Análisis de perturbaciones de momentos asociados a funcionales de ortogonalidad a través de la transformación Szegő

Edinson Fuentes
Licenciado en Matemáticas
Código: 01830514

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2014

Análisis de perturbaciones de momentos asociados a funcionales de ortogonalidad a través de la transformación Szegő

Edinson Fuentes
Licenciado en Matemáticas
Código: 01830514

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Ciencias-Matemáticas

Director
Ph.D. Luis Enrique Garza Gaona

Codirector
Ph. D. Herbert Alonso Dueñas Ruiz

Línea de investigación
Polinomios Ortogonales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2014

Título en español

Análisis de perturbaciones de momentos asociados a funcionales de ortogonalidad a través de la transformación Szegő.

Title in English

Analysis of perturbations of moments associated with orthogonality linear functionals through the Szegő transformation.

Resumen: En esta contribución, analizamos perturbaciones a una sucesión de momentos asociada a un funcional lineal de ortogonalidad que puede ser representado por una medida positiva con soporte en $[-1, 1]$. En particular, dada una cierta perturbación a dicha medida en la recta real, analizamos la perturbación obtenida en la correspondiente medida en la circunferencia unidad, donde dichas medidas están relacionadas por la transformación de Szegő. Se muestra que la perturbación aplicada puede ser expresada en términos de la parte singular de las medidas, y también a través de las correspondientes sucesiones de momentos.

Abstract: In this contribution, we consider perturbations to a sequence of moments associated with an orthogonality linear functional that can be represented by a positive measure supported in $[-1, 1]$. In particular, given a perturbation to such a measure on the real line, we analyze the perturbation obtained on the corresponding measure on the unit circle, when both measures are related through the Szegő's transformation. We show that the perturbation applied can be expressed in terms of the singular part of the measures, and also in terms of the corresponding sequences of moments.

Palabras clave: Polinomios ortogonales, función de Stieltjes y Carathéodory, matriz de Hankel y Toeplitz, transformación Szegő.

Keywords: Orthogonal polynomials, Stieltjes and Carathéodory function, Hankel and Toeplitz matrix, Szegő's transformation.

Nota de aceptación

Trabajo de grado
Aprobado

"Mención Meritoria"

Jurado
Ph.D. Germán Preciado López

Director
Ph.D. Luis Enrique Garza Gaona

Codirector
Ph.D. Herbert Alonso Dueñas Ruiz

Bogotá, D.C., Diciembre de 2014

Agradecimientos

Un agradecimiento especial a los profesores Luis Enrique Garza Gaona y Herbert Alonso Dueñas Ruiz, por la colaboración, paciencia, apoyo en el desarrollo y culminación del trabajo de maestría.

También quiero agradecer al profesor Luis Alfonso Salcedo Plazas director de la escuela de matemáticas de la Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia, por la colaboración al momento del ingreso a la universidad Nacional de Colombia y por darme el tiempo necesario para realizar los estudios de maestría en ciencias matemáticas.

Un agradecimiento también lo merecen los diferentes amigos, compañeros y profesores con los cuales tuve la oportunidad de interactuar estos dos últimos años, durante el transcurso de la maestría, de los cuales aprendí mucho.

Finalmente quisiera agradecer a mi esposa Martha Leonor Saiz Saenz y a mi hijo Edinson Samuel Fuentes Saiz por su constante ánimo y amor.

Índice general

Índice general **I**

Introducción **III**

1. Polinomios ortogonales en la recta real **1**

1.1. Preliminares de polinomios ortogonales en la recta real 1

1.2. Transformaciones espectrales lineales en la recta real 5

1.3. Perturbación de una antidiagonal de la matriz de Hankel 10

2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad **16**

2.1. Preliminares de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad 16

2.2. Transformaciones espectrales lineales en la circunferencia unidad 20

2.3. Perturbación de una subdiagonal de la matriz de Toeplitz 27

3. Transformación de Szegő **32**

3.1. Transformación de Szegő 32

3.2. Factorización LU 34

4. Análisis de perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő **37**

4.1. Análisis de la perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő cuando se perturba solo el momento j-ésimo en $[-1, 1]$ 37

4.1.1. Aplicación de la transformación de Szegő 38

4.1.2. Momentos perturbados en la circunferencia unidad 39

4.1.3. Parte absolutamente continua de la medida generada en la circunferencia unidad 41

4.1.4. Análisis de la perturbación del momento cero 42

4.1.5. Análisis de la perturbación del momento uno 43

4.2. Análisis de perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő cuando se perturba del momento j-ésimo en adelante en $[-1, 1]$ 45

4.2.1. Construcción del funcional que perturba del momento j-ésimo en adelante en $[-1, 1]$ 45

4.2.2. Aplicación de la transformación de Szegő 47

4.2.3. Parte absolutamente continua de la medida generada en la circunferencia unidad 49

4.2.4. Análisis de la perturbación del momento cero 50

5. Conclusiones **52**

Bibliografía **56**

Introducción

La teoría de polinomios ortogonales respecto a medidas cuyo soporte se encuentra en la recta real tiene un amplio espectro de aplicaciones, tales como integración numérica, sistemas integrables, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, teoría de grafos, etc. En los últimos años, se han estudiado las propiedades espectrales de las matrices de Jacobi asociadas a dichos polinomios ortogonales que representan, en forma matricial, el operador de multiplicación respecto a una base de polinomios ortogonales. Con respecto a esto, en [13] y [16] se pone de manifiesto una conexión entre perturbaciones de medidas y la factorización LU de las matrices de Jacobi correspondientes, así como la relación entre las funciones de Stieltjes asociadas, de gran importancia en el estudio de los polinomios ortogonales, que actúan como funciones generadoras de la sucesión de momentos asociada con la medida.

Dichas perturbaciones han sido estudiadas en el marco de las llamadas transformaciones de Darboux, que tienen su origen en el problema biespectral. En su formulación original, dicho problema consiste en obtener una descripción de todas las situaciones en las que un par de operadores diferenciales en dos variables distintas tienen una autofunción diferencial común. El uso de la transformación de Darboux para convertir un operador diferencial de segundo orden en otro fue llevado a cabo por primera vez en [5]. Dicha transformación consiste en factorizar el operador diferencial de segundo orden como un producto de dos operadores diferenciales de primer orden, y luego cambiar el orden de los factores, obteniendo un nuevo operador diferencial de segundo orden. Una conexión con los polinomios ortogonales surgió más tarde en [8], donde se muestra que todos los operadores diferenciales con soporte en $[-1, 1]$ y los operadores diferenciales de segundo orden que satisfacen el problema espectral resultan de un cambio en la variable n en la relación de recurrencia que satisfacen los polinomios ortogonales clásicos. Casi al mismo tiempo, se consideró la matriz Jacobi mónica correspondiente a la transformación de Uvarov, en el contexto del análisis espectral de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes polinómicos. Las soluciones polinómicas de dichas ecuaciones diferenciales son los llamados polinomios ortogonales de Krall, que se obtuvieron a partir de los polinomios ortogonales clásicos por medio de una combinación de dos procesos llamados transformación de Darboux y transformación de Darboux sin parámetro (algo más de historia y referencias se puede ver en [6] pp. 1-5).

El estudio de los polinomios ortogonales con respecto a una medida de probabilidad no trivial, soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ fue iniciado por G.

Szegő en una serie de artículos publicados entre 1915 y 1925 (ver [14]). Posteriormente, Ya. L. Geronimus extendió esta teoría en un contexto más general de ortogonalidad respecto a funcionales, basado en la teoría clásica de funciones de variable compleja. Un eje importante de actividad investigadora en la década de los cincuenta fue el estudio de la conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios dicretos. Más tarde, en los años ochenta, se analiza el problema desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización de matrices de Hessenberg (la representación matricial del operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad) de dimensión finita. De la misma manera, aparece una abundante bibliografía en teoría de sistemas lineales relacionados con polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, en el marco de los generadores de espacio de estado (algo más de historia y referencias se puede ver en [6]).

El inicio del siglo **XXI** está marcado con la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon [12], que constituyen la descripción más exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad hasta la fecha. Uno de los resultados más importantes es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent $\Lambda = span\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias $S = \{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots\}$ y $T = \{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \ldots\}$. La matriz resultante, conocida como matriz **CMV**, es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques, de dimensión 2×2 la primera y de un único bloque de dimensión 1×1 y los restantes de dimensión 2×2 la segunda, cuyos elementos pueden ser expresados en términos de los coeficientes de Verblunsky.

También es posible establecer una conexión entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y medidas soportadas en la circunferencia unidad, conocida en la literatura como transformación de Szegő. En [11] y [14] se muestra no solamente cómo están relacionadas dichas medidas, sino también la relación existente entre las familias de polinomios ortogonales correspondientes, así como la relación entre las familias de parámetros de la relación de recurrencia de los polinomios ortogonales en la recta real y la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la medida soportada en la circunferencia unidad. La transformación de Szegő relaciona la función de Stieltjes asociada con una medida α con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ y la función de Carathéodory asociada con una medida σ con soporte en la circunferencia unidad, de la siguiente manera

$$F(z) = \frac{1 - z^2}{2z} \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{x - t} = \frac{1 - z^2}{2z} S(x), \tag{1}$$

con $x = \frac{z+z^{-1}}{2}, z = x + \sqrt{x^2 - 1}$. En [7] los autores muestran que cuando se tiene una transformación de Christoffel, Uvarov o Geronimus en el intervalo [-1,1] y se aplica la transformación de Szegő, se obtiene una transformación Christoffel, Uvarov y Geronimus, respectivamente, en la circunferencia unidad.

En [1] los autores analizan una perturbación de la matriz de Hankel, que consiste en la modificación del momento $j-$ésimo. Asociada con esta perturbación obtienen una nueva

función de Stieltjes $\tilde{S}(x)$ en función de la inicial $S(x)$, dada por

$$\tilde{S}_j(x) = S(x) + \frac{m}{(x-a)^{j+1}}, \quad m \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

De manera análoga, en [2] se analiza la perturbación del momento $j-$ésimo de la matriz de Toeplitz (matriz de momentos en $\mathbb{T}$ asociada con un funcional lineal Hermitiano $\mathcal{L}$), es decir, se perturba el j-ésimo momento únicamente. Con esta perturbación se obtiene una nueva función de Carathéodory $\widetilde{F}(z)$ en términos de la función original $F(z)$ de la siguiente manera

$$\tilde{F}_j(z) = F(z) + 2Mz^j, \quad M \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Este trabajo está dedicado a analizar qué sucede al aplicar la transformación de Szegő (1) a la función de Stieltjes (2) asociada a una medida con soporte en el intervalo $[-1, 1]$. Es decir, determinar qué tipo de transformación se obtiene en la correspondiente función de Carathéodory en la circunferencia unidad. También se presentan algunos ejemplos ilustrativos. La parte novedosa de este trabajo consiste en usar la transformación de Szegő para analizar la relación existente entre los momentos de una SPO en $[-1, 1]$ y los momentos asociados con una SPO en $\mathbb{T}$.

En el capítulo 1 se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la recta real y se enuncian algunas de sus propiedades básicas. Además se mostrarán algunas transformaciones canónicas de medidas clásicas como lo son las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus en términos de la función de Stieltjes. También se muestra cómo se perturba tan solo un momento de la matriz de Hankel asociado a un funcional $\mathcal{L}$, y se formula su nueva función de Stieltjes.

En el capítulo 2 se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, enunciando algunas de sus propiedades e introduciendo transformaciones de medidas clásicas análogas al caso real, y su función de Carathéodory. También se muestra cómo se perturba tan solo un momento de la matriz de Toeplitz asociado a un funcional $\mathcal{L}$, y se enuncia su correspondiente función de Carathéodory.

El capítulo 3 está dedicado a la transformación de Szegő, que establece una relación entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y ciertas medidas soportadas en la circunferencia unidad. De igual manera, existe una relación entre los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales en la recta real y los parámetros de Verblunsky asociados a la correspondiente medida soportada en la circunferencia unidad. Se muestra una manera sencilla de calcular dichos parámetros de Verblunsky, que está relacionada con la factorización LU de la matriz de Jacobi asociada con la medida en la recta real. Por otra parte, se muestra de manera explícita la relación que existe entre la función de Stieltjes y la función de Carathéodory asociadas a medidas soportadas en la recta real y la circunferencia unidad.

En el capítulo 4 se analiza qué tipo de transformación se obtiene en la circunferencia unidad por medio de su correspondiente función de Carathéodory, cuando aplicamos la transformación de Szegő, a una función de Stieltjes asociada a una medida $\alpha(x)$, cuyo soporte se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$.

CAPÍTULO 1

Polinomios ortogonales en la recta real

En este capítulo se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la recta real y se enuncian algunas de sus propiedades básicas. Además se mostrarán algunas transformaciones canónicas clásicas de medidas como lo son las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus, en términos de la función de Stieltjes.
En la última parte se muestra cómo se perturba tan solo un momento de la matriz de Hankel asociado a un funcional $\mathcal{L}$, y se formula su nueva función de Stieltjes, posteriormente esta última función se usará para estudiar el comportamiento de estos polinomios cuando se aplica la transformación de Szegő directa.

1.1. Preliminares de polinomios ortogonales en la recta real

Las siguientes definiciones y teoremas se pueden consultar en [3] y [14].
Sea $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números complejos y sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal definido en el espacio $\mathbb{P}$ de los polinomios con coeficientes complejos tal que:

$$\langle \mathcal{L}, x^n \rangle = \mu_n, \quad n \geq 0. \tag{1.1}$$

Este funcional $\mathcal{L}$ es llamado funcional lineal de momentos, y los números complejos $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ son los momentos asociados a $\mathcal{L}$.

Definición 1.1.1. *Una sucesión de polinomios $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$, donde*

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \cdots, \quad \gamma_n \neq 0,\ n \geq 0,$$

*es llamada una sucesión de polinomios ortogonales (**SPO**) con respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}$, si para todo entero no negativo n y m, se tiene*

1. *$p_n(x)$ es un polinomio de grado n,*
2. *$\langle \mathcal{L}, p_m(x)p_n(x) \rangle = 0$, para $m \neq n$,*
3. *$\langle \mathcal{L}, p_n(x)p_n(x) \rangle = \langle \mathcal{L}, p_n^2(x) \rangle \neq 0,\ n \geq 0$.*

La correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos (**SPOM**) denotada por $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$, cuyo coeficiente principal es igual a 1, se define por

$$P_n(x) = \frac{p_n(x)}{\gamma_n}.$$

Definición 1.1.2. *La matriz de Gram asociada con la forma bilineal del funcional lineal (1.1) respecto a la base canónica $\{x^n\}_{n\geq 0}$ de $\mathbb{P}$, está definida mediante*

$$\boldsymbol{H} = [\langle \mathcal{L}, x^{i+j}\rangle]_{i,j=0,1,\ldots} = [\mu_{i+j}]_{i,j=0,1,\ldots} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Las matrices de este tipo, con valores constantes a lo largo de las anti diagonales, son conocidas en la literatura como ***matrices de Hankel****.*

Teorema 1.1.1. *Sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos con sucesión de momentos $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $\mathcal{L}$ es*

$$\Delta_n = \det \boldsymbol{H}_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n \geq 0.$$

$\boldsymbol{H}_n$ es la submatriz principal de la matriz de Gram de tamaño $(n+1)\times(n+1)$.

Definición 1.1.3. *El funcional $\mathcal{L}$ es llamado cuasi-definido si $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.*

Definición 1.1.4. *Se dice que el funcional de momentos $\mathcal{L}$ es definido positivo, si $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ para todo polinomio $\pi(x)$ que no es idénticamente cero y es no negativo para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.1.2. *$\mathcal{L}$ es definido positivo si y solo si los momentos son todos reales y $\Delta_n > 0$ para todo $n \geq 0$.*

Si el funcional $\mathcal{L}$ es definido positivo, entonces existe una única sucesión de polinomios

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \cdots, \ \gamma_n > 0, \ n \geq 0,$$

que satisface

$$\langle \mathcal{L}, p_n(x)p_m(x)\rangle = \delta_{n,m},$$

en este caso $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ es llamada sucesión de polinomios ortonormales asociada a $\mathcal{L}$. Cuando $\mathcal{L}$ es definido positivo, existe una representación integral (no necesariamente única)

$$\langle \mathcal{L}, x^n\rangle = \int_E x^n d\alpha(x),$$

donde α es una medida positiva de Borel, no trivial, cuyo soporte E es un subconjunto infinito de puntos en la recta real.

