



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# **¿Cómo incide en la apropiación conceptual de probabilidad el juego como estrategia pedagógica?**

**Mauro Alejandro Pinilla Castaño**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2025



# ¿Cómo incide en la apropiación conceptual de probabilidad el juego como estrategia pedagógica?

**Mauro Alejandro Pinilla Castaño**

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Directora:

Emilse Gómez Torres, PhD. en Ciencias de la Educación

Línea de Investigación:

Aprendizaje de las Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2025

*A mi madre, Alba.*

*A mi abuela, Dalida.*

*A mi pareja, Mónica.*

*Y a mí, por insistir.*

## Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi madre, por ser siempre mi pilar, por su amor incondicional y su paciencia infinita en los momentos de mayor desafío. A mi abuelita, gracias por su fortaleza, que ha sido un ejemplo invaluable para trabajar con empeño, perseverar y luchar por cumplir todos mis sueños. A mi pareja, le agradezco profundamente por acompañarme con comprensión, ánimo y cariño en cada paso de este proceso.

Extiendo también mi más sincero reconocimiento a mi profesora Emilse, quien ha sido una guía fundamental en todo este proceso. Gracias a su acompañamiento constante, su ojo experto y su disposición para compartir sus conocimientos, pude fortalecer mis habilidades investigativas y comprender a profundidad cada etapa del desarrollo de este trabajo. Su paciencia, dedicación y confianza en mis capacidades fueron esenciales para avanzar con seguridad, y su orientación me permitió aprender enormemente, crecer como docente e investigador y culminar este proyecto con gran satisfacción.

Agradezco igualmente a la Universidad Nacional de Colombia, por brindarme una formación de excelencia, un espacio académico enriquecedor y las herramientas necesarias para desarrollar este trabajo con rigor y compromiso. La Universidad ha sido un escenario clave para mi crecimiento profesional y personal, y este logro es también reflejo de su aporte a mi formación.

Finalmente, agradezco al Liceo La Sabana y, en particular, a mis estudiantes, quienes durante toda la implementación de esta estrategia pedagógica me brindaron su alegría, motivación y entusiasmo. Gracias a ellos, este proyecto se llenó de sentido, al ver cómo asumían cada actividad con respeto, compromiso y seriedad, trabajando tanto individual como colectivamente para alcanzar un bien común. Fue profundamente satisfactorio presenciar su verdadero espíritu de trabajo en equipo, que inspira y enriquece cada día mi labor docente.

## Resumen

Este trabajo final presenta el diseño, implementación y análisis de una estrategia pedagógica destinada a la enseñanza de conceptos de probabilidad en el grado quinto de educación primaria. Dicha estrategia se fundamenta en el enfoque frecuentista y se articula mediante el uso de una herramienta lúdica: el juego. En este sentido, el juego se concibe como el eje central de la propuesta pedagógica, pues permite favorecer la comprensión conceptual de la probabilidad mediante la experimentación, la colaboración y la reflexión crítica, al mismo tiempo que contribuye a superar las dificultades habituales de los estudiantes para interpretar los fenómenos aleatorios. El procedimiento se inicia con una fase diagnóstica, destinada a la identificación de las creencias previas de los estudiantes respecto al azar. Posteriormente, se implementan tres etapas de juego progresivas, en las cuales los estudiantes realizan lanzamientos de dados, registran los resultados obtenidos, formulan hipótesis, comparan las frecuencias y ajustan sus ideas basándose en la experiencia acumulada y en la retroalimentación del docente. Los hallazgos revelan que la integración del juego en el entorno del aula de matemáticas potencia la participación estudiantil y facilita la apropiación de conceptos probabilísticos en un ambiente colaborativo.

**Palabras clave:** enfoque frecuentista; estrategia pedagógica; enseñanza de la probabilidad; aprendizaje significativo; educación primaria.

## Abstract

Title: How do games as a pedagogical strategy have an impact on the conceptual understanding of probability?

This thesis proposes a design, implementation, and analysis of a pedagogical strategy for teaching probability concepts to fifth-grade elementary students. This strategy is based on the frequentist approach and implemented through a playful tool: a game. In this sense, the game is conceived as the central axis of the pedagogical proposal, given that it promotes the conceptual understanding of probability through experimentation,

---

collaboration and critical reflection at the same time as contributes to overcoming students' usual difficulties in interpreting random phenomena. The procedure begins with a diagnostic phase, aimed at identifying students' previous beliefs about chance. Subsequently, three progressive game stages are developed, where students roll dice, record results, formulate hypotheses, compare frequencies, and adjust their ideas based on accumulated experience and teacher's feedback. The results demonstrate that integrating play in the mathematics classroom environment enhances the participation of students and facilitates the appropriation of probabilistic concepts in a collaborative environment.

**Keywords:** frequentist approach; pedagogical strategy; teaching of probability; meaningful learning; primary education.

Pág.

## Contenido

<b>Capítulo 1: Problema.....</b>	<b>13</b>
1.1. Justificación del problema .....	13
1.2. Objetivos del trabajo.....	14
1.2.1. Objetivo general.....	14
1.2.2. Objetivos específicos .....	15
1.3. Metodología .....	15
1.4. Secuencia didáctica y pedagógica .....	17
1.5. El juego como estrategia didáctica .....	17
1.6. Marco disciplinar .....	18
1.6.1. Bases del concepto de probabilidad .....	19
1.6.2. Definición intuitiva de probabilidad.....	19
1.6.3. Definición clásica de probabilidad.....	20
1.6.4. Definición frecuentista de probabilidad .....	20
1.6.5. Probabilidad de eventos simples y compuestos.....	21
<b>Capítulo 2: Secuencia pedagógica y su diseño .....</b>	<b>23</b>
2.1 Presentación de la estrategia pedagógica.....	23
2.2 Planeación de la secuencia pedagógica y su logística .....	25
2.2.1 Conformación de los grupos .....	26
2.3 Articulación de las etapas en la secuencia didáctica .....	27
2.4 Diseño de los cuestionarios.....	29
2.4.1 Diseño del cuestionario individual para la Etapa 0 (Calentando motores).....	30
2.4.2 Diseño del cuestionario individual para la Etapa 1 (Vuelta #1).....	33
2.4.3 Diseño del cuestionario grupal para la Etapa 1 .....	35
2.4.4 Diseño del cuestionario para la Etapa 2 (Vuelta #2) .....	37
2.4.5 Diseño del cuestionario para la Etapa 3 (Vuelta #3) .....	39
<b>Capítulo 3: Resultados de la aplicación del juego .....</b>	<b>43</b>
3.1 Conformación de los grupos.....	43
3.2 Identificación de conocimientos previos .....	44
3.3 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #1” .....	52
3.4 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Cuestionario grupal” .....	56
3.5 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #2” .....	59
3.6 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #3” .....	63
<b>Capítulo 4: Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>71</b>
4.1 Conclusiones.....	71
4.2 Recomendaciones.....	73
<b>Anexo A: Cuestionario “Calentando motores” dado de ocho caras .....</b>	<b>75</b>
<b>Anexo B: Cuestionario “Calentando motores” dado de doce caras .....</b>	<b>76</b>
<b>Anexo C: Cuestionario “Vuelta #1” dado de ocho caras.....</b>	<b>77</b>
<b>Anexo D: Cuestionario “Vuelta #1” dado de doce caras.....</b>	<b>78</b>

---

<b>Anexo E: Cuestionario “Cuestionario grupal” .....</b>	<b>79</b>
<b>Anexo F: Cuestionario “Vuelta #2” dado de ocho caras .....</b>	<b>80</b>
<b>Anexo G: Cuestionario “Vuelta #2” dado de doce caras.....</b>	<b>82</b>
<b>Anexo H: Cuestionario “Vuelta #3” dado de doce caras .....</b>	<b>84</b>
<b>Anexo I: Cuestionario “Vuelta #3” dado de doce caras .....</b>	<b>86</b>
<b>Anexo J: Elaboración de los materiales manipulativos.....</b>	<b>88</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>92</b>

## Lista de tablas y cuadros

Cuadro 1. Roles dentro de cada grupo .....	27
Cuadro 2. Tamaño y denominación de grupos .....	43
Tabla 3. Categorías de respuestas de la pregunta 1 cuestionario “calentando motores”	44
Tabla 4. Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario “calentando motores”	46
Tabla 5. Categorías de respuestas de la pregunta 3 cuestionario “calentando motores”	47
Tabla 6. Categorías de respuestas de la pregunta 4 cuestionario “calentando motores”	48
Tabla 7. Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario “calentando motores”	49
Tabla 8. Categorías de respuestas de la pregunta 6 cuestionario “calentando motores”	51
Tabla 9. Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario “vuelta #1” .....	53
Tabla 10. Categorías de respuestas de la pregunta 3 cuestionario “vuelta #1” .....	54
Tabla 11. Categorías de respuestas de la pregunta 4 cuestionario “vuelta #1” .....	55
Tabla 12. Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario “vuelta #1” .....	56
Tabla 13. Categorías de respuestas de la pregunta 3 “cuestionario grupal” .....	57
Tabla 14. Categorías de respuestas de la pregunta 6 “cuestionario grupal” .....	59
Tabla 15. Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario “vuelta #2” .....	60
Tabla 16. Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario “vuelta #2” .....	62
Tabla 17. Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #1” .....	77
Tabla 18. Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #1” .....	78
Tabla 19. Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #2” .....	80
Tabla 20. Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #2” .....	82
Tabla 21. Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #3” .....	84
Tabla 22. Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #3” .....	86

## Lista de figuras

<i>Figura 1. Materiales necesarios para iniciar la secuencia</i> .....	24
<i>Figura 2: Descripción de la sesión 1</i> .....	25
<i>Figura 3: Descripción de la sesión 2</i> .....	26
<i>Figura 4. Dibujo como respuesta a la pregunta 4 del cuestionario "calentando motores"</i> 49	
<i>Figura 5. Altura de las barras después de la vuelta #1</i> .....	52
<i>Figura 6. Altura de las barras en el dispositivo de conteo en la vuelta #2</i> .....	60
<i>Figura 7. Respuesta a la pregunta 4 del cuestionario vuelta #2</i> .....	62
<i>Figura 8. Altura de las barras durante la vuelta #3</i> .....	63
<i>Figura 9. Tabla de registro de un grupo en la vuelta #3</i> .....	64
<i>Figura 10. Respuesta de un grupo a la pregunta 2 del cuestionario vuelta #3</i> .....	65
<i>Figura 11. Respuesta de un grupo a la pregunta 3 del cuestionario vuelta #3</i> .....	65
<i>Figura 12. Respuesta de un grupo a la pregunta 4 de la vuelta #3</i> .....	66
<i>Figura 13. Respuestas de dos grupos a la pregunta 5 de la vuelta #3</i> .....	67
<i>Figura 14. Respuesta A de un grupo a la pregunta 6 de la vuelta #3</i> .....	67
<i>Figura 15. Respuesta B de un grupo a la pregunta 6 de la vuelta #3</i> .....	68
<i>Figura 16. Respuesta a la pregunta 7 de la vuelta #3</i> .....	69
<i>Figura 17. Respuestas a la pregunta 8 de la vuelta #3</i> .....	70
<i>Figura 18. Dado de ocho caras</i> .....	75
<i>Figura 19. Dado de doce caras</i> .....	76
<i>Figura 20. Paquete de chaquiras de colores</i> .....	88
<i>Figura 21. Base del dispositivo de conteo</i> .....	88
<i>Figura 22. Barras para el dispositivo de conteo</i> .....	89
<i>Figura 23. Bolsas para el almacenamiento de los recursos</i> .....	89
<i>Figura 24. Dado de ocho y doce caras</i> .....	90
<i>Figura 25. Dispositivo de conteo para el dado de ocho y doce caras</i> .....	90
<i>Figura 26. Paquetes de chaquiras para cada grupo según el dado a trabajar</i> .....	91

# Introducción

Una característica importante de un ciudadano estadísticamente competente es que haga una adecuada interpretación del azar y tome la elección correcta en situaciones de incertidumbre. Adicionalmente, la probabilidad resulta socialmente relevante: un ciudadano en su contexto debe ser capaz de aprovechar las habilidades que la teoría de la probabilidad le brinda para tomar mejores decisiones, conocer correctamente todas las posibilidades frente a una situación y, por supuesto, tener una acertada interpretación de las cifras.

Desde inicios del siglo XXI se han incrementado los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Por ejemplo, Batanero (2001) menciona la importancia de discutir académicamente sobre la didáctica de la estadística, teniendo en cuenta las proyecciones y los conocimientos que deben abordarse, y de qué manera deben enseñarse para alcanzar algunos logros en el aprendizaje de los estudiantes. Localmente, se pueden mencionar los trabajos de Velázquez (2014) y Herrera (2018), donde se abordan diferentes estrategias didácticas para enseñar conceptos de probabilidad a escolares entre 9 y 11 años; el primero en grado quinto (Velázquez, 2014) y el segundo en grado sexto (Herrera, 2018). Ambos trabajos optan por salirse del modelo de enseñanza magistral y se centran en estrategias lúdicas que permitan a los estudiantes de estos grados apropiarse mejor de los conceptos de probabilidad.

En esta línea, el presente trabajo se desarrolló en el colegio Liceo La Sabana (calendario A) ubicado en el norte de Bogotá, con la participación de 44 estudiantes de grado quinto. Su propósito es ofrecer a los docentes de matemáticas de primaria un recurso que les permita dinamizar el aula mediante un juego didáctico para la enseñanza de la probabilidad, acompañado de guías de trabajo y del análisis de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes durante la implementación.

Aunque el título del estudio plantea una pregunta de carácter amplio, la investigación se limita a una aplicación específica y contextualizada del juego como estrategia pedagógica, centrada en un concepto y una población particular. Por tanto, los resultados se interpretan dentro de este contexto y no pretenden ser generalizables.

# Capítulo 1: Problema

Este capítulo expone brevemente el problema de estudio y su fundamentación. En sus primeras secciones se contextualiza el problema, se presentan los objetivos del trabajo y se describe de manera sintética la metodología usada. Posteriormente se desarrolla la base teórica que sustenta la estrategia pedagógica y el uso del juego como herramienta educativa en la enseñanza de la probabilidad, abordando los conceptos fundamentales y las definiciones clave del enfoque metodológico y probabilístico.

## 1.1. Justificación del problema

En la educación matemática –así como en la vida– es importante que los estudiantes desarrollen habilidades que les permita responder a situaciones de incertidumbre o azar. Con la implementación de los estándares básicos de competencias en el sistema educativo se ha hecho evidente la necesidad de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística desde la primaria. El Ministerio de Educación Nacional (MEN), junto con otros agentes, redactaron y publicaron en el año 2006 estándares en las áreas fundamentales del conocimiento, que constituyen una guía sobre lo que los estudiantes deben saber y hacer con lo que aprenden. En cuanto a las habilidades en matemáticas, según el MEN (2016): “Los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular; comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos” (p.51). Sin embargo, estos procesos resultan ser muy generales, por ello, el Ministerio contempla desarrollar el pensamiento lógico y matemático, el cual se puede subdividir en el pensamiento numérico, espacial, métrico o de medida, variacional y el pensamiento aleatorio o probabilístico, en el cual se enfoca la presente investigación.

El pensamiento aleatorio, según los estándares básicos de competencias, sirve como herramienta para la toma de decisiones cuando se tiene un contexto de azar, incertidumbre o en aquellas situaciones donde no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. Para desarrollar este tipo de pensamiento se puede utilizar la teoría de probabilidades, la cual brinda herramientas matemáticas para encontrar soluciones a los problemas

anteriormente mencionados. Potenciar este tipo de pensamiento en los estudiantes dará como fruto que se tomen mejores decisiones en otros campos o disciplinas. Por ejemplo, en el uso de las vacunas, donde cierta cantidad de la población padece efectos secundarios, comprender y analizar la probabilidad de sufrir alguno de los síntomas puede llevar a tomar la decisión de vacunarse; al contrario de quienes no se vacunan creyendo que pueden enfermar gravemente.

Siguiendo con los parámetros del Ministerio de Educación Nacional, en el año 2016 surgió un nuevo documento por parte de este organismo, para puntualizar en cada grado escolar lo que cada estudiante debe alcanzar como logro básico de aprendizaje. De esta manera es pertinente resaltar que los desempeños básicos de aprendizaje están organizados en ciclos, uno de estos es aquel que está compuesto por los grados 4° y 5° de primaria.

En el grado 5°, por ejemplo, los componentes de Desempeño Básico de Aprendizaje (DBA) mencionan que el estudiante: “Predice la probabilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los eventos del evento definido” (MEN, 2016, p.43). La propuesta pretendió fortalecer este tipo de habilidades para obtener un proceso adecuado en ciclos posteriores, que finaliza con el examen de Estado Saber 11 (que en una parte comprende la interpretación del azar).

Visto de esta manera, esta investigación propone la creación de una estrategia metodológica que desarrolla habilidades y desempeño a nivel del pensamiento aleatorio o probabilístico. Así pues, se plantea la siguiente pregunta: ¿De qué manera el juego como estrategia pedagógica fortalece la apropiación conceptual de probabilidad en los estudiantes de quinto de primaria del colegio Liceo La Sabana?

## **1.2. Objetivos del trabajo**

### **1.2.1. Objetivo general**

Analizar los resultados obtenidos por estudiantes de quinto de primaria, participantes en la implementación de una estrategia pedagógica basada en juegos y orientada a la apropiación de conceptos básicos de probabilidad.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Identificar los conocimientos previos de los participantes en relación con la fundamentación requerida para introducir algunos conceptos básicos de probabilidad.
- Diseñar una estrategia pedagógica, orientada a estudiantes de quinto de primaria, utilizando algunos juegos para la enseñanza de conceptos probabilísticos.
- Evaluar el aprendizaje adquirido por estudiantes de quinto de primaria al aplicar la estrategia diseñada para la apropiación de conceptos de probabilidad.

### 1.3. Metodología

Este Trabajo Final sigue una metodología cualitativa, ya que esta investigación en el aula busca comprender y analizar la apropiación de conocimientos por parte de un grupo de estudiantes de grado quinto durante la implementación de la estrategia pedagógica propuesta por el autor en el marco de este proyecto. Hernández-Sampieri et al. (2014) sostienen que este enfoque tiene planteamientos más abiertos que se van centrando a medida que transcurre la investigación y que, durante la investigación, se pueden hacer los ajustes necesarios para que los resultados sean reveladores.

Para el diseño de la estrategia pedagógica se articularon cuatro componentes:

- Una revisión teórica del contenido centrada en los temas de estadística y probabilidad para primaria.
- Una revisión bibliográfica relacionada con el aprendizaje basado en juegos para primaria.
- La normativa colombiana con respecto a la formación probabilística sugerida para educación básica primaria, la cual está expresada en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en Matemáticas (Ministerio de educación Nacional [MEN], 2016), que establecen los saberes esenciales que deben desarrollarse en cada grado.
- El contexto local para la implementación, representado en el currículo de la institución educativa, según el cual los estudiantes de primaria abordan contenidos básicos de probabilidad desde grado segundo.

