralelepípedo más área lateral de la pirámide más el área de la base de la pirámide.
- D. Área lateral de la pirámide más área lateral del paralelepípedo más dos veces el área de la base del paralelepípedo.

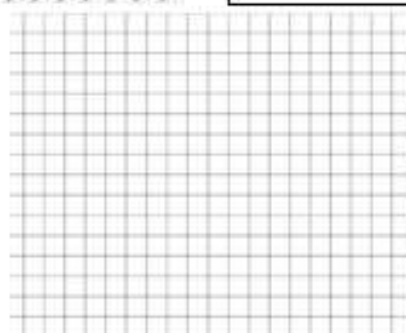
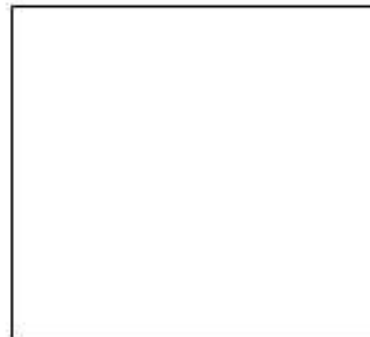
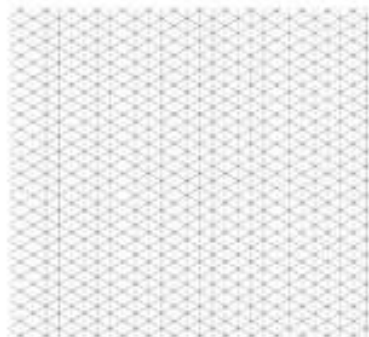
11. Un sólido está constituido por un cilindro con diámetro 8 cm y altura 10 cm y una pirámide de base pentagonal regular con radio 4 cm y altura 4 cm. La figura representa un modelo para un molde que contiene una pirámide hueca. Elige la figura que representa correctamente la situación.



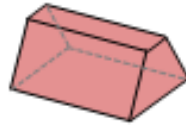
12. Elige el plano que desees y represente.

El sólido que se obtiene de eliminar dos secciones cilíndricas de un cubo de arista 8 cm.

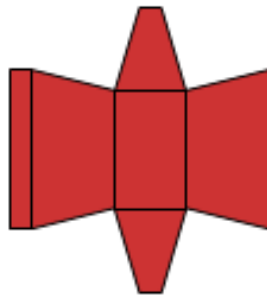
Dichas secciones están dadas por las intersecciones del cubo de arista 8 cm con dos cilindros de altura 8 cm y radio 4 cm, los ejes de cada cilindro coinciden con dos de las aristas verticales, contenidas en caras no adyacentes del cubo.



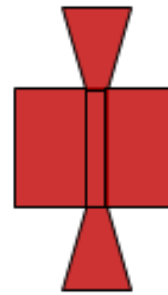
13.El siguiente sólido es una caja de chocolates cerrada.



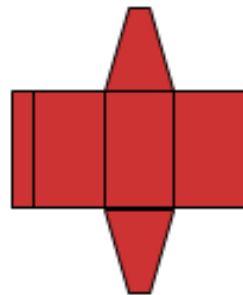
¿Cuál de las siguientes imágenes muestra el sólido desplegado?



A.



B.



C.



D.

RESPUESTAS

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (A) (B) (C) (D)
8. (A) (B) (C) (D)
- 9.
10. (A) (B) (C) (D)
11. (A) (B) (C) (D)
- 12.
13. (A) (B) (C) (D)



## Bibliografía

- Alexander, D. C., & Koeberlein, G. M. (2013). *Geometría, 5a. Ed.* . Santa Fe: Cengage Learning.
- Andersen, K. (2007). *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Denmark: Springer.
- Araya, R. G., & Ballesteros Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Educare*, 125-142.
- Arboleda, A. A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con los estudiantes de 6 grado del colegio San José de la comunidad marista. *En el 12 encuentro colombiano de matemática educativa octubre 6, 7 y 8* (págs. 40-44). Quindío: Matemática Educativa.
- Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación Matemática*, 99-132.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1998). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México, D. F.: TRILLAS.
- Baldor, J. A. (2004). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. México: Publicaciones cultural.
- Bermúdez, M. A. (2017). *Desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes del grado séptimo del municipio de La Virginia Risaralda mediado por las situaciones problema*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Biguri Zarronandia, I. (s.f.). *DIBUJO TÉCNICO*. Recuperado el 30 de Noviembre de 2021, de Interpretación gráfica para la formación profesional: <https://ibiguridt.wordpress.com/>
- Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics*, 257-269.
- Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. En R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (págs. 175-203). New York And London: Academic Press.

