Parámetros de anisotropía en teoría $f(R)$

Juan Sebastián Sierra Moreno

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá, D.C.
Noviembre de 2016

Parámetros de anisotropía en teoría $f(R)$

Juan Sebastián Sierra Moreno

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de
Magister en Ciencias, Física

Director
Leonardo Castañeda Colorado
Profesor Asociado OAN

Línea de investigación
Gravitación y Cosmología

Grupo de investigación
Grupo de Gravitación y Cosmología OAN

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá, D.C.
Noviembre de 2016

Título en español

Parámetros de anisotropía en teoría $f(R)$

Title in English

Anisotropy parameters in $f(R)$ theory

Resumen: Se presenta la teoría de perturbaciones cosmológicas a primer orden en Relatividad General basado en los trabajos desarrollados por Bardeen, H. Kodama, Mukhanov [13] [52], por medio de la cual se tratan las ecuaciones de campo en teoría $f(R)$ en el formalismo métrico bajo el gauge Newtoniano en métrica FLRW para un fluido no perfecto, en donde se plantea la posibilidad de parametrizar las anisotropías inherentes a la construcción del modelo en teoría $f(R)$, de forma similar a como se construyen en las parametrizaciones post-Friedmannianas [25], las cuales buscan por medio de parámetros hacer mímica del modelo ΛCDM. Para finalizar se hace una comparación de códigos para anisotropías de la radiación cósmica de fondo CAMB [11] y FRcamb [38] con el fin de observar en primera aproximación el comportamiento de un modelo $f(R)$ que hace mímica al modelo ΛCDM.

Abstract: The first order cosmological perturbation theory for General Relativity is introduced, based on the work developed by Bardeen, H. Kodama, Mukhanov [13] [52], which is used to treat the field equations in the metric $f(R)$ theory for the flat FLRW metric in a non-perfect fluid under the Newtonian Gauge, where is set the posibility to paramerterize the inerent anisotropies obtained from $f(R)$ field equations in a similar way as done in the Post-Friedmannian Paramerterizations[25], which mimic the ΛCDM model by the introdution of phenomenological parameters. In the final part its shown a comparison between the codes for the anisotropies in the cosmic microwave background, CAMB [11] and the FRCAMB [38], with the purpose of observing in the first approximation the behavior of a model $f(R)$ that mimics the ΛCDM model.

Palabras clave: Teoría $f(R)$, Relatividad General, Anisotropías, Perturbaciones Cosmológicas

Keywords: f(R) theory, General Relativity, Anisotropies, Cosmological Perturbations

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

"Mención ————"

Jurado
————————-

Jurado
————————-

Jurado
————————-

Director
Leonardo Castañeda

Codirector

Bogotá, D.C., Noviembre 25 de 2016

Dedicado a

A mis padres a mis hermanos.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a la Universidad Nacional de Colombia, por haber proporcionado el ambiente óptimo al generar espacios adecuados para estudiar y por contar con profesores de la más alta calidad en todos los aspectos. Por otra parte, el más grande agradecimiento al mi director de trabajo final de grado, profesor Leonardo Castañeda quien con su rigurosidad y sencillez, me ha dado herramientas conceptuales necesarias para comprender la física desde un punto de vista más amplio. a mis compañeros Leandro pardo y Oscar Vija por acompañarme en este viaje y por las interminables y productivas tardes de estudio durante la maestría y por su colaboración en el desarrollo de los cálculos fundamentales, a Pilar Sierra y a Nubia Moreno por ayudarme a corregir la redacción con sus conocimientos del lenguaje. Finalmente agradezco al grupo de Cosmología y Gravitación, por todas las sugerencias, correcciones, experiencia y tiempo. Gracias.

Índice general

Índice general **I**

Notación **III**

Introducción **IV**

1. El universo homogéneo **1**

1.1. Relatividad General 1

1.1.1. Postulados de la Relatividad General 1

1.1.2. Principio variacional en RG 2

1.2. Modelo cosmológico estándar 3

1.3. Ecuaciones de campo para la métrica Robertson-Walker plana en tiempo conforme 4

1.4. Modelo ΛCDM 5

2. El universo Inhomogéneo **8**

2.1. Perturbaciones cosmológicas 9

2.2. Teoría de transformaciones de calibración 9

2.2.1. Calibración Newtoniana 10

2.2.2. Perturbación del Tensor Momento-Energía 11

2.3. Ecuaciones de campo perturbadas a primer orden para la métrica FLRW plana en fluido no perfecto bajo calibración Newtoniana 12

2.3.1. Tensor de Einstein perturbado 12

2.4. Ecuaciones de campo perturbadas 13

3. Teoría de gravedad modificada $f(R)$ **16**

3.1. Ecuaciones de campo en teoría $f(R)$ 17

3.2. Ecuaciones de Friedmann modificadas en teoría $f(R)$ 18

3.2.1. Ecuaciones de Friedmann en tiempo cósmico 18
3.2.2. Ecuaciones de Friedmann modificadas en tiempo conforme 19
3.3. Ecuaciones de campo en teoría $f(R)$ perturbada a primer orden para la métrica FLRW plana conforme en calibración Newtoniana para fluido no perfecto 20
3.4. Parámetros de anisotropía 23
3.5. Parámetros de anisotropía en $f(R)$ perturbada a primer orden para la métrica FLRW plana conforme en calibración Newtoniana para fluido no perfecto 25

4. Códigos para anisotropías de la radiación cósmica de fondo CAMB 27
4.1. CAMB 27
4.1.1. Estructura del CAMB 27
4.1.2. Parámetros del código 28
4.1.3. Modelo cosmológico en CAMB 29
4.2. FRCAMB 29
4.3. CAMB vs FRCAMB 31

A. Perturbación a las ecuaciones de campo en RG 34
A.1. Perturbación a las ecuaciones de campo en RG a primer orden bajo la calibración Newtoniana 34
A.2. Perturbación del tensor de Ricci 37
A.3. Perturbación del tensor de Einstein 41
A.4. Tensor Momento-Energía Perturbado a primer orden en la calibración Newtoniana para un fluido no perfecto 43

B. Ecuaciones de campo en $f(R)$ 48
B.1. Ecuaciones de campo en $f(R)$ perturbada a primer orden en formalismo métrico para la métrica FLRW plana bajo calibración Newtoniana en fluido no perfecto 48
B.2. Ecuación de Raychaudhuri 57
B.3. Traza de las ecuaciones de campo 58
B.4. Ecuaciones de campo de fondo en métrica FLRW en tiempo cósmico 59

Conclusiones 62

Bibliografía 64

Notación

La convención de signos usada para la métrica es $(-,+,+,+)$, la velocidad de la luz se toma en unidades geometrizadas $c = 1$. Los índices griegos $\alpha, \beta, ...$ se utilizan para las coordenadas espacio-temporales y van de 0 a 3, los índices latinos se usan únicamente para coordenadas espaciales y van de 1 a 3. Las cantidades con una barra hacen referencia al universo de fondo, a menos que se esté utilizando una ecuación traída de una referencia bibliográfica.

G	Constante de gravitación universal $(6.67 \times 10^{-11} m^2/kg \quad s^2)$.
κ	$8\pi G$.
$g_{\mu\nu}$	Componentes del tensor métrico.
$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Tensor de Riemman.
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci.
R	Escalar de Ricci.
$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}$	Símbolo de Christoffel.
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein.
$T_{\mu\nu}$	Tensor Momento-Energía.
∂_{μ}	Derivada parcial respecto a x^{μ}.
$A_{,\mu}$	Derivada parcial de A respecto a x^{μ}.
∇_{μ}	Derivada covariante.
$\Box$	d'Alarbetiano $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$.
F	Derivada de la función $f(R)$, $F = \frac{\partial f}{\partial R}$.
δ	Densidad de contraste.
δ_D	Delta de Dirac.
D^*	Función de Crecimiento.
K	Curvatura espacial del universo.
t	Tiempo cósmico.
τ	Tiempo conforme.
Λ	Constante Cosmológica.

Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) ha sido ampliamente corroborada de forma experimental [70], algunas de estas verificaciones son: la explicación de la precesión del perihelio de Mercurio por Einstein en 1915, la deflexión de la luz provocada por el Sol, medida por Sir Eddington en 1919, y recientemente, la detección de ondas gravitacionales por el laboratorio LIGO [6]. El trabajo desarrollado por Friedmann en 1922 y Lemaître en 1926 dio paso al modelo cosmológico estándar, el cual se encontró con los problemas de planitud, el monopolo magnético y horizonte; los cuales fueron posteriormente solucionados con el escenario cosmológico de inflación [37] [67], de manera que a este punto la cosmología contaba con soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, en un modelo de espacio-tiempo isótropo y homogéneo. Paralelamente a lo anterior surgieron modificaciones a teoría de la RG, una de ellas es el trabajo desarrollado por Weyl, en el cual se hace el intento de unificar las fuerzas fundamentales de la naturaleza en el marco de la RG en 1922 [73]. En el mismo espíritu, la subsecuente y aún imposible reconciliación entre el modelo estándar de partículas y la RG, el descubrimiento de la etapa de aceleración del universo [65], en conjunto con la detección de variaciones de temperatura en el espectro de potencia del orden de $10^{-5}K$ [65], proporcionaron la evidencia teórica y experimental fundamental para modificar la RG. Estas modificaciones a la RG [55] se pueden resumir en: Parametrizaciones Post-Friedmannianas (PPF)[25], teorías $f(R)$ [4], teoría Brans-Dicke [18], gravedad Gauss- Bonnet [47] y la teoría Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) [29].

Centrándose en la teoría $f(R)$, en el marco del formalismo métrico, los hechos que motivan su implementación son: la equivalencia con la teoría Brans-Dicke [33], la relación que existe en algunos modelos de la teoría de cuerdas que coinciden con la formulación $f(R)$ [22] y las relaciones de parametrizaciones post-Friedmannianas (PPF) [9][25][57], en donde los parámetros de anisotropía μ y Σ son introducidos de forma fenomenológica y son los resposables de las desviaciones de RG, en tanto que en teorías tipo $f(R)$ surgen como consecuencia del modelo [76]. La teoría $f(R)$, que si bien, puede no ser la última teoría de la gravedad, permite analizar de una forma detallada y directa algunos fenómenos y propiedades del espacio tiempo; como lo son las lentes gravitacionales débiles, la materia y energía oscura, estos últimos asociados con la etapa de expansión acelerada del universo. Sumado a lo anterior, en los últimos años se ha encontrado evidencia experimental y simulada, que permite probar la validez de $f(R)$ mediante el mecanismo *camaleón* en pruebas de sistema solar [36] y en los picos de lentes gravitacionales débiles [23]; la implementación de códigos tipo FRcamb [38] [74], permite observar el comportamiento de las desviaciones de la RG de una forma cuantitativa. Dichos códigos difieren de los ya existentes MGCAMB y EFTCAMB en el hecho de que no se asume un fondo basado en

ΛCDM y se asume una familia de funciones $f(R)$ general que replica el comportamiento del modelo ΛCDM.

El presente trabajo tiene como objetivo la descripción de los parámetros de anisotropía en la teoría $f(R)$ general perturbada a primer orden bajo el gauge Newtoniano para un fluido no perfecto. Estos parámetros están caracterizados en teorías PPF [16], con lo cual se busca establecer las relaciones generales entre las derivadas de $f(R)$ y los parámetros μ y Σ. El trabajo se divide en 4 partes: una revisión de los elementos básicos en RG que permiten construir el modelo cosmológico estándar homogéneo e isótropo, una segunda parte en donde se desarrollan las ecuaciones de campo perturbadas a primer orden bajo la calibración Newtoniana para un fluido no perfecto en RG, una tercera parte en donde se determinan detalladamente las ecuaciones de campo en teoría $f(R)$ para un fluido no perfecto en la métrica FRWL conforme bajo la calibración Newtoniana y se describen las expresiones y relaciones de los parámetros μ y Σ de forma general y , finalmente, se hace una comparación de los resultados proporcionados por CAMB y por FRCAMB.

El desarrollo del presente es consecuencia de los trabajos realizados anteriormente por Peralta C. [19] y el trabajo de Guarnizo A. [5] dentro del grupo de Gravitación y cosmología.

CAPÍTULO 1

El universo homogéneo

En este capítulo se mostrarán las herramientas matemáticas y consideraciones físicas básicas para la descripción del universo homogéneo, en el marco de la relatividad general, de tal manera que estos resultados son un punto de partida para construir el modelo estándar de la cosmología, el cual está basado en los conceptos desarrollados por Friedmann y Lemaître para un universo homogéneo y posteriormente isotrópico por Roberson y Walker. En primera instancia, se describe la Relatividad General (RG) partiendo de 3 postulados, seguido de la construcción del universo homogéneo e isótropo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en tiempo cosmológico y conforme y finalmente con una breve descripción del modelo ΛCDM..

1.1. Relatividad General

La RG es una de las teorías más exitosas del siglo XX y ha sido ampliamente corroborada de forma experimental [70]. Esta teoría planteó un nuevo paradigma en la física y establece la transición del modelo de gravedad Newtoniana como una fuerza de atracción hacia un modelo en donde la gravedad es una propiedad dada por la curvatura del espacio-tiempo.

1.1.1. Postulados de la Relatividad General

La formulación de la RG se puede construir partiendo de postulados que estan diseñados para tratar la descripción Newtoniana de la gravedad y la relatividad especial como límites de la teoría. Siguiendo [48] [5] [30]

Postulado 1 El espacio-tiempo está descrito por un par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, siendo $\mathcal{M}$ una variedad 4-dimensional y $\mathbf{g}$ una métrica lorentziana sobre $\mathcal{M}$.

La curvatura del espacio tiempo viene determinada por el tensor de curvatura de Riemann $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ definido como

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta}, \tag{1.1}$$

con $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\rho} \left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right), \tag{1.2}$$

en donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor métrico y la variedad $\mathcal{M}$ en RG esta sujeta a la restricción de ser una variedad libre de torsión.

Postulado 2: Conservación local de la energía. Existe un tensor simétrico $T_{\alpha\beta}(\phi) = T_{\beta\alpha}(\phi)$ que es función de los campos de materia y sus derivadas tal que

1. $T_{\alpha\beta} = 0$ sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ si y solo si $\phi_i = 0$ para todo i sobre $\mathcal{U}$

2. $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$

Postulado 3: La métrica sobre la variedad espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ el tensor momento-energía y $\kappa = 8\pi G$,con G la constante de gravitación universal.

Se define el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{1.4}$$

con

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}, \tag{1.5}$$

y

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

bajo la condición

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0, \tag{1.7}$$

que es la identidad de Bianchi [30].

1.1.2. Principio variacional en RG

Las ecuaciones de Einstein se pueden obtener a partir de un lagrangiano y un principio variacional $\delta S = 0$; esta acción encontrada independientemente por Einstein y Hilbert denominada acción Einstein-Hilbert se expresa como

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int_{v} d^4x \sqrt{-g} R, \tag{1.8}$$

incluyendo la acción de los campos de materia S_M y la acción de Gibbons-York-Hawking S_{GYH}, la acción total se escribe como

$$S_{EH} = \frac{1}{2k}\left(S_{EH} + S_{GYH}\right) + S_M, \tag{1.9}$$

en donde S_{GYH} se usa para relajar las condiciones de frontera [5] y, haciendo la variación de la acción (1.9) respecto a $g^{\alpha\beta}$, se obtienen nuevamente las ecuaciones de campo de Einstein (1.3). La obtención detallada de las ecuaciones de campo se pueden ver en [5] [60]

1.2. Modelo cosmológico estándar

El modelo cosmológico estándar descrito por la métrica de Friedman encontrada como solución a las ecuaciones de Einstein en 1922 y posteriormente determinada bajo las condiciones de isotropía de forma independiente por Robertson y Walker en 1936, universo que recibe el nombre Üniverso de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker".

El elemento de línea del universo homogéneo e isótropo viene dado por la métrica Robertson-Walker [60] que se escribe como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{1.10}$$

en donde $a(t)$ es el factor de escala y K la curvatura que indica si la geometría universo es plana $K = 0$, esférica $K = 1$ o hiperbólica $K = -1$ y t es el tiempo cósmico. Esta métrica tiene la cualidad de representar un universo para el cual su evolución viene dada por el factor $a(t)$ ya que el espacio tridimensional se expande o contrae dependiendo de sus valores [53].

El principio cosmológico implica el modelo de fluido perfecto, cuya característica fundamental es que los cuerpos en el universo caen moviéndose dentro de las coordenadas dadas por la geometría de la métrica [56], es decir no hay velocidades peculiares. El modelo de fluido perfecto viene dado por el tensor momento-energía

$$T_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})u_\mu u_\nu + \bar{p} g_{\mu\nu}, \tag{1.11}$$

en donde $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ es la cuadrivelocidad en el marco comóvil, $\bar{p}$ es la presión y $\bar{\rho}$ la densidad de materia.

Usando la métrica (1.10) en la ecuación (1.3) se obtienen las componentes del tensor de Einstein en componentes mixtas, para lo cual se usa la relación

$$g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu} = G^\mu_\nu. \tag{1.12}$$

- Ecuación en la componente temporal-temporal

$$G^0_0 = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right]. \tag{1.13}$$

- Ecuación en la componente espacial-espacial

$$G^i_j = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2}\right]\delta^i_j. \tag{1.14}$$

,

Igualando 1.13 y 1.14 con las componentes del tensor momento-energía $T^\mu_\nu = diag(-\rho, p, p, p)$ se obtiene [58] [54] [60]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}, \tag{1.15}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi G\bar{p}, \tag{1.16}$$

Con las ecuaciones (1.15) y (1.16), haciendo $K = 0$, se determina la aceleración cósmica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\bar{\rho} + 3\bar{p}\right) \tag{1.17}$$

y la ecuación de continuidad descrita por el postulado 2 de la RG como $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ se escribe en componentes mixtas como

$$T^\mu_{\nu\,;\mu} = T^\mu_{\nu\,;\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu}T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}T^\mu_\alpha = 0 \tag{1.18}$$

aplicada al tensor momento-energía (1.11) es

$$\dot{\rho} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p}), \tag{1.19}$$

donde H es el parámetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$. (Recientemente se ha desarrollado un método para la determinación de la constante de Hubble local con una incertidumbre de 2.4 % en [59]).

Definiendo de forma usual un parámetro w para la ecuación de estado

$$w = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}. \tag{1.20}$$

El sistema de ecuaciones (1.19) (1.15) y (1.16) recibe el nombre de modelo cosmológico estándar.

1.3. Ecuaciones de campo para la métrica Robertson-Walker plana en tiempo conforme

Una forma de escribir las ecuaciones de campo de Einstein es mediante el cambio de coordenadas $dt = a(\tau)d\tau$. La métrica toma la forma [28].

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + dx^i dx^j \delta_{ij}\right] \tag{1.21}$$

para dicha métrica los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \mathcal{H}, \\ \Gamma^0_{ij} &= \mathcal{H}\delta_{ij}, \\ \Gamma^i_{0j} &= \mathcal{H}\delta^i_j. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Las componentes del tensor de Einstein son

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -3a^{-2}\mathcal{H}^2, \\ G^i_j &= -a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta^i_j. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Las ecuaciones de campo toman la forma

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}^2 &= 8\pi G a^2 \bar{\rho}, \\ (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta^i_j &= -8\pi G a^2 \bar{p}\delta^i_j, \end{aligned} \tag{1.24}$$

en donde la segunda ecuación de campo se puede reescribir usando la relación $\mathcal{H}^2 = \frac{8}{3}\pi G a^2 \bar{\rho}$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4}{3}\pi G a^2(\bar{\rho} + 3\bar{p}) \tag{1.25}$$

Partiendo de lo anterior es posible pasar de un sistema en tiempo cosmológico t al sistema en tiempo conforme τ, mediante la relación que existe entre H y $\mathcal{H}$, con $H = \frac{\dot{a}}{a}$ en donde el punto hace referencia a la derivada temporal respecto al tiempo cósmico y para $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ la comilla es la derivada temporal respecto al tiempo conforme.

Las expresiones que relacionan H y $\mathcal{H}$ son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= a\frac{d}{dt}, \\ \mathcal{H} &= \frac{a'}{a} = \frac{1}{a}a\frac{da}{dt} = \dot{a}, \\ \mathcal{H}' &= \left(\frac{a'}{a}\right)' = a^2(\dot{H} + H^2). \end{aligned} \tag{1.26}$$

De forma similar la ecuación de continuidad es

$$\dot{\rho} = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) = -3\mathcal{H}\bar{\rho}(1 + w). \tag{1.27}$$

1.4. Modelo ΛCDM

El modelo cosmológico estándar descrito anteriormente no da una única descripción del universo sino que deja cantidades, como la rata de expansión abiertas a ser determinadas

por la observación, de esta manera se establece que para el modelo cosmológico aceptado actualmente se requieren una serie de parámetros, los cuales se describen a continuación.