A partir de estas revisiones, se propuso el tipo de juego y de dispositivos a utilizar que podían ser más acordes para la edad usual de los estudiantes de grado quinto (entre 10 y 12 años); a continuación, se planificaron varias actividades (individuales y grupales) para ser desarrolladas a lo largo del juego. Las actividades se basaron en preguntas abiertas, orientadas a que los estudiantes describan, analicen e interpreten fenómenos aleatorios y conjuntos de datos, promoviendo así la reflexión sobre sus experiencias y la construcción de una noción frecuencial de probabilidad.

La implementación del trabajo se realizó en 2023. Las actividades planeadas se ajustaron considerando las características de los participantes, sus intereses y conocimientos previos, asegurando que las actividades sean significativas y motivantes para los estudiantes. Cabe mencionar que la selección de los participantes utiliza un criterio no probabilístico, como suele ocurrir en investigaciones en el aula; se incluyeron todos los estudiantes que estaban disponibles y accesibles en los dos cursos de grado quinto a cargo del docente-investigador. En consecuencia, los resultados obtenidos no se pueden generalizar, describen únicamente a la muestra participante.

A través de 2 sesiones de trabajo colaborativo los estudiantes se vieron inmersos en juegos y dinámicas que permiten explorar conceptos de probabilidad de manera práctica; mientras tanto, el docente-investigador observó y orientó el desarrollo de las actividades. Según la planeación, o cuando se vio necesario, el docente-investigador hizo retroalimentación para asegurar la reflexión de los estudiantes y que fueran ellos mismos quienes construyeran su conocimiento, a partir de su propia experiencia.

Finalmente, el análisis de las respuestas escritas dadas por los estudiantes a las preguntas abiertas, también, sigue el enfoque cualitativo. Este enfoque permite reconocer patrones, tendencias y dificultades en el aprendizaje, así como evaluar de manera reflexiva cómo la estrategia pedagógica contribuye al desarrollo conceptual y al fortalecimiento de trabajo grupal.

Para la aplicación de la estrategia pedagógica y la recolección de información, se contó con el consentimiento informado de los padres de familia, quienes autorizaron la participación de los estudiantes y el uso de los datos con fines académicos e investigativos, garantizando la confidencialidad de la información.

## 1.4. Secuencia didáctica y pedagógica

La secuencia didáctica es una herramienta esencial para organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera estructurada y coherente. Zabala (2007) la define como: “un conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos, que tienen un principio y un final conocidos tanto por el profesorado como por el alumnado” (p. 16). Este enfoque permite al docente planificar de forma progresiva, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, la introducción de nuevos contenidos y la aplicación de lo aprendido, esto facilita un aprendizaje significativo (Díaz Barriga y Hernández, 2010).

De otra parte, el concepto de secuencia pedagógica es más amplio, ya que no se limita únicamente a la adquisición de conocimientos, sino que comprende el proceso formativo integral de los estudiantes. Esto implica no solo el desarrollo cognitivo, sino también el fortalecimiento de competencias, actitudes y valores (Camilloni, 1995). Así, mientras la secuencia didáctica se centra en la estructuración de los contenidos, la secuencia pedagógica responde a una visión formativa más global, alineada con los principios educativos y con el proyecto pedagógico institucional.

Ambos conceptos no deben entenderse como términos desvinculados; al contrario, se complementan: la secuencia didáctica responde al *cómo enseñar*, mientras que la secuencia pedagógica plantea el *para qué* y el *porqué* de la enseñanza, buscando una formación integral y con sentido para el estudiante (Camilloni, 2007).

En esta propuesta, aunque se asume un marco general de secuencia pedagógica, se utilizará el término “secuencia didáctica” para referirse a la herramienta concreta y estructurada, que organiza el tratamiento de las temáticas de forma ordenada y progresiva.

## 1.5. El juego como estrategia didáctica

La probabilidad surgió históricamente como una herramienta para obtener ventaja en juegos donde intervenía el azar. Hoy en día, en el ámbito educativo, aún se recurre a juegos tradicionales para la enseñanza de esta rama de las matemáticas, tales como el lanzamiento de una moneda, el uso de dados de seis caras, la selección aleatoria de una carta de una baraja de 52, o la extracción de balotas de una bolsa, como en el bingo. Estas

actividades no solo permiten introducir conceptos probabilísticos, sino que también estimulan el pensamiento lógico y el análisis de situaciones inciertas.

Desde una perspectiva pedagógica, el juego se concibe como una actividad física, mental, emocional, comunicativa y social, fundamental para el desarrollo infantil. Este constituye un medio privilegiado para el aprendizaje de valores humanos y el fortalecimiento de habilidades esenciales para la vida adulta (Martín & Borja, 2007).

Jugar, además de ser placentero, despierta la motivación, el interés y la disposición para aprender. En el aula, el juego fomenta el trabajo en equipo, el diseño de estrategias, la planificación y la concentración. Su naturaleza incierta y aleatoria lo convierte en un recurso ideal para la enseñanza de la probabilidad, ya que genera expectativa y atención hacia lo que está por suceder. Por estas razones, la presente propuesta metodológica se basa en el juego como eje central para abordar los conceptos probabilísticos. Mediante una secuencia estructurada de juegos, se guiará a los estudiantes de quinto de primaria hacia la construcción de conceptos fundamentales de probabilidad, lo cual permitirá fortalecer sus competencias en esta área del conocimiento de manera significativa y contextualizada.

## 1.6. Marco disciplinar

La teoría de la probabilidad comenzó como una herramienta matemática en los juegos de azar, por ejemplo, en el cálculo de la cantidad de posibles resultados en un dado y la cantidad de opciones que servían para ganarle al contrincante. Desde un contexto histórico se insinúa que la adrenalina de apostar y ganar algunas monedas de oro motivó al caballero Meré a plantearle preguntas a Pascal. Este último, motivado por algunas cuestiones, sostuvo una relación epistolar con Fermat para buscar responder a aquellas inquietudes. Batanero (2005) sostiene que fueron Pascal y Fermat quienes iniciaron la formalización de la teoría de probabilidades al intentar resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Tanto Pascal como Fermat expresaron sus ideas en términos de una apuesta equitativa o división de la apuesta, esto nuevamente evidencia que el objetivo era el de generar una ganancia con los juegos o apostar de manera justa.

Más adelante surge otro personaje importante, Huygens, quien encuentra el valor esperado de la ganancia en un juego cuya opción de ganar no es equitativa, pero no será

sino hasta Leibniz que se generalizaron algunos conceptos. De Moivre dio una definición de probabilidad en 1718, a partir de aquí toda la teoría de la probabilidad ha tenido gran desarrollo y formalización:

Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el numerador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de ocurrencia. (Batanero, 2005, pág. 254)

### **1.6.1. Bases del concepto de probabilidad**

La formalización del concepto de probabilidad se vincula con la definición de experimento aleatorio. En un sentido formal, un experimento se considera aleatorio cuando, al repetirlo en condiciones similares, no se puede prever el resultado con certeza. Por el contrario, si es posible predecir el resultado al repetir el experimento, se le denomina determinista (Gómez, 2014).

Una vez que se ha identificado el experimento, se procede a establecer el conjunto que contiene todos los posibles resultados de dicho experimento, esto se conoce como espacio muestral. Cada subconjunto del espacio muestral recibe el nombre de suceso. Ahora bien, teniendo la idea de suceso, la probabilidad se puede entender como una función que asigna a cada suceso un número real entre 0 y 1. Este número representa la probabilidad de ocurrencia del suceso, donde 0 indica que es imposible y 1 indica que es seguro, con valores intermedios indicando grados de certeza entre estos extremos.

### **1.6.2. Definición intuitiva de probabilidad**

No es posible determinar con exactitud cuándo la matemática se entrelazó con los juegos de azar, pero fue solo hasta comienzos del siglo XVII que se desarrolló una idea formal sobre el tema. Sin embargo, en distintos contextos históricos se han encontrado nociones intuitivas acerca de los posibles resultados en juegos de azar. Estas ideas, aunque expresadas de manera informal, buscaban principalmente dos objetivos: por un lado, cuantificar la probabilidad de que un evento incierto ocurriera; por otro, representar el grado de creencia en determinada situación. Según Batanero (2005), estos dos elementos conforman la definición intuitiva de la probabilidad, la cual está presente en la vida cotidiana

tanto de adultos como de niños. A partir de ello surge un debate sobre si la probabilidad es objetiva –es decir, una propiedad inherente a un evento– o si, por el contrario, es subjetiva, al depender de la percepción y las creencias personales. Con el tiempo, la probabilidad necesitó pasar de ser una noción intuitiva a una definición más formal. Para ello, fue indispensable que dejara de ser una creencia personal y se considerara una propiedad matemática, calculable objetivamente.

### **1.6.3. Definición clásica de probabilidad**

Como se ha mencionado, los juegos de azar fueron fundamentales para el inicio de las discusiones matemáticas sobre la probabilidad. Batanero (2005) destaca la correspondencia entre Pascal y Fermat como el punto de partida clave para la teoría de la probabilidad. En este contexto, se utilizaban términos como apuestas equitativas o división de la apuesta para asignar un valor numérico y evaluar si se tenía una ventaja en un juego. Además, se menciona que Huygens fue el primero en calcular el valor esperado de las ganancias en un juego. Posteriormente, Leibniz generalizó este resultado, contribuyendo significativamente al desarrollo de la teoría de la probabilidad. Aunque en este momento no existía una definición formal de probabilidad, fue De Moivre quien, formuló una definición temprana en la que la probabilidad se entendía como la fracción en la que el numerador representaba el número de formas en que podía ocurrir un suceso, y el denominador, el número total de resultados posibles del espacio muestral. Posteriormente, Laplace recopiló este concepto, enunciando la regla de Laplace, que define la probabilidad como la fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y el denominador el número de todos los casos posibles. Esta definición es la que se utiliza comúnmente en la educación matemática. Sin embargo, como señala Batanero (2005), esta definición presenta limitaciones, ya que no tiene en cuenta sucesos con un número infinito de resultados posibles, entre otras consideraciones. Debido a estas insatisfacciones, surgió la necesidad de vincular la probabilidad con la frecuencia relativa de un evento, lo que permitió darle un enfoque diferente.

### **1.6.4. Definición frecuentista de probabilidad**

La frecuencia relativa es una medida que indica cuántas veces ocurre un evento en comparación con el número total de intentos o repeticiones realizadas. Un aspecto fundamental de la frecuencia relativa es que, a medida que aumenta el número de

repeticiones de un experimento, su valor tiende a estabilizarse en torno a un número constante. Desde la perspectiva frecuentista, este valor límite define la probabilidad del evento, tal fenómeno se conoce como la ley de estabilidad de las frecuencias o la ley de los grandes números.

En términos matemáticos, la probabilidad de un evento se entiende como el límite al que converge la frecuencia relativa, conforme el número de repeticiones del experimento tiende a infinito. Esto implica que, en el corto plazo, los resultados pueden ser impredecibles, pero con un número suficientemente grande de repeticiones, se observa una tendencia hacia la estabilidad y la regularidad en los resultados. Esta forma de interpretar la probabilidad comenzó a desarrollarse a finales del siglo XIX y fue formalizada en 1928 por Richard von Mises en *Probability, Statistics and Truth*. Según esta concepción, la frecuencia relativa de un suceso  $A$  en  $N$  repeticiones del experimento se define como:

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$$

Donde  $N_A$  representa el número de veces que ocurre el suceso  $A$ , y  $N$  es el número total de repeticiones del experimento. Si el número de repeticiones crece indefinidamente bajo las mismas condiciones, las frecuencias relativas de cualquier suceso tienden a estabilizarse, lo que se expresa matemáticamente como:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A)$$

Esta es la conclusión fundamental de la perspectiva frecuentista: la sucesión de frecuencias relativas de cualquier suceso converge a un valor único, el cual se define como la probabilidad del suceso (Batanero, 2005).

Luego de comprender cómo se puede entender el concepto de probabilidad desde diferentes enfoques, se abordarán ahora dos conceptos claves: la probabilidad de eventos simples y la probabilidad de eventos compuestos, esenciales en la vida escolar.

### **1.6.5. Probabilidad de eventos simples y compuestos**

Con respecto a la probabilidad de un evento simple, esta hace referencia a la medida de la ocurrencia de uno solo de todos los posibles resultados dentro de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el caso clásico de un dado de seis caras, la probabilidad de que salga la cara con el número “4” es un evento simple, ya que corresponde a un solo

resultado dentro de los seis posibles. El valor se calcula, como se ha mencionado anteriormente, dividiendo el número de casos favorables sobre el total de posibles, es decir,  $1/6$ . Este tipo de eventos son el punto inicial en la enseñanza de la probabilidad, ya que permiten introducir de forma clara los conceptos de espacio muestral y equiprobabilidad en los estudiantes (Batanero & Godino, 2003).

De otra parte, cuando se usa el término *evento compuesto* se busca la probabilidad de que ocurran dos o más eventos a la vez. Este se puede explicar con más detalle desde una mirada de conjuntos, usando conceptos como la unión de conjuntos. Siguiendo el ejemplo del dado de seis caras, calcular la probabilidad de que salga un número par (las caras con los números 2, 4 y 6) es un evento compuesto, ya que considera varios resultados dentro del conjunto de todos los posibles. Este tipo de ejercicios permite fortalecer, además, los conceptos de probabilidad, la lógica y las operaciones con conjuntos (Batanero, 2005). Es importante trabajar este tipo de eventos con ejemplos cotidianos, visuales y manipulativos a los que les den sentido los estudiantes de primaria.

## **Capítulo 2: Secuencia pedagógica y su diseño**

En este capítulo se presenta la propuesta de la secuencia pedagógica diseñada con el objetivo de facilitar la apropiación de conceptos de probabilidad entre los estudiantes de quinto de primaria. Este enfoque pedagógico se centra en proporcionar una estructura lúdica y participativa que optimice el proceso de aprendizaje. En primer lugar, se detalla la estructura integral del juego didáctico, delineando cada etapa, para ofrecer una comprensión clara de su desarrollo. Desde la introducción hasta la conclusión, se explorarán las dinámicas específicas que guiarán a los estudiantes a través de una experiencia educativa envolvente y efectiva.

Asimismo, se examinará en detalle la construcción del material didáctico utilizado en la secuencia, destacando la relevancia de cada componente en la consolidación de los conceptos de probabilidad. Desde recursos visuales hasta herramientas interactivas, cada elemento ha sido seleccionado estratégicamente para maximizar el impacto educativo. Además, se ahondará en los cuestionarios diseñados para evaluar el progreso de los estudiantes a lo largo de la secuencia. Estos instrumentos no solo medirán el nivel de comprensión, sino que también proporcionarán información valiosa para ajustar y mejorar continuamente la propuesta didáctica.

### **2.1 Presentación de la estrategia pedagógica**

La estrategia pedagógica se plantea en el aula como una carrera, temática que resulta atractiva y actual para los estudiantes.

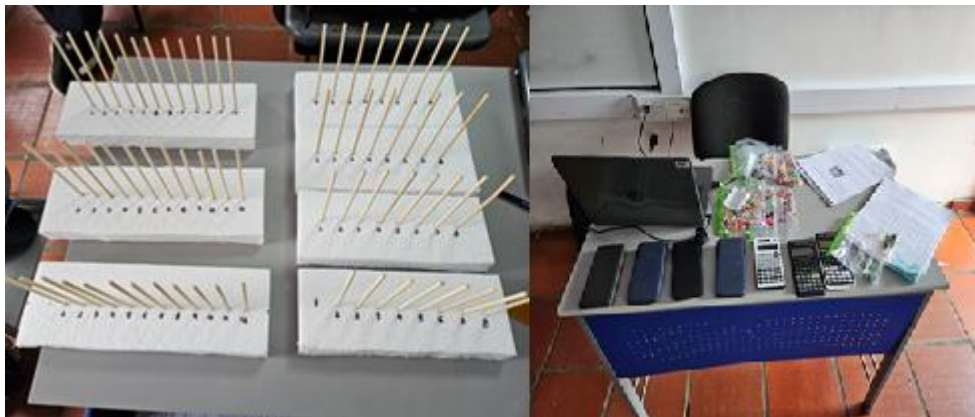
Se formarán grupos de trabajo donde cada uno participará en diferentes etapas en las que, lanzando un dado, se irá construyendo el concepto de probabilidad desde un enfoque frecuentista. Este proceso se desarrollará de forma progresiva a través de la resolución de cuestionarios y la retroalimentación proporcionada por el docente.

La secuencia está planeada para desarrollarse en dos sesiones e inicia con una etapa preliminar denominada “Calentando motores”, seguida de tres vueltas que permitirán

determinar el grupo ganador. Al finalizar cada sesión, se presentará la posición de los grupos para fomentar una competencia sana y mantener una actitud favorable hacia el aprendizaje. Los puntajes obtenidos en cada vuelta también servirán como criterio para la calificación de la actividad.

Durante la etapa “Calentando motores”, los estudiantes conocerán el dado asignado a su escudería, aunque aún no podrán utilizarlo. En la primera vuelta, realizarán diez lanzamientos y resolverán dos cuestionarios: uno individual y otro grupal. En la segunda vuelta, efectuarán cincuenta lanzamientos adicionales, completando un total de sesenta, y responderán un nuevo cuestionario grupal. Finalmente, en la tercera vuelta, se llevarán a cabo sesenta lanzamientos más, alcanzando un total acumulado de ciento veinte, y se completará un último cuestionario que servirá de cuestionario de evaluación para valorar lo aprendido por los estudiantes.

En cada una de las vueltas, los estudiantes contarán con un dispositivo de conteo y una tabla de registro para llevar el control de los resultados obtenidos, que servirá de base para resolver los cuestionarios correspondientes. Todo lo requerido para desarrollar la secuencia se resume en la Figura 1, mientras que el [Anexo J](#) describe la elaboración de cada recurso.



*Figura 1. Materiales necesarios para iniciar la secuencia*

## 2.2 Planeación de la secuencia pedagógica y su logística

El desarrollo de las sesiones se organizó en dos encuentros principales. En la primera sesión se explica la actividad a los estudiantes, quienes después de conocer los aspectos más importantes responden de manera individual el cuestionario “calentando motores”. Posteriormente, se conforman los grupos y realizan la etapa 1, que consiste en lanzar el dado 10 veces. Luego se debe completar el cuestionario individual “Vuelta #1” para luego reunirse en grupos para responder el cuestionario grupal y finalizar la sesión con cierre y conclusiones por parte del docente.

La segunda sesión inicia con la organización de los grupos y la etapa 2, que consiste en 50 lanzamiento adicionales del dado; sumados a los 10 anteriores, se completan 60 lanzamientos, con estos resultados en grupos responden el cuestionario “Vuelta #2”. A continuación, se realiza una etapa de socialización y explicación por parte del docente, seguida de la etapa 3 con 60 lanzamientos más, alcanzando un total de 120 resultados para dar respuesta al último cuestionario grupal “Vuelta #3”. La sesión y la actividad culminan con cierre y conclusiones. Las sesiones juntos con los tiempos propuestos se resumen en la Figura 2 y 3.