Teorema 1.1.3. *La sucesión $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisface la siguiente relación de recurrencia a tres términos*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x),\ n \geq 0, \tag{1.3}$$

con las condiciones iniciales $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = \mu_0^{-1/2}$ y donde los coeficientes están determinados por:

$$a_n = \int_E xp_{n-1}(x)p_n(x)d\alpha(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0,$$
$$b_n = \int_E xp_n^2 d\alpha(x) = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}.$$

La relación de recurrencia a tres términos (1.3) tiene la representación matricial

$$xp(x) = Jp(x),$$

donde $p(x) = [p_0(x), p_1(x), \cdots]^t$ y J es una matriz simétrica tridiagonal

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

que es conocida como matriz de Jacobi [3].
Existe una expresión similar usando polinomios ortogonales mónicos, así

$$xP(x) = \tilde{J}P(x),$$

donde $P(x) = [P_0(x), P_1(x), \cdots]^t$ y $\tilde{J}$ es una matriz tridiagonal

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1^2 & b_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2^2 & b_2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_3^2 & b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

que es llamada matriz de Jacobi mónica.
El n-ésimo polinomio ortonormal, $p_n(x)$, admite la siguiente representación en términos del determinante de la matriz de Hankel

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix},\ n \geq 0,$$

con $\Delta_{-1} = 1$. El coeficiente principal está dado por el determinante de dos matrices de Hankel

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}.$$

Definición 1.1.5. *El kernel reproductor de orden $n-$ésimo asociado con $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ está definido por*

$$K_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y),\ n\geq 0.$$

El nombre viene del hecho de que, para cualquier polinomio $q_n(x)$ de grado a lo más n, tenemos

$$q_n(y)=\int_E q_n(x)K_n(x,y)d\alpha(x).$$

Teorema 1.1.4. *El kernel reproductor puede representarse de una manera simple en términos de los polinomios $p_n(x)$ y $p_{n+1}(x)$ usando la fórmula de Christoffel-Darboux (ver [3, 14], entre otros)*

$$K_n(x,y)=a_{n+1}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y)-p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y},\ x\neq y,$$

que se puede deducir de una manera directa a partir de la relación de recurrencia a tres términos (1.3).

Para el caso cuasi-definido, el kernel reproductor está definido mediante

$$K_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)P_k(y)}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

La $i-$ésima derivada parcial de $K_n(x,y)$ con respecto a x y la $j-$ésima derivada parcial de $K_n(x,y)$ con respecto a y, se denotan por

$$K_n^{(i,j)}(x,y)=\frac{\partial^{i+j}K_n(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}.$$

Proposición 1.1.1. *Dos de las propiedades más importantes de los ceros de los polinomios ortogonales son*

1. *Los ceros de $p_n(x)$ son todos reales, simples y están localizados en el interior de E.*
2. *Sean $x_{n,1}<x_{n,2}<\cdots<x_{n,n}$ los ceros del polinomio $p_n(x)$. Los ceros de $p_n(x)$ y $p_{n+1}(x)$ están separados de la siguiente manera*

$$x_{n+1,i}<x_{n,i}<x_{n+1,i+1},\ i=1,2,...,n.$$

Esta propiedad es llamada entrelazamiento de los ceros.

Ejemplo 1.1.1. *Entre los polinomios ortogonales más estudiados cabe citar los polinomios de Jacobi, una familia de polinomios ortogonales en $[-1,1]$ con respecto a la función peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha,\beta>-1$. Pueden expresarse mediante*

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}).$$

Como casos particulares $\alpha, \beta \in \{\pm\frac{1}{2}\}$ se obtienen las familias de polinomios ortogonales de Chebyshev de primera a cuarta especie, con medidas respectivas dadas por:

$$d\alpha_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$d\alpha_2(x) = \sqrt{1-x^2}dx,$$

$$d\alpha_3(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx,$$

$$d\alpha_4(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$$

Cuando $\alpha = \beta = 0$ recuperamos la medida de Lebesgue $d\alpha(x) = dx$ en $[-1, 1]$, los correspondientes polinomios son llamados polinomios de Legendre.
Cuando $\alpha = \beta$, son conocidos como polinomios de Gegenbauer y su medida es $d\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha dx$, (ver [4], pag. 17-18).

1.2. Transformaciones espectrales lineales en la recta real

En esta subsección se considerarán algunas perturbaciones canónicas de medidas, (ver [7]).
Denotaremos como $\mathcal{L}_\alpha$ un funcional lineal definido positivo, asociado con una medida α de Borel con soporte en algún intervalo E de la recta real.

Definición 1.2.1. *La función de Stieltjes asociada a α se define como*

$$S(x) = \int_E \frac{d\alpha(t)}{x-t}.$$

Cuando $\mathcal{L}$ es cuasi-definido, esta función admite el siguiente desarrollo en serie en un entorno del infinito

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}},$$

donde μ_k son los momentos asociados con α, dados por (1.1). En lo sucesivo, supondremos que $\mu_0 = 1$.

Ejemplo 1.2.1. *Consideremos los polinomios de Chebyshev de primera especie, asociados con la medida*

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

donde los momentos son

$$\begin{aligned}\mu_k &= \langle \mathcal{L}, x^k \rangle \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^k(\theta) d\theta \\ &= \begin{cases} \pi, & si \quad k = 0, \\ 0, & si \quad k \text{ es impar}, \\ \left(\prod_{i=1}^{k/2} \frac{k-(2i-1)}{k-2(i-1)} \right) \pi, & si \quad k \text{ es par}. \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de Stieltjes para los polinomios de Tchebycheff de primera especie es

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}} \\ &= \frac{\mu_0}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{x^{2k+1}} \\ &= \frac{\pi}{x} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{2k-(2i-1)}{2k-2(i-1)}}{x^{2k+1}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos los polinomios de Gegenbauer con $\alpha = \beta = 1$, cuya medida es*

$$d\alpha(x) = (1-x^2)dx,$$

los momentos son

$$\begin{aligned}\mu_k &= \langle \mathcal{L}, x^k \rangle \\ &= \int_{-1}^{1} x^k (1-x^2) dx \\ &= \begin{cases} 0, & si \quad k \text{ es impar}, \\ \frac{4}{(k+1)(k+3)}, & si \quad k \text{ es par}, \end{cases}\end{aligned}$$

y por la tanto la función de Stieltjes es

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{x^{2k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)(2k+3)x^{2k+1}}.\end{aligned}$$

Definición 1.2.2. *El funcional delta de Dirac $\delta(x-\beta)$, actúa de la siguiente manera*

$$\langle \delta(x-\beta), p_n(x) \rangle = p_n(\beta), \ p_n \in \mathbb{P}.$$

Dado un funcional lineal $\mathcal{L}$, algunas perturbaciones canónicas son

1. La perturbación $d\tilde{\alpha}_c = (x-\beta)d\alpha$, $\beta \notin supp(\alpha)$, es la llamada transformación canónica de Christoffel.

2. La perturbación $d\tilde{\alpha}_u = d\alpha + M_r\delta(x-\beta)$, $\beta \notin supp(\alpha)$, $M_r \in \mathbb{R}$, es la llamada transformación canónica de Uvarov.

3. La perturbación $d\tilde{\alpha}_g = \frac{d\alpha}{x-\beta} + M_r\delta(x-\beta)$, $\beta \notin supp(\alpha)$, $M_r \in \mathbb{R}$, es la llamada transformación canónica de Geronimus.

Ejemplo 1.2.3. *En términos del funcional lineal, la transformación de Uvarov está definida por*

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathcal{L}}_u, p_n(x)\rangle &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + M_r\langle \delta(x-\beta), p_n(x)\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + M_r p_n(\beta).\end{aligned}$$

Definición 1.2.3. *Una transformación espectral racional de una función de Stieltjes $S(x)$, es una transformación de la forma*

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x)+B(x)}{C(x)S(x)+D(x)},$$

donde $A(x), B(x), C(x)$ y $D(x)$ son polinomios que dependen de x, y $AD-BC \neq 0$. Si $C(x) = 0$, se dice que la transformación es lineal.

Las tres perturbaciones canónicas mencionadas anteriormente corresponden a transformaciones espectrales lineales de las correspondientes funciones de Stieltjes.
De hecho, las funciones de Stieltjes normalizadas correspondientes a las anteriores perturbaciones están dadas por:

1. Transformación canónica de Christoffel

$$\tilde{S}_c(x) = \mathfrak{R}_c(\beta)[S(x)] = \frac{(x-\beta)S(x)-1}{\mu_1-\beta}. \tag{1.4}$$

Ya que

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}},$$

por lo tanto

$$\tilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{x^{k+1}}.$$

Los momentos asociados a esta perturbación son

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_k &= \langle \mathcal{L}_c, x^k\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, (x-\beta)x^k\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, x^{k+1}\rangle - \beta\langle \mathcal{L}, x^k\rangle \\ &= \mu_{k+1} - \beta\mu_k,\end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_c$ es el funcional asociado a la transformación canónica de Christoffel de $\mathcal{L}$. Sustituyendo $\tilde{\mu}_k$ en $S(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_c(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1} - \beta\mu_k}{x^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{x^{k+1}} - \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}},\end{aligned}$$

como $\mu_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{S}_c(x) &= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}}\right) - \beta S(x) \\ &= (x-\beta)S(x) - 1,\end{aligned}$$

éste último resultado lo dividimos por $\mu_1 - \beta$, por lo que

$$\tilde{S}_c(x) = \frac{(x-\beta)S(x) - 1}{\mu_1 - \beta},$$

la cual es la transformación canónica de Christoffel.
Aquí $\tilde{S}_c(x)$ representa la pertubación de la medida de probabilidad α con soporte en $[-1, 1]$,

$$d\tilde{\alpha}_c = \frac{x-\beta}{\mu_1 - \beta} d\alpha.$$

Se puede observar que $\tilde{\alpha}_c$ también es una medida de probabilidad.

2. Transformación canónica de Uvarov

$$\tilde{S}_u(x) = \mathfrak{R}_u(\beta, M_r)[S(x)] = \frac{S(x) + M_r(x-\beta)^{-1}}{1 + M_r}. \tag{1.5}$$

Ya que

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_k &= \langle \mathcal{L}_u, x^k \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, x^k \rangle + M_r \langle \delta(x-\beta), x^k \rangle \\ &= \mu_k + M_r \beta^k,\end{aligned}$$

sustituyendo $\tilde{\mu}_k$ en $\tilde{S}_u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{x^{k+1}}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{S}_u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}} + M_r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{x^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}} + \frac{M_r}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{x}\right)^k,\end{aligned}$$

como $\beta \notin supp(\alpha)$ entonces $\left|\frac{\beta}{x}\right| < 1$, y así la serie de la derecha de la ecuación anterior es un serie geométrica convergente. Como consecuencia,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_u(x) &= S(x) + \frac{M_r}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{\beta}{x}}\right)\\ &= S(x) + \frac{M_r}{(x-\beta)}.\end{aligned}$$

Este último resultado lo dividimos por $1 + M_r$ y concluimos

$$\tilde{S}_u(x) = \frac{S(x) + M_r(x-\beta)^{-1}}{1+M_r},$$

que es la transformación canónica de Uvarov.
Aquí $\tilde{S}_u(x)$ representa la pertubación de la medida de probabilidad α

$$d\tilde{\alpha}_u = \frac{d\alpha + M_r\delta(x-\beta)}{1+M_r}d\alpha.$$

Se puede observar que $\tilde{\alpha}_u(x)$ también es una medida de probabilidad.

3. Transformación canónica de Geronimus

$$\tilde{S}_g(x) = \mathfrak{R}_g(\beta, M_r)[S(x)] = \frac{S(\beta) + M_r - S(x)}{(x-\beta)(M_r + S(\beta))}. \tag{1.6}$$

Donde $\tilde{S}_g(x)$ representa la pertubación de la medida de probabilidad α_g soportada en $[-1, 1]$

$$d\tilde{\alpha}_g = \frac{(x-\beta)^{-1}d\alpha + M_r\delta(x-\beta)}{M_r + S(\beta)}.$$

Se puede verificar que $\tilde{\alpha}_g$ tambien es una medidad de probabilidad.

Ejemplo 1.2.4. *Consideremos una transformación canónica de Uvarov para los polinomios de Chebyshev de primera especie,*

$$\begin{aligned}d\tilde{\alpha}_u &= d\alpha + M_r\delta(x-\beta)\\ &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + M_r\delta(x-\beta).\end{aligned}$$

La transformación espectral de la función de Stieltjes de los polinomios de Chebyshev de primera especie asociada a la perturbación de Uvarov, segun (1.5) es

$$\tilde{S}_u(x) = \frac{\frac{\pi}{x} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{k}\frac{2k-(2i-1)}{2k-2(i-1)}}{x^{2k+1}} + M_r(x-\beta)^{-1}}{1+M_r},$$

la función de Stieltjes $S(x)$ se obtuvo en el ejemplo 1.2.1.

En [16] se muestra que el grupo de las transformaciones espectrales lineales de la forma

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{D(x)},$$

es un grupo no conmutativo generado a partir de las transformaciones de Christoffel y Geronimus descritas anteriormente. Además,

- $\mathfrak{R}_c(\beta) \circ \mathfrak{R}_g(\beta, M_r)[S(x)] = S(x)$ (transformación identidad).
- $\mathfrak{R}_g(\beta, M_r) \circ \mathfrak{R}_c(\beta)[S(x)] = \mathfrak{R}_u(\beta, M_r)[S(x)]$.

1.3. Perturbación de una antidiagonal de la matriz de Hankel

En esta subsección se asumirá que $\mathcal{L}$ es un funcional lineal definido positivo, asociado con una medida α de Borel con soporte en algún intervalo E de la recta real. En lugar de considerar la base canónica de $\mathbb{P}$, consideremos la base $\{1, (x-a), (x-a)^2, ...\}$ donde $a \in \mathbb{R}$, entonces la nueva sucesión de momentos $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$, asociada con la medida α con soporte en E está dada por

$$\begin{aligned}\nu_n &= \langle \mathcal{L}, (x-a)^n \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} (-x)^j \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n+j} a^{n-j} \mu_j,\end{aligned}$$

de lo que se puede concluir que

$$\nu_n = \mu_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n+j} a^{n-j} \mu_j, \tag{1.7}$$

donde $\mu_0 = \nu_0$.

Ejemplo 1.3.1. *Consideremos los polinomios de Chebyshev de primera especie, con la medida*

$$d\tilde{\alpha} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

según el ejemplo 1.2.1, los momentos asociados con la base canónica son

$$\mu_n = \begin{cases} \pi, & si \quad n = 0, \\ 0, & si \quad n \text{ es impar}, \\ \left(\prod_{i=1}^{n/2} \frac{n-(2i-1)}{n-2(i-1)} \right) \pi, & si \quad n \text{ es par}, \end{cases}$$

en consecuencia los momentos $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$ con respecto a la base $\{1, (x-a), (x-a)^2, ...\}$ son

$$\nu_n = \mu_n + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2j} (-1)^{n+2j} a^{n-2j} \mu_{2j}.$$

Ejemplo 1.3.2. *Los momentos con respecto a la base* $\{1,(x-a),(x-a)^2,...\}$ *para los polinomios de Gegenbauer* $(\alpha=\beta=1)$ *son*

$$\begin{aligned}\nu_n &= \langle \mathcal{L}, (x-a)^n \rangle \\ &= \int_{-1}^{1} x^n(1-x^2)dx + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \int_{-1}^{1} (-1)^{n+j} a^{n-j} x^j (1-x^2)dx \\ &= \mu_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (-1)^{n+j} a^{n-j} \mu_j.\end{aligned}$$

En el ejemplo 1.2.2 hallamos $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$.

La matriz de Hankel asociada a $\mathcal{L}$ en la nueva base esta dada por,

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n+1} & \cdots & \nu_{2n} \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Así, si $\mathcal{L}$ es un funcional lineal de momentos cuasi-definido, entonces los polinomios

$$Q_n(x) = \frac{1}{\det \mathbf{H}_n} = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_n & \nu_{n+1} & \cdots & \nu_{2n-1} \\ 1 & (x-a) & (x-a)^2 & \cdots & (x-a)^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

costituyen una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $\mathcal{L}$, usando la nueva base[1], con

$$Q_n(x) = P_n(x-a).$$

Ahora se definirá un funcional que perturba solo un momento de la matriz de Hankel. Antes necesitamos enunciar algunas definiciones.

