Localización 3D y determinación del tamaño de partículas micrométricas opacas por medio de holografía digital en línea

Yaneth Marcela Torres Garcia

Grupo de Óptica Aplicada

Departamento de Física

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá - Abril de 2010

Localización 3D y determinación del tamaño de partículas micrométricas opacas por medio de holografía digital en línea

Yaneth Marcela Torres Garcia

Tesis de Maestría para optar al título de
Magíster en Ciencias Física

Dirigido por:
Ph.D. Freddy Alberto Monroy Ramírez

Grupo de Óptica Aplicada

Departamento de Física

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá - Abril de 2010

Resumen

En este trabajo se implementa un arreglo experimental de holografía de Fraunhofer en línea, con una muestra de partículas opacas micrométricas como objeto. La reconstrucción del holograma, se realiza de forma numérica, utilizando la transformada wavelet. A partir de esta reconstrucción, se calcula el valor del contraste y se encuentra la coordenada axial en la que este valor presenta un máximo. Esta coordenada, corresponde a aquella distancia de reconstrucción que coincide con la utilizada en el proceso de registro. Una vez calculada la imagen de reconstrucción para la coordenada axial apropiada, se determina el valor del diámetro para cada una de las partículas en la muestra. Utilizando los resultados de esta medida, se elabora el histograma de distribución de tamaño de grano en la muestra.

PALABRAS CLAVE: *Holografía de Fraunhofer, transformada wavelet, localización axial*.

A mi mamá

Agradecimientos

Quiero manifestar mis sinceros agradecimientos a todos aquellos sin los cuales no hubiese sido posible la culminación de este trabajo,

A mi familia, por su amor y constancia.

A Combustión Ingenieros Ltda., por la oportunidad que me han brindado de trabajar en su empresa, y el apoyo que me han ofrecido.

A Oscar Julián Rincón y Ricardo Amézquita, por su invaluable amistad, y su aporte en la culminación de esta tesis.

Al profesor Freddy Monroy, por su paciencia y su labor como director de esta tesis.

A Aura y Sergio, por todos estos años de amistad y apoyo permanente.

A los miembros del Grupo de Óptica Aplicada, quienes a través de sus constantes preguntas y aportes, contribuyeron a la consolidación y desarrollo del tema de este trabajo.

A los que aún estando lejos, me brindan su alegría, cariño y apoyo incondicional.

Yaneth Marcela Torres Garcia

Índice general

Resumen II

Agradecimientos IV

Introducción X

1. Caracterización de Partículas micrométricas 1
- 1.1. Método Sieve . . . 2
- 1.2. Método de Sedimentación . . . 3
- 1.3. Métodos Microscópicos . . . 4
- 1.4. Métodos Acústicos . . . 5
  - 1.4.1. Espectroscopía Acústica de Atenuación . . . 6
  - 1.4.2. Análisis espectral electroacústico . . . 6
- 1.5. Métodos de difracción de luz Láser . . . 7
- 1.6. Método Holográfico . . . 9

2. Teoría Preliminar 12
- 2.1. Holografía de Fraunhofer en línea . . . 12
  - 2.1.1. Cálculo de la intensidad en el plano de registro . . . 16
- 2.2. Transformada wavelet . . . 19
  - 2.2.1. Características de la función wavelet generadora . . . 22
- 2.3. Función wavelet en holografía de Fraunhofer en línea . . . 24
  - 2.3.1. Recuperación de $O(x, y)$ . . . 27
  - 2.3.2. Consideraciones sobre el parámetro σ . . . 28

3. Procedimientos 31
- 3.1. Etapa de Simulación y Procedimiento Numérico . . . 31
  - 3.1.1. Simulación del proceso de registro . . . 31
  - 3.1.2. Simulación del proceso de reconstrucción . . . 34
  - 3.1.3. Simulación del Registro y reconstrucción de una muestra de partículas . . . 35
- 3.2. Procedimiento Experimental . . . 41
  - 3.2.1. Arreglo experimental . . . 41

3.2.2. Descripción de la muestra de partículas analizada 42

4. Resultados y Análisis **45**
4.1. Partículas micrométricas ubicadas en un mismo plano 46
4.1.1. Resultados obtenidos 49
4.2. Partículas Micrométricas en Planos Distintos 50
4.2.1. Determinación del Diámetro de Partículas en Planos Distintos . . . 54

Conclusiones y Perspectivas **69**

A. Apéndice A. Intensidad en un holograma de Fraunhofer en línea **72**
A.1. Objeto circular 76

Bibliografía **78**

Índice de Tablas

3.1. Valores de los parámetros utilizados en el cálculo de la función wavelet base $\Psi_a^G(x, y)$. 33
3.2. Tabla comparativa de valores de diámetro medido y simulado para una muestra de 25 partículas idénticas 38
3.3. Tabla comparativa de valores de diámetro medido y simulado para partículas de distinto tamaño 39

4.1. Datos obtenidos a partir del análisis de las 35 máscaras seleccionadas. . . 53

Índice de Figuras

1.1. Clasificación de partículas industriales y no industriales 2
1.2. Método Sieve 3
1.3. Método de Sedimentación 4
1.4. Imagen obtenida mediante microscopía electrónica de transmisión 5
1.5. El efecto electroacústico [13]. 7
1.6. Difracción de luz láser por una muestra de partículas 8
1.7. Proceso de registro y reconstrucción en holografía de partículas. 10

2.1. Figura explicativa sistema de coordenadas. 13
2.2. Formulación de Rayleigh-Sommerfeld 14
2.3. Vista de perfil función wavelet 20
2.4. Limitación del parámetro sigma por el tamaño del sensor 28
2.5. Valor de sigma en función de z 30

3.1. Simulación de un objeto circular con un diámetro de 100 μm. 32
3.2. Arreglo experimental simulado. 32
3.3. Perfil de intensidad para la función wavelet generadora 34
3.4. Simulación de la intensidad registrada para un disco circular 35
3.5. Simulación de la intensidad reconstruida para un disco circular 36
3.6. Simulación del registro y reconstrucción de un holograma en línea para una muestra de partículas 37
3.7. Aplicación de un umbral de intensidad a la imagen reconstruida de una muestra de partículas 38
3.8. Contraste en función de z_0 para una muestra de partículas simulada 41
3.9. Arreglo experimental para el registro de hologramas en línea. 42
3.10. Fotografia mediante microscopio electrónico de barrido de una porción de la muestra. 43
3.11. Histograma con la distribución de diámetros de las partículas de la muestra. 44

4.1. Recta de ajuste para las medidas obtenidas a partir de la reconstrucción del holograma para la tarjeta USAF. 46
4.2. Cambio en la determinación del ancho de las barras del grupo 3, elemento 1, cuando varía la coordenada axial z. 47

4.3. Esquema explicativo de procedimientos numéricos implementados 48
4.4. Holograma registrado y gráfica de localización axial para una muestra de partículas con z_0 = 18.3 cm. 55
4.5. Reconstrucción del holograma para una muestra de partículas ubicadas en tres posiciones axiales distintas 56
4.6. Aplicación del umbral en la reconstrucción de intensidad 57
4.7. Localización de las coordenadas (x,y) para las partículas de prueba 58
4.8. Resultados experimentales variando la distancia axial 59
4.9. Cálculo del diámetro de las partículas en la muestra para dos coordenadas z 60
4.10. Fotografía de partículas de prueba en dos planos de observación. 61
4.11. Disposición de tres planos distintos para el registro de un holograma. . . . 61
4.12. Registro y reconstrucción del holograma para partículas de prueba ubicadas en planos distintos. 62
4.13. Contraste de la matriz de reconstrucción en función de z para un holograma de tres placas. 62
4.14. Reconstrucción incial del holograma para tres placas. 63
4.15. Máscaras utilizadas en el cálculo del contraste para partículas de prueba ubicadas en tres planos distintos. 63
4.16. Esquema explicativo localización axial para planos sucesivos. 64
4.17. Aplicación de máscaras sobre el holograma de partículas de prueba en tres planos distintos. 64
4.18. Valores máximos del contraste en función de la distancia para las 35 máscaras seleccionadas. Los círculos destacan el valor de los planos en los cuales se reconstruyen las partículas. Las unidades son pixeles (px) para el plano xy, y centímetros (cm) para la coordenada axial. Los diferentes colores para los puntos, organizados en la tabla, proporcionan el valor del contraste máximo en cada región. 65
4.19. Reconstrucción del holograma para tres planos de enfoque. 66
4.20. Distribución de diámetros de partículas para tres planos de enfoque. 67
4.21. Localización 3D para partículas en tres planos de enfoque. 68

Introducción

Son diversos los productos y procesos en la industria, ciencia y tecnología, que involucran partículas micrométricas como constituyentes de su materia prima. Las características físicas y químicas de estas partículas, determinan la calidad y eficiencia de los productos y procesos de los que hacen parte.

El campo de estudio de partículas de tamaños micro y nanométrico, involucra diversas áreas de la física, química e ingeniería. La determinación de propiedades tales como el tamaño de grano, es un aspecto de gran importancia que determina la calidad en la elaboración de cementos y pinturas para automóviles, por citar solo dos ejemplos. Asimismo, esta medida guarda una estrecha relación con la eficiencia de procesos industriales tales como la adhesión y el secado de pinturas [1, 2].

Debido a su importancia, se han desarrollado una gran variedad de técnicas de medición del tamaño de partículas para muestras granulares en un amplio rango que va de unos pocos, a cientos de micrómetros. Dentro de estas técnicas, existen aquellas basadas en el análisis de imágenes, entre ellas la holografía digital. Este método, realiza el
registro holográfico de la información de la muestra de interés, codificada en un patrón de interferencia, sobre un sensor de estado sólido. Con la aplicación de diversas herramientas numéricas, es posible reconstruir el campo óptico de las partículas de la muestra, y extraer datos relacionados con sus características de tamaño, forma y movimiento.

El inicio de los primeros trabajos desarrollados en lo que se denomina holografía de partículas, se remontan a 1962 con Bernard Silverman y sus colaboradores en los Laboratorios de Investigación de la Fuerza Aérea en Bedford, Massachussets [3, 4]. En esta ocasión, se utilizaron las sombras de unas partículas de prueba producidas por la luz de un láser, para determinar su tamaño. La principal dificultad encontrada en la determinación de las medidas, se encontraba en el efecto de la difracción sobre los bordes de las partículas, debido al uso de una fuente de luz coherente como haz de iluminación.

Posteriormente, Glenn Tyler y sus colaboradores, realizaron un exhaustivo estudio de las principales características de lo que se conoce como holografía de Fraunhofer o de

campo lejano [5]. A estos estudios, les siguieron inumerables pruebas experimentales que empezaron a consolidar la holografia de partículas, como una herramienta valiosa en el estudio de muestras con tamaños de grano micrométrico [6]. El desarrollo posterior de herramientas digitales de análisis de imágenes, que dieron lugar al surgimiento de la holografía digital, hicieron posible la exploración de un amplio número de técnicas de reconstrucción numérica, para hologramas de partículas de diversa naturaleza y tamaño.

Dentro de las múltiples herramientas utilizadas para el estudio de sistemas de partículas micrométricas, se encuentra la transformada wavelet [7, 8]. Esta herramienta del procesamiento de imágenes, permite realizar una descomposición en tiempo y frecuencia, de la información de la señal analizada. Su uso dentro de la reconstrucción de hologramas digitales, ha permitido identificar dentro de sus parámetros, valores relacionados con las propiedades físicas de los objetos que son analizados y la implementación de filtros para la imagen virtual o gemela en configuraciones de holografía fuera de eje [9].

En este trabajo, se muestra el estudio del tamaño y la localizacion axial de partículas micrométricas dispuestas en un arreglo experimental de holografía de Fraunhofer en línea. El análisis de estas propiedades en las muestras involucradas, es efectuado sobre las imágenes obtenidas después de realizar el proceso de reconstrucción de los hologramas registrados. Este proceso de reconstrucción, es llevado a cabo en forma numérica, aplicando los principios de la transformada wavelet.

El texto está dividido en cuatro capítulos: En el primero, se realiza una breve descripción de algunos de los métodos de caracterización de partículas más relevantes, utilizados en la actualidad. Dentro de esta revisión, se incluyen las principales propiedades del método holográfico.
En el segundo capítulo, se muestran los principales desarrollos teóricos relacionados con la holografía de Fraunhofer en línea y la transformada wavelet, que constituyen la base para la construcción de las herramientas numéricas con las cuales se realizará el análisis de los datos experimentales.
El tercer capítulo, comprende una descripción detallada de las etapas que componen el desarrollo de este trabajo: Una etapa inicial de simulación numérica de los procesos de registro de los hologramas, y reconstrucción de la amplitud del campo óptico del objeto. En este proceso, se definen algunos parámetros y herramientas útiles en el análisis de la información almacenada en los hologramas registrados. Para el desarrollo de la segunda etapa, se describen las principales características de la implementacion experimental y el procedimiento realizado para el estudio de las partículas de la muestra.
El cuarto y último capítulo, describe los principales resultados obtenidos a partir de los datos obtenidos durante la implementacion experimental, junto con su análisis. Finalmente, se presentan algunas conclusiones y perspectivas del trabajo.

Capítulo 1

Caracterización de Partículas micrométricas

La caracterización del tamaño y forma de partículas micrométricas, constituye una valiosa herramienta en el desarrollo de nuevas tecnologías y productos en áreas de la industria y la investigación científica. El tamaño de las partículas que conforman algunos de los productos industriales más comunes, y que hacen parte de importantes procesos químicos, está comprendido en un rango que va de 10 nm hasta 1000 μm. En este intervalo, pueden encontrarse los elementos constituyentes de sólidos tales como geles, látex, pinturas para autos, pigmentos, azúcares, polvos farmacéuticos, fibras de asbesto o las burbujas en fluidos o sólidos gelatinosos, entre otros. La figura 1.1 muestra la distribución de algunas partículas de naturaleza industrial y no industrial, clasificadas por rango de tamaño [1].

En algunas áreas de la investigación científica, los estudios para la caracterización de partículas suspendidas en el aire, tienen gran relevancia en diversos campos de la ciencia: En medicina, por ejemplo, algunos de estos estudios han determinado que las partículas que producen un mayor daño en el sistema respiratorio, son aquellas cuyo tamaño se encuentra por debajo de 2,5 μm. Adicionalmente, estos estudios también han permitido determinar que estas nocivas partículas, tienen un gran potencial para acelerar reacciones cuyo resultado final es la formación de ozono [2].

Dentro de la industria, existen también muchos procesos para cuyo desarrollo es esencial el conocimiento que sobre sus constituyentes, proporciona la tecnología de partículas. Se pueden mencionar entre otros: Adhesión, catálisis, elaboración de detergentes, electro-deposición, procesamiento de alimentos, pulverizado, intercambio de iones, lubricación, polimerización, precipitación, refinamiento de azúcares y purificación de agua. Asimismo, algunas de las propiedades físicas de los materiales granulares como viscosidad, fluidez, filtración, estabilidad de emulsiones, capacidad abrasiva, desempeño

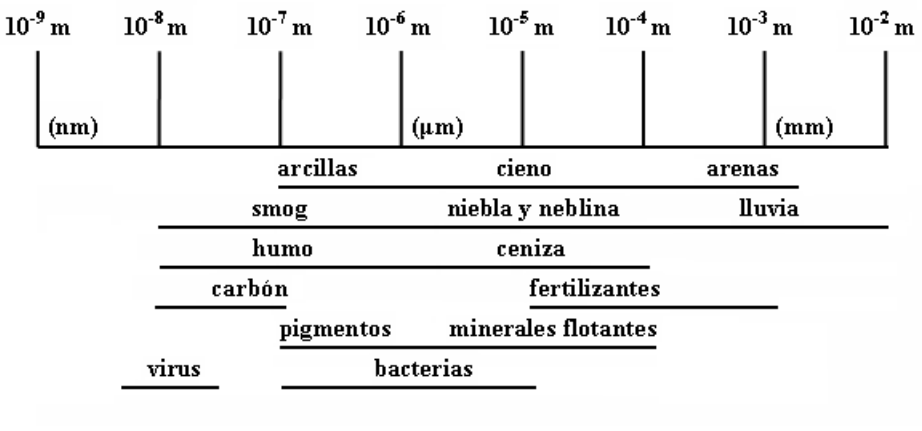


Figura 1.1: Orden de magnitud de algunas partículas industriales y no industriales [1].

de cementos, resistencia de cerámicas y características de color, fineza, brillo y potencia de cubrimiento en pinturas, dependen de la adecuada determinación del tamaño y forma de los granos que los componen.

Para 1981, existían alrededor de 400 métodos distintos para caracterizar partículas. Dentro de los métodos más antiguos se destacan el método Sieve y el análisis por sedimentación. Con el paso de los años, el surgimiento del láser, los computadores y la automatización, han provocado la sustitución gradual de algunos de estos métodos por otro no invasivos, denominados de ensamble; estos últimos se basan en la interacción de la luz con la materia como los métodos microscópicos, el análisis por dispersión y el método holográfico [1].

Los objetos que se analizan a través de los métodos de caracterización de partículas, son objetos volumétricos cuya descripción espacial requiere de tres parámetros correspondientes a su longitud, ancho y profundidad. Para facilitar esta descripción, la mayoría de las técnicas utilizadas para la medición del tamaño de partículas, las considera como esferas que pueden ser descritas completamente a través de la medida de un único parámetro correspondiente a su diámetro. A continuación, se dará una breve descripción de algunos de los métodos para la determinación del tamaño de partículas más utilizados.

1.1. Método Sieve

El método Sieve [1], es la técnica más antigua en la caracterización del tamaño de partículas, permitiendo clasificarlas en un rango que va de 5 μm hasta 10 cm. Se basa en la utilización de un conjunto jerarquizado de tamices, como el que se muestra en la figura

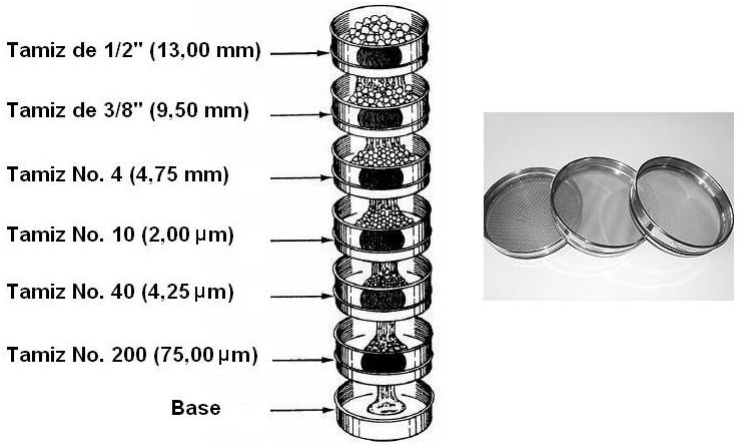


Figura 1.2: Pila de tamices del método Sieve. Se indica el tamaño del orificio que compone cada tamiz representado [10].

1.2, con orificios de forma cuadrada o circular de tamaño variable. Estas pilas de tamices están tejidas en latón o alambre de acero inoxidable. Para una determinada muestra, la fracción del material con un tamaño mayor al de los elementos de la malla será retenida, mientras que la fracción mas pequeña será transmitida al tamiz siguiente. De esta forma, se logra una separación de la muestra por grupos de diferente tamaño [10]. El paso de las partículas a través de las mallas es estimulado con movimientos horizontales o verticales, producidos mediante técnicas electromagnéticas, mecánicas o ultrasónicas.

Los resultados de las medidas realizadas a través de esta técnica, son presentados como porcentajes de peso relativo respecto al peso total de la muestra inicial, según su tamaño. Existen dos factores importantes que determinan la fiabilidad de estas medidas: El primero de ellos es el número de granos que componen la muestra: por ejemplo, una porción con un peso entre 75 g - 125 g es ideal para un tamiz de 8 pulg de diámetro. El segundo factor, está relacionado con la orientación de las partículas que componen la muestra, respecto a la geometría de los orifcios del tamiz: por ejemplo, el diámetro en formas circulares ó la diagonal para formas cuadradas. Este factor condiciona el paso de los granos a través de la pila de tamices, y por tanto, influye en el su correcta clasificación.

1.2. Método de Sedimentación

El método de sedimentación [1], se basa en la medida del cambio en la concentración de partículas en suspensión con el tiempo, cuando la muestra es sometida a la acción de campos gravitacionales o centrífugos (Figura 1.3) [11]. El rango de tamaño que puede determinarse mediante sedimentación varía entre 0,05 μm y 100 μm. Esta técni-

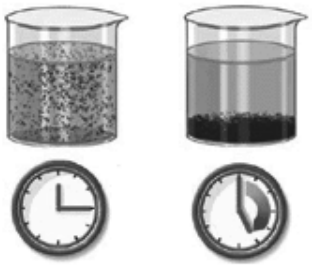


Figura 1.3: Representación del principio básico del método de Sedimentación [11].

ca constituye principalmente un proceso de clasificación, y requiere de algunas medidas adicionales que permitan determinar el tamaño de grano en función de su concentración. Estas medidas, involucran propiedades como la masa, densidad de la suspensión y la dispersión de radiación. Dentro del método, existen alrededor de ocho arreglos experimentales para su implementación, que se diferencian en la disposición de las partículas y la forma de aplicación de los campos de interacción.

La determinación del tamaño de grano se lleva a cabo a través del cálculo de la ecuación de Stokes. Esta ecuación, relaciona el diámetro de una partícula con algunas de sus propiedades, tales como: velocidad, densidad efectiva y aceleración, y con la densidad y viscosidad de suspensión del líquido. La ecuación de Stokes, es válida para objetos esféricos que se mueven en fluidos con un número de Reynolds menor a 2100. Para satisfacer estas condiciones, los experimentos deben ser realizados para muestras con una baja concentración de partículas, evitando así interacciones no deseadas. Adicional a esto, el tamaño de grano debe restringirse, ya que para elementos de tamaño considerable, no puede garantizarse la conservación de un flujo laminar en el medio de suspensión, pues sus grandes velocidades pueden ocasionar turbulencias.

1.3. Métodos Microscópicos

Los métodos microscópicos [1], involucran procedimientos de captura, procesamiento y análisis de imágenes. La captura de la imagen puede ser realizada utilizando luz, o bombardeo de electrones. En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de imagen obtenida a través de esta técnica, donde se observa la escala de medida en nanómetros [12]. Para tamaños de grano del orden de los micrómetros y nanómetros, los microscopios de transmisión, especialmente los que utilizan luz polarizada, resultan ser los más apropiados, ya que permiten una completa visualización de las siluetas de las partículas. La resolución lateral y axial de la imagen, puede ser incrementada usando microscopios confocales, con los que a su vez, se obtiene información de la porosidad de los objetos de interés. El límite de tamaño mas bajo con aceptable precisión para la microscopia óptica conven-

cional es alrededor de 3 μm. Con el desarrollo del microscopio de escaneo de campo cercano, en el que se dispone de una fibra óptica colocada muy cerca de la muestra, este límite ha sido reducido por debajo de las micras. La calibración es necesaria para todos los métodos microscópicos y comúnmente se realiza usando esferas de tamaño conocido o rejillas de calibración.

Dentro de las principales ventajas de la técnica microscópica, se encuentran la obtención de información sobre el tamaño, forma y textura de la superficie de las partículas en estudio, en un rango de medida comprendido entre 0,001 μm y 200 μm [1]. Sin embargo, esta información está limitada a regiones en un plano proyectado 2D de las muestras, y el número de partículas enfocadas que puede ser analizado, resulta limitado por la profundidad de campo. Otro aspecto importante, es la orientación de las partículas en el volumen preparado, que al cambiar, altera el resultado de forma considerable.

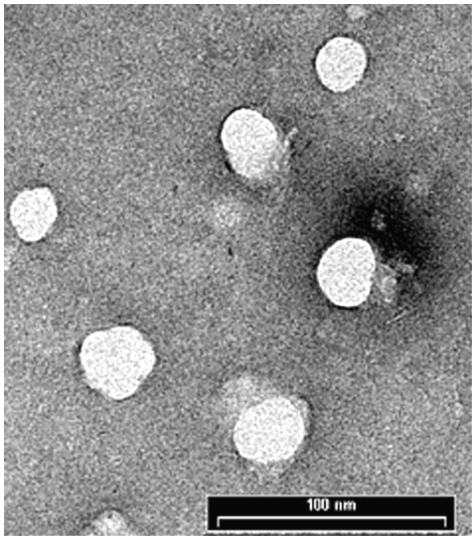


Figura 1.4: Imagen de pululano (polisacárido) obtenida mediante microscopía electrónica de transmisión (TEM) [12].

1.4. Métodos Acústicos

Cuando el sistema a ser estudiado posee una concentración de partículas por encima de un 60 % del volumen total, es usual el uso de análisis acústicos para determinar el tamaño de las partículas, debido a que las ondas sonoras pueden atravesar este tipo de suspensiones. Existen dos modalidades principales para el desarrollo del análisis acústico: La espectroscopia acústica de atenuación y el análisis electroacústico [1, 13].

1.4.1. Espectroscopía Acústica de Atenuación

La espectroscopia acústica, está basada en la medida del espectro de atenuación de las ondas sonoras que atraviesan una solución concentrada como función de su frecuencia, comprendida típicamente entre 1 MHz y 150 MHz. La atenuación, es debida a las interacciones de la onda de sonido con el líquido del medio y con las partículas en suspensión. La espectroscopía acústica puede ser utilizada para tamaños de grano entre 0,01 μm y 1000 μm sobre un rango de concentración de 0,5 % a 50 % por volumen [1].

El funcionamiento de un dispositivo bajo este principio, consiste en la transmisión de ondas de sonido de varias frecuencias por un transductor ultrasónico a través de la suspensión. Un segundo transductor recibe las ondas planas atenuadas por la muestra. La detección del espectro de atenuación se realiza utilizando técnicas de transmisión, pulso-eco o interferometría. Las mediciones extraídas a partir del espectro de atenuación, constituyen la caracterización de una suspensión particular, con una determinada distribución de tamaño y concentración de partículas.

Si las propiedades físicas del sistema, tales como la densidad, son conocidas, la atenuación puede ser predecida y modelada a través de un conjunto de ecuaciones fundamentales. En el planteamiento de estas ecuaciones, se asume que el sistema se compone de esferas sin múltiple dispersión para una onda plana de radiación incidente. El conjunto de ecuaciones resultante, es expresado a través de matrices de conversión que relacionan el espectro de atenuación con la distribución de tamaño de las partículas; estas matrices de conversión son multidimensionales, por lo que encontrar una solución no resulta sencillo, aún con los modernos sistemas de cálculo.

La aplicación de este método requiere el conocimiento de las propiedades mecánicas, de transporte y termodinámicas del sistema (partículas y medio), con una precisión del 5 %. Entre los parámetros que deben conocerse se puede mencionar: densidad, coeficiente de atenuación del sonido (como función de la frecuencia), coeficiente de expansión térmica, conductividad térmica, capacidad calorífica, viscosidad del líquido y la rigidez de las partículas. Un cambio en el valor de alguno de estos parámetros podría alterar el resultado de forma significativa.