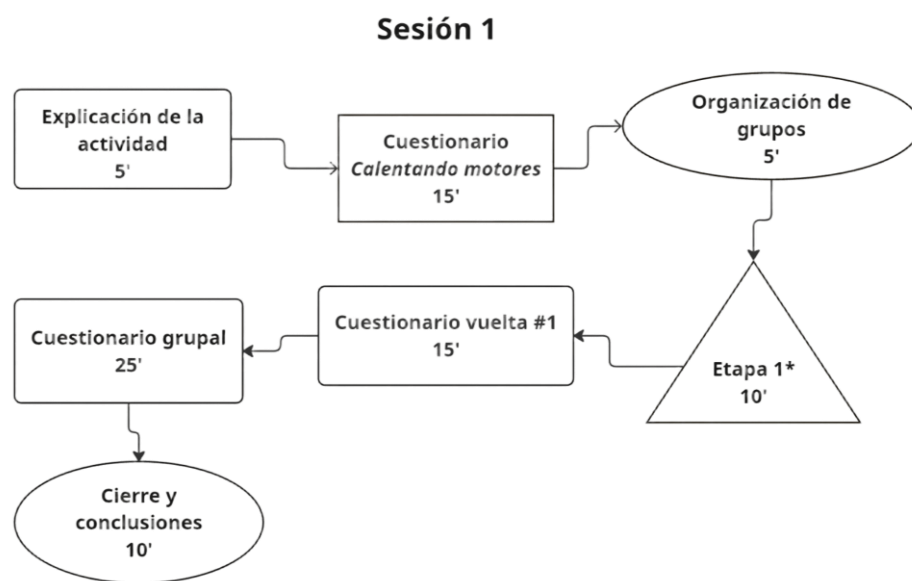
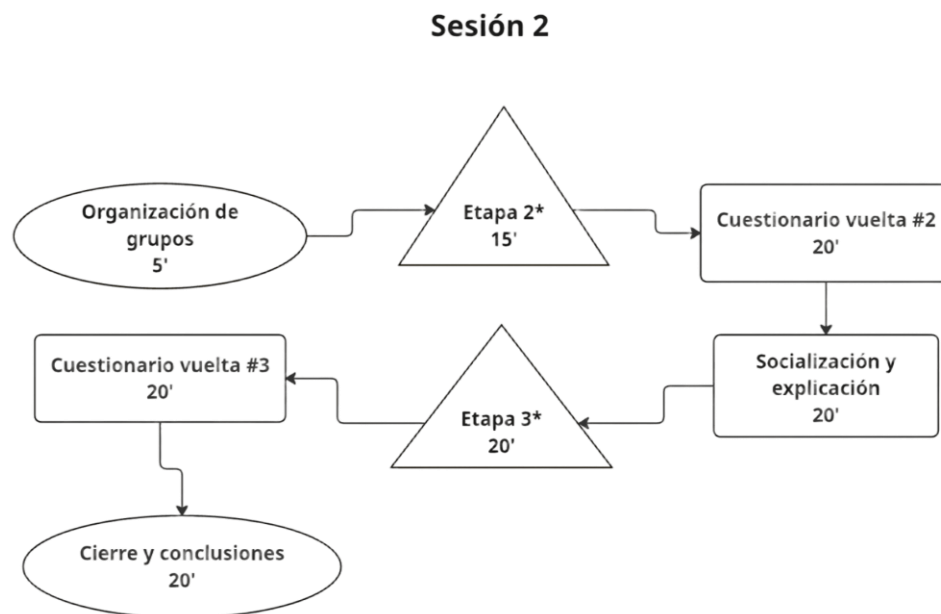


Figura 2: Descripción de la sesión 1

**\*Etapa 1:** Lanzar el dado 10 veces (todo el integrante 1).

Tiempo total: 85 minutos, se disponen de 100 minutos entonces se da ese margen por si necesita más tiempo en determinada actividad.



*Figura 3: Descripción de la sesión 2*

**\*Etapa 2:** Lanzar el dado 50 veces más (20 veces el integrante 2, 20 veces el integrante 3 y 10 veces el integrante 1).

**\*Etapa 3:** Lanzar el dado 60 veces más (20 veces cada uno de los integrantes).

Tiempo total: 120 minutos.

**Nota.** Si el docente lo considera conveniente puede separar la secuencia didáctica en más sesiones, esto dependerá del tiempo que se tenga disponible y del plan curricular.

### 2.2.1 Conformación de los grupos

Se estructura en la formación de grupos de trabajo, cuyo tamaño dependerá de la cantidad de estudiantes en el salón, aunque se sugiere que oscile entre tres y cuatro integrantes por grupo, siendo ideal para los roles a asignar como se observa en el Cuadro 1, que deberán rotar en las diferentes etapas de la secuencia pedagógica. La organización de los grupos puede realizarse de manera autónoma por los estudiantes o ser decidida por el docente. Una vez conformados, los grupos seleccionarán un nombre que los identifique,

fomentando así el sentido de pertenencia. Además, se les indicará la elección de un líder, cuya responsabilidad será recibir y entregar el material necesario en cada instancia.

**Cuadro 1.** Roles dentro de cada grupo

<b>Rol</b>	<b>Descripción de la tarea</b>	<b>Responsabilidades específicas</b>
Lanzador del dado	Realiza los lanzamientos del dado de manera controlada y visible para todos los integrantes del grupo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lanzar el dado.</li> <li>• Mostrar el resultado de cada lanzamiento.</li> <li>• Avisar a los registradores.</li> </ul>
Registrador en el dispositivo de conteo	Coloca una chaquirita del color correspondiente en la barra asociada al número que salió en el lanzamiento.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar el color correspondiente a cada número.</li> <li>• Colocar la chaquirita en la barra adecuada inmediatamente después del lanzamiento.</li> </ul>
Registrador en la tabla de registro	Anota manualmente en la tabla los resultados de cada lanzamiento para llevar un control paralelo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Escribir de forma clara y ordenada el resultado de cada lanzamiento.</li> <li>• Mantener la tabla actualizada en todo momento.</li> <li>• Comparar sus datos con el dispositivo de conteo para detectar posibles errores.</li> </ul>

### **2.3 Articulación de las etapas en la secuencia didáctica**

En este apartado, se presenta una detallada descripción paso a paso de la secuencia didáctica diseñada con el propósito de enriquecer el proceso educativo en la enseñanza de conceptos de probabilidad. Desde su inicio hasta su conclusión, cada etapa de la secuencia se abordará meticulosamente, proporcionando una visión integral de la dinámica y la interacción que caracterizan esta experiencia didáctica.

#### **Descripción de las etapas**

La dinámica de la secuencia didáctica implica el registro de los resultados obtenidos al lanzar un dado, que tendrá ocho caras para algunos grupos y doce para otros. Para ello, se entregará a cada grupo una bolsa con chaquiras de colores (véase Anexo [J](#), Figura 26) y un dispositivo de conteo (véase Anexo [J](#), Figura 25). En este dispositivo, cada grupo deberá colocar una chaquira en la barra correspondiente por cada resultado obtenido en los lanzamientos.

Una vez completado el registro en cada etapa, los estudiantes deberán responder cuestionarios individuales y grupales para fomentar la participación y la reflexión sobre los conceptos trabajados. Cabe aclarar que existen dos versiones de cada cuestionario: una para el dado de ocho caras y otra para el de doce; no obstante, ambos instrumentos evalúan los mismos contenidos conceptuales.

En caso de que el grupo esté compuesto por más o menos integrantes, se realizarán los ajustes necesarios para distribuir equitativamente las tareas asignadas. Finalmente, es importante destacar que no deben retirarse las chaquiras previamente colocadas en el dispositivo de conteo en cada etapa, ya que los lanzamientos se acumularán progresivamente hasta alcanzar un total de 120 registros al finalizar la secuencia.

A continuación, se describen en detalle cada una de las etapas.

**Etapas 0:** La primera etapa, denominada “Calentando motores”, consiste en que los estudiantes respondan un total de seis preguntas tras observar únicamente el dado que les ha sido asignado (véanse los Anexos [A](#) y [B](#)). Esta fase debe ser evaluada y, al finalizar, se promediarán los puntajes de los integrantes de cada grupo. Estos resultados determinarán las posiciones iniciales antes de comenzar las vueltas en las etapas siguientes.

**Etapas 1:** El líder de cada grupo realizará diez lanzamientos del dado; otro integrante será responsable de registrar los resultados en el dispositivo de conteo, y un tercero se encargará de anotar los datos en el cuestionario “Vuelta #1” (véanse Anexos [C](#) y [D](#)). Este cuestionario, compuesto por cinco preguntas, será resuelto de manera individual. Posteriormente, los grupos se reunirán para responder el “Cuestionario grupal”, conformado por seis preguntas (Véase Anexo [E](#)).

**Etapas 2:** Se realizan 50 lanzamientos adicionales: 10 por parte del líder y 20 por cada uno de los dos integrantes restantes, para completar un total de 60 resultados. Recordar que

los roles para registrar en el dispositivo de conteo y en los cuestionarios se irán rotando entre los miembros del grupo. En esta fase, cada grupo deberá responder el cuestionario “Vuelta #2”, compuesto por siete preguntas (véase el Anexo [E](#) y [G](#)).

**Etapas 3:** Finalmente, se llevarán a cabo 60 lanzamientos más: 20 por cada integrante –o ajustado a la cantidad de integrantes del grupo– para completar en total de 120 lanzamientos, y nuevamente rotando los roles para el registro en el dispositivo de conteo y en el cuestionario asociado a esta etapa. Después de los lanzamientos, los grupos deben responder en conjunto las preguntas del cuestionario “Vuelta #3” (véase Anexos [H](#) y [I](#)).

Es fundamental señalar que al concluir cada etapa se dedicará un tiempo a la explicación y la reflexión, dirigidas por el docente. Durante el desarrollo de las actividades, se introducen e ilustran conceptos clave de probabilidad, estableciendo una conexión directa con el juego para favorecer una comprensión más profunda por parte de los estudiantes.

La entrega de puntajes al término de cada etapa constituye un componente esencial de la estrategia, ya que se presenta la tabla de resultados antes de iniciar la siguiente sesión, lo que fomenta una competencia sana entre los grupos. La revelación de los puntajes acumulados y la posibilidad de obtener recompensas en la asignatura de matemáticas se proyectan como elementos motivadores que pueden incidir positivamente en el rendimiento de los estudiantes en actividades futuras.

Este enfoque estratégico no solo fomenta la participación, sino que también fortalece el compromiso de los estudiantes, contribuyendo de manera significativa al éxito general de la experiencia lúdico-pedagógica y al cumplimiento de las metas educativas planteadas.

## 2.4 Diseño de los cuestionarios

En este apartado se presentará la intencionalidad general de las preguntas del primer cuestionario, diseñado para los dados de ocho y doce caras. A manera de simplificación, el análisis se centrará en las preguntas del dado de ocho caras, dado que ambas versiones comparten la misma intencionalidad. Solo se hará referencia específica al dado de doce caras cuando la pregunta lo requiera. En cuanto a los demás cuestionarios, se analizará

cada pregunta de manera general, sin detenerse en si corresponde al dado de ocho o de doce caras, salvo cuando resulte estrictamente necesario.

### **2.4.1 Diseño del cuestionario individual para la Etapa 0 (Calentando motores)**

- *Pregunta 1: ¿Cuántos y cuáles resultados posibles puedes obtener al lanzar el dado? Descríbelos todos.*

Para el dado de 8 y 12 caras esta pregunta tiene dos propósitos: (1) evaluar la comprensión del concepto de espacio muestral en un experimento aleatorio simple; y (2) observar si el estudiante enumerará exhaustivamente los elementos del espacio muestral y si usará correctamente la notación de conjuntos al representarlo. Esto permitirá identificar el nivel de precisión formal en el lenguaje matemático que emplea el estudiante.

- *Pregunta 2: ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salen más? Justifica tu elección.*

Para ambos dados esta pregunta busca explorar la comprensión del concepto de equiprobabilidad en un experimento aleatorio simple. El propósito principal es que el estudiante reconozca si, al tener un dado de ocho o doce caras “justo”, responde que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, que son igualmente probables, y no basa su respuesta en intuiciones, creencias o concepciones erróneas de cualquier otro tipo. Al pedirles que justifiquen su elección, se podrá observar el nivel de razonamiento probabilístico y las posibles herramientas matemáticas que el estudiante utiliza en su argumento.

- *Pregunta 3: ¿Es posible que con 10 lanzamientos del dado haya números sin salir? Explica tu respuesta.*

Para el dado de 8 caras el objetivo de esta pregunta es averiguar si el estudiante es consciente de que, en el experimento planteado (lanzar un dado), los resultados pueden variar. El objetivo ideal es que el estudiante sea consciente de que, aunque todos los números tienen la misma posibilidad de salir, no siempre van a salir todos cuando se hace un número limitado de intentos. Al solicitarle que explique su respuesta, se espera que

describa la diferencia cuando se lleva el experimento a la práctica. Esto último mostraría una gran interpretación del azar. A un nivel más teórico y avanzado, esta pregunta permite identificar si el estudiante comprende que la frecuencia relativa puede diferir de la probabilidad teórica, especialmente en este caso, con tan pocos lanzamientos.

Para el dado de 12 caras se busca que el estudiante reflexione sobre la relación entre el tamaño del espacio muestral y la cantidad de repeticiones del experimento. Dado que el número de posibles resultados (12) es mayor que la cantidad de intentos (10), se espera que todos los estudiantes mencionen que es seguro que haya resultados sin salir. Es decir, que mencionen los dos argumentos: que el número de resultados supera la cantidad de lanzamientos y que los resultados pueden concentrarse en ciertos números y no salir, incluso si la cantidad de lanzamientos es mayor que el espacio muestral.

- *Pregunta 4: ¿Qué esperas observar en el dispositivo de conteo a medida que juegues? ¿Algún patrón al realizar varios lanzamientos y registrarlos en el dispositivo? Realiza un dibujo si lo consideras necesario.*

Para los dos tipos de formularios esta pregunta indaga si el estudiante es capaz de prever lo que puede ocurrir con un dispositivo de conteo que muestra la frecuencia con la que aparece cada número del dado. El objetivo es que el estudiante reflexione sobre la aparición de patrones o regularidades a medida que se realicen más lanzamientos, sin perder de vista que cada lanzamiento es independiente y aleatorio.

Aunque es ambicioso –y es el objetivo general del juego–, se espera que el estudiante sea consciente de que, aun cuando los resultados son aleatorios y equiprobables, conforme aumente el número de lanzamientos las frecuencias tienden a equilibrarse entre los resultados posibles del dado. Al tener la opción de hacer un dibujo, se puede observar qué capacidad tiene el estudiante para interpretar gráficamente los datos. Esta pregunta es fundamental en el juego, ya que permite vincular la experiencia de los estudiantes con ideas básicas o empíricas sobre la probabilidad frecuencial.

- *Pregunta 5: ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2 en este dado? Realiza las cuentas necesarias.*

Para el dado de 8 caras esta pregunta evalúa la comprensión del concepto de probabilidad clásica aplicado a un evento simple. Se espera que el estudiante identifique que en el dado solo hay un resultado favorable posible, “una cara”, con el número dos, por lo que tendrá un solo resultado favorable dentro de un espacio muestral de ocho resultados igualmente probables. Al solicitarle las cuentas, se pretende ver si aplica la fórmula básica de la probabilidad:

$$P(\text{Evento}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{8}$$

También se valorará si muestra el resultado de forma numérica, en forma de fracción, decimal o porcentaje, o si lo hace de las tres maneras. Esto indicaría un nivel de automatización del procedimiento, así como el nivel de argumentación con bases matemáticas sólidas, y el uso correcto de la notación en los diferentes momentos del procedimiento de la respuesta.

Para el dado de 12 caras también se aborda el tema de la probabilidad desde una definición clásica. Se espera que el estudiante sea capaz de identificar que hay un solo caso favorable entre doce posibles y que pueda aplicar correctamente la fórmula:

$$P(\text{Evento}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{12}$$

- Pregunta 6: *¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 6? Realiza las cuentas necesarias.*

Para el dado de 8 caras esta pregunta trata el tema de la probabilidad de un evento compuesto. En este caso, se espera que el estudiante identifique correctamente los tres casos favorables (6, 7 y 8) y los relacione con el total de ocho posibles resultados (del 1 al 8). De nuevo, debe utilizar la fórmula clásica de probabilidad:

$$P(\text{Evento}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{3}{8}$$

Se espera que, al pedirle las cuentas, logre mostrar el resultado en forma de fracción, decimal y/o porcentaje. Esto último sería un agregado, ya que el objetivo principal consiste en que el estudiante comprende cómo contar adecuadamente los elementos de un evento, más allá del reconocimiento de un solo resultado, y si puede expresarlo con una notación

matemática correcta. De forma similar sucede con el dado de doce caras, donde el número de casos favorables son siete (los números 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12).

### 2.4.2 Diseño del cuestionario individual para la Etapa 1 (Vuelta #1)

En la parte inicial de este cuestionario los estudiantes deben completar una tabla. El propósito de esta tabla es organizar y sistematizar los datos obtenidos en esta etapa. Cada columna representa uno de los posibles resultados y en las filas los estudiantes podrán registrar:

- *Frecuencia*: la cantidad de veces que apareció cada número al lanzar el dado diez veces.
- *Frecuencia relativa*: proporción de veces que apareció cada cara del dado con respecto al total de lanzamientos.
- *Porcentaje*: expresión de la frecuencia relativa en términos de porcentaje.

Esta tabla también pretende reforzar los conceptos anteriormente mencionados y su relación con la probabilidad desde una definición frecuentista. Esta tabla es un insumo indispensable para comparar visualmente las frecuencias y reflexionar sobre los cambios entre los resultados. En las otras etapas, al lanzar 50 y 60 veces, se podrán generar conclusiones con las tablas correspondientes.

- *Pregunta 1: ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

El propósito de esta pregunta es observar cómo los estudiantes analizan los datos empíricos que recogieron del experimento aleatorio. Después de lanzar diez veces el dado de ocho caras o doce caras y registrar los datos en el dispositivo de colores, se espera que el estudiante identifique cuáles fueron los valores modales. Aquí se puede analizar qué entienden los estudiantes por “salir más”.

- *Pregunta 2: ¿Por qué uno o varios resultados del dado salen más que otros? Justifica tu respuesta*

Esta pregunta invita al estudiante a reflexionar sobre el azar y a explicar por qué en un experimento aleatorio algunos resultados pueden repetirse más que otros. Es importante destacar que, aunque todos los resultados tienen la misma probabilidad teórica de ocurrir, en la práctica pueden presentarse repeticiones al ser pocos lanzamientos. Esta distinción nos permite introducir propiedades asociadas al concepto de probabilidad desde una perspectiva frecuencial.

- *Pregunta 3: Con los 10 lanzamientos, ¿hubo algún resultado sin salir? ¿Por qué crees que esto sucede?*

Esta pregunta se hace para que los estudiantes analicen los resultados tras lanzar diez veces el dado de ocho o doce caras, con el fin de observar si algún número del espacio muestral no salió. Así, se espera que los estudiantes expliquen por qué ocurre esto. Es importante ver y analizar los argumentos dados para ver si sostienen creencias u otro tipo de argumentos sin fundamento matemático.