Constante cosmológica Λ

La inclusión de la constante cosmológica Λ, introducida por Einstein con el fin de configurar un universo estático, universo que dados los avances observacionales se ha demostrado que no es posible dada la estructura de la gravedad (es siempre atractiva) y en perturbaciones pequeñas resulta inestable. La constante cosmológica se admite en RG y aparece en las ecuaciones de Friedmann 1.17 como un término extra [10].

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{1.28}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\bar{\rho} + 3\bar{p}\right) + \frac{\Lambda}{3}, \tag{1.29}$$

en donde el efecto de Λ se observa directamente en la ecuación de aceleración (1.29), de forma que si esta es positiva, se hace una contribución a la aceleración y actúa entonces como una fueza repulsiva, lo cual concuerda con la época de aceleración del universo detectada por [65].

Ahora bien, para determinar el modelo se requieren de los siguientes parámetros:

Rata de expansión H_0

la constante de Hubble H_0 determina la rata de expansión del universo hoy, las velocidades que se usan para medir esta constante vienen dadas por el corrimiento al rojo de las líneas espectrales de las galaxias por ejemplo, sin embargo una dificultad radica en el hecho de que los objetos en el Universo no necesariamente se encuentran cayendo libremente, sino que pueden tener velocidades peculiares, pero el modelo de universo isótropo y homogéneo implica que la magnitud de las velocidades peculiares no depende de su lugar en el universo y por lo tanto es independiente de la distancia. De manera que a grandes distancias la velocidad radial es mayor a la velocidad peculiar desconocida y esta última se hace despreciable [10].

La rata de expansión H_0 está parametrizada como

$$H_0 = 100hkms^{-1}Mpc^{-1} \tag{1.30}$$

Paámetro de densidad Ω_X

Describe la fracción del componente X que contribuye a la expansión del universo, definida como

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{\rho_c}, \tag{1.31}$$

en donde ρ_c es la densidad crítica, y es la densidad requerida para hacer la curvatura del universo cero ($K = 0$), usando esto en la ecuación 1.28, se obtiene

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{1.32}$$

en donde usando (1.32) y (1.31) sobre (1.28) resulta la relación

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \tag{1.33}$$

con Ω igual a suma de las densidades de todos los componentes X de la materia en el universo y definiendo la densidad Ω_k asociada a la curvatura como

$$\Omega_k = -\frac{K}{a^2 H^2}, \tag{1.34}$$

entonces la ecuación (1.33) toma la forma

$$\Omega + \Omega_k = 1. \tag{1.35}$$

en general se definen parámetros de densidad para la materia Ω_m, para la radiación Ω_r para los neutrinos Ω_ν y para la constante cosmológica $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$

Con esta base teórica y la adición de los efectos de Reionización, Polarización, lentes gravitacionales, el efecto Sunyaev-Zel'dovich [28][46], se obtienen la siguiente serie de parmámetros que caracterizan el modelo ΛCDM aceptado actualmente

TABLA 1.1. Parámetros cosmológicos obtenidos por la colaboración Planck durante el 2015.[7](columna a) y por Wmap 9 años [40](columna b)

Parámetros	TT+LowP+Lensing[a]	Wmap 9 años[b]
$\Omega_b h^2$	0.02222 ± 0.00023	0.02264 ± 0.00050
$\Omega_c h^2$	0.1197 ± 0.0022	0.1138 ± 0.0045
Ω_Λ	0.685 ± 0.013	0.721 ± 0.025
$10^9 \Delta^2_{\mathcal{R}}$	-	2.41 ± 0.10
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.836 ± 0.013	-
n_s	0.9603 ± 0.0073	0.972 ± 0.013
τ	0.089 ± 0.013	0.089 ± 0.014

Los parámetros en la (Tabla 1.1) son aquellos parámetros que son obtenidos de forma directa, las cantidades derivadas están sujetas a los diversos cálculos realizados con el fin de cerrar el modelo [7] [40].

Se tiene entonces el modelo cosmológico estándar del universo homogéneo e isótropo lo cual permite usar la teoría de perturbaciones cosmológicas y construir el modelo de un universo real para una métrica FLRW plana general, en donde es importante recalcar el hecho de que se construye un modelo de universo real sin constante cosmológica.

CAPÍTULO 2

El universo Inhomogéneo

Con la detección de anisotropías en la radiación cósmica de fondo del orden de $1 \times 10^{-5}K$ [65] se hace importante la búsqueda de una metodología que permita la descripción del universo real alrededor del modelo de universo isótropo y homogéneo FLRW. Para tal efecto se requiere el uso del trabajo de Bardeen (1980) en Invariantes de calibración [13] y de la teoría de perturbaciones cosmológicas [52] [50], de manera que a lo largo de este capítulo se muestran los conceptos necesarios para construir un modelo de universo real basado en el modelo de universo homogéneo e isótropo perturbado a primer orden. Se inicia con los conceptos del desarrollo de perturbaciones cosmológicas, luego, teoría de transformaciones de calibración y, finalmente, se muestra la forma de las ecuaciones de Einstein a primer orden bajo la calibración Newtoniana para un fluido no perfecto.

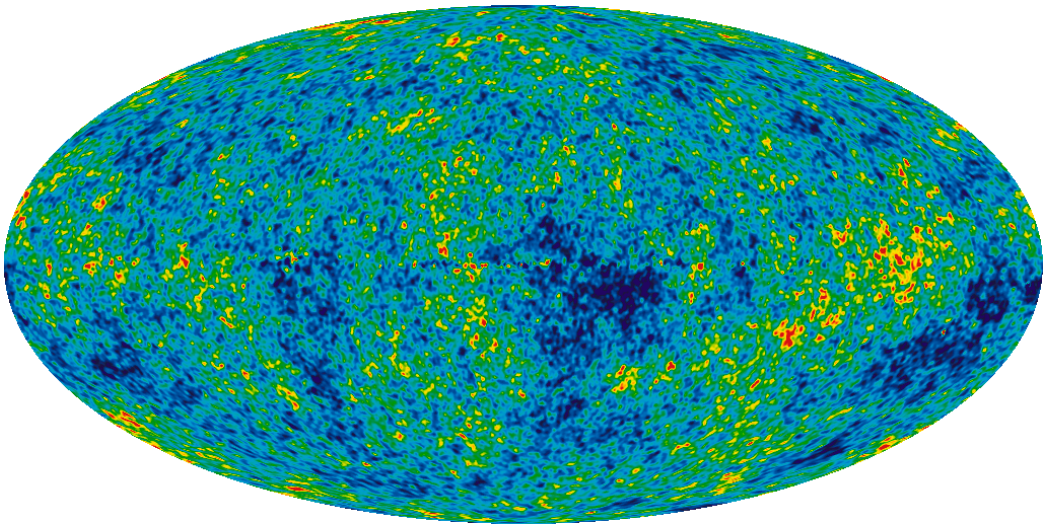

FIGURA 2.1. Imagen detallada de cielo completo del universo temprano de 9 años de recolección de datos en el WMAP. Se muestran fluctuaciones de temperatura como diferencias de color que corresponden a las semillas que crecieron para convertirse en galaxias. La imagen muestra un rango de temperaturas de $\pm 200\mu K$. (tomado de, WMAP 9-years [34])

2.1. Perturbaciones cosmológicas

En la teoría de perturbaciones cosmológicas se consideran 2 espacios: un espacio-tiempo perturbado aproximadamente igual a un al espacio-tiempo homogéneo e isótropo, al cual llamaremos universo de fondo. Para lo cual se definen transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo perturbado relacionadas con el espacio tiempo de fondo de la siguiente manera [43][58][52].

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

en donde las perturbaciones viven en el espacio real o espacio perturbado. En adelante se refiere a las variables con una barra como las cantidades de fondo y las variaciones de $\delta g_{\mu\nu}$ a segundo orden y los productos entre cantidades perturbadas a primer orden son despreciables .

De forma similar, para un sistema de ecuaciones como el (1.3) se reescribe en términos de las cantidades representadas en el espacio perturbado.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

mediante las ecuaciones (2.2) se escriben las ecuaciones de campo para las perturbaciones [52][50].

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

La Geometría del espacio-tiempo se generaliza bajo las mismas condiciones anteriores lo cual permite escribir el elemento de línea general en la métrica FLRW plana perturbada, métrica descrita extensamente por Bardeen en [13] como

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + \left[(1-2D)\,\delta_{ij} + 2E_{ij}\right] dx^i dx^j\right], \tag{2.4}$$

en donde $A(\tau, x^i)$ es la función lapso y $B_i(\tau, x^i)$ es el vector de desplazamiento. D es un elemento que refiere a la traza espacial de la métrica perturbada y E_{ij} no tiene traza [68]. La métrica (2.4) tiene 10 grados de libertad, 4 escalares 4 vectoriales y 2 tensoriales, los cuales se reducen a 4 usando la calibración Newtoniana.

Ahora bien las transformaciones señaladas anteriormente y la métrica (2.4) requieren de un método que permita hacer explícitas dichas relaciones. Para esto se usa la teoría de transformaciones de calibración.

2.2. Teoría de transformaciones de calibración

La correspondencia entre las coordenadas implica que existe un punto $\bar{P}$ en el espacio de fondo y un punto $\tilde{P}$ en el espacio perturbado que tienen los mismos valores en sus coordenadas, pero, dado un sistema de coordenadas en el espacio tiempo real, existen

infinitos sistemas de coordenadas para el espacio de fondo. La elección de dicho sistema de coordenadas es la elección de calibración [13], la cual implica 2 enfoques equivalentes, el pasivo en el cual se conecta la transformación de calibración con el sistema de coordenadas en el espacio perturbado y el activo que permite entender cómo las amplitudes de las perturbaciones dependen de la correspondencia entre el espacio físico perturbado y el espacio-tiempo de fondo [52].

En general una transformación de calibración viene dada por.

$$\tilde{x}^{\alpha}(\tilde{P}) = \hat{x}^{\alpha}(\hat{P}) = x^{\alpha}(\bar{P}). \tag{2.5}$$

En la ecuación (2.4) se observa que según el teorema de descomposición, existen perturbaciones tensoriales dadas por E_{ij}, vectoriales dadas por B_i y E_{ij}^V y escalares descritas por A, D, B_i^S y E_{ij}^S [43]. Entonces centrándose en las perturbaciones escalares se tiene

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A - \xi^{0\prime} - \mathcal{H}\xi^0, \\
\tilde{B} &= B + \xi' + \xi^0, \\
\tilde{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \mathcal{H}\xi^0, \\
\tilde{E} &= E + \xi,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

en donde $\xi^{\mu} = (\xi^0, \xi^i)$ es el campo que define las transformaciones entre los espacio-tiempo perturbados y de fondo, y, debido a que no se tienen encuenta modos vectoriales, entonces la transformación viene dada por las contribuciones de ξ^0 y ξ [52].

2.2.1. Calibración Newtoniana

La libertad de calibración permite hacer $B = 0$ y $E = 0$ con lo cual para las cantidades invariantes conocidas como potenciales de Bardeen [13]

$$\begin{aligned}
\Phi &= A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E'), \\
\Psi &= D + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E'),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

toman la forma

$$\begin{aligned}
\Phi &= A, \\
\Psi &= D,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

y la métrica (2.4) es

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Phi)d\tau^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right]. \tag{2.9}$$

La métrica (2.9) está descrita en tiempo conforme lo cual en términos de la teoría de calibración representa la preservación de la homogeneidad de las hipersuperficies de tiempo, ya que es una transformación paramétrica.

2.2.2. Perturbación del Tensor Momento-Energía

Se requiere que el fondo sea necesariamente un fluido perfecto [50]. El tensor momento energía en el espacio perturbado viene dado por la expresión (2.2) (ver Apéndice A2).

El tensor T^{μ}_{ν} perturbado toma la forma.

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} -\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta^i_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho}+\bar{p})(v^N_i) \\ -(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_i & \delta p\delta^i_j \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Así como para la métrica, el tensor momento energía perturbado tiene 10 grados de libertad, 6 físicos y 4 de calibración, de igual forma 4 escalar 4 vectorial y 2 tensoriales, de los cuales 2+2+2 son físicos. Tambien se pueden dividir en 5 de fluido perfecto y 5 de fluido no perfecto[43]. Entonces en la ecuación (2.10) hacen falta 5 grados de libertad que están contenidos en la parte δT_{ij}, los cuales se escriben de la siguiente manera

$$\delta T^i_j = \delta p\delta^i_j + \Sigma^i_j \equiv \bar{p}\left(\frac{\delta p}{\bar{p}}\delta^i_j + \Pi^i_j\right), \tag{2.11}$$

en donde Σ^i_j y Π^i_j son simétricos y sin traza por construcción [43] [68] con lo cual

$$\begin{aligned} \delta p &\equiv T^k_k, \\ \Sigma^i_j &\equiv \delta T^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j T, \end{aligned} \tag{2.12}$$

Σ^i_j llamado presión anisotrópica, para un fluido perfecto se tiene $\Sigma^i_j = 0$.

De acuerdo a lo anterior el tensor Momento -Energía en la claibración Newtoniana es

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta^i_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho^N & (\bar{\rho}+\bar{p})(v^N_i) \\ -(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_i & \delta p^N\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi) \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

en donde las cantidades v^N_i, $\delta\rho^N$, δp^N y Π, están referidas a la calibración Newtoniana y están descritas por.

$$\begin{aligned} \delta\rho^N &= \delta\rho + \bar{\rho}'(B - E') \\ \delta p^N &= \delta p + \bar{p}'(B - E') \\ v^N &= v - E' \\ \Pi &= \Pi, \end{aligned} \tag{2.14}$$

en donde la presión Π anisotrópica es un invariante de calibración [68].

2.3. Ecuaciones de campo perturbadas a primer orden para la métrica FLRW plana en fluido no perfecto bajo calibración Newtoniana

La perturbación de las ecuaciones de campo (2.3) requiere de la perturbación del tensor de Einstein, entonces dado que $G_{\mu\nu}$ es un tensor completamente determinado por $g_{\mu\nu}$ y a su vez por el tensor de Ricci y de los símbolos de Christoffel, se procede a describir las perturbaciones de dichos tensores.

2.3.1. Tensor de Einstein perturbado

Dado el elemento de línea (2.9) se calculan $g_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}$, teniendo en cuenta que los potenciales Φ y Ψ cumplen con la relación.

$$\begin{aligned} \Phi &<< 1, \\ \Psi &<< 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De acuerdo a los resultados encontrados (ver Apéndice A1) resulta.

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & 0 \\ 0 & (1-2\Psi)\delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & 0 \\ 0 & (1+2\Psi)\delta^{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Usando la métrica (2.9), los símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \mathcal{H} + \Phi', \\ \Gamma^0_{0i} &= \Gamma^0_{i0} = \Phi_{,i}, \\ \Gamma^0_{ji} &= (-\Psi' + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta_{ij}, \\ \Gamma^k_{00} &= \Phi_{,k}, \\ \Gamma^k_{0i} &= (\mathcal{H} - \Psi')\delta^k_i, \\ \Gamma^k_{ji} &= -[\Psi_{,i}\delta^k_j + \Psi_{,j}\delta^i_k - \Psi_{,k}\delta_{ji}]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Las componentes del tensor de Ricci.

$$R^0_0 = (-1+2\Phi)a^{-2}(-3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}\Phi'), \tag{2.19}$$

$$R^0_i = -2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i}, \tag{2.20}$$

$$R^i_j = a^{-2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta^i_j + a^{-2}[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' - 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}')\Phi]\delta^i_j + 2a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}. \quad (2.21)$$

Escalar de Ricci.

$$R = a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi' - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi]. \quad (2.22)$$

Finalmente, usando (1.4) se obtienen las componentes del tensor de Einstein.

$$G^0_0 = -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)] \quad (2.23)$$

$$G^0_i = 2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i}. \quad (2.24)$$

$$G^i_j = -a^2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\delta^i_j + a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}, \quad (2.25)$$

Para las ecuaciones (2.23) -(2.25), el tensor de Einstein perturbado viene dado por $\delta G^\mu_\nu = G^\mu_\nu - \bar{G}^\mu_\nu$ [49]

$$\begin{aligned}
\delta G^0_0 &= a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)] \\
\delta G^0_i &= 2a^{-2}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} \\
\delta G^i_j &= a^{-2}[2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j \\
&\quad + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij},
\end{aligned} \quad (2.26)$$

en donde se observa que las perturbaciones cosmológicas permiten separar las ecuaciones de campo del universo de fondo de las ecuaciones de campo en el universo perturbado, habilitando el análisis de las perturbaciones de forma independiente. Se procede a determinar las ecuaciones de campo perturbadas.

2.4. Ecuaciones de campo perturbadas

Las ecuaciones de campo para un fluido general teniendo en cuenta los elementos descritos en la sección anterior y la relación para las ecuaciones de campo perturbadas a primer orden (2.3), son

$$\begin{aligned} -2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) &= -8\pi G a^2 \delta\rho^N, \\ (\Psi' + \mathcal{H}\Phi) &= 4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})v^N, \\ [2\Psi'' + \nabla^2(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j & \\ + a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij} = 8\pi G a^2(\delta p^N \delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)). & \end{aligned} \tag{2.27}$$

Se evalúa la traza de la tercera ecuación en (2.27), donde la traza de δ^i_j es 3 y la traza de $(\Psi - \Phi)_{,ij}$ es $\nabla^2(\Psi - \Phi)$, dando como resultado

$$\Psi'' - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 8\pi G a^2(\delta p^N), \tag{2.28}$$

y la parte sin traza

$$(\Psi - \Phi)_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2(\Psi - \Phi) = 8\pi G a^2 \bar{p}\left(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi\right), \tag{2.29}$$

se reescribe como

$$(\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2)(\Psi - \Phi) = 8\pi G a^2 \bar{p}\left(\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\right)\Pi, \tag{2.30}$$

en donde se considera que la única condición que se requiere para que se cumpla la ecuación (2.30) [43] es.

$$\boxed{\Psi - \Phi = 8\pi G a^2 \bar{p}\Pi.} \tag{2.31}$$

La ecuación (2.31) es central en este trabajo en razón a que la presión anisotrópica determinada por Π, describe fenomenológicamente las distribuciones de momentum de las interacciones entre partículas durante y después los procesos de desacoplamiento,tal que si hay suficientes interacciones en el universo temprano, entonces las distribuciones se isotropizan y en el caso del desacoplamiento que implica que las interacciones son débiles y la distribución de momentum es anisotrópica. Adicionalmente como se verá en el siguiente capítulo, la modificación de la gravedad en la teoría $f(R)$ tiene como uno de sus resultados una contribución en la presión anisotrópica como función de las derivadas de $f(R)$ y a partir de la cual se establecen las relaciones análogas a las parametrizaciones post-Friedmannianas.

Retomando el desarrollo, se usa la primera y la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (2.27) y las relaciones de las ecuaciones de fondo (1.27), se obtiene la ecuación de Poisson [44].

$$-\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\left(\delta - 3\mathcal{H}(1 + w)v^N\right). \tag{2.32}$$

Las ecuaciones de campo entonces se pueden describir mediante 2 ecuaciones de ligadura:

$$-\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\left(\delta - 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right), \tag{2.33}$$

$$\Psi - \Phi = 8\pi G a^2\bar{p}\Pi. \tag{2.34}$$

Sujetas a dos ecuaciones de evolución

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2\bar{\rho}(1+w)v^N, \tag{2.35}$$

$$\Psi'' - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi-\Phi) + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 8\pi G a^2\delta p^N. \tag{2.36}$$

Vale recalcar el hecho de que este trabajo se desarrolla en el espacio de configuraciones, sin pérdida de generalidad alguna.

La forma de las ecuaciones de evolución para la materia y la energía, las cuales se obtienen usando la ecuación de continuidad (1.18) son

- Ecuación del Energía perturbada [52] [43].

$$(\delta\rho^N)' = -3\mathcal{H}(\delta\rho^N + \delta p^N) + (\bar{\rho}+\bar{p})(\nabla^2 v^N + 3\Psi'), \tag{2.37}$$

- Ecuación de momentum Perturbada[52] [43].

$$(\bar{\rho}+\bar{p})(v^N)' = (\bar{\rho}+\bar{p})'v^N - 4\mathcal{H}(\bar{\rho}+\bar{p})v^N + \delta p^N + \frac{2}{3}\bar{p}\nabla^2\Pi + (\bar{\rho}+\bar{p})\Phi, \tag{2.38}$$

en donde para la ecuación (2.37), se pueden describir los efectos físicos de la siguiente manera, el primer término de la derecha implica la expansión del espacio-tiempo de fondo, luego la expansión del fluido local y, finalmente, la expansión o contracción debida a la perturbación en la métrica [50] [43].