1.4.2. Análisis espectral electroacústico

A diferencia de la espectroscopia de atenuación acústica, en el análisis electroacústico, las ondas sonoras son generadas aplicando campos eléctricos de alta frecuencia a través de suspensiones coloidales, siendo después detectados. Esto se denomina el efecto electrocinético de amplitud [1]. Las ondas sonoras aparecen debido a que el campo eléctrico alterno empuja las partículas suspendidas hacia atrás y hacia adelante, haciendo que estas oscilen respecto al fluido. Midiendo la amplitud y la fase de las ondas

sonoras en múltiples frecuencias (1-10MHz), la movilidad dinámica de partículas puede ser determinada, proporcionando la concentración y densidad de las mismas. La figura 1.5 [13], esquematiza el arreglo experimental para esta técnica: la celda donde se ubica la muestra consiste en un espacio entre dos electrodos paralelos que se encuentran adheridos a dos barras de vidrio. Un pulso de voltaje alterno, es aplicado a través de los electrodos siendo las ondas de sonido generadas por el movimiento de la partícula en el campo eléctrico detectadas por un transductor. El rango de medida en este caso está entre 0,1 μm y 100 μm de tamaño.

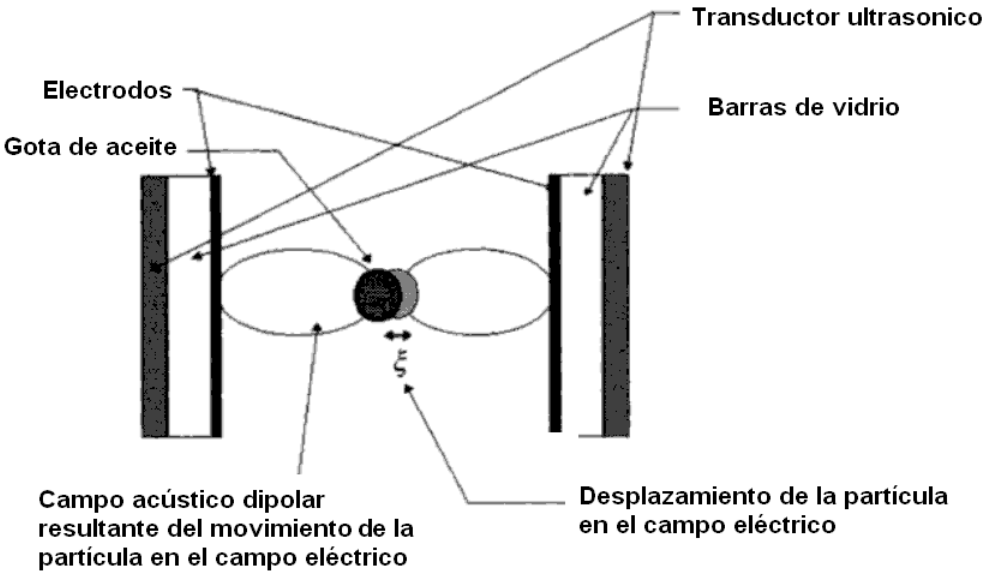


Figura 1.5: El efecto electroacústico [13].

1.5. Métodos de difracción de luz Láser

La dispersión de radiación por partículas opacas tiene su origen en la diferencia de índice de refracción entre el material que las constituye y el medio que las rodea [1]. El sistema de medición para este método, consiste en un haz láser que actúa como fuente de radiación coherente, y una serie de detectores para medir la intensidad de luz dispersada por la muestra, que están localizados en diversas direcciones respecto a aquella con la cual incide el haz (figura 1.6) [14]. Una medida confiable, requiere asegurar que la radiación atraviesa un conjunto homogéneo de partículas en un estado de dispersión conocido y reproducible [15]. Los instrumentos actuales más completos, realizan medidas en un rango angular que va desde 0,02 hasta 140 grados, para tamaños de partícula entre 0,02 μm y 2000 μm.

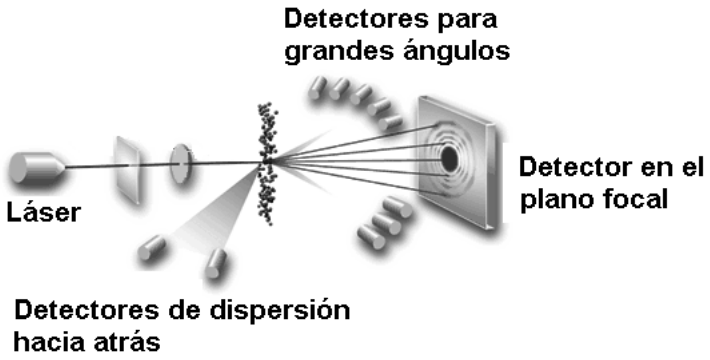


Figura 1.6: Principio de la difracción de luz láser por una muestra de partículas de diverso tamaño.

En la mayor parte de los instrumentos, se utiliza un arreglo de fotodetectores ubicados en posiciones fijas, en lugar de un solo fotodetector para escanear a través de muchos ángulos. Un fotodetector, proporciona una corriente de salida proporcional al producto entre la intensidad de iluminación y el área del detector, razón por la cual los fabricantes de estos instrumentos ubican detectores de áreas pequeñas en regiones cercanas al haz incidente para cubrir ángulos de dispersión pequeños y detectores con áreas progresivamente mayores para los ángulos grandes. La cantidad de luz dispersada hacia los detectores de menor área, proviene de las partículas de gran tamaño y tiene una mayor magnitud que la medida en los detectores de área mayor, que proviene de las partículas pequeñas. De este modo, los diseñadores de estos aparatos realizan un proceso de balanceo que proporciona igual cantidad de información sobre todos los tamaños de partículas.

Formalmente, lo anterior implica que la potencia y el ángulo con el que la radiación es dispersada por un arreglo de partículas con determinadas características, son función del tamaño de grano. Esta relación, cambia con la razón entre el diámetro de las partículas D y la longitud de onda λ de la radiación incidente. Cuando $D/\lambda \gg 1$, los ángulos de dispersión son pequeños (menores que 90º) y la función que representa la potencia de radiación depende del diámetro como D^2. Cuando $D/\lambda \ll 1$, la dispersión es isotrópica y la relación entre la potencia y el diámetro está dada como una potencia D^6. Finalmente, cuando $D/\lambda \approx 1$, la función que describe la potencia dispersiva toma una forma complicada, y su dirección toma un valor de ángulo considerable. [16]

El análisis de los datos en esta técnica es efectuado utilizando la teoría de Mie para patrones de dispersión. Los cálculos que se realizan utilizando las ecuaciones de Mie, requieren el conocimiento de parámetros como: la longitud de onda y el estado de polarización de la radiación incidente, el índice de refracción de las partículas y del medio, y el

ángulo de observación relativo a la iluminación incidente.

Un conjunto de partículas pequeñas, para las cuales la potencia de radiación es débil respecto a las de mayor tamaño, deben agruparse en el volumen adecuado para ser percibidas por el instrumento de medida. De este modo, los resultados en esta técnica involucran el reporte de volúmenes y no cantidad de partículas con determinado tamaño.

1.6. Método Holográfico

De la figura 1.1, puede notarse que algunas de las partículas utilizadas como materia prima en procesos científicos y tecnológicos, tales como los pigmentos, los fertilizantes y la ceniza, tienen tamaños micrométricos. Una resolución del orden de los micrómetros puede alcanzarse a través de técnicas microscópicas convencionales. Sin embargo, si lo que se requiere es el estudio de un volumen dinámico y no de un plano, la profundidad de campo de un sistema de imagen convencional resulta insuficiente. Para un conjunto de partículas con diámetros comprendidos entre 2 μm y 200 μm almacenadas en 1 cm^3, resulta complejo fotografiar todas las partículas enfocadas al mismo tiempo. En un sistema de imagen con una resolución de 10 μm, la profundidad de foco es de solo alrededor de 20 μm. Esta es una de las dificultades que ha tratado de superarse a través del desarrollo de la técnica holográfica.

La técnica holográfica de medición de tamaño de grano fue desarrollada hace alrededor de tres décadas. Desde entonces, ha sido utilizada en el estudio de partículas suspendidas en el aire y en sustancias líquidas, con diámetros comprendidos entre 1 μm y 1000 μm. En un experimento holográfico, las imágenes son formadas en un proceso de dos pasos: el registro y la reconstrucción.

Los montajes ópticos para el proceso de registro, requieren de un mínimo equipamiento, como se observa en la figura 1.7. Uno de los primeros instrumentos utilizados para implementar la técnica holográfica en la medición de tamaño de grano de gotas de niebla, apareció en el trabajo de Silverman y sus colaboradores en 1964 [4]. En la figura 1.7(a) se muestra el arreglo experimental de holografía en línea utilizado para realizar este tipo de medidas. Para el proceso de registro, la fuente en la mayoría de los casos, es un láser pulsado con el cual se obtienen tiempos de exposición por debajo de los nanosegundos, y una resolución del orden de las micras. A continuación, el haz se hace pasar por un filtro espacial, y en algunos casos, es colimado. Después de este proceso, el haz atraviesa el volumen de la muestra en estudio. Algunos arreglos experimentales, disponen de una lente formadora de imagen adicional, que se ubica antes que el holograma sea registrado en algún medio sensible a la luz. Esta imagen 3D de la muestra, puede ser estudiada una y otra vez, enfocando el plano de visión sobre las partículas en diferentes localizaciones axiales, permitiendo así que puedan verse o registrarse, nuevas imágenes en planos 2D.

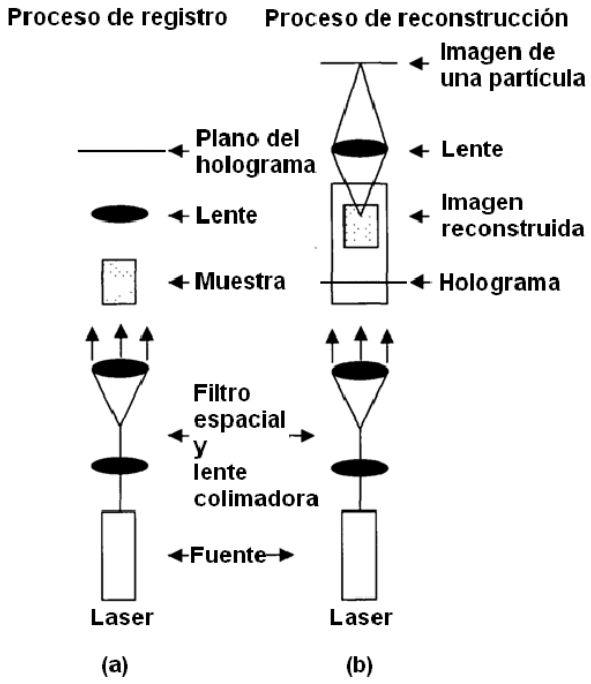


Figura 1.7: Proceso de registro y reconstrucción en holografía de partículas.

En los casos más recientes [6], se dispone de herramientas computacionales para la adquisición y el procesamiento de la información, que hacen parte de los métodos de la holografía digital [17]. Esto permite que puedan utilizarse los mismos procedimientos usados en microscopia para el análisis de las imágenes. Con un conjunto de registros, es posible estudiar propiedades tales como tamaño, forma y orientación de las partículas que constituyen la muestra, despúes de realizada su reconstrucción. Adicionalmente, con una modificación mínima en el experimento, esta técnica permite determinar la trayectoria y velocidad de los objetos en estudio [18, 19].

La reconstrucción de las imágenes de las partículas, puede realizarse de forma experimental, como se muestra en la figura 1.7 (b), o digital. A nivel experimental, la reconstrucción del holograma se obtiene al iluminarlo con una fuente similar a la utilizada en el paso de registro. En esta imagen final, las partículas se observan en sus localizaciones originales dentro del volumen.

A nivel digital, la imagen de las partículas es reconstruida mediante el uso de métodos numéricos, y la localización de los planos de enfoque, también se realiza de forma digital; las partículas se observan en la pantalla de un ordenador, y el dato de posición axial hace parte de los parámetros de la función de reconstrucción que se utilice [20].

Para tamaños de muestra micrométricos, las dimensiones de las partículas en estudio resultan ser mucho menores que las distancias de enfoque de su imagen, por lo que se considera que se encuentran en la región de campo lejano del plano de enfoque. Esto se denomina holografía en línea de Fraunhofer o de campo lejano, y determina el tipo de algoritmos a través de los cuales se reconstruye la imagen del volumen de partículas en forma digital [17]; la información que es analizada digitalmente, corresponde a la intensidad almacenada en un medio sensible a la luz, tal como los CCD o los sensores CMOS.

La información contenida en la intensidad, es considerada como la interferencia entre el patrón de difracción de campo lejano de la sección transversal del objeto, con la iluminación no difractada que actúa como fondo [21, 22]. A través del proceso de reconstrucción, se obtiene la silueta de los objetos, lo que resulta suficiente para la mayor parte de las aplicaciones en el campo de la holografía de partículas.

El uso de la técnica de holografía de Fraunhofer en línea para el estudio de partículas micrométricas, es el principal interés de este trabajo. En este caso, se hace uso de herramientas digitales y numéricas para el registro y reconstrucción de los hologramas. En el capítulo que sigue, se proporcionarán algunas bases teóricas, que permiten desarrollar las herramientas numéricas necesarias para el análisis de la información.

Capítulo 2

Teoría Preliminar

En 1948, la holografía fué propuesta como un método para registrar en un medio sensible a la luz, la información de amplitud y fase del campo óptico difractado por un objeto. Los medios de registro involucrados en holografía, son sensibles únicamente a cambios en valores de intensidad, por lo que la información de fase se encuentra codificada en un patrón de interferencia. Este patrón de interferencia, corresponde a la superposición del campo óptico del objeto con un campo óptico de referencia.

En holografía en línea, el objeto y la fuente de luz se encuentran alineados a lo largo de un eje normal al plano de registro, como se muestra en la figura 2.1. Si se consideran objetos opacos, el haz objeto está compuesto por la difracción de la luz en su sección transversal. El holograma registrado, corresponde al patrón de interferencia entre el haz objeto y el campo de iluminación coherente, que actúa como haz de referencia. En la reconstrucción del holograma, el campo complejo no difractado y las denominadas imágenes real y virtual, que corresponden a los órdenes de difracción +1 y -1, se encuentran sobre la misma línea. Esta superposición de las dos imágenes, ocasiona problemas en la definición de los objetos de interés.

Cuando el tamaño de la partícula es tal que se satisface la condición de campo lejano, el efecto de la imagen gemela sobre la reconstrucción disminuye, haciendo que los bordes de las partículas opacas puedan distinguirse, esto se conoce como holografía en línea de Fraunhofer o de campo lejano [23].

2.1. Holografía de Fraunhofer en línea

Los estudios de la holografía de Fraunhofer, se inician con los trabajos de G.B. Parrent y B.J. Thomson, quienes definen este tipo de hologramas a partir de los patrones de difracción de Fraunhofer para una fuente cuasimonocromática coherente [21, 22]. La aproximación de Fraunhofer, considera que la distancia de la fuente a la apertura difrac-

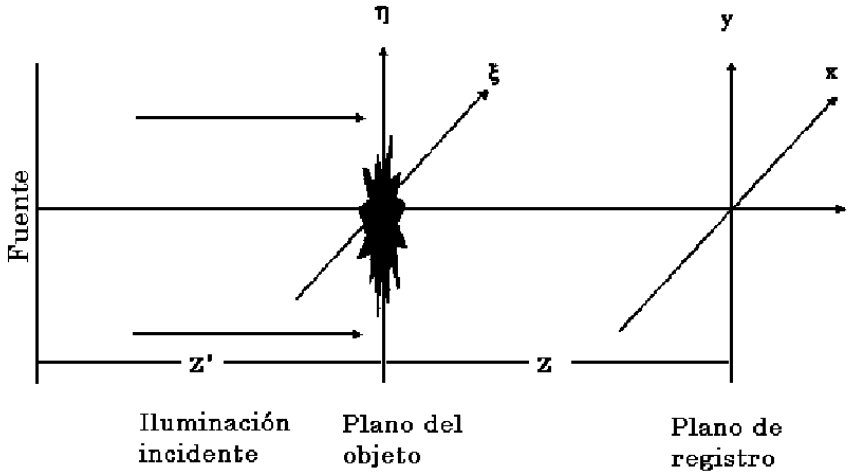


Figura 2.1: Figura explicativa sistema de coordenadas.

tante z' y de la apertura difractante al plano de registro z, es mucho mayor que la máxima dimensión de los objetos en estudio [23, 7]:

$$z \gg \pi(\xi^2 + \eta^2)_{max}/\lambda, \qquad z' \gg \pi(\xi^2 + \eta^2)_{max}/\lambda. \tag{2.1}$$

Parrent y Thomson consideran el caso de objetos opacos o semi-transparentes de sección transversal conocida, que son iluminados con un haz de luz colimado, coherente y cuasi-monocromático. Se considera que las dimensiones del área que alberga los objetos bajo estudio, es mucho mayor que el diámetro de estos objetos, de modo que la aproximación de Fraunhofer está garantizada para las partículas que constituyen la muestra, aunque el área que las contiene se encuentre en la región de campo cercano del plano de registro.

En el caso que se describe a continuación, las partículas son consideradas como objetos opacos que actúan como obstáculos sobre un fondo transparente (figura 2.2). El patrón de difracción para estos objetos, puede encontrarse a partir de la solución de un problema de valor en la frontera, utilizando la formulación de Rayleigh-Sommerfeld para la difracción por una pantalla plana. La solución toma la forma [24],

$$A(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} A(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial n}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{2.2}$$

donde $A(x, y)$ es la amplitud en el plano de registro, $A(\xi, \eta)$ es la amplitud en el plano difractante, que en este caso contiene al objeto, y $\partial/\partial n$ representa la derivada en

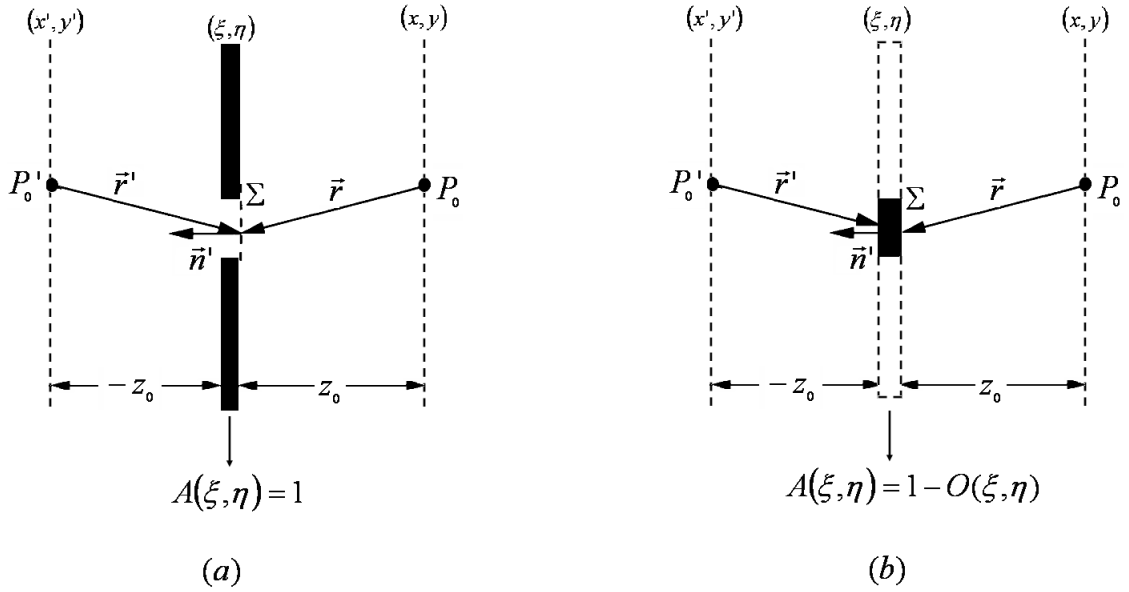


Figura 2.2: Dibujo ilustrativo de la formulación de Rayleigh-Sommerfeld: (a) Para una pantalla oscura con una apertura Σ transparente. (b) Pantalla transparente con una apertura Σ opaca.

la dirección de la normal al plano del objeto.

En la ecuación 2.2, G representa la función de Green, que en este caso está dada por [24]:

$$G(x-\xi, y-\eta) = \frac{exp(ikr)}{r} - \frac{exp(ikr')}{r'}, \tag{2.3}$$

con k el número de onda (k = $2\pi/\lambda$), y donde el vector primado identifica una posición localizada en z = -z_0, como se ilustra en la figura 2.2. Esta función tiene valores nulos sobre el plano de la apertura Σ [24].

Los vectores r y r' están dados por las expresiones,

$$\begin{aligned} r^2 &:= {z_0}^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \\ r'^2 &:= {z_0}^2 + (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplicando la derivada parcial respecto al vector normal a la función 2.3, se obtiene

$$\frac{\partial G}{\partial n} = cos\theta\Big(ik - \frac{1}{r}\Big)\frac{exp(ikr)}{r} - cos\theta'\Big(ik - \frac{1}{r'}\Big)\frac{exp(ikr')}{r'}, \tag{2.5}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y el vector normal al plano objeto $\vec{n}$ y donde θ' es el ángulo entre $\vec{r'}$ y $\vec{n}$.

Para puntos localizados sobre la apertura (condiciones de frontera), se tiene que $\vec{r}$ = $\vec{r'}$ y cosθ = -cosθ'.

Reemplazando la ecuación 2.5 en la ecuación 2.2 y considerando condiciones de frontera sobre $A(\xi, \eta)$, se llega finalmente a una expresión para $A(x, y)$,

$$A(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma}(1 - O(\xi, \eta))(ikr - 1)\frac{cos\theta}{r^2}exp(ikr)d\xi d\eta, \tag{2.6}$$

donde $O(\xi, \eta)$ es la función que describe el objeto y la integración se realiza sobre la región de la apertura, Σ.

Si se considera que la distancia de registro es mucho mayor que la longitud de onda de la iluminación, $r \gg \lambda$, se tiene que $kr \gg 1$. Siendo θ el ángulo entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{n}$, el término $cos\theta$, está dado por $cos\theta$ = z_0/r.

La ecuación 2.6 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$A(x, y) = -\frac{iz_0}{\lambda}\iint_{\Sigma}(1 - O(\xi, \eta))\frac{exp(ikr)}{r^2}d\xi d\eta. \tag{2.7}$$

Al ser expresado r en coordenadas cartesianas, se realiza sobre el radical resultante, una expansión hasta primer orden de la forma,

$$r \approx z_0\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{x - \xi}{z_0}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{y - \eta}{z_0}\Big)^2\Big], \tag{2.8}$$

Con lo que finalmente, la ecuación 2.7 toma la forma:

$$A(x, y) = \frac{exp(ikz_0)}{\lambda z_0}\iint_{\Sigma}(1 - O(\xi, \eta))exp\Big\{\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] - i\frac{\pi}{2}\Big\}d\xi d\eta, \tag{2.9}$$

que corresponde a la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld. En la ecuación 2.9, el término $-i\frac{\pi}{2}$ en la exponencial, representa un desplazamiento en fase de 90º del campo en el plano de registro respecto al campo de iluminación incidente sobre el plano objeto.

2.1.1. Cálculo de la intensidad en el plano de registro

A partir de la ecuación 2.9, es posible calcular la intensidad $I(x,y)$ en el plano de registro. Esta intensidad corresponde al módulo al cuadrado de $A(x,y)$

$$I(x,y) = A(x,y)A^*(x,y). \tag{2.10}$$

Sobre esta última expresión, se opera aplicando las aproximaciones de Fraunhofer dadas por la ecuación 2.1. La expresión para la intensidad queda finalmente expresada como [5],

$$\begin{aligned} I(x,y) = 1 - \frac{2}{\lambda z_0} sen\left(\frac{\pi}{\lambda z}R^2\right)\Re\left[\tilde{O}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0},\tfrac{y}{\lambda z}\right)\right] \\ + cos\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right)\Im\left[\tilde{O}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0},\tfrac{y}{\lambda z}\right)\right] + \tfrac{1}{\lambda^2 z_0^2}\tilde{O}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0},\tfrac{y}{\lambda z}\right)\tilde{O}^*\left(\tfrac{x}{\lambda z_0},\tfrac{y}{\lambda z}\right), \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $R^2 = x^2 + y^2$, y $\Re$ e $\Im$, simbolizan parte real e imaginaria respectivamente. La expresión

$$\tilde{O}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0},\tfrac{y}{\lambda z_0}\right) = \iint O(\xi,\eta) exp\left\{-2i\pi(\tfrac{x}{\lambda z_0}\xi + \tfrac{y}{\lambda z_0}\eta)\right\} d\xi d\eta,$$

representa la transformada de Fourier de la función $O(\xi,\eta)$. La derivación completa de la ecuación 2.11 se encuentra en el apéndice A.

Si $O(\xi,\eta)$ representa una apertura de diámetro d, la función que la define puede ser descrita como:

$$O(\xi,\eta) = circ\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{d/2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{para } \left|\sqrt{\xi^2+\eta^2}/d/2\right| \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.12}$$

La función de amplitud en el plano objeto, está descrita por la función 1 - $O(\xi,\eta)$, que corresponde al caso considerado en la figura 2.2(b).

Al reemplazar en la ecuación 2.11, la función que representa $O(\xi,\eta)$ dada en la ecuación 2.12, la distribución de intensidad toma la forma:

$$I(x,y) = 1 - \frac{\pi d^2}{2\lambda z_0} sen\left[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)\right]\left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}\right)}{\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}}]\right] + \frac{\pi^2 d^4}{16\lambda^2 z_0^2}\left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}\right)}{\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}}]\right]^2, \tag{2.13}$$

donde J_1 representa la función de primer orden de Bessel. La distribución de intensidad descrita por la ecuación 2.13 contiene tres términos: el primero de ellos es una constante que representa la iluminación de fondo normalizada. El tercer término, corresponde a la distribución de intensidad usual asociada con el patrón de difracción de Fraunhofer de una apertura circular. El segundo término, está dado por el producto de la distribución de amplitud del patrón de difracción de Fraunhofer de la función $O(\xi,\eta)$ y una función seno que es independiente del diámetro de la apertura. Este término, es interpretado como un término de interferencia entre el patrón de difracción de una apertura y la iluminación de fondo (haz de referencia)[4]. Esta interpretación de los términos que aparecen en la ecuación 2.13, dan lugar a que la información sobre el plano de registro se denomine holograma en línea de Fraunhofer.

Para lo que sigue, resulta conveniente construir una definición alternativa a la ecuación 2.11 para $I(x,y)$. Sin considerar el término $exp(ikz_0)$ en la integral 2.9, esta ecuación puede considerarse como la descripción de un sistema invariante ante traslación con una respuesta al impulso $h_{z_0}(x,y)$ [1] dada por la expresión

$$h_{z_0}(x,y) = \frac{1}{\lambda z_0} exp\Big[i\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2) - i\frac{\pi}{2}\Big]. \tag{2.14}$$

Para esta clase de sistemas, el campo complejo $A(x,y)$ en el plano de registro, puede ser expresado como la convolución entre la función de entrada $1 - O(\xi,\eta)$, y la función característica del sistema o respuesta al impulso dada en la ecuación 2.14:

$$A(x,y) = [1 - O(x,y)] \otimes h_{z_0}(x,y). \tag{2.15}$$

Calculando $I(x,y)$ a partir de la ecuación 2.10 utilizando la expresión 2.15, se obtiene

[1] Un sistema lineal es invariante ante traslación cuando al tener una señal de entrada x(t) y una señal de salida y(t) relacionadas de modo que $x(t) \rightarrow y(t)$, para un corrimiento T en el argumento, se cumple que $x(t-T) \rightarrow y(t-T)$.

