Sobre el problema de Cauchy de la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono

Oscar Andrés Galindo Rivera
Matemático
Código: 830164

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2009

Sobre el problema de Cauchy de la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono

Oscar Andrés Galindo Rivera
Matemático
Código: 830164

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en ciencias matemáticas

Director
Germán Eduardo Fonseca Buitrago, Ph.D.
Profesor Asociado

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2009

Título en español

Sobre el problema de Cauchy de la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono

Title in English

Sobre el problema de Cauchy de la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono

Resumen: Se presenta la prueba del buen planteamiento local para la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono en los espacios $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{9-3a}{8}$ usando el método de energía, mostrando en detalle el proceso de Bona y Smith necesario para la prueba de persistencia en $H^s(\mathbb{R})$.

Abstract: We prove that the dispersion generalized Benjamin-Ono equation is locally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ for $s > \frac{9-3a}{8}$ using the energy method, showing in detail the process of Bona and Smith to test persistence in $H^s(\mathbb{R})$.

Palabras clave: Ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono, método de energía, método de Bona-Smith.

Keywords: Ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono, método de energía, método de Bona-Smith.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria o Laureada"

Jurado
Donald Knuth

Jurado
Leslie Lamport

Jurado
Michel Goossens

Director
Rodrigo de Castro Korgi

Codirector
Jonatan Goméz

Bogotá, D.C., Enero 31 de 2009

Índice general

Índice general **I**

Notaciones **II**

Introducción **IV**

1. Preliminares **1**

1.1. Transformada de Fourier 1

1.2. Espacios de Sobolev 3

1.3. Teoría de Littlewood-Paley 4

1.4. Otros resultados 5

2. Estimativas lineales **6**

2.1. Estimativas globales 6

2.2. Estimativa de energía 9

2.3. Estimativa local 10

3. Estimativa refinada de Strichartz **12**

4. Demostración del teorema 0.1 **16**

4.1. Estimativa *a priori* para $\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}$ 16

4.2. Buen planteamiento local 23

4.2.0.1. Paso 1. Estimación de $\int_0^T \|\partial_x u^\varepsilon(t)\|_{s,p_1} \|w(t)\|_{L^{p_2}} dt$. 26

4.2.0.2. Paso 2. Estimación de $\int_0^T \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s} \|\partial_x w(t)\|_{L^\infty} dt$. 27

Bibliografía **32**

Notaciones

1. $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ a valor real continuas que tienden a cero en infinito.

2. $C^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones definidas en el conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a valor real infinitamente diferenciables.

3. $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones $f \in C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.

4. $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, es el espacio de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

5. $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ tales que $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

6. $L_x^p L_t^q$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ es el espacio de funciones medibles $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que
$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|^q \, dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$
Analogamente, $L_x^p L_T^q$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ es el espacio de funciones medibles $f : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{C}$ tales que
$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0}^{T} |f(x,t)|^q \, dt\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$
Similarmente se definen los espacios $L_t^q L_x^p$ y $L_T^q L_x^p$.

7. $S(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz definido como el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que
$$\|f\|_{\alpha\,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

8. $X \hookrightarrow Y$, significa que X está contenido densa y continuamente en Y.

9. Para variables x y y, $x \lesssim y$ significa que existe una constante positiva c tal que $x \leq cy$. $x \sim y$ significa que $x \lesssim y$ y $y \lesssim x$.

10. $J^s = (1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ y $D^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ denotan los potenciales de Bessel y de Riesz de orden $-s$, cuyos símbolos son $(1+\xi^2)^{s/2}$ y $|\xi|^s$ respectivamente.

11. $[A;B] = AB - BA$, donde A y B son operadores. En particular, $[J^s; f]g \equiv J^s(f.g) - f(J^s g)$ si f es tomado como operador de multiplicación.

Introducción

En 1895, Korteweg y de Vries deducen la famosa ecuación Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u \ = \ 0,$$

la cual describe la propagación de ondas en un canal poco profundo. Y Benjamin en 1967 y posteriormente Ono en 1975 introducen la no menos famosa ecuación de Benjamin-Ono (BO)

$$\partial_t u + H\partial_x^2 u + u\partial_x u \ = \ 0,$$

donde H es la transformada de Hilbert, la cual describe la propagación de ondas en un fluido estratificado de profundidad infinita. Durante las pasadas décadas, ambas ecuaciones fueron extensamente estudiadas en una gran cantidad de literatura, en lo referente al problema de buen planteamiento. (Ver entre otros [3], [4], [5], [12], [14], [15], [16], [19], [31]).

En general un problema de valor inicial (PVI)

$$\partial_t u = F(u), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

es localmente bien planteado (lbp) en un espacio de funciones X, si para cada $u_0 \in X$, existe $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ y una única función $u \in C([0,T],X) \cap \cdots$, que satisface (1) para todo $t \in [0,T]$, y además, u depende continuamente del dato inicial u_0, esto es, que la función $u_0 \to u$ sea continua en los respectivos espacios apropiados. Si T es arbitrariamente grande, se dice que el (PVI) es globalmente bien planteado en X.

Ambas ecuaciones, tanto la KdV como la de BO poseen un número infinito de integrales que son conservadas, que en la literatura se conocen como leyes de conservación. Generalmente en un problema (lbp), estas leyes permiten extender las soluciones globalmente en los espacios de Sobolev asociados a la estructura de la cantidad conservada.

Algunos de los resultados más recientes sobre buen planteamiento de estas dos ecuaciones son:

Para la ecuación de BO es conocido (véase [9]) que tiene soluciones débiles globales en $L^2(\mathbb{R})$. Iorio (véase [12]) obtuvo buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{3}{2}$ y posteriormente Ponce (véase [30]) demostró buen planteamiento global en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq \frac{3}{2}$

primero probando buen planteami-ento local usando la teoría de Bona y Smith (véase [4]), y extendiendo las soluciones con la ayuda de las leyes de conservación en la jerarquía de cantidades conservadas por el flujo de la BO. Más recientemente Koch y Tzvetkov (véase [25]) y Kenig y Koenig (véase [18]) mejoraron este resultado para $s > \frac{5}{4}$ y $s > \frac{9}{8}$ respectivamente, ambas usando estimaciones refinadas de tipo Strichartz para el grupo lineal asociado a esta ecuación. Tao logra (véase [33]), mediante una transformada compleja similar a la de Hopf-Cole, alcanzar el espacio de energía $H^1(\mathbb{R})$, y hace un par de años y casí simultaneamente Burq y Planchon (véase [6]), y Ionescu y Kenig (véase [11]) muestran el buen planteamiento local y global en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{1}{4}$, y $L^2(\mathbb{R})$ respectivamente.

Para la ecuación KdV, Bourgain (véase [5]) introdujo espacios de Sobolev que involucran el símbolo completo en espacio y tiempo vía transformada de Fourier de la parte lineal de la ecuación diferencial, y mediante un argumento de punto fijo obtuvo buen planteamiento local (y así global) en $L^2(\mathbb{R})$. Posteriormente Kenig, Ponce y Vega (véase [19]) mediante una estimación bilineal en los espacios introducidos por Bourgain probaron, de nuevo usando un argumento de punto fijo, buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > -\frac{3}{4}$ y Colliander, Staffilani, Takaoka y Tao extendieron este resultado a uno global (véase [8]). Christ, Colliander y Tao consiguieron alcanzar el buen plantemianto local hasta el extremo $s \geq -\frac{3}{4}$ (véase [7]), y un resultado global en el extremo fue recien obtenido por Kishimoto (véase [24]) y por Guo (véase [10]).

En este trabajo consideraremos la familia de ecuaciones dispersivas

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x D_x^{1+a} u + u\partial_x u \ = \ 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 \leq a \leq 1 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

Se tiene que cuando $a = 0$ resulta la ecuación de BO, y cuando $a = 1$ resulta la ecuación KdV. Cuando $0 < a < 1$ esta familia dispersiva no local es conocida como *la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono*. Esta ecuación surge como modelo matemático para la propagación débilmente no lineal de ondas largas en canales poco profundos. Kenig, Ponce y Vega (véase [22]) mostraron que (3) es (lbp) con dato inicial en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{6-3a}{4}$ haciendo uso del método de energía, los efectos regularizantes del grupo asociado a la parte no lineal junto con argumentos de aproximación de Bona y Smith. Combinando la teoría local con las leyes de conservación, (2.2) y (2.3) del capítulo 2, se demuestra el buen planteamiento global de (3) en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq \frac{a+1}{2} \geq \frac{9}{10}$.

Molinet, Saut y Tzvetkov (véase [29]) mostraron que para $0 \leq a < 1$ solo una suposición del dato inicial en $H^s(\mathbb{R})$ es insuficiente para una prueba de buen planteamiento local vía iteración de Picard o argumentos de punto fijo sin importar qué espacio de funciones de espacio-tiempo, que contienen a $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, es considerado para la contracción. En particular, la aplicación dato-solución no es siquiera de clase C^2 en las respectivas topologias.

Luego, para demostrar buen planteamiento local de (3) no es posible realizar un argumento de punto fijo. En particular, el tipo de argumento usado por Bourgain y Kenig,

Ponce y Vega para la ecuación KdV no es posible para (3) en el rango $0 \leq a < 1$.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que el problema de Cauchy asociado a la ecuación de dispersión generalizada de Benjamin-Ono

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x D_x^{1+a} u + u \partial_x u \ = \ 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 < a < 1 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

es (lbp) en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{9-3a}{8}$, y por tanto globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq \frac{a+1}{2} \geq \frac{6}{7}$ mejorando así el resultado en [22]. Este resultado fue anunciado en [18], donde la prueba allí contenida se hace para el caso $a = 0$ y no incluye la propiedad de persistencia ni de dependencia continua del dato inicial. Usando las técnicas desarrolladas recientemente para obtener mejores resultados para la ecuación de Benjamin-Ono, puede ser factible mejorar el resultado de este trabajo (ver las referencias antes mencionadas en el contexto de la ecuación de Benjamin-Ono).

La estrategia de la prueba consiste principalmente en mejorar el método clásico de energía, lo cual se logra refinando la estimativa de Strichartz de la ecuación (4), junto con efectos regularizantes globales del grupo lineal y estimativas locales de las soluciones de la misma, continuando y adaptando las ideas dadas en los trabajos de Koch y Tzvetkov [25] y Kenig y Koenig [18] aplicadas a la ecuación de Benjamin-Ono. Finalmente, mostramos en detalle el proceso de Bona y Smith necesario para completar la prueba del buen planteamiento local (véase [4]).

Enunciamos ahora, el resultado principal del trabajo.