- 
- Bono Cabré, R. (2012). *Diseños cuasi experimentales y longitudinales*. España: Universidad de Barcelona.
- Bressan, A., Bogisic, B., & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar*. Buenos Aires: Novedades educativas.
- Burt, C. (1949). The Structure of Mind: A Riview of the Results of Factor Analysis. *British Journal of Educational Psychology*, vol. 19, 100-111, 176-199.
- Carroll, J. B. (1993). *Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor Analytic Studies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cattell, R. B. (1971). *Intelligence: Its Structure, Growth and Action*. Boston: Houghton-Mifflin.
- Clemens, S. R., Phares G., O., & Thomas J., C. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Wilmington, Delaware, E. U. A.: Addison-Wesley Iberoamericaca, S. A.
- Coppetti, E. W. (2000). *Geometría Descriptiva*. Montevideo: Editores Asociados.
- Coxeter, H. S. (1948). *Regular Polytopes*. London: Methuen & Co. Ltd.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 14-20.
- Fernández Blanco, M. T. (2011). *Una aproximación Ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial, (Tesis de Doctoral)*. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.
- Fernández Nieto, E. L. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, 33-61.
- French, J. W. (1951). *The description of aptitude and achievement testt in term of rotated factors*. Chicago: University of Chicago Press.
- Gardner, H. (1983). *Frames of Mind. The Theory of Multiple Inteligences*. Nueva York: Basic Books.
- Gardner, H. (1993). *Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica*. Nueva York: Basic Books.
- Gaulin, C., & Puchalska, E. (1987). Coded Graphical representations: A valuable but neglected means of commnunicating spatial information in geometry. *Development in School Mathematics Education around the World. Applications-Oriented Curricula And Technology-Supported Learning for al Students*, 514-539.

- Giraldo Triana, M. L., & Ruiz Cerquera, M. A. (2014). *Aprendizaje significativo del pensamiento espacial y sistemas geométrico, integrando las TIC a través de actividades lúdicas en el primer ciclo de básica. (Trabajo de grado de maestría)*. Cali: Universidad Libre.
- Gómez Muñoz, A., & Reyes Henao, M. M. (2018). *Fortalecimiento del pensamiento matemático espacial a través de la representación y visualización de figuras tridimensionales en estudiantes de grado quinto de primaria. (Trabajo de grado para Maestría)*. Santiago de Cali: Universidad ICESI.
- González, C. L. (01 de 05 de 2017). *MVBlog.cl Blog de tutoriales y apuntes sobre Arquitectura, Dibujo y Construcción*. Obtenido de Dibujo Técnico: tipos de perspectivas: <https://www.mvblog.cl/apuntes/dibujo/dibujo-tecnico-tipos-de-perspectivas/>
- Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. Nueva York: McGraw-Hill.
- Gutiérrez Uribe, R. A., & Bulla Afanador, J. E. (2013). *Desarrollo de pensamiento espacial: una propuesta de aula en el campo de la geometría descriptiva. (Trabajo de grado Licenciatura)*. Bogotá D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, 193-220.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (1997). *Metodología de la Investigación*. Neocalpan de Juárez: McGraw-Hill Interamericana de México.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Iztapalapa: McGraw-Hill.
- Herótodo. (1977). *Historia, Libro II Euterpe*. Madrid: Gredos, S.A.
- ICFES. (2015). *Sistema Nacional de Evaluación Estandarizada de la Educación*. Bogotá, D.C.: ICFES.
- Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex difference in Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development*, 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial Ability: A Review and Reanalysis of the Correlational Literature*. Stanford: Stanford University Technical Report.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial Ability: A Review and Reanalysis of the Correlational Literature*. Stanford: Stanford University Press.