Definición 1.3.1. *Dado un funcional lineal* $\mathcal{L}$*, la derivada distribucional* $D\mathcal{L}$ *(ver [15]) está dada por*

$$\langle D\mathcal{L}, p \rangle = -\langle \mathcal{L}, p' \rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Si j *es un entero no negativo, la* $j-$*ésima derivada distribucional se define por*

$$\langle D^j\mathcal{L}, p \rangle = (-1)^j \langle \mathcal{L}, p^{(j)} \rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

En particular, para el funcional $\delta(x-a)$ *la* $j-$*ésima derivada distribucional resulta ser*

$$\langle D^j\delta(x-a), p \rangle = (-1)^j p^{(j)}(a).$$

[1]Observe que al realizar un cambio en la base resulta una perturbación en todos los elementos de la matriz de Hankel con respecto a la base original.

Definición 1.3.2. *Sea $\mathcal{L}$ un funcional cuasi-definido entonces definimos el funcional lineal de momentos $\mathcal{L}_j$, por*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_j, p_n(x)\rangle &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + (-1)^j \frac{m_j}{j!}\langle D^{(j)}\delta(x-a), p_n(x)\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + \frac{m_j}{j!}p_n^{(j)}(a),\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde m_j y a son constantes reales, $p_n^{(j)}(x)$ indica la $j-$ésima derivada de $p_n(x) \in \mathbb{P}$.

Si $\mathcal{L}_j$ es un funcional definido positivo, entonces la transformación anterior puede expresarse en términos de su correspondiente medida, dada por

$$d\tilde{\alpha}_j = d\alpha + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)}\delta(x-a), \tag{1.9}$$

que se puede ver como una medida de Uvarov generalizada.
Como caso particular consideremos el caso $j = 0$. En este caso la medida asociada según (1.9) es

$$d\tilde{\alpha}_0 = d\alpha + m_0\delta(x-a), \tag{1.10}$$

es decir una transformación de Uvarov con, $M_r = m_0$ y $\beta = a$, y según la ecuación (1.5) la transformación espectral de la correspondiente función de Stieltjes, sin normalizar es

$$\tilde{S}_u(x) = S(x) + \frac{m_0}{(x-a)}. \tag{1.11}$$

Por otro lado, cuando $\mathcal{L}_j$ es definido positivo, existe una representación en forma de integral, entonces (1.8) se puede escribir de la siguiente manera. Sea $\alpha_j(x)$ una medida sobre E que esta definida por

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_j, p_n(x)\rangle &= \int_E p_n(x) d\alpha_j(x) \\ &= \int_E p_n(x) d\alpha(x) + \frac{m_j}{j!}p_n^{(j)}(a).\end{aligned} \tag{1.12}$$

De (1.8) se puede concluir que

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_k &= \langle \mathcal{L}_j, (x-a)^k\rangle \\ &= \begin{cases} \nu_k, & \text{si} \quad k < j, \\ \nu_k + m_j, & \text{si} \quad k = j, \\ \nu_k, & \text{si} \quad k > j, \end{cases}\end{aligned}$$

lo cual puede comprobarse fácilmente, ya que

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_k &= \langle \mathcal{L}_j, (x-a)^k\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, (x-a)^k\rangle + \frac{m_j}{j!}((x-a)^k)^{(j)}(a) \\ &= \nu_k + \frac{m_j}{j!}((x-a)^k)^{(j)}(a).\end{aligned}$$

Considerando los diferentes casos para k y j, tenemos

- Si $k < j$, al derivar j veces un polinomio de grado k, obtenemos 0 y entonces $\tilde{\nu}_k = \nu_k$.

- Si $k = j$, al derivar j veces un polinomio de grado j, obtenemos $j!$, entonces $\nu_k + m_j$.
- Si $k > j$, al derivar j veces un polinomio de grado k obtenemos $mk(k-1)\cdots(x-j-1)(x-a)^{k-j}$ y evaluando este polinomio en a obtenemos 0. Por que la base es $\{1,(x-a),(x-a)^2,(x-a)^3,...\}$, esta es la importancia de usar esta base. Entonces $\tilde{\nu}_k = \nu_k$.

Observe que el funcional $\mathcal{L}_j$ perturba el $j-$ésimo momento de la matriz de Hankel asociada a $\mathcal{L}$, es decir, la matriz de Hankel asociada con $\mathcal{L}_j$ contiene los mismos momentos ν_n de $\mathcal{L}$ excepto por el $j-$ésimo momento que es igual a $\nu_j + m_j$, es decir

$$\tilde{\mathbf{H}}_n = \begin{bmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_j + m_j & \cdots & \nu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{j+1} & \cdots & \nu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_j + m_j & \nu_{j+1} & \cdots & \nu_{2j} & \cdots & \nu_{j+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n+1} & \cdots & \nu_{n+j} & \cdots & \nu_{2n} \end{bmatrix}, \quad n \geq 0,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_n = \mathbf{H}_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & m_j & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_j & \cdots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Si el funcional lineal $\mathcal{L}_j$ es cuasi-definido y se denota por $\tilde{S}(x)$ la correspondiente función de Stieltjes, entonces se puede relacionar $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{(x-a)^{k+1}}$ y $\tilde{S}(x)$ como:

$$\tilde{S}_j(x) = S(x) + \frac{m_j}{(x-a)^{j+1}}. \tag{1.13}$$

Este resultado se tiene porque la función de Stieltjes perturbada es

$$\tilde{S}_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\nu}_k}{(x-a)^{k+1}},$$

de (1.8) los momentos pertubados son

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_k &= \langle \mathcal{L}_j, (x-a)^k \rangle \\ &= \begin{cases} \nu_k, & \text{si} \quad k \neq j, \\ \nu_k + m_j, & \text{si} \quad k = j, \end{cases} \end{aligned}$$

entonces sustituyendo en $\tilde{S}(x)$ se obtiene,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_j(x) &= \frac{\tilde{\nu}_0}{(x-a)} + \frac{\tilde{\nu}_1}{(x-a)^2} + \frac{\tilde{\nu}_0}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{\tilde{\nu}_j}{(x-a)^{j+1}} + \frac{\tilde{\nu}_{j+1}}{(x-a)^{j+2}} + \cdots \\ &= \frac{\nu_0}{(x-a)} + \frac{\nu_1}{(x-a)^2} + \frac{\nu_0}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{\nu_j + m_j}{(x-a)^{j+1}} + \frac{\nu_{j+1}}{(x-a)^{j+2}} + \cdots \\ &= S(x) + \frac{m_j}{(x-a)^{j+1}}.\end{aligned}$$

Se puede ver la perturbación (1.13) de la función de Stieltjes como una transformación espectral lineal, es decir

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{D(x)}$$

donde $A(x) = (x-a)^{j+1}$, $B(x) = m_j$ y $D(x) = (x-a)^{j+1}$,
Denotaremos esta transformación mediante

$$\tilde{S}_j(x) = \frac{(x-a)^{j+1}S(x) + m_j}{(x-a)^{j+1}}. \tag{1.14}$$

Observe que (1.11) y (1.13) son las mismas cuando j = 0.

Ejemplo 1.3.3. *Consideremos los polinomios de Chebyshev de primera especie. En el ejemplo 1.3.1 se calcularon los ν_n en la base $\{1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^2, ...\}$, y están dados por*

$$\nu_n = \mu_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{2j} (-1)^{n+2j} a^{n-2j} \mu_{2j}.$$

Por la ecuación (1.13), la función de Stieltjes es

$$\begin{aligned}\tilde{S}_j(x) &= S(x) + \frac{m_j}{(x-a)^{j+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{2j} (-1)^{k+2j} a^{k-2j} \mu_{2j}}{(x-a)^{k+1}} + \frac{m_j}{(x-a)^{j+1}},\end{aligned}$$

donde los $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ son los momentos asociados a los polinomios de Chebyshev de primera especie (ver ejemplo 1.2.1).

La siguiente proposición establece condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el funcional lineal $\mathcal{L}_j$ preserva el carácter cuasi-definido y proporciona la relación entre las correspondientes **SPOM**.

Proposición 1.3.1. *[1] Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal de momentos cuasi-definido y $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ su correspondiente **SPOM**. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *El funcional lineal de momentos $\mathcal{L}_j$, definido como en (1.8), es cuasi-definido.*
2. *Para todo $n \geq 0$, la matriz $\boldsymbol{I}_j + \boldsymbol{K}_j \boldsymbol{D}_j$, donde*

$$\boldsymbol{D}_j = \frac{m_j}{j!} \begin{bmatrix} \binom{j}{j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \binom{j}{0} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_j = \begin{bmatrix} K_{n-1}^{(j,0)}(a,a) & K_{n-1}^{(j-1,0)}(a,a) & \cdots & K_{n-1}^{(0,0)}(a,a) \\ K_{n-1}^{(j,1)}(a,a) & K_{n-1}^{(j-1,1)}(a,a) & \cdots & K_{n-1}^{(0,1)}(a,a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n-1}^{(j,j)}(a,a) & K_{n-1}^{(j-1,j)}(a,a) & \cdots & K_{n-1}^{(0,j)}(a,a) \end{bmatrix},$$

e $\boldsymbol{I}_j$ *es la matriz identidad de tamaño* $(j+1)\times(j+1)$*, es no singular y*

$$\langle \mathcal{L}, P_n^2(x)\rangle + \begin{bmatrix} P_n^{(j)}(a) \\ P_n^{(j-1)}(a) \\ \vdots \\ P_n(a) \end{bmatrix}^T \boldsymbol{D}_j(\boldsymbol{I}_j + \boldsymbol{K}_j\boldsymbol{D}_j)^{-1} \begin{bmatrix} P_n(a) \\ P_n^{(1)}(a) \\ \vdots \\ P_n^{(j)}(a) \end{bmatrix}^T \neq 0.$$

Además, si $\mathcal{L}_j$ *es cuasi-definido y denotamos por* $\{P_n(j;\cdot)\}_{n\geq 0}$ *su correspondiente* ***SPOM****, entonces*

$$P_n(j;x) = P_n(x) + \begin{bmatrix} K_{n-1}^{(j,0)}(a,x) \\ K_{n-1}^{(j-1,0)}(a,x) \\ \vdots \\ K_{n-1}^{(0,0)}(a,x) \end{bmatrix}^T \boldsymbol{D}_j(\boldsymbol{I}_j + \boldsymbol{K}_j\boldsymbol{D}_j)^{-1} \begin{bmatrix} P_n(a) \\ P_n^{(1)}(a) \\ \vdots \\ P_n^{(j)}(a) \end{bmatrix}^T.$$

La demostración se puede ver en [1] pag. 6-7.

CAPÍTULO 2

Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

En este capítulo se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, enunciando algunas de sus propiedades e introduciendo transformaciones de medidas análogas al caso real, y su función de Carathéodory.
En la última parte se muestra cómo se perturba tan solo un momento de la matriz de Toeplitz asociado a un funcional $\mathcal{L}$, y se enuncia su correspondiente función de Carathéodory. Esta última función posteriormente se usará para estudiar el comportamiento de los polinomios en la circunferencia unidad cuando se aplica la transformación de Szegő directa

2.1. Preliminares de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad

Las siguientes definiciones y teoremas se pueden consultar en [6], [10] y [12].
Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal en el espacio de los polinomios de Laurent ($\Lambda = span\{z^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$) tal que $\mathcal{L}$ es hermitiano, es decir

$$c_n = \langle \mathcal{L}, z^n \rangle = \overline{\langle \mathcal{L}, z^{-n} \rangle} = \overline{c}_{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Los números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son llamados los momentos asociados a $\mathcal{L}$. Entonces se puede introducir un funcional bilineal asociado con $\mathcal{L}$ en el espacio $\mathbb{P} = span\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de los polinomios con coeficientes complejos mediante

$$\langle p(z), q(z) \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{L}, p(z)\bar{q}(z^{-1}) \rangle, \tag{2.1}$$

donde $p, q \in \mathbb{P}$. Denotaremos mediante $\mathbb{P}_n$ el subespacio de los polinomios de grado a lo más n.

Definición 2.1.1. *La matriz de Gram asociada a la base canónica* $\{z^n\}_{n\geq 0}$ *de* $\mathbb{P}$ *es*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n & \cdots \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

conocida en la literatura como matriz de ***Toeplitz****.*

Definición 2.1.2. *Se dice que el funcional lineal* $\mathcal{L}$ *es cuasi-definido si las submatrices principales* $(\boldsymbol{T}_n)_{n\geq 0}$ *que tienen tamaño* $(n+1)\times(n+1)$*, son no singulares, es decir*

$$\det \boldsymbol{T}_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Teorema 2.1.1. *Si* $\mathcal{L}$ *es cuasi-definido, existe una sucesión de polinomios mónicos* $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ *que satisface*

1. *grad* $\Phi_n = n$*,* $n \geq 0$*,*
2. $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_{\mathcal{L}} = 0$*, para* $m \neq n$*,* $m, n \geq 0$*,*
3. $\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{K}_n$*,* $n \geq 0$*,*

donde $\boldsymbol{K}_n \neq 0$ *para todo* n*. Esta sucesión de polinomios se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos (****SPOM****) asociados a* $\mathcal{L}$*.*

Definición 2.1.3. *Si las submatrices principales* $(\boldsymbol{T}_n)_{n\geq 0}$ *de* $\boldsymbol{T}$ *tienen determinante positivo, entonces el funcional lineal* $\mathcal{L}$ *se dice definido positivo.*

Si $\mathcal{L}$ es definido positivo entonces podemos definir un producto interno y en consecuencia una norma

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = \|\Phi_n\|^2 = \mathbf{K}_n, \ \mathbf{K}_n > 0. \tag{2.3}$$

También, todo funcional definido positivo tiene una representación integral (no necesariamente única)

$$\langle \mathcal{L}, p(z) \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) d\sigma,$$

donde σ es una medida de Borel positiva, no trivial, con soporte en la circuferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Teorema 2.1.2. *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos satisface dos relaciones de recurrencia equivalentes*

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \ n \geq 0, \tag{2.4}$$

$$\Phi_{n+1}(z) = (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2) z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \ n \geq 0. \tag{2.5}$$

Estas últimas son denominadas relaciones de recurrencia ascendente y descendente, respectivamente, donde $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}_n(z^{-1})$ es llamado el polinomio recíproco. Los números complejos $\{\Phi_n(0)\}_{n\geq 1}$ se denominan coeficientes de reflexión o coeficientes de Verblunsky y tienen suma importancia en el estudio de los polinomios ortogonales en la circuferencia unidad. En el caso donde $\mathcal{L}$ sea definido positivo se tiene $|\Phi_n(0)| < 1$, para todo $n \geq 1$.
De (2.4) se puede deducir

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)}z\Phi_n(z), \tag{2.6}$$

porque al calcular el conjugado de (2.4) se deduce que

$$\overline{\Phi}_{n+1}(z^{-1}) = \frac{1}{z}\overline{\Phi}(z^{-1}) + \overline{\Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z)},$$

sustituyendo $\overline{\Phi}_n(z^{-1}) = \frac{\Phi_n^*(z)}{z^n}$ y $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi}(z^{-1})$ en el resultado se obtiene

$$\overline{\Phi}_{n+1}(z^{-1}) = \frac{\Phi_n^*(z)}{z^{n+1}} + \overline{\Phi_{n+1}(0)}\frac{z}{z^{n+1}}\Phi_n(z),$$

multiplicando por z^{n+1} se deduce (2.6).

De ahora en adelante asumiremos que el funcional $\mathcal{L}$ es definido positivo.
Sea σ una medida positiva no trivial de Borel con soporte en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, entonces existe una sucesión (ver [7]) $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortonormales

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots, \quad \kappa_n \geq 0,$$

que satisface

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}d\sigma(\theta) = \delta_{m,n}, \quad m,n \geq 0. \tag{2.7}$$

Los correspondientes polinomios mónicos están definidos por

$$\Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n},$$

donde κ_n es el coeficiente principal de $\varphi_n(z)$. El coeficiente principal está determinado por el determinante de dos matrices de Toeplitz

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{\det \mathbf{T}_{n-1}}{\det \mathbf{T}_n}}, \ n \geq 1,$$

y de este último resultado obtenemos

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{\kappa_n^2} = \frac{\det \mathbf{T}_n}{\det \mathbf{T}_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Por otro lado, el k-ésimo momento c_k asociado con la medida σ, está definido mediante

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\sigma(\theta), \quad k \in \mathbb{Z},$$

y el n-ésimo polinomio ortonormal está dado por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{T}_n \det \mathbf{T}_{n-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & c_{-(n-3)} & \cdots & c_1 \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \ n \geq 0,$$

con el convenio que $\det \mathbf{T}_{-1} = 1$.