Para la ecuación (2.38), se muestra el cambio de inercia×velocidad relacionado con el lado izquierdo y el primer término de la derecha, el segundo término hace referencia a la expansión del espacio-tiempo de fondo y los términos subsecuentes representan las fuerzas debidas a los gradientes de presión y al potencial gravitacional [50] [43].

Se tiene entonces un modelo de universo real como una perturbación alrededor del universo de fondo homogéneo e isótropo, de manera que se procede a describir este universo perturbado en la teoría de gravedad modificada $f(R)$.

CAPÍTULO 3

Teoría de gravedad modificada $f(R)$

Han sido muchos los esfuerzos desde la propia creación de la teoría de la Relatividad General para modificarla. Uno de los primeros es el trabajo desarrollado por Weyl en 1922, en el cual se propuso que la forma lagrangiana descrita por Hilbert poco tiempo después de que Einstein publicara sus ecuaciones, dependiera de un término adicional del cuadrado de R [73]. Adicionalmente el problema de que no exista un modelo adecuado usando el modelo estándar de partículas y la relatividad general, incrementó la necesidad de buscar modificaciones a la RG, las cuales en principio añaden invariantes en términos de la curvatura de ordenes superiores, basados en el trabajo desarrollado por Starobinsky [67] las cuales adoptan una forma funcional tipo $f(R)$.

Las extensiones de la relatividad general en función de escalares de orden superior son consideradas la forma más natural de realizar la modificación a la teoría [20]. Este tipo de extensiones se propusieron por primera vez en 1970 donde Buchdahl [4] supone que la densidad lagrangiana en S_{EH} depende de una función general $f(R)$ del escalar de Ricci R. De acuerdo a lo anterior la ecuación (1.9) toma la forma

$$S_{HE} = \frac{1}{2k}\int_v d^4x\sqrt{-g}f(R), \tag{3.1}$$

y describe el comportamiento del campo gravitacional y de la materia sujeto a la función $f(R)$.

Existen diferentes formalismos mediante los cuales se estudian los efectos de la teoría $f(R)$, cada uno de ellos desde un punto de vista diferente, para los cuales, recientemente se establece una relación entre el formalismo métrico y el formalismo covariante [24]. Algunos de ellos son: el formalismo métrico, el formalismo de Palatini, el formalismo covariante y el formalismo métrico afín. Para el desarrollo del presente trabajo se usa el formalismo métrico.

3.1. Ecuaciones de campo en teoría $f(R)$

Se presentan las ecuaciones de campo desde el formalismo métrico [24], las cuales se obtienen en términos de cuarto orden en [14] e incluyendo el término de frontera de Gibbons-York-Hawking de forma detallada en [5] [35].

Se considera que el espacio tiempo es un par $(\mathcal{M}, g)$ con $g_{\mu\nu}$ una métrica sobre $\mathcal{M}$ y la densidad lagrangiana es una función arbitraria del escalar de Ricci $\mathcal{L}(g_{\mu\nu}) = f(R)$. La acción en general se escribe como.

$$S_{mod} = \frac{1}{2k}(S_{met} + S_{GYH}) + S_M, \tag{3.2}$$

con

$$\begin{aligned} S_{met} &= \int_v d^4x\sqrt{-g}f(R), \\ S_{GYH} &= 2\oint_{\partial v} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}f'(R)K. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Realizando la variación sobre el tensor métrico condicionado

$$g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{V}} = 0. \tag{3.4}$$

Las ecuaciones de campo en el formalismo métrico [32][66] [24] son

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

en donde $F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$, y $\Box = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$ es el operador de D'alambert.

y la traza de (3.5) es

$$FR - 2f + 3\Box F = \kappa T. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) tiene la cualidad de mostrar que en $f(R)$ la relación entre R y T no es directa y lineal, sino que ahora depende de las funciones $f(R)$. Aplicando el límite a Relatividad General, donde $f(R) = R$. La ecuación es $R = -\kappa T$.

Alternativamente, las ecuaciones de campo se pueden reescribir de la forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{F}\left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f - FR) + \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) - g_{\mu\nu}\Box F(R)\right], \tag{3.7}$$

usando $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.

La ecuación (3.7) se puede reescribir como la suma de dos tensores, un tensor de momento-energía reescalado $\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu}}{F}$ y un tensor momento-energía de la curvatura efectiva del fluido

$$\tilde{T}^{eff}_{\mu\nu} = \frac{1}{F}\left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f - FR) + \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) - g_{\mu\nu}\Box F(R)\right]. \tag{3.8}$$

Tomando la forma análoga a Relatividad General.

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + \tilde{T}^{eff}_{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

en donde se siguen cumpliendo las identidades de Bianchi y la ecuación de continuidad $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, además permite analizar los efectos de la aplicación de teoría f(R) como los efectos de la geometría del fluido ya que el lagrangiano de materia no depende de $f(R)$.

3.2. Ecuaciones de Friedmann modificadas en teoría $f(R)$

Se procede a mostrar las ecuaciones de Friedmann modificadas tanto en tiempo cósmico como en tiempo conforme.

3.2.1. Ecuaciones de Friedmann en tiempo cósmico

Las ecuaciones vienen dadas por la métrica FRLW [32]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^i dx^j\delta_{ij}, \tag{3.10}$$

y el tensor momento -energía $T^\mu_\nu = diag(-\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{p}, \bar{p})$, de manera que las ecuaciones de campo resultantes son

-Ecuación Tiempo-Tiempo

$$3\bar{F}H^2 = \frac{1}{2}\left(\bar{F}R - \bar{f}\right) - 3H\dot{\bar{F}} + 8\pi G\bar{\rho} \tag{3.11}$$

-Ecuación Espacio-Espacio

$$-(2\dot{H} + 3H^2)\bar{F} = \kappa\bar{p} + \frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{F}R) + \ddot{\bar{F}} + 2H\dot{\bar{F}} \tag{3.12}$$

sumando las ecuaciones (3.11) y (3.12) se obtiene.

$$-2\bar{F}\dot{H} = \ddot{\bar{F}} - H\dot{\bar{F}} + 8\pi G(\bar{\rho} + \bar{p}) \tag{3.13}$$

Se definen dos funciones de la densidad y la presión debidas a la curvatura del fluido efectivo como.

$$\rho_{curv} = \frac{1}{8\pi G a^2 F}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{F}R - \bar{f}\right) - 3H\dot{F}\right], \tag{3.14}$$

$$p_{curv} = \frac{1}{8\pi G a^2 \bar{F}}\left[\frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{F}R) + \ddot{\bar{F}} + 2H\dot{\bar{F}}\right], \tag{3.15}$$

y el parámetro de la ecuación de estado w_{curv} como

$$w_{curv} = \frac{p_{curv}}{\rho_{curv}} = \frac{\frac{1}{8\pi G a^2 \bar{F}}\left[\frac{1}{2}(\bar{f} - \bar{F}R) + \ddot{\bar{F}} + 2H\dot{\bar{F}}\right]}{\frac{1}{8\pi G a^2 \bar{F}}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{F}R - \bar{f}\right) - 3H\dot{\bar{F}}\right]} \tag{3.16}$$

$$w_{curv} = \frac{p_{curv}}{\rho_{curv}} = \frac{\left[h\bar{F} - \ddot{\bar{F}}\right]}{\left[\frac{1}{2}\left(\bar{F}R - \bar{f}\right) - 3H\dot{\bar{F}}\right]} - 1 \tag{3.17}$$

la ecuación de continuidad se determina derivando respecto al tiempo cósmico la ecuación (3.11) y sustituyendo en la ecuación (3.12), con lo cual se obtiene

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H\rho curv(1 + w_{curv}) = \frac{\dot{\bar{F}}}{2\bar{F}^2}\bar{\rho} \tag{3.18}$$

como se verá más adelante, la ecuación de estado se puede determinar a partir de la construcción de la teoría $f(R)$ como la inclusión de la curvatura del fluido.

3.2.2. Ecuaciones de Friedmann modificadas en tiempo conforme

Tomando como métrica la ecuación (2.9), el tensor momento-energía como $T^{\mu}_{\nu} = diag(-\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{p}, \bar{p})$ y siguiendo los resultados obtenidos (ver Apéndice B) se tiene

- Componente Tiempo-Tiempo.

$$3\bar{F}\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2 \bar{\rho} + \frac{a^2}{2}(\bar{F}R - \bar{f}) - 3\mathcal{H}\bar{F}'. \tag{3.19}$$

- Componente Espacio-Espacio

$$\bar{F}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) = -8\pi G a^2 \bar{p} + \frac{a^2}{2}(\bar{F}R - f) - \mathcal{H}\bar{F}' - \bar{F}'', \tag{3.20}$$

en donde, utilizando la ecuación (3.19) en la ecuación (3.20), se obtiene [15]

$$2\mathcal{H}' = \bar{F}'' + 2\mathcal{H}\bar{F}' - \frac{1}{6}(\bar{f} - \bar{F}R) - \frac{8}{3}\pi G a^2(\bar{\rho} + 3\bar{P}). \tag{3.21}$$

En el límite a RG, haciendo $f = R$ $F = 1$ aplicado a (3.19) - (3.21), se obtienen las ecuaciones de Friedmann conforme en RG (1.24) y (1.25) [52].

Se definen dos funciones de la densidad y la presión debidas a la curvatura del fluido efectivo como.

$$\rho_{curv} = \frac{1}{8\pi G a^2 \bar{F}}\left[\frac{a^2}{2}(\bar{F}R - \bar{f}) - 3\mathcal{H}\bar{F}\right], \tag{3.22}$$

$$p_{curv} = \frac{1}{8\pi G a^2 F}\left[\frac{a^2}{2}(\bar{F}R - \bar{f}) - \mathcal{H}\bar{F}' - \bar{F}''\right], \tag{3.23}$$

se define un parámetro w_{curv} para la ecuación de estado, como

$$\begin{aligned} w_{curv} &= \frac{p_{curv}}{\rho_{curv}} \\ &= \frac{2\mathcal{H}\bar{F}' - \bar{F}''}{\frac{a^2}{2}(\bar{F}R - f) - 3\mathcal{H}\bar{F}} - 1, \end{aligned} \tag{3.24}$$

y se determina la ecuación de continuidad derivando con respecto al tiempo conforme la ecuación (3.19) y sustituyendo en la ecuación (3.20) obteniendose [21].

$$\rho'_{curv} + 3\mathcal{H}\rho_{curv}(1 + w_{curv}) = \frac{F'}{F^2}\bar{\rho}. \tag{3.25}$$

Haciendo uso de la ecuación (3.9), en donde se asume la modificación $f(R)$ como la adición de un fluido adicional, se puede reescribir la ecuación de Friedmann (1.25) para la aceleración respecto al tiempo cósmico como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}(\rho_{tot} + 3p_{tot}), \tag{3.26}$$

en donde se usaron las relaciones (1.26), y se establece la relación para $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ como

$$\rho_{tot} + 3\bar{p} + 3p_{curv} < 0, \tag{3.27}$$

$$w_{curv} < \frac{\rho_{tot} + 3\bar{p}}{3\rho_{curv}}. \tag{3.28}$$

Esta última relación permite determinar si alguna forma específica de $f(R)$ da como resultado un universo con expansión acelerada si $w < -1/3$.

3.3. Ecuaciones de campo en teoría $f(R)$ perturbada a primer orden para la métrica FLRW plana conforme en calibración Newtoniana para fluido no perfecto

El propósito de la siguiente sección es mostrar las ecuaciones de campo perturbadas en $f(R)$ métrico bajo la calibración Newtoniana a primer orden, para lo cual es pertinente reescribir las ecuaciones de campo (3.5) en componentes mixtas lo cual implica que las ecuaciones que se usarán a lo largo de la sección son.

$$FG^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}(f - FR) + g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}F - \delta^{\mu}_{\nu}\Box F, \tag{3.29}$$

en donde usando, la teoría de perturbaciones cosmológicas, las cantidades perturbadas a primer orden vienen dadas por

$$\begin{aligned} F &= \bar{F} + \delta F, \\ f &= \bar{f} + \delta f = \bar{f} + \bar{F}\delta R, \\ R &= \bar{R} + \delta R, \\ G^{\mu}_{\nu} &= \bar{G}^{\mu}_{\nu} + \delta G^{\mu}_{\nu}, \\ T^{\mu}_{\nu} &= \bar{T}^{\mu}_{\nu} + \delta T^{\mu}_{\nu}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Las ecuaciones de campo (3.29) sujetas a (3.30) tienen la forma

$$(\bar{F}+\delta F)G^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}(\bar{f}+\bar{F}\delta R - (\bar{F}+\delta F)R) + g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}(\bar{F}+\delta F) - \delta^{\mu}_{\nu}\Box(\bar{F}+\delta F) \tag{3.31}$$

Los resultados obtenidos y mostrados a continuación están descritos detalladamente en los Apéndices B1-B3.

Para este desarrollo se usan las componentes perturbadas de los tensores de Einstein y de Ricci, así como el valor del escalar de Ricci dados en el capítulo 2, en razón de que su construcción no se ve afectada por la introducción de la función $f(R)$. Esto se ve claramente en la ecuación (3.9) en donde todo el efecto de las funciones $f(R)$ se introduce como el efecto de la curvatura del fluido en un tensor momento -energía efectivo [19] [5].

Se tiene, entonces, que las ecuaciones de campo perturbadas a primer orden para la métrica

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Phi)d\tau^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right], \tag{3.32}$$

y el tensor momento energía

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{p}\delta^i_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta\rho^N & (\bar{\rho}+\bar{p})(v^N_i) \\ -(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_i & \delta p^N\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi) \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

quedan descritas por

- Componente tiempo-tiempo

$$-\nabla^2\Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{1}{2\bar{F}}[-8\pi G a^2\delta\rho^N - (\nabla^2 + 3\mathcal{H}')\delta F - 3\bar{F}'(\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi) + 3\mathcal{H}\delta F']. \tag{3.34}$$

- Componente Tiempo-Espacio

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2(\bar{\rho}+\bar{p})v^N + \delta F' - \Phi\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F\right]. \tag{3.35}$$

- Componente Espacio-Espacio

$$a^{-2}\bar{F}[[2\Psi'' - \nabla^2(\Psi-\Phi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j + (\Phi-\Psi)_{,ij}]$$
$$+a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta^i_j = 8\pi G[\delta p^N \delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)] - \frac{1}{2}\delta^i_j(\delta F)R$$
$$+a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}[\mathcal{H}(-2\Phi)\bar{F}' - 2\Psi'\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F'' - \nabla^2\delta F]\delta^i_j. \tag{3.36}$$

Para la ecuación (3.36), de forma similar a como se desarrolla en las ecuaciones de campo perturbadas en RG, se extrae la parte sin traza y la parte con traza, cuyos resultados son respectivamente

$$\boxed{(\Phi-\Psi) = \frac{\delta F}{F} + \frac{8\pi G a^2}{F}\bar{p}\Pi,} \tag{3.37}$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} + \frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi-\Phi) + \frac{\bar{F}'}{\bar{F}}\left(\Psi' + \frac{\Phi'}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2\delta p^N - \left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + \frac{2}{3}\nabla^2\right)\delta F + \mathcal{H}\delta F' + \delta F''\right]. \tag{3.38}$$

Como se había mecionado en el capítulo anterior la forma de las ecuaciones tipo (3.37) son centrales en este trabajo, ya que, la aplicación de la teoría $f(R)$ da como resultado una contribución extra a la presión anisotrópica, lo cual en se observa claramente en la ecuación (3.37) en donde esta contribución viene determinada por $\delta F/F$, y dada la construcción de la misma se atribuye a los efectos de la curvatura del fluido. Es decir incluso haciendo la presión anisotópica Π igual a cero, existe una contribución que solamente depende de la geometría descrita por $f(R)$. De acuerdo a [61] la contribución inherente de la teoría $f(R)$ a la presión anisotrópica no exhibe un comportamiento que replique el comportamiento en RG en donde $\Psi = \Phi$ sin implicar *singularidades fatales* , termino utilizado por Kunz *et al.* en [61] para describir las singularidades provocadas en universos tipo de Sitter en donde las soluciones para diferentes modelos de juguete implican valores propios infinitos, y oscilaciones rápidas de la curvatura con amplitud arbitraria a medida que $\Psi - \Phi \longrightarrow 0$. Exceptuando el límite a RG el cual resulta en que el grado de libertad dado por F se anula cuando $f(R) = R$, es decir, dado que $F = 1$ cuando $f(R) = R$, F queda determinado y ya no corresponde a un grado de libertad del modelo.

Ahora bien la presencia de la presión anisotrópica esta ligada al efecto de las lentes gravitacionales débiles (Weak Lensing),un efecto por el cual las teorías PPF usan parametrizaciones que fenomenologicamente buscan dar una explicación como se verá en la siguiente sección.

Finalmente, se calculan las ecuaciones de Raychaudhuri $\tilde{G}^k_k - \tilde{G}^0_0$ y la traza de las ecuaciones de campo $\tilde{G}^\mu_\mu = \tilde{G}^k_k + \tilde{G}^0_0$ ó usando directamente la ecuación (3.6), las cuales son

- Ecuación de Raychaudhuri

$$3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + \left(6\mathcal{H}' + \nabla^2 + 3\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi + \frac{\bar{F}'}{2\bar{F}}\left(3\Psi' + 3\Phi'\right) = \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2(\delta\rho^N + 3\delta p^N) - \left(6\mathcal{H}^2 + \nabla^2\right)\delta F + 3\delta F''\right]. \quad (3.39)$$

- Traza de las ecuaciones de campo.

$$\left[-\nabla^2 + \frac{a^2 R}{3}\right]\delta F + 2\mathcal{H}\delta F' + \delta F'' = \frac{8\pi G a^2}{3}\left(-\delta\rho^N + 3\delta p^N\right) + \bar{F}'(4\mathcal{H} + 3\Psi' + \Phi') + 2\Phi\bar{F}'' - \frac{1}{3}a^2\bar{F}\delta R. \quad (3.40)$$

En donde $\delta f = \bar{F}\delta R$ y $\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x^i} = 0$, en tanto que el escalar de Ricci R no depende de las coordenadas, y $\frac{\partial F}{\partial \tau} = F'$.

Usando la Ecuación (3.35) en la ecuación (3.34) se obtiene la ecuación de Poisson modificada.

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{2F}\left[8\pi G a^2\left(\delta\rho^N + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})v^N\right) + (\nabla^2 + 3\mathcal{H}' - 3\mathcal{H}^2)\delta F + 3F'(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)\right]. \quad (3.41)$$

Esto habilita para describir las ecuaciones de campo de forma análoga a como se describen en teorías de parametrizaciones post-Friedmannianas , en donde todos los efectos de la modificación se asignan a las contribuciones de parámetros adicionales.

3.4. Parámetros de anisotropía

En principio cualquier, modificación a la RG se puede describir mediante la inclusión de un fluido efectivo [57], determinado fenomenológicamente y asociado a la existencia de la energía oscura o como en el caso de este trabajo se asociada a una curvatura en el tensor momento-energía efectivo, las cuales siguen una ley de conservación del momento-energía, como se observa en la ecuación (3.48).

Existen el la literatura muchas formas de realizar este tipo de parametrizaciones, las cuales van a estar caracterizadas por 3 funciones μ, η y Σ (en la mayoría de los casos), de manera que se dividen en dos enfoques diferentes. Tipo 1: son las parametrizaciones que dependen directamente de las observaciones sin necesidad de la evolución de las ecuaciones de campo. Tipo 2: son aquellas parametrizaciones en las cuales cada uno de estos parámetros tiene algún significado físico con el fin de dar consistencia con el modelo usado.

En general este tipo de parametrizaciones, se escriben [8] [71] como

$$\begin{aligned} k^2\Psi &= 4\pi G a^2\rho[1 + \mu(k,a)]\delta_m, \\ k^2(\psi + \phi) &= 4\pi G a^2[1 + \Sigma(k,a)]\delta_m, \\ \frac{\Psi}{\Phi} &= \eta \end{aligned} \quad (3.42)$$

en donde el parámetro Σ esta relacionado con μ y η mediante [27]

$$\Sigma(k,a) = \frac{\mu(1+\eta)}{2}. \tag{3.43}$$

y tiene la característica de romper el degeneramiento entre los parámetros η y μ [16] [27].

Estós parámetros han sido de gran utilidad para estudiar los espectros de potencia de materia en códigos tipo CAMB [16] [27] ya que introducen de forma natural las desviaciones de RG como funciones escalares.

Las parametrizaciones anteriormente señaladas están intrínsecamente relacionadas con el fenómeno de las lentes gravitacionales débiles [23], de manera que el uso de datos que corroboren las predicciones de los modelos o experimentos refinados abren el camino para verificar la consistencia de los modelos propuestos, como *Dark Energy Survey* [1],*Large Synoptic Survey telescope*[2] y *Euclid*[3] , proporcionan una vía para realizar estas verificaciones por medio del cizallamiento de lente gravitacional y el conteo de galaxias a un determinado corrimiento al rojo.

