SECCION 12

RELACIONES DE EQUIVALENCIA EN UN CONJUNTO.

Según vimos atrás, toda relación determina de manera única el conjunto de aquellas parejas ordenadas en las cuales la primera coordenada mantiene la relación R con la segunda. Es decir, si conocemos la relación conocemos el conjunto y, si conocemos el conjunto sabemos cuál es la relación.

Nota:

Como $R \subset E \times E$ se dice que R es una relación de E a E y a veces se dice que R es una relación en E, en vez de decir que es una relación de E a E.

Sea A un conjunto. Sea R el conjunto de todas las parejas ordenadas del conjunto $A \times A$ tales que $x = y$ (es decir tales que la primera y la segunda coordenadas sean iguales). La relación R es la relación de igualdad entre elementos de A ó la igualdad es una relación en A.

12.1 Relaciones Reflexivas.

Definición.

Sea E un conjunto y $R\{x, y\}$ una relación. Se dice que R es reflexiva en E, si para todo $x \in E$, x está relacionado consigo mismo (claro está, por la relación R).

Esta propiedad se puede escribir en tres formas distintas, pero equivalentes, a saber:

1) $(\forall x)(x \in E \Longleftrightarrow R\{x, x\})$

2) $(\forall x \in E)(x \, R \, x)$

3) $(\forall x \in E)((x, x) \in R)$

Ejemplos:

1) Para toda recta x en el plano α, x es paralela a si misma. El paralelismo (//) es una relación reflexiva en α ó sea que:

$$(\forall x)(x \in \alpha \Longleftrightarrow x \,//\, x)$$

2) Tomemos el conjunto $\mathbb{Z}$ (los números enteros) y sea $R\{x, y\}$: $x \equiv y \pmod{n}$ que se define así:

"x es congruente con y mod n si y solo si x i y dejan igual residuo al ser divididos por n (siendo n un entero fijo mayor que cero).

Esta relación es reflexiva en $\mathbb{Z}$ puesto que para todo entero x, $x \equiv x \pmod{n}$ ó también:

$$(\forall x)\ (x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \equiv x \pmod{n})$$

12.2 Relaciones Simétricas.

Definición.

Sea E un conjunto. $R\{x, y\}$ una relación. Se dice que R es simétrica en E si para todo $x, y \in E$ se cumple que: si x está en relación R con y entonces y está en relación R con x. También esta propiedad puede escribirse en tres formas equivalentes:

1) $(\forall x, y)\ (R\{x, y\} \Longrightarrow R\{y, x\})$

2) $(\forall x, y \in E)\ (x\,R\,y \Longrightarrow y\,R\,x)$

3) $(\forall x, y \in E)\ ((x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R)$

Ejemplos:

1) Sean $x, y \in \mathcal{L}$. Si $x \,//\, y$ entonces $y \,//\, x$ o sea que: $(\forall x, y)\ (R\{x, y\} \Longrightarrow R\{y, x\})$

Con esto: "//" es una relación simétrica en $\mathcal{L}$.

2) Sean $x, y \in \mathcal{L}$. Si $x \perp y$ entonces $y \perp x$ o sea que la perpendicularidad es una relación simétrica en $\mathcal{L}$.

3) Dados dos enteros x, y; si x divide a y (es decir y/x es un entero) no podemos garantizar que para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, y divida a x. O sea que la relación "divide a" (/) no es simétrica en Z.

12.3 Relaciones Transitivas.

Definición de Transitividad.