Teorema .1. *Sea $s > \frac{9-3a}{8}$. Para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, existe $T \gtrsim \|u_0\|_{H^s}^{-(1+\frac{3}{1+2a})}$ y una única solución u del (PVI) (4) que satisface*

$$u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$$

$$\partial_x u \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R})).$$

Además, para todo $R > 0$, la aplicación $u_0 \mapsto u(t)$ es continua de la bola $\{u_0 \in H^s(\mathbb{R}) : \|u_0\|_{H^s} < R\}$ a $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.

El trabajo está organizado como sigue: el primer capítulo contiene la notación necesaria, definiciones y resultados básicos de la transformada de Fourier, espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y la teoria de Littlewood-Paley. El segundo capítulo presenta las estimativas lineales del grupo asociado y de sus soluciones junto con la estimativa de energía. El tercer capítulo estudia la estimativa refinada de Strichartz para la ecuación (4) y el cuarto capítulo muestra una estimativa *a priori* de la norma de la solución en $L_T^\infty H_x^s$ para $s > \frac{9-3a}{8}$, seguido de la prueba del buen planteamiento local para el (PVI) (4) por el método de Bona y Smith.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y algunos resultados de la teoría, necesarios para ilustar posteriormente los resultados del trabajo.

1.1. Transformada de Fourier

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\hat{f}$, se define por*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x\cdot\xi)}\, dx,$$

donde $(x \cdot \xi)$ es el producto punto usual en $\mathbb{R}^n$.

La transformada de Fourier tiene la siguientes propiedades (para sus demostraciones véase [13] y [27]).

Proposición 1.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

1. *$\hat{f}$ es acotada, continua y además*

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_{L^1}.$$

2. $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$

3. *Si $T_a f(x) := f(x-a)$ entonces*

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = e^{-i(a\cdot\xi)} \hat{f}(\xi) \quad y \quad [(e^{-i(a\cdot x)} f)]\hat{}\,(\xi) = (T_{-a}\hat{f})(\xi).$$

4. *Si $a > 0$, $\delta_a f(x) := f(ax)$ entonces*

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n} \hat{f}(a^{-1}\xi).$$

5. *Sea* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces*
$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

También enunciamos algunas propiedades de la transformada de Fourier definida sobre el espacio de Schwartz.

Proposición 1.2. *Si* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$ *y*
$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(\partial^\alpha \varphi)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi),$$
$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha \varphi)}(\xi) = \partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi).$$
Además vale la fórmula de inversión
$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x\cdot\xi)}\, d\xi.$$

Proposición 1.3. *La transformada de Fourier* $\wedge : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *es un isomorfismo, es decir, es una aplicación inyectiva continua y con inversa continua.*

Proposición 1.4 (Plancherel)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *y además*
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Dado que $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces la transformada de Fourier se puede extender de manera única a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para terminar esta parte definamos la transformada de Fourier en el contexto de las distribuciones.

Definición 1.2. *Una distribución temperada es un funcional continuo sobre* $S(\mathbb{R}^n)$*. El conjunto de todas las distribuciones temperadas es denotado por* $S'(\mathbb{R}^n)$*.*

Definición 1.3. *Si* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ *entonces la transformada de Fourier de* f *denotada por* $\hat{f}$ *es la distribución temperadada definida por*
$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \quad \textit{para todo } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Proposición 1.5. *La transformada de Fourier* $\wedge : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ *es un isomorfismo, es decir, es una aplicación inyectiva, continua, con inversa continua. Además*
$$\left(\hat{f}\right)^\vee = f = \left(f^\vee\right)^\wedge, \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f, \quad y$$
$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$
$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}(\xi) = \partial^\alpha \hat{f}(\xi).$$

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección introduciremos los espacios de Sobolev $W^{m,p}$.

Definición 1.4. *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \big\{ f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m \big\},$$

donde $1 \leq p \leq \infty$, con norma $\|\cdot\|_{m,p}$ definida como

$$\|f\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p \Big)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup ess |\partial^\alpha f(x)|, \quad x \in \Omega,$$

o equivalentemente para $s \in \mathbb{R}$, $W^{s,p}(\Omega) := L^p_s(\Omega) = J^{-s}L^p(\Omega)$ con norma $\|\cdot\|_{s,p} = \|J^s \cdot\|_p$. En el caso particular $p = 2$ se define $H^s(\Omega) = J^{-s}L^2(\Omega)$ y vía transformada de Fourier su norma es equivalente a

$$\|f\|_{s,2} = \|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

Además $H^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty H^k(\Omega)$ con la métrica inducida.

Estos espacios de Sobolev tienen las siguientes propiedades (para sus demostraciones véase [1], [13] y [27]).

Proposición 1.6. *1. (Inmersiones de Sobolev) Sean $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, se verifica:*

(a) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

(b) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [p, \infty)$.

(c) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En particular, si $k > l$ y $1 \leq p < q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n}$, entonces $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{l,q}(\mathbb{R}^n)$.

2. (Interpolación) Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|J^s f\|_p \leq c \|J^{s_0} f\|_{p_0}^\theta \|J^{s_1} f\|_{p_1}^{1-\theta}, \tag{1.1}$$

donde $\theta \in [0,1]$, $p_0, p_1 \in (1, \infty)$, $s_0, s_1 \in [0, \infty)$, $s = \theta s_0 + (1-\theta) s_1$, y $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$.

3. (Lema de Sobolev) Si $p = 2$ y $s > \frac{n}{2}$ entonces

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Siguiendo las ideas de J. Bona y R. Smith (Véase [4]), en el capítulo 4 introduciremos la noción de "solución ε-aproximada". Para esto se necesita la siguiente proposición. (Para su demostración véase [4])

Definición 1.5. *Sea φ una función par en $C^\infty(\mathbb{R})$ que satisface*

1. $0 \leq \varphi \leq 1$ *en todo* $\mathbb{R}$ *y* $\varphi(0) = 1$.
2. $v(x) := 1 - \varphi(x)$ *tiene un cero de orden infinito en* $x = 0$.
3. φ *tiende exponencialmente a cero en* $\pm\infty$.

Definimos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ *y* $f_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * f)(x)$ *para todo* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Proposición 1.7. *Si $f \in W^{s,p}(\mathbb{R})$ con $1 < p < \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\|f_\varepsilon\|_{s+l,p} \leq c\varepsilon^{-l}\|f\|_{s,p} \quad \textit{para todo} \ > 0 \tag{1.2}$$

y

$$\|f - f_\varepsilon\|_{s-\beta,p} \leq c\varepsilon^{\beta}\|f\|_{s,p} \quad \textit{para todo} \ \ \beta \in [0, s]. \tag{1.3}$$

Más aún, para f fija, el límite cuando ε tiende a cero satisface

$$\|f - f_\varepsilon\|_{s-\beta,p} = o(\varepsilon^{\beta}). \tag{1.4}$$

1.3. Teoría de Littlewood-Paley

Es esta sección enunciaremos la teoría de Littlewood-Paley necesaria para la prueba de la estimativa refinada de Strichartz del capítulo 3 (véase [32]).

Fijemos una función χ tal que

$$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi|_{[-1,1]} = 1, \quad \text{y} \ \ \text{supp}(\chi) \subset [-2, 2].$$

Definimos para $k \geq 1$

$$\psi(\xi) := \chi(\xi) - \chi(2\xi) \ \ \text{y} \ \ \psi_k(\xi) := \psi(2^{-k}\xi)$$

tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\xi) + \chi(\xi) = 1, \quad \text{para todo } \xi \neq 0 \ \ \text{y supp}(\psi_k) \subset \{2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^k\}.$$

Los multiplicadores de Littlewood-Paley se definen para $f \in S'(\mathbb{R})$

$$Q_0(f) = \left(\chi\hat{f}\right)^\vee,$$

$$Q_k(f) = \big(\psi_k \hat{f}\big)^\vee = (\psi_k)^\vee * f \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Si $\lambda = 2^k$ (es un número diádico) y se denota a $f_\lambda = Q_k(f)$ entonces

$$f = \sum_\lambda f_\lambda$$

se dice ser una *descomposición de Littlewood-Paley* de f en la variable de frecuencia, donde f_λ tiene frecuencia $\sim \lambda > 1$. El siguiente resultado clásico es una extensión a L^p del teorema de Plancherel válido cuando $p = 2$.

Teorema 1.8 (Littlewood-Paley)**.** *Para $1 < p < \infty$ se tiene*

$$\|f\|_{L^p} \sim \Big\| \big(\sum_k |Q_k(f)|^2 \big)^{1/2} \Big\|_{L^p} = \Big\| \big(\sum_\lambda |f_\lambda|^2 \big)^{1/2} \Big\|_{L^p}.$$

1.4. Otros resultados

Para analizar los productos que surgen de la expresión no lineal de la ecuación (4), se requiere el siguiente resultado que se conoce como la fórmula de Leibniz para derivadas fraccionarias (para su demostración véase [21]).

Proposición 1.9. *Sea $s = s_1 + s_2 \in (0,1)$, $s_1, s_2 \in (0,s)$ y $p \in [1,\infty)$, $p_1, p_2 \in (1,\infty)$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Entonces, si $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$\|D^s(fg) - f(D^s g) - g(D^s f)\|_{L^p} \lesssim \|D^{s_1} f\|_{L^{p_1}} \|D^{s_2} g\|_{L^{p_2}}.$$

La siguiente estimativa del conmutador fué establecida por T. Kato y G. Ponce (para su demostración véase [17]) y es la clave para probar la estimativa de energía que satisfacen las soluciones de (4).

Proposición 1.10. *Para $s \geq 1$ y $1 < p < \infty$ donde $p_2, p_3 \in (1,\infty)$ son tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$. Entonces, si $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$\|[J^s; f]g\|_{L^p} \lesssim \|\nabla f\|_{L^{p_1}} \|J^{s-1} g\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}}.$$

$$\|J^s(fg)\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}} \|J^s g\|_{L^{p_2}} + \|J^s f\|_{L^{p_3}} \|g\|_{L^{p_4}}.$$

En particular, si $n = 1$, y $p = p_2 = p_3 = 2$, entonces

$$\|[J^s; f]g\|_{L^2} \lesssim \|\partial_x f\|_{L^\infty} \|J^{s-1} g\|_{L^2} + \|J^s f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty}.$$

Por último, se enuncia la desigualdad de Gronwall, necesaria para la prueba de la estimativa de energía (para su demostración véase [13]).

Proposición 1.11. *Sean $k \in L^1([a,b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([a,b] : \mathbb{R})$ tales que $f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s) ds$ para $a \leq t \leq b$. Entonces*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp\Big[\int_s^t k(r) dr \Big] g(s) ds$$

para $a \leq t \leq b$. Además, si g es constante entonces

$$f(t) \leq g \exp\Big[\int_a^t k(r) dr \Big].$$

CAPÍTULO 2

Estimativas lineales

En este capítulo se mostraran las diferentes estimativas que satisface el grupo lineal asociado a la ecuación (4) y las soluciones no lineales de ella, probando además la estimativa de energía asociada a la misma.