Definición 2.1.4. *El kernel reproductor de orden n-ésimo asociado con $\{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ y $\{\Phi_n(z)\}_{n\geq 0}$ es*

$$K_n(z,y) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(y)}\varphi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{\Phi_k(y)}\Phi_k(z)}{\boldsymbol{K}_k},$$

con $\boldsymbol{K}_k = \|\Phi_k(z)\|^2 = \langle \Phi_k(z), \Phi_k(z)\rangle_{\mathcal{L}}$.

Teorema 2.1.3. *El kernel reproductor puede representarse de una manera simple en términos de los polinomios $\varphi_{n+1}(z)$ y $\varphi^*_{n+1}(z)$ usando la fórmula de Christoffel-Darboux (ver [10, 12])*

$$K_n(z,y) = \frac{\overline{\varphi^*_{n+1}(y)}\varphi^*_{n+1}(z) - \overline{\varphi_{n+1}(y)}\varphi_{n+1}(z)}{(1-\bar{y}z)}, \ n \geq 0, \ \bar{y}z \neq 1.$$

Para el caso cuasi-definido, se puede expresar en términos de los polinomios $\Phi_{n+1}(z)$ y $\Phi^*_{n+1}(z)$, mediante

$$K_n(z,y) = \frac{\overline{\Phi^*_{n+1}(y)}\Phi^*_{n+1}(z) - \overline{\Phi_{n+1}(y)}\Phi_{n+1}(z)}{\boldsymbol{K}_{n+1}(1-\bar{y}z)}, \ n \geq 0, \ \bar{y}z \neq 1.$$

El nombre viene del hecho de que, para cualquier polinomio $q_n(z)$ de grado a lo más n, tenemos

$$\overline{q_n(y)} = \int_{\mathbb{T}} K_n(z,y)\overline{q_n(z)}d\sigma(z).$$

por otro lado, también se tiene

$$\Phi^*_n(z) = \mathbf{K}_n K_n(z,0), \ n \geq 0.$$

La $i-$ésima derivada parcial de $K_n(z,y)$ con respecto a z y la $j-$ésima derivada parcial de $K_n(z,y)$ con respecto a y, se denota por

$$K_n^{(i,j)}(z,y) = \frac{\partial^{i+j} K_n(z,y)}{\partial z^i \partial y^j}.$$

Ejemplo 2.1.1. *Consideremos la medida normalizada de Lebesgue*

$$d\sigma(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Los momentos para esta medida son

$$\begin{aligned} c_n &= \bar{c}_{-n} \\ &= \langle \mathcal{L}, z^n \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 1, & si \quad n = 0, \\ 0, & si \quad n \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

y entonces la matriz de Toeplitz de orden $n+1$ *es*

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

y calculando el determinante de $\boldsymbol{T}_n$*, se obtiene que* $\det(\boldsymbol{T}_n) = 1 > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Por lo tanto su correspondiente sucesión de polinomios es*

$$\varphi_n(z) = \Phi_n(z) = z^n, \ n \geq 0,$$

y sus respectivos coeficientes de Verblunsky son $\Phi_n(0) = 0$*, para* $n \geq 1$*.*

2.2. Transformaciones espectrales lineales en la circunferencia unidad

Se considerarán algunas perturbaciones canónicas de medidas (ver [7] y [10]), las cuales son análogas a las perturbaciones definidas en la recta real.
En esta sección $\mathcal{L}$ es un funcional lineal definido positivo, asociado con una medida σ de Borel con soporte en la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definición 2.2.1. *Dada* $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *función analítica, diremos que* F *es una función de Carathéodory si y sólo si* $F(0) \in \mathbb{R}$ *y* $\mathfrak{Re}(F(z)) > 0$ *en* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

La función analítica de Carathéodory se puede representar en términos de los momentos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ asociados con σ en un entorno del origen, es decir, admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen, de la siguiente manera

$$F(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k. \tag{2.8}$$

Denominaremos a (2.8) función de Carathéodory asociada al funcional $\mathcal{L}$.

Ejemplo 2.2.1. *Consideremos la medida normalizada de Lebesgue. Según el ejemplo 2.1.1,* $c_0 = 1$ *y* $c_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$*, entonces*

$$F(z) = 1.$$

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos la medida*

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{\pi}(1+\cos\theta)d\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

cuyos respectivos momentos son

$$c_k = \begin{cases} 2, & si \quad k = 0, \\ 1, & si \quad k = 1 \text{ ó } k = -1, \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y entonces la función de Carathéodory es

$$F(z) = 2 + 2z.$$

También se puede observar que $\det(\boldsymbol{T}_n) = n + 2 > 0$ *para todo,* $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{L}$ es definido positivo, entonces $F(z)$ es analítica en $\mathbb{D}$ y $\mathfrak{Re}(F(z)) > 0$ en $\mathbb{D}$. En este caso $F(z)$ se puede representar mediante la transformación de Riesz-Herglotz de la medida positiva σ definida mediante (ver [6])

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma(\theta).$$

La medida σ puede descomponerse en una parte que es absolutamente continua con respecto a la medida normalizada de Lebesgue $\frac{d\theta}{2\pi}$ y una medida singular (ver [12]). Si denotamos por $\omega(\theta) = \sigma'$ la derivada de Radon-Nikodyn de σ respecto a la medida de Lebesgue y por σ_s la medida singular, entonces

$$d\sigma(\theta) = \omega(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\sigma_s(\theta). \tag{2.9}$$

También existe una relación entre la función de Caratheodory y la parte absolutamente continua $\omega(\theta)$ de la medida (ver [11]).
Si $\theta \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$$F(e^{i\theta}) \equiv \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}),$$

y por lo tanto

$$\omega(\theta) = \mathfrak{Re}F(e^{i\theta}). \tag{2.10}$$

La parte singular de la medida σ_s esta soportada en $\{\theta | \lim_{r\uparrow 1} \mathfrak{Re}(re^{i\theta}) = \infty\}$.

Dado un funcional lineal $\mathcal{L}$, algunas perturbaciones canónicas de una medida son:

1. La perturbación $d\tilde{\sigma}_C = |z-\xi|^2 d\sigma$, $|z| = 1, \xi \in \mathbb{C}$, es la llamada transformación canónica de Christoffel.

2. La perturbación $d\tilde{\sigma}_U = d\sigma + M_c\delta(z-\xi) + \overline{M}_c\delta(z-\overline{\xi}^{-1}), \xi \in \mathbb{C} - \{0\}, M_c \in \mathbb{C}$, es la llamada transformación canónica de Uvarov.

3. La perturbación $d\tilde{\sigma}_G = \frac{d\sigma}{|z-\xi|^2} + M_c\delta(z-\xi) + \overline{M}_c\delta(z-\overline{\xi}^{-1}), \xi \in \mathbb{C}-\{0\}, M_c \in \mathbb{C}, |\xi| \neq 1$, es la llamada transformación canónica de Geronimus.

Definición 2.2.2. *Se llamará transformación espectral racional de una función de Carathéodory $F(z)$, a una transformación de la forma*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}$$

donde $A(z), B(z), C(z)$ y $D(z)$ son polinomios que dependen de z, y $AD - BC \neq 0$. Si $C(z) = 0$, la transformación se dice lineal.

Las tres perturbaciones canónicas mencionadas anteriormente corresponden a transformaciones espectrales lineales de las correspondientes funciones de Carathéodory. Estas tres transformaciones corresponden, de una manera análoga, a las transformaciones definidas en el capítulo anterior para el caso real.
Las funciones de Carathéodory normalizadas correspondientes a las anteriores perturbaciones están dadas por (ver [10]).

1. Transformación canónica de Christoffel.

$$\tilde{F}_C(z) = \mathfrak{F}_C(\xi)[F(z)] = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \tag{2.11}$$

donde

$$A(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (1 + |\xi|^2)z - \overline{\xi}}{(1 + |\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1},$$
$$B(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (\xi c_1 - \overline{\xi}\overline{c}_1)z + \xi}{(1 + |\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1},$$
$$D(z) = z.$$

Ya que

$$F(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}z^k,$$

y por lo tanto

$$\widetilde{F}_C(z) = \widetilde{c}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{c}_{-k}z^k,$$

donde $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}$, $c_{-k} \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Sea $\widetilde{\mathcal{L}}_C$ la transformación canónica de Christoffel de $\mathcal{L}$ que satisface

$$\langle p, q\rangle_{\widetilde{\mathcal{L}}_C} = \langle (z - \xi)p, (z - \xi)q\rangle_{\mathcal{L}}, \quad \xi \in \mathbb{C}.$$

Calculando los momentos asociados con $\widetilde{\mathcal{L}}_C$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_{-k} &= \langle \widetilde{\mathcal{L}}_C, z^{-k}\rangle \\
&= \langle 1, z^k\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}} \\
&= \langle (z - \xi), (z - \xi)z^k\rangle_{\mathcal{L}} \\
&= \langle \mathcal{L}, z^{-k}\rangle + \langle \mathcal{L}, -\overline{\xi}z^{-(k-1)}\rangle + \langle \mathcal{L}, -\xi z^{-(k+1)}\rangle + \langle \mathcal{L}, |\xi|^2 z^{-k}\rangle \\
&= c_{-k} - \overline{\beta}c_{-(k-1)} - \xi c_{-(k+1)} + |\xi|^2 c_{-k} \\
&= (1 + |\xi|^2)c_{-k} - \xi c_{-(k+1)} - \overline{\xi}c_{-(k-1)}, \ k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

en particular tenemos $\widetilde{c}_0 = (1+|\xi|^2)c_0 - \xi c_{-1} - \overline{\xi}c_1$.
Sustituyendo $\widetilde{c}_0$ y $\widetilde{c}_{-k}$ en $\widetilde{F}_C(z)$,

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_C(z) &= (1+|\xi|^2)c_0 - \xi c_{-1} - \overline{\xi}c_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left((1+|\xi|^2)c_{-k} - \xi c_{-(k+1)} - \overline{\xi}c_{-(k-1)}\right)z^k \\ &= (1+|\xi|^2)F(z) - \overline{\xi}(c_1 + z(F(z)+c_0)) - \xi(c_{-1} + \frac{1}{z}(F(z) - c_0 - 2c_{-1}z)),\end{aligned}$$

y agrupando el término $F(z)$, se tiene

$$\widetilde{F}_C(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (1+|\xi|^2)z - \overline{\xi}}{z}F(z) + \frac{-\overline{\xi}z^2c_0 + (\xi c_1 - \overline{\xi}\overline{c}_1)z + \xi c_0}{z}.$$

Si hacemos $\widetilde{c}_0 = 1$,

$$\widetilde{F}_C(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (1+|\xi|^2)z - \overline{\xi}}{z((1+|\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1))}F(z) + \frac{-\overline{\xi}z^2 + (\xi c_1 - \overline{\xi}\overline{c}_1)z + \xi}{z((1+|\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1))}.$$

Este último resultado corresponde a la transformación canónica de Christoffel.
Aqui $\widetilde{F}_C$ representa la pertubación de la medida de probabilidad σ

$$d\widetilde{\sigma}_C = \frac{|z-\xi|^2}{(1+|\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1}d\sigma. \tag{2.12}$$

Se puede observar que $\widetilde{\sigma}_C$ también es una medida de probabilidad.

2. Transformación canónica de Uvarov.

$$\tilde{F}_U(z) = \mathfrak{F}_U(\xi, M_c) = F(z) + \frac{B(z)}{D(z)}, \tag{2.13}$$

donde

$$B(z) = (\xi - \overline{\xi}z^2)(M_c + \overline{M}_c) - (1-|\xi|^2)(M_c - \overline{M}_c)z,$$
$$D(z) = (z-\xi)(\overline{\xi}z - 1).$$

Para ver esto, sea $\widetilde{\mathcal{L}}_U$ la transformación canónica de Uvarov de $\mathcal{L}$ que satisface

$$\langle p(z), q(z)\rangle_{\widetilde{\mathcal{L}}_U} = \langle\widetilde{\mathcal{L}}_U, p(z)\overline{q(z)}\rangle + M_c\langle\delta(z-\xi), p(z)\overline{q(z)}\rangle + \overline{M}_c\langle\delta(z-\overline{\xi}^{-1}), p(z)\overline{q(z)}\rangle,$$

con $\xi \in \mathbb{C}$.
Calculando los momentos asociados con $\widetilde{\mathcal{L}}_U$ se obtiene,

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_{-k} &= \langle\widetilde{\mathcal{L}}_U, z^{-k}\rangle \\ &= \langle\mathcal{L}, z^{-k}\rangle + M_c\langle\delta(z-\xi), z^{-k}\rangle + \overline{M}_c\langle\delta(z-\overline{\xi}^{-1}), z^{-k}\rangle \\ &= c_{-k} + M_c\xi^{-k} + \overline{M}_c\overline{\xi}^k,\end{aligned}$$

y en particular,

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_0 &= \langle\widetilde{\mathcal{L}}_U, 1\rangle \\ &= \langle\mathcal{L}, 1\rangle + M_c\langle\delta(z-\xi), 1\rangle + \overline{M}_c\langle\delta(z-\overline{\xi}^{-1}), 1\rangle \\ &= c_0 + M_c + \overline{M}_c,\end{aligned}$$

sustituyendo $\widetilde{c}_0$ y $\widetilde{c}_{-k}$ en $\widetilde{F}_U(z)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_U(z) &= c_0 + M_c + \overline{M}_c + 2\sum_{k=1}^{\infty}(c_{-k} + M_c\xi^{-k} + \overline{M}_c\overline{\xi}^{k})z^k \\
&= F(z) + M_c\left(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k\right) + \overline{M}_c\left(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}(\overline{\xi}z)^k\right) \\
&= F(z) + M_c\left(-1 + \frac{2\xi}{\xi - z}\right) + \overline{M}_c\left(-1 + \frac{2}{1 - \overline{\xi}z}\right) \\
&= F(z) + M_c\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) + \overline{M}_c\left(\frac{1 + \overline{\xi}z}{1 - \overline{\xi}z}\right) \\
&= F(z) + \frac{\xi(\overline{M}_c + M_c) + (1 - |\xi|^2)(M_c - \overline{M}_c)z - \overline{\xi}(\overline{M}_c + M_c)z^2}{(z - \xi)(\overline{\xi}z - 1)} \\
&= F(z) + \frac{(\xi - \overline{\xi}z^2)(\overline{M}_c + M_c) + (1 - |\xi|^2)(M_c - \overline{M_c})z}{(z - \xi)(\overline{\xi}z - 1)},
\end{aligned}$$

Este último resultado corresponde a la transformación canónica de Uvarov. Aqui $\widetilde{F}_U$ representa la pertubación de la medida de probabilidad σ

$$d\tilde{\sigma}_U = d\sigma + M_c\delta(z - \xi) + \overline{M}_c\delta(z - \overline{\xi}^{-1}).$$

3. Transformación canónica de Geronimus.

$$\tilde{F}_G(z) = \mathfrak{F}_G(\xi, M_c) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \tag{2.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= z, \\
D(z) &= -\overline{\xi}z^2 + (1 + |\xi|^2)z - \xi, \\
B(z) &= \overline{\xi}z^2 - 2i\mathfrak{Im}(q_0)z - \xi,
\end{aligned}$$

y q_0 es un parámetro libre definido por $q_0 = \tilde{c}_0 - \bar{\xi}\tilde{c}_1$. Calculando el $k-$ésimo momento, tenemos

$$\begin{aligned}
c_k &= \langle z^k, 1\rangle_{\mathcal{L}} \\
&= \langle z^k(z - \xi), z - \xi\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}} \\
&= \tilde{c}_k - \bar{\xi}\tilde{c}_{k+1} - \xi\tilde{c}_{k-1} + \tilde{c}_k|\xi|^2 \\
&= \tilde{c}_k(1 + |\xi|^2) - \bar{\xi}\tilde{c}_{k+1} - \xi\tilde{c}_{k-1},\ k \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $s_k = \frac{c_k}{\xi^k}$ y $q_k = \frac{\tilde{c}_k}{\xi^k} - \frac{\tilde{c}_{k-1}}{\xi^{k-1}}$, entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$s_k = q_k - |\xi|^2 q_{k+1},\ k \geq 0,$$

y, en consecuencia,

$$q_k = \frac{q_0 - c_0 - \bar{\xi}c_1 - \cdots - \bar{\xi}^{k-1}c_{k-1}}{|\xi|^{2k}},\ k \geq 1, \tag{2.15}$$

así como

$$q_0 = \tilde{c}_0 - \xi\tilde{c}_1,$$
$$q_1 = \frac{q_0 - c_0}{|\xi|^2} = \frac{\tilde{c}_1}{\xi} - \tilde{c}_0.$$