A continuación se muestran algunos ejemplos de parametrizaciones.

Tipo 1

Zhang *et al* [75]. Hacen la parametrización

$$\begin{aligned} \eta_{ZL} &= \frac{1}{1-\eta}, \\ \tilde{G}_{eff} &= \mu(1-\eta/2) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Estos autores introducen la estadística E_G, que consiste en usar una correlación cruzada entre un estimado del campo de velocidades locales de las distorsiones espaciales a cierto corrimiento al rojo, y los potenciales gravitacionales inferidos a través de un mapa galáctico por medio de lentes gravitacionales.

Bertschinger y Zukin [17] proponen una parametrización reducida a 1 parámetro que toma en cuenta la conservación de las perturbaciones de la curvatura en las longitudes de onda largas.

$$\gamma_{BZ} = 1 - \beta a^s \tag{3.45}$$

en la cual β y s son constantes, y, γ_{BZ} depende únicamente del tiempo, las condiciones de independencia de escala se relajan haciendo el cizallamiento despreciable a grandes escalas y descartando los gradientes espaciales, lo cual permite escribir parametrizaciones de la forma

$$\begin{aligned} \gamma_{BZ} &= \frac{1+\beta_1 k^2 a^s}{1+\beta_2 k^2 a^s}, \\ \mu(1-\eta) &= G\frac{1+\alpha_1 k^2 a^s}{1+\alpha_2 k^2 a^s}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

con α_i y β_i constantes.

Tipo 2

Amendola *et al*, modifican las ecuaciones mediante dos parámetros [41] [8]

$$k^2\phi = -4\pi G Q(k,a) a\rho_m \Delta_m, \tag{3.47}$$

en donde G es la constante gravitacional medida hoy en el sistema solar. $Q(k,a)$ es una cantidad fenomenológica general que describe la modificación a la Relatividad General, de forma similar se parametriza la presión anisotrópica relacionada con el potencial ψ como

$$\psi = [1+\eta(k,a)]\phi. \tag{3.48}$$

La dependencia de las funciones Q y η con respecto a k se debe a que no hay degeneramiento con la normalización de la amplitud del espectro de potencias de la materia y se puede probar [72].

Modelos tipo mecanismo *camaleón* en los cuales un escalar ϕ se acopla con CDM mediante una función $\alpha(\phi)$, tiene como parámetros

$$\begin{aligned}
\mu(a,k) &= \frac{m^2a^2 + \left(1+1/2\alpha_\phi^2\right)k^2}{m^2a^2+k^2} e^{-\alpha(\phi)/M_p}, \\
\eta(a,k) &= \frac{m^2a^2 + \left(1-1/2\alpha_\phi^2\right)k^2}{m^2a^2+k^2}, \\
\Sigma(a,k) &= e^{-\alpha(\phi)/M_p},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

en donde $d\alpha/d\phi = \alpha_\phi$ y m es un factor de masa efectivo dependiente del tiempo.

Aunque los modelos PPF son una buena aproximación para describir las desviaciones de la RG,cuentan con problemas señalados detalladamente en [64] [31] [12], uno de ellos es que, no es claro que tipo de teorías implica la escogencia de un tipo específico de parámetros.

3.5. Parámetros de anisotropía en $f(R)$ perturbada a primer orden para la métrica FLRW plana conforme en calibración Newtoniana para fluido no perfecto

De acuerdo a lo descrito en la sección anterior, existen dos enfoques mediante los cuales se establecen parametrizaciones. De esta manera se desarrollara una parametrización extendida a $f(R)$, usando las ecuaciones en el espacio de configuraciones.

A partir de la ecuación (3.41) y utilizando el invariante de calibración [5] [9] [68]

$$\delta^* = \frac{1}{\bar{F}}\left[\delta^N + 3\mathcal{H}(1+w)v^N\right], \tag{3.50}$$

haciendo el cambio de variable

$$\mu = \frac{1}{4\pi G a^2 F\bar{\rho}\delta^*}\left[(\nabla^2 + 3\mathcal{H}' - 3\mathcal{H}^2)\delta F + 3F'(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)\right], \tag{3.51}$$

la ecuación (3.41) es

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G a^2 \left[1+\mu\right]\bar{\rho}\delta^*, \tag{3.52}$$

con lo cual se tiene una relación general entre el parámetro de anisotropía μ las derivadas de la función $f(R)$.

Por otro lado, la ecuación (3.37) indica que hay una contribución extra en la presión anisotrópica [61] dada por

$$\Pi_{curv} = \frac{\delta F}{F}, \tag{3.53}$$

entonces la ecuación (3.37) toma la forma

$$\Phi - \Psi = \eta, \tag{3.54}$$

en donde

$$\eta = \Pi_{curv} + 8\pi G a^2 \bar{p}\Pi, \tag{3.55}$$

aplicando el operador ∇^2 a la ecuación (3.54) y sumando 2 veces la ecuación (3.52) se obtiene.

$$\nabla^2(\Phi+\Psi) = \nabla^2\eta + 8\pi G a^2\left[1+\mu\right]\bar{\rho}\delta^*, \tag{3.56}$$

$$\nabla^2(\Phi+\Psi) = 8\pi G a^2(1+\Sigma)\bar{\rho}\delta^*, \tag{3.57}$$

en donde

$$\Sigma = \frac{\nabla^2\eta}{8\pi G a^2\rho\delta^*} + \mu, \tag{3.58}$$

de manera que sin suposiciones sobre la forma específica de $f(R)$, o consideraciones sobre la aplicabilidad en el sub-horizonte o el super-horizonte de Hubble, las ecuaciones que describen la evolución de las ecuaciones de campo (3.31) - (3.39) quedan sujetas, de forma general, a los valores de los parámetros μ, η y Σ.

CAPÍTULO 4

Códigos para anisotropías de la radiación cósmica de fondo CAMB

En este capítulo se describen las generalidades de los códigos CAMB y FRCAMB los cuales proporcionan un método eficiente para cuantificar las anisotropías encontradas en la radiación cósmica de fondo. Inicialmente se describe la construcción y características del código CAMB, luego se describen las extensiones realizadas por el código FRCAMB y finalmente se hace una comparación de sus resultados mediante las gráficas de los espectros de materia y de potencia.

4.1. CAMB

El código CAMB surge en el año 2000 como necesidad de mejorar el ya existente CMBFAST, el cual estaba codificado en fortran77, hecho que implicaba serias limitaciones y era casi imposible de extender en ese mismo lenguaje [11]. La mejora inicial es la inclusión de universos cerrados, para los cuales, de acuerdo a la información obtenida para 1999 [69], el universo se encontraba dentro de un factor $\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 \pm 0.2$ de la densidad cítica requerida para un universo plano, y, dado que se tienen universos cerrados con $\Omega_{tot} > 1$ se abarca un sector importante del espacio de parámetros posibles. Entonces se establece que se debe construir un modelo que permita analizar universos en el rango $0.4 < \Omega_{tot} < 1.6$. Desde entonces el código se ha venido actualizando incluyendo el efecto del las lentes gravitacionales débiles, el biespectro, modelo de quintaessencia, perturbaciones cosmológicas y aumentando el grado de precisión hasta 0.1 %.

4.1.1. Estructura del CAMB

El código se encuentra escrito en lenguaje fortran90 y puede dividirse de la siguiente manera de acuerdo a [62].

- **Archivos Principales**: Inidriver.f90, Sigma8.F90, tester.f90.
- **Archivos de utilidad sin información cosmológica**: Bessels.f90, utils.f90, inifile.f90, Writefits.f90, subroutines.f90, Matrix_utils.f90

- **Archivos de utilidad con infomación cosmológica**: cosmorec.F90, modules.f90, power_tilt.f90, recfast.f90, reionization.f90, SeparableBispectrum.F90, camb.f90, cmbmain.f90, equations.f90, halofit.f90, hyrec.F90, lensing.f90.

Dentro de los archivos de utilidad con información cosmológica están descritos lo efectos fenomenológicos de: Recombinación, Reionización, Biespectro, lentes gravitacionales, modelo de quintaesencia, transformaciones de calibración y perturbaciones cosmológicas.

4.1.2. Parámetros del código

Para desarrollar los cálculos necesarios el código requiere de la información proveniente del CMB por lo tanto a continuación se describen de forma breve cada uno de estos parámetros y los valores obtenidos cuando se corre la aplicación "./camb"[34].

Reion Redshift (Redshift de reionización) : Mide dónde la fracción e reionización es la mitad de su máximo [11].

`Om_b h^2` ($\Omega_b h^2$) : Es la densidad de materia bariónica hoy. Sus unidades se calculan a partir de $\frac{3}{8\pi G}(100 kms^{-1}Mpc^{-1})$.

`Om_c h^2` ($\Omega_c h^2$): Es la densidad de materia oscura física del universo hoy. Se mide en unidades 1.123×10^{-5} masas de protón por centímetro cúbico.

`Om_nu h^2` ($\Omega_\nu h^2$):Densidad física de neutrinos hoy.

`Om_Lambda` (Ω_λ): La densidad de energía oscura hoy medida como una fracción de la densidad crítica del universo.

`Om_k` (Ω_k):Es la curvatura del Espacio-tiempo.

`Om_m` (Ω_m):Densidad de materia incluyendo la materia fría y bariónica como una fracción de la densidad crítica del universo.

`100 theta`: Razón del horizonte de sonido respecto de la distancia de diámetro angular

`Reion opt depth`: Distancia ópica de reionización

`Age of Universe`: Edad del universo medida en $Giga - años$

`zstar`: Corrimiento al rojo de la última dispersión determinada por la fórmula de Hu y Sugiyama (1996)

`zdrag`:Describe el tiempo en el cual los bariones son liberados del arrastre Compton de los fotones, en términos de una integral pesada sobre la tasa de dispersión Thompson.

`z_EQ if (v_nu=1)`: Medida del corrimiento al rojo si los neutrinos fuesen relativistas.

`tau_recomb/Mpc`: Tiempo de recombinación sobre MPC.

`sigma8 (all matter)`: Desviación estándar de las fluctuaciones de materia en el universo una vez que la distribución se ha convolucionado con una función esférica *top-hat* de 8 Megaparsecs.

4.1.3. Modelo cosmológico en CAMB

El modelo usado en el paquete CAMB es el determinado por las ecuaciones de campo para relatividad general más una constante cósmológica Λ de manera que el modelo usado en CAMB es el modelo ΛCDM.

4.2. FRCAMB

El código FRCAMB es propuesto por Jian-hua He en 2012 [38] [39], basado en la misma estructura del código CAMB. Está sentado en las bases de la teoría $f(R)$ bajo una métrica FLRW perturbada en tiempo cósmico, de tal manera que la función $f(R)$ replica el comportamiento del modelo ΛCDM.

Las modificaciones insertadas se encuentran en los archivos cmb- main.f90, equations.f90 ,modules.f90, subroutines.f90, inidriver.F90 y params.ini.

Las modificaciones de estos archivos incluyen, un modelo $f(R)$ en métrica FLWR plana para el gauge Newtoniano y el gauge síncrono, los cuales son descritos de forma extensa en los archivos maple del paquete FRcamb y de los cuales se obtienen los códigos en fortran90.

De acuerdo a [38] la función $f(R)$ ajustada al modelo Λ CDM requerida, se determina analíticamente a partir de la segunda ecuación de friedman en tiempo cósmico [66] [63] [32]

$$H^2 = \frac{FR - f}{6F} - H\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\kappa^2}{3F}\rho, \tag{4.1}$$

en donde intercambiando las derivadas de tiempo cósmico t por derivadas de la variable $x = ln(a)$ se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2}F + \left(\frac{1}{2}\frac{LnE}{dx} - 1\right)\frac{dF}{dx} + \left(\frac{1}{2}\frac{LnE}{dx} - \frac{2K}{E}e^{-2x}\right)F = \frac{\kappa^2}{3E}\frac{d\rho}{dx} \tag{4.2}$$

con

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{H^2}{H_0} \\ R &\equiv 3\left(\frac{dE}{dx} + 4E\right) \\ \frac{d\rho}{dx} &= -3(\rho + p) \end{aligned} \tag{4.3}$$

y por facilidad en el cálculo se toman las unidades de R y ρ como las unidades de H_0^2, de manera que para conseguir un modelo acorde con la historia de expansión del Universo y las datos observacionales se parametriza Ex, usando una ecuación de estado para la densidad de energía oscura efectiva

$$E(x) = \Omega_r^0 e^{-4x} + \Omega_m^0 e^{-3x} + \Omega_d^0 e^{-3\int_x^0 (1+w)dx} \tag{4.4}$$

en donde bajo la condición

$$E(x) = +\Omega_m^0 e^{-3x} + \Omega_d^0 \tag{4.5}$$

implica un modelo de polvo con $K = 0$ y una ecuación de estado con energía oscura $w = -1$, la cual se puede resolver analíticamente como

$$F(x) - 1 = C(e^{3x})_2^{p_-} F_1 \left[q_-, p_-; r_-; -3e^{3x} \frac{\Omega_d^0}{\Omega_m^0} \right] + D(e^{3x})_2^{p_+} {}_2F_1 \left[q_+, p_+; r_+; -3e^{3x} \frac{\Omega_d^0}{\Omega_m^0} \right] \tag{4.6}$$

con los índices $p_\pm$, $q_\pm$ $r_\pm$ están dados por las condiciones de la ecuación, y ${}_2F_1[a, b; c; z]$ la la función Gausianna hipergeométrica. Un modelo viable de $f(R)$ debería ser de tipo *camaleón* de tal forma que regrese al modelo estándar

$$lim_{x \to \text{ínf}} F(x) = 1 \tag{4.7}$$

Esto implica que $C = 0$ y $f(R)$ se recobra mediante

$$f(R) = \int F(x) \frac{dR}{dx} dx \tag{4.8}$$

con lo cual $f(R)$ es

$$f(R) = R - 2\lambda - \bar{\omega} \left(\frac{\Lambda}{R - 4\Lambda} \right)_2^{p_+ + 1} F_1 \left[q_+, p_+ - 1; r_+; -\frac{\Lambda}{R - 4\Lambda} \right], \tag{4.9}$$

con

$$\bar{\omega} = \frac{D(R_0 - 4\Lambda)^{p_+}}{(p_+ - 1)/\Lambda^{p_+ - 1}} \tag{4.10}$$

de manera que $f(R)$ queda definido en función de D.

Sin embargo para un modelo de universo curvo $\Omega_k \neq 0$ se resuelve la ecuación (4.2) numéricamente desde la época de materia profunda para la cual $K = 0$ y sin pérdida alguna de generalidad la ecuación (4.6) da como resultado

$$\begin{aligned} F(x) &\sim 1 + D(e^{3x})^{p_+} \\ \frac{dF(x)}{dx} &\sim 3Dp_+ + (e^{3x})^{p_+}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Las ecuaciones (4.11) son tomadas como las condiciones iniciales de la ecuación (4.2), en donde D caracteriza la familia de modelos $f(R)$.

Se introduce, también, un parámetro a_{ini} el cual establece el punto en el cual se inicia la perturbación numérica para $f(R)$.

4.3. CAMB vs FRCAMB

Se procede a comparar los resultados obtenidos por CAMB y FRcamb. Para tal efecto se toma en consideración que los parámetros bajo los cuales se construyen los archivos `test_matterpower.dat, test_scalCls.dat` y `FR_matterpower.dat, FR_scalCls.dat`, son los mismos parámetros cosmológicos, para lo cual se eligen los determinados por el CAMB y se modifica el archivo `params.ini` en el paquete FRcamb.

La comparación parte de la construcción de el espectro de potencias, ya que dada su construcción,el espectro de materia es igual a la correlación de 2 puntos de la densidad [46] de contraste

$$< \delta(\boldsymbol{k_1})\delta(\boldsymbol{k_2}) >= (2\pi)^3\delta_D(\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k_2})P(\boldsymbol{k_1}) \tag{4.12}$$

y de la cual se puede escribir $P(k, a)$ como

$$P(k, a) = |\delta^2(k, a)|, \tag{4.13}$$

con δ determinado mediante la ecuación de Mezaros [26] y se caracteriza de forma general en todo tiempo [45] como

$$\delta \sim T(k)D^*(a) \tag{4.14}$$

lo cual da como resultado el espectro de potencia de la materia

$$P(k, a) = k^n T^2(k)D^{*2}(a) \tag{4.15}$$

en donde $T(k)$ es la función de transferencia, que describe la evolución de las perturbaciones a través de las épocas de cruce de horizonte y la transición radiación - materia, y $D^*(a)$ es la función de crecimiento, que describe el crecimiento independiente de longitud de onda en tiempos tarde.

De esta manera la información de cada uno de los modelos y por consiguiente de sus gráficas, está codificada en las funciones de transferencia y de crecimiento de la ecuación (4.15).

Con lo anterior se obtienen las gráficas de espectro de materia y potencia.

En la figura (4.1), se observa que para diferentes valores de D el valor $k \sim 0.02Mpc^{-1}$ el pico del espectro permanece aproximadamente igual de lo cual se puede inferir que la correlación de 2 puntos no se desplaza de forma significativa por la acción de $f(R)$. Por otro lado las oscilaciones acústicas Bariónicas (BAO), asociadas a las ondulaciones en la gráfica a partir de $k \sim 0.02Mpc^{-1}$ [42], se desfasan por la acción de $f(R)$ a medida que se reducen las escalas y dan cuenta de la transición radiación-materia. La línea roja la cual corresponde a un universo con curvatura dada por $\Omega_K = 0.2$ y un modelo $f(R)$ equivalente a ΛCDM haciendo $D = 0$, se observa que después del pico de la igualdad materia-radiación el horizonte se cierra, sin embargo usando el hecho de que de acuerdo a los datos de Wmap[34] a 9 años muestran que $\Omega_K \sim -0.037 \pm 0.04$, la linea roja sólo funciona como un modelo de juguete para ejemplificar el comportamiento de $f(R)$ codificado como una función que hace mímica al modelo ΛCDM.

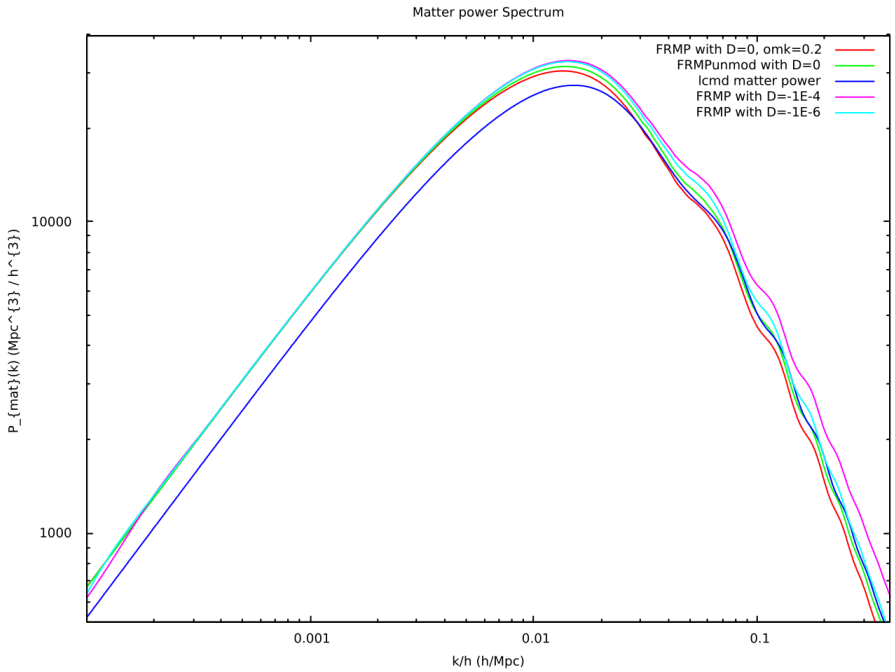

FIGURA 4.1. Se muestra el espectro de materia para FRcamb y el espectro de materia de CAMB, para diferentes valores de D, y en la línea roja para D=0 con $\Omega_k = 0.2$

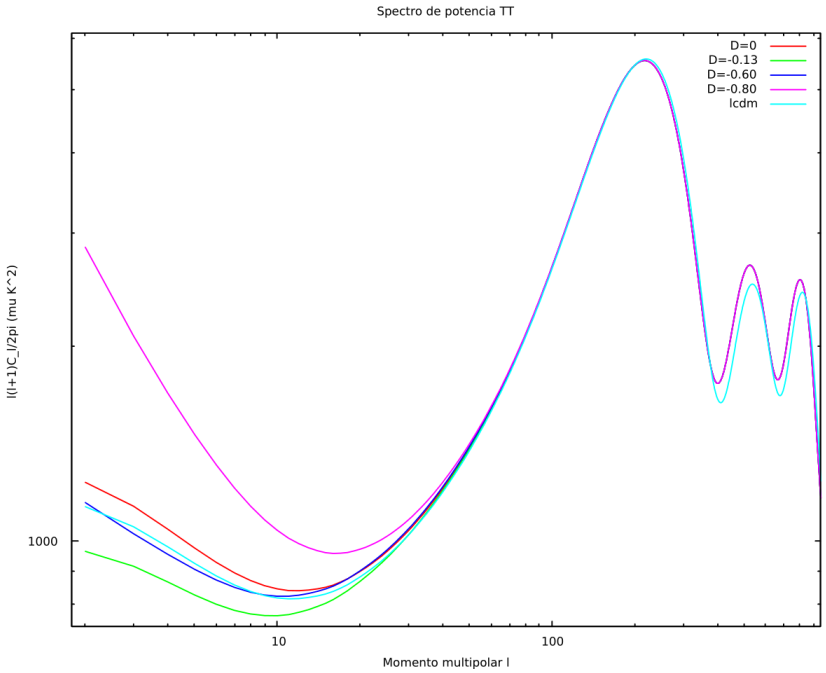

FIGURA 4.2. Se muestra el espectro de potencia en el modo Tensor-Tensor (TT) dado por el código FRcamb para diferentes valores de D y el espectro potencia en modo TT para CAMB (linea magenta),

En la figura (4.2) se observa que el primer pico del espectro de potencia el cual da cuenta de la geometría del espacio-tiempo justo después de inflación permanece aproximadamente en el mismo valor $l \sim 220$ y con los mismos valores de amplitud, lo cual permite establecer

que los modelos $f(R)$ para diferentes valores D concuerdan con el modelo ΛCDM. De forma similar a lo mostrado en el espectro de materia, las oscilaciones acústicas asociadas al segundo y tercer pico, se encuentran desfasadas y con amplitudes mayores, en donde es pertienete anotar que las funciones $f(R)$ dadas por FRCAMB ajustando al espectro de potencia del Wmap a 9 años, sin embargo para establecer el grado de confiabilidad del modelo habría que desarrollar un analisis que sale de las pretenciones del presente trabajo.