En la literatura aparecen ciertas cantidades que son conservadas por la ecuación (4), llamadas leyes de conservación las cuales son

$$I_1(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx \tag{2.1}$$

$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx \tag{2.2}$$

$$I_3(u) = \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^3 dx + \int_{\mathbb{R}} |D_x^{\frac{1+a}{2}} u(x,t)|^2 dx \tag{2.3}$$

Estas leyes de conservación proveen cotas *a priori* de la solución. I_2 se dice ley de conservación en $L^2(\mathbb{R})$, por lo que si $u(t)$ es solución de (4), entonces

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

2.1. Estimativas globales

Ahora consideramos el problema lineal homogéneo asociado al (PVI) (4)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x D_x^{1+a} u \ = \ 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 < a < 1 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.4}$$

cuya solución $u(x,t)$ es

$$u(x,t) = S^a(t)u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi|\xi|^{1+a}} \widehat{u}_0(\xi) d\xi,$$

donde $S^a(t)$ es el grupo unitario asociado a la ecuación (4) con símbolo asociado $\xi|\xi|^{1+a}$. Este grupo es una isometria en $H^s(\mathbb{R})$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Con esta notación y por el principio de Duhamel la solución del problema lineal no homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x D_x^{1+a} u + F \ = \ 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 < a < 1 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.5}$$

satisface la ecuación integral

$$u(t) = S^a(t)u_0(x) - \int_0^t S^a(t-t')F(x,t')dt'. \tag{2.6}$$

A continuación presentamos las estimativas globales que satisface el grupo lineal unitario $\{S^a(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. (Para sus demostraciones véase [22])

Proposición 2.1 (Efecto regularizante de tipo Kato)**.**

$$\|D_x^{\frac{1+a}{2}} S^a(t)u_0\|_{L_x^\infty L_t^2} = c_a \|u_0\|_{L^2}.$$

Proposición 2.2 (Estimativa de Strichartz)**.**

$$\|D_x^{\frac{\theta\beta}{2}} S^a(t)u_0\|_{L_T^q L_x^p} \leq c\|u_0\|_{L^2}, \tag{2.7}$$

para $(\theta,\beta) \in [0,1] \times [0,a/2]$ *y* $(q,p) = \left(\frac{2(2+a)}{\theta(\beta+1)}, \frac{2}{1-\theta}\right)$.

Proposición 2.3. *La estimativa de Strichartz (2.7) es equivalente a*

$$\|D_x^\gamma S^a(t)u_0\|_{L_T^q L_x^p} \leq c\|u_0\|_{L^2},$$

para $p \geq 2$, $0 \leq \gamma \leq \frac{a}{q}$ *y* q *que satisface* $-\gamma + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) De la Proposición 2.2, se tiene que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2+a}{q(\beta+1)} = \frac{\theta}{2},$$

por lo tanto

$$\frac{1}{p} + \frac{2+a}{q(\beta+1)} = \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Sea $\gamma = \frac{\theta\beta}{2}$, entonces

$$\gamma = \frac{(2+a)\beta}{q(\beta+1)}.$$

Ahora, γ como función de $\beta \in [0,a/2]$ es una función creciente, por lo que

$$0 \leq \gamma \leq \frac{a}{q}.$$

Pero, al realizar la división en la igualdad anterior, se tiene que

$$\gamma = \frac{2+a}{q} - \frac{2+a}{q(\beta+1)}.$$

Reemplazando esto en (2.8) se concluye el resultado.

($\Longleftarrow$) Llamemos $\gamma = \frac{\theta\beta}{2}$ y $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, con esto

$$p = \frac{2}{1-\theta}$$

y por ser $p \geq 2$ entonces $\theta \in [0,1]$. Por lo tanto

$$\gamma = \frac{2+a}{q} - \frac{\theta}{2} = \frac{2+a}{q} - \frac{\gamma}{\beta},$$

así

$$\gamma = \frac{(2+a)\beta}{q(\beta+1)},$$

por lo que

$$q = \frac{2(2+a)}{\theta(\beta+1)}.$$

Además ya que $0 \leq \gamma \leq \frac{a}{q}$, entonces

$$0 \leq \frac{\beta}{\beta+1} \leq \frac{a}{2+a},$$

de donde

$$\frac{2}{2+a} \leq \frac{1}{\beta+1} \leq 1,$$

y obtenemos que

$$0 \leq \beta \leq \frac{a}{2}.$$

□

Proposición 2.4 (Estimativa de la función maximal)**.** *Asumimos $u_0 \in H^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(\mathbb{R})$ para algún $\delta' > 0$. Entonces para todo $\rho > \frac{3}{4}$*

$$\|S^a(t)u_0\|_{L^2_x L^\infty_T} \leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|S^a(t)u_0\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(1+T)^\rho \|u_0\|_{H^{\frac{2+a}{4}+\delta'}}.$$

2.2. Estimativa de energía

Comenzamos por recordar un resultado de existencia local de soluciones del (PVI) (4) para datos suficientemente regulares y cuya demostración se puede encontrar en [16], [31].

Teorema 2.5. *1. Para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > 3/2$ existe una única solución*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$$

de (4) con $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$.

2. Para todo $T' < T$ existe una vecindad V de u_0 en $H^s(\mathbb{R})$ tal que la aplicación $\tilde{u_0} \mapsto \tilde{u}(t)$ de V en $C([0,T'] : H^s(\mathbb{R}))$ es continua.

3. Si $u_0 \in H^{s'}(\mathbb{R})$ con $s' > s$ el tiempo de existencia T depende unicamente de $\|u_0\|_{H^s}$.

Este teorema garantiza que las soluciones obtenidas por la regularización en el dato inicial pertenecen a $C([0,T_\varepsilon] : H^\infty(\mathbb{R}))$. Una de las estimativas claves para la prueba del resultado principal es la estimativa de energía satisfecha por las soluciones de (4). Para las estimativas siguientes supondremos que las soluciones de la ecuación sean suficientemente regulares, es decir que $u \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}))$.

Proposición 2.6 (Estimativa de energía)**.** *Sea $s \geq 0$ y $u \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}))$ solución de (4). Entonces*

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} &\leq c_s \|u_0\|_{H^s} \exp\left(c \int_0^T \|\partial_x u\|_{L^\infty} dt\right)\\ &\leq c_s \|u_0\|_{H^s} \exp\left(cT^{1/2} \|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right).\end{aligned}$$

Demostración. Aplicando el operador $J^s u J^s(\cdot)$ a la ecuación en (4) resulta

$$J^s u J^s(\partial_t u) + J^s u J^s(\partial_x D_x^{1+a} u) + J^s u J^s(u \partial_x u) = 0,$$

teniendo en cuenta que el operador J^s conmuta con D_x^s para todo $s \in \mathbb{R}$, y sumando el término $u J^s u J^s(\partial_x u)$ a ambos lados de la ecuación tenemos

$$J^s u(\partial_t J^s u) + J^s u(\partial_x D_x^{1+a} J^s u) + J^s u\Big(\{J^s(u\partial_x u) - u J^s(\partial_x u)\} + u J^s(\partial_x u)\Big) = 0,$$

de donde

$$\frac{1}{2}\partial_t (J^s u)^2 + J^s u(\partial_x D_x^{1+a} J^s u) + J^s u\Big([J^s; u]\partial_x u\Big) + u J^s u J^s(\partial_x u) = 0.$$

Usando integración por partes en $\mathbb{R}$ y la antisimetría del operador $\partial_x D_x^{1+a}$ se llega a

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{\mathbb{R}} (J^s u)^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u (J^s u)^2 + \int_{\mathbb{R}} [J^s; u]\partial_x u \cdot J^s u = 0.$$

Por lo tanto, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la Proposición 1.10 con $f = u$ y $g = \partial_x u$ conllevan a que

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u(t)\|_{H^s}^2 &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u| \int_{\mathbb{R}} (J^s u)^2 + 2\|[J^s; u]\partial_x u\|_{L^2} \|J^s u\|_{L^2} \\
&\lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2}^2 + \|J^s u\|_{L^2} \big(\|\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^{s-1}\partial_x u\|_{L^2} + \\
&\qquad\qquad + \|J^s u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \big) \\
&\lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2}^2 + \|J^s u\|_{L^2} \big(\|J^s u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^\infty} \big) \\
&\lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|J^s u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Entonces

$$\partial_t \|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|\partial_x u\|_{L^\infty} \|u(t)\|_{H^s} .$$

Así, por la desigualdad de Gronwall (Proposición 1.11) obtenemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} \exp\left(c \int_0^T \|\partial_x u\|_{L^\infty} dt \right).$$

La última desigualdad de esta proposición se sigue aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la variable temporal del término exponencial.

□

De esta estimativa tenemos que si $u \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}))$ es una solución de (4) y para algún $T_1 > T$ se tiene que

$$\int_0^{T_1} \|\partial_x u\|_{L^\infty} dt = M < \infty$$

observamos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} \exp(M)$$

para todo $s \geq 0$. Nótese que el lado derecho de esta última desigualdad es independiente de $t \in [0, T_1]$ y aplicando el Teorema (2.5) obtenemos que la solución $u(\cdot)$ puede ser extendida a una solución de la misma clase en el intervalo $[0, T_1]$.

2.3. Estimativa local

Nótese que la estimativa de la Proposición 2.1 establece la ganancia de $\frac{1+a}{2}$ derivadas, que es más pequeña que 1, por lo que la ecuación integral no puede ser usada para mostrar la existencia de soluciones debido a la presencia de una derivada en la no linealidad de (4), como si se puede hacer en el caso $a = 1$ (ver [22]). En esta situación se requiere la siguiente versión *local* del efecto regularizante de tipo Kato (Proposición 2.1) la cual es consecuencia de la estimativa de energía (Proposición 2.6). (Para su demostración, véase [22])

Proposición 2.7 (Efecto regularizante local)**.** *Fijamos $\eta > 0$, y sea I un intervalo de longitud uno. Si $u \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}))$ es solución de (4), entonces para $s \geq \frac{1-a}{2}$ se tiene*

$$\left(\int_0^T \int_I |D_x^{s-\frac{1-a}{2}} \partial_x u(x,t)|^2 dxdt\right)^{1/2} \leq c\|u_0\|_{H^s}\Big(1 + T + T\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}+\eta}} + \\ + \|\partial_x u\|_{L_T^1 L_x^\infty}\Big) \cdot \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L_T^1 L_x^\infty}\right).$$

CAPÍTULO 3

Estimativa refinada de Strichartz

En este capítulo se demostrará la estimativa lineal clave para determinar la cota *a priori* de las soluciones de (4). Esta versión refinada de la estimativa de Strichartz fue introducida por Koch y Tzvetkov [25] y mejorada por Kenig y Koenig [18] en el contexto de la ecuación de Benjamin-Ono.