Luego, q_0 es un parámetro libre. Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 - \bar{\xi}\tilde{c}_1 &= \bar{q}_0, \\ \tilde{c}_0 - \frac{\tilde{c}_{-1}}{\xi} &= \frac{c_0 - q_0}{|\xi|^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

y

$$\left(1 - |\xi|^2\right)\tilde{c}_0 = 2\mathfrak{Re}(q_0) - c_0,$$

es decir, $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}$. Si asumimos $|\xi| > 1$, de (2.16) obtenemos $\tilde{c}_1$. Por otra parte de (2.15),

$$\frac{\tilde{c}_k}{\xi^k} = \tilde{c}_0 + \sum_{j=1}^{k} q_j, \ k \geq 2.$$

Por lo tanto, tenemos un grado de libertad que es la elección de q_0.
Por otro lado si multiplicamos c_k por z^k, $k \geq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(z) &= \tilde{c}_0\left(1 + |\xi|^2\right) - \overline{\xi}\tilde{c}_1 - \xi\overline{\tilde{c}}_1 + 2\left(1 + |\xi|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{c}_{-k}z^k \\ &\quad - 2\bar{\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{c}_{-k+1}z^k - 2\xi\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{c}_{-k-1}z^k \\ &= \left(1 + |\xi|^2\right)\tilde{F}_G(z) - \bar{\xi}\left(\tilde{c}_1 + 2z\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_{-k}z^k\right) - \xi\left(\tilde{c}_1 + \frac{2}{z}\sum_{k=2}^{\infty}\tilde{c}_{-k}z^k\right) \\ &= \left(1 + |\xi|^2\right)\tilde{F}_G(z) - \xi\left(\tilde{c}_1 + \frac{1}{z}(\tilde{F}_G(z) - \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1 z)\right) - \bar{\xi}(\bar{c}_1 + z(\tilde{c}_0 + \tilde{F}_G(z))) \\ &= \left(1 + |\xi|^2\right)\tilde{F}_G(z) + \xi\left(\tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_0}{z}\right) - \frac{\xi}{z}\tilde{F}_G(z) - \bar{\xi}(\bar{c}_1 + \tilde{c}_0 z) - \bar{\xi}z\tilde{F}_G(z) \\ &= \left(1 + |\xi|^2 - \frac{\xi}{z} - \bar{\xi}z\right)\tilde{F}_G(z) + \xi\tilde{c}_1 - \bar{\xi}\overline{\tilde{c}}_1 + \tilde{c}_0\left(\frac{\xi}{z} - \bar{\xi}z\right) \\ &= \left(1 + |\xi|^2 - \frac{\xi}{z} - \bar{\xi}z\right)\tilde{F}_G(z) + \overline{\tilde{c}}_0 - q_0 - \tilde{c}_0 + \bar{q}_0 + \tilde{c}_0\left(\frac{\xi}{z} - \bar{\xi}z\right). \end{aligned}$$

Al despejar $\tilde{F}(z)$, hacer $\tilde{c}_0 = 1$ y $2i\mathfrak{Im} = q_0 - \bar{q}_0$, se tiene

$$\tilde{F}_G(z) = \frac{zF(z) + \bar{\xi}z^2 - 2i\mathfrak{Im}(q_0)z - \xi}{-\bar{\xi}z^2 + (1 + |\xi|^2)z - \xi}. \tag{2.17}$$

Este último resultado corresponde a la transformación canónica de Geronimus.
De 2.17, $\tilde{F}_G(z)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$\tilde{F}_G(z) = \frac{zF(z)}{-\bar{\xi}z^2 + (1 + |\xi|^2)z - \xi} + M_r\frac{\xi + z}{\xi - z} + \bar{M}_r\frac{1 + \bar{\xi}z}{1 - \bar{\xi}z},$$

donde $M_r = \frac{1}{2}\frac{2q_0 - c_0}{1 - |\xi|^2}$.

La transformación de Uvarov puede expresarse como una composición de las transformaciones de Christoffel y Geronimus (ver [6]). De hecho,

- $\mathfrak{F}_G(\xi, M_c) \circ \mathfrak{F}_C(\xi) = \mathfrak{F}_U(\xi, M_c)$,
- $\mathfrak{F}_C(\xi) \circ \mathfrak{F}_G(\xi, M_c) = \mathfrak{I}$ (transformación identidad).

Ejemplo 2.2.3. *Consideremos la medida*

$$d\sigma(\theta) = |z-1|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

es decir, una transformación de Christoffel de la medida normalizada de Lebesgue con parámetro 1 (ver [9]). Su correspondiente ***SPOM*** *con respecto a σ, está dada por*

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{z-1}\left(z^{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} z^j\right),\ n \geq 1,$$

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{z-1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} z^{j+1}\right),\ n \geq 1,$$

y por lo tanto

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1},\ n \geq 1.$$

Ejemplo 2.2.4. *En el ejemplo 2.2.1 se mostró que la función de Carathéodory para la medida normalizada de Lebesgue es $F(z) = 1$. Ahora supongamos que realizamos una transformación de Christoffel a esta medida con parámetro $\xi = 1$, entonces de acuerdo a la ecuación (2.12) la medida perturbada es*

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}(\theta) &= \frac{|z-1|^2}{1+|1|^2} d\sigma(\theta) \\ &= \frac{|z-1|^2}{2}\frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

Por un lado, la transformación canónica de Christoffel de acuerdo a (2.11) es

$$A(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (1+|\xi|^2)z - \overline{\xi}}{(1+|\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1} = \frac{-z^2+2z-1}{2},$$

$$B(z) = \frac{-\overline{\xi}z^2 + (\xi c_1 - \overline{\xi}\overline{c}_1)z + \xi}{(1+|\xi|^2) - 2\mathfrak{Re}\xi c_1} = \frac{-z^2+1}{2},$$

$$D(z) = z.$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{F}_C(z) &= \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)} \\ &= 1 - z. \end{aligned}$$

Por otro lado, si calculamos directamente los momentos de la medida perturbada

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}(\theta) &= \frac{|z-1|^2}{4\pi} d\theta \\ &= \frac{(z-1)(\bar{z}-1)}{4\pi} d\theta \\ &= (1-\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } k = 1 \text{ ó } k = -1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces la función de Carathéodory es

$$\begin{aligned} \tilde{F}_C(z) &= \tilde{c}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k} z^k \\ &= 1 - z. \end{aligned}$$

Podemos ver que utilizando ambos enfoques se obtiene la misma función de Carathédory, como era de esperarse.

2.3. Perturbación de una subdiagonal de la matriz de Toeplitz

Si se desea perturbar el j-ésimo momento c_j de la matriz de Toeplitz se usarán las siguientes definiciones (ver [2]).

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{L}$ un funcional lineal Hermitiano definido en Λ y sea $\mathcal{L}_j$ un funcional lineal tal que el funcional bilineal asociado satisface*

$$\langle p(z), q(z)\rangle_{\mathcal{L}_j} = \langle p(z), q(z)\rangle_{\mathcal{L}} + M_j\langle z^j p(z), q(z)\rangle_{\mathcal{L}_\theta} + \overline{M}_j\langle p(z), z^j q(z)\rangle_{\mathcal{L}_\theta}, \tag{2.18}$$

donde $M_j \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{P}$, $q \in \mathbb{P}$, $j \in \mathbb{N}$ es un número fijo, y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}_\theta}$ es el funcional bilineal asociado con la medida normalizada de Lebesgue en la circunferencia unidad.

Si $\mathcal{L}$ es un funcional definido positivo, entonces la transformación anterior puede expresarse en términos de su correspondiente medida, dada por

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma}_j &= d\sigma + M_j z^j \frac{d\theta}{2\pi} + \overline{M}_j z^{-j}\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= d\sigma + 2\mathfrak{Re}(M_j z^j)\frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.18) se puede concluir que

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \langle \widetilde{\mathcal{L}}_j, z^k \rangle \\ &= \langle z^k, 1 \rangle_{\widetilde{\mathcal{L}}_j} \\ &= \begin{cases} c_k, & \text{si} \quad k \notin \{j, -j\}, \\ c_{-j} + M_j, & \text{si} \quad k = -j, \\ c_j + \overline{M}_j, & \text{si} \quad k = j, \end{cases}\end{aligned} \tag{2.20}$$

ya que

$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \langle z^k, 1 \rangle_{\mathcal{L}} + M_j \langle z^j z^k, 1 \rangle_{\mathcal{L}_\theta} + \overline{M}_j \langle z^k, z^j \rangle_{\mathcal{L}_\theta} \\ &= c_k + M_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(j+k)} \frac{d\theta}{2\pi} + \overline{M}_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(k-j)} \frac{d\theta}{2\pi},\end{aligned}$$

y entonces

- si $k \notin \{j, -j\}$,
$$\tilde{c}_k = c_k,$$
- si $k = -j$,
$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \langle z^{-j}, 1 \rangle_{\mathcal{L}} + M_j \langle z^j z^{-j}, 1 \rangle_{\mathcal{L}_\theta} + \overline{M}_j \langle z^{-j}, z^j \rangle_{\mathcal{L}_\theta} \\ &= c_{-j} + M_j \int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{d\theta}{2\pi} + \overline{M}_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\theta j} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= c_{-j} + M_j,\end{aligned}$$
- si $k = j$,
$$\begin{aligned}\tilde{c}_k &= \langle z^j, 1 \rangle_{\mathcal{L}} + M_j \langle z^j z^j, 1 \rangle_{\mathcal{L}_\theta} + \overline{M}_j \langle z^j, z^j \rangle_{\mathcal{L}_\theta} \\ &= c_j + M_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i\theta j} \frac{d\theta}{2\pi} + \overline{M}_j \int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= c_j + \overline{M}_j.\end{aligned}$$

En otras palabrras, $\mathcal{L}_j$ es un funcional que perturba solamente los momentos c_j y c_{-j} de la sucesión de momentos asociada a $\mathcal{L}$. Es decir, La matriz de Toeplitz asociada con el funcional $\mathcal{L}_j$ es igual a la asociada a $\mathcal{L}$ excepto por el j-ésimo y $-j$-ésimo momento que

es igual a $c_j + \overline{M}_j$ y $c_{-j} + M_j$ respectivamente, es decir

$$\widetilde{\mathbf{T}}_n = \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_j + \overline{M}_j & c_{j+1} & \cdots & c_n \\ c_{-1} & \cdots & c_{j-1} & c_j + \overline{M}_j & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-j} + M_j & c_{-j+1} & \dots & c_0 & \cdots & c_{n-j} \\ c_{-j-1} & c_{-j} + M_j & \dots & c_{-1} & \cdots & c_{n-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_{-n+j} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{T}_n + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overline{M}_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{M}_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_j & 0 & \dots & & \cdots & 0 \\ 0 & M_j & \dots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

La función de Caratheódory asociada a $\mathcal{L}_j$ es

$$\widetilde{F}_j(z) = F(z) + 2M_j z^j, \tag{2.21}$$

ya que

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_j(z) &= \widetilde{c}_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{c}_{-k} z^k \\ &= \widetilde{c}_0 + 2(\widetilde{c}_1 z + \cdots + \widetilde{c}_j z^j + \cdots) \\ &= c_0 + 2(c_1 z + \cdots + c_j z^j + M_j z^j + \cdots) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k + 2M_j z^j \\ &= F(z) + 2M_j z^j. \end{aligned}$$

Esta es una transformación espectral lineal de la función de Carathéodory $F(z)$ y tiene la forma

$$\widetilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$A(z) = D(z) = 1 \text{ y } B(z) = 2M_j z^j.$$

Ejemplo 2.3.1. *En el ejemplo 2.2.1, se mostró que la función de Carathéodory para la medida normalizada de Lebesgue es*

$$F(z) = 1,$$

y según la ecuación (2.21)

$$\widetilde{F}_j(z) = 1 + 2M_j z^j.$$

Ejemplo 2.3.2. *En el ejemplo 2.2.4, se mostró que la función de Carathéodory para la medida*

$$d\sigma(\theta) = \frac{|z-1|^2}{4\pi} d\theta,$$

es

$$F(z) = 1 - z,$$

entonces

$$\widetilde{F}_j(z) = 1 - z + 2M_j z^j.$$

Suponga que $\mathcal{L}$ es un funcional lineal definido positivo y $\{\Phi_n(z)\}_{n\geq 0}$ su correspondiente **SPOM**. Ahora procedemos a determinar las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{L}_j$ sea un funcional cuasi-definido, así como la relación entre $\{\Phi_n(z)\}_{n\geq 0}$ y $\{\Psi_n(z)\}_{n\geq 0}$, la **SPOM** con respecto a $\mathcal{L}_j$.

Proposición 2.3.1. *[2] Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\mathcal{L}_j$ es un funcional lineal cuasi-definido.*
2. *La matriz $\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{S}_n$ es no singular, y*

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_n = \boldsymbol{K}_n + \boldsymbol{W}_n^T(0)(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{S}_n)^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}_n(0)} + \overline{M}_j \overline{\frac{\Phi_n^{(n-j)}(0)}{(n-j)!}} \neq 0,\ n \geq 1,$$

$$\boldsymbol{W}_n(0) = [\Upsilon_n(0) - \overline{M}_j n! \boldsymbol{C}_{(0,n-1;n)}],$$

$$\boldsymbol{Y}_n(0) = [\overline{M}_j \frac{\Phi_n^{(j)}(0)}{j!}, \ldots, \overline{M}_j \frac{\Phi_n^{(2j-1)}(0)}{(2j-1)!}, \overline{M}_j \frac{\Phi_n^{(2j)}(0)}{(2j)!} + M_j \frac{\Phi_n^{(0)}(0)}{(0)!}, \ldots, \overline{M}_j \frac{\Phi_n^{(n)}(0)}{(n)!} +$$
$$M \frac{\Phi_n^{(n-2j)}(0)}{(n-2j)!}, M_j \frac{\Phi_n^{(n-2j+1)}(0)}{(n-2j+1)!}, \ldots, M_j \frac{\Phi_n^{(n-j-1)}(0)}{(n-j-1)!}]^T,$$
$$\Upsilon_n(0) = [\Phi_n(0), \Phi_n^{(1)}(0), \ldots, \Phi_n^{(n-1)}(0)]^T$$

y

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{bmatrix} M_j \boldsymbol{A}_{(0,j-1;0,j-1)} & \boldsymbol{B}_{(0,j-1;j,n-j-1)} & \bar{M}_j \boldsymbol{C}_{(0,j-1;n-j,n-1)} \\ M_j \boldsymbol{A}_{(j,n-j-1;0,j-1)} & \boldsymbol{B}_{(j,n-j-1;j,n-j-1)} & \bar{M}_j \boldsymbol{C}_{(j,n-j-1;n-j,n-1)} \\ M_j \boldsymbol{A}_{(n-j,n-1;0,j-1)} & \boldsymbol{B}_{(n-j,n-1;j,n-j-1)} & \bar{M}_j \boldsymbol{C}_{(n-j,n-1;n-j,n-1)} \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son matrices cuyos elementos están dados por
$a_{s,l} = \frac{K_{n-1}^{(s,l+j)}(0,0)}{(l)!(l+j)!}$,

$b_{s,l} = M_j \frac{K_{n-1}^{(s,l+j)}(0,0)}{(l)!(l+j)!} + \overline{M}_j \frac{K_{n-1}^{(s,l-j)}(0,0)}{(l)!(l+j)!}$,

$c_{s,l} = \frac{K_{n-1}^{(s,l-j)}(0,0)}{(l)!(l-j)!}$.