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \{[1-O(x,y)]\otimes h_{z_0}(x,y)\}\{[1-O^*(x,y)]\otimes h^*_{z_0}(x,y)\} \\ &= \{1-O(x,y)\otimes h_{z_0}(x,y)\}\{1-O^*(x,y)\otimes h^*_{z_0}(x,y)\} \\ &= 1-O^*(x,y)\otimes h^*_{z_0}(x,y)-O(x,y)\otimes h_{z_0}(x,y) \\ &\qquad + [O(x,y)\otimes h_{z_0}(x,y)][O^*(x,y)\otimes h^*_{z_0}(x,y)], \end{aligned} \tag{2.16}$$

en donde se ha hecho uso de la propiedad distributiva de la convolución y de las relaciones: $1\otimes h_{z_0}(x,y)$ = 1 y $1\otimes h^*_{z_0}(x,y)$ = 1. Considerando la aproximación de Fraunhofer (ecuación 2.1), el cuarto término de la ecuación 2.16, que tiene términos cuadráticos en z, resulta ser mucho menor que los otros tres términos, por lo cual no es considerado [8].

En la expresión 2.16 para la intensidad, el segundo y tercer términos, son usualmente asociados, con las imágenes real y virtual que aparecen en la reconstrucción de un holograma, respectivamente [8]. Debido a que la función circulo en la ecuación 2.12 es de valor real, estos dos términos pueden reunirse en uno solo, utilizando nuevamente las propiedades de la convolución, de modo que:

$$-O^*(x,y)\otimes h^*_{z_0}(x,y)-O(x,y)\otimes h_{z_0}(x,y) = -O(x,y)\otimes[h_{z_0}(x,y)+h^*_{z_0}(x,y)]. \tag{2.17}$$

Por otro lado, utilizando las propiedades de los números complejos,

$$\begin{aligned} h_{z_0}(x,y)+h^*_{z_0}(x,y) = 2\Re(h_{z_0}(x,y)) &= \frac{2}{\lambda z_0}cos\Big[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)-\frac{\pi}{2}\Big] \\ &= \frac{2}{\lambda z_0}sin\Big[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)\Big], \end{aligned} \tag{2.18}$$

reemplazando la ecuación 2.18 en la expresión 2.16 se obtiene finalmente

$$I(x,y) = 1-O(x,y)\otimes\frac{2}{\lambda z_0}sin\Big[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)\Big], \tag{2.19}$$

que corresponde a la información de intensidad que es registrada en el sensor.

En holografía, se dispone de un medio de registro sensible a los cambios de intensidad en el plano de registro [2]. A partir de esta información almacenada, se realiza la

[2]Los materiales para la elaboración de hologramas de volumen, son además de sensibles a cambios en intensidad, sensibles a variaciones de índice de refracción.

reconstrucción del holograma, que para el caso de la holografía digital, se realiza numéricamente [17]. El método para recuperar la información del objeto a partir de un holograma de Fraunhofer, que será utilizado en este trabajo, se basa en la transformada wavelet [7, 8, 25, 27, 31].

2.2. Transformada wavelet

Las wavelets, funciones base de la transformada wavelet (TW), son generadas a partir de una función denominada wavelet base que se describe de forma completa a través de dos parámetros. En una dimensión pueden representarse de la siguiente forma:

$$\Psi_{(a,b)}(x) = \Psi_a(x-b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big), \tag{2.20}$$

donde la función $\psi(x)$ corresponde a la wavelet base o generadora, con parámetros a y b que representan valores de escalamiento y desplazamiento de la función respectivamente. Las wavelets $\Psi_{(a,b)}(x)$ generadas de la misma función wavelet base $\psi(x)$ tienen diferente escala a y ubicación b pero todas tienen la misma forma.

El factor de escala toma únicamente valores positivos ($a > 0$). Las wavelets son dilatadas cuando el factor de escala a toma valores $a > 1$, y son contraídas cuando $a < 1$. En el espacio de frecuencias, el ancho de banda de la función depende directamente de la elección del parámetro de escala: los valores altos para el parámetro a corresponden a frecuencias bajas, mientras que valores pequeños de a corresponden a frecuencias altas. En la figura 2.3, se observa el comportamiento de una función wavelet y su espectro de frecuencias para valores del parámetro de a comprendidos en el intervalo $0 \leq a < 11$.

La transformada wavelet continua de una función ω(x), representa su descomposición en un conjunto base conformado por las funciones wavelet $\Psi_{(a,b)}$(x). De forma similar a como ocurre en el análisis de Fourier, es necesario calcular los coeficientes CTW que representan el peso de cada una de las funciones base en la expansión de la función ω(x) [26]. A través de la siguiente expresión

$$CTW_\omega(a,b;\psi) = \langle \Psi_{(a,b)}, \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\Psi^*_{(a,b)}(x)dx, \tag{2.21}$$

es posible calcular estos coeficientes, donde $\langle \Psi_{(a,b)}, \omega \rangle$ representa la proyección (o producto interno) de ω sobre las funciones de la base. Estas funciones base, forman un conjunto ortogonal.

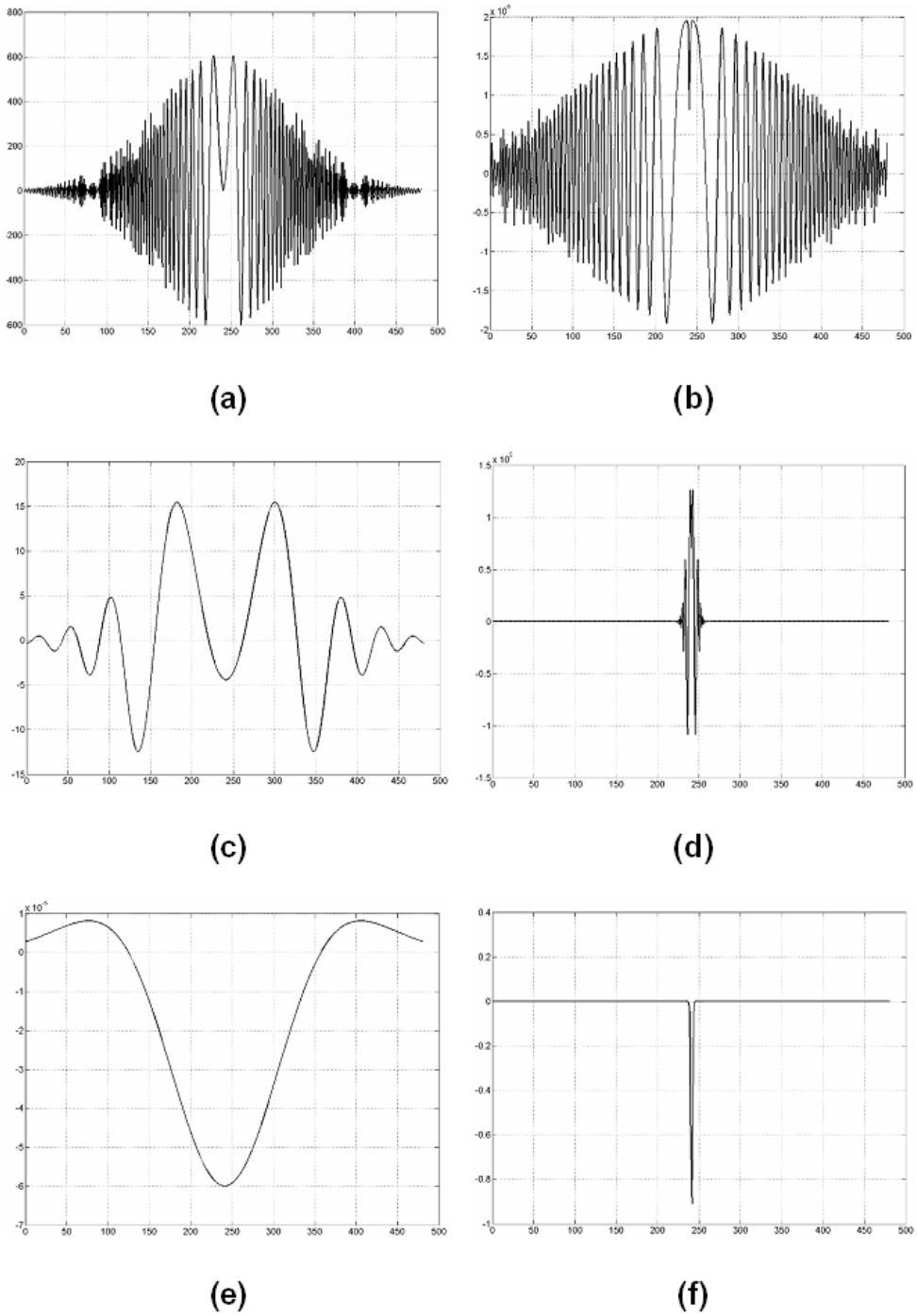


Figura 2.3: Función wavelet (izquierda) y su espectro (derecha) para diferentes valores del parámetro de escala. (a)-(b): 0.04, (c)-(d): 0.20, (e)-(f): 10.04.

Este tipo de transformada permite analizar localmente señales no estacionarias, al realizar un mapeo en una representación de tiempo-escala. Su principal ventaja, se encuentra en el análisis multiresolución que es posible realizar al variar el parámetro de escala de la función wavelet, como ya se había mencionado anteriormente [27, 28].

El cálculo de la transformada wavelet continua en la ecuación 2.21, puede realizarse en el espacio de frecuencias. De la identidad de Parseval se tiene que

$$CTW_{\omega}(a,b;\psi) = \langle \Psi_{(a,b)}, \omega \rangle = \langle \tilde{\omega}, \tilde{\Psi}_{(a,b)} \rangle, \tag{2.22}$$

donde $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\Psi}_{(a,b)}$, representan las transformadas de Fourier de las funciones ω y $\Psi_{(a,b)}$, respectivamente.

Para evaluar $\tilde{\Psi}_{(a,b)}$, se hace uso de las siguientes propiedades de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\nu} dt \\ \tilde{f}(t-t_0) &= \tilde{f}(\nu) e^{-2\pi\nu t_0} \\ \tilde{f}(\alpha t) &= \frac{1}{|\alpha|} \tilde{f}(\frac{\nu}{\alpha}), \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde α y t_0 son constantes y $\tilde{f}(\nu)$ es la transformada de Fourier de f(t). Aplicando estas relaciones sobre $\Psi_{(a,b)}$ tal y como se define en la ecuación 2.20, se obtiene

$$\tilde{\Psi}_{(a,b)} = \sqrt{a}\tilde{\psi}(a\nu) e^{-i2\pi\nu b} \tag{2.24}$$

con $\tilde{\psi}(a\nu)$, la transformada de Fourier de la wavelet base $\psi(x)$. Teniendo en cuenta la definción del producto interno $\langle f, g \rangle$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx, \tag{2.25}$$

reemplazando en la ecuación 2.22, se obtiene

$$
\begin{aligned}
CTW_\omega(a,b;\psi) &= \langle \tilde{\omega}, \tilde{\Psi}_{(a,b)} \rangle \\
&= \sqrt{a}\langle \tilde{\omega}(\nu), \tilde{\psi}(a\nu)e^{-i2\pi\nu b} \rangle \\
&= \sqrt{a}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(\nu)\tilde{\psi}^*(a\nu)e^{-i2\pi\nu b}d\nu \\
CTW_\omega(a,b;\psi) &= \sqrt{a}\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\omega}(\nu)\tilde{\psi}^*(a\nu)\},
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

donde $\mathcal{F}^{-1}$ simboliza la transformada de Fourier inversa del producto de funciones entre corchetes.

Cuando la función wavelet $\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ corresponde a una función simétrica de valor real, la transformada wavelet puede ser calculada, expresando la integral 2.21 como una convolución de funciones:

$$
\begin{aligned}
CTW_\omega(a,b;\psi) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\psi^*\Big(\frac{x-b}{a}\Big)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)dx \\
&= \omega \otimes \Psi_a(b) \\
\Psi_a(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\Big(\frac{-x}{a}\Big)
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

2.2.1. Características de la función wavelet generadora

La forma funcional de $\psi(x)$, depende de manera importante de la señal que quiere analizarse a través de la transformada wavelet. Sin embargo, para lograr definir una TW y una TW inversa, es necesario imponer algunas restricciones sobre las características de la función wavelet generadora [28, 29, 30]:

1. Condición de localización tiempo-frecuencia: La función $\psi(x)$ y su transformada de Fourier $\tilde{\psi}(u)$ deben tener un soporte compacto o como mínimo, tener un rápido decaimiento en su valor cuando su argumento tienda a $\pm\,\infty$.

2. Condición de admisibilidad: Se expresa mediante la relación

$$
C_u = \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}(u)|^2}{u}du < \infty. \tag{2.28}
$$

La condición de admisibilidad es muy importante cuando se plantea la recuperación de la señal de entrada a partir de su transformada wavelet. Esto se logra, por supuesto, efectuando la superposición de todas las contribuciones de las funciones base dentro de la representación de la señal:

$$\omega(x) = \frac{1}{C_u}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} CTW_{\omega}(a,b;\psi)\Psi(a,b)(x)\frac{dadb}{a^2}. \tag{2.29}$$

De la condición de admisibilidad, se tiene que si $\tilde{\psi}(u)$ es una función contínua, entonces $\tilde{\psi}(0)$ = 0, de donde se desprende una condición necesaria

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx = 0. \tag{2.30}$$

Esta condición puede interpretarse geométricamente diciendo que el gráfico con el que se representa la función $\psi(x)$ debe oscilar de modo que las porciones de área positivas y negativas se cancelen para anular el valor de la integral [29]. Esto puede observarse en las gráficas de la izquierda en la figura 2.3.

La extensión de las funciones wavelet definidas en 2.20 a dos dimensiones, involucra el uso de tres parámetros para definir la función

$$\Psi_{(a,b,c)}(x,y) = K_a\psi\Big(\frac{x-b}{a},\frac{y-c}{a}\Big), \tag{2.31}$$

donde K_a es una constante que depende del parámetro de escala a.

Asimismo, la transformada wavelet en dos dimensiones para una función wavelet simétrica y de valor real, toma la forma:

$$\begin{aligned} CTW_{\omega}(a,b,c;\psi) = \langle\Psi_{(a,b,c)},\omega\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x,y)\Psi_{(a,b,c)}(x,y)dxdy \\ &= \omega(x,y)\otimes\Psi_a(b,c), \end{aligned} \tag{2.32}$$

con

$$\Psi_a(b,c) = K_a\psi\Big(\frac{-x}{a},\frac{-y}{a}\Big).$$

2.3. Función wavelet en holografía de Fraunhofer en línea

Los hologramas de Fraunhofer en línea contienen la información relacionada con la distancia de registro del holograma de forma codificada. El caso de interés en este trabajo, es aquel en el cual los objetos en estudio corresponden a partículas de diverso tamaño, ubicadas en uno o más planos separados una determinada distancia z del sensor. La búsqueda del valor de profundidad desconocido, z = z_0, de cada elemento localizado en una ventana de observación 2D, es análoga a la ubicación de una frecuencia dominante oculta en algún punto de una señal 2D usando análisis wavelet convencional [27].

El planteamiento de una forma de reconstrucción de hologramas a partir de un análisis con transformada wavelet, comienza interpretando la información $I(x, y)$ registrada en el sensor, en términos de una transformada wavelet. De esta forma, el proceso de reconstrucción o recuperación de la señal, constituida en este caso por el holograma, puede plantearse a partir de una transformada inversa. La función wavelet generadora $\psi_0(x, y)$ que se propone en la literatura [8, 31] para describir un holograma de Fraunhofer en línea, corresponde a:

$$\psi_0(x, y) = sin\Big(x^2 + y^2\Big) \tag{2.33}$$

y la familia de funciones wavelet base construida a partir de la ecuación 2.33 es

$$\Psi_a^0(x, y) = \frac{1}{a^2} sin\Big(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\Big), \tag{2.34}$$

donde el parámetro de escala a está relacionado con la coordenada axial z,

$$a = \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}}. \tag{2.35}$$

Sin embargo, al evaluar las condiciones 2.28 y 2.30 para la ecuación 2.33, se encuentra que no las satisface. La función $sin\Big(\frac{x^2+y^2}{a^2}\Big)$ no se encuentra limitada ni en el dominio espacial ni en el espacio de frecuencias, por lo cual, $\psi_0(x, y)$ no puede considerarse como una función wavelet y por tanto no es posible definir una transformada wavelet con las funciones base definidas en la ecuación 2.34.

Debido a lo anterior, es preciso construir una nueva función wavelet generadora $\psi_G(x, y)$, a partir de $\psi_0(x, y)$, utilizando una envolvente de Gauss que la limite, forzándola a satisfacer la condición 2.28. Esta nueva función wavelet base resulta ser:

$$\psi_G(x,y) = [sin(x^2+y^2) - M_\psi]exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\Big), \tag{2.36}$$

donde σ es el parámetro que determina el ancho de la función gaussiana envolvente y M_ψ un parámetro adicional, cuyo valor debe ser calculado para que $\psi_G(x,y)$ satisfaga la condición necesaria (2.30). En dos dimensiones, la condición de la ecuación 2.30 resulta ser [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_G(x,y)dxdy = 0. \tag{2.37}$$

Al reemplazar 2.36 en esta última expresión, se llega a que

$$M_\psi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} sin(x^2+y^2)exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\Big)dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\Big)dxdy} = \frac{N}{D}. \tag{2.38}$$

Para resolver la ecuación 2.38, se utiliza la siguiente integral de Fresnel,

$$\int exp(-\alpha^2x^2)dx = \sqrt{\pi\alpha}, \tag{2.39}$$

con lo que se obtiene el siguiente resultado para D

$$D = \pi\sigma^2. \tag{2.40}$$

Por su parte, el numerador en 2.38 queda escrito en términos de σ,

$$N = \frac{\pi\sigma^2}{2i}\Big[\frac{1}{1-i\sigma^2} - \frac{1}{1+i\sigma^2}\Big] = \frac{\pi\sigma^4}{1+\sigma^4}, \tag{2.41}$$

con lo que finalmente, la razón N/D es

$$M_\psi = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^4}. \tag{2.42}$$

A partir de $\psi_G(x,y)$, las nuevas funciones base $\Psi_a^G(x,y)$ son:

$$\Psi_a^G(x,y) = \frac{1}{a^2}[sin\Big(\frac{x^2+y^2}{a^2}\Big) - M_\psi]exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{a^2\sigma^2}\Big). \tag{2.43}$$

Con esta familia de funciones base, simétricas y de valor real, la transformada wavelet de una función tal como $O(x,y)$ en la ecuación 2.12, puede ser expresada como una convolución, a partir de lo establecido en la expresión 2.27:

$$\begin{aligned} CTW_O(a;\psi_G) &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} O(x,y)\psi_G\Big(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\Big)dxdy \\ &= O \otimes \Psi_a^G(0), \end{aligned} \tag{2.44}$$

con:

$$\Psi_a^G(x,y) = \frac{1}{a^2}\psi_G\Big(\frac{-x}{a},\frac{-y}{a}\Big). \tag{2.45}$$

De la misma forma que se planteó en la ecuación 2.29 para la función $\omega(x)$, la función $O(x,y)$ puede ser recuperada realizando una transformada wavelet inversa. En este caso, la integración debería realizarse sobre el parámetro de escala a que está relacionado con la coordenada z,

$$O(x,y) = \int_a \Gamma_{a,\psi_G} CTW_O(a;\psi_G)\psi_G(x,y)da, \tag{2.46}$$

donde Γ_{a,ψ_G} es una constante que depende del parámetro a y de la función ψ_G. Para una distancia axial determinada, z_0, que correspondería a la distancia de registro del holograma, se obtendría la recuperación de la información de la función $O_{z_0}(x,y)$, que está relacionada con la información del objeto mediante la expresión 1 - $O_{z_0}(x,y)$.

A partir de la ecuación 2.19, y del desarrollo obtenido en 2.44, es posible expresar la intensidad $I(x,y)$ en términos de una transformada wavelet. Para esto, se utiliza la función $\Psi_a^G(0)$ como reemplazo del término $\frac{2}{\lambda z_0}sin\Big[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)\Big]$ en la ecuación 2.19. La intensidad que se obtiene con este reemplazo tiene la siguiente forma funcional:

$$\begin{aligned} I(x,y) &= 1 - \frac{2}{\pi}O \otimes \Psi_a^G(0) \\ I(x,y) &= 1 - \frac{2}{\pi}CTW_O(a;\psi_G), \end{aligned} \tag{2.47}$$

con lo que se ha construido expresión para la intensidad en el plano de registro en términos de la transformada wavelet de la función $O(x,y)$, relacionada con el objeto mediante la expresión 1 - $O(x,y)$. La transformada wavelet del objeto, se calcula utilizando la familia de funciones wavelet establecida en la ecuación 2.43. Es necesario resaltar en

este punto, que la validez de la ecuación 2.47 está determinada por el cumplimiento de las restricciones impuestas por la condición de campo lejano sobre las dimensiones y la distancia de registro en el arreglo experimental del que se obtienen los hologramas cuya intensidad está dada por $I(x, y)$. Adicionalmente, el tipo de objeto considerado en este caso, está descrito por una función de valor real.

2.3.1. Recuperación de $O(x, y)$

Partiendo de la ecuación 2.47 para la intensidad en el plano de registro (x,y), es posible construir una expresión que permita recuperar la información de la función $O(x, y)$, en una determinada ubicación axial z_0. Despejando y expresando la convolución en términos de la transformada de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} O_{z_0} \otimes \Psi_a^G &= 1 - I(x, y) \\ \frac{2}{\pi} \tilde{O}_{z_0}(x, y) \tilde{\Psi}_a^G(x, y) &= \mathcal{F}\{1 - I(x, y)\}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde $\mathcal{F}\{1-I(x, y)\}$ representa la transformada de Fourier de la diferencia dentro de los corchetes. Multiplicando ambos lados de 2.48 por $\{\tilde{\Psi}_a^G(x, y)\}^*$ y teniendo en cuenta que $\Psi_a^G(x, y)$ debe satisfacer la condición de admisibilidad,

$$M_{u,v} = \iint_0^\infty |\Psi_a^G(u, v)|^2 du < \infty, \tag{2.49}$$

se obtiene finalmente,

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{z_0}(x, y) &= \beta_{a,M_{u,v}} \mathcal{F}\{1 - I(x, y)\}\{\tilde{\Psi}_a^G(x, y)\}^* \\ O_{z_0}(x, y) &= \beta_{a,M_{u,v}} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{1 - I(x, y)\}\{\tilde{\Psi}_a^G(x, y)\}^*\}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

donde $\beta_{a,M_{u,v}}$ es una constante que depende del valor del parámetro a y de $M_{u,v}$.

La función que representa el objeto, está dada por la expresión 1 - $O(x, y)$, por lo que es posible recuperar la información del objeto de interés en un holograma en línea de Fraunhofer, partiendo de la distribución de intensidad, utilizando una transformada wavelet. El parámetro de localización axial z_0 de las partículas, se encuentra involucrado en el cálculo de la función wavelet $\Psi_a^G(x, y)$, por lo que si el resultado de 2.50 permite encontrar la información buscada del objeto de interés, se habrá hallado su localización axial.

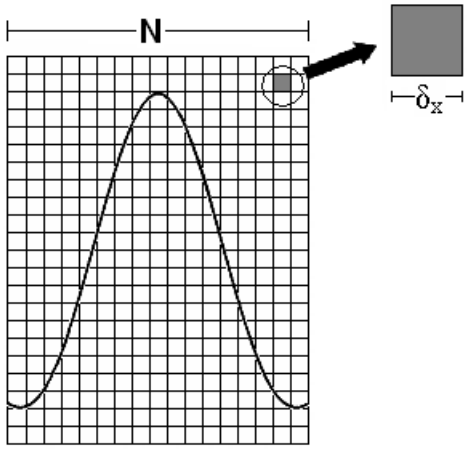


Figura 2.4: El tamaño finito del sensor limita el valor del parámetro sigma de la función wavelet.

2.3.2. Consideraciones sobre el parámetro σ

Como se observa de la ecuación 2.43, las funciones base de la transformada wavelet, dependen de manera considerable del parámetro sigma, que determina la forma como la envolvente gaussiana limita la función original tanto en el espacio de coordenadas como en el espacio de frecuencias. La elección del valor para σ está restringida por el tamaño finito del sensor utilizado para registrar la información del holograma [31, 32].

Elección de σ y el criterio de admisibilidad

Las funciones base 2.43, deben satisfacer la condición de admisibilidad, establecida en la ecuación 2.28. Esta condición, implica que la función wavelet tendrá un valor cercano a cero en las fronteras que limitan el tamaño del sensor, como se muestra en la figura 2.4.

Para derivar una primera condición sobre el valor del parámetro σ, se considera el caso en una dimensión y el tamaño de píxel del sensor se denominará δ_x. La condición de admisibilidad, está relacionada con el confinamiento de la función wavelet en un intervalo espacial $[-N\delta_x/2, N\delta_x/2]$, donde N es el tamaño del sensor. Esta consideración, conduce a la siguiente restricción sobre la función gausiana,

$$exp\Big[-\frac{(N\delta_x/2)^2}{a^2\sigma^2}\Big] \leq \epsilon, \tag{2.51}$$

con ϵ una constante que asegura que $\Psi_a^G(x,y)$ tenga un valor pequeño cuando

$x = \pm N\delta_x/2$. A partir de 2.51, se encuentra la primera condición sobre σ, al que se denominará σ_{min},

$$\sigma_{min} \ll \frac{N}{2}\frac{\delta_x}{a}\sqrt{\frac{1}{ln(\epsilon^{-1})}}. \tag{2.52}$$

Elección de σ y el criterio de muestreo

El segundo límite para el valor de σ, está determinado por el criterio de muestreo de Shannon-Wittaker, en el que la frecuencia de muestreo (f_e) debe ser al menos dos veces la frecuencia de la señal a muestrear (f_i). En la ecuación 2.43, la función $\Psi_a^G(x, y)$, está compuesta por una función chirp correspondiente al término sinusoidal y la función gausiana envolvente.