Teorema 3.1. *Sea $\alpha \in [0,1]$ y $T \in (0,1]$. Asumimos que $w \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}))$ es solución de la ecuación*

$$\partial_t w + D_x^{1+a}\partial_x w = F.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|\partial_x w\|_{L_T^2 L_x^\infty} \lesssim \|D_x^{1-\frac{a}{4}+\frac{\alpha}{4}+\varepsilon} w\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|D_x^{1-\frac{a}{4}-\frac{3\alpha}{4}+\varepsilon} F\|_{L_T^2 L_x^2} + \|w\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|F\|_{L_T^2 L_x^2}. \quad (3.1)$$

Demostración. Sea $g = \sum_\lambda g_\lambda$ una descomposición de Littlewood-Paley de una función g. Fijamos $\varepsilon' > 0$. Para $p > 1/\varepsilon' > 2$, por el lema de inmersión de Sobolev (Proposición 1.6, parte c) y el Teorema 1.8 tenemos:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^\infty} &\lesssim \|J^{\varepsilon'} g\|_{L^p} \sim \Big\| \big(\sum_\lambda |J^{\varepsilon'} g_\lambda|^2 \big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\big(\sum_\lambda |J^{\varepsilon'} g_\lambda|^2 \big)^{1/2} \Big)^p dx \Big)^{1/p} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(\sum_\lambda |J^{\varepsilon'} g_\lambda|^2 \big)^{p/2} dx \Big)^{2/p \cdot 1/2} \\
&= \Big\| \sum_\lambda |J^{\varepsilon'} g_\lambda|^2 \Big\|_{L^{p/2}}^{1/2} \lesssim \Big(\sum_\lambda \|J^{\varepsilon'} g_\lambda\|_{L^p}^2 \Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

este último término debido a la desigualdad integral de Minkowsky. Aplicando la norma de L_T^2 a la desigualdad concluimos que

$$\|g\|_{L_T^2 L_x^\infty} \lesssim \Big(\sum_\lambda \|J^{\varepsilon'} g_\lambda\|_{L_T^2 L_x^p}^2 \Big)^{1/2}.$$

Por lo tanto, para mostrar la acotación del término $\|\partial_x w\|_{L^2_T L^\infty_x}$ será suficiente mostrarlo para $\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x}$ con $\lambda = 2^k \geq 1$ y $p > 2$. La prueba de este hecho se realizará en dos pasos, cuando $k = 0$ y cuando $k \geq 1$. (Nótese además que de la forma que se define la descomposición de Littlewood-Paley para w, cada w_λ satisface la ecuación $\partial_t w_\lambda + D_x^{1+a}\partial_x w_\lambda = F_\lambda$ para $\lambda \geq 1$)

Paso 1. Estimación de $\|\partial_x w_1\|_{L^2_T L^p_x}$.

Usando la desigualdad de Hölder en la variable temporal, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_1\|_{L^2_T L^p_x} &= \left(\int_0^T \|\partial_x w_1\|^2_{L^p_x} dt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^T \|\partial_x w_1\|^{2(\frac{q}{2})}_{L^p_x} dt\right)^{\frac{2}{2q}} \cdot \left(\int_0^T dt\right)^{\frac{q-2}{2q}} \\
&\leq T^{\frac{q-2}{2q}} \|\partial_x w_1\|_{L^q_T L^p_x} \\
&\lesssim \|\partial_x w_1\|_{L^q_T L^p_x}.
\end{aligned}$$

Ahora, por ser w_1 solución de $\partial_t w_1 + D_x^{1+a}\partial_x w_1 = F_1$ y por la estimativa de Strichartz (Proposición 2.3), (tomando $p > 2$ y q tal que $-\frac{a}{q} + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$) y la fórmula de Duhamel (2.6) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_1\|_{L^q_T L^p_x} &\lesssim \|S^a(t)\partial_x w_1(0)\|_{L^q_T L^p_x} + \left\| \int_0^t S^a(t-t')\partial_x F_1(t')dt' \right\|_{L^q_T L^p_x} \\
&\leq \|D_x^{-\frac{a}{q}}\partial_x w_1(0)\|_{L^2_x} + \int_0^T \|D_x^{-\frac{a}{q}}\partial_x F_1\|_{L^2_x} dt \\
&\leq \sup_{T\in(0,1]} \|D_x^{-\frac{a}{q}}\partial_x w_1\|_{L^2_x} + \int_0^T \|D_x^{-\frac{a}{q}}\partial_x F_1\|_{L^2_x} dt,
\end{aligned}$$

al aplicar la identidad de Plancherel y teniendo en cuenta que $\operatorname{supp}(\chi) \subset [-2, 2]$ y al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la variable temporal se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_1\|_{L^q_T L^p_x} &\lesssim \sup_{T\in(0,1]} \|w_1\|_{L^2_x} + \int_0^T \|F_1\|_{L^2_x} dt \\
&\lesssim \|w_1\|_{L^\infty_T L^2_x} + \left(\int_0^T \|F_1\|^2_{L^2_x} dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T dt\right)^{1/2} \\
&\lesssim \|w_1\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|F_1\|_{L^2_T L^2_x},
\end{aligned}$$

que corresponden a los dos últimos términos de (3.1).

Paso 2. Estimación de $\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x}$, para $\lambda > 1$.

Considerese una partición $[0, 1] = \cup I_j$ del intervalo unidad en subintervalos de longitud $|I_j| \sim \lambda^{-\alpha}$, donde $I_j = [a_j, b_j]$, tal que $T = b_j$ para algún j. Nótese que existen $O(\lambda^\alpha)$

subintervalos de estos, y que para el último subintervalo y aquel con punto final T, se requiere que sus longitudes sean al menos $\lambda^{-\alpha}$ y a lo más $2\lambda^{-\alpha}$; los otros subintervalos se pueden tomar de longitud $\lambda^{-\alpha}$.

Para $p > 2$ se toma q tal que $-\frac{a}{q} + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder y sumando sobre indices j tales que $b_j \leq T$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} &= \left(\int_0^T \|\partial_x w_\lambda\|^2_{L^p_x} dt\right)^{1/2} = \left(\sum_j \int_{I_j} \|\partial_x w_\lambda\|^2_{L^p_x} dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_j \|\partial_x w_\lambda\|^2_{L^2_{I_j} L^p_x}\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_j \left(\int_{I_j} \|\partial_x w_\lambda\|^{2(\frac{q}{2})}_{L^p_x} dt\right)^{\frac{2}{q}} \cdot \left(\int_{I_j} dt\right)^{\frac{q-2}{q}}\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_j \|\partial_x w_\lambda\|^2_{L^q_{I_j} L^p_x} \cdot |I_j|^{\frac{q-2}{q}}\right)^{1/2} \\
&\leq \lambda^{-\alpha(\frac{q-2}{2q})} \left(\sum_j \|\partial_x w_\lambda\|^2_{L^q_{I_j} L^p_x}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, por ser w_λ solución de $\partial_t w_\lambda + D_x^{1+a} \partial_x w_\lambda = F_\lambda$, la fórmula de Duhamel (2.6) se tiene. Además, por la estimativa de Strichartz (Proposición 2.3) y la desigualdad de Jensen se tiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} &\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\sum_j \Bigg(\|S^a(t-a_j)\partial_x w_\lambda(a_j)\|^2_{L^q_{I_j} L^p_x} + \\
&\qquad + \left\| \int_{a_j}^t S^a(t-t')\partial_x F_\lambda(t') dt' \right\|^2_{L^q_{I_j} L^p_x} \Bigg)\Bigg)^{1/2} \\
&\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\sum_j \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda(a_j)\|^2_{L^2_x} + \\
&\qquad + \sum_j \left(\int_{I_j} \|S^a(t-t')\partial_x F_\lambda(t')\|_{L^q_{I_j} L^p_x} dt' \right)^2 \Bigg)^{1/2} \\
&\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\sum_j \sup_{T\in(0,1]} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|^2_{L^2_x} + \\
&\qquad + \sum_j \left(\int_{I_j} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|_{L^2_x} dt \right)^2 \Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a la última integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} &\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\sum_j \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2_x} + \\
&\qquad + \sum_j \left(\int_{I_j} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|^2_{L^2_x} dt \right) \cdot \left(\int_{I_j} dt \right) \Bigg)^{1/2} \\
&\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \left(\sum_j \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|^2_{L^\infty_T L^2_x} \right)^{1/2} + \\
&\qquad + \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \left(\sum_j \lambda^{-\alpha} \int_{I_j} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|^2_{L^2_x} dt \right)^{1/2} \\
&\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} \left(\sum_j 1 \right)^{1/2} + \\
&\qquad + \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \cdot \lambda^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^T \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|^2_{L^2_x} dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ya que existen $O(\lambda^\alpha)$ subintervalos en consideración, entonces

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} &\lesssim \lambda^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{q}} \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{2}} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} + \\
&\qquad + \lambda^{-\alpha+\frac{\alpha}{q}} \left(\int_0^T \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|^2_{L^2_x} dt \right)^{1/2} \\
&\lesssim \lambda^{\frac{\alpha}{q}} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} + \lambda^{-\alpha+\frac{\alpha}{q}} \|D_x^{-\frac{a}{q}} \partial_x F_\lambda\|_{L^2_T L^2_x}.
\end{aligned}$$

Por la identidad de Plancherel (Proposición 1.4) y considerando que w_λ tiene frecuencia λ, se concluye que

$$\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} \lesssim \|D_x^{1+\frac{\alpha}{q}-\frac{a}{q}} w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D_x^{1-\alpha+\frac{\alpha}{q}-\frac{a}{q}} F_\lambda\|_{L^2_T L^2_x}.$$

Se ha tomado q tal que $-\frac{a}{q} + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{q} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2p}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|\partial_x w_\lambda\|_{L^2_T L^p_x} &\lesssim \|D_x^{1+\frac{\alpha-a}{4}-\frac{\alpha-a}{2p}} w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D_x^{1-\alpha+\frac{\alpha-a}{4}-\frac{\alpha-a}{2p}} F_\lambda\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\lesssim \|D_x^{1-\frac{a}{4}+\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha-a}{2p}} w_\lambda\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D_x^{1-\frac{a}{4}-\frac{3\alpha}{4}-\frac{\alpha-a}{2p}} F_\lambda\|_{L^2_T L^2_x}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $p > 1/\varepsilon' > 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ y $0 < a < 1$. Entonces se tiene que

$$\varepsilon' - \frac{\alpha - a}{2p} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p} > 0.$$

Y así, dado $\varepsilon > 0$, se escojen ε' y p tales que

$$\varepsilon' - \frac{\alpha - a}{2p} < \varepsilon.$$

Lo cual concluye la prueba. □

CAPÍTULO 4

Demostración del teorema 0.1

En este capítulo se mostrará en primer lugar y como consecuencia de la estimativa de energía (2.6), un control *a priori* de $\|\partial_x w\|_{L^2_T L^\infty_x}$, seguido de la prueba del buen planteamiento local para el (PVI) (4).