*Además, $\{\Psi_n\}_{n\geq 0}$, la correspondiente **SPOM** con respecto a $\mathcal{L}_j$, está dada por*

$$\Psi_n(z) = A_n(z)\Phi_n(z) + B_n(z)\Phi_n^*(z), \quad n \geq 1,$$

con

$$A_n(z) = 1 + \frac{1}{\boldsymbol{K}_n}\boldsymbol{W}_n^T(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{S}_n)^{-1}\boldsymbol{D}_n\tau(\Phi_n(z);0) + \bar{M}_j\frac{T^*_{n-j}(\Phi_n(z);0)}{\boldsymbol{K}_n},$$

$$B_n(z) = -\frac{1}{\boldsymbol{K}_n}\boldsymbol{W}_n^T(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{S}_n)^{-1}\boldsymbol{D}_n\tau(\Phi^*_n(z);0) - \bar{M}_j\frac{T^*_{n-j}(\Phi^*_n(z);0)}{\boldsymbol{K}_n},$$

y
$\tau(\Phi_n(z);0) = [M_jT^*_j(\Phi_n(z);0),\ldots,M_jT^*_{2j-1}(\Phi_n(z);0), M_jT^*_{2j}(\Phi_n(z);0)+$
$\overline{M}_jT^*_0(\Phi_n(z);0),\ldots M_jT^*_{n-1}(\Phi_n(z);0) + \overline{M}_jT^*_{n-2j-1}(\Phi_n(z);0), \overline{M}_jT^*_{n-2j}(\Phi_n(z);0),$
$\ldots \overline{M}_jT^*_{n-j-1}(\Phi_n(z);0)]^T,$
donde $T_j(\Phi_n(z);0)$ *es el* $j-$*ésimo polinomio de Taylor asociado a* $\Phi_n(z)$ *en el punto* $z = 0$.

La demostración se puede ver en [2] pag. 9-13.

CAPÍTULO 3

Transformación de Szegő

Este capítulo está dedicado a la transformación de Szegő, que establece una relación entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y ciertas medidas soportadas en la circunferencia unidad.
De igual manera, existe una relación entre los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para polinomios ortogonales en la recta real y los parámetros de Verblunsky asociados a la correspondiente medida soportada en la circunferencia unidad. Se muestra una manera sencilla de calcular dichos parámetros de Verblunsky, que está relacionada con la factorización LU de la matriz de Jacobi asociada con la medida en la recta real.
Por otra parte, se muestra de manera explícita la relación que existe entre la función de Stieltjes y la función de Carathéodory asociadas a medidas soportadas en la recta real y la circunferencia unidad, respectivamente.

3.1. Transformación de Szegő

A partir de una medida de Borel α no trivial, positiva, con soporte en $[-1, 1]$ podemos definir una medida σ de Borel, no trivial, positiva, con soporte en $[-\pi, \pi]$ mediante

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{2}|d\alpha(\cos\theta)|, \tag{3.1}$$

de tal forma que si $d\alpha(x) = \omega(x)dx$, entonces

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{2}\omega(\cos\theta)|\sin\theta|d\theta. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1.1. *Si consideramos la medida*

$$d\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

entonces

$$\begin{aligned} d\sigma(\theta) &= \frac{1}{2}\omega(\cos\theta)|\sin\theta|d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}|\sin\theta|d\theta \\ &= \frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

Observe que tomamos la medida de los polinomios de Chebyshev de primera especie cuyo soporte es $[-1,1]$ *y al aplicar la relación (3.1), se generó la medida normalizada de Lebesgue en el circunferencia unidad.*

Si α es una medida de probabilidad, es decir, $\int_{-1}^{1} d\alpha(x) = 1$, entonces σ es también una medida de probabilidad en la circunferencia unidad, ya que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}|d\alpha(\cos\theta)| \\ &= 2\int_{-\pi}^{0} \frac{1}{2}d\alpha(\cos\theta) \\ &= \int_{-1}^{1} d\alpha(x) \\ &= 1, \end{aligned}$$

y en este caso existe una sucesión de polinomios ortonormales que satisface (2.7), así como los correspondientes polinomios mónicos. En este caso, los coeficientes de Verblunsky satisfacen la condición

$$\Phi(0) \in (-1,1), \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Existe una relación entre los polinomios ortogonales asociados a una medida α en $[-1,1]$ y los polinomios ortogonales asociados con la medida σ definida por (3.1), con soporte en la circunferencia unidad.

Teorema 3.1.1. *[14] La sucesión de polinomios ortonormales* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *en la circunferencia unidad asociados con la medida* σ *(tal como se definió en (3.1)) tiene coeficientes reales. Además si* $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$*, entonces*

$$p_n(x) = \frac{\kappa_{2n}}{(2\sqrt{1+\Phi_{2n}(0)})}[z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)],$$

donde $\Phi_n(z) = \varphi_n(z)/\kappa_n$ *(es decir el correspondiente polinomio ortogonal mónico) y* κ_n *es el coeficiente principal de* $\varphi_n(z)$*.*

Por otra parte, los coeficientes de la relaciones de recurrencia de los polinomios en la recta real (1.3), están relacionados con los coeficientes de Verblunsky de las relaciones (2.4) y (2.5), de la siguiente manera

Teorema 3.1.2. *[14] Los coeficientes de la relación de recurrencia para la medida* α *en* $[-1,1]$*, y los coeficientes de Verblunsky* $\Phi_n(0)$ *para la medida* σ *sobre la circunferencia*

unidad, correspondiente a α, están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$2a_n = \sqrt{[1-\Phi_{2n}(0)][1-\Phi_{2n-1}^2(0)][1+\Phi_{2n-2}(0)]},\ n \geq 1, \tag{3.3}$$

$$2b_n = \Phi_{2n-1}(0)[1-\Phi_{2n}(0)] - \Phi_{2n+1}(0)[1+\Phi_{2n}(0)],\ n \geq 0. \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos la medida normalizada de Lebesgue $d\sigma(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$. En el ejemplo 2.1.1 se encontró que la sucesión de polinomios ortonormales es*

$$\varphi_n(z) = \Phi_n(z) = z^n,\ n \geq 0,$$

y los coeficientes de Verblunsky son $\Phi_n(0) = 0$ para $n \geq 1$ y además $\Phi_0(0) = 1$. Según las ecuaciones (3.3) y (3.4) los coeficientes de la sucesión de recurrencia son

$$a_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & si \quad n = 1, \\ \\ \frac{1}{2}, & si \quad n > 1, \end{cases}$$

y $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la matriz de Jacobi es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \ddots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

En [7] se puede ver que esta matriz de Jacobi, corresponde a los polinomios de Tchebysheff de primera especie, asociado con la medida $d\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \omega(x)dx$, tal como se mostró en el ejemplo 3.1.1.

Dado que los momentos $\{c_n\}_{n\geq 0}$ son reales (por el teorema (3.1.1)), $F(z)$, la función de Carathéodory asociada a σ tiene coeficientes reales. Por tanto, tenemos

$$\mathfrak{Re}F(e^{i\theta}) = \mathfrak{Re}F(e^{i(2\pi-\theta)}),$$

y entonces $d\sigma(\theta) + d\sigma(2\pi - \theta) = 0$. De esta manera, existe una sencilla relación entre la función de Stieltjes y Carathéodory asociadas con α y σ, respectivamente,

$$F(z) = \frac{1-z^2}{2z}\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{x-t} = \frac{1-z^2}{2z}S(x), \tag{3.5}$$

donde $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $z = x + \sqrt{x^2-1}$, (ver [11]). En la literatura, esta relación se conoce como transformación de Szegő.

3.2. Factorización LU

Definamos la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, mediante

$$u_n = \frac{1}{2}(1-\Phi_n(0))(1+\Phi_{n-1}(0)). \tag{3.6}$$

Usando las ecuaciones (3.3) y (3.4), obtenemos

$$a_n^2 = u_{2n}u_{2n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n + 1 = u_{2n} + u_{2n+1}, \quad n \geq 0,$$

y, entonces, tenemos una factorización de la forma (ver [7])

$$\tilde{J} + I = LU$$

donde I es la matriz identidad, y L y U son matrices bidiagonales inferior y superior, respectivamente, con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_4 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & u_6 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

y

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_5 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & u_7 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Así, de (3.6), tenemos

$$\Phi_k(0) = 1 - \frac{2u_k}{1 + \Phi_{k-1}(0)}.$$

Por lo tanto, obtenemos una sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ que podemos utilizar para determinar de una manera sencilla los coeficientes de Verblunsky $\{\Phi_k(0)\}_{k\geq 1}$ de la medida σ soportada en la circunferencia unidad.

Ejemplo 3.2.1. *Consideremos los polinomios de Tchebicheff de tercera especie* ($\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$)*, en [7] se puede ver que*

$$b_0 = -\frac{1}{2},\ b_n = 0,\ n \geq 1,\ y\ a_n^2 = \frac{1}{4},\ n \geq 1,$$

así que

$$\tilde{J} + I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/4 & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Calculando la factorización LU de la anterior matriz, obtenemos que $u_n = \frac{1}{2}$, para $n \geq 1$, y de (3.6) concluimos que

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Según el ejemplo 2.2.3, corresponde a la transformación de Christoffel de la medida normalizada de Lebesgue, es decir

$$d\sigma(\theta) = |z-1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Recuerde nuevamente que la medida en la circunferencia unidad se hubiera podido obtener a partir de $d\alpha(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{\pi}$ *por medio de (3.2), así*

$$\begin{aligned} d\sigma(\theta) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}|\sin\theta|\frac{d\theta}{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}|\sin\theta|\frac{d\theta}{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}(1-\cos\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}|1-z|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}|z-1|^2 d\theta. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

Análisis de perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő

Es este capítulo se analizará el tipo de transformación que se obtiene en la circunferencia unidad por medio de su función de Carathéodory cuando aplicamos la transformación Szegő (3.5) a algunas funciones de Stieltjes asociadas a una medida $\alpha(x)$, cuyo soporte se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$.
En la primera parte se tomará la función de Stieltjes que se obtuvo en la sección 1.3 de perturbar solo el j-ésimo momento, en esta construcción se usó la base $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots\}$, al hacer $a = 0$ se puede usar la Transformación de Szegő para analizar lo que le sucede a los momentos en la circunferencia unidad asociados a la medida generada. También hablaremos de la parte absolutamente continua con respecto a la medida normalizada de Lebesgue de la medida en la circunferencia unidad, luego mostraremos algunos ejemplos.
En la segunda parte se construirá un funcional en la base canónica, el cuál perturba desde el momento j en adelante, en consecuencia obtenemos una nueva función de Stieltjes a la cual le aplicaremos la transformación de Szegő para analizar el comportamiento de los momentos en la circunferencia unidad y la parte absolutamente continua de la medida.

4.1. Análisis de la perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő cuando se perturba solo el momento j-ésimo en $[-1, 1]$

En la sección 1.3 se construyó la función de Stieltjes $\tilde{S}_j(x)$ (1.13),

$$\tilde{S}_j(x) = S(x) + \frac{m_j}{(x-a)^{j+1}}, \tag{4.1}$$

donde $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{(x-a)^{k+1}}$, que se obtiene al perturbar solo el $j-$ésimo momento, en la base $\{1, (x-a), (x-a)^2, \cdots\}$. Su correspondiente medida segun (1.9) es

$$d\tilde{\alpha}_j = d\alpha + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)} \delta(x-a). \tag{4.2}$$

4.1.1. Aplicación de la transformación de Szegő

En esta primera parte del trabajo analizaremos lo que le sucede a los momentos de la matriz de Toeplitz cuando se perturba el momento j-ésimo de la matriz de Hankel agregándole una masa m_j, es decir, que sucede con las subdiagonales de la matriz de Toeplitz si se perturba una antidiagonal de la matriz Hankel, por medio de la transformación de Szegő.
Para poder aplicar la transformación de Szegő a (4.1) hay que tomar $a = 0$,[1] así la nueva función de Stieltjes es

$$\tilde{S}_j(x) = S(x) + \frac{m_j}{x^{j+1}}, \tag{4.3}$$

donde

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}},$$

esta última igualdad se tiene por la ecuación (1.7). La correspondiente medida con soporte en $[-1, 1]$, está definida por la ecuación (1.9)

$$\tilde{\alpha}_j = d\alpha + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)} \delta(x - 0). \tag{4.4}$$

Ahora, aplicando la transformación de Szegő (3.5), entre $\tilde{S}_j(x)$ y $F_j(z)$ para el $j-$ésimo momento, tenemos que

$$\tilde{F}_j(z) = \frac{1 - z^2}{2z} \tilde{S}_j(x), \tag{4.5}$$

y sustituyendo (4.3) en (4.5)

$$\tilde{F}_j(z) = \frac{1 - z^2}{2z} \left(S(x) + \frac{m_j}{x^{j+1}} \right).$$

De (4.5) y la ecuación anterior, $\widetilde{F}_j(z)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j(z) &= \frac{1 - z^2}{2z} \left(\frac{2z}{1 - z^2} F(z) + \frac{m_j}{x^{j+1}} \right) \\ &= F(z) + \frac{1 - z^2}{2z} \frac{m_j}{(\frac{z+z^{-1}}{2})^{j+1}} \\ &= F(z) + \frac{1 - z^2}{2z} \frac{m_j}{(\frac{z+z^{-1}}{2})^{j+1}}, \end{aligned}$$

y organizando se concluye que

$$\tilde{F}_j(z) = F(z) + \frac{2^j m_j z^j (1 - z^2)}{(z^2 + 1)^{j+1}}. \tag{4.6}$$

De (4.6) podemos averiguar cómo son los momentos generados en la circunferencia unidad y así conocer el comportamiento de la matriz de Toeplitz. También nos interesa conocer como es la medida generada en la circunferencia unidad.

[1] Esto significa que la masa se está agregando en el origen.

Esto lo resumimos en el siguiente esquema,

$[-1,1]$		$\mathbb{T}$
Cuando $a=0$ $\Downarrow$ Fun. Stieltjes $\tilde{S}_j(x)=S(x)+\frac{m_j}{x^{j+1}}$ $\Downarrow$ Medida Uvarov Generalizada $d\tilde{\alpha}=d\alpha+\frac{m_j}{j!}D^{(j)}\delta(x-0)$	$\xrightarrow{\text{Trans. Szegő}}$	Fun. Carathéodory $\tilde{F}_j(z)=F(z)+\frac{2^j m_j(1-z^2)}{(z^2+1)^{j+1}}$ $\Downarrow$ ¿Medida?

4.1.2. Momentos perturbados en la circunferencia unidad

En esta subsección mostraremos explícitamente los momentos perturbados en la circunferencia unidad.

Igualando (4.6) con (2.21), se obtiene

$$2M_j z^j = \frac{2^j m_j z^j (1-z^2)}{(z^2+1)^{j+1}},$$

es decir

$$M_j = \frac{2^{j-1} m_j (1-z^2)}{(z^2+1)^{j+1}}. \tag{4.7}$$

De este último resultado podemos concluir que una perturbación de un momento en el intervalo $[-1,1]$, no corresponde en general a una perturbación de un momento en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Es decir, perturbar una antidiagonal de la matriz de Hankel no se traduce en una perturbación de una subdiagonal de la matriz de Toeplitz, ya que en el lado izquierdo tenemos una constante M_j y en el lado derecho tenemos una función racional.

Esto significa que al perturbar el $j-$ésimo momento en $[-1,1]$ se obtiene una transformación espectral lineal de la forma

$$\tilde{F}_j(z) = F(z) + 2z^j R(z), \tag{4.8}$$

donde

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{2^{j-1} m_j (1-z^2)}{(z^2+1)^{j+1}} \\ &= 2^{j-1} m_j (1-z^2) \left(\frac{1}{(z^2+1)^{j+1}} \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para conocer el comportamiento de los momentos perturbados en la circunferencia unidad, escribamos (4.9) como una serie.
Es bien sabido que

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z|<1.$$

Calculando, la j-ésima derivada de este último resultado, se tiene

$$\frac{(-1)(-2)\dots(-j)}{(1+z)^{j+1}} = \sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\dots(n-(j-1))z^{n-j}.$$

Reescribiendo,

$$\frac{(-1)^j j!}{(1+z)^{j+1}} = \sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(n-j)!}z^{n-j}, \tag{4.10}$$

que es equivalente a

$$\frac{(-1)^j j!}{(z^2+1)^{j+1}} = \sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(n-j)!}z^{2(n-j)}. \tag{4.11}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)^{j+1}} &= \sum_{n=j}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^j}\frac{n!}{j!(n-j)!}z^{2(n-j)} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}z^{2(n-j)},\end{aligned} \tag{4.12}$$

y reemplazando la serie (4.12) en (4.9), tenemos

$$\begin{aligned}R(z) &= 2^{j-1}m_j(1-z^2)\sum_{n=j}^{\infty}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}z^{2(n-j)} \\ &= 2^{j-1}m_j(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{n+j}{j}z^{2n}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Ahora estudiemos el radio de convergencia de (4.13)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1-j)!}z^{2(n+1-j)}}{\frac{(-1)^n n!}{(n-j)!}z^{2(n-j)}}\right| = \lim_{n\to\infty}|(-1)|\left|\frac{n+1}{n+1-j}\right|\left|z^2\right|.$$

Así la serie (4.13) converge absolutamente en el interior del círculo de radio 1.
Si sustituimos (4.13) en (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{F}_j(z) &= F(z) + 2z^j R(z) \\ &= F(z) + 2z^j\left(2^{j-1}m_j(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+j}{j}z^{2n}\right) \\ &= F(z) + 2^j m_j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+j}{j}z^{2n+j} - 2^j m_j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+j}{j}z^{2n+2+j}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

De (4.14) podemos concluir que, si se perturba el momento $j-$ésimo en $[-1,1]$ y aplicamos la transformación de Szegő, entonces la perturbación en $F(z)$ corresponde a una perturbación en los momentos a partir de j en adelante de la siguiente manera

- Si j es par, se perturban todos los momentos pares a partir del momento j.