Siendo $\beta(x)$, la fase de la función $chirp$ de la wavelet en la dirección x, dada por

$$\beta(x) = x^2/a^2, \tag{2.53}$$

la frecuencia de la señal a muestrear se puede encontrar a partir de

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\beta(x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\frac{x}{a^2}. \tag{2.54}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo del sensor utilizado es

$$f_e = \tfrac{1}{\delta_x},$$

puede hallarse la expresión para la máxima frecuencia espacial admisible de la función wavelet. Esta frecuencia es alcanzada cuando $x = x_{max}$. Aplicando la condición de Shannon-Wittaker,

$$\begin{aligned} f_e &= 2f_i(x_{max}) \\ \frac{1}{\delta_x} &= 2\frac{x_{max}}{\pi a^2} \\ x_{max} &= \frac{\pi a^2}{2\delta_x}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Cuando $x = x_{max}$, la función gaussiana debe tomar un valor los suficientemente pequeño para cumplir cn el criterio de admisibilidad. Esto último, implica que

$$exp\Big[-\frac{x_{max}^2}{a^2\sigma^2}\Big] \ll \epsilon, \tag{2.56}$$

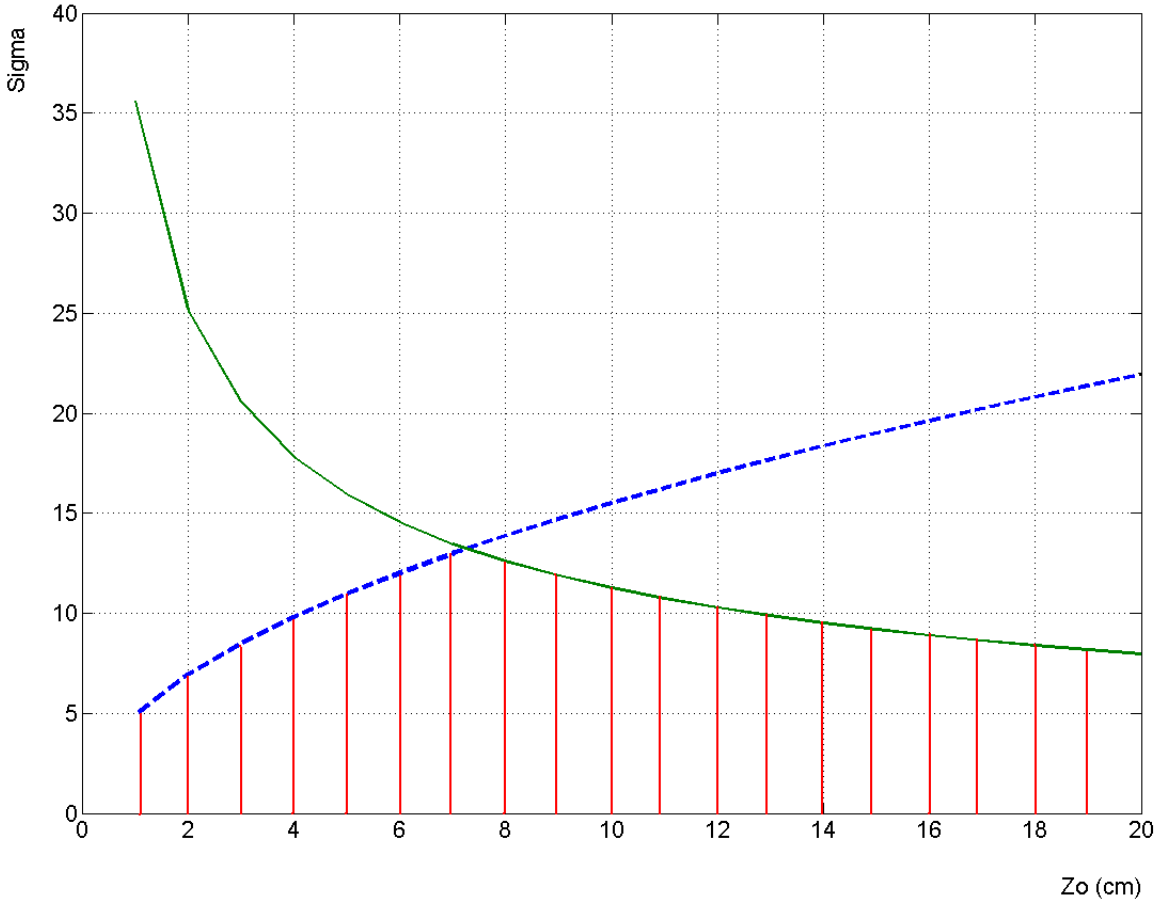


Figura 2.5: Valor de sigma en función de z. La línea contínua representa los valores de σ_{min} y la línea punteada, σ_{max}.

de donde despejando σ, se encuentra la segunda condición sobre este parámetro (σ_{max}),

$$\sigma_{max} \leq \frac{\pi}{2}\frac{a}{\delta_x}\sqrt{\frac{1}{ln(\epsilon^{-1})}} \tag{2.57}$$

La figura 2.5, muestra la gráfica del valor de σ_{min} y σ_{max} en función de la distancia z. El valor de sigma seleccionado para determinar las funciones base en 2.43, debe encontrarse por debajo de estas dos curvas, de acuerdo con la distancia z. Estos valores corresponden en la gráfica a la zona señalada con franjas verticalesr. Para el cálculo de valores de sigma en la gráfica 2.5, N = 1024, δ_x = 6.7 μm y λ = 0.633 μm. Estos valores, hacen parte de los parámetros del experimento desarrollado en este trabajo, que será detallado en los capítulos que siguen.

Capítulo 3

Procedimientos

A partir de la ecuación 2.50, se pudo concluir que la información de un objeto $O(x, y)$, puede ser recuperada del patrón de intensidad registrado en un montaje de holografía en línea de Fraunhofer, utilizando la transformada wavelet. En este trabajo, se aplica esta técnica a partículas de prueba semi-transparentes de tamaño micrométrico, que son colocadas sobre placas de vidrio. En este capítulo, se detallan algunos procedimientos numéricos realizados con anterioridad al registro y reconstrucción experimental de los hologramas de la muestra utilizada. Adicionalmente, se describen las características del arreglo experimental y la muestra utilizados en el desarrollo experimental.

3.1. Etapa de Simulación y Procedimiento Numérico

En el caso de interés para este trabajo, el objeto tiene la forma 1 - $O(x, y)$, donde $O(x, y)$ representa una apertura circular cuya forma funcional está dada en la ecuación 2.12. La simulación numérica de este objeto con un diámetro de 100 μm, se muestra en la figura 3.1. El proceso de registro y la recuperación de la información del objeto, son realizados de forma numérica en la plataforma `Matlab` ®.

3.1.1. Simulación del proceso de registro

En holografía digital, la información del patrón de interferencia que proviene de la superposición de los haces de objeto y referencia, es almacenada en un sensor CCD o CMOS, como información de intensidad $I(x, y)$. Este sensor, es dispuesto en el plano de registro o plano del holograma, como se muestra en la figura 3.2.

En la ecuación 2.47, se presenta la forma funcional de la intensidad registrada $I(x, y)$, para un objeto descrito por la función $O(x, y)$ (ecuación 2.12), donde se muestra que la intensidad registrada en el plano del holograma, puede expresarse como función de la

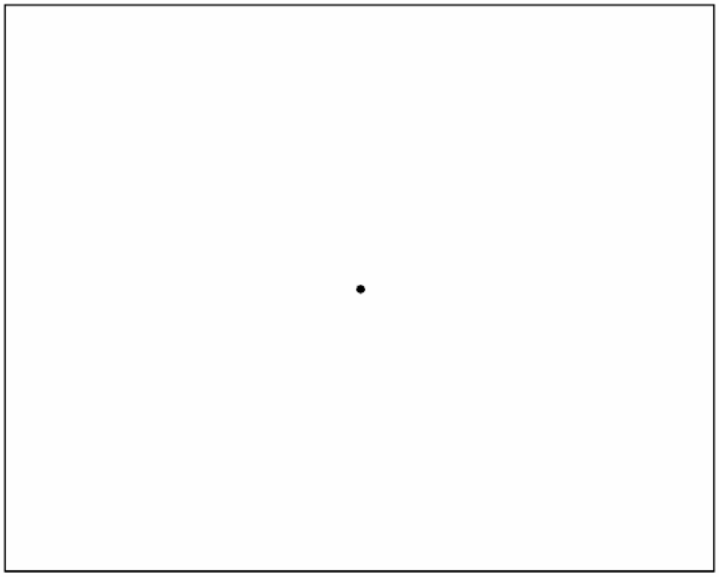


Figura 3.1: Simulación de un objeto circular con un diámetro de 100 μm.

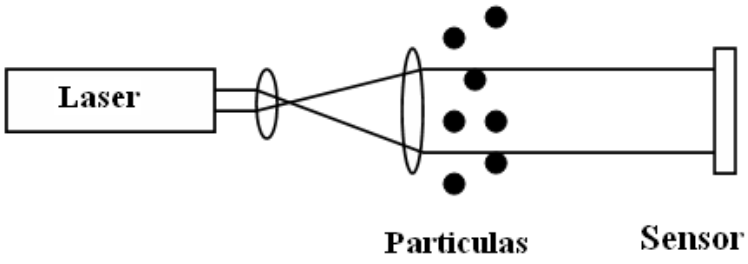


Figura 3.2: Arreglo experimental simulado.

transformada wavelet de la función $O(x, y)$.

Para realizar el cálculo de la transformada wavelet de la función $O(x, y)$, se define la función wavelet base para un sistema de holografía digital en línea de Fraunhofer $\Psi_a^G(x, y)$, tal y como se describe en la ecuación 2.43. El valor para los parámetros involucrados en esta función, se muestra en la tabla 3.1. El valor del parámetro ϵ se escoge teniendo en cuenta las restricciones impuestas sobre la función wavelet establecidas en las ecuaciones 2.28 y 2.30

Parámetro	Valor (μm)
λ	0.633
δ_x	6.7
ϵ	0.01
z_0	100000
N	1024
σ_{min}	11.26

Tabla 3.1: Valores de los parámetros utilizados en el cálculo de la función wavelet base $\Psi_a^G(x, y)$.

La función wavelet descrita por la ecuación 2.43, con los parámetros definidos en la tabla 3.1, es una función simétrica y real. El cálculo de la transformada wavelet de la función $O(x, y)$ se realiza a partir de su convolución con la familia de funciones wavelet definida en la ecuación 2.43. Utilizando algoritmos de transformada rápida de Fourier, esta convolución es realizada a partir de la siguiente ecuación,

$$CTW_O(a, x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\gamma, \nu)\tilde{\Psi}_a^G(\gamma, \nu)\}, \tag{3.1}$$

donde γ y ν corresponden a las coordenadas en el espacio de frecuencias y a es el parámetro de escala de la función wavelet, definido en la ecuación 2.35. El valor para sigma considerado en esta wavelet, corresponde al calculado a partir de σ_{min}, con el fin de garantizar que se cumplan simultáneamente, el criterio de admisibilidad y el teorema del muestreo. En la figura 3.3, se muestra un corte transversal de la función wavelet resultante, para una imagen con un tamaño 1024 x 1280 pixeles.

Para calcular $I(x, y)$, la ecuación 2.47 se reescribe utilizando la ecuación 3.1,

$$I(x, y) = 1 - \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{O}(\gamma, \nu)\tilde{\Psi}_a^G(\gamma, \nu)\}. \tag{3.2}$$

En la figura 3.4(a), se muestra el resultado del cálculo de la ecuación 3.2, utilizando los parámetros consignados en la tabla 3.1. En esta imagen, se pueden apreciar los anillos

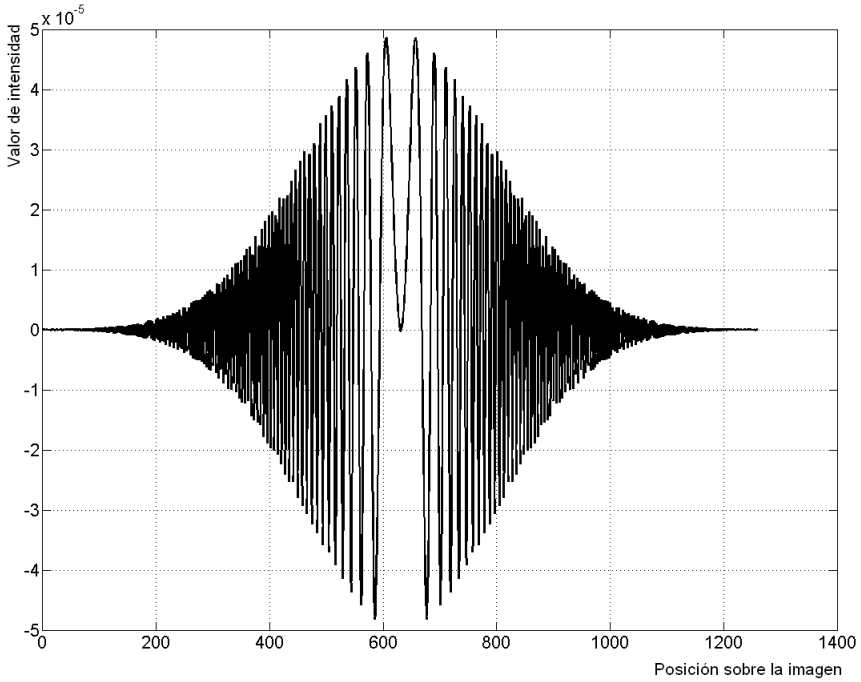


Figura 3.3: Perfil de intensidad para la función wavelet $\Psi_a^G(x,y)$.

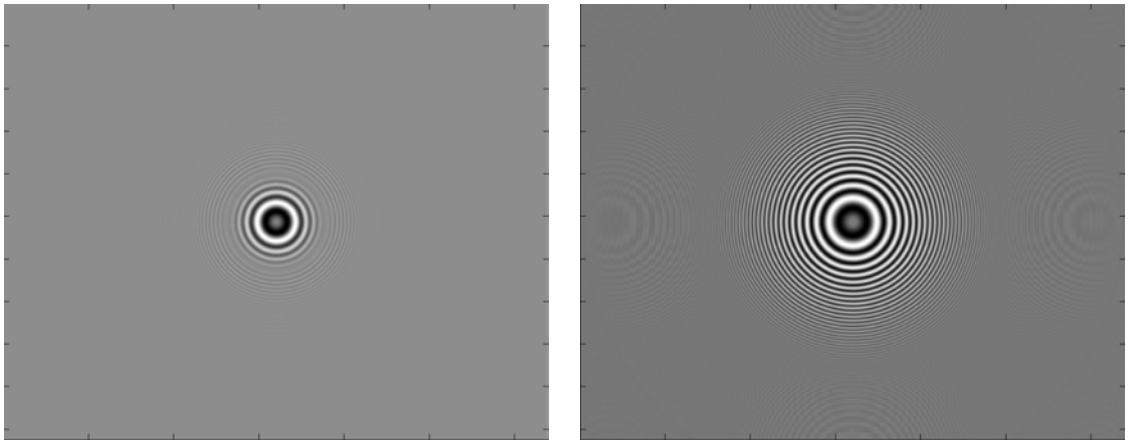
que caracterizan el patrón de difracción de Fraunhofer de un objeto circular. Este cálculo de intensidad se compara en la parte (b) de la misma figura, con el que se obtiene de la ecuación 2.13, que está basado en una función de primer orden de Bessel que depende del valor del diámetro de la partícula, y que constituye la expresión completa para la intensidad en un holograma en linea de Fraunhofer [5]. Las características del patrón de anillos en las dos imágenes son similares.

3.1.2. Simulación del proceso de reconstrucción

A partir de la intensidad que se muestra en la figura 3.4, se procede a recuperar la información de la función O(x,y), utilizando nuevamente la transformada wavelet, a partir de la siguiente expresión:

$$O_{z_0}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{1 - I(x,y)\}\{\tilde{\Psi}_a^G(x,y)\}^*\}, \tag{3.3}$$

El resultado de este cálculo se muestra en la figura 3.5. En esta imagen, se muestra el negativo de la información que se espera recuperar del objeto original (3.5(a)). En la figura 3.5(b), que correspone a 1 - $O(x,y)$, se observan algunos anillos alrededor del círculo que delimita el objeto. Estos anillos son asociados a la imagen virtual presente en un proceso de reconstrucción usual de hologramas en línea, donde la imagen real



(a) (b)

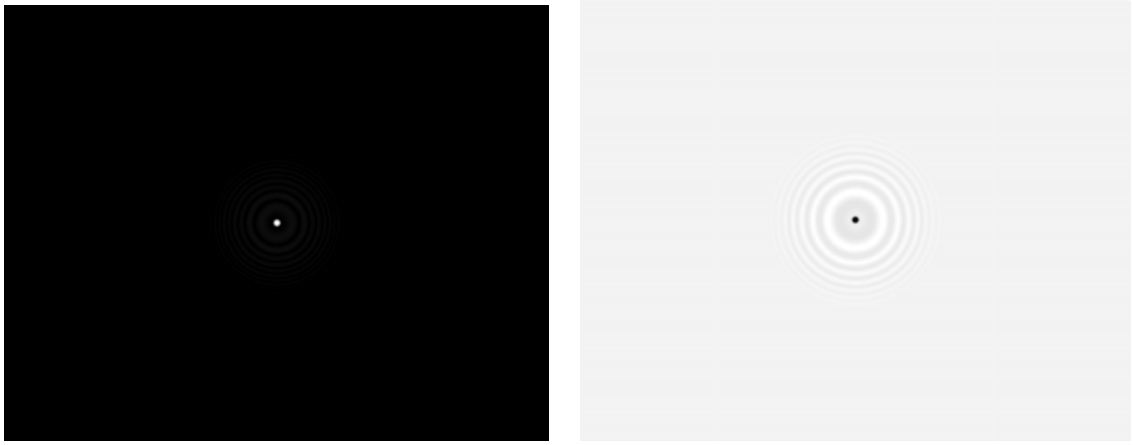
Figura 3.4: Simulación de la intensidad registrada en un holograma de Fraunhofer en línea para un objeto circular con un diámetro de 100 μm. (a) Cálculo de la intensidad con base en la transformada wavelet del objeto. (b) Cálculo de la intensidad en términos de la función de Bessel.

y la imagen virtual se superponen en el plano imagen. Los resultados de la simulación muestran que la presencia de estos anillos, no impide que pueda distinguirse la región que delimita el objeto.

3.1.3. Simulación del Registro y reconstrucción de una muestra de partículas

Los procedimientos anteriores, se extienden ahora a una muestra de 13 partículas con diámetros comprendidos entre 100 y 160 micras en un área de 1280 x 1024 pixeles, que son ubicadas a una distancia z_0 = 15 cm del plano de registro. El nuevo objeto simulado, la intensidad registrada y la reconstrucción de O(x,y) para este caso, se muestran en la figura 3.6.

Para efectos de visualización, en adelante se trabajará con la imagen que contiene la información de $O(x, y)$ (figura 3.6(c)), teniendo presente que la función que representa el objeto simulado corresponde a 1 - O(x,y), pero considerando que la región que delimita los objetos bajo estudio es la misma en la imagen que representa a O(x,y) y en la imagen que representa a 1 - O(x,y). En la figura 3.6(c), se observan los anillos mencionados para el caso de una sola partícula, alrededor de cada uno de los círculos que delimita la región que corresponde a una partícula.



(a) (b)

Figura 3.5: (a) Simulación del proceso de reconstrucción de la función O(x,y), para una apertura circular con un diámetro de 100 μm. (b) 1 - O(x,y).

Determinación del Diámetro de las Partículas

La determinación del diámetro de las partículas de prueba, a partir de la imagen obtenida al recuperar la información de O(x,y), requiere de una buena definición de los bordes que delimitan cada objeto bajo estudio. Esta definición de bordes, puede verse alterada por la aparición de los anillos en la imagen que corresponde a la reconstrucción del holograma. Por esta razón, se plantea la aplicación de un proceso de umbralización de la imagen reconstruida, que permita una mejor definición de los objetos de interés. Este umbral actuaría como un filtro para el conjunto de anillos que aparecen en la imagen 3.6(c). En la figura 3.7 (a), se muestra la imagen original con una disminución en el valor de su contraste, lo que permite observar anillos alrededor de la región que delimita cada objeto reconstruido. La imagen 3.7 (b), muestra el resultado de aplicar un umbral a la imagen original. Las imágenes 3.7(a) y 3.7(b), tienen el mismo valor de contraste, para efectos comparativos.

El valor del umbral seleccionado en este caso, corresponde a

$$T = \frac{(I_{max} + I_{min})}{2}, \tag{3.4}$$

donde I_{max} e I_{min} representan lo valores de intensidad máximo y mínimo en la matriz que representa la imagen reconstruída.

La medida del diámetro de las partículas es realizada dentro del programa de recon-

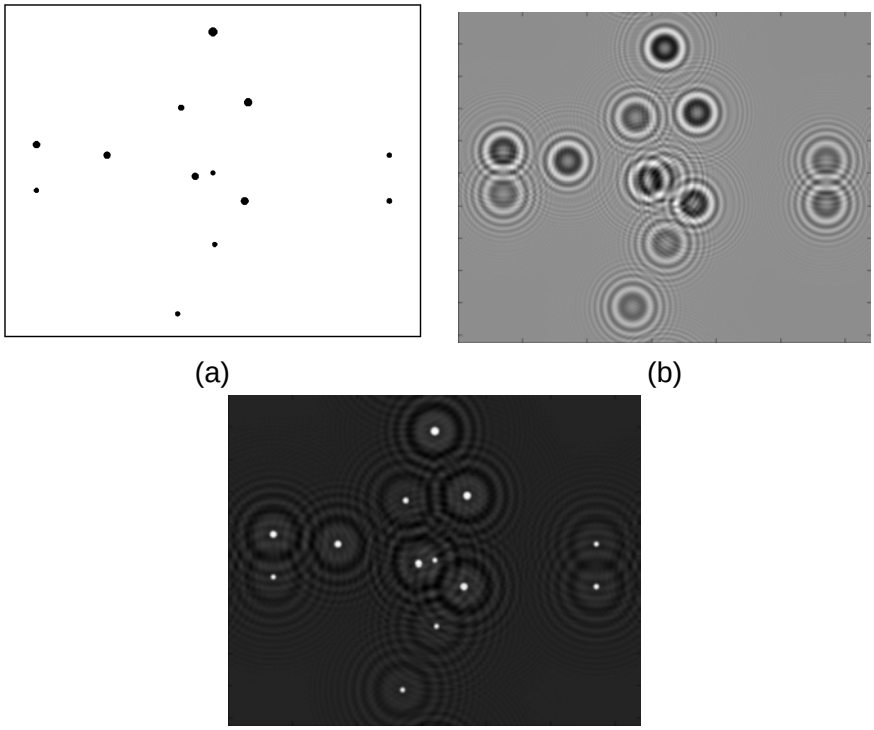
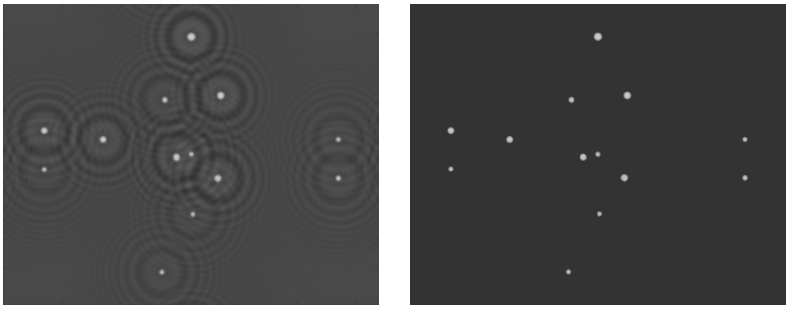


Figura 3.6: Simulación del registro y reconstrucción de un holograma en línea para una muestra de partículas con diámetros entre 100 y 160 micras: (a) Objeto, (b) Intensidad registrada en el plano del holograma, (c) Imagen de O(x,y).

strucción, utilizando la herramienta `EquivDiameter` [1] de `Matlab` ®. Esta herramienta, encuentra el valor de diámetro para un círculo con un área igual al del objeto en la imagen. Conjuntamente con la aplicación directa de esta herramienta sobre los resultados de la simulación de una muestra de partículas, se determina la desviación de estas medidas, respecto a los valores establecidos inicialmente en la simulación del objeto. La muestra simulada, consiste en 25 partículas de igual diámetro ubicadas en un área de 1280 x 1024 pixeles, a 16 cm del sensor.

Aplicando el umbral definido en la ecuación 3.4 sobre la reconstrucción del holograma, se obtiene una imagen binarizada de las partículas, sobre la cual es aplicada la herramienta `EquivDiameter` de `Matlab` ®. Esta operación, proporciona un vector de 25 elementos, que contiene los valores determinados por el programa para el diámetro de cada una de las 25 partículas sobre la imagen. Sobre estos valores, se calcula un valor promedio, que es consignado en la segunda columna de la tabla 3.2. Estos valores, son comparados con aquellos determinados por el programa sobre el objeto simulado.

[1] © 1994-2006 The MathWorks, Inc



(a) (b)

Figura 3.7: Aplicación de un umbral de intensidad a la imagen reconstruida de una muestra de partículas. (a) Imagen original con brillo y contraste alterados. (b) Resultado de la aplicación de un umbral a la reconstrucción original.

Para cada uno de estos datos, se calcula la desviación estándar de los 25 datos utilizados para calcular el promedio sobre la imagen reconstruida y el error relativo para cada valor sobre la reconstrucción, respecto al del objeto simulado.

Diam. Objeto (μm)	Diam. Reconstrucción (μm)	Desv. Estandar	Error Rel. (%)
62.80	72.00	0.79	14.66
71.32	76.94	1.32	7.88
78.93	84.48	1.58	7.04
91.04	96.15	1.86	5.62
100.58	105.84	1.70	5.23
110.34	117.15	1.33	6.18
119.30	127.66	1.50	7.01
129.41	138.55	1.58	7.06
141.24	151.70	1.48	7.41

Tabla 3.2: Tabla comparativa. Valores de diámetro de las partículas en la imagen del objeto original y en su reconstrucción.

Dentro de los resultados de la simulación, se encuentra una diferencia máxima entre los diámetros en el objeto original y en su reconstrucción, equivalente a 1.5 el valor del tamaño del píxel (6.7 μm). Este error, puede atribuirse en parte, a la elección del umbral aplicado a las imágenes reconstruidas, que determina finalmente la cantidad de información de las partículas que será conservada. En este caso, el mayor error relativo está presente en las medidas obtenidas para las partículas cuyos tamaños se encuentran en los extremos del intervalo escogido (62.80 μm, 71.32μm y 141.24 μm). Para los objetos de menor tamaño (62.80 μm y 71.32μm), este error se debe a que dentro de la imagen, se necesita una cantidad mínima de píxeles para describir el objeto, por lo que la aplicación

del umbral afecta considerablemente la cantidad de información que se está utilizando para encontrar el valor del diámetro. Para las partículas en el extremo mayor del intervalo (141.24 μm), la distancia a la cual se simula el proceso de registro y reconstrucción (16 cm), resulta estar cercana al valor límite proporcionado por la condición de campo lejano, en la relación 2.1. Para los valores restantes, el error oscila entre 0.8 y 1.4 pixeles.

El procedimiento descrito antes, se aplica sobre las imágenes 3.6 (a) y 3.7 (b), que corresponden a una muestra de 13 partículas en las que se tienen 6 valores diferentes de tamaño. En la tabla 3.3, se muestra el valor medido del diámetro de cada objeto y su reconstrucción, junto con un valor de error porcentual. En este caso, el error porcentual en la determinación del valor del diámetro reconstruido, oscila entre 0.2 y 0.8 pixeles.