Se tiene entonces que la versatilidad de la teoría $f(R)$ permite construir modelos que hacen mímica al modelo ΛCDM pero que dada la estructura de las funciones $f(R)$ muestran comportamientos diferentes a grandes y pequeñas escalas.

APÉNDICE A

Perturbación a las ecuaciones de campo en RG

A.1. Perturbación a las ecuaciones de campo en RG a primer orden bajo la calibración Newtoniana

Métrica FLRW Perturbada

$$ds^2 = a^2(\tau)\left(-(1+2\Phi)d\tau^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right), \tag{A.1}$$

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -(1+2\Phi) & 0 \\ 0 & (1-2\Psi)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Las componentes de la métrica FLRW son

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(\tau)(1+2\Phi), \\ g_{0i} &= g_{i0} = 0, \\ g_{ij} &= a^2(\tau)(1-2\Psi)\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Inversa de la métrica FLRW Perturbada

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{-(1+2\Phi)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-2\Psi)}\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Debido a que Φ y Ψ cumplen con

$$\begin{aligned} |\Phi| &<< 1, \\ |\Psi| &<< 1, \end{aligned} \tag{A.5}$$

y usando

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3..., \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3...,\end{aligned} \tag{A.6}$$

en donde a primer orden se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{-(1+2\Phi)} &= -(1-2\Phi) = -1 + 2\Phi, \\ \frac{1}{(1-2\Psi)} &= 1 + 2\Psi,\end{aligned} \tag{A.7}$$

y las componentes de la inversa de la métrica (A.1) son

$$\begin{aligned}g^{00} &= a^{-2}(\tau)(-1+2\Phi) \\ g^{0i} &= g^{i0} = 0 \\ g^{ij} &= a^{-2}(\tau)(1+2\Psi)\delta^{ij}\end{aligned} \tag{A.8}$$

Evaluación de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha}[g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}], \tag{A.9}$$

con β=0

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{0\alpha}[g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}]. \tag{A.10}$$

Debido a que la métrica es diagonal, α debe ser igual a 0 obteniendose

$$\Gamma^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00}[g_{0\mu,\nu} + g_{\nu 0,\mu} - g_{\mu\nu,0}], \tag{A.11}$$

en donde μ y ν corren de 0 a 3 cada uno, de manera que, considerando μ=ν=0, se obtiene la conexión Γ^0_{00}

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2} g^{00}[g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}], \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \frac{1(-1+2\Phi)}{2a^2(\tau)}[(a'(\tau)2a^2(\tau)(-1-2\Phi)) + (a^2(\tau)(-2\Phi'(x\tau)))], \\ \Gamma^0_{00} &= \frac{-1+2\Phi}{2a^2}[(2aa'(-1-2\Phi)) - (2a^2\Phi')], \\ \Gamma^0_{00} &= (-1+2\Phi)[\frac{a'}{a}(-1-2\Phi) - (\Phi'))], \\ \Gamma^0_{00} &= \frac{a'}{a}[(1+2\Phi-2\Phi-4\Phi^2) + \Phi' - \Phi' 2\Phi],\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} + \Phi', \tag{A.14}$$

entonces usando $\frac{a'}{a} = \mathcal{H}$ se obtiene

$$\Gamma^0_{00} = \mathcal{H} + \Phi'. \tag{A.15}$$

Ahora se hace $\nu = i$ para calcular $\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0}$, por medio de la propiedad de simetría que poseen las conexiones para espacio-tiempos sin torsión.

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0i} &= \frac{1}{2} g^{00}[g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}], \\ \Gamma^0_{0i} &= \frac{1(-1+2\Phi)}{2a^2(\tau)}[-a^2(\tau)2\Phi_{,i} + 0 - 0], \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Phi_{,i} \tag{A.17}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \Phi_{,i} \tag{A.18}$$

En el caso $\mu = j$ y $\nu = i$ se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{ji} &= \frac{1}{2} g^{00}[g_{j0,i} + g_{i0,j} - g_{ji,0}], \\ \Gamma^0_{ji} &= \frac{1(-1+2\Phi)}{2a^2(\tau)}[-(-2\Psi a^2(\tau)) + (1-2\Psi)2a(\tau)a'(\tau)], \\ \Gamma^0_{ji} &= \frac{1(-1+2\Phi)}{2a^2(\tau)}[2\dot{\Psi}a^2(\tau) + 2aa' - 4aa'(\Psi)], \\ \Gamma^0_{ji} &= \frac{1(-1+2\Phi)}{2}[2\dot{\Psi} + 2\frac{a'}{a} - 4\frac{a'\Psi}{a}], \\ \Gamma^0_{ji} &= -\dot{\Psi} - \frac{a'}{a} + 2\frac{a'\Psi}{a} + 2\Phi\Psi + 2\frac{a'\Psi}{a} - 2\frac{a'\Phi\Psi}{a}, \\ \Gamma^0_{ji} &= -\dot{\Psi} - \mathcal{H} + 2\mathcal{H}\Psi + 2\mathcal{H}\Psi, \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\Gamma^0_{ji} = (-\dot{\Psi} + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta_{ij}, \tag{A.20}$$

Para el caso $\beta = k$.

$$\Gamma^k_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{k\alpha}[g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}] \tag{A.21}$$

debido a que la métrica es diagonal, α debe ser iguala m que es otro indice que representa la parte espacial

$$\Gamma^k_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{km}[g_{m\mu,\nu} + g_{\nu m,\mu} - g_{\mu\nu,m}] \tag{A.22}$$

tanto μ como ν deben correr de 0 a 3 y como en el caso anterior tomamos primero la parte donde μ=ν=0

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{00} &= \frac{1}{2}g^{km}[g_{m0,0} + g_{0m,0} - g_{00,m}]\delta^k_m, \\
\Gamma^k_{00} &= \frac{(1+2\Psi)}{2a^2}[0 + 0 - (-a^2 2\Phi_{,m}]\delta^k_m, \\
\Gamma^k_{00} &= (\Phi_{,m} + 2\Psi\Phi_{,m})\delta^k_m, \\
\Gamma^k_{00} &= \Phi_{,m}\delta^k_m = \Phi_{,k},
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\Gamma^k_{00} = \Phi_{,k}. \tag{A.24}$$

Para el caso $\mu = 0$ y $\nu = i$.

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{0i} &= \frac{1}{2}g^{km}[g_{m0,i} + g_{im,0} - g_{0i,m}]\delta^k_m, \\
\Gamma^k_{0i} &= \frac{1}{2}g^{kk}[g_{k0,i} + g_{ik,0} - g_{0i,k}], \\
\Gamma^k_{0i} &= \frac{1(1+2\Psi)}{2a^2}[0 + (2aa'(1-2\Psi) - 2a^2\dot{\Psi})\delta^k_i - 0], \\
\Gamma^k_{0i} &= (1+2\Psi)[\mathcal{H}(1-2\Psi) - \dot{\Psi}]\delta^k_i, \\
\Gamma^k_{0i} &= (1+2\Psi)[\mathcal{H} - 2\mathcal{H}\Psi - \dot{\Psi}]\delta^k_i, \\
\Gamma^k_{0i} &= [\mathcal{H} - 2\mathcal{H}\Psi - \dot{\Psi} + 2\mathcal{H}\Psi]\delta^k_i,
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\Gamma^k_{0i} = (\mathcal{H} - \dot{\Psi})\delta^k_i \tag{A.26}$$

Teniendo en cuenta la simetría se obtiene

$$\Gamma^k_{0i} = \Gamma^k_{i0} = (\mathcal{H} - \dot{\Psi})\delta^k_i \tag{A.27}$$

En el caso de $\beta = k$, $\mu = j$ y $\nu = i$.

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ji} &= \frac{1}{2}g^{km}[g_{mj,i} + g_{im,j} - g_{ji,m}]\delta^k_i, \\
\Gamma^k_{ji} &= \frac{1}{2}g^{kk}[g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ji,k}], \\
\Gamma^k_{ji} &= \frac{1(1+2\Psi)}{2a^2}[-a^2 2\Psi_{,i}\delta^k_j - a^2 2\Psi_{,j}\delta^i_k + a^2 2\Psi_{,k}\delta_{ji}],
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\Gamma^k_{ji} = -[\Psi_{,i}\delta^k_j + \Psi_{,j}\delta^i_k - \Psi_{,k}\delta_{ji}]. \tag{A.29}$$

A.2. Perturbación del tensor de Ricci

El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ viene dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}. \tag{A.30}$$

Componente R_{00}

En el caso de $\mu = 0$ y $\nu = 0$.

$$R_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}, \tag{A.31}$$

se hace correr α y β de 0 a 3 expresando las coordenadas espaciales de 1 a 3 con los índices latinos i y j

$$\begin{aligned} R_{00} = \Gamma^{0}_{00,0} + \Gamma^{i}_{00,i} - \Gamma^{0}_{00,0} - \Gamma^{i}_{0i,0} \\ + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{i}_{0i}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{0}_{i0}\Gamma^{i}_{00} + \Gamma^{i}_{ji}\Gamma^{j}_{00} \\ - \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{i}_{00}\Gamma^{0}_{0i} - \Gamma^{0}_{j0}\Gamma^{j}_{00} - \Gamma^{i}_{j0}\Gamma^{j}_{0i}, \end{aligned} \tag{A.32}$$

cancelando términos semejantes y de segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned} R_{00} = \Phi_{,ii} - \delta^{j}_{i}(\mathcal{H}' + \Psi'') + \delta^{j}_{i}(\mathcal{H} - \dot{\Psi})(\mathcal{H} + \Phi') \\ - (\Psi_{,i}\delta^{k}_{j} + \Psi_{i}\delta^{k}_{i} - \Psi_{,k}\delta_{ji})\Phi_{,i}) \\ - \Phi_{,i}\Phi_{,i} - \delta^{j}_{i}(\mathcal{H} - \dot{\Psi})\delta^{k}_{j}(\mathcal{H} - \dot{\Psi}), \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$R_{00} = \Phi_{,ii} - 3\mathcal{H}' + 3\Psi'' + 3(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}\Psi + \mathcal{H}\Phi' - \Psi'\Phi') - 3(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}\Psi' + \Psi^2), \tag{A.34}$$

$$R_{00} = \Phi_{,ii} - 3\mathcal{H}' + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}^2 - 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}^2 + 6\mathcal{H}\Psi', \tag{A.35}$$

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi'). \tag{A.36}$$

Se hace conveniente expresar el tensor de Ricci en términos de componentes mixtas, para lo cual no se pueden simplemente subir y bajar los índices, se usa la relación

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu} = (\bar{g}^{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\alpha})(\bar{R}_{\alpha\nu} + \delta R_{\alpha\nu}) = \bar{R}^{\mu}_{\nu} + \delta g^{\mu\alpha}\bar{R}_{\alpha\nu} + \bar{g}^{\mu\alpha}\delta R_{\alpha\nu}, \tag{A.37}$$

aplicado a R_{00} se obtiene

$$R^{0}_{0} = (-1 + 2\Phi)a^{-2}(-3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\dot{\Psi} + 3\mathcal{H}\Phi'), \tag{A.38}$$

simplificando términos de segundo orden se obtiene

$$R^{0}_{0} = 3\mathcal{H}'a^{-2} - a^{-2}\left(\nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi') + 6\mathcal{H}'\Phi\right). \tag{A.39}$$

Componente R_{0i}

Cuando $\mu = 0$ y $\nu = i$

$$R_{0i} = \Gamma^{\alpha}_{0i,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,i} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{0i} - \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\Gamma^{\beta}_{0\alpha}, \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned} R_{0i} = \Gamma^{0}_{0i,0} - \Gamma^{0}_{00,i} + \Gamma^{j}_{0i,j} - \Gamma^{j}_{0j,i} \\ + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{0i} + \Gamma^{j}_{0j}\Gamma^{0}_{0i} + \Gamma^{0}_{k0}\Gamma^{k}_{0i} + \Gamma^{j}_{kj}\Gamma^{k}_{0i} \\ - \Gamma^{0}_{0i}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{j}_{0i}\Gamma^{0}_{0j} - \Gamma^{0}_{ki}\Gamma^{k}_{00} - \Gamma^{j}_{ki}\Gamma^{k}_{0j}, \end{aligned} \tag{A.41}$$

cancelando términos semejantes y de segundo orden

$$\begin{aligned} R_{0i} = \Phi'_{,i} - \Phi'_{,i} + (-\Psi'_{,i})\delta^{k}_{i} - 3(-\Psi_{ji} + 3(\mathcal{H} - \Psi')(\Phi_{,i}) \\ - (-\Psi' + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta ij(\Phi_{,k}), \end{aligned} \tag{A.42}$$

$$R_{0i} = \Phi'_{,i} - \Phi'_{,i} - \Psi'_{,i} + 3\Psi_{,i} + 3\mathcal{H}\Phi' i - \Phi_{,k}\mathcal{H}, \tag{A.43}$$

$$R_{0i} = 2\Psi'_{,i} + 2\mathcal{H}\Phi_{,i}, \tag{A.44}$$

$$R_{0i} = 2(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i}, \tag{A.45}$$

usando la ecuación (A.37)

$$R^{0}_{i} = g^{00}R_{0i}, \tag{A.46}$$

$$R^{0}_{i} = (-1 + 2\Phi)a^{-2}(2(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i}), \tag{A.47}$$

simplificando términos de segundo orden

$$R^{0}_{i} = -2a^{-2}(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,i}. \tag{A.48}$$

componente R_{ij}

En el caso de μ=i y ν=j

$$R_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}, \tag{A.49}$$

$$R_{ij} = \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^0_{j0,j} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{k0}\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^i_{ki}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^0_{0j}\Gamma^0_{i0} - \Gamma^k_{0j}\Gamma^0_{ik} - \Gamma^0_{kj}\Gamma^k_{i0} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^j_{ik}, \quad \text{(A.50)}$$

$$R_{ij} = (-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi 2\Phi) + \mathcal{H}(-2\Psi' - 2\Phi'))\delta_{ij} - (\Psi_{,ik}\delta^k_j + \Psi_{,jk}\delta^k_i - \Psi_{,kk}\delta^i_j) + 3(\mathcal{H} - \Psi')(-\Psi' + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta_{ij} - (\mathcal{H} - \Psi')\delta^k_i(-\Psi' + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta_{ij} - (-\Psi' + \mathcal{H}(1 - 2\Psi - 2\Phi)\delta_{ij}\delta^k_i(\mathcal{H} - \Psi'), \quad \text{(A.51)}$$

$$R_{ij} = (-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi - 2\Phi))\delta_{ij} + (-2\Psi'\mathcal{H} - 2\Phi'\mathcal{H})\delta_{ij} - \Psi_{,ik}\delta^k_j - \Psi_{,jk}\delta^k_i - \Psi_{,ij} + 3\Psi_{,ij} + (-\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Phi')\delta^i_j + (-3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 3\mathcal{H}\Phi')\delta^i_j - (-\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Phi')\delta^i_j - (-\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Phi')\delta^i_j, \quad \text{(A.52)}$$

$$R_{ij} = (-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 2\mathcal{H}\Psi' - 2\mathcal{H}\Phi' - \mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 3\mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Psi' + \mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) + \mathcal{H}\Psi')\delta_{ij} - \Psi_{,ik}\delta^k_j - \Psi_{,jk}\delta^k_i + \Psi_{,kk}\delta_{ij} - \Phi_{,ij} + 3\Psi_{,ij}, \quad \text{(A.53)}$$

$$R_{ij} = (-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi - 2\Phi) + 2\mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 5\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}\Phi' + \nabla^2\Psi)\delta_{ij} + (\Psi - \Phi)_{,ij}, \quad \text{(A.54)}$$

Se calcula R^i_j usando (A.37)

$$R^i_j = (1 + 2\Psi)a^{-2}(-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi - 2\Phi) + 2\mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 5\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}\Phi' + \nabla^2\Psi)\delta_{ij} + (\Psi - \Phi)_{,ij}), \quad \text{(A.55)}$$

simplificando términos de segundo orden

$$R^i_j = a^{-2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta^i_j + a^{-2}[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' - 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}')\Phi]\delta^i_j + 2a^{-2}(\Psi - \Phi)_{,ij}. \quad \text{(A.56)}$$

Perturbación del escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{A.57}$$

$$R = g^{00} R_{00} + g^{0i} R_{0i} + g^{ij} R_{ij}, \tag{A.58}$$

$$\begin{aligned} R = {} & a^{-2}(-1+2\Psi)(-3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + 3\mathcal{H}\Phi') \\ & + 0 + a^{-2}(-1+2\Psi)\delta^{ij}[(-\Psi'' + \mathcal{H}'(1-2\Psi-2\Phi) + 2\mathcal{H}^2(1-2\Psi-2\Phi) - 5\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}\Phi' + \\ & \nabla^2\Psi)\delta_{ij} + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij}], \end{aligned} \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned} R = a^{-2}[& 3\mathcal{H}' - \nabla^2\Phi - 3\Psi'' - 3\Psi'\mathcal{H} - 3\Phi'\mathcal{H} - 6\mathcal{H}'\Phi - 3\Psi'' + 3\mathcal{H}' \\ & - 6\mathcal{H}'\Psi - 6\mathcal{H}'\Phi + 6\mathcal{H}^2 - 12\mathcal{H}^2\Psi - 12\mathcal{H}^2\Phi - 15\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}\Phi' + 3\nabla^2\Psi \\ & + \Psi_{,ij}\delta_{ij} - \Phi_{,ij}\delta_{ij} + 6\Psi\mathcal{H}' + 12\mathcal{H}^2\Psi], \end{aligned} \tag{A.60}$$

$$R = a^{-2}[6\mathcal{H}' - 6\Psi'' + 6\mathcal{H}^2 - 12\mathcal{H}'\Phi - 18\mathcal{H}\Psi' - 6\Phi'\mathcal{H} - 12\mathcal{H}^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 2\nabla^2\Phi], \tag{A.61}$$

$$R = a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi' - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi]. \tag{A.62}$$

A.3. Perturbación del tensor de Einstein

El tensor de Einstein está definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{A.63}$$

se expande en términos de las componentes.