- Si j es impar, se perturban todos los momentos impares a partir del momento j.

De (4.14) se pueden deducir explicitamente los momentos perturbados, así

$$\tilde{c}_{-n} = \begin{cases} c_{-n}, & \text{si} \quad n < j \text{ ó } n = j + 2k + 1, \\ & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \\ c_{-n} + i^{n-j} 2^{j-1} m_j \left(\binom{(n+j)/2}{j} + \binom{(n+j-2)/2}{j} \right), & \text{si} \quad n = j + 2k, \\ & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4.15}$$

donde estamos suponiendo que $\binom{j-1}{j} = 0$.

4.1.3. Parte absolutamente continua de la medida generada en la circunferencia unidad

Calculemos la parte absolutamente continua de la medida perturbada usando (2.10). Para esto primero determinemos la conjugada de $\tilde{F}_j(z)$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j(e^{i\theta}) &= \lim_{r \to 1} \tilde{F}_j(re^{i\theta}) \\ &= \lim_{r \to 1} \left(F(re^{i\theta}) + \frac{2^j (re^{i\theta})^j m_j (1 - (re^{i\theta})^2)}{((re^{i\theta})^2 + 1)} \right) \\ &= F(e^{i\theta}) + \frac{2^j (e^{i\theta})^j m_j (1 - e^{2i\theta})}{(e^{2i\theta} + 1)^{j+1}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{F}_j(e^{i\theta})} &= \overline{F(e^{i\theta})} + \frac{2^j (e^{-i\theta})^j m_j (1 - e^{-2i\theta})}{(e^{-2i\theta} + 1)^{j+1}} \\ &= \overline{F(e^{i\theta})} - \frac{2^j (e^{i\theta})^j m_j (1 - e^{2i\theta})}{(e^{2i\theta} + 1)^{j+1}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sumando (4.16) con (4.17) y usando (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'(\theta) &= \mathfrak{Re} \tilde{F}_j(e^{i\theta}) \\ &= \mathfrak{Re} F(e^{i\theta}) \\ &= \sigma'(\theta). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Acabamos de mostrar que la parte absolutamente continua de la medida generada en la circunferencia unidad es la misma que la parte absolutamente continua de la medida original,

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}'(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s(\theta) \\ &= \sigma'(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s(\theta). \end{aligned} \tag{4.19}$$

En otras palabras, la perturbación de un momento en la medida con soporte en $[-1, 1]$ afecta solamente la parte singular de la medida $\tilde{\sigma}$ con soporte en la circuferencia unidad,

es decir, la parte absolutamente continua con respecto la medida normalizada de Lebesgue permanece invariante bajo la transformación de Szegő.

4.1.4. Análisis de la perturbación del momento cero

A modo de ejemplo mostremos lo que sucede cuando se perturba el momento μ_0, en la matriz de Hankel.

Si hacemos $j = 0$ en la ecuación (4.14), entonces la función de Carathéodory que se obtiene solo de perturbar el momento cero es

$$\tilde{F}_0(z) = F(z) + m_0 + 2m_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n},$$

en consecuencia los momentos perturbados en la circunferencia unidad son

$$\tilde{c}_{-n} = \begin{cases} c_{-n}, & \text{si} \quad n \text{ es impar}, \\ \\ c_{-n} + i^n m_0, & \text{si} \quad n \text{ es par}, \end{cases} \tag{4.20}$$

o bien,

$$\tilde{c}_{-n} = c_{-n} + 2i^n \left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - \frac{n+1}{2} \right) m_0, \tag{4.21}$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ es la función parte entera por encima. Esto significa que se están perturbando todos los momentos pares incluyendo el momento cero de la circunferencia unidad. Esto se puede ver matricialmente de la siguiente manera,

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mu_0 + m_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_1 & \cdots \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Transformación de Szegő}$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 + m_0 & c_1 & c_2 - m_0 & c_3 & \cdots \\ c_{-1} & c_0 + m_0 & c_1 & c_2 - m_0 & \cdots \\ c_{-2} - m_0 & c_{-1} & c_0 + m_0 & c_1 & \cdots \\ c_{-3} & c_{-2} - m_0 & c_{-1} & c_0 + m_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.1. *Consideremos los polinomios de Chebyshev de tercera especie que tienen como medida*

$$d\alpha(x) = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{\pi}.$$

La medida generada en la circunferencia unidad bajo la transformación de Szegő es

$$\begin{aligned} d\sigma &= (1-\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \\ &= |z-1|^2\frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

cuyos momentos son

$$c_{-n} = \begin{cases} 1, & si \quad n=0, \\ -\frac{1}{2}, & si \quad n=1 \text{ ó } n=-1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Entonces, si se perturba el momento cero de los polinomios de Chebychev de tercera especie agregándole una masa real m_0, la función de Carathédory perturbada es

$$\tilde{F}_0(z) = 1 - z + m_0 + 2m_0\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n},$$

esto significa que solo los momentos pares son perturbados así

$$c_{-n} = \begin{cases} 1+m_0, & si \quad n=0, \\ -\frac{1}{2}, & si \quad n=1 \text{ ó } n=-1, \\ i^n m_0, & si \quad n \text{ es par.} \\ 0, & si \quad n \text{ es impar, diferente de } \pm 1. \end{cases}$$

Su correspondiente matriz de Toeplitz perturbada es

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1+m_0 & -1/2 & -m_0 & & \cdots \\ -1/2 & 1+m_0 & -1/2 & -m_0 & \cdots \\ -m_0 & -1/2 & 1+m_0 & -1/2 & \cdots \\ 0 & -m_0 & -1/2 & 1+m_0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

La medida perturbada $\tilde{\sigma}$ en la circunferencia unidad, cuando se perturba el momento cero es

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma} &= (1-\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s \\ &= |z-1|^2\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s. \end{aligned}$$

4.1.5. Análisis de la perturbación del momento uno

En esta parte mostraremos con un ejemplo el comportamiento de los momentos en la circunferencia unidad cuando se perturba el primer momento en $[-1,1]$ agregando una

masa m_1.
Si hacemos $j = 0$ en la ecuación (4.14), entonces la función de Carathéodory que se obtiene solo de perturbar el primer momento es

$$\tilde{F}_1(z) = F(z) + 2m_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) z^{2n-1},$$

en consecuencia los momentos perturbados en la circunferencia unidad son

$$\tilde{c}_{-n} = \begin{cases} c_{-n}, & \text{si} \quad \text{n es par}, \\ \\ c_{-n} + i^{(n-1)} n m_1, & \text{si} \quad \text{n es impar}, \end{cases} \tag{4.22}$$

o bien,

$$\tilde{c}_{-n} = c_{-n} + 2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \frac{n}{2}\right) i^{(n-1)} n m_0, \tag{4.23}$$

esto significa que al perturbar el primer momento en la recta se están perturbando todos los momentos impares de la circunferencia unidad. Esto lo podemos ver matricialmente de la siguiente manera,

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 + m_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_1 + m_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_1 & \cdots \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Transformación de Szegő

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 + m_1 & c_2 & c_3 - 3m_1 & \cdots \\ c_{-1} + m_1 & c_0 & c_1 + m_1 & c_2 & \cdots \\ c_{-2} & c_{-1} + m_1 & c_0 & c_1 + m_1 & \cdots \\ c_{-3} - 3m_1 & c_{-2} & c_{-1} + m_1 & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.2. *Consideremos los polinomios de Chebyshev de primera especie que tienen como medida*

$$d\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\pi}.$$

Según el ejemplo 3.1.1, la medida generada en la circunferencia unidad por medio de la transformación de Szegő, es la medida normalizada de Lebesgue

$$d\sigma(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En este caso, los momentos en la circunferencia unidad son

$$\begin{aligned} c_n &= \bar{c}_{-n} \\ &= \begin{cases} 1, & si \quad n = 0, \\ 0, & si \quad n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si se perturba el primer momento de los polinomios de Chebyshev agregando una masa m_1, se obtiene la perturbación de todos los momentos impares en la circunferencia unidad, agregándoles la masa $i^{n-1}nm_1$. La función de Carathéodory perturbada es

$$\tilde{F}_1(z) = 1 + 2m_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) z^{2n-1}.$$

La correspondiente matriz de Toeplitz prturbada es

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & 0 & -3m_1 & \cdots \\ m_1 & 1 & m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_1 & 1 & m_1 & \cdots \\ -3m_1 & 0 & m_1 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

es decir

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_1 & 0 & -3m_1 & \cdots \\ m_1 & 0 & m_1 & 0 & \cdots \\ 0 & m_1 & 0 & m_1 & \cdots \\ -3m_1 & 0 & m_1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{T}$ es la matriz de Toeplitz asociada a la medida normalizada de Lebesgue.
La medida perturbada $\tilde{\sigma}$ en la circunferencia unidad, cuando se perturba el momento uno es

$$d\tilde{\sigma} = \frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s.$$

4.2. Análisis de perturbación de momentos a través de la transformación de Szegő cuando se perturba del momento j-ésimo en adelante en $[-1, 1]$

En la sección anterior se analizó el comportamiento de los momentos en la circunferencia unidad cuando $a = 0$ en la función (1.13) por medio de la transformación de Szegő. En esta sección construiremos un funcional que nos permite considerar el caso cuando $a \neq 0$.

4.2.1. Construcción del funcional que perturba del momento j-ésimo en adelante en $[-1, 1]$

Sea $\mathcal{L}$ un funcional definido positivo y $\alpha(x)$ su correspondiente medida donde $\{\upsilon_n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de momentos en la base canónica $\{1, x, x^2, \cdots\}$ definidos mediante

$$\upsilon_k = \langle \mathcal{L}, x^k \rangle.$$

De una manera similar a la definición 1.3.2, formularemos el siguiente funcional el cual tiene la particularidad que la masa se está agregando en un punto $a \in \mathbb{R}$ y además se puede

utilizar la transformación de Szegő para estudiar el comportamiento de los momentos en su respectiva función de Carathéodory por que se está trabajando sobre la base canónica.

Definición 4.2.1. *Sea $\mathcal{L}_j$ un funcional lineal de momentos, definido por*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_j, p_n(x)\rangle &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + (-1)^j \langle D^{(j)}\delta(x-a), p_n(x)\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}, p_n(x)\rangle + \frac{m_j}{j!} p_n^{(j)}(a),\end{aligned} \tag{4.24}$$

donde m_j y a son constantes reales.

Si $\mathcal{L}_j$ es un funcional definido positivo, entonces la transformación anterior puede expresarse en términos de su correspondiente medida, dada por

$$d\tilde{\alpha} = d\alpha + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)}\delta(x-a). \tag{4.25}$$

Con ayuda de (4.24) podemos determinar la sucesión de momentos $\{\tilde{\upsilon}_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$\begin{aligned}\tilde{\upsilon}_k &= \langle \mathcal{L}_j, x^k\rangle \\ &= \begin{cases} \upsilon_k, & \text{si} \quad k < j, \\ \upsilon_k + m_j, & \text{si} \quad k = j, \\ \upsilon_k + m_j \binom{k}{j} a^{k-j}, & \text{si} \quad k > j. \end{cases}\end{aligned} \tag{4.26}$$

- Cuando $k \leq j$ es similar que en la sección 1.3.
- Cuando $k > j$,

$$\begin{aligned}\tilde{\upsilon}_k &= \langle \mathcal{L}_j, x^k\rangle \\ &= \upsilon_k + \frac{m_j}{j!}((x)^k)^{(j)}(a) \\ &= \upsilon_k + \frac{m_j}{j!}(k)(k-1)\cdots(k-(j-1))a^{k-j},\end{aligned}$$

como $k(k-1)(k-2)\cdots(k-(j-1)) = \frac{k!}{(k-j)!}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{\upsilon}_k &= \upsilon_k + \frac{m_j}{j!}\frac{k!}{(k-j)!}a^{k-j} \\ &= \upsilon_k + m_j\binom{k}{j}a^{k-j}.\end{aligned}$$

La función de Stieltjes para estos momentos es

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\upsilon}_k}{x^{k+1}} \\ &= \frac{\upsilon_0}{x} + \frac{\upsilon_1}{x^2} + \cdots + \frac{\upsilon_{j-1}}{x^j} + \frac{\upsilon_j + m_j}{x^{j+1}} + \frac{\upsilon_{j+1} + m_j\binom{j+1}{j}a}{x^{j+2}} + \cdots \\ &+ \frac{\upsilon_n + m_j\binom{n}{j}a}{x^{n-j}} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\upsilon_k}{x^{k+1}} + \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{m_j}{x^{k+1}} a^{k-j} \\ &= S(x) + \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{m_j}{x^{k+1}} a^{k-j}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.2.2. Aplicación de la transformación de Szegő

Ahora apliquemos la transformación de Szegő a (4.27), para determinar explícitamente los momentos en la circunferencia unidad

$$\begin{aligned}\tilde{F}_j(z) &= \frac{1-z^2}{2z}\left(S(x) + \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{m_j}{x^{k+1}} a^{k-j}\right) \\ &= F(z) + \frac{1-z^2}{2z} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \frac{m_j a^{k-j} (2z)^{k+1}}{(z^2+1)^{k+1}} \\ &= F(z) + (1-z^2) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a^{k-j} (2z)^k \left(\frac{1}{(z^2+1)^{k+1}}\right),\end{aligned} \tag{4.28}$$

donde de (4.12) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} z^{2(n-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} z^{2n}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Reemplazando (4.29) en (4.28), obtenemos

$$\tilde{F}_j(z) = F(z) + (1-z^2) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \left(\binom{k}{j} a^{k-j} (2z)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k}{k} z^{2n} \right) \right). \tag{4.30}$$

La serie (4.30) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{\infty}\left(\binom{k}{j}a^{k-j}(2z)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+k}{k}z^{2n}\right)\right)=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n}2^{j+2n}\binom{j+2n}{j}\binom{j+k+n}{j+2n}\right)z^{j+2k}\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n+1}2^{j+1+2n}\binom{j+1+2n}{j}\binom{j+1+k+n}{j+1+2n}\right)z^{j+1+2k}.
\end{aligned}\tag{4.31}$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.31) en (4.30), la función de Carathédory perturbada es

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_j(z)=F(z)&+2m_j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n}2^{j-1+2n}\binom{j+2n}{j}\binom{j+k+n}{j+2n}\right)z^{j+2k}\\
&+2m_j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n+1}2^{j+2n}\binom{j+1+2n}{j}\binom{j+1+k+n}{j+1+2n}\right)z^{j+1+2k}\\
&-2m_j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n}2^{j-1+2n}\binom{j+2n}{j}\binom{j+k+n}{j+2n}\right)z^{j+2k+2}\\
&-2m_j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+k}a^{2n+1}2^{j+2n}\binom{j+1+2n}{j}\binom{j+1+k+n}{j+1+2n}\right)z^{j+3+2k}.
\end{aligned}\tag{4.32}$$

De este último resultado se puede concluir que si se perturban los momentos de j en adelante de una medida $\tilde{\alpha}(x)$ con soporte en el intervalo $[-1,1]$ y se aplica la transformación de Szegő, entonces en la circunferencia unidad se perturban todos los momentos de j en adelante. A partir de (4.32) pueden determinarse los momentos perturbados y están dados por

$$\tilde{c}_{-(j+k)}=\begin{cases}c_{-(j+k)}+2A_1(k), & \text{si} \quad j+k=0,\\ c_{-(j+k)}+A_1(k), & \text{si} \quad k \text{ es par},\\ c_{-(j+k)}+A_2(k), & \text{si} \quad k \text{ es impar},\end{cases}\tag{4.33}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1(k)=m_j&\sum_{n=0}^{k/2}(-1)^{n+k/2}a^{2n}2^{j-1+2n}\binom{j+2n}{j}\binom{j+k/2+n}{j+2n}\\
&-m_j\sum_{n=0}^{k/2-1}(-1)^{n+k/2-1}a^{2n}2^{j-1+2n}\binom{j+2n}{j}\binom{j+(k/2-1)+n}{j+2n},
\end{aligned}$$

y

$$A_2(k) = m_j \sum_{n=0}^{(k-1)/2} (-1)^{n+(k-1)/2} a^{2n+1} 2^{j+2n} \binom{j+1+2n}{j} \binom{j+1+(k-1)/2+n}{j+1+2n} - m_j \sum_{n=0}^{(k-3)/2} (-1)^{n+(k-3)/2} a^{2n+1} 2^{j+2n} \binom{j+1+2n}{j} \binom{j+1+(k-3)/2+n}{j+1+2n}.$$

Es importante hacer notar el hecho que en la ecuación (4.33), si se perturba desde el momento cero $\tilde{c}_0 = c_0 + 2A_1(0)$, porque la función de Carathéodory se define $F(z) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k$, es decir, el momento cero no está multiplicado por 2.