Diamétro Objeto (μm)	Diámetro Reconstrucción (μm)	Error (%)
100.58	101.70	1.14
110.33	112.90	2.27
119.29	120.49	0.99
141.23	145.28	2.78
151.39	154.75	2.17
158.04	161.79	2.32
169.89	175.68	3.30

Tabla 3.3: Tabla comparativa para una muestra de partículas de diferentes tamaños.

Localización Axial de las Partículas

La coordenada de localización axial de las partículas, z_0, se encuentra incluida dentro de los parámetros de la función wavelet, al hacer parte del factor de escala a. Esta relación entre la función wavelet base y la coordenada z, hace que el comportamiento de todas las funciones relacionadas con Ψ_a^G, dependan del valor de z. En holografia de partículas, la función de reconstrucción presenta un comportamiento particular, en aquella coordenada axial que coincide con la distancia de reconstrucción óptima para el arreglo experimental utilizado [20, 33].

En este caso, la distancia de reconstrucción apropiada, z_0, es quella para la cual los bordes del objeto de interés presentan una mayor nitidez y es posible distinguirlos del fondo en la imagen, como se presenta en las figuras 3.5 (a) y 3.6 (c). Para determinar el valor de z_0, se debe encontrar una parámetro cuyo comportamiento dependa de la coordenada axial, presentando un valor extremo cuando z = z_0. El parámetro escogido en este caso, es el contraste RMS de la imagen reconstruida, que presenta un valor

máximo en la coordenada axial z_0, donde las partículas se distinguen mejor respecto al fondo.

Contraste RMS

Una imagen con buen contraste, es aquella en la cual puede distinguirse fácilmente un objeto particular de todos aquellos que se encuentran a su alrededor. Existen diversas definiciones para el contraste según el tipo de aplicación de la cual hagan parte. En este caso, se utiliza la definición del contraste RMS, que no depende del contendido de frecuencia espacial de la imagen, ni de su distribución espacial de contraste. Este tipo de definición se establece a partir de la desviación estándar de las intensidades de los pixeles en la imagen de la forma,

$$\alpha_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{MN}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(I_{ij} - \bar{I})^2} \tag{3.5}$$

donde I_{ij} representan los valores de intensidad para el elemento (i, j) de una imagen de tamaño M x N, e $\bar{I}$ es el valor de intensidad promedio de la imagen. La aplicación de esta definición de contraste supone que el valor de intensidad para cada pixel se encuentra normalizado. Esto último, garantiza que los valores de α_{RMS} se encuentren entre 0 y 1.

Contraste RMS y localización axial

La figura 3.8 muestra la gráfica del contraste RMS como función de la coordenada z, para valores de intensidad obtenidos en la función de reconstrucción del conjunto de partículas, cuya reconstrucción se muestra en la figura 3.7(b). Para obtener esta gráfica, se definió un intervalo de valores $z_1 < z < z_2$, para cada uno de los cuales se calcula la matriz que representa la reconstrucción de las partículas. Sobre estas matrices, se aplica la definición establecida en la ecuación 3.5.

La gráfica presenta un máximo en la coordenada z_0 = 15 cm, que coincide con la distancia establecida en la simulación del registro del holograma, para el conjunto de partículas de la figura 3.6(a). De esta forma, el cálculo del contraste RMS en la matriz que representa la transformada wavelet de un holograma de partículas, permite localizarlas axialmente.

Estos procedimientos numéricos previos, serán aplicados a los hologramas obtenidos durante el desarrollo de la etapa experimental del trabajo. Estos resultados se describirán en el siguiente capítulo. A continuación se describen las principales características del arreglo experimental y la muestra utilizada.

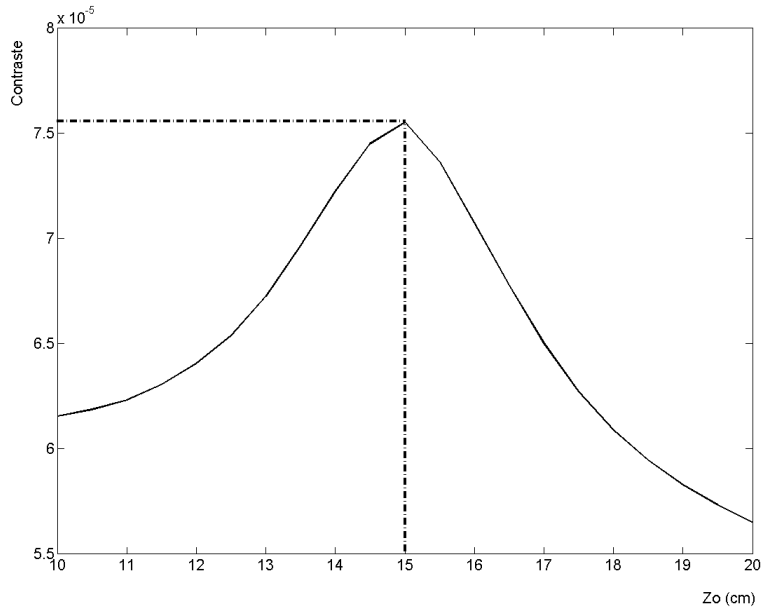


Figura 3.8: Gráfica del valor del contraste RMS de la función de reconstrucción en función de la coordenada z_0, para la simulación de una muestra de partículas.

3.2. Procedimiento Experimental

3.2.1. Arreglo experimental

El registro de los hologramas se realizó utilizando un arreglo experimental de holografía en línea como el mostrado en la figura 3.9. Este arreglo consiste en un láser de He-Ne de 35 mW de potencia, con una longitud de onda λ = 0.633 μm. El haz de láser (1), es atenuado a través de un filtro que impide la saturación del sensor. Después de ser atenuado, el haz es filtrado por medio de un filtro espacial (2) compuesto por un objetivo de microscopio y un pinhole. El haz divergente que proviene del filtro espacial es colimado a través de una lente convergente. La onda plana resultante, con un diámetro cercano a los 3 cm, es desviada a través de un espejo plano (3), inclinado 45° respecto al eje del haz para iluminar la muestra que se ubica sobre una placa de vidrio (4). El holograma de la muestra es registrado a través del sensor (5). En este caso, el sensor es una cámara Lumenera Lu120, con tecnología CMOS, con 6.7 μm de tamaño de píxel, y un área de imagen de 1280 x 1024 pixeles. Finalmente, la información de intensidad en el sensor, es almacenada en el computador (6), para ser procesada posteriormente.

La placa portamuestras se encuentra ubicada sobre un tornillo milimétrico, con el cuál puede ser desplazada de forma vertical, variando la distancia muestra - sensor z, en pasos de Δz = 1 mm. El máximo desplazamiento que permite este tornillo es de 10

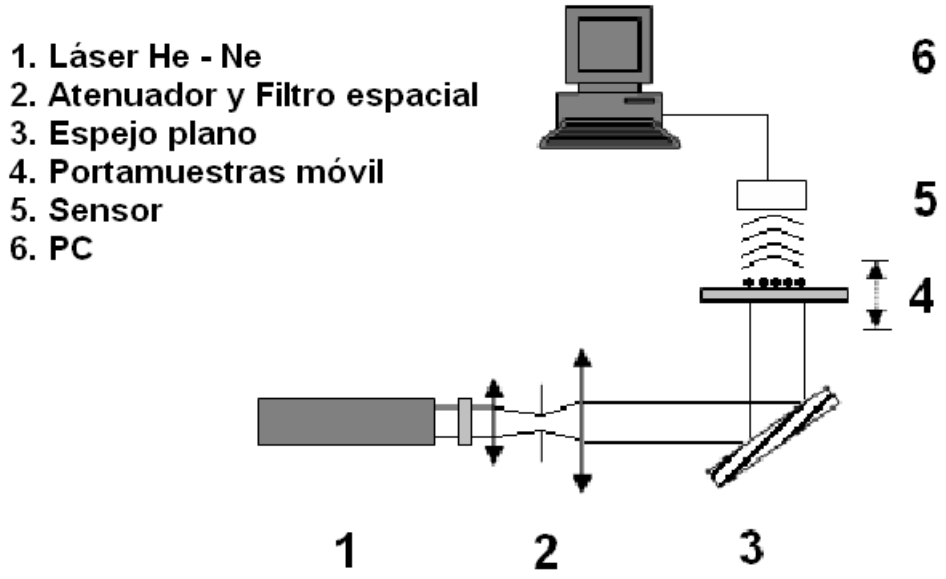


Figura 3.9: Arreglo experimental para el registro de hologramas en línea.

mm. Los objetos de la muestra, se encuentran confinados en una región de la placa de 1 cm^2. La densidad promedio de partículas sobre la placa con diámetros comprendidos entre 70μm - 150μm corresponde a 80 por cm^2.

3.2.2. Descripción de la muestra de partículas analizada

Las muestras que se utilizaron para el desarrollo de esta investigación, consisten en partículas de silicio de tamaño micrométrico. En la figura 3.10, se muestra una fotografia de una porción de la muestra, tomada utilizando un microscopio electrónico de barrido [2]. En esta fotografía, puede observarse que esta porción de la muestra está compuesta en su mayor parte por partículas con forma esférica.

En el histograma de la figura 3.11, se encuentra la distribución del diámetro de los objetos que componen la porción de muestra mostrada en la figura 3.10. Para obtener este histograma, fué necesario binarizar la fotografía y determinar el diámetro a partir de esta imagen binarizada, utlizando la herramienta `EquivDiameter` de `Matlab` ®, mencionada anteriormente. Este histograma se encuentra acotado por un límite inferior, con el que se ignoran aquellos elementos brillantes de escaso tamaño que constituyen ruido, pero que pueden ser confundidos con partículas. Las partículas de mayor tamaño que pueden distinguirse en la fotografía, aparecen aisladas en el histograma, y corresponden

[2]Agradecimientos al Laboratorio de Microscopía óptica, de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

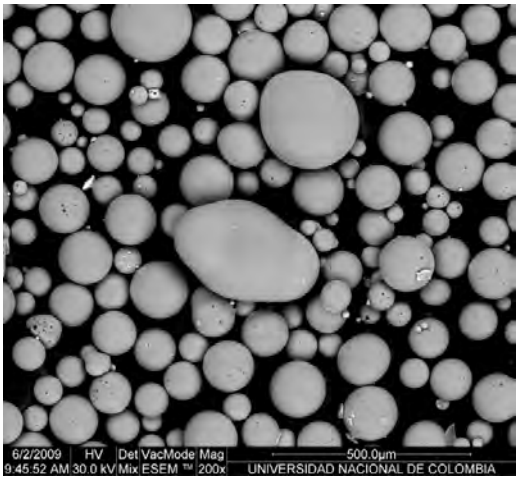


Figura 3.10: Fotografia mediante microscopio electrónico de barrido de una porción de la muestra.

a los valores para el diámetro, por encima de 200 μm. Los valores de interés para este trabajo, corresponden a aquellos diámetros menores a 200 μm.

Tomando porciones de partículas de la muestra, se registraron hologramas digitales, utilizando el arreglo experimental mostrado en la figura 3.9. Estos registros fueron procesados numéricamente aplicando algunas de las herramientas desarrolladas durante la etapa de simulación previa. El detalle de este análisis, se presenta en el siguiente capítulo.

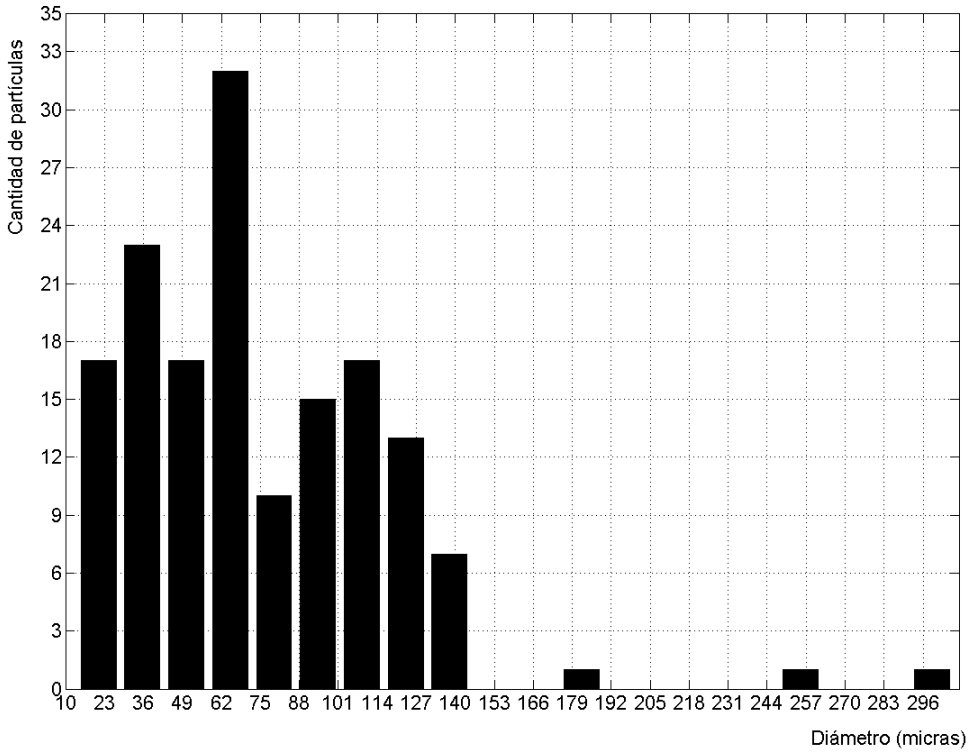


Figura 3.11: Histograma con la distribución de diámetros de las partículas de la muestra.

Capítulo 4

Resultados y Análisis

La recuperación de la información de un objeto a partir de la transformada wavelet de un holograma registrado en un arreglo experimental de holografía en línea de Fraunhofer, ha sido realizada para objetos tales como fibras y partículas [8, 31]. Para el estudio de objetos descritos por una función en una dimensión, como el caso de las fibras, la base de funciones wavelet mostrada en la ecuación 2.36, sigue siendo válida, ya que en la aproximación de Fraunhofer, no se imponen restricciones a la geometría de la función O(x,y).

En el arreglo experimental de la figura 3.9, inicialmente, se utiliza como objeto de prueba, una tarjeta calibrada USAF-1951, 1X. El objetivo de esta prueba inicial, es realizar una verificación previa de la relación entre las medidas de los objetos que se reconstruyen aplicando la ecuación 3.3, y las medidas determinadas en el plano objeto. La tarjeta de prueba USAF de alta resolución, está compuesta por 9 grupos de líneas que decrecen en tamaño, con anchos comprendidos entre 0.55 y 500 micras. Cada uno de los grupos, está compuesto por seis subconjuntos, que se encuentran identificados como elementos 1 al 6; a su vez, cada elemento contiene tres franjas horizontales y tres verticales, que se encuentran igualmente espaciadas.

Para esta prueba inicial se registran los hologramas de algunas barras de la tarjeta con anchos entre 50 μm - 180 μm. Después de realizar un proceso similar al descrito en apartados anteriores para el cálculo de la localización axial del plano que contenía las barras bajo estudio se procedió a determinar el ancho de cada una de las barras, utilizando herramientas de la plataforma `Matlab` ®. El resultado de la determinación de este ancho se muestra en la figura 4.1. En esta gráfica, se observa un acuerdo entre las medidas determinadas a partir de la aplicación de la transformada wavelet al holograma de la tarjeta, y los valores reportados en la literatura para el ancho de las barras.

Una prueba adicional, se realiza hallando el tamaño de las barras del elemento 1 del grupo 3, para diferentes valores de la coordenada axial, con el fin de determinar la

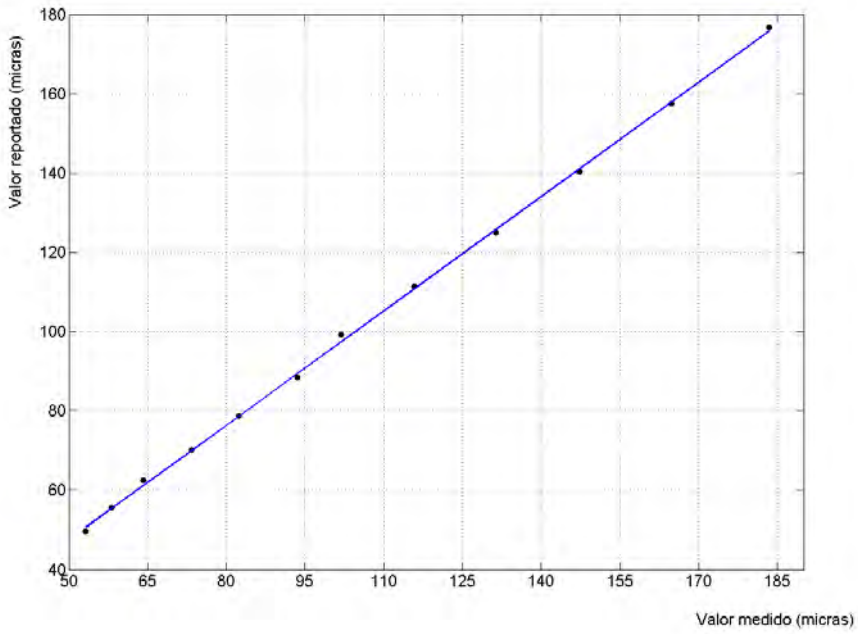


Figura 4.1: Relación entre las medidas reportadas para los elementos de la USAF, respecto a los valores determinados a partir de la aplicación de la transformada wavelet al holograma registrado.

variación de la medida con z. El resultado, se muestra en la figura 4.2. En esta figura, se presenta un gráfico que relaciona la medida del ancho de la barra con respecto a la distancia z a la que fueron reconstruidos los hologramas respectivos; la línea punteada, representa el valor promedio de todas las medidas. El valor promedio de la medida corresponde a 66.05 μm, con una desviación estándar de 0.78 μm y un error relativo del 5.68 $\%$. La máxima diferencia entre el mayor valor medido (67.33 μm) y el valor real (62.50 μm), es 5.28 μm, que es menor al tamaño del pixel del sensor.

4.1. Partículas micrométricas ubicadas en un mismo plano

Las partículas de prueba utilizadas en el desarrollo de la etapa experimental de este trabajo, fueron ubicadas sobre la placa portamuestras de un arreglo experimental como el mostrado en la figura 3.9. Para los hologramas registrados de la muestra, se registra adicionalmente, una imagen de referencia sin las partículas. El procesamiento de la información almacenada, se realiza implementando un procedimiento similar al esquematizado en la figura 4.3. Los parámetros tales como λ y ϵ utilizados para el cálculo de la función wavelet generadora, son los consignados en la tabla 3.1.

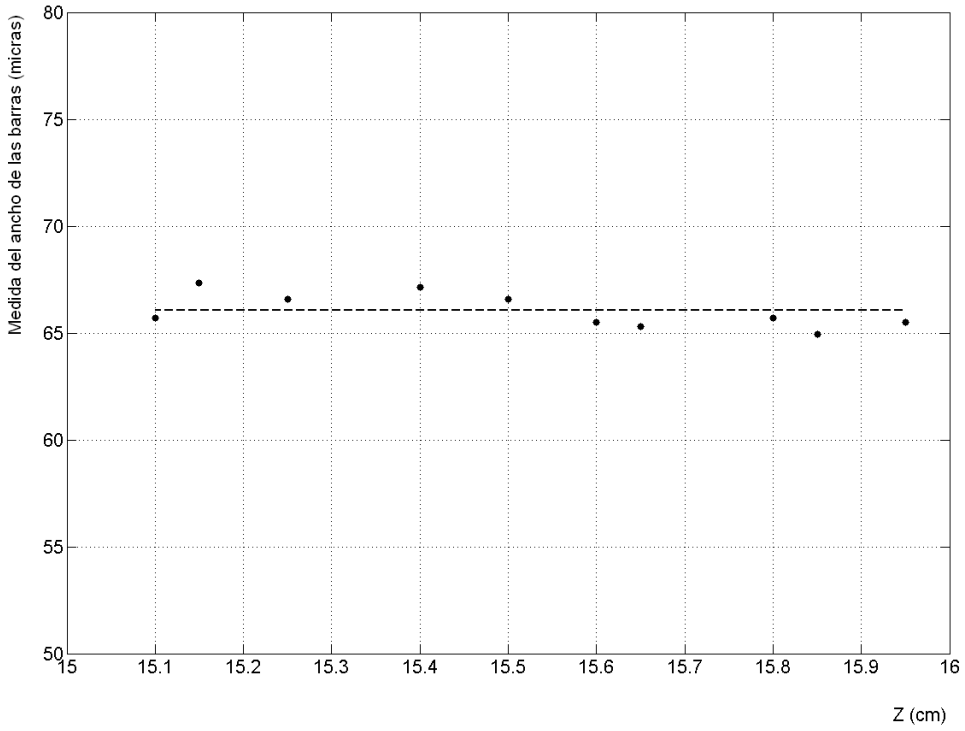


Figura 4.2: Cambio en la determinación del ancho de las barras del grupo 3, elemento 1, cuando varía la coordenada axial z. La línea puntueada señala el valor promedio de la medida del ancho de las barras que corresponde a 66.05 μm.

La disposición de la muestra sobre la placa se realiza de forma manual, controlando que la cantidad de partículas no sea excesiva (en promedio 80 partículas por cm^2), para evitar dificultades en el detalle de la reconstrucción de la muestra. Una densidad demasiado elevada de las partículas, dificulta su posicionamiento axial y por supuesto, la medida de su diámetro [7]. Este aspecto es de gran importancia en este caso, en el que se tiene una muestra en la cual el valor del diámetro no es el mismo para todas las partículas. Durante el proceso de registro, se buscó que la cantidad de partículas sobre la placa portamuestras fuera tal, que lograran resolverse los anillos de difracción de cada partícula.

Los procesos descritos en el diagrama, se detallan a continuación:

1. **Restado de una imagen de referencia.** Dentro del procedimiento experimental, se realiza un registro adicional de referencia en ausencia del objeto. Con esto, se busca disminuir el nivel de ruido en la imagen original, ocasionado por elementos del entorno.

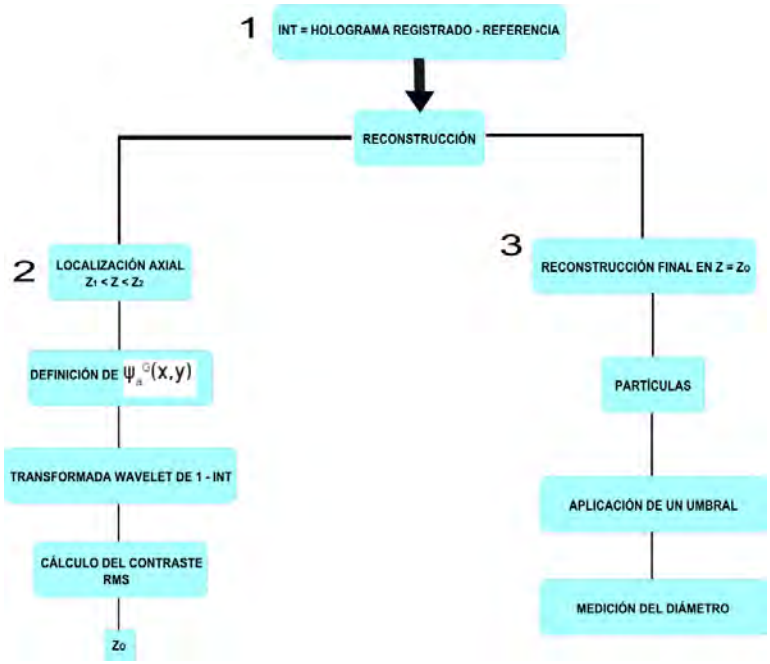


Figura 4.3: Diagrama de procesos numéricos aplicados sobre los hologramas para las partículas de prueba.

2. **Localización de la coordenada axial.** El proceso de búsqueda de la coordenada axial z_0, comienza definiendo un intervalo (z_1, z_2) en el cual es posible encontrar la coordenada z_0. Este intervalo, es seleccionado teniendo en cuenta las condiciones experimentales para cada holograma registrado. Para cada uno de estos valores de z, se realizan los siguientes cálculos:

   *** Definición de la función wavelet.** Para cada uno de los valores $z_1 \leq z \leq z_2$, se calcula el parámetro σ_{min}, con el propósito de definir completamente la función wavelet generadora, en la forma establecida en la ecuación 2.43. Posteriormente, se calcula la transformada wavelet del complemento del holograma, según lo establecido en la ecuación 3.3.

   *** Cálculo del contraste RMS.** De los procesos anteriores, se obtiene una matriz, que contiene la información de intensidad de la imagen de reconstrucción del objeto, para cada valor de z en el intervalo (z_1, z_2). Para cada una de estas matrices, se calcula el contraste RMS, tal y como se establece en la ecuación 3.5. El programa proporciona el valor de la coordenada z_0, para el cual α_{RMS} es máximo.

3. **Reconstrucción final de la imagen del objeto.** Conocida la localización axial del

plano buscado, se aplica la transformada wavelet al complemento del holograma para recuperar la información del objeto.

4. **Medición del diámetro de las partículas.** Siguiendo el proceso descrito en el capítulo anterior, se aplica un umbral de intensidad sobre la imagen final obtenida después de aplicar la transformada wavelet al complemento del holograma. Posteriormente, se determina la distribución del diámetro de las partículas de prueba, utilizando herramientas del entorno `Matlab` ®.

4.1.1. Resultados obtenidos

Siguiendo el procedimiento esquematizado en la figura 4.3, se muestran los resultados obtenidos en la figura 4.4. La imagen en 4.4 (a), corresponde al holograma inicialmente registrado sobre el sensor, al que posteriormente se le extrae la imagen de referencia (figura 4.4 (b)). En la parte (c) de la figura 4.4, se obtiene la curva α_{RMS} en función de la coordenada axial z, que presenta un valor máximo para z = z_0 = 18.30 cm.

La reconstrucción en intensidad de la información de la porción de muestra de partículas analizada, se muestra en la figura 4.5. En esta figura, se muestra la imagen de reconstrucción completa y un detalle para las distancias de reconstrucción z_0 = 18.30 cm, z_0 = 17.30 cm y z_0 = 19.00 cm. Cuando se utiliza un valor de coordenada axial que no corresponde a un valor máximo de contraste, se obtiene una imagen reconstruida en donde las partículas parecen estar ”fuera de foco”, y no es posible resolver sus bordes, como es el caso en los detalles mostrados en las figuras 4.5 (d) y 4.5 (f).

Determinación del Diámetro de las Partículas en un Plano

En la figura 4.6 (a), se muestra el histograma de valores de intensidad de la matriz que representa la imagen de reconstrucción de la muestra. A partir de este histograma, se define el umbral más apropiado para la imagen de interés, que resulta ser el consignado en la ecuación 3.4. Después de obtener la imagen binarizada al aplicar el umbral, se procede a calcular el diámetro de las partículas en la muestra. Estos cálculos se realizan utilizando las herramientas descritas ampliamente en el capítulo anterior.

El resultado de la medición del diámetro de las partículas, se encuentra consignado en la gráfica 4.6 (c). Esta imagen, corresponde al histograma de distribución de tamaños en las partículas de la muestra. Este histograma se encuentra acotado por un valor mínimo de 67 micras, que evita que se tengan en cuenta zonas con tamaños menores o iguales a este límite, que se identificaron como datos que no corresponden a partículas en la muestra. En esta porción de la muestra, la mayor parte de las partículas tienen un valor de diámetro entre 88 μm y 125 μm. La principal fuente de desviación en los valores

del diámetro en esta medida, proviene de aquellas partículas en la muestra, que se encontraban adheridas, formando clusters cuyo diámetro puede llegar a ser mayor que el de una sola de las partículas que lo componen.