- 
- Martínez, A., & Rivaya, F. J. (1998). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Editoria Síntesis S.A.
- Mataix, J., León, C., & Montes, F. (2014). Las habilidades espaciales de los estudiantes de las nuevas titulaciones técnicas. Estudio en la universidad de granada. *EGA Revista de Expression Grafica Arquitectonica*, 264-270.
- McGEE, M. G. (1979). Human Spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 889-918.
- Méndez Valentín, L. (1996). *Análisis de los conocimientos geométricos preuniversitarios y su influencia en la formación de los alumnos de las escuelas técnicas, (Tesis Doctoral)*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- Ministerio de Educación Nacional - MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias: en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá D.C.: MEN.
- Moise, E. E., & Downs, F. L. (1966). *Geometría Moderna*. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Montano, J. (14 de Mayo de 2021). *www.lifeder.com*. Obtenido de Investigación cuasi experimental: concepto, características, ejemplos:  
<https://www.lifeder.com/investigacion-cuasi-experimental/>
- Navas Loma, C. A. (2011). *El razonamiento espacial y la resolución de problemas geométricos en los estudiantes de décimo año de educación básica del colegio Nacional mixto Aída Gallegos de Moncayo. (Trabajo de investigación de Maestría)*. Ambato: Universidad Técnica de Ambato.
- Ochaíta, E. (1983). La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. *Estudios de psicología*. No. 14-15, 93-108.
- Palacio Villada, K. (2016). *Desarrollo del pensamiento geométrico según la teoría de Van Hiele. (Trabajo de grado de Licenciatura)*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Pedronzo, M. J. (2012). *Teorías del aprendizaje: Jean Piaget, Lev Vigostky. Ariel Severo*. Tacuerembó: IFD-Tacuerembo, Editorial.
- Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La muralla, S. A.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). *La représentation del l'espace chez l'enfant*. Paris: P.U.F.

- Pianasco, J. P., Amster, P., Santier, N., Laplagne, S., & Saltiva, I. (2009). *Las Geometrías*. Buenos Aires: Ministerio de Educación - Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
- Pogolérov, A. V. (1974). *Geometría Elemental*. Moscú: MIR.
- Ramírez Lucas, H. R. (2008). *El planteamiento crítico de la geometría euclídeana. (Tesis de maestría)*. Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala.
- Reyes, J. M. (s.f.). *La Nube Artística*. Recuperado el 06 de Diciembre de 2021, de Tareas, contenidos y programación de dibujo técnico I: <https://www.lanubeartistica.es>
- Rich, B. (1991). *Geometría*. México: McGraw-Hill.
- Rojas Garzón, P. J. (2002). *Cuaderno No. 5 Estándares curriculares - Área de Matemáticas: Aportes para el análisis*. Bogotá: Gaia.
- Ruiz Mitjana, L. (2020). *Psicología y Mente*. Obtenido de Investigación cuasi experimental: ¿qué es y cómo está diseñada?: <https://psicologiymente.com/miscelanea/investigacion-cuasi-experimental>
- Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Montes de Oca: Universidad estatal a distancia.
- Sepúlveda Soto, A. (2012). *Los conceptos de la física*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.
- Terman, L. M., & Merrill, M. A. (1937). *Measurement of Intelligence*. Boston: Houghton-Mifflin.
- Thurstone, L. L. (1938). *Primary Mental Abilities*. Chicago: University of Chicago Press.
- Toro Jara, I. D., & Parra Ramírez, R. D. (2006). *Método y conocimiento Metodología de la Investigación*. Medellín: Fondo Editorial Universidad EAFIT.
- Vernon, P. E. (1950). *The Structure of Human Abilities*. Nueva York: Wiley.
- Villa, A. (2016). *Desarrollo y evaluación de las habilidades espaciales de los estudiantes de ingeniería. Actividades y estrategias de resolución de tareas espaciales. (Tesis Doctoral)*. Barcelona: Univesitat Politècnica de Catalunya.