4.1. Estimativa *a priori* para $\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}$

En el capítulo anterior se mostró la estimativa lineal de la forma

$$\begin{aligned}\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} &\lesssim \|D^c_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D^d_x F\|_{L^2_T L^2_x} + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|F\|_{L^2_T L^2_x} \\ &\sim \|J^c_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|J^d_x F\|_{L^2_T L^2_x}.\end{aligned}$$

Entonces se quisiera poder aplicar el efecto regularizante local (Proposición 2.7) y absorver tantas derivadas como sean posibles de la derivada de la no linealidad F; este argumento es válido si se tiene que

$$c = d + \frac{1-a}{2}.$$

Con esto, la elección óptima para el parámetro de la estimativa (3.1) será

$$1 - \frac{a}{4} + \frac{\alpha}{4} + \varepsilon = \Big(1 - \frac{a}{4} - \frac{3\alpha}{4} + \varepsilon\Big) + \frac{1-a}{2},$$

es decir

$$\alpha = \frac{1-a}{2}.$$

Y así se tendra buen planteamiento local de (4) para $s > c$. Reemplazando éste valor de α en la estimativa (3.1), se obtiene que

$$c = \frac{9-3a}{8} + \varepsilon \quad \text{y} \quad d = \frac{5+a}{8} + \varepsilon.$$

Sea $s > \frac{9-3a}{8}$ y tomemos $\varepsilon = s - \frac{9-3a}{8}$. El siguiente argumento de escala nos permite suponer sin pérdida de generalidad que

$$\Lambda := \|u_0\|_{H^s} \sim \|u_0\|_{L^2} + \|D_x^{\frac{9-3a}{8}+\varepsilon} u_0\|_{L^2} \leq \delta$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño (que será determinado después) y que $T \leq 1$.

En efecto, sea $u(x,t)$ una solución de (4), entonces tomando

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^{1+a} u(\lambda x, \lambda^{2+a} t)$$

con $\lambda \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_t u_\lambda &= \lambda^{3+2a} u(\lambda x, \lambda^{2+a} t), \\
D_x^{1+a} \partial_x u_\lambda &= \lambda^{2+a} \cdot \lambda^{1+a} u(\lambda x, \lambda^{2+a} t) = \lambda^{3+2a} u(\lambda x, \lambda^{2+a} t), \\
u_\lambda \partial_x u_\lambda &= \lambda^{2+2a} \cdot \lambda u(\lambda x, \lambda^{2+a} t) = \lambda^{3+2a} u(\lambda x, \lambda^{2+a} t).
\end{aligned}$$

Es decir, u_λ es solución de $\partial_t u_\lambda + D_x^{1+a} \partial_x u_\lambda + u_\lambda \partial_x u_\lambda = 0$ con $u_\lambda(x,0) = \lambda^{1+a} u_0(\lambda x)$ como dato inicial. Ya que,

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(x,0)\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2+2a} |u_0(\lambda x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \lambda^{1/2+a} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \lambda^{1/2+a} \|u_0\|_{L^2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|D_x^s u_\lambda(x,0)\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2+2a} |D_x^s u_0(\lambda x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \lambda^{s+1/2+a} \left(\int_{\mathbb{R}} |D_x^s u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \lambda^{s+1/2+a} \|D_x^s u_0\|_{L^2},
\end{aligned}$$

entonces se puede elegir λ suficientemente pequeño tal que

$$\|u_\lambda(x,0)\|_{H^s} \leq \delta$$

para $\delta > 0$ dado.

Más aún, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que se tenga una solución del (PVI)

$$\begin{cases}
\partial_t u_\lambda + \partial_x D_x^{1+a} u_\lambda + u_\lambda \partial_x u_\lambda \ = \ 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 < a < 1 \\
u_\lambda(x,0) = \lambda^{1+a} u_0(\lambda x)
\end{cases}$$

con $u_\lambda \in C([0,1]; H^s(\mathbb{R}))$ y $\|u_\lambda(x,0)\|_{H^s} \leq \delta$. Entonces tomando a

$$u(x,t) = \lambda^{-1-a} u_\lambda(\lambda^{-1} x, \lambda^{-2-a} t)$$

se obtiene una solución de (4) con $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$. Estas dos soluciones tienen en común que $\lambda^{-2-a} T \sim 1$, es decir $T \sim \lambda^{2+a}$. Por lo tanto, como

$$\|u_\lambda(x,0)\|_{H^s} \sim \lambda^{1/2+a} (1 + \lambda^s) \|u_0\|_{H^s} \leq \delta$$

al hacerse λ suficientemente pequeño resulta

$$\lambda^{1/2+a} \sim \|u_0\|_{H^s}^{-1},$$

es decir

$$\lambda \sim \|u_0\|_{H^s}^{-\frac{2}{1+2a}}.$$

Pero $T \sim \lambda^{2+a}$, por lo que

$$T \sim \|u_0\|_{H^s}^{-\frac{2(2+a)}{1+2a}} = \|u_0\|_{H^s}^{-(1+\frac{3}{1+2a})}.$$

En conclusión, si existe una solución del (PVI) (4) $u \in C([0,1]; H^s(\mathbb{R}))$ cuando $\|u_0\|_{H^s} \leq \delta$, entonces para dato inicial arbitrario existe una solución para tiempo $T \gtrsim \|u_0\|_{H^s}^{-(1+\frac{3}{1+2a})}$.

Ahora bien, aplicando la Proposición 3.1 con $\alpha = \frac{1-a}{2}$, $w = u$ y $F = -u\partial_x u$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} &\lesssim \|D^s_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|u\partial_x u\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\lesssim \left(\|D^s_x u\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x}\right) + \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u\partial_x u|^2 dxdt\right)^{1/2} + \\
&\qquad + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x},
\end{aligned}$$

por la ley de conservación en $L^2(\mathbb{R})$ (2.2) y la estimativa de energía (Proposición 2.6) tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} &\lesssim \sup_{t\in[0,T]} \|u_0\|_{L^2_x} + \|D^s_x u_0\|_{L^2} \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) + \\
&\quad + \left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dxdt\right)^{1/2} + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\lesssim \Lambda + \Lambda \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) + \left(\left(\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx\right)\cdot\right. \\
&\quad \left.\cdot \left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 dt\right)\right)^{1/2} + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x}. \\
&\lesssim \Lambda + \Lambda \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x} \|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} \\
&\qquad + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\lesssim \Lambda + \Lambda \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) + \|u_0\|_{L^\infty_T L^2_x} \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) \\
&\qquad + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\lesssim \Lambda + \Lambda \exp\left(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\right) + \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x}.
\end{aligned}$$

Para este último término, por la regla de Leibniz (Proposición 1.9) tenemos

$$\begin{aligned}
\|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} &\lesssim \|(\partial_x u)D_x^{s-\frac{1-a}{2}}u\|_{L_T^2L_x^2} + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\lesssim \left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 \int_{\mathbb{R}} |D_x^{s-\frac{1-a}{2}}u|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\qquad + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\lesssim \left(\left(\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}} |D_x^{s-\frac{1-a}{2}}u|^2 dx\right)\left(\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 dt\right)\right)^{1/2} \\
&\qquad + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\lesssim \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty} + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2},
\end{aligned}$$

aplicando el lema de inmersión de Sobolev (Proposición 1.6) y de nuevo la Proposición 2.6 resulta

$$\begin{aligned}
\|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} &\lesssim \|D_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty} + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\lesssim \|D_x^s u_0\|_{L^2}\exp\left(c\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty}\right)\cdot\exp\left(c\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty}\right) \\
&\qquad + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\lesssim \Lambda\exp\left(c\|\partial_x u\|_{L_T^2L_x^\infty}\right) + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2}.
\end{aligned}$$

Pero, para este último término se tiene

$$\begin{aligned}
&\|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\quad = \left(\sum_j \int_0^T \int_j^{j+1} |uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\quad = \left(\sum_j \left(\sup_{x\in[j,j+1)}\sup_{t\in[0,T]}|u|^2\right)\int_0^T\int_j^{j+1} |D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)|^2 dxdt\right)^{1/2} \\
&\quad = \left(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|^2_{L^2([j,j+1)\times[0,T])}\right)^{1/2} \\
&\quad \le \left(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\right)^{1/2}\left(\sup_j \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|^2_{L^2([j,j+1)\times[0,T])}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando el efecto regularizante local (Proposición 2.7) se tiene

$$\Big(\sup_j \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|^2_{L^2([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2}$$
$$\lesssim \|u_0\|_{H^s}\Big(1+T+T\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}+\eta}}+\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_x}\Big)\cdot \exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_x}\big),$$

entonces aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la variable temporal y de nuevo el lema de inmersión de Sobolev (Proposición 1.6) (Nótese que $\frac{1}{2}+\eta < s$ para $\eta > 0$ adecuado)

$$\begin{aligned}
&\lesssim \|u_0\|_{H^s}\Big(1+T+T\|u_0\|_{H^s}+\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\Big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\\
&\lesssim \Lambda\big(1+\Lambda+\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\\
&\lesssim \Lambda\big(1+\Lambda+\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\\
&\lesssim \Lambda\big(2+\Lambda\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\\
&\lesssim \Lambda\big(2+2\Lambda\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\\
&\lesssim \Lambda\big(1+\Lambda\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \lesssim \Lambda\big(1+\Lambda\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2}.$$

Para el último término de esta desigualdad, utilizamos la fórmula de Duhamel (2.6) para obtener

$$\Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2} \lesssim \Big(\sum_j \|S^a(t)u_0\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}+$$
$$+\|S^a(t)\int_0^t S^a(-t)u\partial_x u(t')dt'\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2},$$

por la estimativa de la función maximal (Proposición 2.4) y la Proposición 1.6 (De nuevo, $\frac{2+a}{4}+\delta' < s$ para $\delta' > 0$ adecuado)

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2} &\lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{2+a}{4}+\delta'}}+\Big\|\int_0^t S^a(-t)u\partial_x u(t')dt'\Big\|_{H^{\frac{2+a}{4}+\delta'}}\\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s}+\int_0^T \Big\|u\partial_x u\Big\|_{H^{\frac{2+a}{4}+\delta'}}dt\\
&\lesssim \Lambda+\|u\partial_x u\|_{L^1_T L^2_x}+\|D_x^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(u\partial_x u)\|_{L^1_T L^2_x},
\end{aligned}$$

haciendo cálculos análogos a los anteriores y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la variable temporal tenemos

$$\begin{aligned}\Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2} &\lesssim \Lambda + \|u\|_{L^\infty_T L^2_x}\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} + \\ &\qquad + \|D_x^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \\ &\lesssim \Lambda + \Lambda \exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big) + \\ &\qquad + \|D_x^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x}.\end{aligned}$$