Para esta primera porción de muestra de partículas, se determina el valor de las coordenadas (x, y) del centro de cada uno de los objetos dentro de la imagen binarizada final, que es considerado una partícula. Esto permite recopilar por completo toda la información relacionada con el plano de localización y el tamaño de las partículas de prueba de la porción de muestra utilizada. En la figura 4.7, se grafica sobre el plano, la posición de los centros de las partículas cuya distribución de tamaño se muestra en el histograma de la figura 4.6. Las unidades para las coordenadas son los centímetros. El área en la que las partículas se localizan sobre la placa, corresponde a 1 cm x 1 cm.

Todas las partículas se encuentran sobre el mismo plano, y la posición axial medida para todas ellas es 18.30 cm, valor que al ser comparado con una distancia esperada de 17.70 cm, proporciona un error porcentual de 3.4 $\%$. La incertidumbre en el cálculo numérico de esta medida de la coordenada axial z, corresponde al valor del paso Δz = 0.05 cm, con el cual se recorre el intervalo $z_1 \leq z \leq z_2$, para calcular los datos que corresponden a la gráfica del contraste en función de z. El valor de la incertidumbre en la determinación del centro de coordenadas de cada una de las partículas corresponde a un píxel.

En las figuras 4.8 y 4.9, se muestran los resultados obtenidos, al aplicar el mismo procedimiento descrito antes, sobre otra porción de la muestra, ubicada en dos posiciones axiales diferentes. A pesar de exhibir algunas diferencias, el rango de distribución de tamaños en las partículas de la muestra se mantiene; cuando la muestra se encuentra ubicada en la posición z_0 = 15.80 cm, una mayor cantidad de partículas se encuentran en el intervalo de tamaños 85 μm - 110 μm, mientras que para una ubicación z_0 = 16.30 cm, este rango es 73 μm - 109 μm. Dentro de las posibles fuentes de error de las cuales pueden derivarse estas diferencias, se encuentran los cambios en la uniformidad de la iluminación de la muestra, y la imprecisión en la delimitación del borde de algunas partículas, al aplicar el umbral a la imagen reconstruida.

4.2. Partículas Micrométricas en Planos Distintos

En la figura 4.10, se muestran dos fotografías de algunas partículas, obtenidas con un microscopio de campo claro [1]. Para la obtención de estas imágenes, se dispusieron dos placas de vidrio separadas 170 μm, cada una de los cuales contiene algunas partículas

[1]Agradecimientos al Laboratorio de microscopía óptica de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá.

pertenecientes a parte de la muestra utilizada. Lo que se observa en estas fotografías, es un ejemplo de lo que se obtiene al enfocar uno u otro de los planos fotografiados. En la parte (a), se observan las partículas que se encuentran ubicadas en la placa que se encuentra más alejada de la cámara, y que se ha denominado plano inferior. En la parte (b), se muestran las partículas ubicadas en el plano más cercano a la cámara del microscopio, llamado plano superior. Es importante aclarar que debido a dificultades experimentales, las partículas que se muestran en la fotografía no son las mismas utilizadas en el desarrollo del experimento, pero si pertenecen a la misma muestra.

Para el desarrollo de esta parte del experimento, se dispuso de una parte de la muestra, repartida en tres placas. Su disposición se muestra en la figura 4.11. La separación entre los planos considerados, corresponde a 1 cm (primera y segunda placa), y 0,5 cm (segunda y tercera placa). Las distancias placa - sensor determinadas experimentalmente corresponden a 14,5 cm, 15,5 cm y 16,0 cm, para la primera, segunda y tercera placa respectivamente. Para que el método sea aplicable, es necesario garantizar que exista una baja densidad de partículas en cada uno de los planos considerados (menor a 20 partículas por cm^2), con el fin de evitar la superposición de los patrones de difracción de las partículas. Esta superposición de anillos de difracción, ocasiona la aparición de ruido en la reconstrucción del holograma. En este caso, la densidad total para las tres placas fué de 50 partículas/cm^2. En la figura 4.12, se muestra el holograma registrado y su reconstrucción para un conjunto de partículas pertenecientes a la muestra de trabajo, distribuidas en tres placas.

El procedimiento implementado para la localización axial de las partículas para el caso de un solo plano, basado en el cálculo del valor del contraste en la reconstrucción del holograma, es implementado inicialmente en este caso. La gráfica del contraste en función de la distancia z que se obtiene, no muestra tres valores máximos como era esperado. El resultado de este cálculo se encuentra ilustrado en la figura 4.13. Según el cálculo realizado, se presenta un máximo en z = 15,4 cm, que es señalado en la gráfica 4.13. La reconstrucción del holograma para esta distancia se muestra en la figura 4.14; En esta figura, se presentan en la parte derecha algunos ejemplos de regiones del holograma reconstruido en detalle, donde se observa que las partículas no se encuentran enfocadas. Esta distancia por tanto, no corresponde a la distancia de ninguno de los planos de enfoque buscados. Se decide entonces, implementar un procedimiento en el cual el cálculo del valor del contraste se realiza en forma local, considerando por separado regiones de la matriz de reconstrucción del holograma. Esto tiene como objetivo, disminuir el efecto de ruido que producen los patrones de difracción de las partículas ubicadas en planos sucesivos, que impiden que un criterio basado en el cálculo del contraste para la totalidad del holograma reconstruido, distinga tres planos de enfoque.

La selección de las regiones sobre las cuales se realiza el cálculo del contraste,

comienza con la aplicación inicial de 80 máscaras sobre el holograma reconstruido para una distancia inicial estimada a partir del experimento. Esta selección de distancia no tiene que coincidir con ninguno de los planos buscados, ya que el único objetivo de este procedimiento inicial, es discriminar aquellas regiones sobre la reconstrucción del holograma que contienen información de una o mas partículas. Estas 80 máscaras corresponden a una región cuadrada blanca de 128 x 128 pixeles que se desplaza sobre la totalidad de la matriz de 1024 x 1280 pixeles que representa la reconstrucción del holograma. En la figura 4.15, se muestran 6 de las 80 máscaras utilizadas. El procedimiento completo se esquematiza en la figura 4.16.

El procedimiento completo aplicado sobre el holograma registrado (figura 4.16), consistió en realizar su reconstrucción utilizando la transformada wavelet para un conjunto de valores en un intervalo ($z_1 < z < z_2$); A continuación, para cada una de las matrices resultantes de este proceso de reconstrucción, se realiza su producto con cada una de las 80 máscaras previamente establecidas. El siguiente paso, es determinar el valor del contraste sobre las matrices de 128 x 128 pixeles con valores distintos de cero resultantes de la aplicación de las máscaras sobre la matriz de reconstrucción. Finalmente, se obtiene la coordenada axial donde el valor del contraste es máximo para cada una de las 80 regiones obtenidas en los productos matriciales realizados. En la figura 4.17, se muestra a manera de ejemplo, dos de las regiones obtenidas del producto matricial entre la reconstrucción mostrada en la figura 4.12(b), con las máscaras (c) y (f) de la figura 4.15.

A pesar de tener 80 datos a partir de este proceso, de la figura 4.17, puede notarse que algunas de las regiones obtenidas contienen información de una o mas partículas de la muestra (Figura 4.17(a)) y otras por el contrario, solo contienen información de intensidad relacionada con la iluminación de fondo (Figura 4.17(b)), que no aportan datos relevantes en las coordenadas axiales que se buscan. Debido a esto, no todos los datos resultantes resultan ser válidos, y solo son considerados aquellos en los cuales la región delimitada por la máscara contiene una o mas partículas. En este caso, las máscaras que aportan información resultan ser únicamente 35.

En la tabla 4.1, se muestran los valores de distancia obtenidos a partir de la determinación del contraste máximo para 35 máscaras válidas. Para cada distancia se muestra el número de máscaras en las que esta distancia corresponde al máximo contraste. Algunas de estas distancias son cercanas entre sí. En la tercera columna de esta tabla, se muestra el valor máximo del contraste para cada distancia en cada caso.

A partir de los datos proporcionados por la tabla 4.1, y teniendo en cuenta que los valores de contraste están dados para regiones distintas sobre la reconstrucción del holograma, se realiza una gráfica en tres dimensiones, que muestra la distribución de valores de contraste por color en la figura 4.18. En esta gráfica, las coordenadas x y y corresponden

Distancia (cm)	Máscaras	Valor máximo del contraste (x 10^{-2})
13,60	2	6,67
13,80	1	7,05
14,00	1	7,91
14,20	1	4,77
14,45	1	4,42
14,65	3	9,23
14,90	9	11,01
15,15	1	6,19
15,40	2	6,59
15,65	2	8,20
15,90	5	11,07
16,20	5	11,83
16,45	2	9,47

Tabla 4.1: Datos obtenidos a partir del análisis de las 35 máscaras seleccionadas.

a la ubicación de los centros de cada una de las máscaras, y son expresadas en píxeles sobre la imagen. La coordenada z, corresponde a la distancia axial reportada para cada una de esas máscaras por su valor máximo de contraste. De esta figura, se destaca que los valores máximos de contraste para las diferentes regiones, se encuentran para las distancias 14.9 cm, 15.9 cm y 16.2 cm, que son las que muestran una mayor cantidad de frecuencia de reporte en los datos de la tabla 4.1. Estos valores son señalados en la gráfica entre paréntesis. Estas distancias, corresponden a los tres planos de enfoque buscados. Respecto a los valores esperados, el máximo error porcentual resulta ser del 2.7 $\%$.

A continuación, se realiza la reconstrucción del holograma para las tres distancias señaladas en la figura 4.18. El resultado se muestra en la figura 4.19. Para cada una de las reconstrucciones obtenidas, se señalan las partículas que son enfocadas en cada caso. Estos resultados muestran que el procedimiento por regiones, es el más apropiado para encontrar la distancia axial de enfoque de las partículas cuando se tiene un arreglo con dos o mas placas. El criterio utilizado para discriminar la distancia en este caso, continua siendo el valor del contraste máximo, para cada una de las regiones seleccionadas. El tamaño de las máscaras es importante para distinguir de forma apropiada la información de todas las partículas en la muestra, ya que si varias partículas que se encuentran en distintos planos comparten la misma región de la máscara, podría perderse información relacionada con la localización axial de alguna de ellas. En este caso, una máscara de 128 x 128 píxeles, resultó ser apropiada.

4.2.1. Determinación del Diámetro de Partículas en Planos Distintos

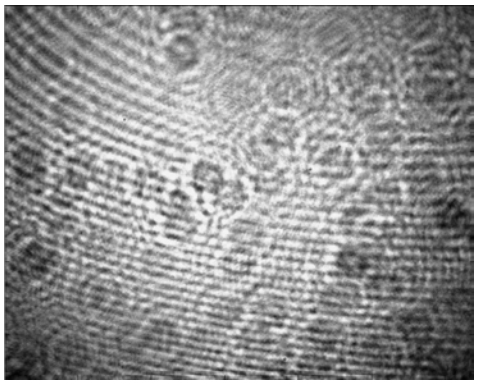
La medida del diámetro de las partículas ubicadas en los tres planos ya identificados, se realiza mediante un cálculo por regiones, ya que cada una de las 35 máscaras con información identificadas, contiene la información de una o más partículas ubicadas en una distancia determinada, que ahora no es única. Para hallar esta medida, el procedimiento numérico implementado, es idéntico al caso de una sola placa, pero se realiza para cada una de las 35 regiones establecidas. De esta forma, se encuentra el valor del diámetro de las partículas y sus coordenadas x, y y z.

La distribución del diámetro de las partículas, se muestra en el histograma de la figura 4.20. En este histograma, se observa que el tamaño de las partículas para la configuración con tres placas, se encuentra en su mayor parte en un rango entre 80 μm y 130 μm.

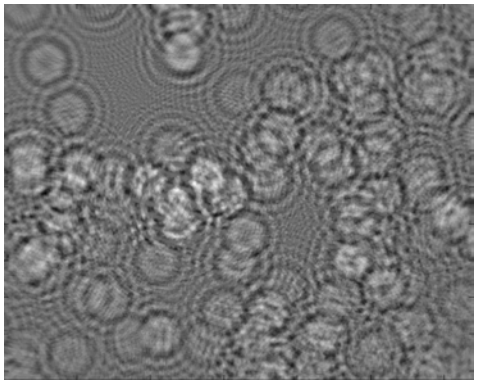
Finalmente, en la figura 4.21 se muestra la localización en las coordenadas x, y, z, en unidades de centímetros, para las partículas ubicadas en tres planos de enfoque, localizados a 14.9 cm, 15.9 cm y 16.2 cm del sensor.

El procedimiento descrito para encontrar la localización axial para partículas ubicadas en planos distintos, proporciona resultados satisfactorios dentro de lo esperado. Las distancias determinadas a partir de la aplicación de las máscaras sobre las matrices obtenidas de la aplicación de la transformada wavelet al complemento del holograma, presentan un error del 2.7 $\%$ respecto a los valores determinados en la realización del experimento. Para las distancias axiales que corresponden a la ubicación de los tres planos de enfoque para las partículas de prueba, se encontró un valor de contraste máximo respecto a los que se obtienen para otras distancias axiales, lo que reafirma la validez del criterio del contraste máximo en la determinación de la localización axial de los planos que contienen las partículas.

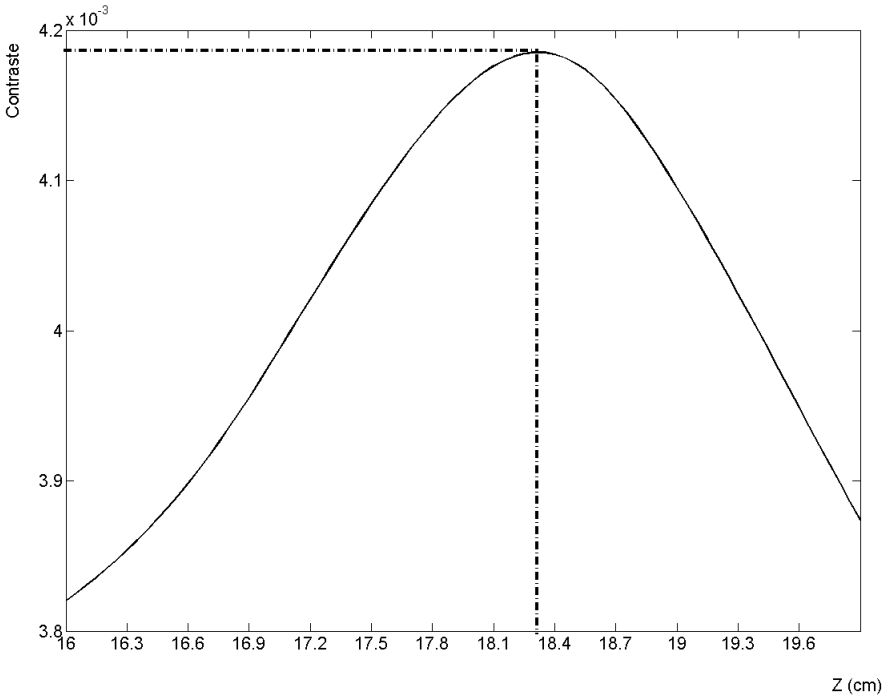
La distribución de diámetros para las partículas en la porción de muestra utilizada, se mantiene dentro de un rango menor a 150 μm, tal y como se obtuvo en las pruebas realizadas para un solo plano de registro. Estos resultados se encuentran dentro de los esperado, considerando la distribución hallada en la figura 3.11 para la porción de muestra fotografiada.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.4: Resultados experimentales para una muestra de partículas ubicada a 18.30 cm del sensor. (a) Holograma Registrado. (b) Restado de la imagen de referencia. (c) Cálculo de la localización axial del plano de la muestra.

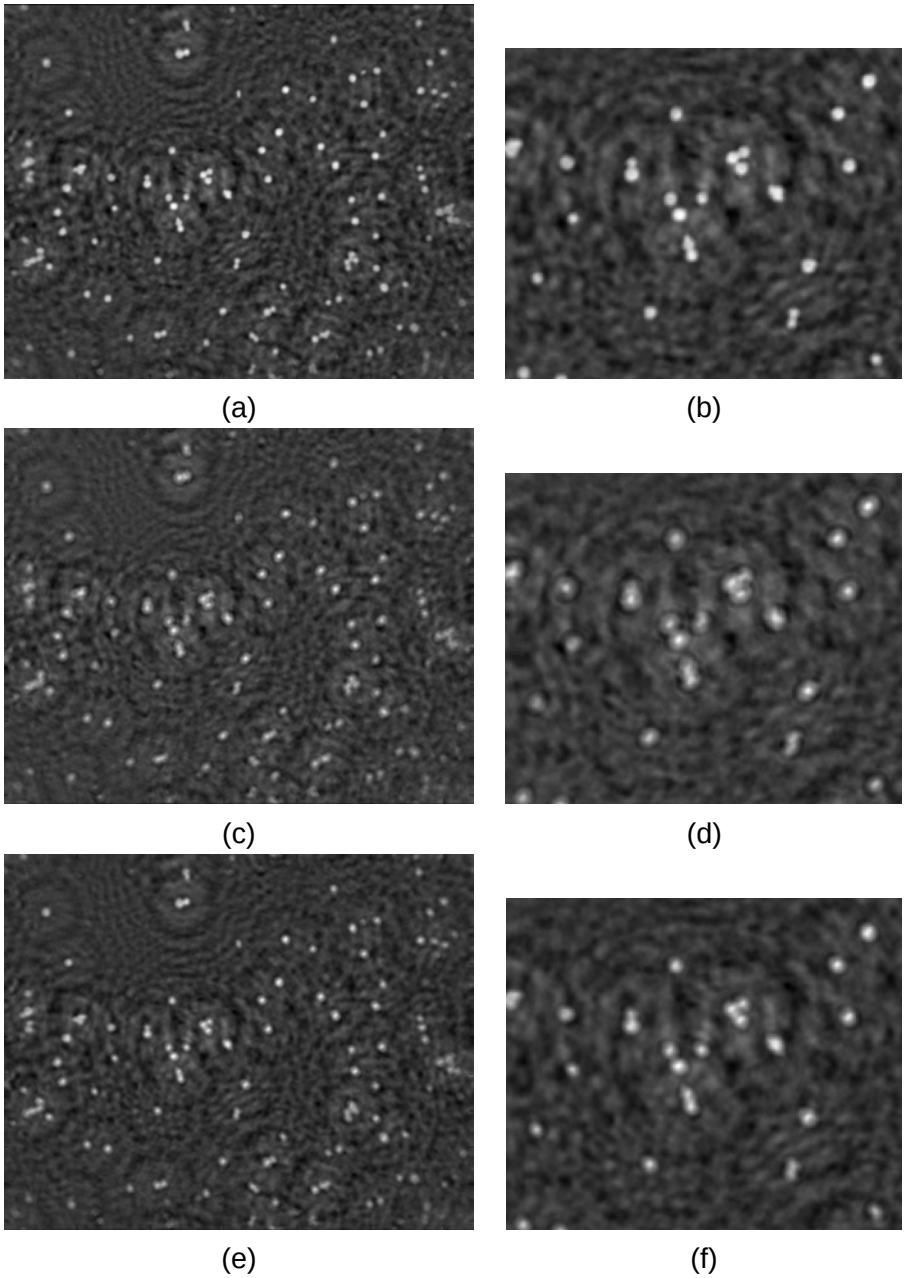
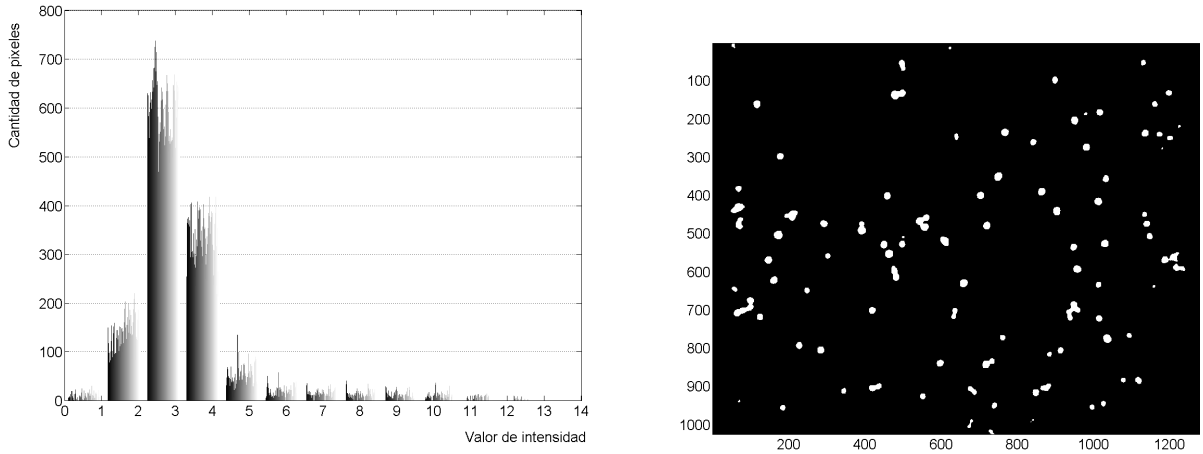
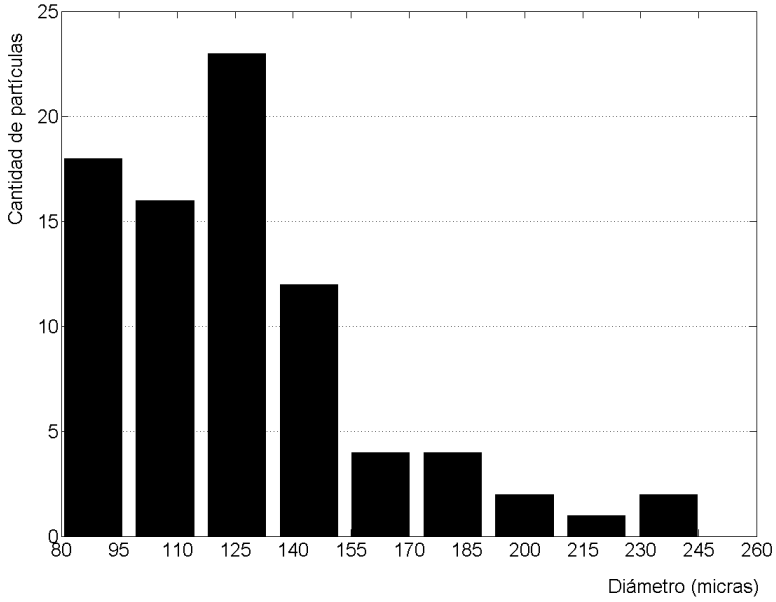


Figura 4.5: Reconstrucción del holograma de la figura 4.4 (b).(a) Reconstrucción del objeto para z = 18.30 cm. (b) Detalle de la reconstrucción a 18.30 cm. (c) Reconstrucción del objeto con z = 17.30 cm. (d) Detalle de la reconstrucción a 17.30 cm. (e) Reconstrucción del objeto con z = 19.00 cm. (f) Detalle de la reconstrucción a 19.00 cm.



(a) (b)



(c)

Figura 4.6: Cálculo del diámetro de las partículas en la muestra, con z_0 = 18.03 cm. (a) Histograma con los valores de intensidad (tono de gris) de la imagen de reconstrucción. (b) Aplicación del umbral a la imagen reconstruida. (c) Histograma mostrando la distribución de tamaños en las partículas de la muestra.

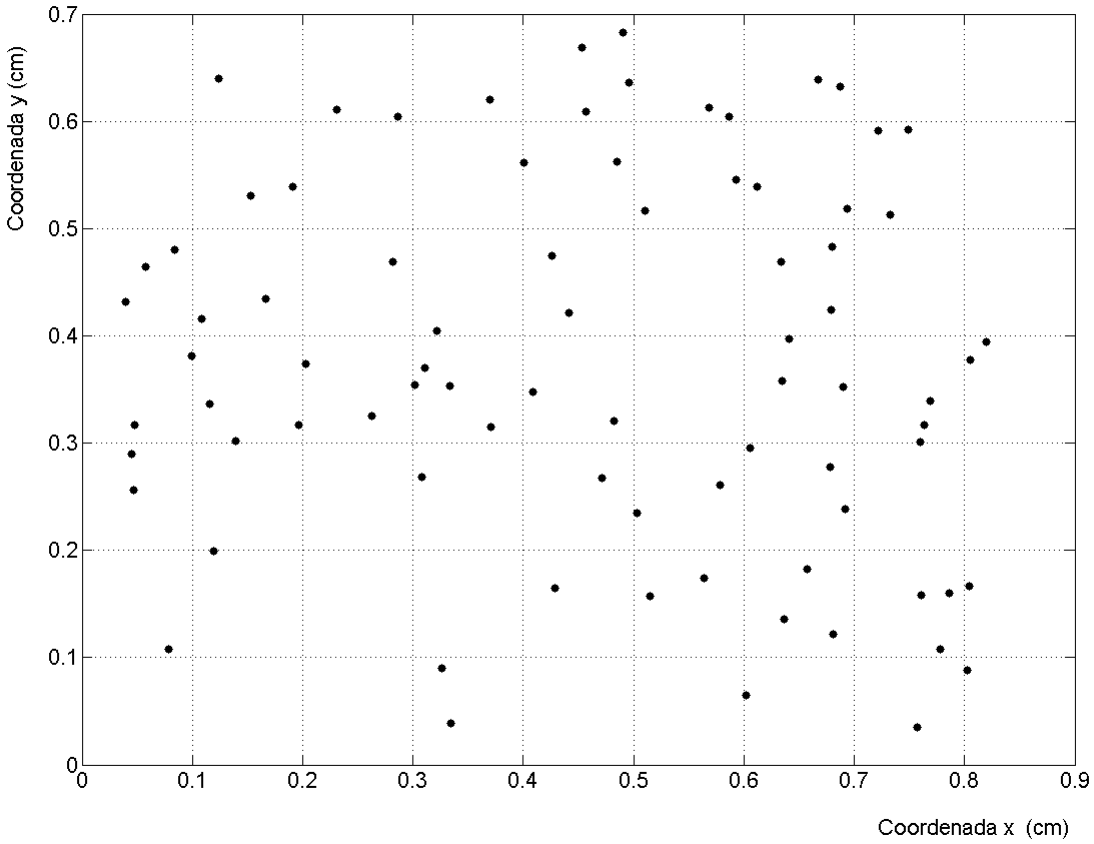


Figura 4.7: Localización en el plano de las partículas de prueba reconstruidas en la figura 4.5 a partir de la imagen binarizada en 4.6(b).