Sea E un conjunto y $R\{x, y\}$ una relación. Se dice que R es una relación transitiva en E si para todo x, y, z pertenecientes a E se cumple que: si x está en relación R con y, y, y está en relación R con z, entonces x está en relación R con z. Podemos describirlo de tres formas:

1) $(\forall x, y, z \in E)\ (R\{x, y\} \wedge R\{y, z\} \Longrightarrow R\{x, z\})$

2) $(\forall x, y, z \in E)\ (x R y \wedge y R z \Longrightarrow x R z)$

3) $(\forall x, y, z \in E)\ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Longrightarrow (x, z) \in R)$

Ejemplos:

1) Sea T un conjunto de triángulos. Sea R la relación de semejanza entre triángulos ($\sim$) R es transitiva ya que para todo x, y, z triángulos de T, si $x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

2) Sea $\mathcal{P}(E)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos de E. Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. La relación de contención es transitiva ya que: si $A \subset B \wedge B \subset C$ entonces $A \subset C$.

12.4 Relación de Equivalencia.

Definición.

Sea E un conjunto. $R\{x, y\}$ una relación. Si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva en E, se dice que R es una relación de equivalencia entre objetos de E.

Entonces: Si R es una relación de equivalencia en E se cumplen simultáneamente:

a) $(\forall x)\ (x \in E \Longleftrightarrow R\{x, x\})$

b) $(\forall x, y \in E)\ (R\{x, y\} \Longleftrightarrow R\{y, x\})$

c) $(\forall x, y, z \in E)\ (R\{x, y\} \wedge R\{y, z\} \Longleftrightarrow R\{x, z\})$

Que son respectivamente: reflexividad, simetría y transitividad.

Ejemplos:

1) La relación "$//$" es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}$.

2) La relación "$\sim$" es una relación de equivalencia en T.

3) La relación "congruencia módulo n" es una relación de equivalencia en Z.

4) La relación de contención ($\subset$) no es una relación de equivalencia en $\beta(E)$.

EJERCICIOS.

1) Sea $\beta(E) = \{X / X \subset E\}$

Definamos la relación de "equipotencia" ó "equicardinalidad": se dice que A es equipotente con B ($A \sim B$) si y solo si existe una biyección de A en B; $A \in \beta(E)$, $B \in \beta(E)$. Demostrar que la relación "$\sim$" es una relación de equivalencia en $\beta(E)$.

2) Sea f una aplicación de A <u>sobre</u> B. Definamos la relación: "tiene la misma imagen que" así: x tiene la misma imagen que y si y solo si $f(x) = f(y)$. Demuestre que la relación así definida es una relación de equivalencia en A. (Esta relación también se llama "relación de equivalencia asociada a f)

<u>Notación:</u>

Si $R\{x, y\}$ es una relación de equivalencia escribiremos $x \equiv y \pmod{R}$ (en lugar de $R\{x, y\}$), que se lee: x congruente con y módulo R ó también más simplemente $x \sim y$.

<u>Clase de Equivalencia.</u>

<u>Definición.</u>

Sea E un conjunto. $x \equiv y \pmod{R}$ una relación de equivalencia en E. Al conjunto: $\{y \in E / y \equiv x \pmod{R}\}$ se le llama: la clase de equivalencia de x según R (ó cuando no haya ambiguedad, la clase de equivalencia de x) y se le escribe: E(x).

Entonces: $E(x) = \{y \in E / x \equiv y \pmod{R}\}$

En otras palabras, E(x) es el conjunto formado por elementos de E que están relacionados según R con el elemento x o sea, el conjunto de los elementos de E que son congruentes con x mod R.

Ejemplo:

$x \equiv y \pmod 3$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}(0) = \{y \in \mathbb{Z} \ / \ y \equiv 0 \pmod 3\}$ o sea el conjunto de los enteros que dejan el mismo residuo que "0" al ser divididos por 3.

$\mathbb{Z}(0) = \{3, 6, 9, 12 \ldots\ldots\ldots -3, -6, -9 \ldots\ldots\}$

Hallar: $\mathbb{Z}(1)$, $\mathbb{Z}(2)$
Compruebe: $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}(4)$.

Observaciones.

1) $Z(1)$, $Z(2)$, $Z(3)$, son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{Z}$.

2) Existen solo tres clases de equivalencia en $\mathbb{Z}$ cuando se tiene la relación $x \equiv y \pmod 3$.