- *Pregunta 4: ¿Observas algún patrón en las alturas de las barras en el dispositivo de conteo?*

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes interpreten visualmente la distribución de frecuencias obtenida a través de las alturas de las barras que muestran el dispositivo de conteo. Esta pregunta es importante porque en las siguientes etapas del experimento se lanzará el dado más veces, lo que permitirá a los estudiantes comparar cómo cambian las alturas de las barras al aumentar el número de repeticiones.

- *Pregunta 5: Si lanzas nuevamente 10 veces el dado, ¿esperas obtener el mismo registro en el dispositivo de conteo? Explica tu respuesta. ¿Por qué esperarías obtener lo mismo? ¿Por qué no?*

El objetivo es que el estudiante comprenda que, aunque el dado no ha cambiado y cada cara sigue teniendo la misma probabilidad teórica, los resultados pueden variar en cada repetición y lanzamiento. Que logre justificarlo con herramientas matemáticas será importante para las etapas posteriores y la retroalimentación correspondiente.

### 2.4.3 Diseño del cuestionario grupal para la Etapa 1

- Pregunta 1: *Juntos observen el dispositivo de conteo. ¿Cuál es el resultado más frecuente y menos frecuente?*

En un cuestionario grupal, esta pregunta tiene como finalidad que los estudiantes interpreten colectivamente la información que arroja el dispositivo de conteo tras los lanzamientos y las respuestas en la “Vuelta #1”, identificando el número que más veces apareció, es decir, el de mayor frecuencia; y el que apareció menos veces, el de menor frecuencia. En adición, como deben analizar los datos de manera conjunta, van a trabajar sus habilidades comunicativas y de discusión matemática en grupo, lo que debería fortalecer el aprendizaje.

- Pregunta 2: *Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder la pregunta 2 en el cuestionario “Vuelta #1” por los integrantes del grupo.*

Con esta pregunta, se pretende que los estudiantes hagan una revisión crítica de sus aportaciones individuales en la etapa previa. Al solicitarles que enumeren y describan similitudes y diferencias, se está trabajando parte de su análisis argumentativo en un contexto matemático. Se espera que se generen discusiones si hay diferencias muy marcadas, lo que dará lugar a una reflexión que hará que el aprendizaje sea más significativo. Por último, esta pregunta permitirá recopilar, de manera general, si los estudiantes basaron sus respuestas en nociones probabilísticas, suposiciones o ideas erróneas.

- Pregunta 3: *Juntos observen el dispositivo de conteo: ¿Cuál o cuáles de los resultados no salieron ni una vez? En conjunto escriban un argumento de porqué esto pudo suceder.*

Esta pregunta invita al grupo a observar detenidamente los resultados obtenidos en la primera etapa a partir del dispositivo de conteo, con el fin de identificar si hay resultados que no aparecieron. Al solicitarles un argumento colectivo, se valora su capacidad para justificar con herramientas matemáticas básicas y para utilizar el lenguaje técnico. Además, esta pregunta permite evaluar si los estudiantes logran enriquecer sus respuestas a partir

de las retroalimentaciones recibidas, lo que evidencia una evolución en su comprensión del fenómeno aleatorio.

- *Pregunta 4: Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el patrón observado por cada integrante al responder la pregunta 4 en el cuestionario “Vuelta #1”.*

Esta pregunta busca que los estudiantes comparen las observaciones individuales que realizaron en la “Vuelta #1”, en este caso, para ver si detectaron algún patrón en las alturas de las barras del dispositivo de conteo. Al solicitarles que enumeren y describan diferencias y/o semejanzas, se pretende que el grupo en general discuta sobre la distribución de las alturas de las barras, lo que dará lugar a un pensamiento crítico sobre lo observado. Se espera además que esto permita ver el nivel de comprensión que tienen los estudiantes sobre la frecuencia y la aleatoriedad al manejar los argumentos de manera grupal.

- *Pregunta 5: Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder si se espera o no obtener el mismo patrón.*

Esta pregunta permite valorar los argumentos y razonamientos individuales y grupales al considerar las posibles creencias, intuiciones o errores que puedan presentarse al dar un argumento matemático sobre la naturaleza aleatorio de los experimentos. Además, permite observar si los estudiantes logran vincular sus respuestas con ideas previamente discutidas a medida que se avanza en la secuencia didáctica.

- *Pregunta 6: ¿El resultado más frecuente y menos frecuente cambiará si lanzó más veces el dado? De un argumento justificando su respuesta. Por ejemplo, si lo lanzan 50 veces más, ¿cambiará?*

Esta pregunta permite valorar los argumentos y razonamientos, tanto individuales como grupales, al explorar las creencias, intuiciones o posibles errores que pueden surgir al justificar matemáticamente la naturaleza aleatoria de los experimentos. También ofrece la oportunidad de observar si los estudiantes logran vincular sus respuestas con las ideas previamente discutidas a lo largo de la secuencia didáctica, lo que evidencia un proceso de construcción progresiva del conocimiento.

### 2.4.4 Diseño del cuestionario para la Etapa 2 (Vuelta #2)

En esta segunda vuelta, el grupo deberá realizar 50 lanzamientos adicionales del dado y registrar los resultados en la tabla, la cual incluye las columnas con los posibles resultados. En las filas, deberán completar la frecuencia, la frecuencia relativa (teniendo en cuenta que el total será de 60 lanzamientos) y el porcentaje, apoyándose en la calculadora. Esta actividad permitirá observar cómo se modifican o estabilizan los datos al aumentar el número de repeticiones y ayudará a consolidar las bases para responder nuevas preguntas que profundicen en la comprensión del concepto de probabilidad desde una visión frecuentista.

- Pregunta 1: *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

Esta pregunta busca que el grupo identifique, a partir de los datos registrados tanto en la tabla como en las alturas de las barras del dispositivo de conteo, cuáles fueron los resultados que aparecieron con mayor frecuencia tras los 50 lanzamientos adicionales del dado. Esto permitirá que los estudiantes se enfoquen en los cambios ocurridos y empiecen a cuestionarse las posibles razones detrás de dichas variaciones. El objetivo sigue siendo fomentar la interpretación de datos y el reconocimiento de tendencias o patrones, ya sea desde el dispositivo de conteo o desde la tabla de frecuencias.

- Pregunta 2: *¿Es posible que en esta etapa aún haya resultados sin salir? Justifiquen.*

El objetivo de esta pregunta es que el grupo reflexione sobre la posibilidad de que, incluso después de realizar un número considerable de lanzamientos adicionales (50), algunos resultados aún no aparezcan. Se espera que los estudiantes piensen sobre la aleatoriedad del experimento y reconozcan que, aunque este escenario es posible, su probabilidad disminuye a medida que aumenta el número de intentos. Asimismo, esta pregunta permite que los estudiantes formulen conjeturas más complejas, como la sospecha de que un dado está cargado o si se presentan patrones anómalos en los resultados.

- Pregunta 3: *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

Esta pregunta busca que todo el grupo de estudiantes analice e interprete los datos registrados en la tabla, específicamente la fila del porcentaje asociado a cada resultado, con el fin de identificar si existe una diferencia numérica considerable entre el valor más frecuente y el menos frecuente. El objetivo principal es que, a medida que avanza la experiencia, empiecen a notar una posible tendencia hacia la uniformidad de estos valores, como se esperaría teóricamente en un dado equilibrado, lo cual se evidenciaría en una diferencia pequeña entre los porcentajes.

- *Pregunta 4: Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras ¿todas están cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.*

Esta pregunta invita al grupo a comparar visualmente las alturas de las barras de chaquiras en el dispositivo de conteo y evaluar si estas se encuentran próximas entre sí. A partir de esta observación, se espera que construyan un argumento que explique la distribución de frecuencias obtenida. El propósito es que los estudiantes se acerquen de manera progresiva a una comprensión intuitiva de la probabilidad desde una perspectiva frecuentista, articulando sus observaciones con una explicación coherente y basada en datos.

- *Pregunta 5: ¿Cambió el resultado más frecuente entre la Vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

En esta quinta pregunta, se propone que los estudiantes comparen las dos tablas iniciales de registro, enfocándose en si el resultado más frecuente se mantuvo o cambió. El objetivo es que el grupo formule explicaciones o conjeturas, apoyándose en herramientas matemáticas, sobre cómo varía la distribución de las frecuencias al aumentar el número de lanzamientos del dado. Esta comparación permite avanzar en la comprensión de posibles regularidades en el comportamiento del dado y, al mismo tiempo, acercarse un poco más a la visión frecuentista de la probabilidad.

- *Pregunta 6: ¿Cambió el resultado menos frecuente entre la Vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

En esta pregunta se pide a los estudiantes que identifiquen si el resultado menos frecuente cambió entre la primera y la segunda vuelta. Al reflexionar sobre este posible cambio, se pretende que el grupo piense en la naturaleza aleatoria del experimento y en cómo, aunque

todos los resultados tienen la misma probabilidad teórica, las frecuencias pueden variar de una ronda a otra. De este modo, se observará que el resultado menos frecuente puede cambiar en cada conjunto de lanzamientos. De esta manera, se continúa fortaleciendo la interpretación de datos y se construye un contexto propicio para introducir, más adelante, la definición frecuentista de probabilidad.

- *Pregunta 7: ¿Cambió la frecuencia relativa del resultado “3” entre la etapa 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

A diferencia de las preguntas anteriores, esta pretende que el grupo de estudiantes compare un resultado específico (la cara del dado con el número 3) entre las dos etapas, centrándose en su frecuencia relativa; es decir, que revisen cuántas veces salió el número 3 en 10 lanzamientos y cuántas veces salió el número 3 en 60 lanzamientos. Con esto, se espera que analicen el cambio de este valor y que profundicen en la comprensión de la aleatoriedad; asimismo, en cómo las frecuencias relativas de las diferentes caras del dado pueden tender a estabilizarse al aumentar la cantidad de repeticiones. Con esto, ya hay varios elementos sobre la mesa para introducir el concepto de probabilidad desde una perspectiva frecuentista.

### **2.4.5 Diseño del cuestionario para la Etapa 3 (Vuelta #3)**

En esta tercera y última vuelta, el grupo deberá lanzar 60 veces más el dado, completando así un total acumulado de 120 lanzamientos. Luego, deberán registrar los resultados en la tabla, diligenciando nuevamente la frecuencia, la frecuencia relativa (con base en los 120 lanzamientos) y el porcentaje, con apoyo de la calculadora. Esta etapa final permitirá observar si los datos tienden a estabilizarse y si las frecuencias relativas se acercan a los valores teóricos esperados, profundizando —y cerrando— la construcción del concepto de probabilidad desde una perspectiva frecuentista.

- *Pregunta 1: ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

El objetivo de esta pregunta es que el grupo identifique, basándose en los datos registrados en la tabla y en el dispositivo de conteo, cuál o cuáles fueron los resultados más frecuentes tras completar los 120 lanzamientos. De este modo, se refuerzan las habilidades de análisis e interpretación de datos, ya que se puede observar si los valores más frecuentes

se mantienen o cambian respecto a las vueltas anteriores. Además, esta observación prepara el terreno para reflexionar sobre la tendencia a la estabilización de las frecuencias con un mayor número de repeticiones.

- *Pregunta 2: ¿Existe una gran diferencia entre la frecuencia del resultado más frecuente y menos frecuente?*

Esta pregunta le pide al grupo de estudiantes que comparen las frecuencias registradas en la tabla después de los 120 lanzamientos y que analicen si existe una diferencia entre el resultado con mayor frecuencia y el resultado con menor frecuencia. El objetivo es que los estudiantes noten, a partir de esta comparación, de que tales diferencias deberían tender a disminuir con un mayor número de repeticiones, acercándose progresivamente a una posible estabilidad. Esta reflexión contribuye a la construcción del concepto de probabilidad desde una perspectiva frecuentista.

- *Pregunta 3: Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras, ¿están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.*

Esta pregunta invita al grupo a observar detenidamente el dispositivo de conteo y a comparar las alturas de las barras tras los 120 lanzamientos. Se espera que los estudiantes construyan un argumento colectivo que explique la posible cercanía entre estas alturas. La comparación visual permite profundizar en la comprensión de la tendencia a la estabilidad de los resultados de los experimentos aleatorios.

- *Pregunta 4: ¿Cambió el resultado más frecuente entre la Vuelta 2 y 3? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes comparen esta etapa con la anterior y determinen si ha habido algún cambio en el resultado más frecuente. Se espera que reflexionen sobre la naturaleza aleatoria del experimento y comprendan, a partir de esta comparación, que, aunque pueden presentarse variaciones, los resultados tienden a estabilizarse al aumentar el número de repeticiones.

- *Pregunta 5: ¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

A partir de los datos recopilados, el grupo de estudiantes debe observar la casilla del porcentaje y comparar los valores correspondientes al resultado más frecuente y al menos frecuente. Se espera que la diferencia entre estos porcentajes sea pequeña, lo que permitirá explicar que, al aumentar el número de repeticiones, las diferencias tienden a reducirse. Es decir, los porcentajes se estabilizan y se acercan al valor teórico esperado para cada resultado del experimento aleatorio propuesto.

- *Pregunta 6: Comparando el dispositivo de conteo, ¿Las alturas de las barras de colores están cercanas? De ser así, construyan un argumento que demuestre lo observado.*

Al completarse los 120 lanzamientos, se espera que los estudiantes observen que, aunque persisten pequeñas diferencias en las alturas de las barras, estas tienden a disminuir con un mayor número de lanzamientos. Esta observación les permitirá argumentar cómo las frecuencias se estabilizan al aumentar las repeticiones. Con esta pregunta, se busca establecer una conexión directa entre lo observado y la explicación teórica de la probabilidad desde una perspectiva frecuentista.

- *Pregunta 7: Con respecto a la Vuelta 1, 2 y 3, ¿Qué pasó con las alturas de las barras? Describan 5 cambios importantes.*

Al revisar y comparar la evolución del dispositivo de conteo a lo largo de las tres etapas, se espera que los estudiantes, en sus respectivos grupos, identifiquen y describan cambios cómo los siguientes: el aumento en la uniformidad de las alturas de las barras; la reducción de las diferencias entre frecuencias; y las variaciones en los resultados más y menos frecuentes, entre otros. El objetivo es que reflexionen sobre estas transformaciones observadas y, con base en ellas, puedan comprender y explicar el concepto de probabilidad desde una perspectiva frecuentista al finalizar esta etapa.

- *Pregunta 8: Si se hicieran 1000 lanzamientos más, ¿cómo te imaginas que se vería las alturas de las barras en el dispositivo de conteo? Describan con palabras lo que piensan y realicen un dibujo detallando la situación hipotética.*

Esta pregunta pretende que los estudiantes proyecten lo que han venido observando en las etapas anteriores hacia una situación hipotética con muchos más lanzamientos. Al

pedirles que se imaginen cómo se verían las alturas de las barras si se realizaran 1000 lanzamientos más, se espera que respondan que las diferencias se reducirían aún más y que las alturas de las barras tenderían a ser más similares. Esto refuerza la idea de que con más repeticiones los resultados se estabilizan, y ayuda a concluir el trabajo y la explicación de esta etapa desde una perspectiva frecuentista de la probabilidad. El dibujo les permite representar gráficamente esa predicción y mostrar su comprensión del fenómeno.

## Capítulo 3: Resultados de la aplicación del juego

En este capítulo se exponen y analizan los resultados obtenidos en dos grupos de quinto de primaria tras implementar la secuencia pedagógica diseñada. Se describen las respuestas de los estudiantes y los procesos observados en cada una de las etapas de la intervención. El análisis busca poner de manifiesto tanto los avances conceptuales como las dificultades presentadas, lo que permite una visión integral del impacto de la propuesta didáctica en el aprendizaje de los estudiantes.

### 3.1 Conformación de los grupos

Ambos grupos son de 22 estudiantes, lo que permitió formar 6 grupos de 3 estudiantes y un grupo de 4 estudiantes en cada salón. Los grupos fueron elegidos por el docente, quien basó su elección en las características y conocimientos previos que tenía sobre los estudiantes. Además, con el objetivo de fomentar un sentido de pertenencia y una competencia sana entre los estudiantes, cada grupo seleccionó un nombre que los representaría en las diferentes etapas del proceso (ver Cuadro 2).

**Cuadro 2.** Tamaño y denominación de grupos

Curso 5A (22 estudiantes)		Curso 5B (22 estudiantes)	
Nombre de la escudería	No. integrantes	Nombre de la escudería	No. integrantes
Hala Madrid	3	Las smurfcats	3
Liberty Walk	3	Tiburoncin	3
Las papitas	3	Fornite a la papayea	4
Gaisva	3	Chubchilios	3
SRMD	3	Los momos del google	3
Las potatoes	3	Los motilones	3
Sm	4	The stars	3

### 3.2 Identificación de conocimientos previos

En la presente sección se presentan los resultados de la aplicación del cuestionario “Calentando motores”, cuyo objetivo es identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre los conceptos necesarios para introducir las nociones básicas de probabilidad. Este análisis responde al primer objetivo específico del trabajo, orientado a diagnosticar el nivel de comprensión inicial de los estudiantes. Las respuestas se agrupan por categorías y se analizan con el fin de reforzar y aclarar conceptos en las etapas posteriores.

Pregunta 1: *¿Cuántos posibles resultados puedes obtener al lanzar el dado? Descríbelos todos.*

A continuación, se encuentran las respuestas agrupadas por categorías (ver Tabla 3):

**Tabla 3.** Categorías de respuestas de la pregunta 1 cuestionario “calentando motores”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Describe correctamente cuántos y cuáles	19	12	7	"Cuántos: 12, Cuáles: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12", "8 opciones y 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 los resultados", "1 2 3 4 5 6 7 8 hay 8 resultados posibles"
Describe cuántos, pero no cuáles	3	1	2	"12 resultado posibles". "Serían 8"
Dice cuáles, pero no cuántos	6	3	3	"1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8", "(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)"
Describe incorrectamente cuántos o cuáles y/o tiene errores en la forma de dar la respuesta	14	6	8	"0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11", "Hay 36 resultado posibles", "1/8 puede haber 8 posibles resultados", "1/8 y 1/12" "1/8, 2/8, 3/8, 4/8,5/8, 6/8,7/8,8/8 "

Con respecto a esta pregunta, se obtuvieron un total de 42 respuestas debido a la inasistencia de algunos estudiantes, lo que determina aproximadamente un 67 % de estudiantes que responden adecuadamente que hay 8 posibilidades o 12 posibilidades, respectivamente, para el dado de 8 y 12 caras, o que mencionan los resultados posibles. Se destacan tres respuestas. Una estudiante escribió lo siguiente:

Podrían ser “8” si no se repiten y, si se repiten, podrían ser “16”. No sabría cuántos resultados habría, ya que puede que el “4” salga de dos a ocho veces. Me refiero a que los números pueden salir hasta cinco veces.

Esta respuesta muestra que la estudiante relaciona la pregunta sobre cuántos y cuáles resultados se pueden obtener al lanzar el dado con el experimento de lanzarlo, en lugar de pensar previamente cómo se comporta.

En una segunda respuesta, se cita textualmente: “Puede salir 5, 4, 10, 3 o 2 porque, digamos, son los números que más salen”. En este caso, se observa la creencia de que hay números que salen más que otros y que se descartan en los posibles resultados aquellos que, según el estudiante, salen menos.