4.2.3. Parte absolutamente continua de la medida generada en la circunferencia unidad

Usando (2.10), calculemos la parte absolutamente continua de la nueva medida en la circunferencia unidad. Para esto primero determinemos la conjugada de la ecuación (4.28)

$$\begin{aligned}\tilde{F}_j(e^{i\theta}) &= \lim_{r\to 1} \left(F(re^{i\theta}) + (1-(re^{i\theta})^2) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a^{k-j} (2re^{i\theta})^k \left(\frac{1}{((re^{i\theta})^2+1)^{k+1}} \right) \right) \\ &= F(e^{i\theta}) + (1-e^{2i\theta}) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a^{k-j} (2e^{i\theta})^k \left(\frac{1}{(e^{2i\theta}+1)^{k+1}} \right).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Entonces la función conjugada es

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{F}_j(z)} &= \overline{F(z)} + (1-e^{-2i\theta}) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a^{k-j} (2e^{-i\theta})^k \left(\frac{1}{(e^{-2i\theta}+1)^{k+1}} \right) \\ &= \overline{F(e^{i\theta})} - (1-e^{2i\theta}) m_j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} a^{k-j} (2e^{i\theta})^k \left(\frac{1}{(e^{2i\theta}+1)^{k+1}} \right).\end{aligned} \tag{4.35}$$

sumando (4.34) y (4.35) y usando (2.9), se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}'(\theta) &= \mathfrak{Re}(\tilde{F}_j(e^{i\theta})) \\ &= \mathfrak{Re}(F(e^{i\theta})) \\ &= \sigma'(\theta).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Es decir, la parte absolutamente continua de la medida perturbada corresponde a la medida absolutamente continua de la medida original

$$\begin{aligned}d\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}'(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s(\theta) \\ &= \sigma'(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s(\theta).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Al igual que en el caso de perturbar solo el $j-$ésimo momento de la matriz de Hankel, cuando se perturba del $j-$ésimo momento en adelante, la transformación de Szegő afecta

solamente la parte singular de la medida $\tilde{\sigma}$ con soporte en la circunferencia unidad, es decir, la parte absolutamente continua con respecto la medida normalizada de Lebesgue permanece invariante bajo la transformación de Szegő.

4.2.4. Análisis de la perturbación del momento cero

A modo de ejemplo, mostraremos el comportamiento de perturbar del momento cero en adelante, es decir, de perturbar todos los momentos de la matriz de Hankel.

Si hacemos $j = 0$ en (4.26), tenemos que

$$\tilde{v}_k = \begin{cases} v_k + m_0, & \text{si} \quad k = 0, \\ v_k + m_0 k a^k, & \text{si} \quad k > 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Estos últimos son los momentos perturbados de la matriz de Hankel.
De igual manera al hacer $j = 0$ en (4.33), se tiene

$$\tilde{c}_{-k} = \begin{cases} c_{-k} + 2A_1(k), & \text{si} \quad k = 0, \\ c_{-k} + A_1(k), & \text{si} \quad k \text{ es par}, \\ c_{-k} + A_2(k), & \text{si} \quad k \text{ es impar}, \end{cases} \tag{4.39}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(k) = m_0 &\sum_{n=0}^{k/2} (-1)^{n+k/2} a^{2n} 2^{-1+2n} \binom{2n}{0} \binom{k/2+n}{2n} \\ &- m_0 \sum_{n=0}^{k/2-1} (-1)^{n+k/2-1} a^{2n} 2^{-1+2n} \binom{2n}{0} \binom{(k/2-1)+n}{2n}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_2(k) = m_0 &\sum_{n=0}^{(k-1)/2} (-1)^{n+(k-1)/2} a^{2n+1} 2^{2n} \binom{1+2n}{0} \binom{1+(k-1)/2+n}{1+2n} \\ &- m_0 \sum_{n=0}^{(k-3)/2} (-1)^{n+(k-3)/2} a^{2n+1} 2^{2n} \binom{1+2n}{0} \binom{1+(k-3)/2+n}{1+2n}. \end{aligned}$$

De (4.39), se pueden calcular los primeros momentos
$\tilde{c}_0 = c_0 + 2A_1(0) = c_0 + m_0$,
$\tilde{c}_{-1} = c_{-1} + A_2(1) = c_{-1} + m_0 a$,
$\tilde{c}_{-2} = c_{-2} + A_1(2) = c_{-2} - m_0 + 2m_0 a^2$,
$\tilde{c}_{-3} = c_{-3} + A_2(3) = c_{-3} - 3m_0 a + 2m_0 a^3$,
$\tilde{c}_{-4} = c_{-4} + A_1(4) = c_{-4} + m_0 - 8m_0 a^2 + 8m_0 a^4$,
entonces, en términos de matrices tenemos

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \upsilon_0 + m_0 & \upsilon_1 + m_0 a & \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \cdots \\ \upsilon_1 + m_0 a & \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \cdots \\ \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \upsilon_5 + 5m_0 a^5 & \cdots \\ \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \upsilon_5 + 5m_0 a^5 & \upsilon_6 + 6m_0 a^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Transformación de Szegő

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & c_2 - m_0 + 2m_0 a^2 & c_3 - 3m_0 a + 2m_0 a^3 & \cdots \\ c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & c_2 - m_0 + 2a^2 & \cdots \\ c_{-2} - m_0 + 2m_0 a^2 & c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & \cdots \\ c_{-3} - 3m_0 a + 2m_0 a^3 & c_{-2} - m_0 + 2a^2 & c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Esto significa que al perturbar todos los momentos de la matriz de Hankel y aplicar la transformación de Szegő se perturban todos los momentos de la matriz de Toeplitz. Además observe que si se hace $a = 0$ se obtienen los mismos resultados que en la sección 4.1.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

1. Sea $\alpha(x)$ una medida soportada en $[-1,1]$, y considere la perturbación

$$d\tilde{\alpha}_j(x) = d\alpha(x) + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)}\delta(x-0). \tag{5.1}$$

   Entonces, los momentos asociados a $\tilde{\alpha}_j(x)$ son los mismos que los asociados a α, excepto por el $j-$ésimo, al que se le añade una masa real m_j.
   Si se aplica la transformación de Szegő a la correspondiente función de Stieltjes, $\tilde{S}_j(x)$, y se considera la función de Carathéodory resultante, se observa que dicha función no corresponde con un perturbación del momento $j-$ésimo asociado a la medida $\tilde{\sigma}$ en la circunferencia unidad.

2. Al aplicar la transformación de Szegő entre la función de Stieltjes que perturba solo el j-ésimo momento en $[-1,1]$ agregando una masa real m_j, los momentos perturbados que tienen soporte en la circunferencia unidad, tienen el siguiente comportamiento

   - Si j es par, entonces se perturban todos los momentos pares de la matriz de Toeplitz a partir del momento j-ésimo.
   - Si j es impar, entonces se perturban todos los momentos impares de la matriz de Toeplitz a partir del momento j-ésimo.

   Explícitamente los momentos perturbados son

$$\tilde{c}_{-n} = \begin{cases} c_{-n}, & \text{si} \quad n < j \text{ ó } n = j+2k+1, \\ & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \\ c_{-n} + i^{n-j} 2^{j-1} m_j \left(\binom{(n+j)/2}{j} + \binom{(n+j-2)/2}{j} \right), & \text{si} \quad n = j+2k, \\ & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

   donde estamos suponiendo que $\binom{j-1}{j} = 0$.

   Como caso particular, si se perturba el momento cero de la matriz de Hankel, se perturban todos los momentos pares de la matriz de Toeplitz, de la siguiente manera

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mu_0 + m_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_1 & \cdots \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Transformación de Szegő

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 + m_0 & c_1 & c_2 - m_0 & c_3 & \cdots \\ c_{-1} & c_0 + m_0 & c_1 & c_2 - m_0 & \cdots \\ c_{-2} - m_0 & c_{-1} & c_0 + m_0 & c_1 & \cdots \\ c_{-3} & c_{-2} - m_0 & c_{-1} & c_0 + m_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Si se perturba el primer momento de la matriz de Hankel, se perturban todos los momentos impares de la matriz de Toeplitz, de la siguiente manera

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 + m_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_1 + m_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_1 & \cdots \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Transformación de Szegő

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 + m_1 & c_2 & c_3 - 3m_1 & \cdots \\ c_{-1} + m_1 & c_0 & c_1 + m_1 & c_2 & \cdots \\ c_{-2} & c_{-1} + m_1 & c_0 & c_1 + m_1 & \cdots \\ c_{-3} - 3m_1 & c_{-2} & c_{-1} + m_1 & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

3. Si se considera la medida con soporte en $[-1, 1]$ y $a \in \mathbb{R}$,

$$d\tilde{\alpha}_j(x) = d\alpha(x) + (-1)^j \frac{m_j}{j!} D^{(j)}\delta(x - a),\ a \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

y al calcular los momentos se utiliza la base canónica $\{1, x, x^2, ...\}$, entonces se perturba del $j-$ésimo momento en adelante en el intervalo $[-1, 1]$, agregándole una masa real m_j al $j-$ésimo momento y agregándole $m_j\binom{k}{j}a^{k-j}$ al k-ésimo momento cuando $k > j$. Al aplicar la transformación de Szegő a la función de Stieltjes generada por la medida anterior, se obtiene una perturbación en la correspondiente función de Carathéodory a partir del momento $j-$ésimo en adelante. Es decir, al perturbar la antidiagonal j-ésima en adelante de la matriz de Hankel y aplicar la transformación de Szegő se perturba la subdiagonal j-ésima en adelante de la matriz de Toeplitz.

Los momentos perturbados son

$$\tilde{c}_{-(j+k)} = \begin{cases} c_{-(j+k)} + 2A_1(k), & \text{si} \quad j+k=0, \\ c_{-(j+k)} + A_1(k), & \text{si} \quad k \text{ es par}, \\ c_{-(j+k)} + A_2(k), & \text{si} \quad k \text{ es impar}, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(k) = m_j \sum_{n=0}^{k/2} (-1)^{n+k/2} a^{2n} 2^{j-1+2n} \binom{j+2n}{j} \binom{j+k/2+n}{j+2n} \\ - m_j \sum_{n=0}^{k/2-1} (-1)^{n+k/2-1} a^{2n} 2^{j-1+2n} \binom{j+2n}{j} \binom{j+(k/2-1)+n}{j+2n}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_2(k) = +m_j \sum_{n=0}^{(k-1)/2} (-1)^{n+(k-1)/2} a^{2n+1} 2^{j+2n} \binom{j+1+2n}{j} \binom{j+1+(k-1)/2+n}{j+1+2n} \\ - m_j \sum_{n=0}^{(k-3)/2} (-1)^{n+(k-3)/2} a^{2n+1} 2^{j+2n} \binom{j+1+2n}{j} \binom{j+1+(k-3)/2+n}{j+1+2n}. \end{aligned}$$

Como caso particular, cuando se perturban todos los momentos de la matriz de Hankel, se perturban todos los momentos de la matriz de Toeplitz. Matricialmente,

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \upsilon_0 + m_0 & \upsilon_1 + m_0 a & \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \cdots \\ \upsilon_1 + m_0 a & \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \cdots \\ \upsilon_2 + 2m_0 a^2 & \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \upsilon_5 + 5m_0 a^5 & \cdots \\ \upsilon_3 + 3m_0 a^3 & \upsilon_4 + 4m_0 a^4 & \upsilon_5 + 5m_0 a^5 & \upsilon_6 + 6m_0 a^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Transformación Szegő

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & c_2 - m_0(1-2a^2) & c_3 - m_0(3a-2a^3) & \cdots \\ c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & c_2 - m_0(1-2a^2) & \cdots \\ c_{-2} - m_0(1-2a^2) & c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & c_1 + m_0 a & \cdots \\ c_{-3} - m_0(3a-2a^3) & c_{-2} - m_0(1-2a^2) & c_{-1} + m_0 a & c_0 + m_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

4. Dada una medida $\alpha(x)$ con soporte en $[-1,1]$, y se define una nueva medida $\tilde{\alpha}(x)$ a través de una perturbación de momentos como cualquiera de las descritas anteriormente y se aplica la transformación de Szegő a $\tilde{\alpha}(x)$, se obtienen una medida $\tilde{\sigma}$ en

la circunferencia unidad con la siguiente propiedad,

$$\begin{aligned} d\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}'(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s \\ &= \sigma'(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\tilde{\sigma}_s, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde σ es la transformación de Szegő de α. Es decir, la parte absolutamente continua con respecto a la medida normalizada de Lebesgue permanece invariante bajo la transformación de Szegő, esto significa que la transformación de Szegő afecta solamente la parte singular de la medida.

Bibliografía

[1] Castillo K., Dimitrov D., Garza L., Rafaeli F., Pertubations on the antidiagonals of Hankel matrices, Applied Math. Comp. vol. 221, 2013, 444-452.

[2] Castillo K., Garza L., Marcellán F., Pertubations on the subdiagonals of Toeplitz Matrices, Linear Algebra Appl. vol. 434, 2011, 1563-1579.

[3] Chihara T. S., An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, Science Publisher, 1978.

[4] Cruz, R., Sobre polinomios de Laurent ortogonales y fórmulas de cuadratura en la circuferencia unidad, Tesis doctoral, universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife, España, 2007.

[5] Duistemaat J. J., Grünbaum F. A., Differential equations in the spectral parameter, Comm. Math. Phys. vol. 103, 1986, 177-240.

[6] Garza, L., Transformaciones Espectrales, Funciones de Carathéodory y Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad, Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, España, 2009.

[7] Garza L., Hernández J., Marcellán F., Spectral transformations of measures supported on the unit circle and the Szegő transformation, Numer. Algor. vol. 49, 2008, 169-185.

[8] Grünbaum F. A., Haine L., A theorem of Bochner, revisited, An Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhauser, Bostom, MA. vol. 26, 1997, 143-172.

[9] Marcellán F., Hernández J., Christoffel transforms and Hermitian linear functionals, Mediterr. J. Math. vol. 2, 2005, 451-458.

[10] Marcellán F., Quintana Y., Polinomios ortogonales no estándar. Propiedades algebraicas y analíticas, XXII Escuela Venezolana de matemáticas, 2009.

[11] Peherstorfer F., A special class of polynomials orthogonal on the circle including the associated polynomials, Constr. Aprrox. vol. 12, 1996, 161-185.

[12] Simon B., Orthogonal Polynomials on the unit circle, 2 vol. Amer. Math. Soc. Coll. Publi. Series. vol 54, 2005.

[13] Spiridonov V., Vinet L., Zhedanov A., Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polunomials, J. Phys. A: Math. vol. 30, 1997, 7621-7637.

[14] Szegő G. Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publi. Series, vol 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.

[15] Tasis C., Propiedades diferenciales de los polinomios ortogonales relativos a la circunferencia unidad, Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, Cantabria, España, 1989.

[16] Zhedanov A., Rational spectral transformations and orthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. vol. 85, 1997, 67-86.