3) $\mathbb{Z}(1) \cap \mathbb{Z}(2) = \emptyset$; $\mathbb{Z}(1) \cap \mathbb{Z}(3) = \emptyset$; $\mathbb{Z}(2) \cap \mathbb{Z}(3) = \emptyset$

4) $\mathbb{Z}(1) \cup \mathbb{Z}(2) \cup \mathbb{Z}(3) = \mathbb{Z}$

Hay una conexión muy íntima entre las relaciones de equivalencia y las particiones de un conjunto. Para comprender esta conexión entraremos a estudiar algunos teoremas sobre las relaciones equivalencia después de ilustrar la situación con otro ejemplo:

Sea $I = \{0, 1, 2, 3\}$. Sea $x \equiv y \pmod 4$ una relación de equivalencia.

Sean: $\mathbb{Z}(0) = \{y \in \mathbb{Z} \ / y \equiv 0 \pmod 4\}$

$\mathbb{Z}(1) = \{y \in \mathbb{Z} \ / y \equiv 1 \pmod 4\}$

$\mathbb{Z}(2) = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv 2 \pmod 4\}$

$\mathbb{Z}(3) = \{y \in \mathbb{Z} \ / y \equiv 3 \pmod 4\}$

$\mathbb{Z}(4) = \mathbb{Z}(0)$, es decir existen solo cuatro clases de equivalencia según R.

Consideremos la aplicación:

$$X : I \longrightarrow \beta(\mathbb{Z}), \quad \text{siendo } I = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$i \longmapsto X_i = \mathbb{Z}(i)$$

Tenemos así la familia $(X_i)\, i \in I = \{\mathbb{Z}(0), \mathbb{Z}(1), \mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}(3)\}$

Ahora, si $i \neq j$ entonces $\mathbb{Z}(i) \cap \mathbb{Z}(j) = \emptyset$ para cualquier $i, j \in I$.

Puede verse que la familia $(X_i)\, i \in I$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

Pasemos, ahora sí, a estudiar los teoremas prometidos:

Teorema 1:

Sea $x \equiv y \pmod{R}$ una relación de equivalencia en E. Entonces las clases de equivalencia $E(x)$ son no vacías.

Demostración:

Como $E(x) = \{y \in E / y \equiv x \pmod{R}\}$ y dado un elemento arbitrario $x \in E$ entonces $x \equiv x \pmod{R}$ puesto que R es reflexiva.
Luego $x \in E(x)$.

Teorema 2:

Sea $x \equiv y \pmod{R}$ una relación de equivalencia en E. Entonces dos clases de equivalencia o son iguales o son disjuntas. Es decir: para todo $x, y \in E$ se cumple: $(E(x) \cap E(y) = \emptyset)$ ó $(E(x) = E(y))$.

Demostración:

Sean $x, y \in E$; veamos que si $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$ entonces $E(x) = E(y)$. Obsérvese que esta relación es equivalente a la que el teorema pide demostrar.

Si $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$, existe $z \in E(x) \cap E(y)$

$$\Longrightarrow \quad z \in E(x) \ \wedge \ z \in E(y)$$

o lo que es lo mismo: $z \equiv x \pmod{R} \wedge z \equiv y \pmod{R}$

O También: $x \equiv z \pmod{R} \wedge z \equiv y \pmod{R}$ puesto que R es simétrica. Por último, por la transitividad de R, $x \equiv y \pmod{R}$.