Por otra parte, se destaca una respuesta de un estudiante que tenía un dado de ocho caras. Este estudiante escribió los números del 1 al 8 como la gran mayoría, pero añadió: “Y es poco probable que salga cualquier resultado” y mostró la división  $1/8 = 0,125$  para justificar su respuesta. Esta respuesta evidencia un buen dominio del concepto de espacio muestral y de probabilidad de un evento. Es importante señalar que ningún estudiante utilizó la notación de conjuntos de manera precisa.

Finalmente, aproximadamente un 33 % de los estudiantes no describió correctamente el conjunto de resultados posibles y, en su gran mayoría, fue porque pensaron en probabilidad y no se centraron en mostrar el espacio muestral. Es necesario reforzar dicho concepto antes de pasar a la siguiente etapa.

- Pregunta 2: *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado saldrán más? Justifica tu elección.*

A continuación, se muestran los resultados agrupados por categorías (ver Tabla 4):

**Tabla 4.** Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario “calentando motores”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Menciona la equiprobabilidad del dado	11	8	3	"Ninguno más que otro porque solo hay 1 cara por cada número", "Todos pueden salir en el dado cada número tiene la misma probabilidad de salir"
Atribuye el resultado a las características de los números	5	3	2	"Puede ser números impares más que pares, porque lancé un dado y salió más impares que pares, pero hay la misma posibilidad de impar o par", "Yo digo que va a salir más el 8 porque es un número par",
Responde por creencias personales o gustos	14	5	9	"Yo creo que el que va a salir más va a ser 7", "4 porque es el número de la suerte y es más probable para mí", "El 5 porque me gusta mucho"
Respuestas sin justificación válida	12	6	6	"2, ya que lo máximo es 12", "5,4,3,6 porque son los más altos de la categoría", "11 porque al momento de entregarnos salió 11", "No hay un número que yo este seguro que saldrá porque eso sucede al azar y es cuestión de (como botes el dado) suerte y eso ningún ser humano lo puede controlar o adivinar"

Con respecto a esta pregunta, las respuestas son variadas, pero muchas tienen en común que los estudiantes, según sus creencias y experiencias con los dados, ya tienen algunos números que consideran que salen con mayor frecuencia. Estas respuestas muestran que las creencias personales están presentes en los estudiantes (alrededor del 33 %) y resaltan la necesidad de reforzar los conceptos de probabilidad. Es esencial proporcionar a los estudiantes herramientas matemáticas que les permitan justificar sus respuestas de manera adecuada.

Muchas de estas respuestas no incluyen una justificación, o al menos no una justificación matemática. Por lo tanto, es fundamental trabajar la comprensión de los conceptos de espacio muestral y probabilidad para que los estudiantes puedan abordar estas preguntas desde un punto de vista matemático y dejar de lado las creencias subjetivas para basarse en análisis probabilísticos correctos.

Finalmente, en esta pregunta solo se obtuvo un par de respuestas que se acercan a lo esperado, aproximadamente un 26 % de acierto. Uno de los estudiantes menciona: "Todos pueden salir en el dado; cada número tiene la misma probabilidad de salir". Esta respuesta

demuestra un buen entendimiento probabilístico, ya que no se elige un número específico y se menciona la equiprobabilidad. Esta respuesta es correcta desde el punto de vista matemático, ya que, en un dado justo, cada cara tiene la misma probabilidad de salir en un lanzamiento. Cabe destacar que solo un estudiante mencionó las palabras “azar” y “aleatorio” en su respuesta.

- Pregunta 3: *¿Es posible que con 10 lanzamientos del dado haya números sin salir? Explica tu respuesta.*

A continuación, se encuentran las respuestas agrupadas por categorías (ver Tabla 5).

**Tabla 5.** Categorías de respuestas de la pregunta 3 cuestionario “calentando motores”

Categoría	Frecuencia observada				Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría		
	Total	5A		5B		Dado 8 caras	Dado 12 caras
		Dado 8 caras	Dado 12 caras	Dado 8 caras	Dado 12 caras		
Dice que sí por las razones correctas	23	7	4	6	6	"Puede ser que en 10 lanzamientos no salgan algunos números porque son probabilidades iguales", "Sí, puede pasar que salga números repetidos y no salgan los demás"	"Sí debido a que hay 12 números entonces con 10 lanzamientos no pueden salir todos", "Sí porque pueden ser repetidos"
Dice que sí por razones incorrectas	14	3	4	5	2	"Sí porque puede que se tire el dado de la misma manera", "Yo pienso que sí, ya que, los números que menos salen pienso que son 1 y 3 entonces son poco probable de que salgan esos 2 números"	"Sí ya que lo máximo es 12", "Sí se puede porque el dado es de 12 y si lanza 10 veces puede que falten 2 números por salir"
Dice que no por diferentes razones	5	2	2	1	0	"No porque nuestro dado llega a 8 y lanzamos el dado 2 números se van a repetir"	"No porque al ser más lanzamientos, todos van a salir"

En este punto, debido al tipo de pregunta y al uso de dados de 8 y 12 caras, se observa una mayor variedad de respuestas. Alrededor de un 54 % de los estudiantes analizó sus

posibilidades y, en su mayoría, relacionó el número de caras del dado con el número de lanzamientos. Para los grupos con el dado de 8 caras, algunos de los comentarios fueron: “Puede que sí y puede que no, pero yo digo que no porque en 10 lanzamientos podrían haberse mostrado los 8 números o puede que no”.

Estas respuestas indican que los estudiantes comprenden que es posible que algunos números se repitan y que no todos los números necesariamente aparezcan en diez lanzamientos. Sin embargo, alguna de las respuestas incorrectas fue: “No, porque nuestro dado llega a 8 y lanzamos el dado 10 veces, entonces 2 se van a repetir”. Esta respuesta y otras muestran una confusión entre el espacio muestral y el experimento aleatorio de lanzar el dado 10 veces, algo que ocurrió en menos estudiantes.

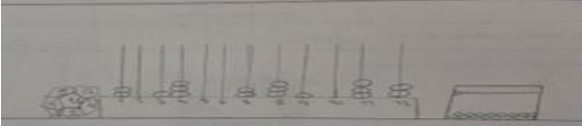
En el caso del dado de 12 caras, la mayoría de los estudiantes respondieron que es posible que algunos números no aparezcan en los lanzamientos, justificándose por el hecho de que hay más caras que lanzamientos. Aunque esta justificación es válida, plantea la duda de si los estudiantes podrían dar una respuesta acertada si el número de lanzamientos fuera igual o mayor que el número de caras.

- Pregunta 4: *¿Qué esperas observar en el dispositivo de conteo a medida que juegues? ¿Algún patrón al realizar varios lanzamientos y registrarlos en el dispositivo? Realiza un dibujo si lo consideras necesario.*

A continuación, se encuentran las respuestas agrupadas por categorías (ver Tabla 6).

**Tabla 6.** Categorías de respuestas de la pregunta 4 cuestionario “calentando motores”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Describe un comportamiento específico	13	8	5	"Unos palitos llenos, otros no tanto, y otros vacíos", "que un palo se llene más rápido", "Que al lanzar el dado muchas veces se van a igualar las cantidades de veces que haya salido un número"
Describe algo por creencias	7	4	3	"Espero observar que cada palito tenga 2 chaquiras", "Yo creo que un número saldrá muchas veces", "Que no se repitan tanto los números, puede que salgan varias veces los primos e impares"

Realizó el dibujo solamente	14	7	7	
				<i>Figura 4. Dibujo como respuesta a la pregunta 4 del cuestionario "calentando motores"</i>
Dice no saber qué esperar o no espera un patrón	8	3	5	"No sé qué números se van a repetir", "no tengo conocimiento", "No espero una gran mayoría de patrones".

Con respecto a las respuestas, 14 estudiantes solo respondieron con un dibujo, lo que no permitió evidenciar con mayor detalle su pensamiento con respecto al patrón. Sin embargo, todos los dibujos muestran diferentes alturas en las chaquiras del dispositivo de colores. También cabe considerar que siete estudiantes han traído sus creencias a los resultados que se colocarán en las chaquiras, lo que hace suponer que no hay un pensamiento matemático con respecto a la situación. Como aspectos a mejorar, es mejor dar alternativas de dibujos y ver cuál elegirán con respecto a qué pueda pasar; esto daría una idea más profunda de lo que piensan antes de jugar.

Finalmente, pese a que no hay una respuesta correcta para esta pregunta, muchos ofrecieron una idea de lo que podría suceder pues no se les dijo el número exacto de lanzamientos; aunque sí mencionaron algunos patrones o comportamientos a seguir. Casi todos concuerdan en que no habrá algo estable a medida que lancen. Solo un estudiante mencionó que, a medida que se hagan más lanzamientos, las torres de chaquiras se igualarán. Este es uno de los objetivos que los estudiantes deberán descubrir a medida que jueguen en las siguientes etapas.

- Pregunta 5: *¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2 en este dado? Realiza las cuentas necesarias.*

En la siguiente tabla se recogen las respuestas de los estudiantes (ver Tabla 7):

**Tabla 7.** Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario "calentando motores"

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	

		Dado 8 caras	Dado 12 caras	Dado 8 caras	Dado 12 caras	Dado 8 caras	Dado 8 caras
Da la probabilidad correctamente de manera numérica	19	6	4	5	4	"1/8 ya que solo hay una cara de 2 en un total de 8 caras", "1/8 =0,125=12,5 %"	"Hay una probabilidad de 1/12 que en probabilidad es 8,3 %. Decimal: 0,083", "La probabilidad es de 1/12 porque solo hay un 2 de 12 números"
Describe con palabras la probabilidad solicitada	4	1	1	1	1	"La misma probabilidad que tienes para que sea otro número", "Poco probable de que suceda"	"Es muy baja la probabilidad ya que hay bastantes números", "Es poco probable ya que hay muchos números"
Da la probabilidad de manera incorrecta numéricamente o con palabras	19	5	5	6	3	"2/8=25 %", "Es de 2/6 o es poco probable"	"2/12=0,16=16 %", "Hay 12 % de posibilidad"

De la Tabla 7 se desprende que hay un equilibrio entre las respuestas correctas e incorrectas. Es importante señalar que, en el dado de ocho caras, se preguntó por la cara con el número 2, por lo que muchos asociaron este valor a que había dos posibles resultados de los ocho en total, lo cual fue el error más común que incluso se repitió en el dado de doce caras.

Aproximadamente el 45 % planteó correctamente la probabilidad; sin embargo, muchos escribieron la fracción, el decimal y el porcentaje. Es importante resaltar en la explicación o retroalimentación que esto mejora la comprensión numérica y permite trabajar la división y la conversión entre fracción, decimal y porcentaje. Cabe indicar que es importante pedir un resultado numérico en esta pregunta, puesto que, en expresiones verbales, términos como poco probable o probable son cualitativos y no permiten establecer una diferencia numérica precisa.

*Pregunta 6: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 6? Realiza las cuentas necesarias.*

En torno a esta pregunta las respuestas se agruparon en las dos categorías que se muestran a continuación, tanto para el dado de ocho caras como para el de doce (ver Tabla 8).

**Tabla 8.** Categorías de respuestas de la pregunta 6 cuestionario “calentando motores”

Categoría	Frecuencia observada				Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría		
	Total	5A		5B		Dado 8 caras	Dado 12 caras
		Dado 8 caras	Dado 12 caras	Dado 8 caras	Dado 12 caras		
Plantea adecuadamente la probabilidad de manera numérica	11	2	2	3	4	"La posibilidad es $\frac{3}{8}$ ", " $\frac{3}{8}=0,375=37,5\%$ ", " $\frac{3}{8}$ porque está el 6,7 y 8"	"Hay una probabilidad de $\frac{7}{12}=0,583$ que en probabilidad es 58,3 %", " $\frac{7}{12}$ probable"
Da la probabilidad de manera incorrecta numéricamente o con palabras	31	10	8	9	4	"Todos tienen la misma probabilidad", "La probabilidad es segura", "es de $\frac{3}{6}$ o poco probable"	" $\frac{6}{12}=0,5$ ", "La probabilidad es de $\frac{6}{12}$ ", "La probabilidad es de $\frac{6}{12}$ porque hay 1 números iguales a 6 y 5 mayores"

Ante la situación propuesta sobre la probabilidad de un evento compuesto con dados de ocho y doce caras, se evidenció que algunos estudiantes comprendieron que debían contar varios resultados favorables para calcular la probabilidad y lo hicieron de manera adecuada. Sin embargo, aproximadamente el 74 % calculó de forma incorrecta el valor numérico de la probabilidad debido a errores en el planteamiento del cociente. Algunos fallaron al contar los casos favorables, mientras que otros solo tuvieron en cuenta el número 6 como resultado favorable. Este último caso resulta especialmente preocupante ya que evidencia una comprensión limitada del concepto de evento compuesto. Además, se identificó a un par de estudiantes que resolvieron el ejercicio como si se tratara de un dado de seis caras, lo que resalta la necesidad de emplear diversos recursos y objetos que permitan afianzar los aprendizajes en distintos contextos.

Para concluir la aplicación y el análisis de la etapa “Calentando motores”, se evidencia una clara necesidad de repasar, reforzar o enseñar la notación de conjuntos, con el fin de que los estudiantes puedan describir sus respuestas de manera más precisa. Asimismo, aunque en general los estudiantes demuestran una buena comprensión de la probabilidad de eventos simples, es necesario abordar explícitamente el cálculo de la probabilidad de eventos compuestos en diferentes contextos aleatorios.

### 3.3 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #1”

En esta sección se exponen los resultados de la aplicación del cuestionario correspondiente a la “Vuelta #1”. En la Figura 5 se muestra cómo quedaron las alturas de las barras en un grupo.



*Figura 5. Altura de las barras después de la vuelta #1*

Las respuestas se agruparán por categorías y se analizarán con el fin de reforzar y/o realizar recomendaciones relacionadas con la estructura de la secuencia didáctica. Cabe señalar que el análisis de algunas preguntas será menos profundo, ya que la función principal de dichas preguntas es motivar la observación por parte de los estudiantes.

- Pregunta 1: *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

En general, todos los estudiantes interpretaron correctamente la tabla de registro y las respuestas fueron coherentes, tanto entre los diferentes miembros de cada grupo, como con lo consignado en los respectivos cuestionarios.

- Pregunta 2: *¿Por qué uno o varios resultados del dado salen más que otros? Justifica tu respuesta.*

Se agruparon las respuestas en tres categorías que se muestran a continuación (ver Tabla 9):

**Tabla 9.** Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario "vuelta #1"

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
No sabe, suerte o el destino	17	11	6	"No sé, la verdad supongo que fue suerte no te puedo dar un resultado más matemático, lo lamento profe", "No sé porque yo no controlo el dado", "Porque la suerte hizo que tocarán más"
Atributos específicos	11	7	4	"Por la forma en que tiramos si tengo 5 y lo lanzó suave saldrá el mismo número", "Porque depende cómo y con qué fuerza lo lances", "Yo digo que por la gravedad de la tierra y el dado", "Porque el dado tal vez tiene más peso en ese lado"
Probabilidad	14	4	10	"Porque tiene más probabilidad de salir que otros", "Por la probabilidad que hace que salga y no salgan números", "Porque es aleatorio el lanzamiento y cualquiera puede salir", "Porque son sucesos igual de probables y pueden variar sus resultados"

Once estudiantes de un total de 42 respondieron que la razón puede atribuirse a la forma como se lanza el dado o a otros factores físicos, lo que indica que perciben que los resultados no son completamente aleatorios y que, en cierta medida, podrían ser manipulables. Llama la atención que muchos encontraron difícil justificar la respuesta; en varios casos, los estudiantes optaron por decir que no sabían la razón. Es importante reforzar estos conceptos y proporcionar a los estudiantes bases matemáticas sólidas que les permitan justificar adecuadamente este tipo de fenómenos.

- Pregunta 3: *Con los 10 lanzamientos, ¿hubo algún resultado sin salir? ¿Por qué crees que esto sucede?*

En este punto, es importante diferenciar los resultados obtenidos con el dado de ocho caras y el de doce, ya que la justificación puede variar significativamente de un caso a otro debido al número de lanzamientos y a la cantidad de caras de cada uno. Esta diferencia puede influir en la percepción que los estudiantes tienen de la distribución de los resultados. A continuación, en la siguiente tabla, se muestran las respuestas y comentarios más relevantes.

**Tabla 10.** Categorías de respuestas de la pregunta 3 cuestionario “vuelta #1”

Categoría	Frecuencia observada				Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría		
	Total	5A		5B		Dado 8 caras	Dado 12 caras
		Dado 8 caras	Dado 12 caras	Dado 8 caras	Dado 12 caras		
No sabe o no justificó	13	5	2	3	3	"El 3 y el 7, no sé por qué puede pasar eso", "No sé la razón"	"No sé porque no salieron esos números", "No sé debido a que no controlo el dado"
Da razones atribuidas a aspectos físicos	17	4	4	7	2	"No salió el 3, el 5 y el 7 (los impares salieron menos que los pares)", "Digamos que los que salieron fue por suerte", "El 1 y el 7, yo creo porque el dado en algunos lados es más pesado que en otros"	"Eso se decide voluntariamente", "Sí, esto pasa porque hay números que no aparecen tanto como en este caso pares", "porque hay alguna fuerza en la que se está lanzando el dado"
Menciona que la razón es por probabilidad o por la cantidad de lanzamientos	12	3	4	2	3	"Sí hubo fueron el 3,5, 7, supongo que fue suerte para mí todos tenían igual de probabilidad", "Sí, no salió el 1,2 ni el 3 pienso que esto es azar así que puede salir el mismo número varias veces"	"Esto sucede porque solo hay 10 lanzamientos y hay 12 números", "Es debido a su probabilidad".

Una regularidad observada a lo largo del cuestionario es que, con frecuencia, los estudiantes mencionan atributos como el peso del dado o la forma de lanzarlo para justificar sus respuestas. Esto evidencia un aspecto clave que debe ser trabajado con

mayor profundidad: la necesidad de que los estudiantes aprendan a justificar este tipo de fenómenos utilizando herramientas matemáticas, en lugar de recurrir únicamente a explicaciones físicas o intuitivas.

- Pregunta 4: *¿Observas algún patrón en las alturas de las barras en el dispositivo de conteo?*

Se agruparon las respuestas en dos categorías, los que observaron un patrón y los que no, las respuestas más relevantes se muestran en la siguiente tabla (ver Tabla 11):

**Tabla 11.** Categorías de respuestas de la pregunta 4 cuestionario “vuelta #1”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Observa un patrón y lo describe	21	9	12	"Sí con el 2 porque ha salido más", "Que los pares salen más", "Si el patrón es 5", "Sí porque sube, se mantienen, baja, y así sucesivamente", "Sí, no hay ninguno con tres chaquiras".
No observa ningún patrón	23	13	10	"No ya que ninguno tiene la misma cantidad de chaquiras", "No se observa ningún patrón porque todos están dispares", "No, se ve ningún patrón porque sería de menor a mayor y de mayor a menor"

Las respuestas fueron variadas y, en general, correctas en cuanto a la observación del dispositivo de conteo. Llama la atención que un par de estudiantes sostuvieron que el patrón consiste en que uno o dos números aparecen con mayor frecuencia que los demás. Esta pregunta resultó particularmente útil para explorar qué entienden los estudiantes por "patrón".