Componente G_{00}

Se tiene que $G_{00} = R_{00} + \frac{1}{2} g_{00} R$

$$G_{00} = -3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\dot{\Psi} + 3\mathcal{H}\Phi' + \frac{1}{2}(a^2(\tau)(1+2\Phi))(a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi]), \quad \text{(A.64)}$$

$$G_{00} = -3\mathcal{H}' + \nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}\dot{\Psi} + 3\mathcal{H}\Phi' + \frac{1}{2}(a^2(\tau)(1+2\Phi))(a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi]), \quad \text{(A.65)}$$

cancelando términos semejantes se obtiene:

$$G_{00} = 2\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\dot{\Psi} + 3\mathcal{H}^2, \quad \text{(A.66)}$$

usando A.37 respecto al tensor de Einstein

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R, \quad \text{(A.67)}$$

Entonces G^0_0

$$G^0_0 = R^0_0 - \frac{1}{2}R \quad \text{(A.68)}$$

$$G^0_0 = 3\mathcal{H}'a^{-2} - a^{-2}\left(\nabla^2\Phi + 3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Psi' + \Phi') + 6\mathcal{H}'\Phi\right) - \frac{1}{2}[a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi], \quad \text{(A.69)}$$

simplificando se obtiene

$$G^0_0 = -3a^{-2} + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)]. \quad \text{(A.70)}$$

Componente G_{0i}

Para $G_{0i} = R_{0i} + \frac{1}{2}g_{0i}R$ se tiene

$$G_{0i} = 2(\dot{\Psi}+\mathcal{H}\Phi)_{,j} + \frac{1}{2}(0)(a^{-2}[6\mathcal{H}'+6\mathcal{H}^2-6\Psi''-2\nabla^2\Phi+4\nabla^2\Psi-6\mathcal{H}\Phi'-18\mathcal{H}\Psi-12\mathcal{H}'\Phi-12\mathcal{H}^2\Phi]), \quad \text{(A.71)}$$

$$G_{0i} = 2(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi)_{,j}, \tag{A.72}$$

G_i^0 queda descrito de acuerdo a la ecuación (A.67)

$$G_i^0 = R_i^0. \tag{A.73}$$

Componente G_{ij}

Para $G_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2}g_{ij}R$ se tiene

$$\begin{aligned} G_{ij} = (-\Psi'' + \mathcal{H}'(1 - 2\Psi - 2\Phi) + 2\mathcal{H}^2(1 - 2\Psi - 2\Phi) - 5\mathcal{H}\Psi' - \mathcal{H}\Phi' + \nabla^2\Psi)\delta_{ij} \\ + \Psi_{,ij} - \Phi_{,ij} + \frac{1}{2}(a^2(\tau)(1 - 2\Psi)\delta_{ij}) \\ (a^{-2}[6\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 - 6\Psi'' - 2\nabla^2\Phi + 4\nabla^2\Psi - 6\mathcal{H}\Phi' - 18\mathcal{H}\Psi - 12\mathcal{H}'\Phi - 12\mathcal{H}^2\Phi]), \end{aligned} \tag{A.74}$$

$$G_{ij} = -(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\delta_j^i+(2\mathcal{H}^2(\Psi+\Phi)+4\mathcal{H}'(\Phi+\Psi)+2\mathcal{H}(2\Psi'+\Phi')+\nabla^2(\Phi-\Psi)+2\Psi'')\delta_j^i+(\Psi-\Phi)_{,ij}, \tag{A.75}$$

Usando (A.67), el tensor G_j^i es

$$\begin{aligned} G_j^i = a^{-2}(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_j^i + a^{-2}[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}(\Phi' - 5\Psi') - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}')\Phi]\delta_j^i \\ +2a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,ij}-\frac{1}{2}\delta_j^i[a^{-2}[6\mathcal{H}'+6\mathcal{H}^2-6\Psi''-2\nabla^2\Phi+4\nabla^2\Psi-6\mathcal{H}\Phi'-18\mathcal{H}\Psi-12\mathcal{H}'\Phi-12\mathcal{H}^2\Phi], \end{aligned} \tag{A.76}$$

simplificando

$$G_j^i = -a^2(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\delta_j^i+a^{-2}[2\Psi''+\nabla^2(\Phi-\Psi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta_j^i+a^{-2}(\Psi-\Phi)_{,ij}. \tag{A.77}$$

A.4. Tensor Momento-Energía Perturbado a primer orden en la calibración Newtoniana para un fluido no perfecto

El tensor momento-energía T_ν^μ está definido como

$$T_\nu^\mu = (\bar{\rho} + \bar{p})u^\mu u_\nu + \bar{p}\delta_\nu^\mu, \tag{A.78}$$

donde tenemos que las perturbaciones se describen mediante

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \tag{A.79}$$

$$p = \bar{p} + \delta p, \tag{A.80}$$

$$u^{\mu} = \bar{u}^{\mu} + \delta u^{\mu}, \tag{A.81}$$

Recordando la definición de u^{μ} para el background $u^{\mu} = (a, 0, 0, 0)$, la parte espacial esta dada por $u^{i} = (0, 0, 0)$ entonces se tiene:

$$u^{i} = \bar{u}^{i} + \delta u^{i} = \delta u^{i}, \tag{A.82}$$

Se define δu^{i} de la siguiente forma

$$\delta u^{i} \equiv \frac{v_i}{a}, \tag{A.83}$$

$$v_i = a\delta u^{i}, \tag{A.84}$$

de la ecuación A.82 se puede establecer

$$v_i = a u^{i}, \tag{A.85}$$

$$\delta u^{i} = a^{-1} v_i, \tag{A.86}$$

$$u^{\mu} = (a^{-1} + \delta u^{0}, a^{-1} v_i), \tag{A.87}$$

$$u_{\nu} = (-a + \delta u_0, \delta u_i). \tag{A.88}$$

Se determinan las expresiones para δu_0 y δu_i.

$$u_0 = g_{0\mu} u^{\mu} = g_{00} u^{0} + g_{0i} u^{i}, \tag{A.89}$$

donde $g_{0i} u^{i} = 0$ porque la componente cruzada del tensor métrico es nula, por lo tanto

$$u_0 = g_{00} u^{0}, \tag{A.90}$$

$$u_0 = -a^2(1 + 2\Phi)(a^{-1} + \delta u^{0}), \tag{A.91}$$

desarrollando el producto se obtiene

$$u_0 = -a - a^2 \delta u^{0} - 2a\Phi, \tag{A.92}$$

igualando este resultado a la componente u_0 de u_ν

$$-a - a^2\delta u^0 - 2a\Phi = -a + \delta u_0, \tag{A.93}$$

$$\delta u_0 = -a^2\delta u^0 - 2a\Phi. \tag{A.94}$$

Para δu_i se desarrolla el mismo procedimiento, con lo cual

$$\begin{aligned} u_i = g_{i\mu}u^\mu = g_{i0}u^0 + g_{ij}u^j, \\ u_i = g_{ij}u^j, \\ u_i = -a^2(1-2\Psi)\delta_{ij}a^{-1}v_j. \end{aligned} \tag{A.95}$$

Resolviendo el producto e igualando a la componente u_i de u_ν se tiene

$$-a(1-2\Psi)v_i = \delta u_i, \tag{A.96}$$

despreciando los términos de segundo orden, se tiene

$$\delta u_i = av_i. \tag{A.97}$$

Empleando la propiedad:

$$u_\mu u^\mu = -1, \tag{A.98}$$

multiplicando las componentes y despreciando los términos de segundo orden, se obtiene

$$\begin{aligned} -1 + a^{-1}\delta u_0 - a\delta u^0 = -1, \\ a^{-1}\delta u_0 - a\delta u^0 = 0, \\ a^{-1}\delta u_0 = a\delta u^0, \end{aligned} \tag{A.99}$$

$$\delta u_0 = a^2\delta u^0 \tag{A.100}$$

remplazando el resultado obtenido en la ecuacion (A.100), resulta

$$\begin{aligned} -a^2\delta u^0 - 2a\Phi = a^2\delta u^0, \\ -2a\Phi = a^2\delta u^0 + a^2\delta u^0, \\ -2a\Phi = 2a^2\delta u^0, \\ -a\Phi = a^2\delta u^0, \\ \delta u^0 = -\frac{\Phi}{a}, \\ \delta u_0 = -a^2\frac{\Phi}{a} - 2a\Phi, \end{aligned} \tag{A.101}$$

y, finalmente

$$\delta u_0 = -a\Phi. \tag{A.102}$$

Se reescriben las expresiones para u^μ y u^ν obteniéndose

$$u^\mu = a^{-1}((1-\Phi), v_i) \tag{A.103}$$

$$u_\nu = a(-(1+\Phi), v_i) \tag{A.104}$$

Definidas las velocidades se procede a calcular las componentes del tensor momento-energía.

componente T_0^0

Se obtiene de la siguiente forma

$$T_0^0 = (\rho + P)u^0 u_0 + P\delta_0^0, \tag{A.105}$$

$$T_0^0 = (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)a^{-1}(1-\Phi)(-a(1+\Phi)) + P + \delta P, \tag{A.106}$$

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho), \tag{A.107}$$

componente T_i^0

Se determina como

$$T_i^0 = (\rho + P)u^0 u_i + P\delta_i^0, \tag{A.108}$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)a^{-1}(1-\Phi)av_i, \tag{A.109}$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i. \tag{A.110}$$

Componente T_0^i

Se determina como

$$T_0^i = (\rho + P)u^i u_0 + P\delta_0^i, \tag{A.111}$$

$$T_0^i = (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)a^{-1}v_i(a - (1+\Phi)), \tag{A.112}$$

$$T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{P})v_i. \tag{A.113}$$

Componente T_j^i

Se determina como

$$T_j^i = (\rho + P)u^i u_j + P\delta_j^i, \tag{A.114}$$

$$T_j^i = (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)a^{-1}v_i a v_j + (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i, \tag{A.115}$$

$$T_j^i = (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i, \tag{A.116}$$

De manera que el tensor momento-energía de forma matricial es

$$\bar{T}_\mu^\nu = \begin{pmatrix} -(\bar{\rho} + \delta\rho) & (\bar{\rho} + \bar{P})v_i \\ -(\bar{\rho} + \bar{P})v_i & (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i \end{pmatrix} \tag{A.117}$$

En donde quedan 5 grados de libertad en la parte espacial δT_j^i, los cuales se escriben como Σ_{ij}

$$\delta T_j^i = \delta p \delta_j^i + \Sigma_{ij} \equiv \bar{p}\left(\frac{\delta p}{\bar{p}} + \Pi_{ij}\right) \tag{A.118}$$

En donde Σ_{ij} y Π_{ij} son simétricos y sin traza.

$$\delta p \equiv T_k^k \tag{A.119}$$

$$\Sigma_{ij} \equiv \delta T_j^i - \frac{1}{3}\delta_j^i T_k^k \tag{A.120}$$

Σ_{ij} Es llamado presion anisotrópica. para un fluido perfecto se tiene $\Sigma_{ij} = 0$

Se obtiene el tensor δT_j^i

$$\delta T_j^i = \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i) \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i & \delta p\delta_{ij} + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_j^i\nabla^2\Pi) \end{bmatrix} \tag{A.121}$$

cabe resaltar que la forma final del tensor de momento energía de la ecuación (**??**) depende de la separación escalar de la perturbación del 3-tensor sin traza Π_{ij}, dada por:

$$\Pi_{ij}^S = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_j^i\nabla^2)\Pi \tag{A.122}$$

APÉNDICE B

Ecuaciones de campo en $f(R)$

B.1. Ecuaciones de campo en $f(R)$ perturbada a primer orden en formalismo métrico para la métrica FLRW plana bajo calibración Newtoniana en fluido no perfecto

Ecuaciones de campo $f(R)$

Las ecuaciones de campo se escriben como

$$FG_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f - FR) + \nabla_\mu\nabla_\nu F - g_{\mu\nu}\Box F. \tag{B.1}$$

Se reescribe en términos de componentes mixtas teniendo en cuenta que $g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} = G^\mu_\nu$.

$$Fg^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}(f - FR) + g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu F - g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}\Box F. \tag{B.2}$$

Para los cálculos subsecuentes se usa la métrica en el universo FLRW bajo calibración Newtoniana.

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Phi)d\tau^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\right], \tag{B.3}$$

el Tensor momento-energía bajo calibración newtoniana y fluido no perfecto

$$T^\mu_\nu = \begin{bmatrix}\bar{\rho} & 0\\ 0 & \bar{p}\delta^i_j\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\delta\rho^N & (\bar{\rho}+\bar{p})(v^N_i)\\ -(\bar{\rho}+\bar{p})v^N_i & \delta p^N\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)\end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

y las componentes del Tensor de Einstein perturbadas, descritas en el Apéndice A4. Por simplicidad en los cálculos se hace $\delta\rho^N = \delta\rho$, $\delta p^N = \delta p$ y $v^N = v$.

Componente G^i_j

Se evalúa G^i_j, $\mu = i$ y $\nu = j$

$$Fg^{i\alpha}G_{\alpha j} = g^{i\alpha}T_{\alpha \jmath} + \frac{1}{2}g^{i\alpha}g_{\alpha j}(f - FR) + g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j F - g^{i\alpha}g_{\alpha j}\Box F, \tag{B.5}$$

$$FG^i_j = T^i_j + \frac{1}{2}\delta^i_j(f - FR) + g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j - \delta^i_j\Box F. \tag{B.6}$$

Se expande el término $g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F}$

$$g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F} = g^{ik}\nabla_k\nabla_j\bar{F}, \tag{B.7}$$

$$g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F} = g^{ik}\left[\partial_k\partial_j\bar{F} - \Gamma^\rho_{kj}\partial_\rho\bar{F}\right], \tag{B.8}$$

$$g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F} = g^{ik}\left[\partial_k\partial_j\bar{F} - \Gamma^0_{kj}\partial_0\bar{F} - \Gamma^i_{kj}\partial_i\bar{F}\right]. \tag{B.9}$$

De forma similar el término $\Box\bar{F} = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\bar{F}$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\bar{F} = g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\partial_\nu\bar{F} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho\bar{F}\right], \tag{B.10}$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\bar{F} = g^{00}\left[\partial_0\partial_0\bar{F} - \Gamma^0_{00}\partial_0 F - \Gamma^i_{00}\partial_i\bar{F}\right] + g^{ij}\left[\partial_i\partial_j\bar{F} - \Gamma^0_{ij}\partial_0\bar{F} - \Gamma^k_{ij}\partial_k\bar{F}\right], \tag{B.11}$$

en donde $\partial_k F = \frac{\partial F}{\partial R}\partial_k R = 0$ ya que R no depende de las coordenadas.

Haciendo $F = \bar{F} + \delta F$, $f = \bar{f} + \bar{F}\delta R$, $R = \bar{R} + \delta R$ las ecuaciones (B.6) (B.9) y (B.11) toman la forma respectivamente.

$$(\bar{F}+\delta F)G^i_j = T^i_j + \frac{1}{2}\delta^i_j(f + \bar{F}\delta R - (\bar{F}+\delta F)R) + g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j(\bar{F}+\delta F) - \delta^i_j\Box(\bar{F}+\delta F), \tag{B.12}$$

$$g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j(\bar{F} + \delta F) = g^{ik}\left[\partial_k\partial_j(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^0_{kj}\partial_0(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^i_{kj}\partial_i(\bar{F} + \delta F)\right], \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}\Box(\bar{F} + \delta F) = {} & g^{00}\left[\partial_0\partial_0(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^0_{00}\partial_0(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^i_{00}\partial_i(\bar{F} + \delta F)\right] \\ & + g^{ij}\left[\partial_i\partial_j(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^0_{ij}\partial_0(\bar{F} + \delta F) - \Gamma^k_{ij}\partial_k(\bar{F} + \delta F)\right].\end{aligned} \tag{B.14}$$

La ecuación (B.6) representa la forma de las ecuaciones de campo de en el espacio-tiempo de fondo y la ecuación (B.12) en el espacio-tiempo perturbado.

Ecuación de campo para el fondo en la componente $\bar{G}^i_j$

Se procede a determinar la ecuación de campo del fondo, calculando cada uno de los términos e insertándolos en la ecuación de campo no perturbada.

Evaluación del término $g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F}$

$$\begin{aligned} g^{ik}\nabla_k\nabla_j\bar{F} = (1)\delta^{ik}\left[\partial_k\partial_j\bar{F} - \mathcal{H}\delta_{kj}\partial_0\bar{F}\right]a^{-2}, \\ = \left[\partial_i\partial_j\bar{F} - \mathcal{H}\delta^i_j\bar{F}'\right]a^{-2}, \\ = -a^{-2}\mathcal{H}\delta^i_j\bar{F}'. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Evaluación del término $\Box\bar{F}$

$$\begin{aligned} \Box\bar{F} = (-a^{-2})\left[\partial_0\partial_0\bar{F} - \mathcal{H}\partial_0\bar{F}\right] + a^{-2}\delta^{ij}\left[\partial_i\partial_j\bar{F} - \mathcal{H}\delta_{ij}\partial_0\bar{F}\right], \\ = a^{-2}\left[-\bar{F}'' + \mathcal{H}\bar{F}' + \nabla^2\bar{F} - 3\mathcal{H}\bar{F}'\right], \\ = a^{-2}\left[-\bar{F}'' - 2\mathcal{H}\bar{F}'\right]. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Usando la as ecuaciones (B.15) y (B.16) en la ecuación (B.6) se obtiene.

$$\begin{aligned} \bar{F}a^{-2}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta^i_j = 8\pi G\bar{p}\delta^i_j + \frac{1}{2}\delta^i_j(f - FR) - a^{-2}\mathcal{H}\delta^i_j\bar{F}' \\ -a^{-2}\left[-\bar{F}'' - 2\mathcal{H}\bar{F}'\right]\delta^i_j, \\ = [8\pi G\bar{p} + \frac{1}{2}(f - FR) + a^2\left[\mathcal{H}\bar{F}' + \bar{F}''\right]]\delta^i_j, \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\boxed{-\bar{F}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) = 8\pi Ga^2\bar{p} + \frac{a^2}{2}(f - FR) + \mathcal{H}\bar{F}' + \bar{F}''.} \tag{B.18}$$

Ecuación de campo perturbada componente G^i_j

Se determinan cada uno de los elementos a continuación y se insertan en la ecuación (B.12)

Evaluación del término $\mathbf{g}^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j(\bar{F} + \delta F)$

$$\begin{aligned} g^{ik}\nabla_k\nabla_j(\bar{F} + \delta F) = (1 + 2\Psi)a^{-2}\delta^{ik}\left[\partial_k\partial_j(\bar{F} + \delta F) - (\mathcal{H}(1 - 2\Phi - 2\Psi)\right. \\ \left. -\Psi')\delta_{kj}\partial_0(\bar{F} + \delta F) - \left[-(\Psi_{,j}\delta^i_k + \Psi_{,k}\delta^i_j) + \Psi_{,i}\delta_{kj}\right]\partial_i(\bar{F} + \delta F), \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned} g^{ik}\nabla_k\nabla_j(\bar{F} + \delta F) = a^{-2}[(1 + 2\Psi)(\partial_i\partial_j\bar{F}) + (1 + 2\Psi)(\partial_i\partial_j\delta F) \\ -(\mathcal{H}(1 - 2\Phi) - \Psi')\delta^{ik}\delta_{kj}\bar{F}' - (\mathcal{H}(1 - 2\Phi) - \Psi')\delta^{ik}\delta_{kj}\delta F'], \end{aligned} \tag{B.20}$$

$$g^{ik}\nabla_k\nabla_j(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F - \mathcal{H}\bar{F}'\delta^i_j + 2\mathcal{H}\Phi\bar{F}'\delta^i_j + \Psi'\bar{F}'\delta^i_j - \mathcal{H}\delta F'\delta^i_j], \tag{B.21}$$

$$g^{ik}\nabla_k\nabla_j(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}[-\mathcal{H}\bar{F}' + 2\mathcal{H}\Phi\bar{F}' + \Psi'\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F']\delta^i_j. \tag{B.22}$$

Evaluación del término $\Box(\bar{F}+\delta F)$

$$\begin{aligned}\Box(\bar{F}+\delta F) = (-1+2\Phi)a^{-2}[\bar{F}'' - (\mathcal{H}+\Phi')\bar{F}' + \delta F'' - (\mathcal{H}+\Phi')\delta F'] \\ +(1+2\Psi)\delta^{ij}a^{-2}[\partial_i\partial_j\bar{F} - (\mathcal{H}(1-2\Phi-2\Psi)-\Psi')\bar{F}'\delta^i_j \\ +\partial_i\partial_j\delta F - (\mathcal{H}(1-2\Phi-2\Psi)-\Psi')\delta F'\delta^i_j],\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}\Box(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}[(-1+2\Phi)\bar{F}'' + (\mathcal{H}(1-2\Phi)+\Phi')\bar{F}' - \delta F'' + \mathcal{H}\delta F'] \\ +a^{-2}[-(3\mathcal{H}(1-2\Phi)-3\Psi')\bar{F}' + \nabla^2\delta F - 3\mathcal{H}\delta F'],\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}\Box(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}[(-1+2\Phi)\bar{F}'' - (2\mathcal{H}(1-2\Phi) - \Phi' - 3\Psi')\bar{F}' \\ -\delta F'' + \nabla^2\delta F - 2\mathcal{H}\delta F'].\end{aligned} \tag{B.25}$$