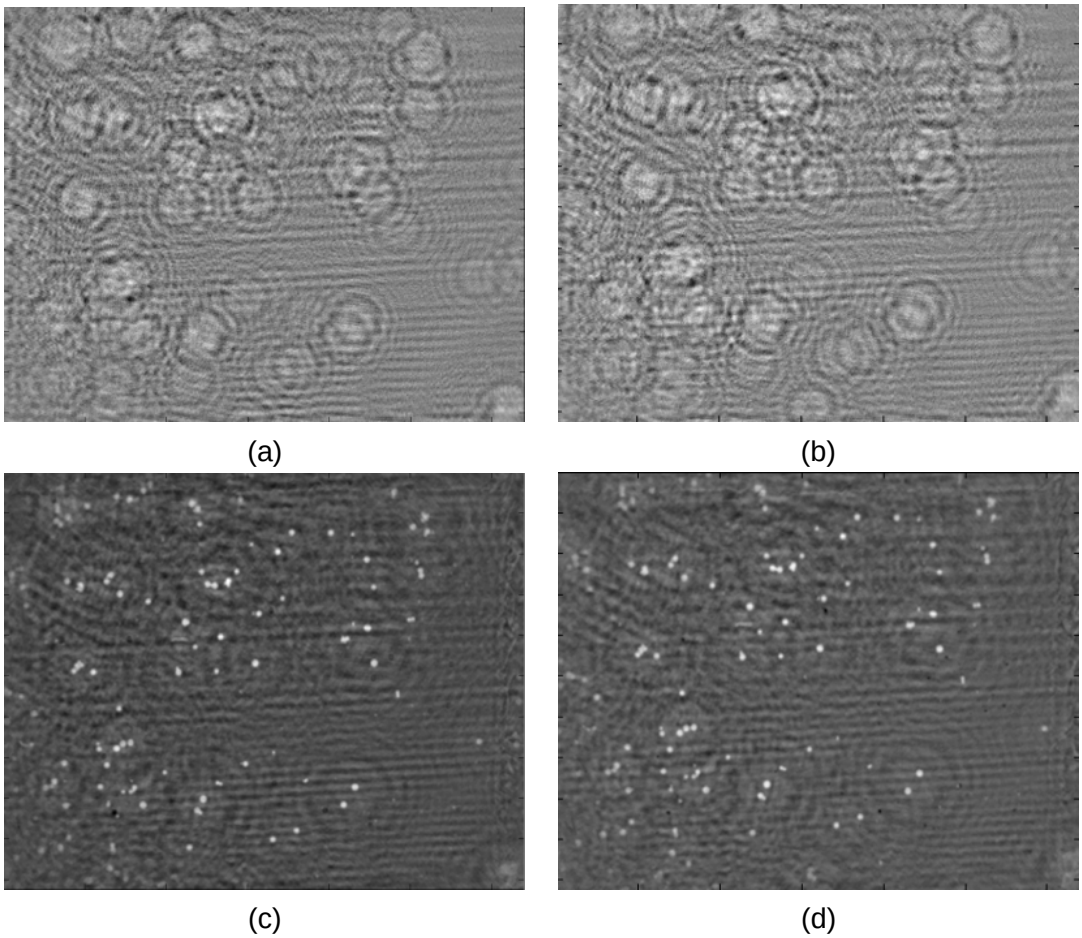


Figura 4.8: Resultados experimentales para una muestra de partículas. (a) y (b) Restado de la imagen de referencia para una muestra ubicada a 15.80 cm y 16.30 cm del sensor, respectivamente. (c) y (d) Reconstrucción del objeto, para una muestra ubicada a 15.80 cm del sensor y 16.30 cm, respectivamente.

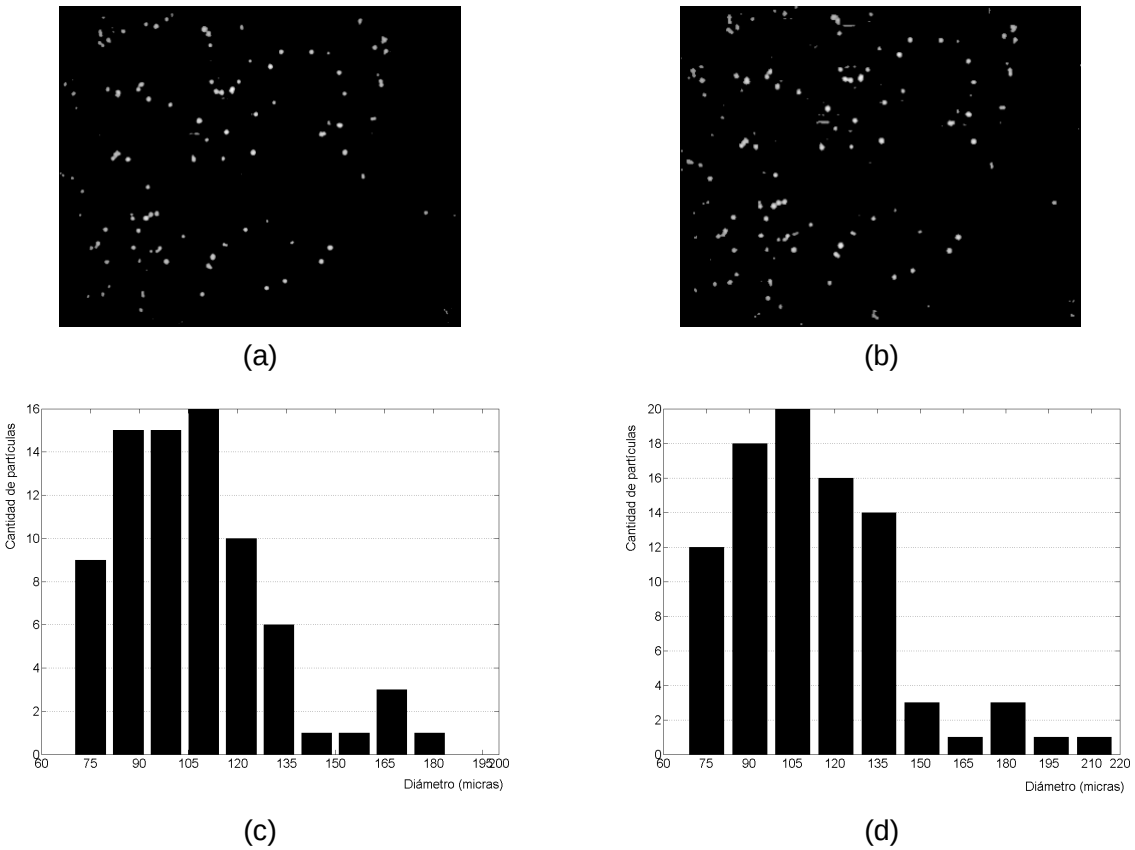
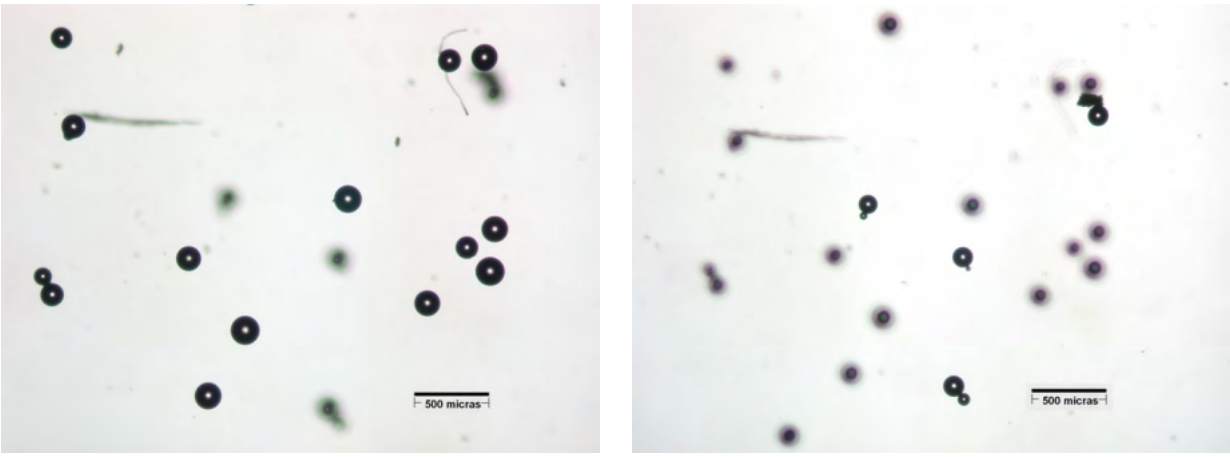


Figura 4.9: Cálculo del diámetro de las partículas. (a) y (b). Aplicación del umbral para una muestra ubicada a 15.80 y 16.30 cm del sensor, repectivamente. (c) y (d) Histograma de distribución de tamaño de partículas para una muestra ubicada a 15.80 cm y 16.30 cm del sensor, respectivamente.



(a) (b)

Figura 4.10: Fotografía de algunas partículas de prueba enfocadas en dos planos de observación distitnos. (a) Plano inferior (mas cercano a la cámara del microscopio), (b) Plano superior, ubicado a 170 μm por encima del plano fotografiado en (a)).

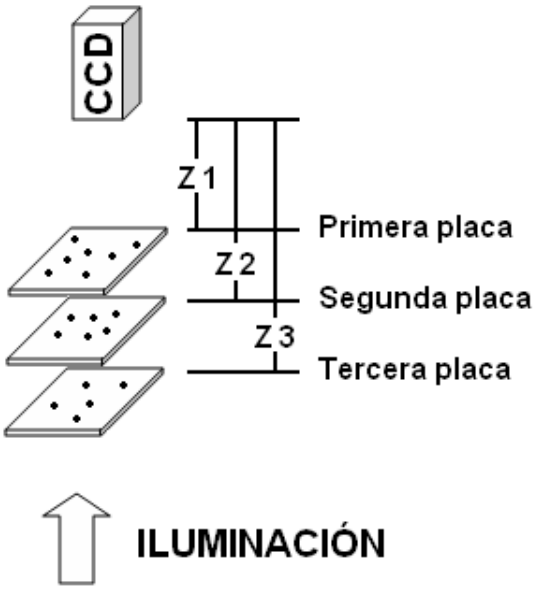


Figura 4.11: Disposición experimental de las tres placas utilizadas para el registro de un holograma con partículas ubicadas en diferentes planos. La distancias entre placas corresponden a 1 cm (primera y segunda) y 0.5 cm (segunda y tercera.)

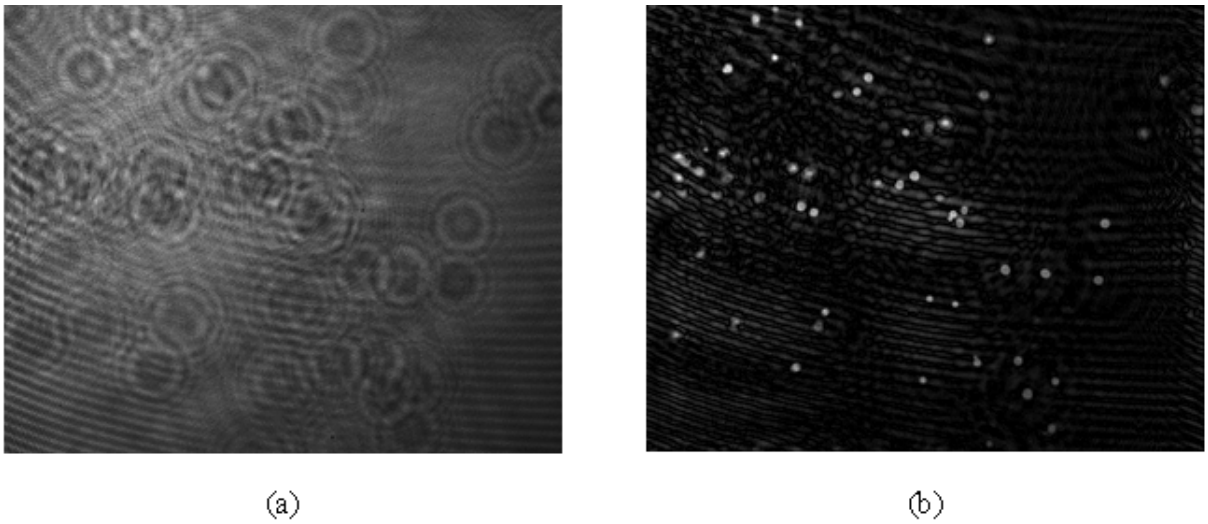


Figura 4.12: (a) Holograma registrado para tres placas. (b) Reconstrucción del holograma en uno de los planos en los que se encuentran las partículas.

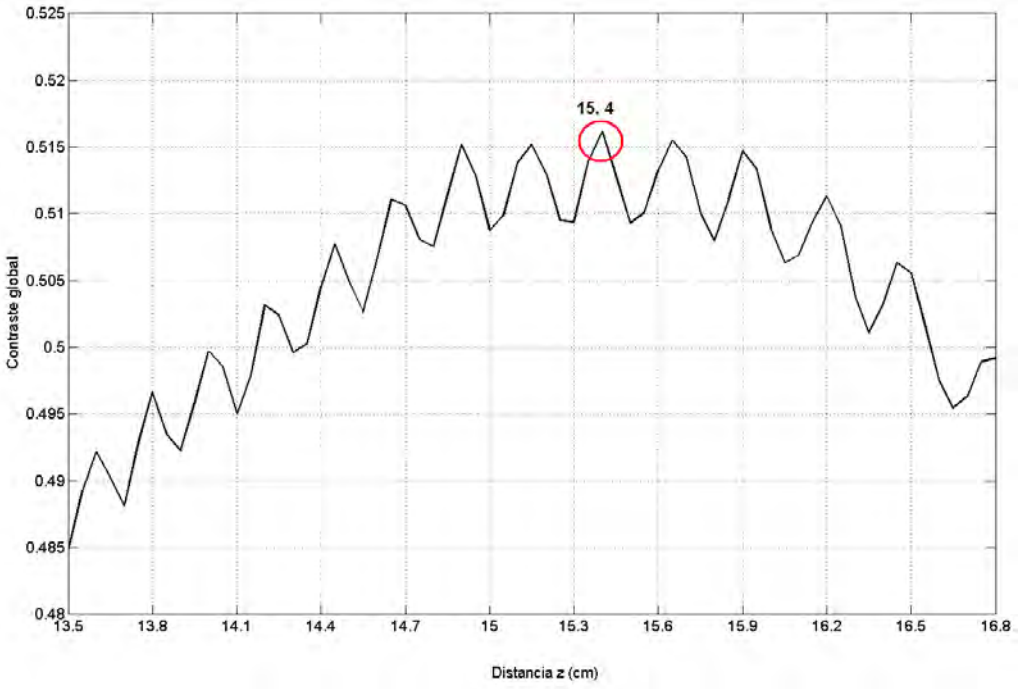


Figura 4.13: Gráfica del contraste en función de la distancia z para la reconstrucción del holograma de la figura 4.12(a).

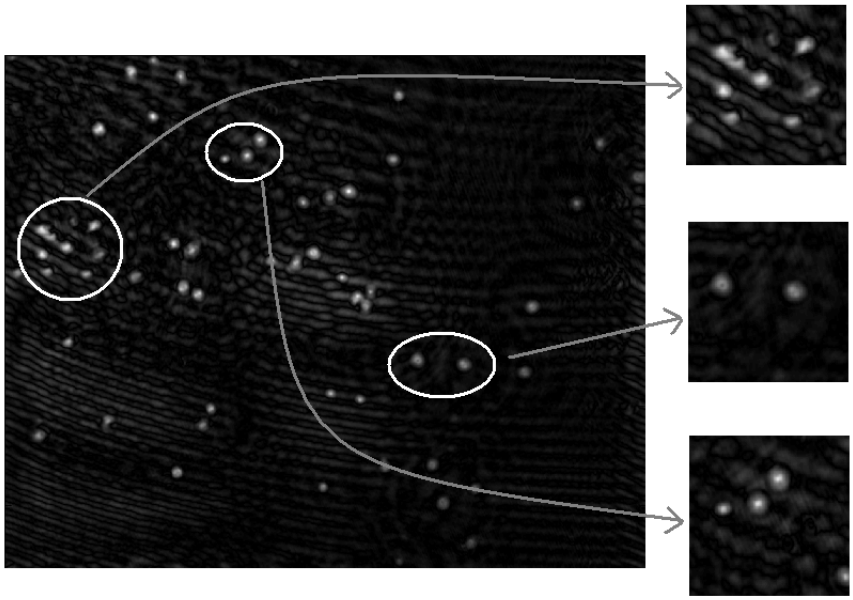


Figura 4.14: Reconstrucción del holograma de la figura 4.12(a) para z = 15,4 cm.

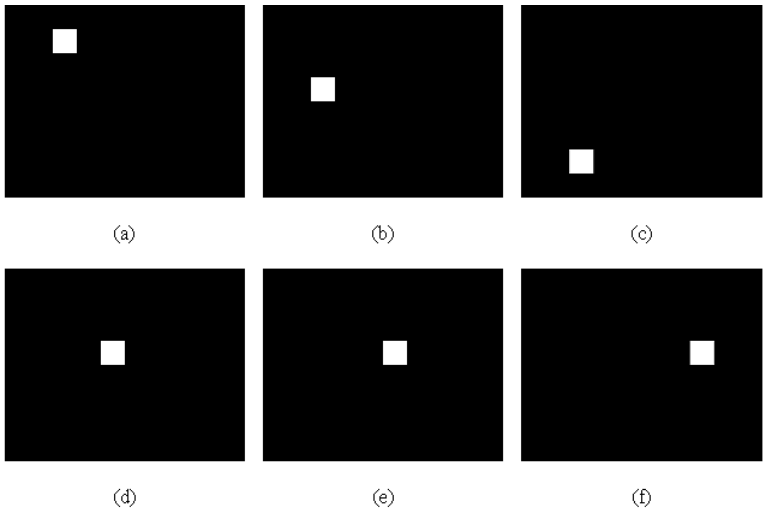


Figura 4.15: Máscaras utilizadas para el cálculo por regiones del valor del contraste en el holograma reconstruido. Figuras (a)-(c): Desplazamiento vertical de la máscara. Figuras (d)-(f): Desplazamiento horizontal de la máscara.

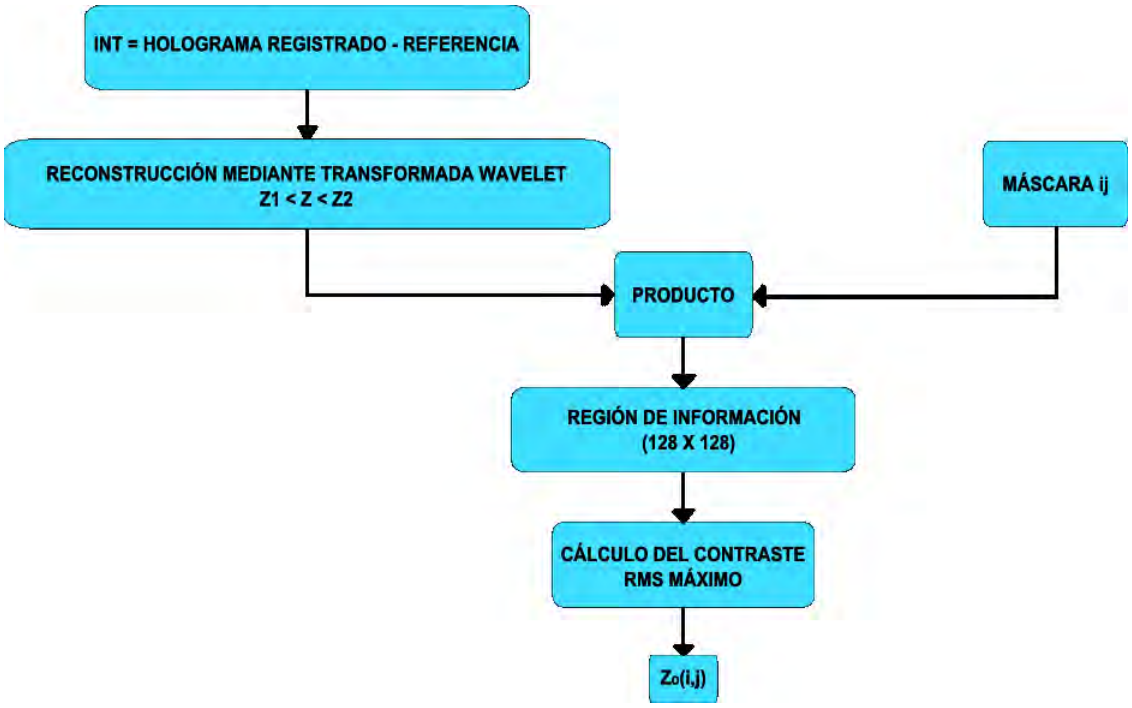


Figura 4.16: Esquema explicativo del procedimiento de localización axial de partícula para tres planos sucesivos.

(a) (b)

Figura 4.17: Aplicación sobre la reconstrucción del holograma mostrada en la figura 4.12 de las máscaras de la figura 4.15. Figura (a), aplicación de la máscara (c) de la figura 4.15. Figura (b), aplicación de la máscara (f) de la figura 4.15

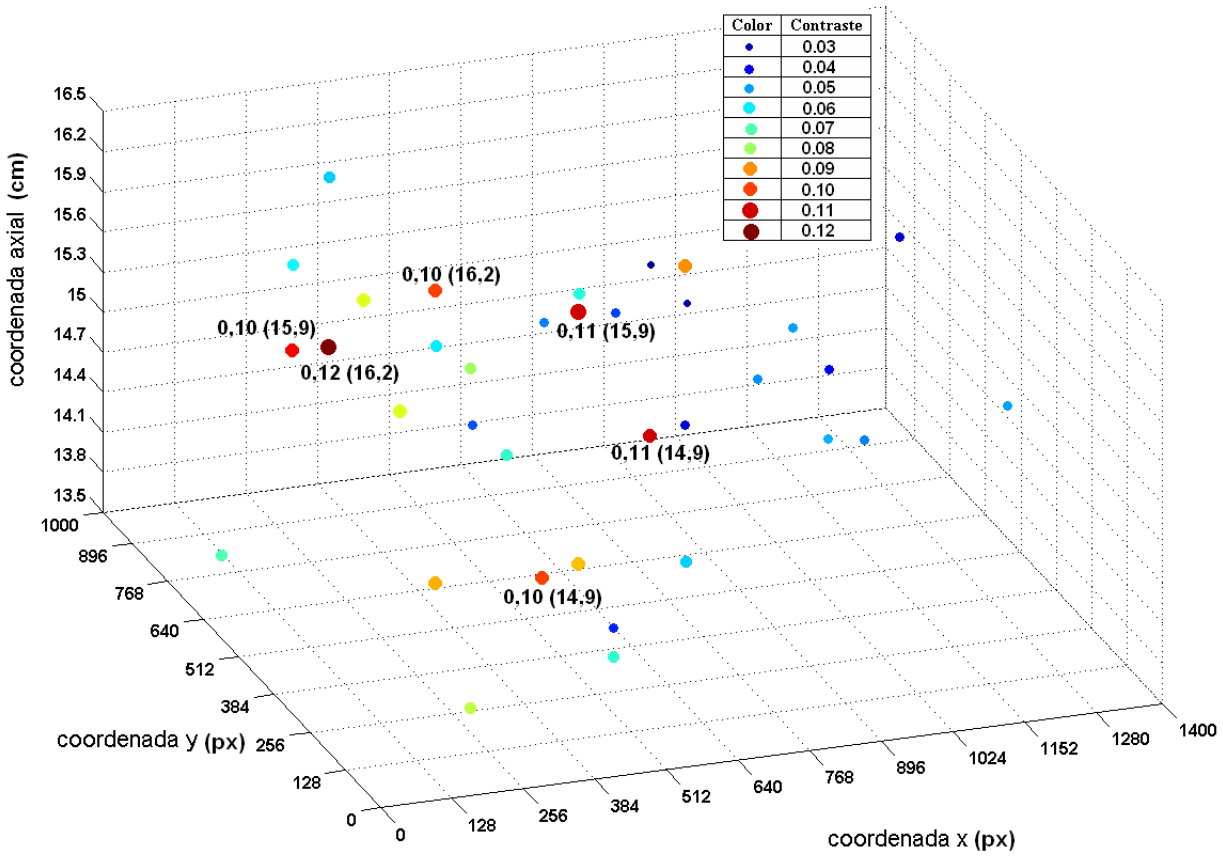
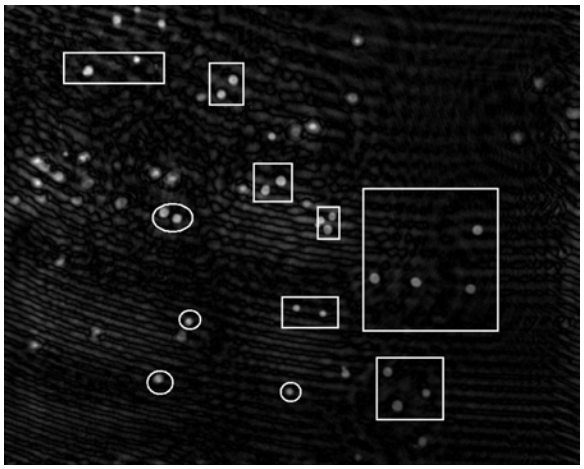
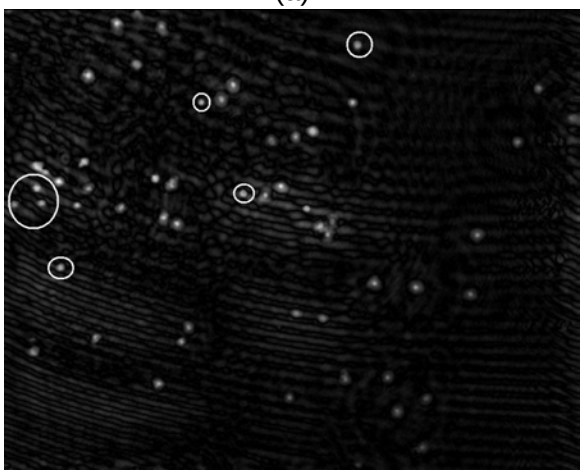


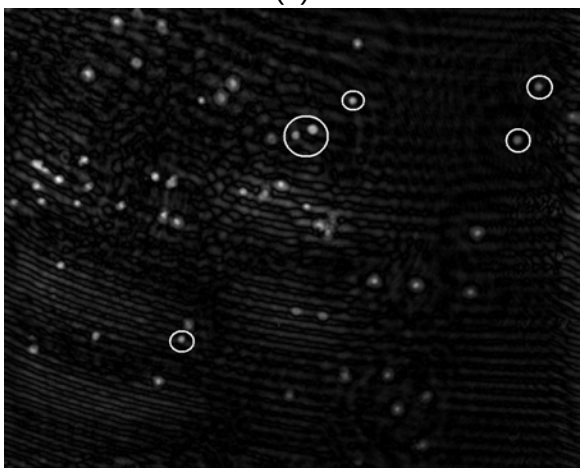
Figura 4.18: Valores máximos del contraste en función de la distancia para las 35 máscaras seleccionadas. Los círculos destacan el valor de los planos en los cuales se reconstruyen las partículas. Las unidades son pixeles (px) para el plano xy, y centímetros (cm) para la coordenada axial. Los diferentes colores para los puntos, organizados en la tabla, proporcionan el valor del contraste máximo en cada región.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.19: Enfoque de las partículas de la muestra en distintos planos. (a) z = 14,9 cm, (b) z = 15,9 cm y (c) z = 16,2 cm. En cada una de las imágenes se destacan las partículas enforcadas en cada plano localizado con el método.