De nuevo, repitiendo cálculos previos llegamos a (por lo que $\frac{2+a}{4}+\delta' < s - \frac{1-a}{2} = \frac{5+a}{8}+\varepsilon$, tomando $0<\delta'<\frac{1-a}{8}$)

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} &\leq \|D_x^{s-\frac{1-a}{2}}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \\ &\lesssim \|(\partial_x u)D_x^{s-\frac{1-a}{2}}u\|_{L^2_T L^2_x} + \|uD_x^{s-\frac{1-a}{2}}(\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x},\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{2+a}{4}+\delta'}(u\partial_x u)\|_{L^2_T L^2_x} \lesssim \Lambda \exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big) + \Lambda\big(1+\Lambda\big)\exp\big(c\|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x}\big) \\ \cdot \Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Tomemos

$$\phi(T) := \|\partial_x u\|_{L^2_T L^\infty_x} + \Big(\sum_j \|u\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])}\Big)^{1/2}$$

la cual es una función continua no decreciente en T. Con los cálculos anteriores se ha probado que

$$\phi(T) \lesssim \Lambda + \Lambda\exp(c\phi(T)) + \Lambda\phi(T) + \Lambda(\Lambda+1)\phi(T)\exp(c\phi(T)),$$

es decir

$$\phi(T) \leq C\Lambda + C\Lambda\exp(C\phi(T))$$

con la hipótesis que $\Lambda \leq \delta$. Notese que, usando la Proposición 1.6 se tiene

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \Big(\sum_j \Big(\sup_{x\in[j,j+1)} |u(x,0)|\Big)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_j \|u_0\|^2_{L^\infty([j,j+1))}\Big)^{1/2} \\ &\lesssim (\|u_0\|^2_{L^2} + \|D_x^s u_0\|^2_{L^2})\end{aligned}$$

$$\leq C_0\Lambda$$

con $C_0 < C$ tomado anteriormente.

Se mostrará que existe $\delta > 0$ y una constante $M > 0$ tales que si $\Lambda \leq \delta$, entonces $\phi(1) \leq M$.

Sea

$$\Phi(y,\eta) = y - C\eta - C\eta\exp(Cy).$$

Para esta función se tiene que

$$\Phi(0,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,0) = 1$$

por lo que el teorema de la función implícita garantiza que para todo $|\eta| \leq \delta$ suficientemente pequeño, existe una función diferenciable $A(\eta)$ tal que

$$A(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \Phi(A(\eta),\eta) = 0.$$

Como $\Phi(y,\eta) < 0$ para $y \leq 0$, entonces $A(\eta) > 0$ para $\eta > 0$. Más aún, ya que $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,0) = 1$, se cumple que $\Phi(\cdot,\eta)$ es creciente en la vecindad donde $A(\cdot)$ esta definida.
Asumimos que $\Lambda \leq \delta$, y tomamos $M = A(\Lambda)$. Entonces

$$\phi(0) \leq C_0\Lambda < C\Lambda \leq C\Lambda + C\Lambda\exp(CA(\Lambda)) = M$$

por ser $A(\eta) = C\eta + C\eta\exp(CA(\eta))$ localmente.
Supongamos que $\phi(T) > M$ para algún $T \in (0,1)$, y sea

$$T_0 = \text{ínf}\{T \in (0,1) : \phi(T) > M\}.$$

Entonces $T_0 > 0$, $\phi(T_0) = M$ y existe una sucesión decreciente $\{T_n\}$ que converge a T_0 tal que $\phi(T_n) > M$ para todo n. Como $\phi(T) \leq C\Lambda + C\Lambda\exp(C\phi(T))$, se tiene que

$$\Phi(\phi(T),\Lambda) = \phi(T) - C\Lambda - C\Lambda\exp(C\phi(T)) \leq 0$$

para todo $T \in [0,1]$. Por otro lado, $\Phi(\cdot,\Lambda)$ es creciente cerca a M, así

$$\Phi(\phi(T_n),\Lambda) > \Phi(\phi(T_0),\Lambda) = \Phi(M,\Lambda) = \Phi(A(\Lambda),\Lambda) = 0$$

para n suficientemente grande. Lo cual es una contradicción.

Concluimos que $\phi(T) \leq M$ para todo $T \in (0,1)$. Así

$$\phi(1) \leq M$$

obteniendo la cota *a priori* que queriamos. Más aún, de la estimativa de energía (Proposición 2.6) tenemos

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} &\lesssim \|u_0\|_{H^s}\exp(c\phi(T)) \\ &\lesssim \delta\exp(cM) \leq K.\end{aligned}$$

4.2. Buen planteamiento local

Se denota por $u^\varepsilon(t)$ la solución del (PVI) (4) con dato inicial

$$u_0^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u_0$$

donde φ_ε es tomada como en la Definición 1.5. El Teorema (2.5) garantiza que para todo $\varepsilon > 0$ el (PVI) (4) tiene una única solución $u \in C([0, T_\varepsilon] : H^\infty(\mathbb{R}))$. Así, si $T_\varepsilon < T^* \equiv T$ (con T dado en la prueba anterior), entonces por la anterior cota *a priori* y el comentario al final de la prueba de la estimativa de energía (Proposición 2.6) encontramos que

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \|u^\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq c_s \|u_0^\varepsilon\|_{H^s}.$$

El lado derecho de esta desigualdad no depende de T_ε (por lo que $T_\varepsilon < T^*$) y así podemos aplicar el Teorema (2.5) para extender la solución de la misma clase a todo el intervalo $[0, T^*]$.

Se ha mostrado con la estimativa *a priori* que

$$\|u^\varepsilon\|_{L_T^\infty H_x^s} + \|\partial_x u^\varepsilon\|_{L_T^2 L_x^\infty} + \left(\sum_j \|u^\varepsilon\|^2_{L^\infty([j,j+1)\times[0,T])} \right)^{1/2} \leq C(T, \|u_0\|_{H^s}). \tag{4.1}$$

El principal objetivo será establecer la existencia de una solución fuerte $u(t)$ como límite de funciones $u^\varepsilon(t) \in L_T^\infty H_x^s$, con lo cual se mostraria la propiedad de persistencia. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir, como antes se hizo, que $T = 1$ y que $\|u_0\|_{H^s} < \delta$ donde $\delta > 0$ se encontró en el capítulo anterior. Por otro lado, sean $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ y definimos

$$w(t) = w^{\varepsilon,\varepsilon'}(t) = (u^{\varepsilon'} - u^\varepsilon)(t).$$

Entonces w satisface

$$\begin{aligned} \partial_t(u^{\varepsilon'} - u^\varepsilon) + D_x^{1+a}\partial_x(u^{\varepsilon'} - u^\varepsilon) + u^{\varepsilon'}\partial_x u^{\varepsilon'} - u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = 0 \\ \partial_t w + D_x^{1+a}\partial_x w + (u^{\varepsilon'}\partial_x u^{\varepsilon'} - u^{\varepsilon'}\partial_x u^\varepsilon) + (u^{\varepsilon'}\partial_x u^\varepsilon - u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\partial_t w + D_x^{1+a}\partial_x w + u^{\varepsilon'}\partial_x w + w\partial_x u^\varepsilon = 0, \tag{4.2}$$

con $\|w(0)\|_{H^s} = \|u_0^{\varepsilon'} - u_0^\varepsilon\|_{H^s} = o(1)$ cuando ε tiende a cero.

Probaremos la propiedad de persistencia en la norma de L^2 de w. Multiplicando por w e integrando sobre $\mathbb{R}$ en (4.2) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} w\partial_t w + \int_{\mathbb{R}} w D_x^{1+a}\partial_x w + \int_{\mathbb{R}} w(u^{\varepsilon'}\partial_x w) + \int_{\mathbb{R}} w^2 \partial_x u^\varepsilon = 0,$$

por la antisimetría del operador $D_x^{1+a}\partial_x$ se llega a

$$\frac{1}{2}\partial_t \|w(t)\|^2_{L_x^2} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^{\varepsilon'}\partial_x w^2 + \int_{\mathbb{R}} w^2 \partial_x u^\varepsilon = 0.$$

Aplicando integración por partes resulta

$$\begin{aligned}\partial_t\|w(t)\|^2_{L^2_x} &= \int_{\mathbb{R}} w^2\partial_x u^{\varepsilon'} - 2\int_{\mathbb{R}} w^2\partial_x u^{\varepsilon}\\ &\leq c\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_x u^{\varepsilon'}|\int_{\mathbb{R}} w^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_x u^{\varepsilon}|\int_{\mathbb{R}} w^2\Big)\\ &\leq c\big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty_x} + \|\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^\infty_x}\big)\|w(t)\|^2_{L^2_x}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\partial_t\|w(t)\|_{L^2_x} \leq c\big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty_x} + \|\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^\infty_x}\big)\|w(t)\|_{L^2_x}.$$

Así, por la desigualdad de Gronwall (Proposición 1.11) y la estimativa *a priori* (4.1) se tiene

$$\sup_{t\in[0,T]}\|(u^{\varepsilon'} - u^{\varepsilon})(t)\|_{L^2_x} \leq c\|u_0^{\varepsilon'} - u_0^{\varepsilon}\|_{L^2} = o(\varepsilon^s) \tag{4.3}$$

cuando ε tiende a cero y con $s > \frac{9-3a}{8}$. Esto demuestra la existencia y unicidad de una solución fuerte $u(\cdot)$ del (PVI) (4).