Hemos demostrado entonces que si $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset$ entonces $x \equiv y \pmod{R}$. Veamos ahora que $x \equiv y \pmod{R}$ es equivalente a $E(x) = E(y)$. En efecto:

a) Supongamos que $x \equiv y \pmod{R}$ y veamos que $E(x) = E(y)$.

i) Veamos que $E(x) \subset E(y)$
Si $z \in E(x) \Longrightarrow z \equiv x \pmod{R}$. Además como $x \equiv y \pmod{R}$ tenemos que $z \equiv y \pmod{R}$ y por lo tanto $z \in E(y)$ o sea que $E(x) \subset E(y)$.

ii) Veamos que $E(y) \subset E(x)$
Si $z \in E(y)$ entonces $z \equiv y \pmod{R}$ y como $x \equiv y \pmod{R}$ entonces $y \equiv x \pmod{R}$ y por lo tanto $z \equiv x \pmod{R}$. Luego $z \in E(x)$.

b) Probemos ahora que si $E(x) = E(y)$ entonces $x \equiv y \pmod{R}$ para cualquier $x, y \in E$.
Si $E(x) = E(y)$, tenemos que $x \in E(x)$ (por la reflexividad), luego $x \equiv y \pmod{R}$.

Hemos probado así que: $E(x) \cap E(y) \neq \emptyset \Longrightarrow E(x) = E(y)$
Lo que es equivalente a: $(E(x) \cap E(y) = \emptyset)$ ó $(E(x) = E(y))$

En los dos teoremas anteriores se ha probado que las clases de equivalencia son no vacías y que si $E(x) \neq E(y)$ entonces $E(x) \cap E(y) = \emptyset$. Es decir: dos clases de equivalencia distintas son disjuntas.

<u>Definición.</u>

Sea $x \equiv y \pmod{R}$ una relación de equivalencia entre elementos de E. Al conjunto $\{E(x) / x \in E\}$ se le llama conjunto cociente de E por R y se le escribe E/R.

En otras palabras, el conjunto cociente de E por R es el conjunto formado por todas las clases de equivalencia módulo R de los elementos de E.

Ejemplos:

1) $x \equiv y \pmod{n}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}/R = \{ \mathbb{Z}(0), \ \mathbb{Z}(1), \ \mathbb{Z}(2) \ \ldots\ldots \ \mathbb{Z}_{n-1} \}$$

2) Sea $f: A \longrightarrow B$ una aplicación.

La relación x es congruente con y ó x tiene la misma imagen que y si y solo si $f(x) = f(y)$ es decir $x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$.

Con esto, para todo $x \in A$, la clase de equivalencia de x según esta relación es $f^{-1}\langle \{f(x)\} \rangle$

Entonces: $A(x) = f^{-1}\langle\{f(x)\}\rangle = \{y \in A / f(y) = f(x)\}$

Luego: $A/R = \{f^{-1}\langle\{f(x)\}\rangle \ / x \in A\}$.

EJERCICIO. Demostrar que la aplicación:

$$\varphi: \begin{array}{l} E \longrightarrow E/R \\ x \longmapsto E(x) \end{array}$$

donde R es una relación de equivalencia en E, es epiyectiva.

Proposición 1:

Sea E un conjunto y R una relación de equivalencia en E. El conjunto cociente E/R es una partición de E.

Demostración:

i) Los elementos del conjunto cociente son subconjuntos $(E(x))$ no vacios de E. (Ya probado)

ii) La unión de las clases de equivalencia es igual al conjunto E ya que para todo $x \in E$, $x \in E(x)$ y por tanto $x \in \bigcup E(x)$.
Entonces E/R es un recubrimiento de E.

iii) Veamos que los elementos de E/R son disjuntos dos a dos: Sean $E(x)$, $E(y)$ elementos distintos de E/R. Entonces $E(x) \cap E(y) = \emptyset$ (teorema 2).

Con esto, toda relación de equivalencia entre elementos de E define una partición en E.

Proposición 2:

Sea $(X_i)\, i \in I$ una partición de E. La relación definida así: "$x \in E$ y existen algunos $i \in I$ tal que $x \in X_i \wedge y \in X_i$" es una relación de equivalencia en E.

Podemos escribir esta relación así:

$$x \in E \wedge (\exists\, i \in I)(x \in X_i \wedge y \in X_i)$$

O sea que toda partición de E define una relación de equivalencia en E. (Demuéstrelo).