- Pregunta 5: *Si lanzas nuevamente 10 veces el dado, ¿esperas obtener el mismo registro en el dispositivo de conteo? Explica tu respuesta. ¿Por qué esperarías obtener lo mismo? O ¿Por qué no esperarías obtener lo mismo?*

En esta pregunta la tendencia es que aproximadamente el 78 % de los estudiantes no esperarían obtener lo mismo, en la tabla se resumen las respuestas (ver Tabla 12):

**Tabla 12.** Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario “vuelta #1”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Menciona que es posible que salga lo mismo	9	5	4	"Sí espero obtener más veces el 7 ya que el 7 salió 4 veces seguidas", "No espero obtener el mismo resultado porque pueden salir números diferentes, creo que solo el 3 se repetiría mucho", "Es muy relativo puede ser posible pero poco probable si vuelvo y lanzo los dados y viceversa"
Dice que no espera obtener lo mismo	33	17	16	"Sí, porque espero obtener un resultado diferente", "No creo porque deberían salir diferentes resultados porque los puedo lanzar con diferente fuerza", "No porque los que no salieron pueden salir, probablemente", "No espero obtener lo mismo porque esto es aleatorio",

Los estudiantes que respondieron que sí esperaban obtener los mismos resultados porque notaron una tendencia en los datos observaron que algunos números aparecieron con mayor frecuencia que otros, esto los llevó a pensar que el dado estaba cargado. Por tanto, creyeron que obtendrían resultados similares si lo lanzaban de nuevo. En esta etapa es fundamental proporcionar a los estudiantes los conocimientos necesarios para que puedan justificar si un objeto, aparentemente aleatorio, está sesgado o no, ya que sus suposiciones fueron apresuradas y carecieron de una base matemática sólida.

### 3.4 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Cuestionario grupal”

- Pregunta 1: *Juntos observen el dispositivo de conteo. ¿Cuál es el resultado más frecuente y menos frecuente?*

En general, todos los grupos de estudiantes respondieron correctamente la pregunta. Sin embargo, algunos olvidaron mencionar uno de los dos datos solicitados. Se sugiere incluir una tabla para rellenar en esta sección o separar en dos la pregunta y así garantizar el registro completo de ambos elementos requeridos.

- Pregunta 2: *Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder la pregunta 2 en el cuestionario “Vuelta #1” por los integrantes del grupo.*

Esta pregunta no arrojó resultados concluyentes, se evidencia que resulto complejo para los estudiantes, ya que la mayoría se limitó a transcribir las aportaciones de cada integrante sin lograr integrar las ideas ni identificar diferencias significativas.

- Pregunta 3: *Juntos observen el dispositivo de conteo, ¿cuál o cuáles de los resultados no salieron ni una vez? En conjunto escriban un argumento de porqué esto puede suceder.*

A continuación, se agrupan las respuestas de los grupos en cinco categorías (ver Tabla 13):

**Tabla 13.** Categorías de respuestas de la pregunta 3 “cuestionario grupal”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Creer que es suerte o no saben por qué	4	2	2	"El 7, 3 y 5, la verdad no tenemos argumentos creemos que es suerte", "No salió el 1 ni el 7, puede que las posibilidades sean iguales pero la suerte no"
Diferentes probabilidades	2	1	1	"Los números 1, 5 y 8 creemos que esto puede suceder porque había más probabilidad de sacar otros números", "Algunos de los resultados que no salieron 3,5 y 6 y fue porque la probabilidad de que salieran es baja"
Atribuyen a aspectos físicos	1	1	0	"1,2 y 3 esto puede pasar debido al lanzamiento del dado"
Aspectos probabilísticos	6	2	4	"El 1,4,6,7 y 10 porque la probabilidad hace que no salgan los números", "No salió ni el cinco ni el ocho porque la probabilidad no varió"
Por los posibles resultados del dado	1	1	0	Como fueron diez lanzamientos y como hay 12 números puede salir los 10 números o menos, los números que no salieron fueron 1,2, 5 y 9

Esta pregunta generó un amplio nivel de discusión entre los grupos donde se manifestaron dudas y, en algunos casos, dinámicas colaborativas en las que algunos estudiantes intentaron convencer a sus compañeros de un determinado argumento. Esta fue posiblemente la pregunta que más promovió el trabajo en equipo. Sin embargo, a pesar de esta interacción, las respuestas obtenidas fueron muy variadas y, en su mayoría,

incorrectas. Lo anterior permitió identificar un aspecto crítico que debe fortalecerse: la capacidad de argumentar sobre un fenómeno específico. En particular, se hace evidente la necesidad de proporcionar a los estudiantes herramientas matemáticas que les permitan construir argumentos sólidos y fundamentados.

- *Pregunta 4: Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el patrón observado por cada integrante al responder la pregunta 4 en el cuestionario “Vuelta #1”.*

En este caso, se considera que al ser una pregunta abierta no se generaron los resultados esperados. Al solicitar a los estudiantes que describieran las diferencias y/o semejanzas en sus respuestas, la mayoría no logró identificar las ideas comunes presentes entre sus compañeros. En general, muchos grupos se limitaron a indicar si las respuestas eran iguales o diferentes, sin profundizar en el análisis de los argumentos que las sustentaban.

- *Pregunta 5: Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder si se espera o no obtener el mismo patrón.*

Aunque se consideraba una pregunta clave dentro del proceso, la comparación de las respuestas no aportó elementos significativos para el análisis, ya que los estudiantes se limitaron nuevamente a indicar si sus respuestas coincidían o no. Es relevante destacar que un grupo realizó un cuadro comparativo con dos columnas, donde identificaron como diferencia el hecho de que un integrante respondió de manera distinta; y como semejanza que dos estudiantes dieron la misma respuesta. Esto evidencia que la intención de la pregunta no logró el efecto esperado, posiblemente debido a una falta de claridad en su formulación o a la necesidad de replantearla desde un enfoque que oriente mejor a los estudiantes en el análisis de los argumentos.

- *Pregunta 6: ¿El resultado más frecuente y menos frecuente cambiará si lanzo más veces el dado? Den un argumento justificando su respuesta. Por ejemplo, si lo lanzan 50 veces más, ¿cambiará?*

Se dan dos categorías para analizar la forma en que respondieron los grupos a esta pregunta (ver Tabla 14).

**Tabla 14.** Categorías de respuestas de la pregunta 6 “cuestionario grupal”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Dicen que sí cambiará y dan un argumento válido	9	4	5	"Es posible que sea igual, pero a la vez no, ya que como todos dijimos antes todo tienen la misma probabilidad", "Sí ya que lo lanzaremos 40 veces más y tendremos más posibilidad de resultados".
Dicen que sí pero no hay argumento o no es válido	5	3	2	"Posiblemente, porque hay un 50 % de probabilidad de que salga otro resultado", "El resultado puede ser relativo", "Sí porque puede que salgan esos números hay un 50 % de que salgan esta vez".

Es importante señalar que ningún grupo respondió con un *no* rotundo; todos consideraron que el cambio es posible. No obstante, persiste la inquietud sobre si algunos grupos pudieran contemplar la posibilidad de que dicho cambio no se produzca, ya que la pregunta no planteó explícitamente ese escenario. Por ello, se recomienda ajustar la formulación de la pregunta para explorar si los estudiantes creen que los resultados más frecuentes y menos frecuentes podrían mantenerse iguales o variar tras varios lanzamientos.

### 3.5 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #2”

Hay que recordar que, en esta vuelta, se realizan 50 lanzamientos adicionales completando un total de 60 lanzamientos, y que en el caso de un grupo se observa las alturas de las barras de la siguiente manera en la Figura 6.

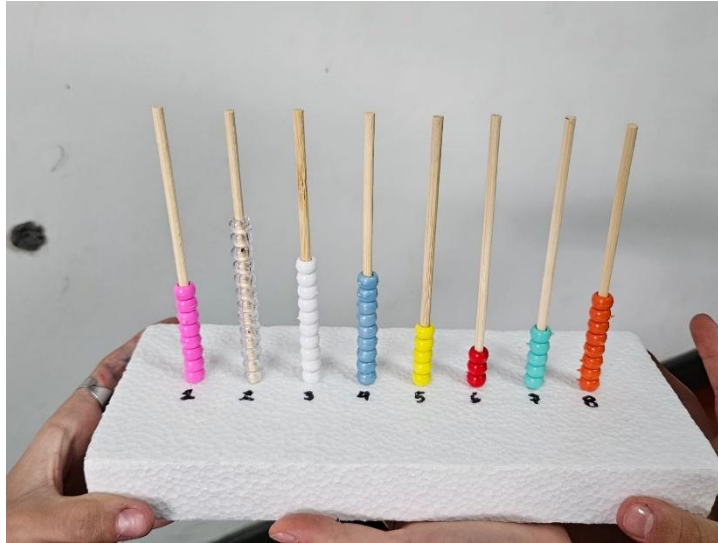


Figura 6. Altura de las barras en el dispositivo de conteo en la vuelta #2

Con el dispositivo de conteo y la tabla de registro, cada grupo respondió su cuestionario. A continuación, se presentan la categoría de respuesta y análisis generales.

- Pregunta 1: *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

Gracias a la tabla de registro, todos los grupos respondieron correctamente y no presentaron dudas al identificar cuál o cuáles resultados aparecen con mayor frecuencia. Sin embargo, al revisar las tablas, se detectó que en un par de grupos la suma de las frecuencias de todos los resultados no coincide con el total de lanzamientos.

- Pregunta 2: *¿Es posible que en esta etapa aún haya resultados sin salir? Justifiquen.*

Esta es una pregunta clave: se esperaba que los estudiantes reconocieran que, aunque es muy evento con baja probabilidad, es posible que ocurra. A continuación, se presenta una tabla que resume las respuestas y los comentarios más relevantes (ver Tabla 15).

**Tabla 15.** Categorías de respuestas de la pregunta 2 cuestionario “vuelta #2”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Responden que no y dan argumentos	3	1	2	"No ya que, al pasar del tiempo, aumenta la probabilidad de que salga", "No porque se lanzó más veces y hubo más posibilidades", "No porque las posibilidades aumentan"

Responden que no, pero sin argumentos o argumentos que no corresponden	5	4	1	"No ya que salieron todos los números", "No porque todos salieron", "No ya que todas las barras están con chaquiras", "No ya que tiene la cantidad suficiente de tiros"
Dicen que sí o que es posible	6	2	4	"Puede ser posible porque hay veces que los números se repiten más que otros", "Sí porque hay posibilidades de que no salgan números", "Sí es posible que no haya salido un número porque las posibilidades son iguales".

Es importante señalar que cinco de los catorce grupos respondieron la pregunta basándose en los resultados de sus propios lanzamientos y no como un caso hipotético. Por ello, sería conveniente plantear esta pregunta al inicio de la Etapa 2, como pregunta introductoria. En cualquier caso, los grupos interpretaron correctamente los dos elementos clave: la cantidad de lanzamientos y la probabilidad de cada resultado.

- Pregunta 3: *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

Para la mayoría de los grupos la expresión “una gran diferencia” resultó confusa, ya que no tenían claro si una diferencia de dos o tres puntos porcentuales entre los resultados debía considerarse “grande”. En consecuencia, los grupos cuyos datos presentaban pequeñas diferencias tuvieron dificultades para responder; mientras que aquellos que evidenciaron una diferencia más marcada lograron responder con mayor seguridad. No obstante, en general todos los grupos analizaron correctamente los datos para responder a esta pregunta.

- Pregunta 4: *Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras, ¿están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.*

Las respuestas a esta pregunta presentan dos características principales. Por un lado, los grupos cuyos lanzamientos mostraron una gran diferencia en la frecuencia de un resultado señalaron que, aunque las alturas de las barras eran similares entre sí, había una o más que rompían con esa armonía. Por otro lado, los grupos cuyas barras presentaban alturas más similares respondieron afirmativamente a la pregunta. Sin embargo, un aspecto

común en casi todos los estudiantes fue la ausencia de argumentación; la excepción se muestra en la Figura 7.

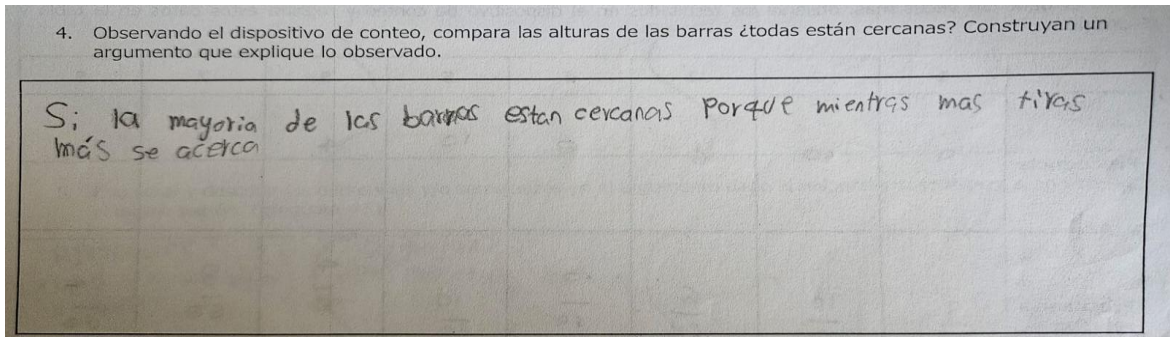


Figura 7. Respuesta a la pregunta 4 del cuestionario vuelta #2

Esta respuesta evidencia que, al menos en este grupo, ya existe una comprensión inicial de lo que podría ocurrir con un mayor número de lanzamientos del dado.

- Pregunta 5: *¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

Dada la variedad de argumentos presentados, se agruparon las respuestas de los grupos en diferentes categorías, con el propósito de analizar el nivel argumentativo de los estudiantes al reflexionar sobre el posible cambio en el resultado más frecuente, y comparando los casos de 10 y 60 lanzamientos. A continuación, se presenta la tabla con dichas categorías (ver Tabla 16).

Tabla 16. Categorías de respuestas de la pregunta 5 cuestionario “vuelta #2”

Categoría	Frecuencia observada			Ejemplo de respuesta clasificada en esta categoría
	Total	5A	5B	
Por la cantidad de lanzamientos	4	1	3	"Porque es por el número de lanzamientos del dado", "Si cambio bastante ya que mientras más tiros más posibles resultados se crean", "Sí hubo un número y creemos que ocurrió esto porque lanzamos el dado más veces"
Por probabilidad	2	2	0	"Porque la probabilidad hizo más frecuentes", "Sí porque como es el azar no tiene un patrón designado entonces puede salir cualquiera"
Por razones variadas	6	3	3	"Lo que ocurrió fue que los que no habían salido antes salieron después, y el número de los que aún no habían salido aumentó", "Sí porque hay variación entre los números de los dados", "Creemos que es por la manera en que lanzamos los dados"
No cambió	2	1	1	"No cambio el resultado, en ambas vueltas el más frecuente es 5", "No porque el siete sigue siendo el mayor de todos los demás números"

- Pregunta 6: *¿Cambió el resultado menos frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

En todos los grupos se evidenció en las respuestas que hubo un cambio en el resultado menos frecuente. El argumento más utilizado fue que debido a la cantidad de lanzamientos adicionales entre las etapas dicho resultado tuvo más oportunidades de aparecer, compensando su baja frecuencia inicial. Algunos grupos no presentaron una argumentación clara, ya que se limitaron a señalar el cambio sin ofrecer una justificación.

- Pregunta 7: *¿Cambió la frecuencia relativa del resultado “3” entre la etapa 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

Esta pregunta obtuvo un 100 % de coincidencia en las respuestas. La única razón mencionada por todos los grupos fue que, al realizarse un mayor número de lanzamientos, la frecuencia relativa del resultado 3 se modificó.

### 3.6 Análisis de respuestas y evaluación de aprendizajes “Vuelta #3”

Con la última etapa, el dispositivo de conteo lucirá en algunos casos como se observa en la Figura 8.



Figura 8. Altura de las barras durante la vuelta #3

Adicionalmente, se presenta la tabla de un grupo de 5B (ver Figura 9). En este caso, se evidencia que la tabla de registro se completó correctamente, lo que permitirá analizar posteriormente cómo se interpretó y analizó la información consignada.

Lanzar el dado 60 veces más. (20 veces cada uno de los integrantes), observa los resultados en el dispositivo de conteo y registra estos datos en la tabla y responde.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	17	12	19	18	9	<del>14</del>	20	11
Frecuencia relativa	$\frac{17}{120}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{9}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{11}{120}$
Porcentaje	14,16%	10%	15,83%	15%	7,5%	11,66%	16,66%	9,16%

Figura 9. Tabla de registro de un grupo en la vuelta #3

- Pregunta 1: ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?

En este apartado, los grupos de estudiantes interpretaron correctamente los datos de la tabla de registro.

- Pregunta 2: ¿Existe una gran diferencia entre la frecuencia del resultado más frecuente y menos frecuente?

Esta pregunta resultó difícil para los estudiantes. Algunos grupos respondieron que sí existe una gran diferencia, pero sin aportar más detalles. Otros indicaron el valor numérico de la diferencia, aunque no precisaron si la consideraban grande. Un ejemplo relevante es el del grupo de la Figura 10

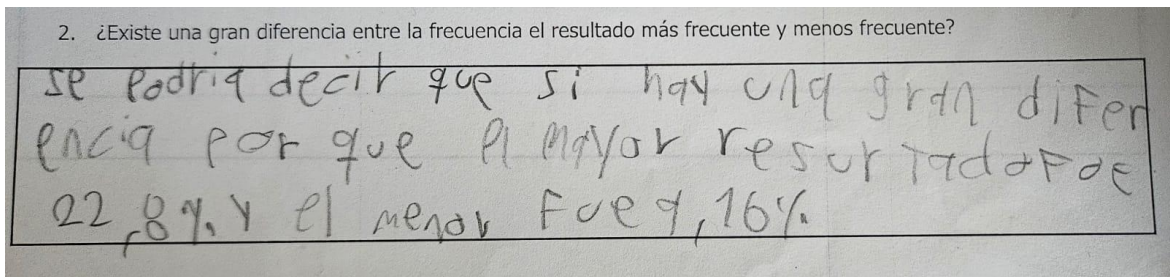


Figura 10. Respuesta de un grupo a la pregunta 2 del cuestionario vuelta #3

En este caso, se escribieron explícitamente los valores para justificar que sí existe una gran diferencia. Sin embargo, este nivel de detalle se evidenció poco en otros grupos.

- Pregunta 3: Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras. ¿Están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.

La mayoría de los estudiantes respondió esta pregunta clave para el objetivo de la secuencia con un buen nivel de argumentación. Además, se observa una mejora en la forma de responder en comparación con los cuestionarios anteriores. Todos mencionaron las razones correctas para describir lo que observaban en el dispositivo de conteo. A continuación, se muestra en la Figura 11 la respuesta de uno de los grupos, donde se destaca la mejora en el nivel de argumentación y de detalle, y sobre todo que se utilicen herramientas matemáticas para argumentar.