Ahora se obtendrá la propiedad de persistencia en la norma de $H^s(\mathbb{R})$ de w. Se seguirá el argumento dado por Bona y Smith [4]. De la estimativa *a priori* (4.1) y la Proposición 1.7 se sigue que para $l > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u^{\varepsilon}(t)\|_{H^{s+l}_x} \leq c\varepsilon^{-l} \tag{4.4}$$

y

$$\|D_x^{s+\gamma+l}u^{\varepsilon}(t)\|_{L^q_T L^p_x} \leq c\varepsilon^{-l} \tag{4.5}$$

para $0 \leq \gamma \leq \frac{a}{q}$ y q tal que $-\gamma + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$. (La prueba de esta última estimativa esta esbozada en [22]).
En la ecuación (4.2) aplicamos el operador $J^s w J^s(\cdot)$

$$J^s w J^s(\partial_t w) + J^s w J^s(\partial_x D_x^{1+a} w) + J^s w J^s(u^{\varepsilon'}\partial_x w + w\partial_x u^{\varepsilon}) = 0,$$

teniendo en cuenta que el operador J^s conmuta con D_x^s para todo $s \in \mathbb{R}$ y sumando el término $u^{\varepsilon'} J^s w J^s(\partial_x w)$ a ambos lados de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}J^s w(\partial_t J^s w) + J^s w(\partial_x D_x^{1+a} J^s w) + J^s w\Big(\{J^s(u^{\varepsilon'}\partial_x w) - u^{\varepsilon'} J^s(\partial_x w)\}+\\ + u^{\varepsilon'} J^s(\partial_x w) + J^s(w\partial_x u^{\varepsilon})\Big) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t(J^s w)^2 + J^s w(\partial_x D_x^{1+a} J^s w) + J^s w\cdot\Big([J^s; u^{\varepsilon'}]\partial_x w\Big) + J^s w\cdot u^{\varepsilon'} J^s(\partial_x w)+\\ + J^s w\cdot J^s(w\partial_x u^{\varepsilon}) = 0,\end{aligned}$$

integrando sobre $\mathbb{R}$ y por la antisimetría del operador $\partial_x D_x^{1+a}$ se llega a

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{\mathbb{R}} (J^s w)^2 + \int_{\mathbb{R}} J^s w\Big([J^s; u^{\varepsilon'}]\partial_x w\Big) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^{\varepsilon'}\partial_x (J^s w)^2 + \\ + \int_{\mathbb{R}} J^s w \cdot J^s(w\partial_x u^{\varepsilon}) = 0.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz e integración por partes en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\frac{1}{2}\partial_t \|J^s w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|J^s w\|_{L^2}\|[J^s; u^{\varepsilon'}]\partial_x w\|_{L^2} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u^{\varepsilon'} \cdot (J^s w)^2 + \\ + \|J^s w\|_{L^2}\|J^s(w\partial_x u^{\varepsilon})\|_{L^2}.$$

Por la Proposición 1.10 se llega a que

$$\partial_t \|J^s w(t)\|_{L^2}^2 \lesssim \|J^s w\|_{L^2}\Big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty}\|J^{s-1}\partial_x w\|_{L^2} + \|J^s u^{\varepsilon'}\|_{L^2}\|\partial_x w\|_{L^\infty}\Big) + \\ + \|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty}\|J^s w\|_{L^2}^2 + \|J^s w\|_{L^2}\Big(\|J^s\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^{p_1}}\|w\|_{L^{p_2}} + \|J^s w\|_{L^{p_3}}\|\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^{p_4}}\Big),$$

donde $\frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$. Aplicando el lema de Sobolev e interpolación (Proposición 1.6) y tomando a $p_3 = 2$ y $p_4 = \infty$ se tiene

$$\partial_t \|J^s w(t)\|_{L^2}^2 \lesssim \|J^s w\|_{L^2}^2\Big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty} + \|\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^\infty}\Big) + \\ + \|J^s w\|_{L^2}\Big(\|J^s\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^{p_1}}\|w\|_{L^{p_2}} + \|J^s u^{\varepsilon'}\|_{L^2}\|\partial_x w\|_{L^\infty}\Big).$$

Por lo que

$$\partial_t \|J^s w(t)\|_{L^2} \lesssim \|J^s w\|_{L^2}\Big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}\|_{L^\infty} + \|\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^\infty}\Big) + \\ + \|J^s\partial_x u^{\varepsilon}\|_{L^{p_1}}\|w\|_{L^{p_2}} + \|J^s u^{\varepsilon'}\|_{L^2}\|\partial_x w\|_{L^\infty}.$$

Así, por la desigualdad de Gronwall (Proposición 1.11) se concluye que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{H^s} \lesssim \left(\|w(0)\|_{H^s} + \int_0^T f(\mu)d\mu\right) \cdot \\ \cdot \exp\left(c\int_0^T \big(\|\partial_x u^{\varepsilon'}(\tau)\|_{L^\infty} + \|\partial_x u^{\varepsilon}(\tau)\|_{L^\infty}\big)d\tau\right),$$

donde

$$f(\cdot) = \|\partial_x u^{\varepsilon}(\cdot)\|_{s,p_1}\|w(\cdot)\|_{L^{p_2}} + \|u^{\varepsilon'}(\cdot)\|_{H^s}\|\partial_x w(\cdot)\|_{L^\infty}.$$

Por la estimativa *a priori* (4.1) el término exponencial permanece acotado y $\|w(0)\|_{H^s} = o(1)$ cuando ε tiende a cero, por lo que se mostrará la estimación de $\int_0^T f(\mu)d\mu$, la cual se realizará en dos pasos.

4.2.0.1. Paso 1. Estimación de $\int_0^T \|\partial_x u^\varepsilon(t)\|_{s,p_1}\|w(t)\|_{L^{p_2}}dt$.

De las desigualdades (4.4) y (1.7) se tiene que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(u^{\varepsilon'} - u^\varepsilon)(t)\|_{H_x^{s-r}} \leq c\varepsilon^r \tag{4.6}$$

con $0 \leq r \leq s$. Por la desigualdad de tipo Gagliardo-Nirenberg (ver [2]) tenemos

$$\|w(t)\|_{L^{p_2}} \leq \|J^\rho w(t)\|_{L^2}^\theta \|w(t)\|_{L^2}^{1-\theta},$$

donde

$$\frac{1}{p_2} = \theta\big(\frac{1}{2} - \rho\big) + (1-\theta)\frac{1}{2} = -\theta\rho + \frac{1}{2}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^{p_2}} &\lesssim \sup_{t\in[0,T]} \|J^\rho w(t)\|_{L^2}^\theta \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^2}^{1-\theta} \\ &\lesssim \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{H^\rho}^\theta \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^2}^{1-\theta},\end{aligned}$$

por las desigualdades (4.4) y (4.6) se tiene

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^{p_2}} &= o(\varepsilon^{(s-\rho)\theta}) \cdot o(\varepsilon^{s(1-\theta)}) = o(\varepsilon^{s\theta-\theta\rho+s-s\theta}) \\ &= o(\varepsilon^{-\theta\rho+s}) = o(\varepsilon^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{2}+s}) = o(\varepsilon^{s-\frac{1}{p_1}}).\end{aligned}$$

Ahora, para estimar

$$\int_0^T \|\partial_x u^\varepsilon(t)\|_{s,p_1}dt \sim \int_0^T \|D_x^{s+1}u^\varepsilon(t)\|_{L^{p_1}}dt$$

usamos la estimativa (4.5) con $\gamma = \frac{a}{q}$ y q tal que $-\frac{a}{q} + \frac{2+a}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{q} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2p}$.

Queremos que $s+1 = s + \frac{a}{q} + l$, o sea $l = 1 - \frac{a}{q}$, y que $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p}$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder y estimativa (4.5) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|D_x^{s+1}u^\varepsilon(t)\|_{L^{p_1}}dt &\leq T^i\bigg(\int_0^T \|D_x^{s+\frac{a}{q}+l}u^\varepsilon(t)\|_{L^p}^q dt\bigg)^{1/q} \leq c\varepsilon^{-(1-\frac{a}{q})} \\ &\leq c\varepsilon^{\frac{a}{q}-1} = c\varepsilon^{\frac{a}{4}-\frac{a}{2p_1}-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^T \|\partial_x u^\varepsilon(t)\|_{s,p_1}\|w(t)\|_{L^{p_2}}dt \leq \sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^{p_2}} \int_0^T \|D_x^{s+1}u^\varepsilon(t)\|_{L^{p_1}}dt$$

$$\lesssim \varepsilon^{s-\frac{1}{p_1}+\frac{a}{4}-\frac{a}{2p_1}-1} = \varepsilon^{s-1+\frac{a}{4}-\frac{a+2}{2p_1}}.$$

Ya que $0 < a < 1$ y dado $s > \frac{9-3a}{8} > 1 - \frac{a}{4}$ escojemos $p_1 \gg 1$ tal que el exponente de ε sea positivo. Por lo que

$$\int_0^T \|\partial_x u^\varepsilon(t)\|_{s,p_1} \|w(t)\|_{L^{p_2}} dt = o(1) \tag{4.7}$$

cuando ε tiende a cero.

4.2.0.2. Paso 2. Estimación de $\int_0^T \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s} \|\partial_x w(t)\|_{L^\infty} dt$.

De la estimativa (4.4) se tiene que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s} \leq c.$$

Ahora, para estimar $\int_0^T \|\partial_x w(t)\|_{L^\infty} dt$ de nuevo, aplicando los lemas de inmersión de Sobolev e interpolación de la Proposición 1.6 y la desigualdad de tipo Gagliardo-Nirenberg (ver [2]) tenemos

$$\|\partial_x w(t)\|_{L^\infty} \leq \|J^{\frac{3}{2}+\rho_1} w(t)\|_{L^2} \leq \|J^{3/2+\rho_1+\rho} w(t)\|_{L^{r_1}}^{1-\theta} \|w(t)\|_{L^{r_2}}^{\theta},$$

donde

$$\frac{1-\theta}{r_1} + \frac{\theta}{r_2} = \frac{1}{2}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \rho_1 &= \theta \cdot 0 + (1-\theta)\Big(\frac{3}{2} + \rho_1 + \rho\Big) \\ &= \Big(\frac{3}{2} + \rho_1 + \rho\Big) - \theta\Big(\frac{3}{2} + \rho_1 + \rho\Big), \end{aligned}$$

por lo que

$$\theta = \frac{\rho}{3/2 + \rho_1 + \rho}.$$

En este caso, se estiman las cantidades

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{L^{r_2}}^{\theta} \quad \text{y} \quad \int_0^T \|J^{3/2+\rho_1+\rho} w(t)\|_{L^{r_1}}^{1-\theta} dt.$$

Para $\|w(t)\|_{L^{r_2}}^{\theta}$, de nuevo aplicando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg se tiene

$$\|w(t)\|_{L^{r_2}} \leq \|J^h w(t)\|_{L^2}^{\sigma} \|w(t)\|_{L^2}^{1-\sigma},$$

donde

$$\frac{1}{r_2} = \sigma\Big(\frac{1}{2} - h\Big) + (1-\sigma)\frac{1}{2} = -\sigma h + \frac{1}{2}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^{r_2}} &\lesssim \sup_{t\in[0,T]}\|J^h w(t)\|_{L^2}^{\sigma}\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^2}^{1-\sigma}\\ &\lesssim \sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{H^h}^{\sigma}\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^2}^{1-\sigma},\end{aligned}$$

de nuevo, por las estimativas (4.4) y (4.6)

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^{r_2}} &= o(\varepsilon^{(s-h)\sigma})\cdot o(\varepsilon^{s(1-\sigma)}) = o(\varepsilon^{s\sigma-\sigma h+s-s\sigma})\\ &= o(\varepsilon^{-\sigma h+s}) = o(\varepsilon^{s+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Así

$$\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_{L^{r_2}}^{\theta} = o(\varepsilon^{\theta(s+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2})}).$$

Para

$$\int_0^T \|J^{3/2+\rho_1+\rho}w(t)\|_{L^{r_1}}^{1-\theta}dt \sim \int_0^T \|D_x^{3/2+\rho_1+\rho}w(t)\|_{L^{r_1}}^{1-\theta}dt + K$$

usamos la estimativa (4.5) con $\gamma = \frac{a}{q}$ y q tal que $-\frac{a}{q}+\frac{2+a}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$, es decir $\frac{1}{q}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2p}$.