Usando los valores del tensor de Einstein de la ecuación (**??**) y las ecuaciones (B.22) y (B.25) en la ecuación (B.12) se obtiene

$$\begin{aligned}a^{-2}(\bar{F}+\delta F)[[(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) + 2\Psi'' - \nabla^2(\Psi-\Phi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j \\ +(\Phi-\Psi)_{,ij}] = 8\pi G[(\bar{p}+\delta p)\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi)] + \frac{1}{2}\delta^i_j(f - (\bar{F}+\delta F)R) \\ +[a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}[-\mathcal{H}\bar{F}' + 2\mathcal{H}\Phi\bar{F}' + \Psi'\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F']\delta^i_j] \\ -\delta^i_j[a^{-2}[(-1+2\Phi)\bar{F}'' - (2\mathcal{H}(1-2\Phi) - \Phi' - 3\Psi')\bar{F}' - \delta F'' + \nabla^2\delta F - 2\mathcal{H}\delta F'],\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}a^{-2}\bar{F}(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta^i_j + a^{-2}\bar{F}[[2\Psi'' - \nabla^2(\Psi-\Phi) + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j + (\Phi-\Psi)_{,ij}] \\ +a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\delta^i_j = 8\pi G[(\bar{p}+\delta p)\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi)] + \frac{1}{2}\delta^i_j(f - (\bar{F}+\delta F)R) \\ +a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}[-\mathcal{H}(1-2\Phi)\bar{F}' + \Psi'\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F' \\ -[(-1+2\Phi)\bar{F}'' - (2\mathcal{H}(1-2\Phi) - \Phi' - 3\Psi')\bar{F}' - \delta F'' + \nabla^2\delta F - 2\mathcal{H}\delta F']]\delta^i_j,\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$-a^{-2}\bar{F}(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\delta^i_j+a^{-2}\bar{F}[[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j+(\Phi-\Psi)_{,ij}]$$
$$+a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta^i_j=8\pi G[(\bar{p}+\delta p)\delta^i_j+\bar{p}(\Pi_{,ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi)]+\frac{1}{2}\delta^i_j(f-(\bar{F}+\delta F)R)$$
$$+a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F]+a^{-2}[\mathcal{H}(1-2\Phi)\bar{F}'-2\Psi'\bar{F}'+\mathcal{H}\delta F'+(1-2\Phi)\bar{F}''-\Phi'\bar{F}'+\delta F''-\nabla^2\delta F]\delta^i_j. \tag{B.28}$$

Se resta la ecuación (B.18) a la ecuación (B.28) con lo cual

$$\cancel{-a^{-2}\bar{F}(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\delta^i_j}+a^{-2}\bar{F}[[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j+(\Phi-\Psi)_{,ij}]$$
$$+a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta^i_j=8\pi G[(\cancel{\bar{p}}+\delta p)\delta^i_j+\bar{p}(\Pi_{,ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\Pi)]+\frac{1}{2}\delta^i_j(\cancel{f}-(\cancel{\bar{F}}+\delta F)R)$$
$$+a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F]+a^{-2}[\mathcal{H}(\cancel{1}-2\Phi)\bar{F}'-2\Psi'\bar{F}'+\mathcal{H}\delta F'+(\cancel{1}-2\Phi)\bar{F}''-\Phi'\bar{F}'+\delta F''-\nabla^2\delta F]\delta^i_j, \tag{B.29}$$

$$a^{-2}\bar{F}[[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j+(\Phi-\Psi)_{,ij}]$$
$$+a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta^i_j=8\pi G[\delta p\delta^i_j+\bar{p}(\Pi_{,ij}-\frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)]-\frac{1}{2}\delta^i_j(\delta F)R$$
$$+a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F]+a^{-2}[\mathcal{H}(-2\Phi)\bar{F}'-2\Psi'\bar{F}'+\mathcal{H}\delta F'-2\Phi\bar{F}''-\Phi'\bar{F}'+\delta F''-\nabla^2\delta F]\delta^i_j. \tag{B.30}$$

Se calcula la traza de la ecuación (B.30) $\tilde{G}^k_k$.

$$a^{-2}\bar{F}[3[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]+\nabla^2(\Psi-\Phi)]$$
$$-3a^{-2}\delta F(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)=24\pi G\delta p-\frac{3}{2}(\delta F)R+a^{-2}[\nabla^2\delta F] \tag{B.31}$$
$$+3a^{-2}[-2\mathcal{H}\Phi\bar{F}'-2\Psi'\bar{F}'+\mathcal{H}\delta F'-2\Phi\bar{F}''-\Phi'\bar{F}'+\delta F''-\nabla^2\delta F].$$

Se calcula la ecuación de propagación usando $\tilde{G}^i_j-\frac{1}{3}\delta^i_j\tilde{G}^k_k$

El lado Izquierdo de la ecuación es

$$a^{-2}\bar{F}[[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]\delta^i_j+(\Phi-\Psi)_{,ij}]+a^{-2}\delta F(-2\mathcal{H}'-\mathcal{H}^2)\delta^i_j$$
$$-\frac{1}{3}\delta^i_j[a^{-2}\bar{F}[3[2\Psi''-\nabla^2(\Psi-\Phi)+\mathcal{H}(2\Phi'+4\Psi')+(4\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2)\Phi]+\nabla^2(\Psi-\Phi)]-3a^{-2}\delta F(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)], \tag{B.32}$$

$$a^{-2}F[(\Phi-\Psi)_{,ij}]-\frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2(\Psi-\Phi)]. \tag{B.33}$$

El lado derecho de la ecuación es.

$$8\pi G[\delta p\delta^i_j + \bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)] - \frac{1}{2}\delta^i_j(\delta F)R + a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}[-2\mathcal{H}\Phi\bar{F}'$$
$$-2\Psi'\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F'' - \nabla^2\delta F]\delta^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j[24\pi G\delta p - \frac{3}{2}(\delta F)R + a^{-2}[\nabla^2\delta F]$$
$$+3a^{-2}[-2\mathcal{H}\Phi\bar{F}' - 2\Psi'\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F'' - \nabla^2\delta F], \tag{B.34}$$

$$8\pi G[\bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)] + a^{-2}[\partial_i\partial_j\delta F] + a^{-2}\frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\delta F]. \tag{B.35}$$

Igualando las ecuaciones (B.33 y (B.35)

$$F[(\Phi - \Psi)_{,ij}] - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2(\Psi - \Phi)] = 8\pi Ga^2[\bar{p}(\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\Pi)] + \partial_i\partial_j\delta F + \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\delta F, \tag{B.36}$$

La ecuación (B.36) se puede reescribir en términos del operador $(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2)$

$$F(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2)(\Phi - \Psi) = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2)8\pi Ga^2\bar{p}\Pi + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2)\delta F, \tag{B.37}$$

$$F(\Phi - \Psi) = 8\pi Ga^2\bar{p}\Pi + \delta F, \tag{B.38}$$

$$\boxed{(\Phi - \Psi) = \frac{\delta F}{F} + \frac{8\pi Ga^2}{F}\bar{p}\Pi.} \tag{B.39}$$

La componente con traza es

$$a^{-2}\bar{F}[3[2\Psi'' + \mathcal{H}(2\Phi' + 4\Psi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi] - 2a^{-2}\bar{F}\nabla^2(\Psi - \Phi) =$$
$$3a^{-2}\delta F(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + 24\pi G\delta p - \frac{3}{2}(\delta F)(6a^{-2}(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 2a^{-2}[\nabla^2\delta F] \tag{B.40}$$
$$+3a^{-2}[-2\mathcal{H}\Phi\bar{F}' - 2\Psi'\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F''],$$

$$2\bar{F}[[\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi] - \frac{2}{3}\bar{F}\nabla^2(\Psi - \Phi) =$$
$$+8\pi Ga^2\delta p - \delta F(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) - \frac{2}{3}[\nabla^2\delta F] \tag{B.41}$$
$$-2\mathcal{H}\Phi\bar{F}' - 2\Psi'\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F'',$$

$$2\bar{F}[\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \Psi'\frac{\bar{F}'}{\bar{F}}] =$$
$$8\pi Ga^2\delta p - \delta F(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) - \frac{2}{3}[\nabla^2\delta F] + \mathcal{H}\delta F' - 2\Phi\bar{F}'' - \Phi'\bar{F}' + \delta F'', \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned} 2\bar{F}[\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \Psi'\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} \\ +\Phi'\frac{\bar{F}'}{2\bar{F}} + \Phi\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}] = 8\pi G a^2\delta p - \delta F(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) - \frac{2}{3}[\nabla^2\delta F] + \mathcal{H}\delta F' + \delta F'', \end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned} 2\bar{F}[\Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} + \frac{\bar{F}''}{\bar{F}})\Phi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + \frac{\bar{F}'}{\bar{F}}(\Psi' + \frac{\Phi'}{2}] \\ = 8\pi G a^2\delta p - \delta F(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) - \frac{2}{3}[\nabla^2\delta F] + \mathcal{H}\delta F' + \delta F'', \end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi'' + \mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} + \frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) \\ +\frac{\bar{F}'}{\bar{F}}\left(\Psi' + \frac{\Phi'}{2}\right) = \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2\delta p - \left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 + \frac{2}{3}\nabla^2\right)\delta F + \mathcal{H}\delta F' + \delta F''\right]. \end{aligned}} \tag{B.45}$$

Ecuación de campo Componente G_0^0

la ecuación de campo

$$\bar{F}g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}(f - \bar{F}R) + g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\bar{F} - g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}\Box\bar{F}. \tag{B.46}$$

Se evalúa en $\mu = 0$ y $\nu = 0$.

$$\bar{F}G_0^0 = T_0^0 + \frac{1}{2}\delta_0^0(f - \bar{F}R) + g^{00}\nabla_0\nabla_0\bar{F} - \delta_0^0\Box\bar{F}, \tag{B.47}$$

Ecuación de campo de fondo componente $\bar{G}_0^0$

$\mathbf{g^{00}\nabla_0\nabla_0\bar{F}}$

$$\begin{aligned} g^{00}\nabla_0\nabla_0\bar{F} &= (-1)a^{-2}\left[\partial_0\partial_0\bar{F} - \Gamma_{00}^0\partial_0\bar{F}\right] \\ &= a^{-2}[-\bar{F}'' + \mathcal{H}\bar{F}']. \end{aligned} \tag{B.48}$$

Usando la ecuación (B.48) en (B.47)

$$\bar{F}(-3a^{-2}\mathcal{H}^2) = -8\pi G\rho + \frac{1}{2}(f - \bar{F}R) + a^{-2}[-\bar{F}'' + \mathcal{H}\bar{F}'] - a^{-2}\left[-\bar{F}'' - 2\mathcal{H}\bar{F}'\right], \tag{B.49}$$

$$\boxed{3\bar{F}\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2\rho + \frac{a^2}{2}(\bar{F}R - f) - 3\mathcal{H}\bar{F}'.} \tag{B.50}$$

Ecuación de campo perturbada componente G_0^0

Siguiendo

$$(\bar{F}+\delta F)G_0^0 = T_0^0 + \frac{1}{2}\delta_0^0(f-(\bar{F}+\delta F)R) + g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F) - \delta_0^0\Box(\bar{F}+\delta F), \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned}(\bar{F}+\delta F)\left(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\right) = -8\pi G(\bar{\rho}+\delta\rho)\\ +\frac{1}{2}\delta_0^0(f-(\bar{F}+\delta F)R) + g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F) - \delta_0^0\Box(\bar{F}+\delta F).\end{aligned} \tag{B.52}$$

Evaluación del término $\mathbf{g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F)}$

$$\begin{aligned}g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F) = (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\partial_0\partial_0\bar{F} - \Gamma_{00}^0\partial_0\bar{F}\right]\\ +(-1+2\Phi)a^{-2}\left[\partial_0\partial_0\delta F - \Gamma_{00}^0\partial_0\delta F\right],\end{aligned} \tag{B.53}$$

$$\begin{aligned}g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F) = (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\bar{F}'' - (\mathcal{H}+\Phi')\bar{F}'\right]\\ (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\delta F'' - (\mathcal{H}+\Phi')\delta F'\right],\end{aligned} \tag{B.54}$$

$$\begin{aligned}g^{00}\nabla_0\nabla_0(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}\left[(-1+2\Phi)\bar{F}'' + (\mathcal{H}(1-2\Phi)+\Phi')\bar{F}'\right]\\ a^{-2}\left[-\delta F'' + \mathcal{H}\delta F'\right],\end{aligned} \tag{B.55}$$

Usando (B.25) y (B.55) en (B.52)

$$\begin{aligned}(\bar{F}+\delta F)\left(-3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi]\right) = -8\pi G(\bar{\rho}+\delta\rho)\\ +\frac{1}{2}\delta_0^0(f-(\bar{F}+\delta F)R) + [a^{-2}\left[(-1+2\Phi)\bar{F}'' + (\mathcal{H}(1-2\Phi)+\Phi')\bar{F}'\right]\\ a^{-2}\left[-\delta F'' + \mathcal{H}\delta F'\right]] - [a^{-2}[(-1+2\Phi)\bar{F}'' - (2\mathcal{H}(1-2\Phi) - \Phi' - 3\Psi')\bar{F}'\\ -\delta F'' + \nabla^2\delta F - 2\mathcal{H}\delta F']],\end{aligned} \tag{B.56}$$

simplificando y organizando (B.56)

$$\begin{aligned}-3a^{-2}\mathcal{H}^2(\bar{F}+\delta F) + a^{-2}\bar{F}[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi] = -8\pi G(\bar{\rho}+\delta\rho)\\ +\frac{1}{2}(f-\bar{F}R) - \frac{1}{2}\delta F R + a^{-2}[3(\mathcal{H}(1-2\Phi) - 3\Psi')\bar{F}' + 3\mathcal{H}\delta F' - \nabla^2\delta F],\end{aligned} \tag{B.57}$$

$$\begin{aligned} -3\mathcal{H}^2(\bar{F}+\delta F)+\bar{F}[-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi] &= -8\pi G a^2(\bar{\rho}+\delta\rho) \\ +\frac{a^2}{2}(f-\bar{F}R)-3\delta F(\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)+3\mathcal{H}\bar{F}'-3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)+3\mathcal{H}\delta F'-\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.58}$$

$$\begin{aligned} -3\mathcal{H}^2\bar{F}+\bar{F}[-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi] &= -8\pi G a^2(\bar{\rho}+\delta\rho) \\ +\frac{a^2}{2}(f-\bar{F}R)-3\mathcal{H}'\delta F+3\mathcal{H}\bar{F}'-3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)+3\mathcal{H}\delta F'-\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.59}$$

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}^2\bar{F}-\bar{F}[-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi] &= +8\pi G a^2(\bar{\rho}+\delta\rho) \\ -\frac{a^2}{2}(f-\bar{F}R)+3\mathcal{H}'\delta F-3\mathcal{H}\bar{F}'+3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)-3\mathcal{H}\delta F'+\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.60}$$

sustrayendo(B.50) de (B.60)

$$3\bar{F}\mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2\rho+\frac{a^2}{2}(\bar{F}R-f)-3\mathcal{H}\bar{F}', \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned} \cancel{3\mathcal{H}^2\bar{F}}-\bar{F}[-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi] &= +8\pi G a^2(\bar{\rho}+\delta\rho) \\ \cancel{-\frac{a^2}{2}(f-\bar{F}R)}+3\mathcal{H}'\delta F-\cancel{3\mathcal{H}\bar{F}'}+3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)-3\mathcal{H}\delta F'+\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.62}$$

$$\begin{aligned} -\bar{F}[-2\nabla^2\Psi+6\mathcal{H}\Psi'+6\mathcal{H}^2\Phi] &= +8\pi G a^2\delta\rho \\ +3\mathcal{H}'\delta F+3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)-3\mathcal{H}\delta F'+\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.63}$$

$$\begin{aligned} 2\bar{F}[-\nabla^2\Psi+3\mathcal{H}\Psi'+3\mathcal{H}^2\Phi] &= -8\pi G a^2\delta\rho \\ -3\mathcal{H}'\delta F-3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)+3\mathcal{H}\delta F'-\nabla^2\delta F], & \end{aligned} \tag{B.64}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla^2\Psi+3\mathcal{H}(\Psi'+\mathcal{H}\Phi) = \frac{1}{2\bar{F}}[-8\pi G a^2\delta\rho-(\nabla^2+3\mathcal{H}')\delta F \\ -3\bar{F}'(\Psi'+2\mathcal{H}\Phi)+3\mathcal{H}\delta F']. \end{aligned}} \tag{B.65}$$

Perturbación a la ecuación de campo G_i^0

la ecuación de campo (B.2) toma la forma

$$(\bar{F}+\delta F)g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}(f-(\bar{F}+\delta F)R)+g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu(\bar{F}+\delta F)-g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}\Box(\bar{F}+\delta F). \tag{B.66}$$

se evalúa en $\mu = 0$ y $\nu = i$

$$(\bar{F}+\delta F)G_i^0 = T_i^0 + \frac{1}{2}\delta_i^0(f-(\bar{F}+\delta F)R) + g^{0\alpha}\nabla_\alpha\nabla_i(\bar{F}+\delta F) - \delta_i^0\Box(\bar{F}+\delta F), \quad \text{(B.67)}$$

$$(\bar{F}+\delta F)G_i^0 = T_i^0 + g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F). \quad \text{(B.68)}$$

Evaluación del término $\mathbf{g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F)}$

$$\begin{aligned} &g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F) = (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\partial_0\partial_i(\bar{F}+\delta F) - \Gamma^\rho_{0i}\partial_\rho(\bar{F}+\delta F)\right] \\ &= (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\partial_0\partial_i(\bar{F}+\delta F) - \Gamma^0_{0i}\partial_0(\bar{F}+\delta F) - \Gamma^j_{0i}\partial_j(\bar{F}+\delta F)\right], \end{aligned} \quad \text{(B.69)}$$

$$\begin{aligned} g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F) &= (-1+2\Phi)a^{-2}\left[\partial_0\partial_i(\bar{F}+\delta F)\right] \\ +(-1+2\Phi)a^{-2}&\left[-\Phi_{,i}\partial_0(\bar{F}+\delta F) - (\mathcal{H}-\Psi')\delta_i^j\partial_j(\bar{F}+\delta F)\right], \end{aligned} \quad \text{(B.70)}$$

$$g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F) = -a^{-2}[\delta F'_{,i} - \Phi_{,i}\bar{F}' - \mathcal{H}\delta_i^j\delta F_{,j}], \quad \text{(B.71)}$$

$$g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F) = -a^{-2}[\delta F'_{,i} - \Phi_{,i}\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F_{,j}], \quad \text{(B.72)}$$

$$g^{00}\nabla_0\nabla_i(\bar{F}+\delta F) = a^{-2}[[-\delta F' + \Phi\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F_{,j}], \quad \text{(B.73)}$$

introduciendo (B.73) en (B.68)

$$(\bar{F}+\delta F)(-2a^{-2}(\Psi'+\mathcal{H}\Phi)_{,i}) = -8\pi G(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,i} + a^{-2}[[-\delta F' + \Phi\bar{F}' + \mathcal{H}\delta F]_{,i}], \quad \text{(B.74)}$$

$$2\bar{F}(\Psi'+\mathcal{H}\Phi)_{,i} = 8\pi G a^2(\bar{\rho}+\bar{p})v_{,i} + \left[\delta F' - \Phi\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F\right]_{,i}, \quad \text{(B.75)}$$

$$\boxed{\Psi'+\mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2(\bar{\rho}+\bar{p})v + \delta F' - \Phi\bar{F}' - \mathcal{H}\delta F\right].} \quad \text{(B.76)}$$