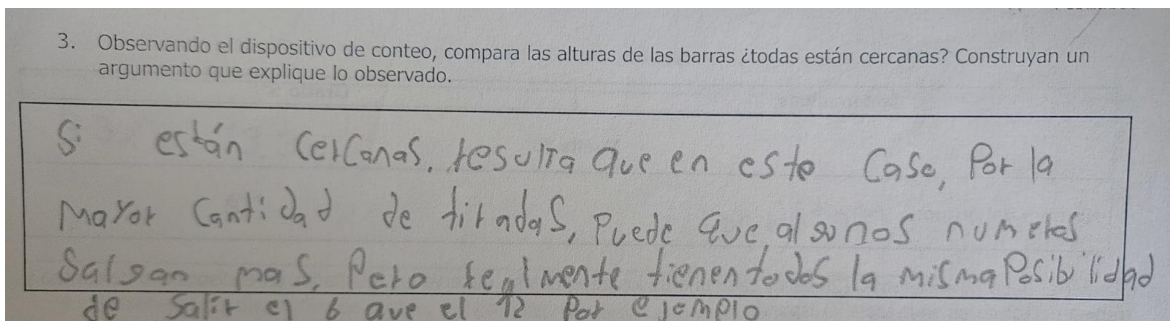
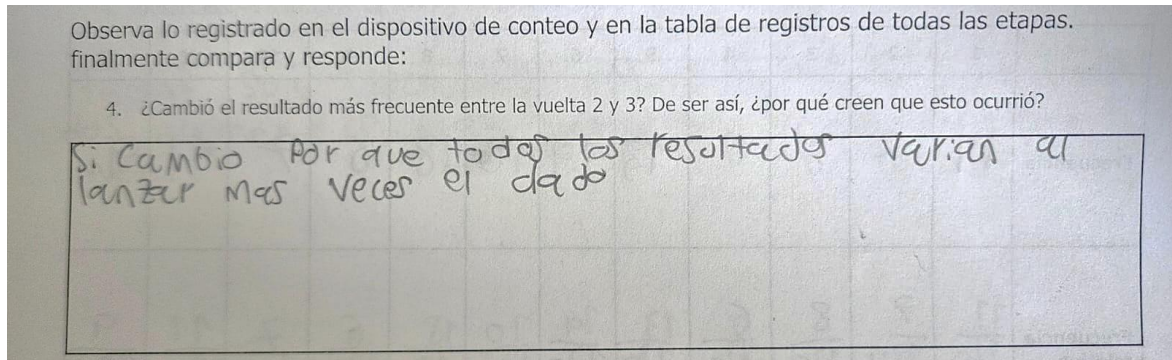


Figura 11. Respuesta de un grupo a la pregunta 3 del cuestionario vuelta #3

- Pregunta 4: ¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 2 y 3? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?

Las respuestas de los estudiantes pueden agruparse en dos categorías: (1) aquellos grupos que presentaron un cambio en su resultado más frecuente y (2) aquellos en los que

dicho cambio no ocurrió. En los grupos sin cambio no se generó argumentación, principalmente porque no se solicitó. En los casos donde sí hubo argumentación esta se centró únicamente en la cantidad adicional de lanzamientos, como se observa en la Figura 12. En ningún caso se mencionaron otros tipos de argumentos, por lo que resulta necesario complementarlos y abordarlos durante la retroalimentación de esta pregunta.



*Figura 12. Respuesta de un grupo a la pregunta 4 de la vuelta #3*

Al igual que en esta respuesta, los demás grupos tiene una estructura similar. Por ello, realizar la retroalimentación permitirá enriquecer aún más a los estudiantes con herramientas matemáticas y favorecer una mejor apropiación de los conceptos de probabilidad.

- Pregunta 5: *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

En este punto las respuestas mostraron una notable mejoría teniendo en cuenta que, primero, en la etapa anterior ya se había realizado una retroalimentación sobre el significado de una diferencia y, segundo, que en este caso se podía hablar de una diferencia numérica. Sin embargo, al observar las respuestas de la Figura 13, se evidencia que en algunos casos no se menciona si los estudiantes contemplan que la diferencia es considerable. Además, una diferencia del 5% no fue percibida como grande, lo que muestra un cambio frente a lo esperado en este tipo de preguntas, pues ahora se realiza el cálculo de la diferencia y, en algunos pocos casos, incluso se menciona explícitamente que se trata de una gran diferencia.

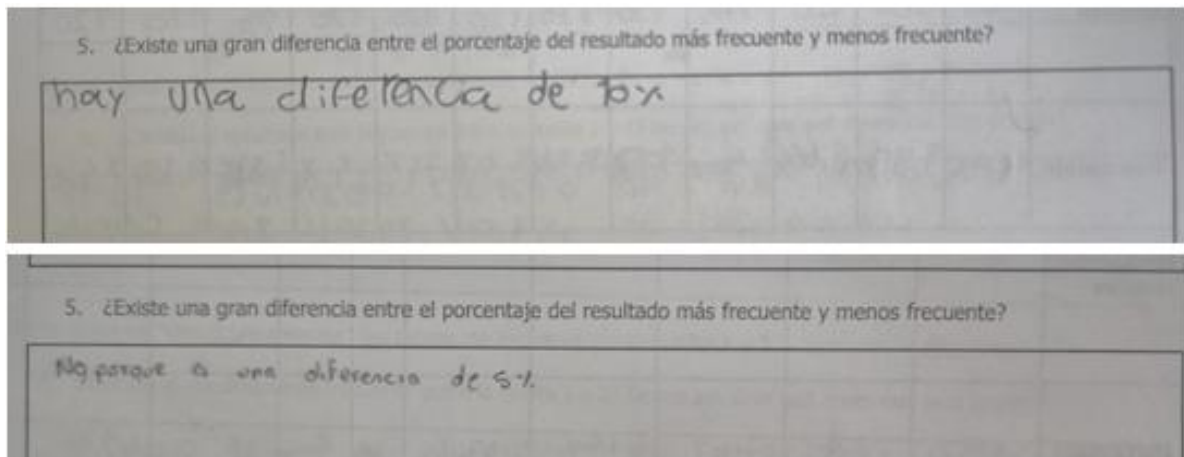


Figura 13. Respuestas de dos grupos a la pregunta 5 de la vuelta #3

- Pregunta 6: Comparando el dispositivo de conteo, ¿las alturas de las barras de colores están cercas? De ser así, construyan un argumento que demuestre lo observado.

Hay dos respuestas importantes que vale la pena resaltar en esta pregunta: por un lado, en la Figura 14 se menciona que las alturas de las barras no están cercanas porque algunos resultados se acumularon más que otros. Esta respuesta debería aprovecharse para generar una reflexión a nivel grupal; no para justificar un posible truncamiento del dado, sino para resaltar que, en algunos casos, incluso 120 lanzamientos no son suficientes para evidenciar completamente la estabilidad de los resultados. Además, situaciones de este tipo son posibles e incluso pueden presentarse con mayor frecuencia de la esperada.

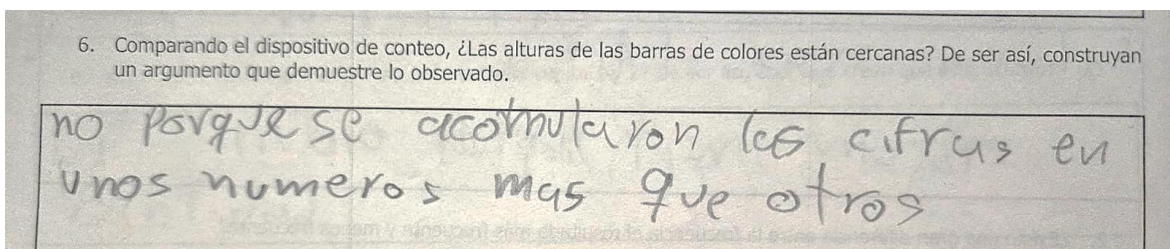


Figura 14. Respuesta A de un grupo a la pregunta 6 de la vuelta #3

Por otro lado, en la Figura 15 se indica que las alturas de las barras están “un poco cercanas”, esto se debe a que el dado se lanzó más veces, lo que permitió que los resultados se igualaran. Aunque este argumento carece explícitamente de un elemento

probabilístico, puede servir como base para que los grupos comprendan que el fenómeno puede observarse por sí mismo. Este razonamiento fue común en la mayoría de los grupos y permite contar con los elementos necesarios para avanzar y finalizar las siguientes preguntas, conduciendo al concepto principal de esta secuencia didáctica.

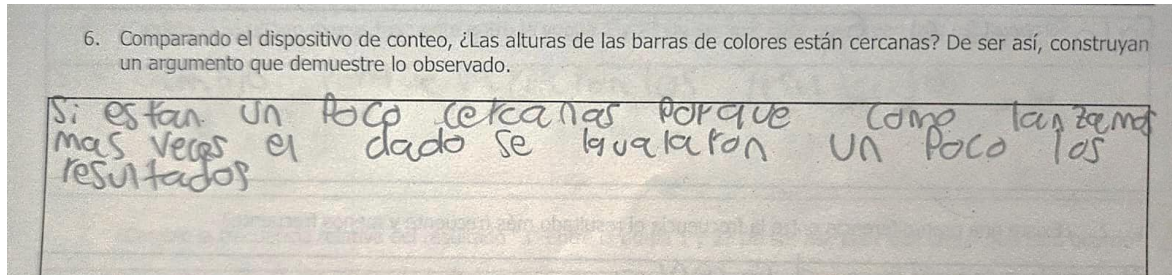


Figura 15. Respuesta B de un grupo a la pregunta 6 de la vuelta #3

- Pregunta 7: Con respecto a la vuelta 1, 2 y 3 ¿Qué pasó con las alturas de las barras? Describan 5 cambios importantes.

Los cambios más mencionados por los estudiantes no se centraron en las alturas de las barras, sino en los datos de la tabla de registro. Se señalaron aspectos como las variaciones en la frecuencia, la frecuencia relativa y el porcentaje. Además, se observó que en todas las vueltas cambió tanto el resultado más frecuente como el menos frecuente, e incluso se destacó que ningún valor se mantuvo igual entre las diferentes vueltas.

Esto permite concluir que la pregunta no quedó del todo clara, ya que los estudiantes no se detuvieron específicamente a analizar las alturas de las barras. Lo anterior se debe, en parte, a que, pese a que contaban con fotografías de las alturas en las vueltas anteriores, les resultó más sencillo comparar la información directamente desde la tabla de registro.

No obstante, a pesar de estas dificultades, en la Figura 16 se muestran las diferencias enumeradas por un grupo de estudiantes que lograron identificar elementos relevantes, los cuales pueden servir como punto de partida para la socialización y retroalimentación final.

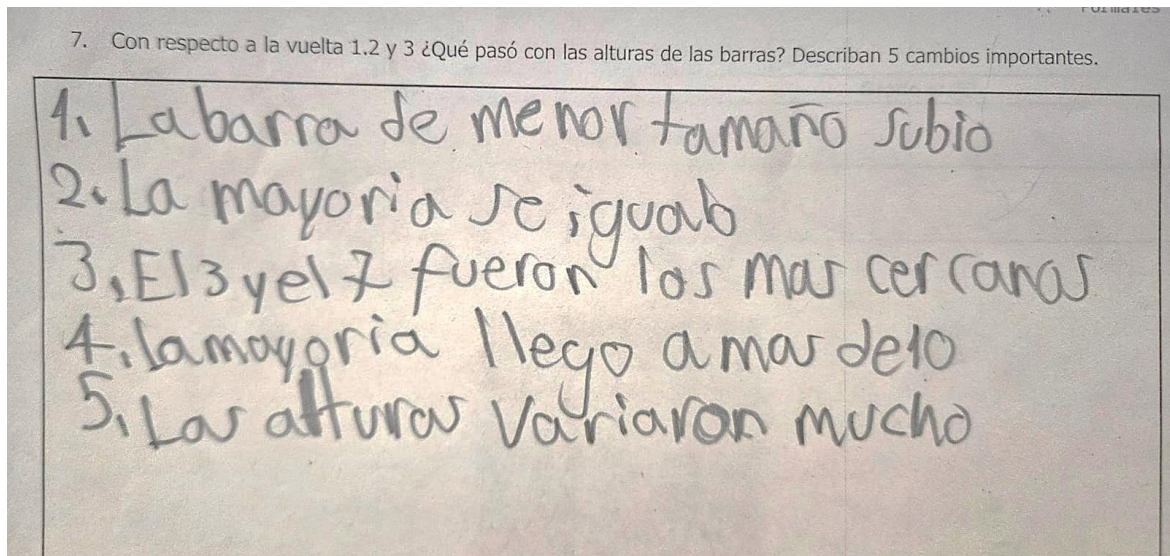


Figura 16. Respuesta a la pregunta 7 de la vuelta #3

- Pregunta 8: Si se hicieran mil lanzamientos más, ¿cómo te imaginas que se verían las alturas de las barras en el dispositivo de conteo? Describan con palabras lo que piensan y realicen un dibujo de la situación hipotética.

En primer lugar, es importante mencionar que, de los 14 grupos, solo 8 realizaron el dibujo; mientras que los demás prefirieron describir con palabras sus ideas frente a la situación hipotética.

En cuanto a los elementos a analizar, únicamente seis grupos mencionaron la posibilidad de alcanzar un equilibrio. En la Figura 17 se presentan cuatro respuestas que ilustran lo ocurrido en esta pregunta. En la parte superior izquierda se aprecia la duda de un grupo que propuso dos posibles escenarios sobre lo que podría suceder. En la parte superior derecha se menciona la existencia de un patrón y la expectativa de que en algún momento se logre un equilibrio, lo que abre la puerta a una discusión sobre el tipo de patrón que esperan los integrantes de este grupo. En la parte inferior izquierda se emplea la expresión *igualadas o cercanas*, la cual representa el escenario ideal para que el docente explique el concepto de probabilidad desde un enfoque frecuentista. Finalmente, en la parte inferior derecha resulta interesante que la experiencia adquirida en las vueltas anteriores se retome para argumentar la respuesta ante la situación hipotética.

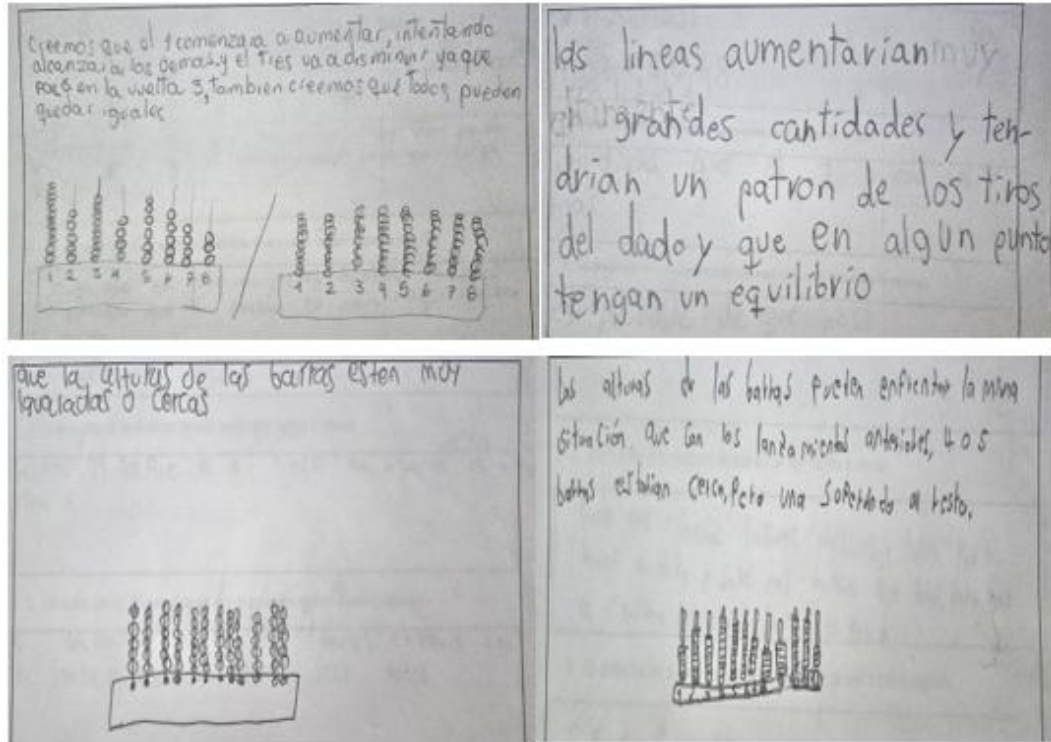


Figura 17. Respuestas a la pregunta 8 de la vuelta #3

# Capítulo 4: Conclusiones y recomendaciones

En el presente capítulo se exponen las conclusiones generales del documento, así como conclusiones ligadas a los objetivos específicos del Trabajo Final. Además, se sintetizan los hallazgos referidos a cómo influyó el juego en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes, tanto en el ámbito de la probabilidad como en sus competencias sociales e individuales. Posteriormente, se presentan sugerencias y recomendaciones que permitirán, en caso de aplicar nuevamente la secuencia, mejorar la experiencia, optimizar los aprendizajes y obtener resultados más notables.

## 4.1 Conclusiones

En relación con el objetivo general del trabajo (sección [1.2.1.](#)), el cual establece “Analizar los resultados obtenidos por estudiantes de quinto grado de primaria participantes en la implementación de una estrategia pedagógica basada en juegos orientada a la apropiación de conceptos básicos de probabilidad”, se puede afirmar que este fue alcanzado, como se observa en el capítulo 3. A lo largo del capítulo se muestra la reflexión del docente-investigador con respecto a los resultados de los estudiantes, quienes pasaron de ideas iniciales poco estructuradas a una comprensión más clara y fundamentada de los conceptos de probabilidad. El análisis mostró que el nivel de argumentación se consolidó junto con el uso de herramientas matemáticas, lo que confirma la pertinencia de la estrategia pedagógica.

En cuanto a los objetivos específicos (sección [1.2.2.](#)), también se cumplió lo propuesto. El primer objetivo, referido a identificar los conocimientos previos de los estudiantes, se cumplió mediante la aplicación y análisis de las respuestas al cuestionario “calentando motores”, el cual permitió evidenciar las bases con que contaban los participantes frente a diferentes habilidades y temáticas relacionadas con la probabilidad para un experimento aleatorio simple.

El cumplimiento del segundo objetivo, relacionado con diseñar una estrategia pedagógica, se observa en el capítulo 2 donde, tras describir el juego y la secuencia didáctica ligada a él, se expone la estrategia pedagógica subyacente, la cual pretende fomentar una

competencia sana y activa, manteniendo el propósito formativo de la experiencia con el juego por encima de su carácter lúdico o competitivo. Desde esta perspectiva, detrás de cada etapa de la secuencia hubo una planeación y un diseño que debería garantizar su efectividad, incluyendo la elaboración de cuestionarios y materiales específicos para enseñar conceptos probabilísticos a partir de la experimentación con el juego.

Cabe destacar que la secuencia didáctica es el instrumento en el cual se plasma la estrategia pedagógica diseñada, que articula los conocimientos y habilidades previos con los conceptos, términos y habilidades que deberían emerger durante la experiencia; además, integra trabajo individual (de cada estudiante) con actividades grupales de experimentación con el juego, reflexión sobre los resultados, discusión y consolidación de aprendizajes a partir de las observaciones.