Queremos que $\frac{3}{2}+\rho_1+\rho = s+\frac{a}{q}+l$, o sea $l=\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{q}$, y que $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{p}$. Entonces aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|D_x^{3/2+\rho_1+\rho}w(t)\|_{L^{r_1}}dt &\le T^i\left(\int_0^T \|D_x^{s+\frac{a}{q}+l}w(t)\|_{L^p}^q dt\right)^{1/q}\\ &= o(\varepsilon^{-(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{q})}).\end{aligned}$$

Así

$$\int_0^T \|D_x^{3/2+\rho_1+\rho}w(t)\|_{L^{r_1}}^{1-\theta}dt = o(\varepsilon^{-(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{q})(1-\theta)}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s}\|\partial_x w(t)\|_{L^\infty}dt &\le c\int_0^T \|\partial_x w(t)\|_{L^\infty}dt\\ &= o(\varepsilon^{(s+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2})\theta-(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1})(1-\theta)}).\end{aligned}$$

Mostraremos que

$$\left(s+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2}\right)\theta-\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)(1-\theta)\ge 0$$

para $\theta = \frac{\rho}{3/2+\rho_1+\rho}$ y un valor conveniente de r_1. O equivalentemente

$$\left(s+\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2}\right)\rho-\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-s-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)\geq 0$$

$$s\rho+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{2}\right)\rho-\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)+s\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)\geq 0,$$

para lo cual es suficiente que

$$s\geq\frac{\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}\right)\rho}{\frac{3}{2}+\rho_1+\rho}.$$

Como $\frac{1-\theta}{r_1}+\frac{\theta}{r_2}=\frac{1}{2}$ y dado θ como antes, entonces

$$\frac{1}{r_2}=\frac{r_1\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho\right)-2\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)}{2\rho r_1}.$$

Así

$$\begin{aligned}
s&\geq\frac{\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)+\left(\frac{\rho r_1-r_1(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho)-2(\frac{3}{2}+\rho_1)}{2r_1}\right)}{\frac{3}{2}+\rho_1+\rho}\\
&\geq\frac{\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)-\frac{1}{2r_1}\left(r_1-2\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)}{\frac{3}{2}+\rho_1+\rho}\\
&\geq\frac{\left(\frac{3}{2}+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a}{2r_1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)}{\frac{3}{2}+\rho_1+\rho}\\
&\geq\frac{\left(1+\rho_1+\rho-\frac{a}{4}+\frac{a+2}{2r_1}\right)\left(\frac{3}{2}+\rho_1\right)}{\frac{3}{2}+\rho_1+\rho}.
\end{aligned}$$

Ya que $0<a<1$ y dado $s>\frac{9-3a}{8}>1-\frac{a}{4}$, escojemos $\rho_1,\rho>0$ y $r_1\gg 1$ tal que el exponente de ε sea positivo. Por lo que

$$\int_0^T\|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s}\|\partial_x w(t)\|_{L^\infty}dt\leq\sup_{t\in[0,T]}\|u^{\varepsilon'}(t)\|_{H^s}\int_0^T\|\partial_x w(t)\|_{L^\infty}dt=o(1)\tag{4.8}$$

cuando ε tiende a cero.
Por lo que, usando las estimativas (4.7) y (4.8) encontramos que

$$\int_0^T f(\mu)d\mu=o(1)$$

cuando ε tiende a cero. Por lo tanto se concluye que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{H^s_x} = \sup_{t\in[0,T]} \|(u^{\varepsilon'} - u^{\varepsilon})(t)\|_{H^s_x} = o(1)$$

cuando ε tiende a cero. Obteniendo así la convergencia de $\{u^\varepsilon\}$ a una función $u \in L^\infty_T H^s_x$ y la propiedad de persistencia en la norma de $L^\infty_T H^s_x$. Más aún, la desigualdad anterior muestra la convergencia en $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, ya que se ha probado que las redes $\{u^\varepsilon\}$ satisfacen la propiedad de Cauchy en $H^s(\mathbb{R})$, los cuales son espacios de Banach con la norma inducida. (Nótese que el conjunto $(0,1)$ con dirección $\leq$ es un conjunto directo, así $\{u^\varepsilon\}$ es una red en $H^s(\mathbb{R})$).

La prueba de la dependencia continua es similar a la prueba anterior de persistencia. Probaremos que dado $\lambda > 0$ existe $\delta = \delta(\|u_0\|_{H^s}, T, \lambda) > 0$ tal que si $\|u_0 - v_0\|_{H^s} < \delta$ entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{H^s_x} < \lambda,$$

donde u y v son las correspondientes soluciones del (PVI) (4). Del resultado anterior se sigue que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s_x} < \lambda/3$$

y

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{H^s_x} < \lambda/3.$$

Se mostrará que existe $\delta > 0$ tal que si $\|u_0 - v_0\|_{H^s} < \delta$ entonces, para $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{H^s_x} < \lambda/3.$$

Si se define $z(t) = u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)$ y notando que

$$\|z(0)\|_{H^s} = \|u^\varepsilon_0 - v^\varepsilon_0\|_{H^s} \sim \|u_0 - v_0\|_{H^s} < \delta$$

para ε pequeño. Entonces la ecuación de la diferencia es

$$\partial_t z + D^{1+a}_x \partial_x z + v^\varepsilon \partial_x z + z \partial_x u^\varepsilon = 0.$$

Argumentando de manera similar a la prueba anterior obtenemos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{L^2_x} \leq c\|u^\varepsilon_0 - v^\varepsilon_0\|_{L^2} < \delta + o(\varepsilon^s)$$

cuando ε tiende a cero, y además

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{H^s} \lesssim \left(\|z(0)\|_{H^s} + \int_0^T g(\mu) d\mu \right).$$

$$\cdot \exp\left(c\int_0^T \big(\|\partial_x u^\varepsilon(\tau)\|_{L^\infty} + \|\partial_x v^\varepsilon(\tau)\|_{L^\infty}\big) d\tau \right),$$

donde

$$g(\cdot) = \|\partial_x v^\varepsilon(\cdot)\|_{s,p_1} \|z(\cdot)\|_{L^{p_2}} + \|u^\varepsilon(\cdot)\|_{H^s} \|\partial_x z(\cdot)\|_{L^\infty}.$$

Reuniendo los pasos dados en la prueba de las estimativas (4.1), (4.7) y (4.8), recordando además que la acotación de tales términos esta dada por constantes positivas con exponentes positivos, se tiene

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{H^s_x} \lesssim \big(\delta + cT(\varepsilon^{m_1}\delta^{m_2} + \varepsilon^{m_3}\delta^{m_4})\big),$$

donde $m_1, m_2, m_3, m_4 \geq 0$.
Así, fijando $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ suficientemente pequeño, podemos determinar $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{H^s_x} = \sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{H^s_x} < \lambda/3.$$

En conclusión

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty_T H^s_x} &\leq \|u(t) - u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty_T H^s_x} + \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^\infty_T H^s_x} + \\ &\qquad + \|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{L^\infty_T H^s_x} \\ &< \lambda/3 + \lambda/3 + \lambda/3 = \lambda. \end{aligned}$$

Lo cual determina el buen planteamiento local de (4) en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > \frac{9-3a}{8}$.

Bibliografía

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, (1976).

[3] J. Bona y R. Scott, *Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces*, Duke Math. J 43(1976), pp. 87-99.

[4] J. Bona y R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser., A 278(1975), pp. 555-601.

[5] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geometric and Functional Anal., 3(1993), pp. 209-262.

[6] N. Burq y F. Planchon, *On well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Math Ann., 340(2008) 3, pp. 497-542.

[7] M. Christ, J. Colliander y T. Tao, *Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations*, Amer. J. Math, 125(2003), pp. 1235-1293.

[8] J. Colliander, G. Staffilani, H. Takaoka y T. Tao, *Sharp global well-posedness results for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc., 16(2003), pp. 705-749.

[9] J. Ginibre y G. Velo, *Smoothing properties and existence of solutions for the generalized Benjamin-Ono equation*, J. Diff. Eq, 93(1991), pp. 150-232.

[10] Z. Guo, *Global well-posedness of the Korteweg-de Vries equation in* $H^{-\frac{3}{4}}(\mathbb{R})$, preimpreso.

[11] A. Ionescu y C. Kenig, *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low regularity spaces*, J. Amer. Math. Soc., 20(2007), pp. 753-798.

[12] R. Iorio, *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, Comm. P.D.E, 11(1986), pp. 1031-1081.

[13] R. Iorio y V. Iorio *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambrige studies in advanced mathematics 70, (2001).

[14] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, in Studies in applied mathematics, vol. 8 of Adv. Math. Suppl. Stud., Academic Press, New York, 1983, pp. 93-108.

[15] T. Kato, *On the Korteweg-de Vries equation*, Manuscripta Math, 29(1979), pp. 89-99.

[16] T. Kato, *Quasilinear equations of evolutions, with applications to Partial Differential Equations*, Lectures Notes in Math, Springer-Verlag, 448(1975), pp. 27-50.

[17] T. Kato y G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure. Appl. Math., 41(1988), pp.891-907.

[18] C. E. Kenig y K. D. Koenig, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Mathematical Research Letters, 10(2003), pp. 879-895.

[19] C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., 9(1996), pp. 573-603.

[20] C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *On the generalized Benjamin-Ono equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 342(1994), pp. 155-172.

[21] C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana U. Math. J., 40(1991), pp. 33-69.

[22] C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure. Appl. Math., 46(1993), pp. 527-620.

[23] C. E. Kenig, G. Ponce y L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, J. Amer. Math. Soc., 4(1991), pp. 323-347.

[24] N. Kishimoto, *Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity*, preimpreso.

[25] H. Koch y N. Tzvetkov, *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$*, Int. Math. Res. Not., 26(2003), pp. 1449-1464.

[26] S. Kwon, *On the fifth order KdV equation: local well posedness and lack of uniform continuity of the solution map*, Mathematics Subject Classification. 35J53, (2000), pp. 1-29.

[27] F. Linares y G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Universitext Springer, 1 edition, (2009).

[28] L. Molinet y F. Ribaud, *Well posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitary large initial data*, Int. Math. Res. Not., 70(2004), pp. 3757-3795.

[29] L. Molinet, J.C. Saut y N. Tzvetkov, *Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*, SIAM J. Math. Anal. 33(2001), pp. 982-988.

[30] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Diff. Integral Eq., 4(1991), pp. 527-542.

[31] J. Saut y R. Temam, *Remarks on the Korteweg-de Vries equation*, Israel J. Math., 24(1976), pp. 78-87.

[32] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[33] T. Tao, *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^1(\mathbb{R})$, J. Hyperbolic Differ. Equ., 1(2004), pp. 27-49.