B.2. Ecuación de Raychaudhuri

se usa $\tilde{G}^k_k - \tilde{G}^0_0$ de modo que se sustrae (B.65) de (B.45)

$$6\bar{F}\Psi'' + 6\bar{F}\mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + 2\bar{F}\left(6\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{H}\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} + 3\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi - 2\bar{F}\nabla^2(\Psi - \Phi) + 6\bar{F}'\left(\Psi' + \frac{\Phi'}{2}\right) = \left[8\pi G a^2(3\delta p) - \left(3\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\right)\delta F + 3\mathcal{H}\delta F' + 3\delta F''\right] \tag{B.77}$$

$$-2\bar{F}\nabla^2\Psi = [-6\bar{F}\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - 8\pi G a^2\delta\rho - (\nabla^2 + 3\mathcal{H}')\delta F - 3\bar{F}'(\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi) + 3\mathcal{H}\delta F'] \tag{B.78}$$

$$6\bar{F}\Psi'' + 6\bar{F}\mathcal{H}(\Phi' + 2\Psi') + 2\bar{F}\left(6\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2 + 3\mathcal{H}\frac{\bar{F}'}{\bar{F}} + 3\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi + [-6\bar{F}\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) - 8\pi G a^2\delta\rho - (\nabla^2 + 3\mathcal{H}')\delta F - 3\bar{F}'(\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi) + 3\mathcal{H}\delta F'] + 2\bar{F}\nabla^2\Phi + 6\bar{F}'\left(\Psi' + \frac{\Phi'}{2}\right) = \left[8\pi G a^2(3\delta p) - \left(3\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\right)\delta F + 3\mathcal{H}\delta F' + 3\delta F''\right] \tag{B.79}$$

$$6\bar{F}\Psi'' + 6\bar{F}\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 2\bar{F}\left(6\mathcal{H}' + \nabla^2 + 3\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi + 3\bar{F}'\left(\Psi' + \Phi'\right) = \left[8\pi G a^2(\delta\rho + 3\delta p) - \left(6\mathcal{H}^2 + \nabla^2\right)\delta F + 3\delta F''\right] \tag{B.80}$$

$$\boxed{3\Psi'' + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + \left(6\mathcal{H}' + \nabla^2 + 3\frac{\bar{F}''}{\bar{F}}\right)\Phi + \frac{\bar{F}'}{2\bar{F}}\left(3\Psi' + 3\Phi'\right) = \frac{1}{2\bar{F}}\left[8\pi G a^2(\delta\rho + 3\delta p) - \left(6\mathcal{H}^2 + \nabla^2\right)\delta F + 3\delta F''\right]} \tag{B.81}$$

B.3. Traza de las ecuaciones de campo

Partiendo de

$$FR^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu f - g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu F + \delta^\mu_\nu\Box F = \kappa T^\mu_\nu \tag{B.82}$$

Su traza es.

$$FR - 2f - 3\Box F = \kappa T^\mu_\nu \tag{B.83}$$

en términos de las cantidades perturbadas toma la forma

$$(\bar{F} + \delta F)(R + \delta R) - 2f - 2F\delta R - 3\Box(\bar{F} + \delta F) = \kappa(T + \delta T) \tag{B.84}$$

$$\bar{F}R + \bar{F}\delta R + \delta F R - 2f - 2\bar{F}\delta R - 3\Box(\bar{F} + \delta F) = \kappa(-\bar{\rho} + 3\bar{p}) + \kappa(-\delta\rho + 3\delta p) \quad \text{(B.85)}$$

usando la ecuación (

sustrayendo los términos de orden cero y dividiendo por 3 se tiene.

$$-\frac{1}{3}\bar{F}\delta R + \frac{1}{3}R\delta F - a^{-2}[2\Phi\bar{F}'' - (2\mathcal{H}(-2\Phi) - \Phi' - 3\Psi')\bar{F}' - \delta F'' + \nabla^2\delta F - 2\mathcal{H}\delta F'] = \frac{1}{3}\kappa(-\delta\rho + 3\delta p) \quad \text{(B.86)}$$

reorganizando se obtiene.

$$\boxed{\begin{aligned}\left[-\nabla^2 + \frac{a^2R}{3}\right]\delta F + 2\mathcal{H}\delta F' + \delta F'' = \frac{8\pi G a^2}{3}(-\delta\rho + 3\delta p) \\ +\bar{F}'(4\mathcal{H}\Phi + 3\Psi' + \Phi') + 2\Phi\bar{F}'' - \frac{1}{3}a^2\bar{F}\delta R\end{aligned}} \quad \text{(B.87)}$$

B.4. Ecuaciones de campo de fondo en métrica FLRW en tiempo cósmico

las ecuaciones de campo (B.1) sujetas a la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^i dx^j\delta_{ij}, \quad \text{(B.88)}$$

y los símbolos de Christoffel no nulos

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} &= a\dot{a}\delta_{ij}, \\ \Gamma^i_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j,\end{aligned} \quad \text{(B.89)}$$

con el tensor de Ricci dado por

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij}.\end{aligned} \quad \text{(B.90)}$$

el escalar de Ricci

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad \text{(B.91)}$$

y las componentes del Tensor de Einstein con índices mixtos

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -3H^2 \\ G_j^i &= -(2\dot{H} + 3H^2)\delta_j^i \end{aligned} \tag{B.92}$$

Componente 00

Evaluación $\nabla_0\nabla_0\bar{F}$

$$\nabla_0\nabla_0\bar{F} = \partial_0\partial_0\bar{F} - \Gamma_{00}^0\partial_0\bar{F} = \ddot{\bar{F}} \tag{B.93}$$

Evaluación $\Box\bar{F}$

$$\Box\bar{F} = (-1)(\partial_0\partial_0\bar{F} - \Gamma_{00}^0\partial_0\bar{F}) + a^{-2}\delta^{ij}(\partial_i\partial_j\bar{F} - \Gamma_{ij}^0\dot{\bar{F}}) \tag{B.94}$$

$$\Box\bar{F} = -\ddot{\bar{F}} - 3H\dot{\bar{F}} \tag{B.95}$$

introduciendo (B.92),(B.93) y (B.95) en

$$\bar{F}G_0^0 = T_0^0 + \frac{1}{2}\delta_0^0(f - \bar{F}R) + g^{00}\nabla_0\nabla_0\bar{F} - \delta_0^0\Box\bar{F}, \tag{B.96}$$

se obtiene

$$\boxed{3H^2\bar{F} = \kappa\bar{\rho} + \frac{1}{2}(\bar{F}R - \bar{f}) - 3H\dot{\bar{F}}} \tag{B.97}$$

Componente ij

Evaluación del término $g^{ik}\nabla_i\nabla_k\bar{F}$

$$\begin{aligned} g^{ik}\nabla_i\nabla_k\bar{F} &= a^{-2}\delta^{ik}\partial_k\partial_j\bar{F} - \Gamma_{kj}^0\partial_0\bar{F}, \\ g^{ik}\nabla_i\nabla_k\bar{F} &= -a^{-2}\delta^{ik}(a\dot{a})\delta_{kj}\partial_0\bar{F}, \\ g^{ik}\nabla_i\nabla_k\bar{F} &= -H\dot{\bar{F}}\delta_j^i, \end{aligned} \tag{B.98}$$

insertando (B.95 y (B.98) en

$$\bar{F}G_j^i = T_j^i + \frac{1}{2}\delta_j^i(\bar{f} - \bar{F}R) + g^{i\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j\bar{F} - \delta_j^i\Box\bar{F}. \tag{B.99}$$

se obtiene

$$\boxed{-(2\dot{H} + 3H^2)\bar{F}\delta_j^i = \kappa\bar{p}\delta_j^i + \frac{1}{2}\delta_j^i(\bar{f} - \bar{F}R) + \ddot{\bar{F}}\delta_j^i + 2H\dot{\bar{F}}\delta_j^i} \tag{B.100}$$

en donde sumando (B.100) y (B.97 se obtiene

$$\boxed{-2F\dot{H} = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa(\bar{\rho} + \bar{p})} \tag{B.101}$$

Conclusiones

- En el capítulo 1 se describe el modelo cosmológico estándar determinado por las condiciones de isotropía y homogeneidad dados por el universo FLRW, y se describe el modelo ΛCDM el cual es el modelo cosmológico aceptado actualmente, con lo cual se sientan las bases para proceder a estudiar un modelo más realista del Universo.

- En el capítulo 2, se modela el 'universo real' como una perturbación a primer orden en teoría de perturbaciones comológicas, alrededor del universo de fondo FLRW, en donde se usa la calibración Newtoniana para un fluido no perfecto, el cual tiene como resultado fundamental la inclusión de las anisotropías de la materia, asociadas a los neutrinos masivos y otras contribuciones como los campos magnéticos que no se están tomando en cuenta en este trabajo. En este mismo sentido se construye la metodología para desarrollar la extensión de las ecuaciones de campo perturbadas a primer orden en teoría $f(R)$.

- En el capítulo 3 se determinaron las ecuaciones de evolución de las ecuaciones de campo en $f(R)$ en el formalismo métrico, perturbadas a primer orden para un fluido no perfecto en métrica FLWR bajo la calibración Newtoniana, las cuales estan corroboradas con la literatura [24]. En el desarrollo surge de forma directa una contribución a la ecuación de anisotropía (2.31) [61], determinada por la relación $\delta F/F$, el cual es un término independiente de la materia y es de naturaleza geométrica y constituye el objetivo principal en este trabajo. En esta dirección cabe hacer las preguntas: ¿Cómo diferenciar las anisotropías producidas por neutrinos masivos de las anisotropías producidas por $f(R)$?. ¿Cómo se rompe el degeneramiento de entre las anisotropias?. Posteriormente, se describen los modelos en parametrizaciones post-Friedmannianas que ofrecen un camino para cuantificar las desviaciones de Relatividad General mediante parámetros escalares Σ, μ, η que se construyen de forma fenomenológica ó como consecuencia de datos observacionales. Finalmente se describen de forma general, los parámetros Σ, μ, η para $f(R)$ perturbada a primer orden en el espacio de configuraciones, en donde se encuentra que, de forma directa se construyen parametrizaciones similares (en forma) a las desarrolladas en PPF, pero que en este caso están asociadas directamente a las derivadas de $f(R)$ como se observa en las ecuaciones (3.52) y (3.57),las cuales a pesar de estar sujetas a la calibración Newtoniana no representan una pérdida de generalidad en tanto que siempre es posible hacer una tranformación de calibración a otros modelos, con la cual se establece una vía mediante la cual se puede caracterizar $f(R)$ de forma completamente general en perturbaciones de primer orden.

Lo anterior, abre un campo de posibilidades sin restricción al universo temprano y permite la generación de pruebas usando las bases de datos actuales como *Euclid* y por medio de la utilización de sistemas computacionales númericos como FRCAMB y simbólicos como *Mathematica*© , queda habilitada la posibilidad de construir modelos en $f(R)$ fundamentados en la caracterización de los parámetros Σ, μ, η, así como la posibilidad de elaborar simulaciones de N-cuerpos en $f(R)$. El trabajo desarrollado en este tipo de teorías muestra posibilidades para evaluar y cuantificar desde otra perspectiva el paradigma planteado por el modelo ΛCDM, hecho que se ha venido desarrollando dentro del grupo de gravitación y cosmología, en donde el presente trabajo es consecuecia de avanzar en esta dirección.

- En el capítulo 4 se describen los códigos CAMB y FRCAMB, mediante los cuales se cuantifican las anisotropías de la radiación cósmica de fondo, donde para el paquete CAMB se usa el modelo ΛCDM y para FRCAMB se usa un modelo $f(R)$ donde la función $f(R)$ se construye con el fin de hacer la mímica del comportamiento en el modelo ΛCDM por medio de un parámetro D (4.9). Se hace una comparación mediante las gráficas de los espectros de potencia de la temperatura y de materia. El uso de herramientas computacionales es el siguiente paso a seguir en el grupo de Gravitación y Cosmología ya que se han sentado las bases para avanzar en esa dirección en trabajos anteriores [19] [5] [51].

Bibliografía

[1] http://www.darkenergysurvey.org/.

[2] http://www.lsst.org.

[3] http://www.ias.u-psud.fr/imEuclid/modules/content/.

[4] Buchdahl H. A., *Non-linear Lagrangians and cosmological theory*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **150** ((1970)), 1–8.

[5] Guarnizo A., *Modelos cosmologicos en teorías f(r)*, 2011.

[6] B. P. Abbott et al., *Tests of general relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016), no. 22, 221101.

[7] P. A. R. Ade et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **594** (2016), A13.

[8] Luca Amendola, Martin Kunz, and Domenico Sapone, *Measuring the dark side (with weak lensing)*, JCAP **0804** (2008), 013.

[9] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa, *Dark energy*, Cambridge University Press, 2010.

[10] David H. Lyth Andrew R. Liddle, *Cosmological inflation and large-scale structure*, 1st ed., Cambridge University Press, 2000.

[11] Lewis Antony, *Geometric algebra and covariant methods in physics and cosmology*, 2000.

[12] Tessa Baker, Pedro G. Ferreira, Constantinos Skordis, and Joe Zuntz, *Towards a fully consistent parametrization of modified gravity*, Phys. Rev. D **84** (2011), 124018.

[13] James M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22** (1980), 1882–1905.

[14] N H Barth, *The fourth-order gravitational action for manifolds with boundaries*, Classical and Quantum Gravity **2** (1985), no. 4, 497.

[15] R. Bean, D. Bernat, L. Pogosian, A. Silvestri, and M. Trodden, *Dynamics of linear perturbations in f(R) gravity*, **75** (2007), no. 6, 064020.

[16] R. Bean and M. Tangmatitham, *Current constraints on the cosmic growth history*, **81** (2010), no. 8, 083534.

[17] Edmund Bertschinger and Phillip Zukin, *Distinguishing Modified Gravity from Dark Energy*, Phys. Rev. **D78** (2008), 024015.

[18] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124** (1961), 925–935.

[19] Peralta C., *Implicaciones cosmológicas del colapso gravitacional en teorías f(r)*, 2014.

[20] Salvatore Capozziello and Valerio Faraoni, *Beyond einstein gravity: A survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics (fundamental theories of physics)*, Springer, 2010.

[21] Salvatore Capozziello and Mauro Francaviglia, *Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, Gen. Rel. Grav. **40** (2008), 357–420.

[22] Salvatore Capozziello, S. J. Gionti, Gabriele, and Daniele Vernieri, *String duality transformations in $f(R)$ gravity from Noether symmetry approach*, JCAP **1601** (2016), 015.

[23] V. F. Cardone, S. Camera, R. Mainini, A. Romano, A. Diaferio, R. Maoli, and R. Scaramella, *Weak lensing peak count as a probe of f(R) theories*, **430** (2013), 2896–2909.

[24] Adam J. Christopherson, *Relating metric and covariant perturbation theories in $f(r)$ gravity*, arxiv: 1604.03973 (2016).

[25] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rept. **513** (2012), 1–189.

[26] Scott Dodelson, *Modern cosmology*, Academic Press, 2003.

[27] J. N. Dossett, J. Moldenhauer, and M. Ishak, *Figures of merit and constraints from testing general relativity using the latest cosmological data sets including refined COSMOS 3D weak lensing*, **84** (2011), no. 2, 023012.

[28] Ruth Durrer, *The cosmic microwave background*, Cambridge University Press, 2008.

[29] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space*, Physics Letters B **485** (2000), 208–214.

[30] Maartens R. McCallum M. Ellis G., *Relativistic cosmology*, Cambridge University Press, 2012.

[31] M. Feix, C. Fedeli, and M. Bartelmann, *Asymmetric Gravitational Lenses in TeVeS and Application to the Bullet Cluster*, Astron. Astrophys. (2007), [Astron. Astrophys.480,313(2008)].

[32] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa, *f(r) theories*, Living Reviews in Relativity **13** (2010), no. 3.

[33] J. P. Morais GraÃ§a and V. B. Bezerra, *Remarks about the correspondence between f(R) and BransâDicke gravity theories*, Mod. Phys. Lett. **A30** (2015), no. 30, 1550156.

[34] Wmap Science Working Group, *Wmap nine-year explanatory suplement)*, Preussische Akademie der Wissenschaften, 844â847, 2012.

[35] Alejandro Guarnizo, Leonardo Castaneda, and Juan M. Tejeiro, *Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism*, Gen. Rel. Grav. **42** (2010), 2713–2728.

[36] Jun-Qi Guo, *Solar system tests of f(R) gravity*, Int. J. Mod. Phys. **D23** (2014), no. 4, 1450036.

[37] Alan H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23** (1981), 347–356.

[38] J.-h. He, *Testing f(R) dark energy model with the large scale structure*, **86** (2012), no. 10, 103505.

[39] J.-h. He and B. Wang, *Revisiting f(R) gravity models that reproduce ΛCDM expansion*, **87** (2013), no. 2, 023508.

[40] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright, *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, **208** (2013), 19.

[41] Bin Hu, Michele Liguori, Nicola Bartolo, and Sabino Matarrese, *Parametrized modified gravity constraints after Planck*, Phys. Rev. **D88** (2013), no. 12, 123514.

[42] Wayne Hu, *Intermediate guide to the acoustic peaks and polarization*, http://background.uchicago.edu/ whu/intermediate/intermediate.html, 2001.

[43] Suonio H. K, *Cosmological perturbation theory*, Helsinki University, 2010.

[44] Hideo Kodama and Misao Sasaki, *Cosmological perturbation theory*, Progress of Theoretical Physics Supplement **78** (1984), 1–166.

[45] Edward Kolb and Michael Turner, *The early universe (frontiers in physics)*, Westview Press, 1994.

[46] Andrew Liddle, *An introduction to modern cosmology*, Wiley, 2003.

[47] David Lovelock, *The einstein tensor and its generalizations*, Journal of Mathematical Physics **12** (1971), no. 3.

[48] Tejeiro J. M., *Principios de relatividad general*, Notas de clase, Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[49] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger, *Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges*, Astrophys. J. **455** (1995), 7–25.

[50] Karim A. Malik and David Wands, *Cosmological perturbations*, Phys. Rept. **475** (2009), 1–51.

[51] Daniel Molano, *Teoría de perturbaciones cosmológicas en teorías de gravedad modificada f(r)*, 2015.

[52] Viatcheslav F. Mukhanov, H. A. Feldman, and Robert H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rept. **215** (1992), 203–333.

[53] Hungston L. P. and Tod K. P., *An introduction to general relativity*, Cambridge university press, 1990.

[54] Fre Pietro, *A course in general relativity*, Universidad de Torino, 2003.

[55] Ruiz-Lapuente Pilar, *Dark energy: Observational and theoretical approaches*, Cambridge University Press, 2014.

[56] Peebles P.J.E, *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, 1993.

[57] L. Pogosian, A. Silvestri, K. Koyama, and G.-B. Zhao, *How to optimally parametrize deviations from general relativity in the evolution of cosmological perturbations*, **81** (2010), no. 10, 104023.

[58] Durrer R., *The theory of cmb anisotropies*, Geneva Université, 2003.

[59] Adam G. Riess et al., *A 2.4 % Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, Astrophys. J. **826** (2016), no. 1, 56.

[60] Carroll S., *Spacetime and geometry introduction to general relativity*, Adisson Wesley, 2004.

[61] Ippocratis D. Saltas and Martin Kunz, *Anisotropic stress and stability in modified gravity models*, Phys. Rev. **D83** (2011), 064042.

[62] Martina Schwind, *Introduction into camb*, http://camb.info/, 2014.

[63] Alessandra Silvestri and Mark Trodden, *Approaches to understanding cosmic acceleration*, Reports on Progress in Physics **72** (2009), no. 9, 096901.

[64] Constantinos Skordis, *Teves cosmology : covariant formalism for the background evolution and linear perturbation theory*, Phys. Rev. **D74** (2006), 103513.

[65] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, E. L. Wright, J. Aymon, N. W. Boggess, E. S. Cheng, G. de Amici, S. Gulkis, M. G. Hauser, G. Hinshaw, P. D. Jackson, M. Janssen, E. Kaita, T. Kelsall, P. Keegstra, C. Lineweaver, K. Loewenstein, P. Lubin, J. Mather, S. S. Meyer, S. H. Moseley, T. Murdock, L. Rokke, R. F. Silverberg, L. Tenorio, R. Weiss, and D. T. Wilkinson, *Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps*, **396** (1992), L1–L5.

[66] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni, $f(r)$ *theories of gravity*, Rev. Mod. Phys. **82** (2010), 451–497.

[67] A.A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Physics Letters B **91** (1980), no. 1, 99–102.

[68] J. M. Stewart and M. Walker, *Perturbations of space-times in general relativity*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **341** (1974), no. 1624, 49–74.

[69] Michael S. Turner, *Cosmological parameters*, (1998), 113–128, [AIP Conf. Proc.478,113(1999)].

[70] Slava G. Turyshev, *Experimental Tests of General Relativity*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **58** (2008), 207–248.

[71] Jean-Philippe Uzan, *The acceleration of the universe and the physics behind it*, Gen. Rel. Grav. **39** (2007), 307–342.

[72] Jean-Philippe Uzan and Francis Bernardeau, *Lensing at cosmological scales: A test of higher dimensional gravity*, Phys. Rev. D **64** (2001), 083004.

[73] Weyl, *Space-time-matter*, Methuen Co, 1922.

[74] Lixin Xu, *FRCAMB: An $f(R)$ Code for Anisotropies in the Microwave Background*, (2015).

[75] Pengjie Zhang, Michele Liguori, Rachel Bean, and Scott Dodelson, *Probing Gravity at Cosmological Scales by Measurements which Test the Relationship between Gravitational Lensing and Matter Overdensity*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007), 141302.

[76] Gong-Bo Zhao, Levon Pogosian, Alessandra Silvestri, and Joel Zylberberg, *Searching for modified growth patterns with tomographic surveys*, Phys. Rev. **D79** (2009), 083513.