El cumplimiento del último objetivo específico, que consistía en evaluar el aprendizaje de los estudiantes, se observa a lo largo del capítulo 3, en donde se pudo evidenciar cómo la aplicación de las actividades diseñadas tuvo un impacto en los estudiantes.

Con base en los hallazgos de los objetivos específicos uno y tres es posible responder, a nivel de la muestra que participó en la implementación de esta estrategia pedagógica, a la pregunta planteada en el título de este trabajo. A partir de la comparación entre las respuestas de “calentando motores” y de las tres “vueltas”, este juego orientado con actividades didácticas pedagógicas incidió en la apropiación de conceptos de probabilidad de las siguientes formas:

- Al principio, la mayoría de los participantes lograron manipular adecuadamente el concepto de espacio muestral; sin embargo, requerían una formalización del lenguaje para utilizar de manera precisa la notación de conjuntos. La estrategia proporcionó espacios que favorecieron la mejora en este aspecto.
- Ante la persistencia de ideas asociadas a agentes externos que, según los participantes, influyen en las probabilidades (por ejemplo, la forma de lanzar el dado, la fuerza aplicada o la creencia de que ciertos números tienden a salir con mayor frecuencia, incluso en condiciones de equiprobabilidad), la estrategia generó espacios de discusión que permitieron transformar estas creencias y construir argumentos sustentados matemáticamente (acordes con su nivel de formación).

- Antes de jugar, un porcentaje considerable de estudiantes no determinaba correctamente la probabilidad de eventos simples y compuestos. Para fortalecer este conocimiento en educación primaria es fundamental incorporar la manipulación de objetos y materiales didácticos, tal como lo planteó la estrategia. En las últimas respuestas se observó que dicha experimentación contextualizada favoreció un aprendizaje más significativo.
- Aunque no corresponde a un concepto propio de la probabilidad, a lo largo de la implementación de la secuencia se evidenció que el término “diferencia” generó muchas dificultades en los estudiantes. Por ello, con el fin de fortalecer sus habilidades de comparación y análisis de datos, este concepto fue trabajado ampliamente.
- El juego permitió que los estudiantes alcanzaran un mayor nivel de argumentación y, gracias a las retroalimentaciones realizadas en cada etapa, se generó un proceso de aprendizaje progresivo que fortaleció y favoreció una mayor apropiación de los conceptos trabajados.

Estos argumentos permiten afirmar que la estrategia incidió positivamente en estos estudiantes para la apropiación de conceptos de probabilidad.

## 4.2 Recomendaciones

La propuesta evidencia un gran potencial especialmente para identificar el nivel conceptual de los estudiantes y sus creencias iniciales, y para fortalecer nociones clave de probabilidad y su capacidad argumentativa. Para un profesor de primaria que quiera aplicar o adaptar esta secuencia didáctica se presentan a continuación algunas sugerencias, teniendo en cuenta que varios aspectos por mejorar dependen de las características de los estudiantes a quienes se dirige la implementación.

Con relación a la evaluación y gestión del tiempo, se podría reducir el número de preguntas abiertas en cada cuestionario con el fin de agilizar la evaluación. Por ejemplo, combinar preguntas abiertas con preguntas cerradas o de selección múltiple; esto permite un análisis tanto cuantitativo como cualitativo, lo cual dinamiza la valoración de los aprendizajes. En este Trabajo Final se pretendía evaluar la argumentación de los estudiantes resultando

más pertinente el uso de pregunta abierta, en línea con el enfoque cualitativo seguida en la metodología de investigación; sin embargo, ese análisis de contenido escrito resulta más dispendioso para el docente que el análisis de respuestas cerradas.

En cuanto a la interacción entre estudiantes, se sugiere ampliar los espacios de socialización y discusión grupal, permitiendo que los estudiantes argumenten y contrasten sus ideas con las de otros grupos. Esto no solo fortalece el aprendizaje matemático, sino que también promueve habilidades comunicativas y sociales fundamentales para el aprendizaje cooperativo.

Con respecto a una siguiente etapa de la secuencia, posterior a la experiencia grupal con objetos manipulativos se podrían: (1) reunir los resultados de varios grupos, o (2) integrar herramientas tecnológicas o simuladores digitales que permiten a los estudiantes visualizar situaciones hipotéticas de un número grande de lanzamientos. Estos caminos favorecerían comprender con mayor claridad la estabilidad en el largo plazo de las frecuencias relativas, propiedad importante de la probabilidad desde un enfoque frecuentista que es difícil de incorporar en grado quinto puesto que requiere el concepto, o al menos la noción, de límite.

Finalmente, en cuanto a la logística, se sugiere cambiar los dispositivos de conteo de poliestireno (icopor) por materiales más duraderos y sostenibles, como madera o acrílico; los cuales no solo garantizan mayor resistencia, sino también reducen el impacto ambiental y permiten reutilizarlos durante varios años.

## Anexo A: Cuestionario “Calentando motores” dado de ocho caras

Observa el dado de ocho caras y responde:



Figura 18. Dado de ocho caras

1. ¿Cuántos y cuáles resultados posibles puedes obtener al lanzar el dado? Descríbelos todos.

2. ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado saldrán más? Justifica tu elección.

3. ¿Es posible que con 10 lanzamientos del dado haya números sin salir? Explica tu respuesta.

4. ¿Qué esperas observar en el dispositivo de conteo a medida que juegues? ¿Algún patrón al realizar varios lanzamientos y registrarlos en el dispositivo? Realiza un dibujo si lo consideras necesario.

5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2 en este dado? Realiza las cuentas necesarias.

6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 6? Realiza las cuentas necesarias.

## Anexo B: Cuestionario “Calentando motores” dado de doce caras

Observa el dado de 12 caras y responde:



Figura 19. Dado de doce caras

1. ¿Cuántos y cuáles resultados posibles puedes obtener al lanzar el dado? Descríbelos todos.

2. ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado saldrán más? Justifica tu elección.

3. ¿Es posible que con 10 lanzamientos del dado haya números sin salir? Explica tu respuesta.

4. ¿Qué esperas observar en el dispositivo de conteo a medida que juegues? ¿Algún patrón al realizar varios lanzamientos y registrarlos en el dispositivo? Realiza un dibujo si lo consideras necesario.

5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 2 en este dado? Realiza las cuentas necesarias.

6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual a 6? Realiza las cuentas necesarias.

## Anexo C: Cuestionario “Vuelta #1” dado de ocho caras

Lanza el dado 10 veces, observa los resultados en el dispositivo de colores y registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 17.** Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #1”

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Frecuencia</b>								
<b>Frecuencia relativa</b>								
<b>Porcentaje</b>								

1. *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

2. *¿Por qué uno o varios resultados del dado salen más que otros? Justifica tu respuesta.*

3. *Con los 10 lanzamientos, ¿hubo algún resultado sin salir? ¿Por qué crees que esto sucede?*

4. *¿Observas algún patrón en las alturas de las barras en el dispositivo de conteo?*

5. *Si lanzas nuevamente 10 veces el dado, ¿Esperas obtener el mismo registro en el dispositivo de conteo? Explica tu respuesta. ¿Por qué esperarías obtener lo mismo? o ¿Por qué no esperarías obtener lo mismo?*

## Anexo D: Cuestionario “Vuelta #1” dado de doce caras

Lanza el dado 10 veces, observa los resultados en el dispositivo de conteo y registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 18.** Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #1”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Frecuencia</b>												
<b>Frecuencia relativa</b>												
<b>Porcentaje</b>												

1. ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?

2. ¿Por qué uno o varios resultados del dado salen más que otros? Justifica tu respuesta.

3. Con 10 lanzamientos, ¿hubo algún resultado sin salir? ¿Por qué crees que esto sucede?

4. ¿Observas algún patrón en las alturas de las barras en el dispositivo de conteo?

5. Si lanzas nuevamente 10 veces el dado, ¿esperas obtener el mismo registro en el dispositivo de conteo? Explica tu respuesta. ¿Por qué esperarías obtener lo mismo o por qué no esperarías obtener lo mismo?

## Anexo E: Cuestionario “Cuestionario grupal”

Lean cada uno sus respuestas a las preguntas del cuestionario anterior (Vuelta #1) antes de responder las siguientes preguntas:

1. *Juntos observen el dispositivo de conteo. ¿Cuál es el resultado más frecuente y menos frecuente?*

2. *Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder la pregunta 2 en el cuestionario “Vuelta #1” por los 3 integrantes del grupo.*

3. *Juntos observen el dispositivo de conteo ¿Cuál o cuáles de los resultados no salieron ni una vez? En conjunto escriban un argumento de porqué esto puede suceder.*

4. *Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el patrón observado por cada integrante al responder la pregunta 4 en el cuestionario “vuelta #1”.*

5. *Enumerar y describir las diferencias y/o semejanzas en el argumento dado al responder si se espera o no obtener el mismo patrón.*

6. *¿El resultado más frecuente y menos frecuente cambiará si lanzan más veces el dado? Den un argumento justificando su respuesta. Por ejemplo, si lo lanzan 50 veces más, ¿cambiará?*

## Anexo F: Cuestionario “Vuelta #2” dado de ocho caras

Lanza el dado 50 veces más, observa los resultados en el dispositivo de conteo y registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 19.** Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #2”

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Frecuencia</b>								
<b>Frecuencia relativa</b>								
<b>Porcentaje</b>								

1. *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

2. *¿Es posible que en esta etapa aún haya resultados sin salir? Justifiquen.*

3. *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

4. *Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras, ¿están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.*

- Ahora observa “simultáneamente” las tablas de registros de la vuelta 1 y 2. Compara y responde:

5. *¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

6. *¿Cambió el resultado menos frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

7. *¿Cambió la frecuencia relativa del resultado “3” entre la etapa 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

## Anexo G: Cuestionario “Vuelta #2” dado de doce caras

Lanza el dado 50 veces más, observa los resultados en el dispositivo de colores y registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 20.** Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #2”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Frecuencia</b>												
<b>Frecuencia relativa</b>												
<b>Porcentaje</b>												

1. *¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?*

2. *¿Es posible que en esta etapa aún haya resultados sin salir? Justifiquen.*

3. *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

4. *Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras. ¿Están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.*

- Ahora observa “simultáneamente” las tablas de registros de la vuelta 1 y 2. Compara y responde:

5. *¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

6. *¿Cambió el resultado menos frecuente entre la vuelta 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

7. *¿Cambió la frecuencia relativa del resultado “3” entre la etapa 1 y 2? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?*

## Anexo H: Cuestionario “Vuelta #3” dado de doce caras

Lanza el dado 60 veces más (20 veces cada uno de los integrantes). Observa los resultados en el dispositivo de conteo y registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 21.** Tabla de registro dado de ocho caras “vuelta #3”

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Frecuencia</b>								
<b>Frecuencia relativa</b>								
<b>Porcentaje</b>								

1. ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?

2. ¿Existe una gran diferencia entre la frecuencia el resultado más frecuente y menos frecuente?

3. Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras. ¿Están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.

- Observa lo registrado en el dispositivo de conteo y en la tabla de registros de todas las etapas. finalmente compara y responde:

4. ¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 2 y 3? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?

5. *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

6. *Comparando el dispositivo de conteo, ¿están las alturas de las barras de colores cercanas? De ser así, construyan un argumento que demuestre lo observado.*

7. *Con respecto a la vuelta 1, 2 y 3, ¿qué pasó con las alturas de las barras? Describan 5 cambios importantes.*

8. *Si se hicieran 1000 lanzamientos más, ¿cómo te imaginas que se verían las alturas de las barras en el dispositivo de conteo? Describan con palabras lo que piensan y realicen un dibujo detallando la situación hipotética.*

## Anexo I: Cuestionario “Vuelta #3” dado de doce caras

Lanza el dado 60 veces más (20 veces cada uno de los integrantes). Observa los resultados en el dispositivo de conteo, registra estos datos en la tabla y responde:

**Tabla 22.** Tabla de registro dado de doce caras “vuelta #3”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Frecuencia</b>												
<b>Frecuencia relativa</b>												
<b>Porcentaje</b>												

1. ¿Cuál o cuáles de los resultados del dado salieron más?

2. ¿Existe una gran diferencia entre la frecuencia del resultado más frecuente y menos frecuente?

3. Observando el dispositivo de conteo, compara las alturas de las barras. ¿Están todas cercanas? Construyan un argumento que explique lo observado.

- Observa lo registrado en el dispositivo de conteo y en la tabla de registros de todas las etapas compara y responde:

4. ¿Cambió el resultado más frecuente entre la vuelta 2 y 3? De ser así, ¿por qué creen que esto ocurrió?

5. *¿Existe una gran diferencia entre el porcentaje del resultado más frecuente y menos frecuente?*

6. *Comparando el dispositivo de conteo, ¿están las alturas de las barras de colores cercanas? De ser así, construyan un argumento que demuestre lo observado.*

7. *Con respecto a la vuelta 1, 2 y 3, ¿qué pasó con las alturas de las barras? Describan 5 cambios importantes.*

8. *Si se hicieran 1000 lanzamientos más, ¿cómo te imaginas que se verían las alturas de las barras en el dispositivo de conteo? Describan con palabras lo que piensan y realicen un dibujo detallando la situación hipotética.*

## Anexo J: Elaboración de los materiales manipulativos

En esta parte se mostrarán los materiales y cómo preparar los recursos para llevar a cabo la secuencia didáctica. Se va a explicar todo de manera simple, la idea es que cualquier persona, sea profesor o estudiante, pueda entender fácilmente cómo funciona todo.

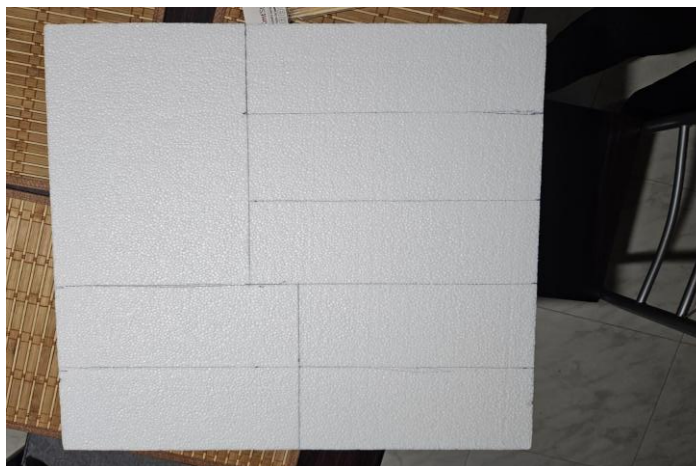
### Materiales

- Dos o más paquetes de chaquiras de colores como se muestran en la imagen (ver Figura 20):



*Figura 20. Paquete de chaquiras de colores*

- Un bloque de poliestireno (icopor) para las bases de los dispositivos (ver Figura 21):



*Figura 21. Base del dispositivo de conteo*

- Comprar un paquete de palillos para brochetas (pincho) (ver Figura 22):



*Figura 22. Barras para el dispositivo de conteo*

**Nota.** Imagen tomada de Champs Ecodesechables S.A.S. (s.f.).

- Varias bolsas con cierre hermético (tipo Ziploc) para almacenar las chaquiras por grupos (ver Figura 23):



*Figura 23. Bolsas para el almacenamiento de los recursos*

**Nota.** Imagen tomada de DetaShop (s.f.).

- Dados de la cantidad de caras o lados que se desee. Para este trabajo se usaron dados de 8 y 12 caras. La cantidad varía según el número de grupos que se conformen (ver Figura 24):



Figura 24. Dado de ocho y doce caras

### Construcción de los recursos

Para la construcción del dispositivo de registro, lo primero es tener claro cuántos grupos se formarán y cuántos de ellos utilizarán un dado específico. Esto indicará el tamaño y la cantidad de bloques que se deben cortar de la pieza de poliestireno. En el caso de este trabajo, se formaron cuatro grupos para el dado de ocho caras y tres grupos para el dado de doce caras. Así que se cortó el bloque de poliestireno de acuerdo con esta distribución. Posteriormente se procede a marcar equidistantemente puntos para introducir los palillos de brocheta, que servirán como torres para colocar las chaquiras durante el juego. El dispositivo final debe quedar de la siguiente manera (ver Figura 25):

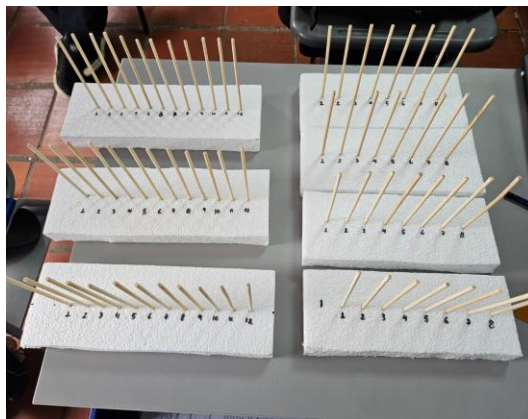


Figura 25. Dispositivo de conteo para el dado de ocho y doce caras

Para las chaquiras, se generarán tantas bolsas como grupos haya. En cada una de ellas, se garantizará un mínimo de chaquiras de cada color para asegurar que, en el conjunto total de lanzamientos, cada torre utilice exclusivamente un color. Este procedimiento se visualiza en la Figura 26.



*Figura 26. Paquetes de chaquiras para cada grupo según el dado a trabajar*

## Bibliografía

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 8(3), 247–263. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302>

Batanero, C. & Godino, J. D. (2003). Estocástica y su didáctica para maestros. En *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 693-733). Universidad de Granada. [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat\\_maestros/manual/6\\_Estocastica.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat_maestros/manual/6_Estocastica.pdf)

Camilloni, A. R. (1995). *Reflexiones para la construcción de una didáctica para la educación superior*. Universidad Católica de Valparaíso. <https://www.studocu.com/es-ar/document/universidad-tecnologica-nacional/pedagogia-y-didactica-general-metodologia-de-la-investigacion/camilloni-1995-reflexiones-para-la-construccion-de-una-didactica-para-la-educacion-superior/71603102>

Camilloni, A. R. (Ed.) (2007). *El saber didáctico*. Editorial Paidós.

Díaz Barriga, F. & Hernández Rojas, G. (2010). *ses docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (3a ed.). McGraw Hill.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria* (Tesis doctoral). Departamento de Estadística, Universidad de Granada, Granada. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesisemilse.pdf>

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. & Baptista-Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Herrera-Espinosa, V. C. (2018). *Cruzando ríos: Juego para construir nociones de probabilidad en niños de grado sexto* (Trabajo de grado maestría). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/69255>

Martín, M., & Borja i Solé, M. (2007). *La intervención educativa a partir del juego: Participación y resolución de conflictos* (Textos docents No. 335). Edicions Universitat Barcelona.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y competencias ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf)

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas* (Versión 2). Ministerio de Educación Nacional. [https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos\\_Basicos\\_de\\_Aprendizaje\\_Matematicas\\_1.pdf](https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf)

Velásquez Gómez, M. (2014). *Secuencia didáctica: Introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria* (Trabajo de grado maestría). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54035>

Zabala, A. (2007). *La práctica educativa: cómo enseñar*. Graó.