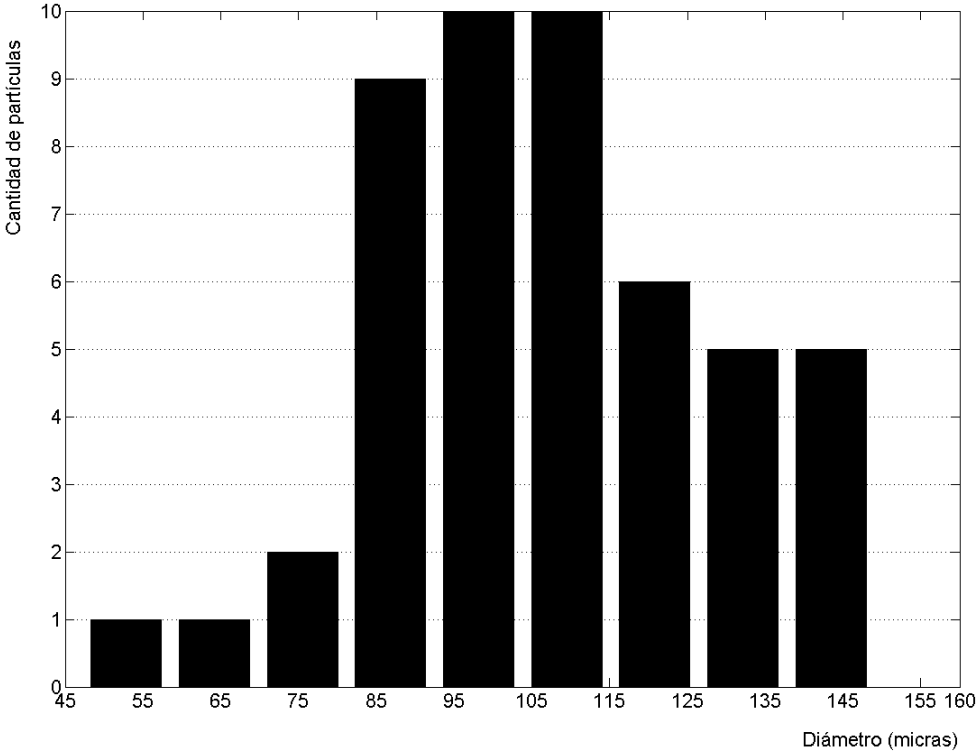


Figura 4.20: Histograma de distribución de diámetro para un conjunto de partículas de prueba distribuidas en los tres planos de enfoque mostrados en la figura 4.19.

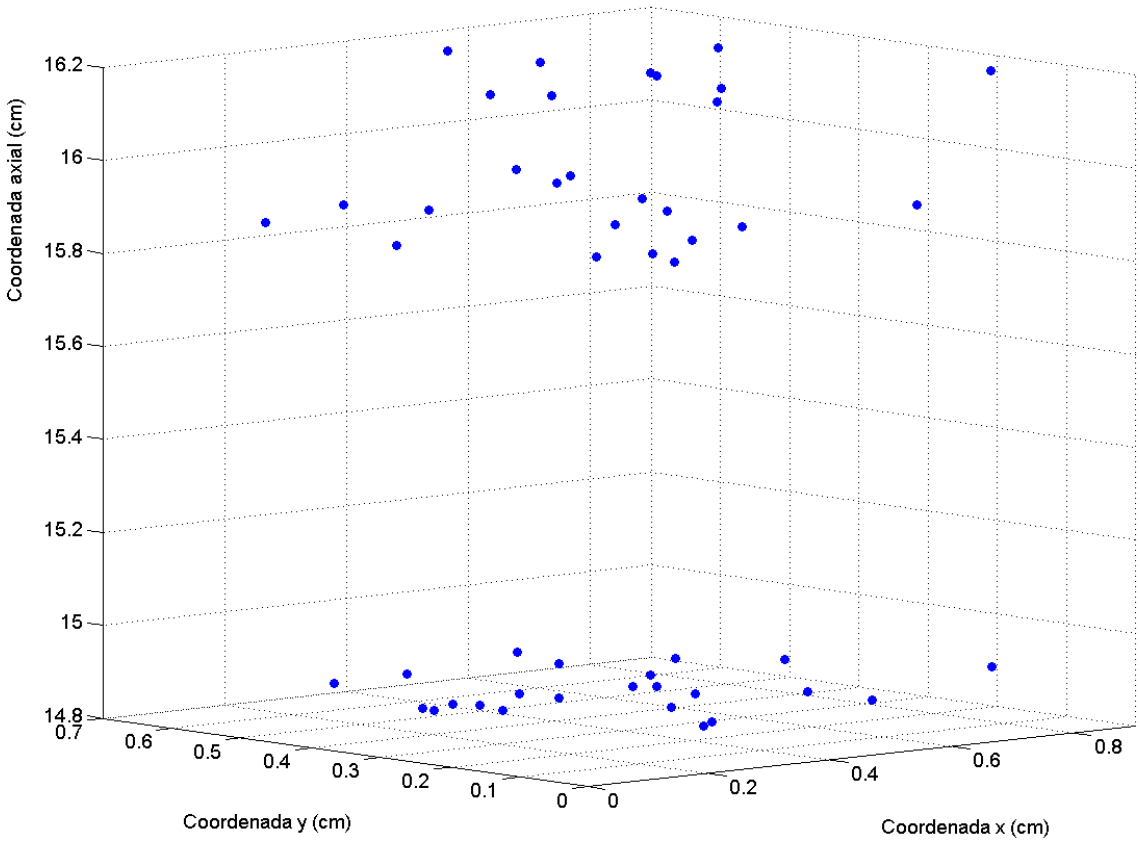


Figura 4.21: Localización 3D para partículas en tres planos de enfoque: z = 14,9 cm, z = 15,9 cm y z = 16,2 cm. El área de localización de las partículas en el plano, corresponde a 1 cm x 1 cm.

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo, se implementó un arreglo experimental de holografía de Fraunhofer en línea, con una muestra de partículas cuyos diámetros están comprendidos entre 70 μm y 200 μm, como objeto. La reconstrucción de los hologramas registrados a partir del patrón de difracción de campo lejano de las partículas en la muestra, se efectuó de forma numérica, utilizando la transformada wavelet. A partir de la reconstrucción de los hologramas, se realizó el cálculo de la coordenada axial de la muestra, y de la distribución de tamaños de las partículas que la componen. En promedio, la cantidad de partículas presentes en la porción de muestra utilizada en las pruebas experimentales, fué de 80 partículas/cm^2.

Dentro de los resultados encontrados a partir del desarrollo de esta investigación, puede resaltarse lo siguiente:

1. El arreglo experimental implementado, resultó ser el más apropiado para el registro de hologramas digitales de Fraunhofer en línea. Las condiciones impuestas sobre este montaje, permitieron satisfacer la condición de campo lejano consignada en la ecuación 2.1, para las partículas que conforman la muestra utilizada.

2. La reconstrucción de los hologramas utilizando la transformada wavelet, permitió obtener imágenes con la reconstrucción de las partículas de prueba, en las cuales es posible resolver sus bordes. Esto puede observarse en las figuras 4.5 y 4.8. La distinción de los bordes de las partículas bajo estudio, hizo posible determinar el valor de su diamétro, utilizando herramientas numéricas de análisis de imagen.
   La presencia de la imagen gemela sobre la reconstrucción de los hologramas, es atenuada a través de la aplicación de un umbral a los valores de intensidad de la imagen resultante.

3. La localización axial de las partículas bajo estudio, se realizó exitosamente, utilizando la medida del contraste, en la imagen correspondiente a la reconstrucción de los hologramas. Este contraste, cambia su valor con la variación de la coordenada axial z dentro del algoritmo de reconstrucción, presentando un valor máximo cuando la distancia de reconstrucción coincide con la distancia de registro. Este

proceso, es equivalente a la realización de un enfoque digital de las partículas en la reconstrucción.
Al reconstruir los hologramas registrados de las partículas de prueba, utilizando el valor de z para el cual el valor del contraste en la imagen final es máximo, se obtiene la imagen de reconstrucción con el mejor enfoque para cada partícula en la muestra utilizada. Esto puede observarse en las figuras 4.5 y 4.8.

En el caso estudiado para tres planos de enfoque, la medida del contraste máximo se realizó de forma local, mostrando resultados satisfactorios. El máximo error porcentual para las tres coordenadas axiales calculadas, respecto a las determinadas dentro del experimento, resultó ser 2.7 $\%$. La localización 3D para estas partículas se realiza de forma satisfactoria, como se muestra en la figura 4.21.

4. La determinación del tamaño de las partículas de prueba, se realizó satisfactoriamente, utilizando una herramienta de análisis de imágenes que aproxima el área de cada partícula a un círculo, del cual se extrae el valor del diámetro. Los histogramas hallados a partir del cálculo del diámetro de las partículas, muestran que su tamaño se encuentra distribuido en un rango de 80 μm - 150 μm.

   El error en la determinación de este ”diámetro equivalente”se estimó en 6.7 μm, que corresponde a la medida en micras de un píxel en la imagen.

5. En la determinación de la coordenada axial y el diámetro de las partículas estudiadas, se identificaron cuatro fuentes de error en las medidas:

   (a). La definición del paso Δz dentro del algoritmo de reconstrucción, para el cálculo del contraste de las imágenes reconstruidas, proporciona una incertidumbre de 0.05 cm (500 micras) en el valor de la coordenada axial, en cada caso estudiado.

   (b). Para el cálculo del diámetro, la elección del valor umbral para binarizar las imágenes reconstruidas, altera considerablemente en algunos casos, la cantidad de información de cada partícula que contribuye a la determinación de su diámetro.

   (c). Una iluminación poco uniforme de las muestras, hace que aún después de aplicar un umbral sobre los valores de intensidad en la imagen, aparezcan manchas blancas que no corresponden a información de ninguna partícula, sino que pueden considerarse como ruido, pero que aún así, alteran el valor de las medidas.

   (d). Finalmente, la presencia de regiones con agrupamiento de partículas dentro de la muestra, ocasiona la aparición de datos falsos de diámetro de partículas, que corresponden a todo el cluster y no a cada una de las partículas que lo componen, como es el interés de la medida.

Dentro de los métodos de reconstrucción de hologramas digitales, implementados en el campo de la holografía digital a nivel nacional, es la primera vez que este proceso se realiza utilizando la transformada wavelet. A partir de esto, y considerando los resultados alcanzados en esta investigación, se pueden mencionar las siguientes perspectivas de este trabajo:

1. Dado que la construcción de la familia de funciones wavelet no es única para todo el conjunto de señales que pueden analizarse aplicando la transformada wavelet, es posible explorar otras definiciones alternativas a la mostrada en la ecuación 2.43, que incluyen funciones wavelet complejas. Este tipo de funciones, permiten reconstruir hologramas en configuraciones fuera de eje y realizar el filtrado de la imagen conjugada sobre la reconstrucción, a través de la elección de los parámetros de la función que resulten más adecuados.

2. El estudio de la reconstrucción de hologramas digitales, utilizando otro tipo de funciones wavelet base, permitiría evaluar sus ventajas respecto a otros métodos de reconstrucción numérica, y definir los campos de aplicación en los cuales podría ser una ventaja la reconstrucción de los hologramas utilizando la transformada wavelet.

3. Dentro de los resultados, se encontró que para las porciones de la muestra estudiadas, la mayor parte de las partículas tenían un tamaño dentro de un intervalo de 80 μm - 150 μm, rango en el cual pueden encontrarse partículas de niebla, burbujas de aire, polvo de carbón, polvo de cemento, y algunos minerales flotantes, lo que hace posible pensar en aplicar la técnica de medición de tamaño de grano implementada, al estudio de sistemas que involucren esta clase de elementos.

4. Otro tipo de sistemas que pueden estudiarse aplicando esta técnica de medición, son aquellos en los cuales las partículas de la muestra se encuentran en suspensión. En estos casos, el cálculo del valor del contraste máximo puede ser útil en la determinación de la posición axial de cada una de las partículas en la muestra, que ahora estarían distribuidas en planos objeto que no se encuentran a la misma distancia del sensor.

Apéndice A

Intensidad en un holograma de Fraunhofer en línea

Partiendo de la ecuación 2.9 encontrada en el capítulo 2, que corresponde a la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld para describir la difracción en una pantalla plana, se detalla la deducción de la expresión para la intensidad $I(x, y)$, en el plano de registro.

La primera solución de Rayleigh-Sommerfeld, puede expresarse de la siguiente forma:

$$A(x, y) = -i\frac{exp(ikz_0)}{\lambda z_0}\iint_{\Sigma}(1 - O(\xi, \eta))exp\Big\{\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\Big\}d\xi d\eta. \quad \text{(A.1)}$$

La intensidad $I(x, y)$ en el plano de registro, puede encontrarse multiplicando $A(x, y)$ por su complejo conjugado:

$$I(x,y) = \left(-\frac{i}{\lambda z_0}\right)^2 \Bigg\{ \Bigg[\iint_\Sigma exp\Big\{\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta$$
$$- \iint_\Sigma O(\xi,\eta) exp\Big\{\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta \Bigg]$$
$$\times \Bigg[\iint_\Sigma exp\Big\{-\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta$$
$$- \iint_\Sigma O^*(\xi,\eta) exp\Big\{-\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta \Bigg] \Bigg\}, \quad \text{(A.2)}$$

donde se han separado los términos 1 y $O(\xi,\eta)$. Los términos exponenciales pueden separarse en su parte real e imaginaria, utilizando la identidad de Euler,

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x) \quad \text{(A.3)}$$

con lo que se obtiene,

$$\iint_\Sigma exp\Big\{\pm\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta = \iint_\Sigma Cos\Big\{\frac{\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta$$
$$\pm \iint_\Sigma Sin\Big\{\frac{\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta. \quad \text{(A.4)}$$

Evaluando las integrales en la ecuación A.4, se llega a los siguientes resultados

$$\iint_\Sigma Cos\Big\{\frac{\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta = 0 \quad \text{(A.5)}$$
$$\pm \iint_\Sigma Sin\Big\{\frac{\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\Big\} d\xi d\eta = \pm i\lambda z_0.$$

Teniendo en cuenta que,

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i, \tag{A.6}$$

los términos que involucran términos con i, pueden expresarse como exponenciales. Reemplazando los resultados en la ecuación A.5 dentro de la ecuación A.2 para la intensidad, se tiene

$$\begin{aligned} I(x,y) = \big(-\frac{i}{\lambda z_0}\big)^2 \Bigg\{ \Bigg[\lambda z_0 e^{\frac{i\pi}{2}} - \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\Bigg\{ \frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta \Bigg] \\ \times \Bigg[\lambda z_0 e^{-\frac{i\pi}{2}} - \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\Bigg\{ -\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Realizando los productos indicados y reorganizando términos,

$$\begin{aligned} I(x,y) = 1 - \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\lambda z_0} \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\Bigg\{ \frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta \\ - \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\lambda z_0} \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\Bigg\{ -\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta \\ + \frac{1}{\lambda^2 z_0^2} \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\Bigg\{ \frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta \\ \times \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\Bigg\{ -\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \Bigg\} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Aplicando la condición de campo lejano de la ecuación 2.1, los términos cuadráticos en el sistema coordenado de la apertura resultan ser menores que los términos cuadráticos en el plano de registro, por lo cual no son considerados. Se tiene por tanto:

$$\tfrac{i\pi}{\lambda z_0}\Bigg[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\Bigg] \approx \tfrac{i\pi}{\lambda z_0}\Bigg[(x^2+y^2) - 2(x\xi + y\eta)\Bigg].$$

Con esta consideración, la intensidad toma la forma,

$$
\begin{aligned}
I(x,y) = 1 &- \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\lambda z_0} \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ \frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x^2+y^2) - 2(x\xi + y\eta)] \right\} d\xi d\eta \\
&- \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{\lambda z_0} \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\left\{ -\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x^2+y^2) - 2(x\xi + y\eta)] \right\} d\xi d\eta \\
&+ \frac{1}{\lambda^2 z_0^2} \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ \frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x^2+y^2) - 2(x\xi + y\eta)] \right\} d\xi d\eta \\
&\times \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\left\{ -\frac{i\pi}{\lambda z_0}[(x^2+y^2) - 2(x\xi + y\eta)] \right\} d\xi d\eta. \quad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$
\begin{aligned}
I(x,y) = 1 &+ \frac{i}{\lambda z_0} e^{\frac{i\pi}{\lambda z_0}(R^2)} \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ -2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta) \right\} d\xi d\eta \\
&- \frac{i}{\lambda z_0} e^{-\frac{i\pi}{\lambda z_0}(R^2)} \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\left\{ 2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta) \right\} d\xi d\eta + M, \quad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

donde

$$R^2 = x^2 + y^2, \qquad \text{y}$$

$$
\begin{aligned}
M = \frac{1}{\lambda^2 z_0^2} &\iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ -2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta) \right\} d\xi d\eta \\
&\times \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\left\{ 2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta) \right\} d\xi d\eta. \quad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

Usando la identidad de Euler sobre los exponenciales que involucran R^2, en la ecuación A.10:

$$
\begin{aligned}
&I(x,y) = 1 \\
&+ \frac{1}{\lambda z_0}\left(icos\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right) - sen\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right)\right) \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ -2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta)\right\} d\xi d\eta \\
&+ \frac{1}{\lambda z_0}\left(-icos\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right) - sen\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right)\right) \iint\limits_{\Sigma} O^*(\xi,\eta) exp\left\{ 2i\pi(\frac{x}{\lambda z_0}\xi + \frac{y}{\lambda z_0}\eta)\right\} d\xi d\eta \\
&+ M. \quad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier del objeto $\tilde{\mathrm{O}}\left(\frac{x}{\lambda z_0}, \frac{y}{\lambda z}\right)$, está dada por,

$$
\tilde{\mathrm{O}}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0}, \tfrac{y}{\lambda z}\right) = \iint\limits_{\Sigma} O(\xi,\eta) exp\left\{ -2i\pi(\tfrac{x}{\lambda z_0}\xi + \tfrac{y}{\lambda z_0}\eta)\right\} d\xi d\eta,
$$

reemplazando esta expresión en la ecuación A.12, se obtiene

$$
\begin{aligned}
I(x,y) = 1 - \frac{2}{\lambda z_0} sen\left(\frac{\pi}{\lambda z}R^2\right) \Re\left[\tilde{\mathrm{O}}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0}, \tfrac{y}{\lambda z}\right)\right] \\
+ cos\left(\frac{\pi}{\lambda z_0}R^2\right) \Im\left[\tilde{\mathrm{O}}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0}, \tfrac{y}{\lambda z}\right)\right] + \tfrac{1}{\lambda^2 z_0^2}\tilde{\mathrm{O}}\left(\tfrac{x}{\lambda z_0}, \tfrac{y}{\lambda z}\right)\tilde{\mathrm{O}}^*\left(\tfrac{x}{\lambda z_0}, \tfrac{y}{\lambda z}\right), \quad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

donde $\Re$ e $\Im$, simbolizan parte real e imaginaria respectivamente.

El término correspondiente a la parte imaginaria de la transformada de Fourier del objeto, se anula cuando la parte real del objeto es par y su parte imaginaria impar. De esta forma, se tiene una expresión para la intensidad en el plano de registro que resulta ser una función de la transformada de Fourier del objeto, debido a que se ha considerado la restricción sobre la relación entre el tamaño del objeto y la distancia de registro, impuesta por la condición de campo lejano (ecuación 2.1).

A.1. Objeto circular

Un objeto con sección transversal circular es iluminado con una fuente de luz cuasi-monocromática. La intensidad registrada en un plano ubicado a una distancia z_0 del ob-

jeto, puede determinarse partiendo de la ecuación A.13. La apertura difractante tiene en este caso simetría circular y la función de transmitancia del objeto tiene la forma

$$\begin{aligned} O(\xi,\eta) &= 1 \quad para \quad \sqrt{(\xi^2+\eta^2)} \leq d/2 \\ &= 0 \quad para \quad \sqrt{(\xi^2+\eta^2)} > d/2, \end{aligned}$$

donde d es el diámetro del objeto. La transformada de Fourier de $O(\xi,\eta)$ tiene simetría circular y está dada por

$$\tilde{O}\left(\frac{x}{\lambda z_0},\frac{y}{\lambda z}\right) = \pi\frac{d^2}{4}\left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}\right)}{\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}}]\right],$$

donde J_1 es la función de primer orden de Bessel. Debido a que la función que describe el objeto es real y dentro del dominio definido, la función de Bessel tambien lo es, al sustituir en la expresión A.13 para la intensidad registrada en el sensor, se obtiene:

$$I(x,y) = 1-\frac{\pi d^2}{2\lambda z_0}sen\left[\frac{\pi}{\lambda z_0}(x^2+y^2)\right]\left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}\right)}{\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}}]\right]+\frac{\pi^2 d^4}{16\lambda^2 z_0^2}\left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}\right)}{\frac{\pi d\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda z_0}}]\right]^2. \tag{A.14}$$

La ecuación A.14, describe la intensidad registrada en el plano (x,y) para un objeto circular de diámetro d, que constituye el objeto de interés para este trabajo.

Bibliografía

[1] XU R. Particle Characterization: Light Scattering Methods. Particle Technology Series, vol.13. Kluwer Academic Publishers, 2002. 397p.

[2] FROYLÁN MARTÍNEZ M., ROSAS F., et al. Estudio piloto en mediciones de tamaño de partícula. Simposio de Metrología, 2006.

[3] VIKRAM C. Particle Field Holography. New York: Cambridge University Press, 1992. 265p.

[4] SILVERMAN B.A., THOMPSON B.J., et.al. A Laser Fog Disdrometer. En: Journal of Applied Meteorology. Vol. 3 (dic.1964); p.792-801.

[5] TYLER G., THOMPSON B. Fraunhofer holography applied to particle size analysis: A reassessment. En: Optica Acta. Vol. 23. No. 9 (sep. 1976); p. 685-700.

[6] DARAKIS E., KHANAM T., et.al. Microparticle characterization using digital holography. En: Chemical Engineering Science Vol. 65. No. 2 (sep. 2009); p.1037-1044.

[7] PU S.L., ALLANO D., et.al. Particle field characterization by digital in-line holography: 3D location and sizing. En: Experiments in Fluids. Vol. 39. No. 1 (jul. 2005); p.1-9.

[8] BURAGA-LEFEBVRE C., COËTMELLEC S., et.al. Application of wavelet transform to hologram analysis: three-dimensional location of particles. En: Opt.Lasers.Eng. Vol. 33. No. 6 (jun. 2000); p. 409-421.

[9] WENG J., ZHONG J., et.al. Phase reconstruction of digital holography with the peak of the two-dimensional Gabor wavelet transform. En: Applied Optics. Vol. 48. No. 18 (jun. 2009); p.3308-3316.

[10] Sediment Character, Measuring Sediment Character, Sieve Analyses. Disponible en: **http://geology.uprm.edu/Morelock/character.htm**

[11] Centrifugal Separators For Industrial Use. Disponible en: **http://www.environmental-expert.com/stse_resulteach_product.aspx?cid=1663&idproduct=33199**

[12] In vitro cytotoxicity studies of hydrogel pullulan nanoparticles prepared by AOT/N-hexane micellar system. Disponible en:
http://www.ualberta.ca/c̃sps/JPPS7 %281 %29/M.Gupta/pullulan.htm

[13] POVEY M.J.W. Ultrasonic techniques for fluid characterization. San Diego: Academic Press, 1997. 232p.

[14] Laser Diffraction Particle Sizing. Disponible en:
http://www.malvern.com/LabEng/technology/laser_diffraction/particle_sizing.htm

[15] Measuring particle size using modern laser diffraction techniques. Disponible en:
http://www.chemie.de/articles/e/61205

[16] Determination of Particle Size Distribution Using Laser Diffraction. Disponible en:
http://www.erpt.org/032Q/Wedd-00.htm

[17] KREIS T. Handbook of Holographic Interferometry: Optical and Digital Methods. Wenheim: Wiley-VCH GmbH & Co.KGaA, 2005. 546p.

[18] MENZEL R., SHOFNER F.M. An Investigation on Fraunhofer Holography for Velocimetry Applications. En: Applied Optics. Vol. 9. No. 9 (sep. 1970); p.2073-2079.

[19] HINCAPIE D.A. Medición de potencial zeta mediante microscopía holográfica digital en línea. Medellín, 2008, 96p. Tesis (Magíster en Física). Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín. Facultad de Ciencias. Escuela de Física.

[20] FOURNIER C., DUCOTTET C., et.al. Digital in-line holography: influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle image. En: Meas.Sci.Technol. Vol. 15. (mar. 2004); p.686-693.

[21] PARRENT G.B. Jr., THOMPSON B.J. On the Fraunhofer (far field) diffraction patterns of opaque and transparent objects with coherent background. En: Jornal of Modern Optics. Vol. 11. No. 3 (jul. 1964); p. 183-193.

[22] DeVELIS J.B., PARRENT G.B., et.al. Image Reconstruction with Fraunhofer Holograms. En: J. Opt. Soc. Am. Vol. 56. No. 4 (ago. 1965); p. 423-427.

[23] THOMPSON B.J. Applications of holography. En: Rep. Prog. Phys. Vol. 41 (1978); p. 633-669.

[24] GOODMAN J.W. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill Companies, Inc., 1996. 442p.

[25] ONURAL L. Diffraction from a wavelet point of view. En: Optics Letters. Vol. 18. No. 11 (jun. 1993); p. 846-848.

[26] Modelos matemáticos para describir señales de audio: Transformada wavelet continua. Disponible en:
http://coco.ccu.uniovi.es/brahms/modelos_mat/twc.htm

[27] SOONTARANON S. Digital Analysis of particle holograms. Nakhon Ratchasima (Tailandia), 2006. 196 p. Tesis (Doctor of Philosophy in Laser Technology). Universidad Tecnológica Suranaree.

[28] Introducción a la transformada wavelet: Descomposición de señales.
Disponible en:
www.exa.unicen.edu.ar/escuelapav/cursos/wavelets/apunte.pdf

[29] GOMES J., VELHO L., et.al. Wavelets: Teoria, software e aplicações. En: Colóquio Brasileiro de Matemática (21: 1997: Rio de Janeiro). Publicación. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura y Aplicada, 1997. p.216.

[30] PINSKY M. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. Wadsworth Group of Thomson Learning, Inc., 2002. 376p.

[31] MALEK M., COËTMELLEC S., et.al. Formulation of in-line holography process by a linear shift invariant system: application to the measurement of fiber diameter. En: Optics Communications. No. 203 (jun. 2003); p. 263-271.

[32] SOONTARANON S., WIDJAJA J., et.al. Direct analysis of in-line particle holograms by using wavelet transform and envelope reconstruction method. En: Optik - International Journal for Light and Electron Optics. Vol. 113. No. 11 (ene.2002); p. 489-494.

[33] MURATA S., YASUDA N. Potential of digital holography in particle measurement. En: Optics & Laser Technology. Vol. 32. No. 7 (oct. 2000); p.567-574.